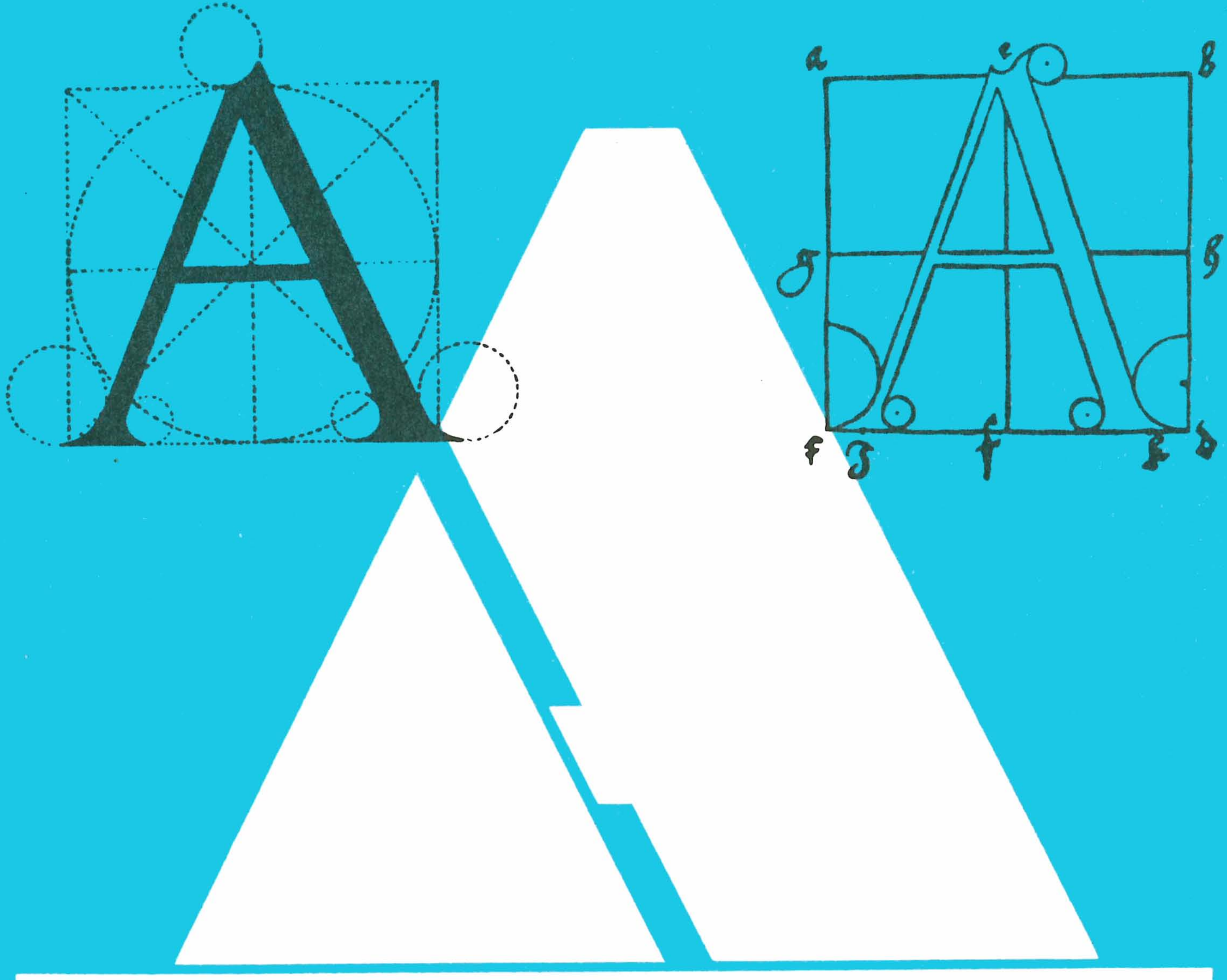
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Verlag GmbH Berlin
25. Jahrgang 1991
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

2

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 129, Leipzig, 7010
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur);
Redaktionskollegium:
StR Friedrich Arnet (Kleingeschaidt); Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Chemnitz); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich

Abonnement über
Friedrich Verlag, Vertrieb
Postfach 10 01 50
W-3016 Seelze

Fotos: Fachbuchverlag Leipzig (S. 42)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck: Interdruck Leipzig GmbH
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 12. März 1991
Auslieferungstermin: 12. April 1991

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

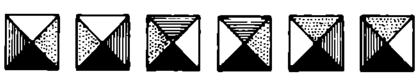
Ein Vierfarbenspiel

Ein Quadrat werde durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt. Diese werden mit unterschiedlichen Farben (etwa Gelb, Grün, Rot, Weiß) ausgemalt. Wir können hier leider keine Farben verwenden, deshalb kennzeichnen wir die unterschiedliche Färbung so:

Bild 1 

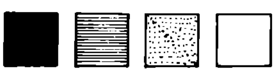
Ihr erkennt: Es gibt 6 verschiedene Färbungen eines derartig unterteilten Quadrates. Wir erhalten somit genau 6 verschiedene (ebene) Bausteine, die mit Großbuchstaben *A*, *B*, ..., *F* bezeichnet werden:

Bild 2



A *B* *C* *D* *E* *F*

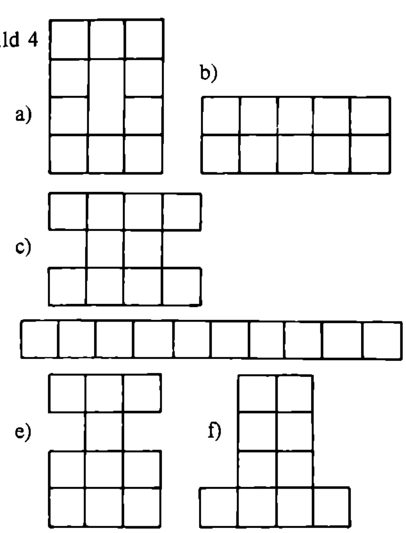
Außerdem sollen 4 einfarbige Quadrate (gelb, grün, rot bzw. weiß) vorhanden sein. Wir kennzeichnen diese Bausteine mit den Buchstaben *G*, *H*, *I*, *J*:

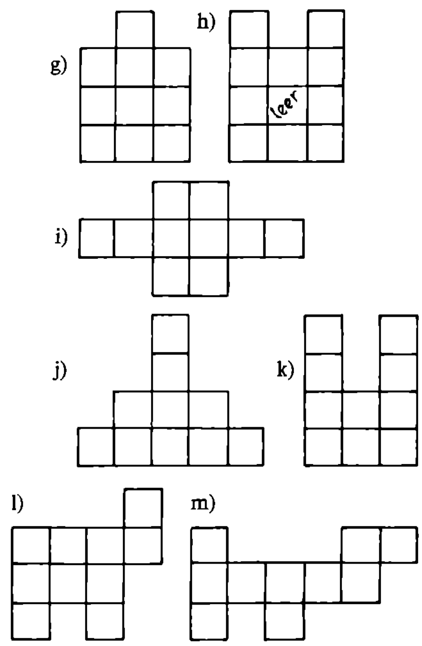
Bild 3 

G *H* *I* *J*

Versucht nun, mit den 10 gefärbten Quadraten *A*, ..., *J* ebene Figuren auszulegen. Dabei wollen wir jedoch eine Bedingung stellen: Zwei Quadrate dürfen sich nur mit Seiten (von Dreiecken) gleicher Farbe berühren! Hier haben wir einige Figuren aufgezeichnet, die Ihr bei Beachtung der Anlegeregel zusammenbauen sollt.

Bild 4



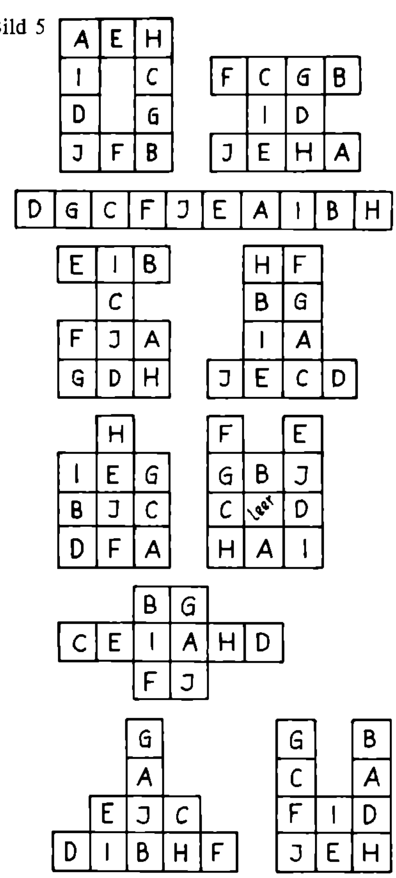


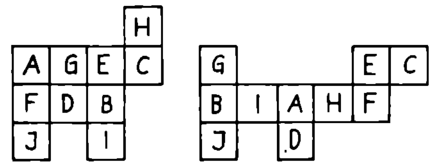
Zwölf Aufgaben werden Euch keine Mühe bereiten, bei einer Figur gibt es jedoch keine Lösung.
Übrigens, wenn Ihr die zehn Quadrate (Bausteine aus Pappe, dünner Plaste oder aus Sperrholz anfertigt, erhaltet Ihr ein originelles Geschenk. Wir empfehlen, dazu zehn Quadrate mit der Seitenlänge von je 2 cm herzustellen. Und nun viel Spaß!

W. Schmidt

Lösung

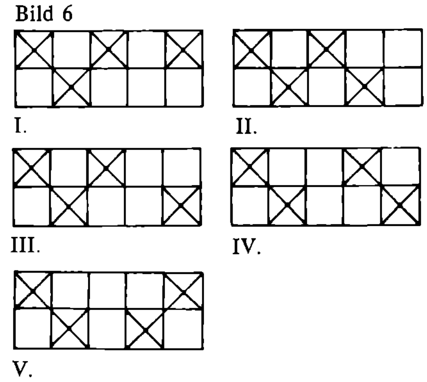
Bild 5





Wir wollen zeigen, daß die Figur b) in der gewünschten Weise nicht gelegt werden kann. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig. Aus Symmetriegründen gibt es nur fünf Klassen von Möglichkeiten, wie die einfarbigen Steine *G*, *H*, *I*, *J* angeordnet sein können. Dabei sollen die konkreten Farben nicht beachtet werden, weil ja alle Einfarbensteine und alle möglichen Vierfarbensteine genau einmal vorkommen:

Bild 6



Zur Diskussion der fünf Fälle numerieren wir die 10 Quadrate des Rechtecks b) in folgender Weise:

Bild 7

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Angenommen, es gibt eine Lösung.
Fall I. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die einfarbigen Steine so gesetzt: *G*-1, *H*-7, *J*-3 und *I*-5. Weil sich nur gleichgefärbte Seiten berühren dürfen, folgt zwangsläufig *B*-2, *C*-8 und *D*-4. Dann kann abcr das Quadrat 9 nicht mehr belegt werden, was unserer Annahme widerspricht.
Fall II. Ohne Einschränkung des allgemeinen Falles seien die einfarbigen Steine so gesetzt: *G*-1, *H*-7, *J*-3 und *I*-9. Dann muß *B*-2, *A*-8 und *F*-4 sein. Das Feld 6 kann nicht mehr belegt werden.
Widerspruch.
Fall III. Wenn *G*-1, *J*-3, *H*-7, *I*-10 ist, so folgt *B*-2, *C*-8, *F*-9, *A*-4, *D*-5. Aber *E* paßt nicht auf Feld 6. Widerspruch.
Fall IV. Wenn *G*-1, *H*-7, *J*-4 und *I*-10 ist, so muß automatisch *E*-9, *D*-8 und *A*-3 sein. Das Feld 2 kann dann nicht mehr belegt werden.
Fall V. Angenommen, *G*-1, *I*-5, *H*-7 und *J*-9 gehört zu einer Lösung. Feld 8 soll nun belegt werden. Wäre *E*-8, so ergäbe sich *B*-2, *A*-10 und *D*-3. Das Quadrat 4 kann nicht belegt werden, also kann *E*-8 nicht gelten. Daher muß *F*-8 gesetzt werden, was sofort *B*-2 nach sich zieht. Mit den verbliebenen Steinen kann jedoch Feld 3 nicht mehr gefüllt werden. Das bedeutet, auch der Fall V kann nicht eintreten!
Mithin ist die Figur b) nicht zu legen.

Von der Schulbank zur Internationalen Mathematik-Olympiade

Oberwolfach ist ein schöner, reizvoll gelegener Kurort im Schwarzwald. Königstein ist ein schöner, reizvoll gelegener Kurort im Taunus. Neben den landschaftlichen Vorzügen haben beide Orte noch eine andere Gemeinsamkeit: sie sind eng mit den Erfolgen der bundesdeutschen Schüler bei der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) verbunden.

Seit 1959 gibt es diesen mathematischen Schülerwettbewerb, und seit 1977 nahm die Bundesrepublik ohne Unterbrechung daran teil (die ehemalige DDR war schon im ersten Austragungsjahr dabei).

Zwar ist die IMO ein Einzelwettbewerb, aber die inoffizielle Gesamtpunktzahl erlaubt eine Rangfolge der Teilnehmerländer. Tabelle 1 zeigt das gute, teilweise hervorragende Abschneiden der bundesdeutschen Schüler im internationalen Vergleich. (Dem *alpha*-Leser sind die Zahlen für die DDR sicher bekannt.)

Normalerweise erleben neu teilnehmende Länder eine unangenehme Überraschung: ihre Schüler landen zunächst auf den hinteren Plätzen. Erst nach mehreren Jahren ist der Anschluß an den Durchschnitt hergestellt. Wir bewegten uns von Anfang an in der Spitzengruppe. Gerne haben Bildungspolitiker verschiedener Bundesländer die schönen Erfolge „ihrer“ Schüler als Zeichen für die Wirksamkeit und Qualität ihres jeweiligen Schulsystems beansprucht. Doch zu gleichmäßig verteilt sich die Herkunft erfolgreicher Olympioniken auf die von unterschiedlicher politischer Couleur geprägten Länder, als daß sich hier ein Zusammenhang ableiten ließe. Außerdem gibt es bei der IMO Teilnehmerstaaten mit vergleichbarem Bildungssystem, aber höchst verschiedenem Erfolgsprofil ebenso wie Länder mit völlig anderen schulischen Voraussetzungen, dafür aber über Jahre hinweg vergleichbaren Leistungen ihrer Teilnehmer. Will man Aussagen über Ursachen der guten Ergebnisse deutscher Schüler treffen, so muß man den Weg der Teilnehmer von der Schule bis zur IMO beleuchten.

Die IMO ist ein Klausurwettbewerb. An zwei aufeinanderfolgenden Tagen müssen die Teilnehmer je drei Aufgaben in viereinhalbstündiger Klausur ohne Hilfsmittel wie etwa Taschenrechner oder Formelsammlung bearbeiten. Dabei begegnen ihnen Probleme wie das folgende (mit dem unsere Schüler übrigens gar nicht gut zurechtgekommen sind):

Aufgabe 4 der XXXI. IMO 1990

Es sei Q^+ die Menge aller positiven rationalen Zahlen. Man gebe eine Funktion f: $Q^+ \to Q^+$ an, so daß für alle $x, y \in Q^+$ die Gleichung

$$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y} \text{ gilt.}$$

Mit solchen Aufgaben haben selbst gestandene Mathematiker ihre Schwierigkeiten, insbesondere unter Zeitdruck und mit weiteren zwei Aufgaben des gleichen oder eines noch höheren Kalibers im Nacken. Zwar wird seit jeher darauf geachtet, daß die IMO als Schülerwettbewerb sich auch wirklich nur auf die sogenannte „Schulmathematik“ stützt, aber weder findet man Aufgaben wie diese jemals in einem Schulbuch, noch kann man billigerweise selbst von sehr guten Schülern erwarten, daß sie solche Probleme in einer Klausur lösen können. Daher hat die Bundesrepublik in Anlehnung an die Praxis anderer Länder mit der Entscheidung für die Teilnahme an der IMO gleichzeitig eine Förderung für die in Frage kommenden Schüler eingerichtet, die seit 1977 in fast unveränderter Form praktiziert wird.

Zunächst muß man einen Kreis von förderungswürdigen Begabten kennen. Förderung ist also im Hinblick auf die IMO untrennbar mit Auswahl verbunden. Die Teilnehmer für die Vorbereitung auf die IMO kommen vom Bundeswettbewerb Mathematik, der allen Schülern der zur Hochschulreife führenden Schulen offensteht. Andere Quellen, wie etwa der Wettbewerb „Jugend forscht“, haben sich als nicht sehr ergiebig erwiesen. Die etwa 100 Besten der 2. Runde des Bundeswettbewerbs werden zu zwei Auswahlklausuren eingeladen. Die 18 erfolgreichsten Klausurschreiber qualifizieren sich zu mehreren Trainingswochenenden, die regelmäßig im Frühjahr in Königstein stattfinden. (Seit 1989 allerdings mußten wir nach Frankfurt a. M. ausweichen.) Neben der inhaltlichen Vorbereitung, über die im folgenden noch mehr zu lesen sein wird, stehen jedesmal auch weitere Klausuren auf dem Programm. Immerhin haben die Teilnehmer am Bundeswettbewerb die gestellten Probleme in beiden Runden zu Hause lösen können und müssen nun allmählich auf die Klausuren bei der IMO eingestellt werden. Man könnte es auch etwas härter sagen: Die Teilnehmer, die sich in den Klausuren als besonders erfolgreich erweisen, qualifizieren sich gegenüber ihren Mitkonkurrenten, deren mathematische Hochbegabung sich vielleicht nicht so sehr in Schnelligkeit und Streßtoleranz äußert.

Deshalb ist es gut, daß die gesamte IMO-Vorbereitung – es folgt noch ein Abschlußseminar in Oberwolfach von einwöchiger Dauer – vor allem unter dem Gesichtspunkt der Talentförderung betrieben wird. Auch die Teilnehmer, die sich am Ende nicht für die Mannschaft qualifizieren, nehmen Anregungen in Fülle mit und erleben die Mathematik auf einem Niveau, das ihnen zwar angemessen ist, von der Schule aber so nicht vermittelt werden kann.

Die Vorbereitungsseminare enthalten neben den bereits erwähnten Klausuren insbesondere Vorträge zu verschiedenen mathematischen Themen. Dabei liegen Schwerpunkte bei Zahlentheorie, Geometrie und Kombinatorik/Stochastik. Weitere Gebiete sind Ungleichungen, Gleichungen und Gleichungssysteme, Trigonometrie, Polynome, Funktionalgleichungen, Algorithmen, Folgen und Reihen. Dagegen fehlt weitgehend eine intensive Behandlung der Analysis. Der Grund dafür ist, daß Aufgaben aus der Analysis bei der IMO fast keine Rolle spielen, weil dieses Gebiet in vielen Ländern nicht zum Unterrichtsstoff der Sekundarstufe gehört. Das Vorkommen von Methoden aus der Analysis ist damit nicht ausgeschlossen.

Wir betrachten folgende Aufgabe:

Man beweise: Auf einer stetigen, geschlossenen, sich nicht überschneidenden Linie L im Raum gibt es stets vier Punkte, die den Umfang von L in vier gleiche Teile teilen und die alle in einer Ebene liegen.

Zur Lösung wähle man zunächst irgendwelche vier Punkte A, B, C und D, die L in vier gleich lange Teilstücke zerlegen. Der Tetraeder $ABCD$ habe ein von Null verschiedenes orientiertes Volumen (die Orientierung ergibt sich z. B. aus dem Drehsinn des Dreiecks ABC und der Lage von D zur so orientierten Ebene (ABC)). Läßt man nun die Punkte synchron um jeweils eine Viertellänge von L weiterwandern, so ist der ursprüngliche Tetraeder in einen zu ihm kongruenten Tetraeder mit also gleichem Volumen übergeführt worden. Allerdings hat dieses Volumen entgegengesetztes Vorzeichen, denn die Orientierung ist jetzt entgegengesetzt. Da das Volumen eine stetige Funktion der Eckpunktskoordinaten ist, und da diese Koordinaten sich bei dem Umlauf der Punkte stetig ändern, gibt es nach dem Zwischenwertsatz der Analysis eine Lage der Punkte, in welcher das Vorzeichen wechselt und der zugehörige Tetraeder das Volumen Null besitzt. Dort müssen aber die vier Punkte in einer Ebene liegen.

Die Themenliste wäre unvollständig, würde man nicht die Methoden des Problemlösens erwähnen, die wir ebenfalls recht gründlich trainieren. Darunter fällt etwa das Schubfachprinzip, die Methode des Unendlichen Abstiegs, Vollständige Induktion, das Auswahlprinzip, Rückwärtsarbeiten und das Invarianzprinzip. Sämtliche mathematischen Gebiete, und diese Strategien werden nicht in Form von Vorlesungen, sondern im Seminarstil mit Übungscharakter angeboten. Die Schüler beteiligen sich spontan, lösen Aufgaben oder diskutieren verschiedene Zugänge zu einem Problem.

Leider sind bei uns von Anfang an die Mädchen kraß in der Minderheit. In 13 Jahren haben sich insgesamt erst fünf Schülerinnen für die Vorbereitung qualifiziert; den Sprung in die IMO-Mannschaft hat noch keine geschafft! In vielen anderen Ländern ist es nicht besser, wenn auch bei der letztjährigen IMO eine 14jährige Schülerin aus der UdSSR mit voller Punktzahl eine Goldmedaille erringen konnte.

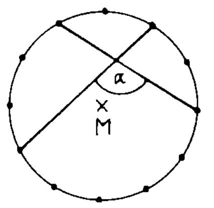
Die oben genannten Gebiete, welche in der Vorbereitung trainiert werden, beschreiben die zentralen Themen des Schulstoffs bis weit in die Oberstufe hinein. (Sollten Sie dabei Bruchrechnung, Dreisatz oder gar die „Mengenlehre" vermissen, so liegt das daran, daß solche Grundlagen nicht weiter erwähnt werden.) Oft reicht jedoch der Schulstoff bei weitem nicht aus, den Olympiadeteilnehmern das nötige Gerüst für die Bewältigung der Wettbewerbsaufgaben zu geben. Die Lehrpläne in den einzelnen Bundesländern unterscheiden sich zwar im Kern nicht sehr, lassen aber stellenweise Differenzierungen und Wahlmöglichkeiten zu und sind in der Tat – um ein altes Vorurteil zu bestätigen – gegenüber früheren Jahrzehnten kräftig abgespeckt worden. Was daher die Vorbereitung für die IMO leisten muß, soll nun an einigen Beispielen illustriert werden.

I. Geometrie

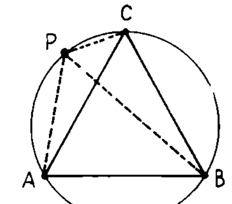
In der Schule kommt praktisch keine Raumgeometrie vor. Hier holt die Vorbereitung sehr viel nach, insbesondere bei der Untersuchung von Tetraedern. Aber auch Abbildungsgeometrie wird vertieft und als Beweismittel nutzbar gemacht. Analytische Geometrie spielt aus ähnlichen Gründen wie die Analysis kaum eine Rolle; dafür lernen die Schüler beim Training jedoch das Rechnen mit Vektoren und komplexen Zahlen und können diese Fertigkeit bei manchen Aufgaben gut einsetzen.

Daneben gibt es aber noch die „gewöhnliche" Schulgeometrie. Wir kennen die mit ihr verbundenen Begriffe: Pythagoras, Thaleskreis, Kongruenzsätze, Strahlensätze – um nur eine kleine Auswahl zu nennen. Es wäre natürlich schön, wenn man deren Inhalte genauso bedingungslos voraussetzen könnte wie Bruchrechnung oder Dreisatz, aber leider sieht es oft gerade auf dem Gebiet der Geometrie mit dem Schülerwissen schlimm aus – selbst bei unseren mathematisch Interessierten. Da bei Zeitmangel oder Stundenkürzung zuerst an der Geometrie gespart wird, entsteht ein Mangel, der deutlich wird, wenn wir eine typische schwere Schulaufgabe mit einer typischen leichten Wettbewerbsaufgabe vergleichen, beide zum Thema „Umfangswinkel".

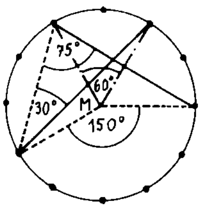
1. Ein Kreis ist – wie das Ziffernblatt einer Uhr – in 12 gleiche Teile unterteilt. Berechne den Winkel α zwischen den eingezeichneten Sehnen.

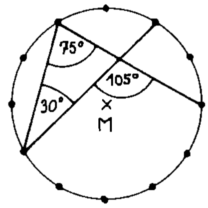


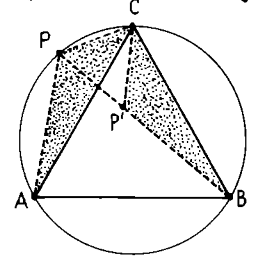
2. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ein Punkt P auf seinem Umkreis wird mit den Ecken A, B und C verbunden. Zeige, daß eine der Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ oder $\overline{PC}$ gleich der Summe der beiden anderen ist.



Während man zur Lösung der 1. Aufgabe lediglich eine zwangsläufig sich aufdrängende Reihe geeigneter Umfangs- und Mittelpunktswinkel zu betrachten hat (linke Figuren unten), bedarf es bei der 2. Aufgabe einer komplexeren Überlegung (rechte Figur unten).







Man dreht am besten um C mit dem Drehwinkel 60° und stellt fest, daß A dabei in B und P in einen Punkt P' übergeht, der auf PB liegen muß, weil nämlich die Umfangswinkel über der Sehne $\overline{PC}$ bei A und B gleich sind. (Die Dreiecke ACP und BCP' müssen ja kongruent sein, weil sie durch Drehung ineinander übergehen.) Weil aber CPP' gleichseitig ist (60°-Winkel bei C und gleiche Länge von $\overline{CP}$ bzw. $\overline{CP'}$), gilt

$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{P'B} + \overline{PP'} = \overline{PB}.$$

Diese Aufgaben zeigen den üblichen Unterschied zwischen Schul- und Wettbewerbsaufgaben: bei den letzteren weiß man zunächst oft gar nicht, welche Hilfsmittel für den Beweis verwendet werden können und in der Regel muß man mehrere solcher Sätze oder Eigenschaften miteinander kombinieren, wobei durch psychologische Hürden das Erkennen der erfolgversprechenden Möglichkeiten häufig blockiert wird. Daher reicht selbst das vollständige Aufgabenmaterial aus Schulbüchern noch nicht aus, um einen guten Problemlöser zu formen. Aber die Lehrplaninhalte selbst sind lückenhaft. Den Satz des Ptolemäus, die Inversion am Kreis, den Satz von Morley, die Formel von Pick und viele andere wichtige oder schöne Dinge aus der Geometrie lernen die Schüler erst im Training kennen. Dies ist nicht auf die Geometrie beschränkt.

II. Kombinatorik

Dieses Gebiet taucht im Schulunterricht nicht eigenständig wie Algebra oder Geometrie auf, sondern es wird – vor allem im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung – mehr oder weniger intensiv betrieben. Die Schüler können bestenfalls Anzahlen von Kombinationen, Permutationen oder Teilmengen bestimmen und kennen aus der Jahrgangsstufe 12 vielleicht noch die Binomialkoeffizienten. Dort machen Aufgaben wie die nächste große Mühe, während die übernächste zu den eher leichten Trainingsaufgaben gehört.

1. Aus einer Urne, in der sich n gleichartige Kugeln mit den Nummern 1, 2, ..., n befinden, werden zufällig k Kugeln gleichzeitig herausgegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die größte gezogene Zahl kleiner oder gleich i ist ($i = k, k+1, \ldots, n$).

2. Ein reguläres $(2n+1)$-Eck ist einem Kreis einbeschrieben. Drei Ecken werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das entstehende Dreieck den Mittelpunkt des Umkreises enthält?

Beide Berechnungen seien dem Leser überlassen, der unter der Laplace-Annahme ja nur die Anzahl der günstigen durch die Anzahl aller möglichen Fälle zu dividieren braucht. Als Hinweis die Antworten: bei 1. ergibt sich

$$[i!(n-k)!] : [n!(i-k)!]$$

und bei 2. $(n+1) : 2(2n-1)$.

Dem einfacheren Ergebnis steht bei der letzten Aufgabe der weit schwierigere Zugang entgegen, genau wie in den Beispielen aus der Geometrie.

III. Zahlentheorie

Ähnlich wie die Kombinatorik taucht dieses Gebiet nur gelegentlich und ohne eigene Nennung im Schulunterricht auf. Oft ist die Teilbarkeitslehre am Ende von Klasse 5 oder kurz darauf der einzige Ort bewußter Auseinandersetzung mit zahlentheoretischen Fragen. Selbstverständlich kann daher das Rechnen mit Restklassen, die Kenntnis des kleinen Satzes von Fermat, der Eulerschen φ-Funktion oder gar des Chinesischen Restsatzes von Schülern nicht erwartet werden, denen oft sogar der Euklidische Algorithmus völlig unbekannt ist. Andererseits liefert die Zahlentheorie immer wieder schöne und elementar zu lösende Wettbewerbsaufgaben, wenn man sich bei der Verwendung des Begriffs „elementar" auf etwas mehr als bloß die Teilbarkeitsregeln verständigt. Das folgende Beispiel zeigt, was gemeint ist.

Man bestimme alle Primzahlen p und q, für die $p^q + q^p$ auch eine Primzahl ist.

Zur Lösung – bitte nicht weiterlesen, wenn Sie sich die Freude an der eigenen Lösung nicht nehmen wollen, – stellt man zunächst fest, daß die Summe größer als 2 und daher ungerade sein muß. Dann muß aber genau ein Summand gerade und daher genau eine der Primzahlen – es sei p – gleich 2 sein. Die andere Primzahl q muß größer als 3 sein (ausprobieren!) und läßt daher bei Division durch 6 den Rest 1 oder 5. Ihr Quadrat q^2 läßt dann bei Division durch 3 den Rest 1, während 2^q für ungerades q stets den Rest -1 bei Division durch 3 hat. Die Summe ist also durch 3 teilbar und kann deswegen ihrerseits keine Primzahl sein.

Natürlich bedarf es auch hier wieder der Kunst, zu sehen, welche ganz einfachen, elementaren Beweismittel richtig kombiniert werden müssen. Es ist schön mitzuerleben, wie talentierte Schülerinnen und Schüler aufgrund der Förderung ihrer Begabungen diese Kunst allmählich erlernen und selbständig praktizieren können.

Der Zusammenschluß beider Teile Deutschlands hat in der Zukunft auch für das Olympiadetraining Auswirkungen. Die Förderung muß die Schüler in ihrer Schulsituation abholen, und diese ist im östlichen Teil sicher noch auf Jahre hinaus anders als in der ehemaligen Bundesrepublik. Dazu hat das weitverzweigte und strukturierte Wettbewerbssystem beigetragen, das dort einen Teil der insgesamt recht kurzen Förderung übernommen hatte. So wird bereits 1991 der letzte Teil der IMO-Vorbereitung in Form zweier längerer Seminare gemeinsam abgehalten. Dabei darf man auf den Vergleich nach Herkunft sicher gespannt sein und wird Rückschlüsse für den künftigen Aufbau der Vorbereitung ziehen müssen. Eines wollen wir allerdings vermeiden: das Förderungsangebot darf für die Teilnehmer nicht zur Belastung werden, nur um besonders gute Ergebnisse zu erreichen. Das Abschneiden bei der IMO mag der äußere Ansporn sein, der eigentliche Zweck des Trainings liegt in der Entfaltung der Begabungen, die sich bereits durch vorherige Erfolge gezeigt haben.

Schließlich würde es nur zur Verkrampfung führen, wollte man das immer weiter steigende Niveau und die Professionalisierung des Trainingsbetriebs mancher anderer Länder für die IMO nachahmen.

H. Sewerin

Abschneiden der bundesdeutschen Mannschaft bei der IMO – Anzahl der Teilnehmerländer/ Platz in der Gesamtwertung

1977	20/7.	1985	38/7.
1978	17/6.	1986	37/3.
1979	23/3.	1987	42/2.
1980	(keine IMO)	1988	49/4.
1981	27/2.	1989	50/8.
1982	30/1.	1990	54/12.
1983	32/1.		
1984	34/9.		

Die elf Sternmosaike

Unter einem geometrischen Mosaik (oder Teppich) soll in dieser Abhandlung eine die Ebene völlig ausfüllende Anordnung von regelmäßigen Vielecken verstanden werden. Sie wird als „Sternmosaik“ bezeichnet, wenn sie Seite an Seite und Ecke an Ecke liegen und wenn dabei um jede Ecke herum die gleichen Vielecke in der gleichen zyklischen Folge angeordnet sind. Im folgenden werden die Geradenbüschel an den Ecken „Sterne“ und die zugehörigen Linien „Strahlen“ genannt. Obige Voraussetzungen bedeuten, daß sowohl die zum Mosaik gehörenden regelmäßigen Vielecke gleicher Art als auch deren Sterne untereinander kongruent sein müssen.

Im folgenden wird gezeigt, daß es genau 11 solcher Sternmosaike gibt.

Da die Winkel eines Sternes insgesamt 360° betragen und das kleinste regelmäßige Vieleck, das Dreieck, einen Winkel von 60° hat, kann kein Stern des Mosaiks mehr als 6 Strahlen haben; da kein regelmäßiges Vieleck einen überstumpften Winkel haben kann, muß ein solcher Stern andererseits mindestens 3 Strahlen haben. Wir untersuchen daher im folgenden vier verschiedene Fälle: Sterne mit 3, 4, 5 oder 6 Strahlen, das heißt, mit je drei, vier, fünf oder sechs an einer Ecke zusammenstoßenden regelmäßigen Vielecken.

Aufgabe: Ermittle die Größe des Innenwinkels eines regelmäßigen n-Ecks!

I. Mosaike mit drei regelmäßigen Vielecken

Wir nennen die Seitenzahlen dieser Vielecke n_1, n_2 und n_3 mit $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3$. Die Winkel des von ihren Seiten gebildeten Sterns müssen dann nachstehende Bedingung erfüllen:

$$180° \cdot \left(\frac{n_1-2}{n_1} + \frac{n_2-2}{n_2} + \frac{n_3-2}{n_3}\right) = 360°$$

oder $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$.

a) Für $n_1 = 3$ geht die Gleichung über in: $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}$.

Daher kommen für n_2 nur die Werte von 7 bis 12 in Frage.

b) Für $n_1 = 4$ erhalten wir: $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}$.

Hier hat man also nur zu testen, ob sich für $n_2 = 5$, 6, 7 und 8 ganzzahlige n_3 ergeben.

c) Für $n_1 = 5$ erhält die rechte Seite der Gleichung den Wert $\frac{3}{10}$. Man hat daher hier nur n_3-Werte für $n_2 < \frac{20}{3}$ oder für $n_2 = 5$ und 6 zu suchen.

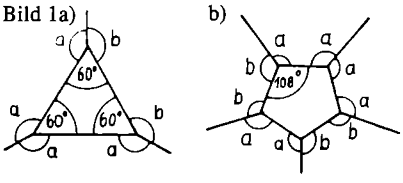
Auf diese Weise finden wir nur die folgenden ganzzahligen Lösungen der Ausgangsgleichung, d. h., daß sich aus drei gleichseitigen Vielecken folgende 10 Sterne bilden lassen:

Nr.	n_1	n_2	n_3
1	3	12	12
2	3	10	15
3	3	9	18
4	3	8	24
5	3	7	42
6	4	8	8
7	4	6	12
8	4	5	20
9	5	5	10
10	6	6	6

Da es sich aber nur um eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für die Existenz eines Sternmosaiks handelt, ist noch zu untersuchen, ob es tatsächlich Mosaike mit diesen Sternen gibt.

Eine kleine Überlegung zeigt nun, daß ein regelmäßiges Vieleck mit ungerader Seitenzahl nicht von zwei anderen regelmäßigen Vielecken mit unterschiedlicher Seitenzahl eingeschlossen werden kann, wenn lauter kongruente Sterne entstehen sollen (siehe Bild 1a für das regelmäßige Dreieck bzw. Bild 1b für das regelmäßige Fünfeck).

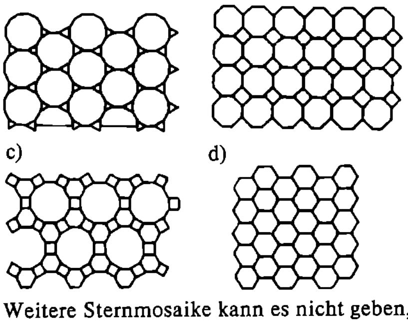
Bild 1a) b)



Die Tabelle weist aber nur ein einziges Dreieck und überhaupt kein Fünfeck in Verbindung mit zwei anderen kongruenten Vielecken aus. Damit scheiden die Sterne 2, 3, 4, 5, 8 und 9 für die Bildung eines Sternmosaiks aus.

Daß die restlichen Sterne 1, 6, 7 und 10 tatsächlich zur Bildung eines Sternmosaiks Anlaß geben, zeigen die Figuren a) bis d) in Bild 2.

Bild 2a) b) c) d)



Weitere Sternmosaike kann es nicht geben, da drei vorgegebene Winkel mit der Summe von 360° – wenn man von Spiegelungen und Drehungen absieht – eben nur auf eine einzige Art kreisförmig zusammengefügt werden können.

II. Mosaike mit vier regelmäßigen Vielecken

Wir bezeichnen wiederum die Seitenzahl der Vielecke mit n_1, n_2, n_3, n_4 mit $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3 \leqq n_4$.
Auf ähnliche Weise wie unter I. erhalten wir jetzt die Gleichung

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1.$$

Die schnell zu findende Ganzzahllösung $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$ lehrt, daß alle übrigen Lösungen $n_1 = 3$ enthalten müssen. So erhalten wir die einfachere Gleichung

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}.$$

Aus der (nichtganzzahligen) Lösung $n_2 = n_3 = n_4 = \frac{9}{2}$ sehen wir, daß n_2 nur die Werte 3 und 4 haben kann.

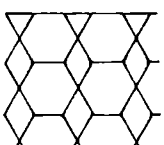
a) Für $n_2 = 3$ erhalten wir $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}$.
Wegen der Lösung $n_3 = n_4 = 6$ haben wir hier nur für $n_3 = 4$ und $n_3 = 5$ nach weiteren Lösungen zu suchen.

b) Für $n_2 = 4$ nimmt die rechte Seite den Wert $\frac{5}{12}$ an. Daher kann hier n_3 $\left(n_3 \geqq 4; \text{„Lösung“ } n_3 = n_4 = \frac{24}{5}\right)$ nur den Wert 4 haben. Somit erhalten wir hier die vier ganzzahligen Lösungen:

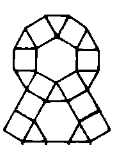
Nr.	n_1	n_2	n_3	n_4
1	3	3	6	6
2	3	3	4	12
3	3	4	4	6
4	4	4	4	4

Man kann die in den Fällen 1 bis 3 paarweise auftretenden Vielecke jeweils entweder einander berührend oder nichtberührend anordnen, also jeweils zwei verschiedene Sterne bilden. Aus Bild 3 ist ersichtlich, daß sich bei Lösung 1 und 3 in einem der beiden Fälle (a bzw. b) und bei Lösung 2 in beiden Fällen (c) und (d) Mosaike mit inkongruenten Sternen bilden.

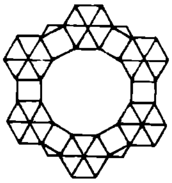
Bild 3a)



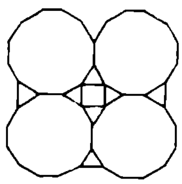
b)



c)

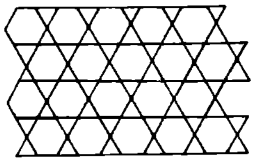


d)

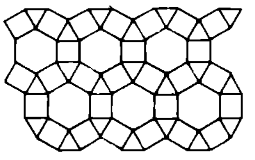


Es ergeben sich daher hier nur die beiden Sternmosaiken, die Bild 4a und b) zeigt.
Die Lösung Nr. 4 gibt natürlich nur zu einem Sternmosaik Anlaß (Bild 4c).
Es lassen sich daher aus 4 regelmäßigen Vielecken hier nur 3 Sternmosaiken bilden.

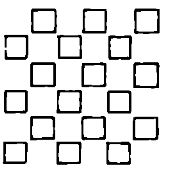
Bild 4a)



b)



c)



III. Mosaike mit fünf regelmäßigen Vielecken

Die Seitenzahlen seien auch hier wieder $n_1, n_2, \ldots, n_5$ mit $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3 \leqq n_4 \leqq n_5$.
Die Gleichung lautet hier

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}.$$

Für $n_1 = 3$ nimmt die rechte Seite der Gleichung den Wert $\frac{7}{6}$ an; woraus geschlossen werden kann, daß auch $n_2 = 3$ sein muß $\left(n_1 = n_2 = n_3 = n_4 \text{ ergäbe } \frac{24}{7}\right)$.
Ist aber auch $n_2 = 3$, so bleibt für $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}$ noch $\frac{5}{6}$; bei $n_3 = n_4 = n_5$ wäre die Summe gleich $\frac{18}{5}$; also muß auch $n_3 = 3$ sein. Schließlich erhält man

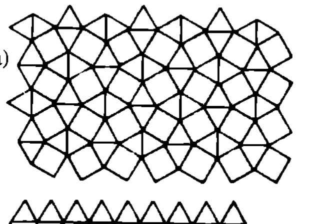
$$\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Es sind also für n_4 die beiden Werte 3 und 4 mögliche Ganzzahllösungen der Ausgangsgleichung.
Wir erhalten hier nur 2 Sterne:

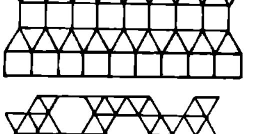
Nr.	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	3	3	3	4	4
2	3	3	3	3	6

Aus den Vielecken der Lösungen 1 lassen sich hier wiederum zwei verschiedene Sterne bilden, bei Lösung Nr. 2 dagegen nur ein einziger. Die Bilder 5a–c zeigen diese Sternmosaiken.

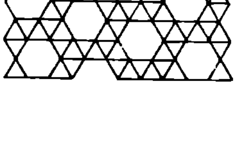
Bild 5a)



b)



c)



Partieergebnis eines Schachturniers

Holger, Christian, Angela, Katrin, Frank und Martin führten in ihrer Klasse ein Schachturnier durch. Jeder spielte mit jedem eine Partie. Holger gewann dabei alle fünf Partien, was fünf Punkten entspricht. (Bei einem Remis gibt es 0,5 Punkte für jeden der beiden Spieler.)
Angela, Katrin, Frank und Martin erreichten den gleichen Punktestand, jedoch verlor Martin weniger Partien. Christian wäre Erster geworden, hätte er gegen Holger gewonnen.
Wie lautete das Ergebnis der Partie zwischen Angela und Martin?

IV. Mosaike mit sechs regelmäßigen Vielecken

Hier lautet die entsprechende Gleichung für die Sternbilder:

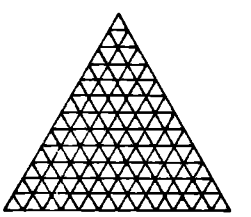
$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2.$$

Es ist evident, daß es hier nur eine einzige ganzzahlige Lösung mit n_1 größer oder gleich 3 gibt:

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 3;$$

das entsprechende Sternmosaik zeigt die Anlage in Bild 6.

Bild 6



Zusammenfassend läßt sich feststellen:
Es gibt genau 11 Sternmosaike.
Die in Bild 2d, 4c und 6 gezeigten Mosaike sind die bekannten drei Möglichkeiten, die unendliche Ebene mit nur einer einzigen Art von regelmäßigen Vielecken zu bedecken; die dabei auftretenden Sterne sind nicht nur untereinander kongruent, sondern auch gleichwinklig, d. h. ebenfalls regelmäßig. Die 11 Sternmosaike zerfallen also in 2 Sorten mit 3 bzw. 8 Arten.
Wenn man auf die Vorschrift verzichtet, daß die an den Ecken sich bildenden Sterne kongruent sein müssen, dann gibt es eine überaus große Anzahl von Mosaiken aus regelmäßigen Vielecken. *H. Oehl*

Venus im größten Glanz

Wie der Mond zwischen Neumond und Vollmond, so durchlaufen auch andere Himmelskörper wie z. B. die Venus verschiedene Phasen. (Als Phase bezeichnet man die wechselnde Lichtgestalt von nicht selbstleuchtenden Himmelskörpern.) Schon mit dem kleinsten Fernrohr kann man beobachten, daß der scheinbare Venusdurchmesser nahe Vollvenus beträchtlich kleiner ist als in der Nähe von Neuvenus, wenn also nur eine schmale Sichel zu sehen ist (Bild 1).

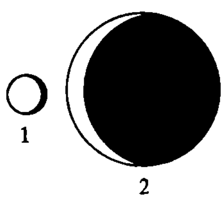


Bild 1
Wahre Größenverhältnisse der Venus
1 Venus in der Nähe der oberen Konjunktion (nahe Vollvenus)
2 Venus in der Nähe der unteren Konjunktion (nahe Neuvenus)

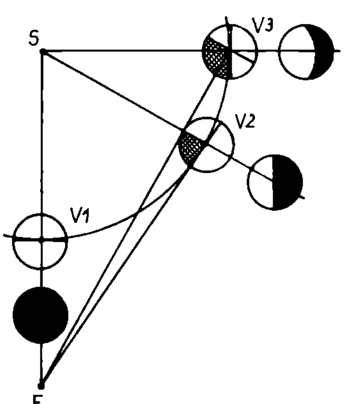


Bild 2
Venusphasen
$V1$ untere Konjunktion
$V2$ Halbvenus
$V3$ Quadratur

Aus Bild 2 geht hervor, daß dies keine optische Täuschung sondern ein reales Phänomen ist. Der Abstand Erde – Venus schwankt zwischen $42 \cdot 10^6$ km und $258 \cdot 10^6$ km. Das heißt, bei Vollvenus ist diese mehr als sechsmal so weit entfernt wie bei Neuvenus und deshalb entsprechend kleiner. Kommt die Venus uns näher, so vergrößert sich ihr scheinbarer Durchmesser, ihre beleuchtete Fläche wird jedoch kleiner.

Eine interessante mathematische Extremwertaufgabe ist es nun, auszurechnen, wann Venus im größten Glanz erstrahlt, d. h. wann sie der Erde die größte beleuchtete Fläche zuwendet. Dazu ist es erforderlich, einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Inhalt der beleuchteten Venusfläche zu finden.

Bevor wir zur Lösung der Aufgabe kommen, ein paar Festlegungen und Vereinfachungen:

1. Die Bahnen von Venus und Erde werden als Kreise angenommen, da die Abweichung von der Kreisbahn gering ist. Außerdem bleibt die Bahnneigung, d. h. der Winkel zwischen Erdbahn und Venusbahn unberücksichtigt, da dieser nur 3,5° beträgt.
2. Wir werden mit einer geozentrischen Betrachtungsweise arbeiten, d. h. alle Angaben beziehen sich auf einen Beobachter auf der „festen" Erde.
3. Die Linie Erde – Sonne wird als feststehend betrachtet. Die eigentliche Bewegung der Erde wird berücksichtigt, indem für die Umlaufzeit der Venus statt der siderischen (auf die Sonne bezogene), die synodische (auf die Erde bezogene) Umlaufzeit verwendet wird (Bild 3).

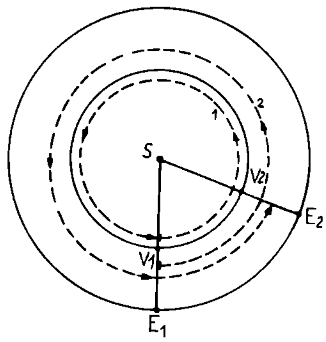


Bild 3
siderischer und synodischer Umlauf
1 siderischer Umlauf (von der Sonne aus gesehen)
2 synodischer Umlauf (von der Erde aus gesehen)

4. Als „Nullpunkt" der Bewegung sei die untere Konjunktion gewählt, d. h. der Zeitpunkt, zu dem die Venus mit Erde und Sonne in einer Linie steht und zwar vor der Sonne (Position $V1$ in Bild 4).

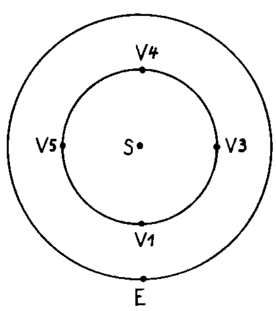


Bild 4
besondere Stellungen der Venus
$V1$ untere Konjunktion
$V3$, $V5$ Quadratur
$V4$ obere Konjunktion

Erwähnt sei auch noch Position $V3$ (Bild 4), die (ebenso wie $V5$) Quadratur genannt wird und erreicht ist, wenn Venus, Sonne und Erde einen rechten Winkel (mit der Sonne als Scheitel) bilden. Diese Position ist allerdings nicht identisch mit Halbvenus. (Diese Erscheinung tritt etwas eher auf.) Der gesuchte Zeitpunkt der größten Helligkeit liegt, soviel sei verraten, zwischen unterer Konjunktion und Halbvenus. Deshalb können wir die Berechnungen auf diesen Quadranten beschränken.

Kommen wir nun zur Lösung der Aufgabe. Dazu gehen wir in drei Schritten vor:

1. Aufstellen eines funktionalen Zusammenhanges zwischen Zeit und Abstand Venus – Erde. Daraus läßt sich dann der scheinbare Radius in Abhängigkeit von der Zeit ableiten.
2. Ermitteln eines Zusammenhangs zwischen Zeit und Inhalt der beleuchteten Fläche.
3. Verknüpfen beider Funktionen, Formulieren und Lösen der Extremwertaufgabe.

1. Schritt:
Verwendete Abkürzungen und Daten

V: Venus
E: Erde
S: Sonne
R_{VB}: Venusbahnradius, $R_{VB} = 108 \cdot 10^6$ km
R_{EB}: Erdbahnradius, $R_{EB} = 150 \cdot 10^6$ km
T_V: synodische Umlaufzeit der Venus T_V: 584 Erdtage
R_V: Venusradius
Winkel zwischen den Verbindungslinien Venus – Sonne und Sonne – Erde
t: Zeit nach der unteren Konjunktion
a: gesuchter Abstand Erde – Venus
r_s: scheinbarer Radius der Venus

Zuerst legen wir ein Koordinatensystem fest. Da die gegenseitige Neigung von Erd- und Venusbahn unberücksichtigt bleibt, können wir ein ebenes Koordinatensystem benutzen. Es bietet sich an, Polarkoordinaten zu verwenden. In diesen Koordinaten ist jeder Punkt durch seinen Abstand von einem festen Mittelpunkt und den Winkel, den die Linie Punkt – Mittelpunkt mit einer festgelegten Nullinie bildet, bestimmt (Bild 5).

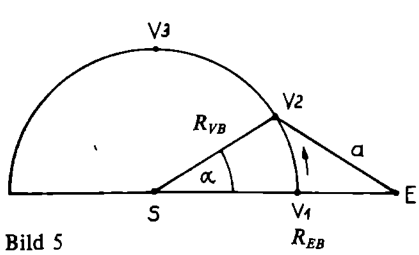


Bild 5
Venusbewegung
$V1$ untere Konjunktion
$V3$ Quadratur

Als Mittelpunkt sei die Sonne gewählt, die o. g. Nullinie ist die als feststehend angenommene Verbindungslinie Sonne – Erde. Da wir die Venusbahn als Kreislinie betrachten, ist der Abstand der Venus vom

Mittelpunkt Sonne fest. Die jeweilige Position der Venus ist also nur vom Winkel α abhängig. Da sich die Venus unter den genannten Voraussetzungen gleichförmig bewegt, ist der Winkel α proportional zur Zeit t:

$$\alpha : t = \pi : \frac{T_V}{2},$$

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_V} \tag{1}$$

Um die Beziehung zwischen Zeit und Abstand zu ermitteln, ist es jetzt noch nötig, den Abstand a in Abhängigkeit vom Winkel α zu bestimmen. Dazu verwenden wir den Kosinussatz auf das Dreieck $SEV2$ (Bild 5) an:

$$a^2 = R_{VB}^2 + R_{EB}^2 - 2 \cdot R_{VB} \cdot R_{EB} \cdot \cos \alpha \tag{2}$$

Nach Einsetzen von (1) ergibt sich die zeitliche Abhängigkeit des Abstandes Erde – Venus:

$$a = \sqrt{R_{VB}^2 + R_{EB}^2 - 2 \cdot R_{VB} \times R_{EB} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_V}\right)} \tag{3}$$

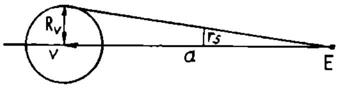


Bild 6
scheinbarer und wahrer Venusradius
R_V wahrer Venusradius
r_s scheinbarer Venusradius (= Winkel zwischen den Verbindungslinien Erdmittelpunkt – Venusmittelpunkt und Erdmittelpunkt – Venusoberfläche)

Betrachtet man nun Bild 6, so kommt man zu folgender Formel für den scheinbaren Radius der Venus:

$$\tan r_s = \frac{R_V}{a}$$

$$r_s = \arctan \frac{R_V}{a} \tag{4}$$

(arctan – Abkürzung für Arkustangens – ist die Umkehrfunktion der Funktion tan, d. h. es gilt: $x = \tan y \leftrightarrow \arctan x = y$. Entsprechendes gilt für die weiter unten verwendete Funktion arccos.)
Formel (3) und (4) bilden somit das Ergebnis des ersten Schritts.

2. Schritt: Zusätzlich verwendete Abkürzungen und Daten:
β: Winkel zwischen der Lichtgrenze (Terminator; steht senkrecht auf Verbindungslinie Sonne – Venus) und der Sichtbarkeitsgrenze (steht senkrecht auf Verbindungslinie Venus – Erde) auf der Venus
A: Flächeninhalt der beleuchteten Fläche

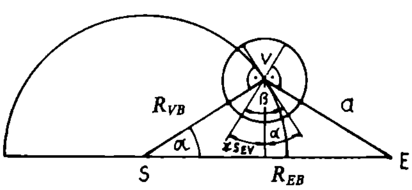


Bild 7
Winkelbeziehung zwischen Lichtgrenze (Terminator) und Sichtbarkeitsgrenze auf der Venus
R_{VB} Venusbahnradius
R_{EB} Erdbahnradius

Auf Grund von Bild 7 findet man mit Hilfe des Kosinussatzes folgenden Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Winkel β:

$$R_{VB}^2 = R_{EB}^2 + a^2 - 2 \cdot R_{EB} \cdot a \times \cos(\sphericalangle SEV)$$

$$\sphericalangle SEV = \arccos\left(\frac{R_{EB}^2 + a^2 - R_{VB}^2}{2 \cdot R_{EB} \cdot a}\right)$$

Nach dem Satz, daß Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, kongruent sind, folgt für Winkel β:

$$\beta = \alpha + \sphericalangle SEV$$

$$\beta = \alpha + \arccos\left(\frac{R_{EB}^2 + a^2 - R_{VB}^2}{2 \cdot R_{EB} \cdot a}\right) \tag{5}$$

Beobachten wir die Venuskugel, so nehmen wir statt der sichtbaren Halbkugeloberfläche eine Kreisfläche wahr. Diesen Vorgang werden wir jetzt mathematisch nachvollziehen (Bild 8).

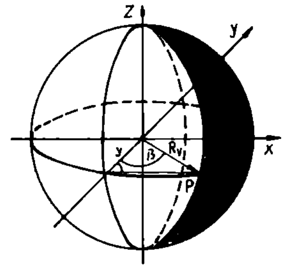


Bild 8
Venuskugel
P Punkt auf der Lichtgrenze (Terminator)
R_V Venusradius

Der Verbindungsstrahl Kugelmittelpunkt – Oberflächenpunkt werde Leitstrahl genannt. Für die nachfolgenden Rechnungen genügt es, die Ordinate des Punktes auf der Lichtgrenze zu bestimmen, der in der x-y-Ebene liegt (Punkt P in Bild 8). Solch ein Punkt auf der Kugeloberfläche ist bestimmt durch den Kugelradius R_V und den Winkel β zwischen der y-Achse und dem Leitstrahl (Bild 8). (Die y-z-Ebene liefert die Sichtbarkeitsgrenze.)

$$\cos \beta = \frac{y}{R_V}$$

$$y = R_V \cdot \cos \beta \tag{6}$$

Damit haben wir den Punkt der Kugeloberfläche auf die beobachtete Kreisscheibe projiziert. Die beleuchtete Fläche besteht also aus einem Halbkreis, von dem ein Kreisabschnitt abgezogen wird (Bild 9).

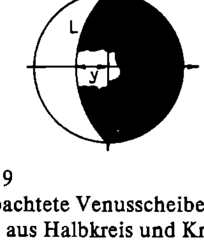


Bild 9
beobachtete Venusscheibe (zusammengesetzt aus Halbkreis und Kreisabschnitt)
L Lichtgrenze

Der Flächeninhalt des Halbkreises beträgt $\frac{\pi}{2} \cdot R_V^2$. Der Inhalt des Kreisabschnitts berechnen wir nach einer Näherungsformel $\left(\text{Fläche} = \frac{2}{3} \cdot h \cdot s\right)$ und kommen zu folgender Formel für die beleuchtete Fläche:

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot R_V^2 - \frac{2}{3} \cdot y \cdot 2 \cdot R_V$$

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot R_V^2 - \frac{4}{3} \cdot y \cdot R_V \tag{7}$$

Die Formeln (7), (6), (5) liefern die Lösung des zweiten Schrittes.

3. Schritt: Zusätzlich beleuchtete Fläche
$AS(t)$: scheinbare beleuchtete Fläche
Setzt man in die Formeln (6) und (7) statt des Venusradius R_V den scheinbaren Radius r_s entsprechend den Formeln (3) und (4) ein, so kommt man zu der gesuchten Funktion, die maximiert werden soll:

$$AS(t) = \frac{\pi}{2} \cdot r_s^2 - \frac{4}{3} \cdot y \cdot r_s$$

$$AS(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \cdot \cos \beta\right) \cdot r_s^2 \tag{8}$$

mit folgenden Substitutionen:

(5) $\beta = \alpha + \arccos\left(\frac{R_{EB}^2 + a^2 - R_{VB}^2}{2 \cdot R_{EB} \cdot a}\right)$

(4) $r_s = \arctan\left(\frac{R_V}{a}\right)$

(3) $a = \sqrt{R_{VB}^2 + R_{EB}^2 - 2 \cdot R_{VB} \times R_{EB} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_V}\right)}$

Wir begnügen uns mit einer numerischen Lösung, die am günstigsten mit Hilfe eines Computers und eines kleinen Rechenprogramms (eventuell mit grafischer Darstellung) gewonnen wird. Eine Darstellung der Funktion $AS(t)$ zeigt Bild 10.

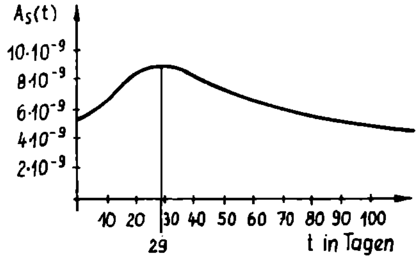
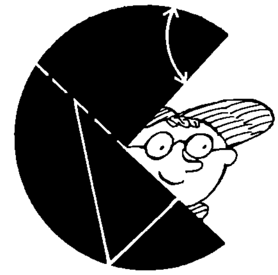


Bild 10
graphische Darstellung der Lösungsfunktion $AS(t)$ mit Maximum bei $t = 29$ Tagen

Hier können wir als Maximum $t = 29$ Tage ablesen. Dieser Wert stimmt trotz der Vereinfachungen sehr gut mit dem wahren Wert überein. Die nächste untere Konjunktion der Venus findet am 26. August 1991 statt. Beobachtet doch 'mal 29 Tage davor oder danach!

A. Ohlhoff

In freien Stunden · alpha-heiter



Für Tierfreunde

In das aus 12 quadratischen Feldern bestehende Rechteck wurde in der Gangart eines Springers beim Schachspiel der Name eines in Südostasien lebenden Tieres eingetragen. (Jedes Feld wird genau einmal betreten.) Wie heißt dieses Tier?

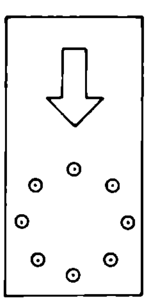
W. Träger, Döbeln

T	L	R	S
F	C	T	K
E	E	I	H

Für Straßenbahnfans

Die Fahrscheinentwerter in den Erfurter Straßenbahnen und Stadtbussen enthalten je acht ringförmig angeordnete Stanzeisen, die in unterschiedlicher Auswahl in Arbeits- oder in Ruhestellung geschaltet werden können. Weil sich der Fahrschein nur senkrecht von oben in den Entwerter schieben läßt, zeigen schon zwei Stanzlöcher die jeweils typische Anordnung, so daß dem Kontrolleur ein vergleichender Blick genügt. Wie viele unterschiedliche Einstellungen sind möglich, wenn sich mindestens zwei Stanzeisen in Arbeitsstellung befinden müssen?

J. Heller, Erfurt



Für Scherzkekse

a) In einem Korb liegen 5 Äpfel. Wie verteilt man diese Äpfel so unter 5 Mädchen, daß jedes einen Apfel erhält und einer im Korb bleibt?
b) Wieviel Katzen sind im Zimmer, wenn in jeder der 4 Ecken eine Katze sitzt, jeder Katze gegenüber 3 Katzen sitzen und auf dem Schwanz jeder Katze eine Katze sitzt?

St. Spitzenberg, Silberhausen

Für Rätselfreunde

Mit Hilfe der Buchstaben:
AAAAAAAAAA B CC DDDDDD EEEEEEE G HHHHH IIIII KK LL MM NNNNN OOO P RRR SSSS TTT Z
sind 8 Wörter waagerecht einzusetzen.

1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

1. Kreisdurchmesser
2. Mathematiker (gest. 1963)
3. mathematisches Zeichen
4. Fünfeck
5. Grundrechenart
6. ebene Kurve
7. Mathematiker im 6. Jh.
8. winkelbegrenzender Strahl

Die Buchstaben an 4. Stelle ergeben die Ziffernfolge hinter dem Komma.

H. Raduschewski, Berlin

Für Hobbyhistoriker

In den Büchern der Nowgoroder Schreiber des XV. Jahrhunderts werden die Hohlmaße „Bočka“ (Faß), „Nasadka“ und „Vedro“ (Eimer) erwähnt.
Aus den gleichen Büchern wurde bekannt, daß 1 Faß und 20 Eimer Kwaß gleich kommen 3 Fässern mit Kwaß, aber 19 Fässer ein Nasadka und $15\frac{1}{2}$ Eimer gleich sind mit 20 Fässern und 8 Eimern.
Können die Historiker auf der Grundlage dieser Angabe bestimmen, wie viele Nasadok ein Faß sind?

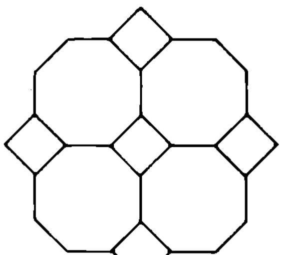
aus: Quant, Moskau, übersetzt und bearbeitet von R. Bergmann (†), Döbeln

Für Naturfreunde

Drei Hühner und 60 Maiskörner. Alle drei fangen gleichzeitig zu picken an, und alle drei picken gleich schnell, im gleichen Takt. Wie viele Körner kriegt da jedes Huhn mit? Natürlich: 20!
Wie aber wird die Sache, wenn das erste Huhn jedesmal, nachdem es zweimal gepickt hat, zwei Takte aussetzt, um zweimal zu gackern, das zweite Huhn nach jeweils vier Picktakten drei Gackertakte und das dritte Huhn nach jeweils sechs Picktakten vier Gackertakte einlegt? Wie viele Körner bekommt dann jedes mit?

H.-J. Böhland, Wallroda

Für Zahlenakrobatiker



Die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 sind so in die quadratischen und achteckigen Felder einzusetzen, daß die in jedem Quadrat stehende Zahl gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen in den angrenzenden Achtecken ist.

W. Träger, Döbeln

Für Logiker

35355	1125	21	1
41515	100	16	12
55550	0	20	0
54321	x	y	z

Das Bild zeigt in jeder Zeile vier Zahlen, bei denen jeweils die drei letzten Zahlen in ganz bestimmter Weise aus der ersten Zahl gebildet wurden. Wie müssen demnach die Zahlen x, y und z lauten?

Dr. R. Mildner, Leipzig

Für Osterhasenfans

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern so, daß eine wahre Aussage entsteht.

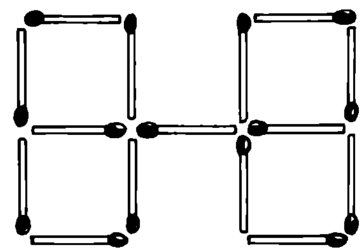
$$\begin{array}{r} \text{HASEN} \\ +\,\text{HASEN} \\ \hline \text{OSTERN} \end{array}$$

Schülerin Isabel Blei, Tannenbergsthal

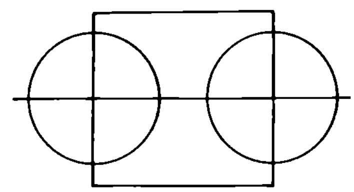
„Wieviel ist sieben mal sechs?" –
„Keine Ahnung, Herr Lehrer.
Die Batterie in meinem Taschenrechner ist leer!"

Für Trickkünstler

Durch geschicktes Umlegen von zwei Streichhölzern entstehen 5 Quadrate.



Für Könner

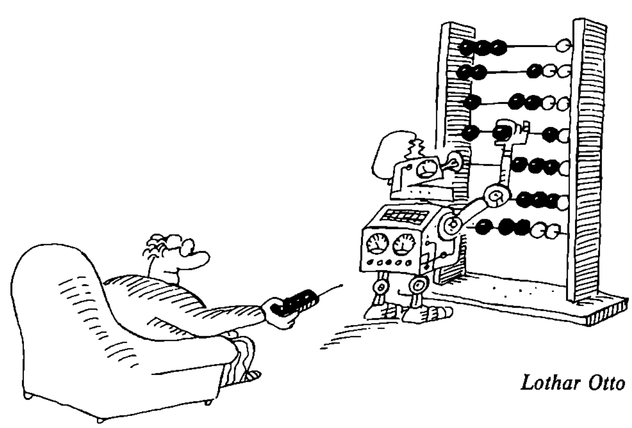


Versuche diese Figur in einem Zug nachzuzeichnen, ohne eine Linie doppelt zu ziehen.

Gar nicht borniert

Um 1930 gab es in Göttingen drei physikalische Institute, die zur gleichen Zeit von drei namhaften Physikern – Pohl, Franck und Born – geleitet wurden.
Jemand schlug vor, um die Studenten der drei physikalischen Institute zu unterscheiden, sie nach den Namen ihrer Leiter zu benennen: polierte, frankierte und bornierte Studenten. Als man Max Born (Nobelpreisträger für Physik) nach seiner Reaktion fragte, denn seine Studenten kamen dabei am schlechtesten weg, meinte er: „Ich mußte herzlich darüber lachen!"

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten; Episoden, Lebensweisheiten, Fachbuchverlag Leipzig



Lothar Otto

Schalterangestellter zu einem Briefauflieferer: „Sie müssen aber die Adresse deutlich schreiben, Herr, so kann ich das nicht weitergeben!"
Darauf er: „Sie können – der Empfänger ist mein Bruder, und der kann meine Schrift lesen!"

Ein interessanter Bildungsweg

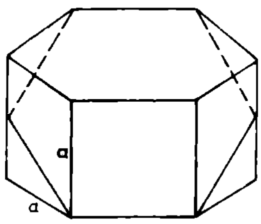
Welcher künftige Student träumt nicht davon, einen Teil seines Studiums an einer ausländischen Hochschule zu absolvieren? Aber organisieren und vorbereiten muß man das heutzutage schon selbst.
Die Vorbereitung beginnt mit dem Erlernen der Sprache, und das sollte so früh wie möglich sein. Eine günstige Chance bietet der Erwerb der Hochschulreife am Institut zur Vorbereitung auf das Auslandsstudium (IVA) der Martin-Luther-Universität Halle. Ab Klasse 9 oder 11 kann man in einem 4- bzw. 2jährigen Kurs jeweils eine west- und eine osteuropäische Sprache weiterführen bzw. neu erlernen in einem Umfang, der ein späteres Auslandsteilstudium ermöglicht. Gleichzeitig haben mathematisch-naturwissenschaftlich interessierte Schüler die Möglichkeit, in den von ihnen bevorzugten Fächern Leistungskurse zu belegen, die eine solide Studienvorbereitung sichern. An keiner einzigen Einrichtung in Deutschland besteht die Chance, neben Englisch, Französisch und Russisch zwischen solchen Sprachen zu wählen wie Bulgarisch, Polnisch, Slowakisch, Tschechisch oder Ungarisch. Der zunehmende europäische Einigungsprozeß bietet künftig gerade demjenigen gute berufliche Möglichkeiten, der neben einer westeuropäischen auch eine osteuropäische Sprache perfekt beherrscht.
Der Sprachunterricht am IVA wird vor allem von ausländischen Lektoren erteilt. Unter diesen befinden sich eine Reihe Mathematiklehrer, die in *alpha* Aufgaben aus ihren Ländern vorstellen möchten. Diese Aufgaben entstammen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen verschiedener osteuropäischer Länder. Wer für eine der *-Aufgaben eine interessante Lösung findet, schicke sie bitte an das IVA der Universität Halle, Franckeplatz 1, Haus 47, Halle, O-4020. Originelle Lösungen werden prämiert und haben günstigen Einfluß auf die Aufnahmeprüfung am IVA.

Aufgaben zur Stereometrie und zur Differentialrechnung aus **Bulgarien** (zusammengestellt von Zenka Stojkowa):

▲ B_1 ▲ Der Mantelflächeninhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei S. Die Seitenflächen bilden mit der Grundfläche einen spitzen Winkel α. Bei welchem Wert von $\tan\alpha$ hat die Pyramide das größte Volumen?

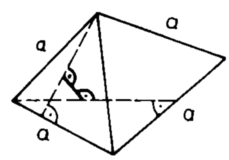
▲ B_2^* ▲ In einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma mit quadratischen Seitenflächen wird eine Ebene durch die zueinander gegenüberliegenden Grundkanten der unteren und der oberen Grundfläche gezeichnet (Bild 1). Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schnitts!

Bild 1



▲ B_3^* ▲ Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den (zueinander windschiefen) Höhen zweier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders mit Seitenkanten der Länge a (Bild 2).

Bild 2

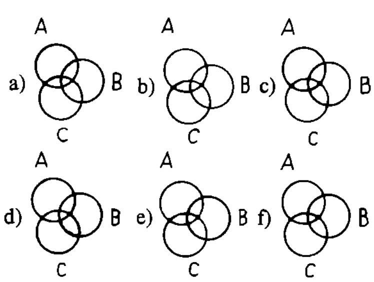


▲ B_4 ▲ Es ist die Funktion
$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2a+1}{2}\cdot x^2 + 2ax + a$$
gegeben, wobei $a > \frac{1}{2}$ ein Parameter ist.
a) Bei welchem Wert des Parameters a gilt die Ungleichung
$$y_{\min} + y_{\max} \geqq \frac{4a^3}{3} - \frac{17}{6}.$$
b) Untersuchen und zeichnen Sie den Graph der Funktion für $a = 1$.

Verschiedene Aufgaben für die Klassenstufen 10 und 11 aus **Polen** (zusammengestellt von Ludwika Bonczak):

▲ P_1 ▲ Man gebe die grau angelegten Mengen (Bild 3) mit Hilfe von Durchschnitts-, Vereinigungs- und Differenzmenge an. (Hinweis: Differenzmenge
$$A\backslash B = \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\})$$

Bild 3



▲ P_2 ▲ Man löse die Gleichung
$$|x| + |x-1| + |x-2| = a \qquad (a > 0)$$
und stelle die Lösungsmenge aller x in Abhängigkeit vom Parameter a graphisch dar.

▲ P_3 ▲ Man beweise, daß aus $m > 0$ folgt
$$m + \frac{4}{m^2} \geqq 3.$$

▲ P_4^* ▲ Man beweise, daß die reellen Zahlen a, b und c ($a, b, c \neq 0$) genau dann die Gleichung
$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$$
erfüllen, wenn sie aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge sind.

Beweisaufgaben zum Funktionsbegriff und Aufgaben zur Algebra aus der **Sowjetunion** (zusammengestellt von Alexej Krutow):

▲ S_1^* ▲ Gegeben sei im Intervall $(-a; a)$ die Funktion $f(x)$. Es ist zu beweisen, daß man dann $f(x)$ eindeutig als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen kann!

▲ S_2^* ▲ Es ist die Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die nicht durchweg den Wert Null hat und für die gilt:
$$f(x)\cdot f(a) = f(x-a),\ x, a \in R.$$

▲ S_3^* ▲ Für eine Funktion $f(x)$ gelte für alle x des Definitionsbereichs die Beziehung $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f(x)$, die diese Eigenschaft haben. Zeigen Sie, daß es keine weiteren Funktionen gibt!

▲ S_4^* ▲ Wir betrachten die reelle Funktion f, die auf R definiert und stetig ist und für die gilt $|f(x)| < |x|$, wenn $x \neq 0$ ist. Es ist zu beweisen, daß $f(0) = 0$ ist.

▲ S_5 ▲ Man löse die Gleichung
$$\sin x = x^2 + x + 1.$$

▲ S_6 ▲ Man bestimme die Lösung der Gleichung
$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}.$$
$\left(\text{Hinweis: Es gilt } a + \frac{1}{a} \geqq 2 \text{ für } a > 0\right)$

▲ S_7^* ▲ Man löse die Gleichung
$$x^2 + 6x\cdot\sin 3xy + 9 = 0.$$

▲ S_8 ▲ Man löse das System von Gleichungen:
$$\begin{aligned}(x+y)(x+y+z) &= 72\\ (y+z)(x+y+z) &= 120\\ (z+x)(x+y+z) &= 96\end{aligned}$$

Aufgaben zur Planimetrie aus der **Tschechoslowakei** (zusammengestellt von Jana Bimova):

▲ T_1 ▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt S und dem Radius $r = 5$ cm sowie ein Punkt $A \in k$.
a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC, das dem Kreis k einbeschrieben ist und für das gilt
$|\sphericalangle CAB| = 45°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
c) Berechnen Sie die Größe der Seitenhalbierenden $s_{\overline{AB}}$.

▲ T_2 ▲ Vom Parallelogramm $ABCD$ sind gegeben: $|\overline{AB}| = 3{,}5$ cm,
$|\overline{BD}| = 5$ cm und $|\sphericalangle ADB| = 40°$.
a) Konstruieren Sie das Parallelogramm aus den gegebenen Größen und beschreiben Sie den Konstruktionsgang!
b) Berechnen Sie die restlichen Stücke und den Flächeninhalt!

▲ T_3 ▲ Von einem Trapez $ABCD$ sind gegeben
$a = 15$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 8$ cm
und $d = 7{,}5$ cm.
a) Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel des Trapezes!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes! (Lösung: 69 cm²)
c) Konstruieren Sie das Trapez aus den gegebenen Größen!

▲ T_4^* ▲ Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden a und b sowie ein Punkt M in einem ihrer Winkel. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch den Punkt M geht und der die beiden Geraden a und b berührt!

Aufgaben zur Kombinatorik und zu arithmetischen Zahlenfolgen aus **Ungarn** (zusammengestellt von Zoltan Fogarasi):

▲ U_1 ▲ Für welchen kleinsten Wert von n wird die Ungleichung
$2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}} \cdot \ldots \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}} > 1\,000$ erfüllt?

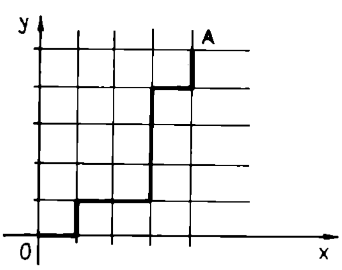
▲ U_2 ▲ Können $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ Glieder einer arithmetischen Folge sein? (Achtung: nicht nur Trivialfall „aufeinanderfolgende Glieder")

▲ U_3^* ▲ α, β, γ sind Winkel im Dreieck. $\cot\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\beta}{2}$ und $\cot\frac{\gamma}{2}$ seien drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Man bestimme den Wert des größten Winkels!

▲ U_4 ▲ Wir werfen einen Würfel dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nur der dritte Wurf eine Sechs?

▲ U_5^* ▲ Wir wollen vom Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in Schritten zu einer Längeneinheit nach rechts bzw. oben bis zum Punkt A (4; 5) gehen. Wieviel verschiedene Wege gibt es (siehe Bild 4)?

Bild 4

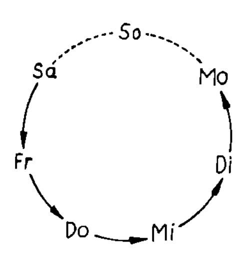


▲ U_6^* ▲ In einem Kasten befinden sich 30 Zettel mit den Nummern 1 bis 30. Wir nehmen 5 beliebige Zettel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf diesen Zetteln 3 vorher gewünschte Nummern stehen?

D. Hetsch

An welchem Ostertag wurde die Osterinsel entdeckt?

Als Datum der Entdeckung dieser Insel durch den holländischen Kapitän Jacob Roggeveen wird in unserer Literatur der 6. 4. 1722 angegeben.
Andererseits wird auch mitgeteilt, daß diese Entdeckung am Ostersonntag erfolgte. Beide Angaben sind scheinbar widersprüchlich:
Nach dem auf Anordnung (Bulle „Inter gravissimas ...") des Papstes Gregor XIII. in den katholischen Ländern ab 15. 10. 1582 eingeführten Gregorianischen Kalender, der später auch in den nichtkatholischen Ländern benutzt wird und bis heute gültig ist, haben alle Jahre mit einer nicht durch 4 teilbaren Jahreszahl sowie alle mit einer durch 100 teilbaren, aber nicht durch 400 teilbaren Jahreszahl 365 Tage. Alle übrigen Jahre sind Schaltjahre mit einem eingeschalteten 29. Februar und haben damit 366 Tage. Im protestantischen Holland wird der Gregorianische Kalender ab 1. 1. 1583 benutzt. Zwischen 1722 und 1991 sind 67 Jahreszahlen durch 4 teilbar. Dies sind $1724 + 4k$ mit $k \in N$ und $0 \leqq k \leqq 66$. Von diesen 67 Jahreszahlen ist keine durch 400 teilbar, jedoch sind 2 durch 100 teilbar, nämlich 1800 und 1900.
Da 1800 und 1900 keine Schaltjahre waren, gab es zwischen 1722 und 1991 65 Schaltjahre. Wegen $365 = 52 \cdot 7 + 1$ und $366 = 52 \cdot 7 + 2$ gilt: Ist das Folgejahr eines Jahres kein (ein) Schaltjahr, so verschiebt sich der Wochentag des 6. 4. vom Jahr zum Folgejahr im Siebenerzyklus der Wochentage um einen Tag (zwei Tage) weiter. Vom 6. 4. 1722 bis zum 6. 4. 1991 sind 269 Jahre verstrichen. Danach ist der Wochentag des 6. 4. von 1722 bis 1991 um $269 + 65 = 334$ Wochentage im Wochentagszyklus weitergerückt.
Von vollen Umläufen im Wochentagszyklus abgesehen, ist er also wegen $334 = 47 \cdot 7 + 5$ um 5 Wochentage weitergerückt. Da der 6. 4. 1991 Samstag ist, ist der 6. 4. 1722 um 5 Wochentage im Wochentagszyklus gegenüber dem des Jahres 1991 zurückverschoben:



Der 6. 4. 1722 war ein Montag und damit der Ostermontag.
Gemäß seiner Aufzeichnungen entdeckte J. Roggeveen die Osterinsel am Ostersonntag gegen 20.00 Uhr wahrer Ortszeit. Die Osterinsel hat die geographischen Koordinaten 27° südlicher Breite und 109° westlicher Länge. Die Entdeckung der Osterinsel erfolgte also am 5. 4. 1722 gegen 20.00 Uhr wahrer Ortszeit des 109. westlichen Meridians. (Alle Orte eines Meridians, also alle Orte mit gleicher geographischer Länge, haben die gleiche wahre Ortszeit. Nach wahrer Ortszeit ist es 12.00 Uhr, wenn mittags die Sonne am höchsten über dem Horizont steht.)
Amsterdam, von dem aus Roggeveen seine Reise begann, hat die geographische Länge 5° Ost. Die Differenz der Länge von Amsterdam und der der Osterinsel beträgt 114°. Dieser Differenz entspricht der Zeitunterschied
$24 \cdot \frac{114}{360} = 7{,}6 \approx 7{,}5$ Stunden. Wegen
20.00 Uhr + 7 h 30 min = 24 h + 3.30 Uhr
läßt sich der Zeitpunkt der Entdeckung der Osterinsel wie folgt angeben:
a) Ostersonntag, der 5. 4. 1722 gegen 20.00 Uhr wahrer Ortszeit des 109. westlichen Meridians
b) Ostermontag, der 6. 4. 1722 gegen 3.30 Uhr wahrer Ortszeit des 5. östlichen Meridians.
Für Amerikaner und Polynesier fällt der Zeitpunkt der Entdeckung der Osterinsel auf Ostersonntag, für Europäer, Afrikaner, Asiaten und Australier auf Ostermontag. Für Menschen, die sich in unmittelbarer Nähe des längs des 180. Meridians verlaufenden Teiles der Datumsgrenze, jedoch etwas westlich (östlich) von ihr, aufhalten, ist der Zeitpunkt der Entdeckung der Osterinsel Ostermontag, der 6. 4. (Ostersonntag, der 5. 4.) gegen 15.15 Uhr wahrer Ortszeit des 180. Längengrades. Denn wegen
$180° - 109° = 71°$ gilt
$71° \mathrel{\hat{=}} \frac{71}{360} \cdot 24\,\text{h} = 4{,}7\overline{3}\,\text{h} \approx 4\,\text{h}\,45\,\text{min}.$

W. Träger

Osterinsel
Chilenische Vulkaninsel im Osten Polynesiens; 3600 km von Chile entfernt; Fläche 166 km²; 1400 Einwohner, von Ackerbau und Fischerei lebend; bekannt durch die 8 m hohen, von Ureinwohnern geschaffenen Steinfiguren.

Mathematik und Geographie – Eine zweitausendjährige Partnerschaft

Einige von Euch wird diese Überschrift sicher verwundern, denn wenn Ihr an Euren Schulunterricht denkt, so sind auf den ersten Blick nur sehr wenig Berührungspunkte zwischen Mathematik und Geographie erkennbar. Deshalb stellen sich natürlich folgende Fragen: Worin besteht eigentlich diese Partnerschaft? Wie ist deren Entstehung zu erklären, und wie hat sie sich entwickelt? Auf welchen Teilgebieten beider Wissenschaften finden wir besonders enge Wechselbeziehungen? Welches Verhältnis besteht zwischen ihnen in der heutigen Zeit? Die Beantwortung dieser Fragen soll in diesem Artikel versucht werden.

Die Mathematik und die Geographie gehören ohne Zweifel zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Der Wunsch des Menschen, seinen Lebensraum, die Erde, verstehen, beschreiben und erklären zu lernen, förderte beide gleichermaßen. Um nämlich die Erde beschreiben zu können, mußten z. B. Größen und Zeiten gemessen und angegeben sowie die Koordinaten verschiedener Orte bestimmt werden können. So bildete die Erdbeschreibung (Geographie) bereits im Altertum einen wesentlichen Anstoß für die Herausbildung und Entwicklung der Mathematik und erlebte umgekehrt eigentlich erst durch die Anwendung erster mathematischer Erkenntnisse eine Weiterentwicklung. Da diese Beziehung wechselseitig war bzw. ist, kann man hier durchaus von einer Partnerschaft sprechen. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die Geographie damals durchaus umfassender als heutzutage war, denn einige, jetzt selbständige Wissenschaften bildeten über viele Jahrhunderte hinweg einen festen Bestandteil der Geographie. Als Beispiel dafür seien nur die Geodäsie (heute: Wissenschaft von der Vermessung und Darstellung der Erde, einschließlich ihres Gravitationsfeldes) oder auch die Astronomie genannt. Letztere zählte zur Geographie, soweit sie sich mit den Hilfsmitteln der Geodäsie, dem Verhältnis der Erde zu den erdnächsten Himmelskörpern, den Ursachen von Tages- und Jahresrhythmus und ihren Auswirkungen auf das Klima beschäftigte. Sie galt aber auch z. T. als mathematische Teildisziplin, soweit sie sich mit Positionsbestimmungen befaßte. So war die Astronomie über viele Jahrhunderte hinweg, zumindest teilweise, als ein Grenzgebiet zwischen der Mathematik und der Geographie anzusehen. Möchte man nun die zeitliche Entwicklung dieser Partnerschaft näher beleuchten, so ist es zweckmäßig, dabei folgende Etappen bzw. Entwicklungsstufen zu unterscheiden:

- die geometrische Stufe
- die geophysikalische Stufe
- die statistische Stufe
- die Stufe des komplexen Eindringens der Mathematik in die Geographie.

Diese Reihenfolge entspricht der zeitlichen Herausbildung der Beziehung auf dem entsprechenden Gebiet, jedoch führte das Eintreten in eine neue Entwicklungsetappe nie ganz zum Erlöschen der vorherigen, sondern ergänzte die bereits vorhandenen durch neue, aber weitgehend unabhängige, Wechselwirkungsgebiete. Auf diese Stufen soll im folgenden anhand einiger weniger ausgewählter Beispiele eingegangen werden.

Die geometrische Stufe

Dieser Abschnitt begann bereits in der Antike (vor etwa 2500 Jahren) und dauert in der Gegenwart noch an.

Er umfaßt u. a. die Fragen nach

- der Form und der Größe der Erde
- dem Verhältnis der Größen der Abstände der Erde zu Sonne und Mond
- der Ermittlung der Koordinaten eines Ortes auf der Erdoberfläche
- der kartographischen Darstellung der Erdoberfläche oder ihrer Ausschnitte
- der optimalen Anlage von Verkehrsverbindungen
- der Standortoptimierung

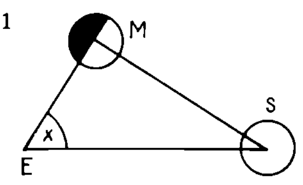
um nur einige zu nennen. Diese Fragestellungen regten verschiedene mathematische Disziplinen bzw. Theorien mitunter entscheidend an, wie z. B.

- die Elementargeometrie in der Ebene und im Raum
- die Sphärische Geometrie (Geometrie auf der Kugel)
- die Ebene und Sphärische Trigonometrie
- die Darstellende Geometrie
- die Fehler- und Ausgleichsrechnung
- die Differentialgeometrie
- die Graphentheorie.

Am Anfang standen vor allem die Fragen nach der Form und der Größe der Erde im Mittelpunkt des Interesses. Diese bilden gemeinsam mit der zweiten und dritten Fragestellung den wesentlichen Bestandteil der Mathematischen Geographie bzw. Astronomischen Erdkunde. Unter diesen beiden oder ähnlichen Bezeichnungen findet man bis zum Beginn dieses Jahrhunderts Arbeiten, die sich mit der immer vollkommneren Lösung dieser Probleme befassen oder sie interessierten Personen nahebringen sollten. Dieses Fachgebiet wurde sogar in den oberen Klassen der höheren Schulen Deutschlands gelehrt, weshalb auch noch viele empfehlenswerte Lehrbücher aus jener Zeit existieren. Heute würde man diese Fragestellungen wohl mehr der Geodäsie bzw. der Astronomie zuordnen.

Den Beginn der Lösung dieser Probleme finden wir bereits in der Antike bei den Pythagoreern (etwa um 500 v. u. Z.). Von Mitgliedern dieses, von Pythagoras von Samos begründeten Geheimbundes, wurde nämlich erstmals, wenn auch wahrscheinlich nur aus ästhetischen Gründen, die Kugelgestalt der Erde gelehrt. Aristoteles (etwa 380 bis 320 v. u. Z.), der berühmte griechische Philosoph und Mathematiker, lieferte vermutlich die erste Begründung für diese Gestalt, indem er den immer kreisförmigen Schatten der Erde bei Mondfinsternissen erkannte. Aristarch von Samos (etwa 310 bis 230 v. u. Z.) bestimmte mit mehreren Experimenten (Abb. 1 und 2) die relativen Größen und Entfernungen von Mond und Sonne bzgl. der Erde, um die Einheit von „Irdischem und Himmlischem" zu zeigen.

Bild 1



Das Bild 1 verdeutlicht sein erstes Experiment, es zeigt die Konstellation der 3 Untersuchungsobjekte bei Halbmond. Aus der Kenntnis des zu messenden Winkels x erhält man das Verhältnis der Abstände zwischen Erde und Mond bzw. Erde und Sonne ($= \cos x$). Von Aristarch wurde auf Grund der Meßungenauigkeit der damaligen Hilfsmittel ein Winkel x von 87° gemessen (tatsächlicher Winkel etwa 89°51′). Daraus ergab sich bei ihm für die Abstände ein Verhältnis von 1 : 19 (real: rund 1 : 389). Aus der Tatsache, daß die Sonne und der Mond auf der Erde ungefähr unter dem gleichen Sehwinkel von 0.5° erscheinen (in Wirklichkeit: Sonne 0.53°, Mond 0.517°), schlußfolgerte er, daß sich die Durchmesser beider Himmelskörper zueinander wie deren Abstände zur Erde verhalten. Nach diesem 2. Experiment betrachtete er das dritte, eine Beobachtung einer totalen Mondfinsternis. Es zeigte, daß die Zeit, die der Mond von der Berührung des Erdschattens bis zum vollständigen Eintritt

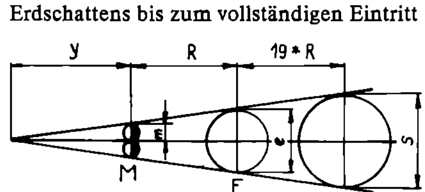


Bild 2

in ihn benötigt, ungefähr gleich der Zeit für seinen Durchgang bis zu seinem Wiedererscheinen ist (Bild 2).

Man erhält daraus die folgenden beiden Verhältnisgleichungen:

$$y:(2*m)=(y+R):e \text{ und}$$
$$(y+20*R):s=(y+20*R):(19*m).$$

Daraus ergäbe sich ein Verhältnis von 20 : 57 für die Durchmesser von Mond und Erde, was natürlich nicht der Realität entspricht. Er erhielt aber auch unter anderem ein Ergebnis, was die Sonne eindeutig als größten der drei Himmelskörper ausweist und schlußfolgerte daraus, daß sie dann deshalb im Mittelpunkt der Welt stehen müsse, da es doch wahrscheinlicher sei, daß sich das kleinere Objekt um das größere bewege und nicht umgekehrt. Somit gab er eine erste wissenschaftliche Begründung für ein heliozentrisches Weltbild. Das macht seine Experimente so bedeutsam, auch wenn die numerischen Ergebnisse auf Grund der zeitbedingten Meßfehler ziemlich ungenau waren. Demgegenüber standen vor allem die Argumente von Aristoteles, daß die Erde ruhen müsse, also folglich im Mittelpunkt stehen müsse, weil bei einer Bewegung sonst u. a. ein größerer „Fahrtwind" zu spüren sein müsse. Dieses, uns heute sehr absurd erscheinende, Argument hielten die Menschen damals im Verbund mit anderen für wesentlich plausibler als die Argumente von Aristarch, nicht zuletzt vielleicht auch wegen der großen Popularität von Aristoteles, die über viele Jahrhunderte das Denken der Menschen beeinflußte. So erwähnte der hervorragende Mathematiker und Geograph Klaudios Ptolemaios (etwa 83 bis 161 u. Z.) in seinem berühmten Werk „Einführung in die Geographie" zwar auch die Ergebnisse Aristarchs, stellte sich aber eindeutig auf die Seite von Aristoteles. Die Ideologie der katholischen Kirche tat dann ein übriges, so daß erst Nikolaus Kopernikus dem heliozentrischen Weltbild zum Durchbruch verhelfen konnte. Durch Eratosthenes von Kyrene (etwa von 276 bis 195 v. u. Z.) wurde der Erdumfang erstaunlich gut bestimmt, dadurch wurde es nun möglich, bereits in der Antike Aussagen über die absolute Größe der Himmelskörper zu treffen. Ein anderer Grieche, Hipparch von Nikaia (etwa 190 bis 125 v. u. Z.), führte u. a. die Beschreibung der Lage von Punkten auf der Erdoberfläche durch die Angabe der geographischen Länge und Breite ein. Gerade die Beschreibung der Lage von Punkten der Erdoberfläche war für die Geographie unerläßlich, ging es doch neben dem Wiederauffinden von bestimmten Orten u. a. auch um die exakte Darstellung von Gebieten, und für beides ist die Verwendung von Koordinaten unabdingbar. War die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes relativ leicht, indem man die Polhöhe mit Winkelmeßgeräten wie z. B. dem Jakobsstab oder später dem Sextanten ermittelte, so erwies sich die Ermittlung der geographischen Länge als Problem, da Zeitunterschiede zwischen den Orten gemessen werden mußten (1 Stunde Zeitdifferenz = 15° Längenunterschied). Schon Hipparch schlug deshalb die Bestimmung der Zeitdifferenz durch die synchrone Beobachtung eines astronomischen Ereignisses von verschiedenen Orten der Erde aus und den Vergleich der jeweiligen Ortszeit für dieses Ereignis vor. Diese Methode blieb über mehr als 1000 Jahre ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand der Astronomie. Erst später, nach der Erfindung des Chronometers (Uhr mit hoher Ganggenauigkeit) durch John Harrison (1693 bis 1796), war es möglich, durch die Mitnahme der Ortszeit eines Eichortes, die Zeitdifferenz zum gesuchten Ort und damit die Längendifferenz zu ermitteln (vgl. Artikel von P. Schreiber in alpha 19 (1985) 2, S. 40/41).

Natürlich leitete man auch die Lage anderer Orte durch direkte Entfernungsmessungen ab, aber diese Messungen, die in der Antike vor allem durch Bematisten (Schrittzähler) ermittelt wurden, waren lange Zeit sehr ungenau. Aber durch die Verwendung von Dreiecksnetzen bei der Vermessung (Triangulation), die wahrscheinlich auf Peter Apian (1495–1552) zurückgeht, und die wesentliche Verbesserung der Meßinstrumente und -methoden, konnten die realen Lageverhältnisse später sehr genau ermittelt werden. Lange Zeit spielte auch die Gradmessung, also die Vermessung eines bestimmten Meridianbogens, eine bedeutende Rolle, wollte man doch neben der Größe der Erde auch ihre wirkliche Gestalt erfahren. Viele berühmte Mathematiker, wie z. B. auch C. F. Gauß, beteiligten sich an solchen Experimenten (vgl. Artikel von K.-G. Steinert in alpha 11 (1977) 2 S. 25ff.). Erstmals war 1617 eine solche Gradmessung mittels Triangulation durch den niederländischen Mathematiker W. Snellius (1580–1626) durchgeführt worden. Der Nachweis der Erdabplattung erfolgte durch den Vergleich solcher Gradmessungen von 1736/37; an denen u. a. Wissenschaftler wie Anders Celsius (1701–1744) teilnahmen (vgl. Artikel von P. Schreiber in alpha 18 (1984) 3 S. 71). Durch viele spätere, immer genauere Messungen, in jüngster Zeit sogar mit Satellitenunterstützung, kann die Gestalt und Größe der Erde heute als weitestgehend geklärt angesehen werden.

Die Frage der Darstellung der Erdoberfläche auf Karten ist ein weiteres historisches Problem dieser Stufe. Sie wird sehr umfassend z. B. im Buch „Kartenentwürfe der Erde" von E. Schröder (Math. Schülerbücherei Nr. 128) behandelt, deshalb sei sie hier nur erwähnt. Die Karte ist aber für die geographische Arbeit aller Teildisziplinen als ein sehr wesentliches Hilfsmittel anzusehen. Von den mathematischen Disziplinen wurden durch die Kartographie sowohl die Darstellende Geometrie als auch die Differentialgeometrie angeregt.

Aber auch die Graphentheorie erhielt z. B. durch das, aus der Kartographie stammende, Vierfarbenproblem einen bedeutenden Impuls, nämlich durch die Fragestellung, ob 4 verschiedene Farben ausreichen, jede beliebige Landkarte so zu färben, daß alle benachbarten Länder jeweils verschiedenfarbig sind. Diese Frage wurde erstmalig von A. de Morgan im Jahre 1852 gestellt (vgl. Artikel von H. Pieper in alpha 12 (1978) 5 S. 97f.). Dieses Problem und Fragestellungen nach optimalen Verkehrsnetzen, Industriestandorten u. dgl. sind wichtige mathematische und geographische Fragen bis in die Gegenwart. Auch hierbei spielt die Graphentheorie eine bedeutende Rolle, z. B. auch bei der Frage nach kostengünstigen Straßennetzen (vgl. Artikel von W. Träger in alpha 23 (1989) 5 S. 98ff.).

Das Problem der optimalen Eisenbahnverbindung zwischen den Städten Harburg, Bremen, Hannover und Braunschweig führte C. F. Gauß 1836 auf eine Variante des sogenannten Fermat'schen Problems zurück, das seit der Mitte dieses Jahrhunderts beständig als Steiner-Problem bzw. Steiner-Weber-Problem bezeichnet wird und noch heute seine Bedeutung in der Graphentheorie besitzt (vgl. u. a. den Artikel von P. Schreiber in alpha 21 (1987) 2 S. 25f.). Aus geographischer Sicht spielen diese Fragen z. B. noch bei der Streckenoptimierung von Erdgasferntrassen eine Rolle. Andere, modernere Berührungspunkte in diesem Entwicklungsabschnitt dienen z. B. der Klassifikation geographischer Objekte und ihrer Beschreibung mit Kennziffern. Zu erwähnen sind in diesem Zusammenhang semiquantitative Verfahren, mit deren Hilfe die Gestalt und Konfiguration solcher Objekte wie z. B. Siedlungen oder auch Flußeinzugsgebiete vergleichbar gemacht werden sollen, so daß man Maßzahlen für sie einführen kann.

O. Kappler

Die Gedankenwelt des Joh. G. Aug. Galletti, Professor am Gymnasium zu Gotha

Das ist dabei das allerwichtigste, was aber von gar keiner Bedeutung ist.

Afrika hat auf allen 4 Ecken eine rundliche Gestalt, die sich gegen die Mitte verengt.

Die Mauern von Babylon waren so breit, daß 4 Wagen übereinander fahren konnten.

Nordamerika besteht aus lauter großen und kleinen Inseln, von denen jedoch die wenigsten von Wasser umflossen sind.

Das Känguruh springt 32 Fuß. Es würde noch weiter springen, wenn es 4, statt 2 Beine hätte.

Als ich Sie von Ferne sah, Herr Hofrat Ettinger, glaubte ich, Sie wären Ihr Bruder, der Buchhändler Ettinger, als Sie jedoch näher kamen, sah ich, daß Sie es selbst sind – und jetzt sehe ich nun, daß Sie Ihr Herr Bruder sind.

Nicht unbemerkt wollen wir lassen, daß der Herzoglich Sächsische Hofrat durchaus kein Narr, sondern anerkannter Historiker und Geograph war.

Wie uns die Einerziffer helfen kann

Schon beim Treppensteigen hatte Stefan den umfänglichen Umschlag mit einem Brief von seinem Freund Nikolai geöffnet. Nach den üblichen alltäglichen Nachrichten las Stefan am Ende des Briefes folgendes:

Schau Dir aufmerksam folgende Tabelle an.

Tabelle 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
k^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
k^4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
k^5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

In der ersten Zeile stehen alle Dezimalziffern, mit anderen Worten, die Einerziffern jeder natürlichen Zahl k. In den anderen Zeilen stehen alle möglichen Einerziffern der natürlichen Zahlen der Art k^2, k^3, k^4 und k^5. Ich habe k^2 als $k \cdot k$, die Zahl k^3 als $k^2 \cdot k$, k^4 als $k^3 \cdot k$ und k^5 als $k^4 \cdot k$ dargestellt.
Wenn die Einerziffer der Zahl k beispielsweise 8 ist, so ist die Einerziffer von k^2 gleich der Einerziffer von $8 \cdot 8 = 64$, also 4; die Einerziffer von k^3 ist gleich der Einerziffer von $8 \cdot 4 = 32$, also 2 usw.
Nachdem die Tabelle ausgefüllt war, stellte ich fest, daß die erste gleich der letzten Tabellenzeile ist. Das bedeutet, daß die natürlichen Zahlen k und k^5 ein und dieselbe Einerziffer besitzen. So gibt die Tabelle die Lösung für folgende Aufgabe an.

Aufgabe 1: Es ist nachzuweisen, daß die Einerziffer von k^5 für jede natürliche Zahl k gleich der Einerziffer von k ist.
Ich habe absichtlich die Aufgabe numeriert, weil ich Dir vorschlage, daß wir mit Hilfe der Tabelle noch andere Aufgaben suchen. Ich erwarte Deine Vorschläge mit Ungeduld, Nikolai.

Dem Stefan hat Nikolais Aufgabe gut gefallen. Ihm ist sofort aufgefallen, daß die Zahl $k^5 - k$ teilbar durch 10 ist, wenn die Zahlen k und k^5 ein und dieselbe Einerziffer besitzen.
Denn die Einerziffer von $k^5 - k$ ist gleich der Differenz der Einerziffer von k^5 und der Einerziffer von k, d. h. 0.
Nach einigen Tagen hatte Stefan genug Material gesammelt, um Nikolai eine Antwort geben zu können.

Lieber Nikolai!
Ich nehme die Idee an, die Du mir anbietest. Gleich, nachdem ich den Brief gelesen hatte, habe ich festgestellt, daß man noch folgende Aufgabe formulieren kann:

Aufgabe 2: Es ist nachzuweisen, daß für jede natürliche Zahl k
$k^5 - k$ durch 10 teilbar ist.

Für mich war die vierte Tabellenzeile von besonderem Interesse. Durch sie wird klar, daß alle möglichen Einerziffern der Zahlen in der Form k^4 gleich 0, 1, 5 und 6 sind. Genauer, wenn die Einerziffer von k gleich 0 oder 5 ist, dann ist die Einerziffer von k^4 auch 0 oder 5 und folglich ist k^4 auch teilbar durch 5. In allen übrigen Fällen (Einerziffer von k ist 1 oder 6) bleibt beim Dividieren von k^4 durch 5 der Rest 1. So haben wir die Lösung der Aufgabe 3 erhalten.

Aufgabe 3: Es sei k eine natürliche Zahl. Es ist nachzuweisen, daß die möglichen Reste bei der Division von k^4 durch 5 gleich 0, wenn k (und folglich auch k^5) teilbar durch 5 ist, und 1 sind, wenn k nicht durch 5 teilbar ist.

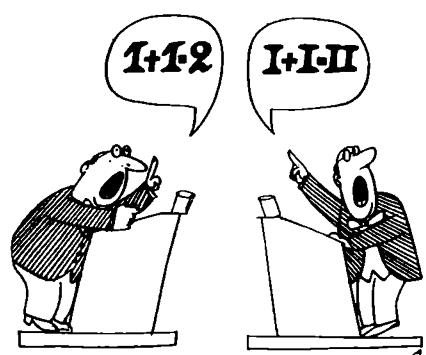
Seien x und y natürliche Zahlen. Wenn sie teilbar durch 5 sind, ist es klar, daß die Zahl $x^4 + 4y^4$ teilbar durch 5 ist. Die Aufgabe 3 hat mir geholfen einen weiteren Fall zu finden, in dem die Summe $x^4 + 4y^4$ teilbar durch 5 ist.

Aufgabe 4: Die Zahlen x und y seien natürliche Zahlen und nicht durch 5 teilbar. Es ist nachzuweisen, daß die Summe $x^4 + 4y^4$ durch 5 teilbar ist.
Lösung: Da x nicht durch 5 teilbar ist, ergibt entsprechend der Aufgabe 3 die Division von x^4 durch 5 den Rest 1. Die Division von y^4 durch 5 ergibt ebenfalls den Rest 1. Folglich bleibt bei Division von $4y^4$ durch 5 der Rest 4. Dann ist der Rest bei der Division von $x^4 + 4y^4$ durch 5 gleich $1 + 4 = 5$, damit ist $x^4 + 4y^4$ durch 5 teilbar.
Noch mehr: die beiden genannten Fälle sind die einzigen, bei denen die Summe $x^4 + 4y^4$ teilbar durch 5 ist.
Mit anderen Worten, ich habe die Aufgabe 5 gefunden und es geschafft, sie zu lösen:

Aufgabe 5: Es ist nachzuweisen, daß 5 nicht Teiler der Summe $x^4 + 4y^4$ genau dann, wenn eine der natürlichen Zahlen x und y teilbar durch 5 ist und die andere nicht.
Lösung: a) Wenn x teilbar durch 5 ist und y nicht, so ergibt x^4 einen Rest von 0 bei der Teilung durch 5 und y^4 ergibt einen Rest von 1 bei der Division durch 5. Dann ergibt $x^4 + 4y^4$ den Rest $0 + 4 \cdot 1 = 4$ bei der Division durch 5 und ist folglich nicht durch 5 teilbar.
b) Wenn 5 Teiler von y, nicht aber von x ist, dann ergibt x^4 einen Rest von 1 und y^4 einen Rest von 0 bei der Division durch 5. Dann ergibt $x^4 + 4y^4$ den Rest $1 + 4 \cdot 0 = 1$ bei der Division durch 5, ist also nicht durch 5 teilbar.
Ich habe noch festgestellt, daß mit Hilfe der Aufgabe 3 eine Aufgabe gelöst werden kann, die ich in der sowjetischen Zeitschrift „Quant" gelesen habe. Ich werde Dir die Aufgabenstellung aufschreiben und schlage Dir vor, die Lösung zu finden.

Aufgabe 6: Seien a, b, c, d und e natürliche Zahlen, für die gilt:
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Es ist nachzuweisen, daß dann mindestens drei der Zahlen a, b, c, d durch 5 teilbar sind. Stefan

Wird Nikolai diese Aufgabe bewältigen? Und Ihr, liebe Leser?



aus Eulenspiegel, Berlin

Nach einer Weile erhielt Stefan Nikolais Antwort.

Lieber Stefan!
Ich beginne mit der *Lösung* der Aufgabe 6.
Angenommen, es gibt natürliche Zahlen a, b, c, d und e so, daß die Gleichung
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ gültig ist.
Wir wissen, daß die Zahl e^4 bei Division durch 5 den Rest 0 läßt, wenn e teilbar durch 5 ist und 1, wenn 5 nicht Teiler von e ist. Es versteht sich, daß auch jede der Zahlen a^4, b^4, c^4 und d^4 den Rest 0 oder 1 bei der Division durch 5 läßt. Folglich ist der Rest, den die Division von
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ durch 5 ergibt, gleich einer Summe von 4 Zahlen, von denen jede gleich 0 oder 1 ist. Es ist klar, daß diese Summe nur gleich 0 oder 1 sein kann, wenn mindestens drei der Summanden gleich 0 sind. Das bedeutet, daß mindestens drei der Zahlen a, b, c oder d durch 5 teilbar sein müssen.

In der Aufgabe 2 beweist Du, daß die Zahl $k^5 - k$ für jede natürliche Zahl k durch 10 teilbar ist.
Da aber
$k^5 - k = k(k^4 - 1) = k(k^2 - 1)(k^2 + 1)$
$= (k - 1)\,k\,(k + 1)(k^2 + 1)$

und von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $k-1$, k, $k+1$ eine durch 3 teilbar ist, ist die Zahl k^5-k ebenfalls durch 3 teilbar. Da 10 und 3 teilerfremd sind, ist k^5-k teilbar durch 30. So haben wir die Lösung einer Aufgabe 7 erhalten.

Aufgabe 7: Es ist nachzuweisen, daß für jede natürliche Zahl k
k^5-k durch 30 teilbar ist.

Jetzt schlage ich Dir vor, selbst die Aufgabe 8 zu lösen.

Aufgabe 8: Es ist nachzuweisen, daß keine natürlichen Zahlen x und y existieren, für die $2x^2-5y^2=29$ ist.

Ich erwarte Deine Lösung! Nikolai

Lieber Nikolai!
Hier beschreibe ich Dir die Lösung der Aufgabe 8.
Betrachten wir die Tabelle 2, in deren Zeilen alle möglichen Einerziffern der Zahlen der linken Spalte aufgeschrieben sind.

Tabelle 2

x oder y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x^2 oder y^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
$2x^2$	2	8	8	2	0	2	8	8	1	0
$5y^2$	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0

Aus dieser Tabelle wird ersichtlich, daß die Einerziffer von $29+5y^2$ gleich 4 oder 9 ist. Deswegen kann sie nicht gleich der Einerziffer von $2x^2$ sein. Folglich gibt es keine natürlichen Zahlen x, y, welche die Gleichung $2x^2-5y^2=29$ erfüllen.
Jetzt schlage ich vor, der Tabelle 1 noch eine Zeile hinzuzufügen:

k^{10}	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

In dieser Zeile stehen alle möglichen Einerziffern der natürlichen Zahlen der Art k^{10}. Für deren Ermittlung habe ich die Tatsache genutzt, daß $k^{10}=k^5\cdot k^5$ ist.
Diese Zeile wird uns helfen, die Aufgabe 9 zu lösen.

Aufgabe 9: Es sollen alle natürlichen Zahlen k ermittelt werden, für die $k^{10}+1$ durch 10 teilbar ist.

Lösung: Die Zahl $k^{10}+1$ ist teilbar durch 10 dann und nur dann, wenn ihre Einerziffer gleich 0 ist, d. h. genau dann, wenn die Einerziffer von k^{10} gleich 9 ist. Aus der Zeile k^{10} ist ersichtlich, daß dies nur der Fall ist, wenn die Einerziffer von k gleich 3 oder 7 ist. So sind die gesuchten Zahlen alle natürlichen Zahlen, deren Einerziffer gleich 3 oder 7 ist.
Herzliche Grüße! Stefan

Wahrscheinlich haben Stefan und Nikolai die Aufgabenliste fortgesetzt. Wir bieten Euch, liebe Leser, folgende Aufgaben zum Selbstlösen an:

Aufgabe 10: Es ist nachzuweisen, daß keine natürlichen Zahlen n existieren, für die n^2+3 durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 11: Es ist nachzuweisen, daß die Summe der Quadrate zweier ungerader Zahlen kein Quadrat einer ganzen Zahl sein kann.

Aufgabe 12: Es sind alle natürlichen Zahlen x und y zu ermitteln, für die mindestens eine der Zahlen
$x^2-2xy+2y^2$ und $x^2+2xy+2y^2$
durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 13: Existiert eine natürliche Zahl n so, daß dem Ausdruck $\frac{n(n+1)}{2}$ eine Zahl entspricht, die auf 1989 endet? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 14: Ist es möglich, daß
$a^2+b^2-c^2$ durch 5 teilbar ist, wenn keine der ganzen Zahlen a, b, c den Teiler 5 hat?
Begründe Deine Antwort.

L. Ljubenov

Die Lösungen der Aufgaben 10 bis 14 geben wir in alpha nicht an. Solltet Ihr Probleme dabei haben, wendet Euch bitte an Euren Mathematiklehrer.

Mathematische Schülerbücherei

Im Jahr 1975 erschien im Deutschen Verlag der Wissenschaften der erste Band der Mathematischen Schülerbücherei (MSB). Über 16 Jahr lang beteiligten sich sechs Verlage der ehemaligen DDR an der Herausgabe dieser Reihe mit dem Ziel, mathematische Literatur vor allem für Schüler bereitzustellen. Im Heft 2/88 veröffentlichte *alpha* deren Liste bis zum Band 138. Inzwischen kann sie um zwei Bände erweitert werden:

MSB 139

W. Engel/U. Pirl

Mathematik in Aufgaben

ISBN 3-326-00505-9 Preis: 28,00 DM
Deutscher Verlag der Wissenschaften GmbH

In der 2. Auflage erscheint in diesem Verlag der MSB-Band:

H. Pieper

Heureka. Ich hab's gefunden

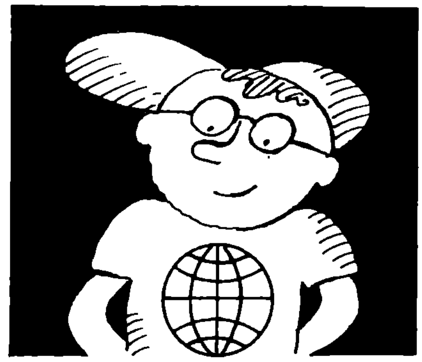
55 historische Aufgaben der Elementarmathematik
ISBN 3-326-00364-1 Preis: etwa 24,80 DM

MSB 148

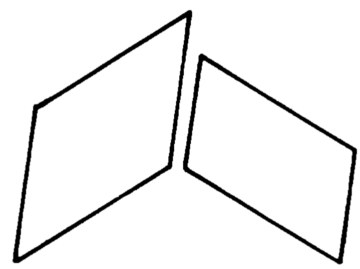
Flachsmeyer/Feiste/Manteuffel

Mathematik und ornamentale Kunstformen

Bestell-Nr. 666 514 7 Preis: 16,80 DM
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft



▲1▲ Find the line
The drawing shows two parallelograms in the same plane. It is very easy to cut each of them into two parts of equal area. We can do it by drawing, in each of them separately, a line which provides such a division. But can you draw one straight line which will divide both parallelograms into two such equal parts? Yes you can. Try to find how to draw the line.

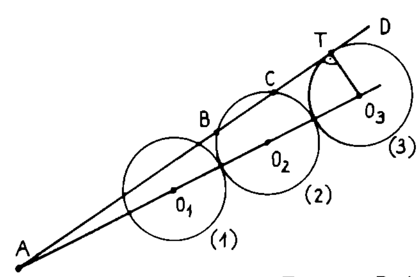


aus: Fun with mathematics, Toronto

▲2▲ Известно, что $a+\frac{1}{a}$ – целое число. Докажите, что $a^3+\frac{1}{a^3}$ – тоже целое число.

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Les trois cercles
Les cercles (1), (2) et (3) ont 2 mètres de diamètre. La droite (D) est tangente au cercle (3), c'est-à-dire O_3T perpendiculaire à AT. Quelle est la longueur de BC?



aus: Tangente, Paris

Quotation

Whatever you do,
Do with your might.
Things done by halves
Are never done right.

Mathematik studieren in Leipzig

Wohl jeder *alpha*-Leser hat Freude an mathematischen Knobeleien, beschäftigt sich gern mit mathematischen Zusammenhängen und interessiert sich möglicherweise auch für mathematische Theorien und deren Anwendungen. Sicher wird es auch nicht wenige Leser der *alpha* geben, die auf diesem „Hobby" ihren Beruf aufbauen wollen. Diesen sei gesagt:

Leipzig ist ein guter Platz ein Studium der Mathematik.

Am Augustusplatz und somit in zentraler und äußerst verkehrsgünstiger Lage – und überdies an traditioneller Stätte – beherbergt das Hauptgebäude der Universität auch den **Fachbereich Mathematik.** Kaum einen Steinwurf davon entfernt befinden sich Hörsaal- und Seminargebäude, die Zentralmensa, eine Zweigstelle der Universitätsbibliothek und der Studentenklub „Moritzbastei"; in unmittelbarer Nähe auch Gewandhaus und Oper sowie Hauptpost und Hauptbahnhof. Daraus erwachsen den Studenten der Mathematik günstige Arbeitsbedingungen, Zeit und Geld für lange Wege werden gespart. Übrigens: Sorgen wegen überfüllter Hörsäle und Seminarräume sind unbegründet, in den Computerkabinetten findet man noch immer freie Zeit zum Arbeiten. Der Fachbereich Mathematik verfügt über eine eigene, wohlausgestattete Bibliothek, deren Bestände auch jedem Studenten im Lesesaal zur Verfügung stehen.

Lehre und Forschung auf dem Gebiet der Mathematik besitzen in Leipzig eine lange Tradition.

Davon zeugen die Namen solcher Gelehrten wie Sophus Lie, Carl Neumann und Leon Lichtenstein, Felix Klein und B. L. van der Waerden.
Heute repräsentieren 25 Hochschullehrer ein breites Themenspektrum in der Forschung. An folgenden Abteilungen des Fachbereiches sind wichtige Forschungsrichtungen durch Lehrstühle vertreten: Algebra, Analysis, Funktionalanalysis/Mathematische Physik, Informationsverarbeitung/Numerik, Optimierung/Wirtschaftsmathematik sowie Didaktik der Mathematik und Informatik.

Der Fachbereich Mathematik bietet vielseitige Ausbildungsmöglichkeiten.

Man kann ein Studium aufnehmen, welches in der Regel nach fünf Jahren mit dem Erwerb des akademischen Grades **Diplommathematiker** abgeschlossen wird. Mathematiker werden sowohl zur Grundlagenforschung in der Mathematik selbst als auch zur Lösung konkreter Probleme in Wirtschaft, Technik und in „angewandten" Wissenschaften gebraucht.
Der Diplomstudiengang **Wirtschaftsmathematik** setzt sich aus dem Studium der Mathematik, der Wirtschaftswissenschaft und der Informatik etwa im Verhältnis 5 : 3 : 2 zusammen. In der Regel wird dieses Studium nach 9 Semestern mit dem akademischen Grad **Diplomwirtschaftsmathematiker** abgeschlossen. Im Grundstudium gleicht hier die Ausbildung im wesentlichen der im Diplomstudiengang Mathematik. Im Hauptstudium überwiegen jene Disziplinen, welche für einen späteren beruflichen Einsatz vor allem in der Wirtschaft, im Bank- und Versicherungswesen besonders bedeutsam sind – z. B. Optimierung, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dazu kommt eine vertiefte Ausbildung in Informatik einschließlich rechentechnischer Praktika und in den Wirtschaftswissenschaften.
Im Studiengang **Lehramt** kann man Mathematik als eines der Kombinationsfächer studieren. Dieses Fach wird an nahezu allen Schulen mit einer relativ hohen Wochenstundenzahl gelehrt. Für die Wahl eines zweiten Kombinationsfaches bietet sich an der Universität Leipzig ein breites Spektrum an, von Physik, Chemie, Biologie bis hin zu Englisch, Französisch oder Russisch. Das Lehrerstudium an der Universität wird in der Regel nach vier bzw. fünf Jahren mit der **1. wissenschaftlichen Staatsprüfung** abgeschlossen, je nachdem, ob man als Lehrer an einer Haupt- oder Realschule oder an einem Gymnasium tätig sein möchte.
Ein Wechsel von einem Studiengang für ein Lehramt zu einem Diplomstudiengang (und umgekehrt) ist während des Grundstudiums durchaus noch möglich.

Ein Studium der Mathematik – und was dann?

Die Chancen, eine Arbeitsstelle als Diplommathematiker bzw. als Diplomwirtschaftsmathematiker oder eine Anstellung als Mathematiklehrer zu bekommen, sind zur Zeit und auch in naher Zukunft recht günstig. Spätestens ab Mitte der neunziger Jahre wird es in allen Bundesländern auch einen großen Bedarf an Lehrern, insbesondere an Mathematiklehrern, geben. Die Einsatzaussichten steigen sicher noch, wenn der Bewerber über Kenntnisse in Informatik und über Fähigkeiten im Umgang mit Rechentechnik verfügt. Es ist sicher nicht uninteressant zu wissen, daß an einer Universität ausgebildete Gymnasiallehrer für Mathematik und ein attraktives weiteres Fach auch gute Einstellungschancen außerhalb des Schulwesens besitzen.

Von der Immatrikulation bis zum Examen – ein Studium im Überblick.

Für alle Studiengänge ist die Hochschulreife einzige Zulassungsvoraussetzung, Beschränkungen gibt es nicht. Die Immatrikulation erfolgt in der Regel zu Beginn des Wintersemesters im September/Oktober eines jeden Jahres. Während des **Grundstudiums** hört der Student überwiegend obligatorische Basiskurse (Differential-/Integralrechnung, Differentialgleichungen, Algebra und Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Informatik). Zu den Vorlesungen gehören Seminare und Übungen in kleinen Gruppen, in denen individuell auf die Studenten eingegangen werden kann. Überhaupt ist die persönliche Beratung und Betreuung jedes einzelnen Studenten ein Kennzeichen des Leipziger Fachbereichs Mathematik. Das Grundstudium schließt mit der Diplom-Vorprüfung bzw. (bei Lehrerstudenten) mit der Staatszwischenprüfung in der Regel nach dem vierten Semester ab.
Im **Hauptstudium** wählt der Student entsprechend seinen wissenschaftlichen Interessen Aufbau- und Vertiefungskurse sowie Spezialvorlesungen aus den Angeboten der einzelnen Abteilungen des Fachbereichs aus. Daneben setzt er seine Ausbildung im gewählten Neben- bzw. Kombinationsfach fort.
Das Studium wird mit der **Diplomprüfung** in den Diplomstudiengängen bzw. mit der 1. wissenschaftlichen **Staatsprüfung** in einem Lehramtsstudium abgeschlossen. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Prüfung ist die selbständige Bearbeitung eines Themas in einer wissenschaftlichen Arbeit. Mit der Entgegennahme der Diplomurkunde hat man das Recht zu weiterführenden Studien, die zur Promotion sowie zur Habilitation führen.

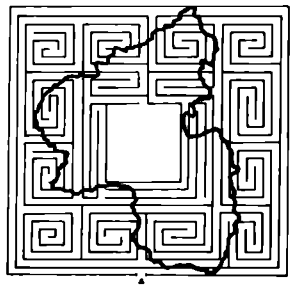
Natürlich lockt Leipzig die Studenten auch als Stadt des Handels, des Buches und der Kunst.

Leipzig bietet sich als eine anregende und produktive, in Aufbruch und Umgestaltung befindliche Stätte dar, an der jeder Student vielfältige Interessen pflegen und neue Anregungen aufnehmen kann.
Sollte Ihr Interesse an einem Studium der Mathematik an der Universität Leipzig geweckt worden sein, so fordern Sie bitte weitere Informationen an:
Universität Leipzig
Studienabteilung des
Fachbereichs Mathematik
Telefon 7 19 24 82
Augustusplatz
O-7010 Leipzig

In diesem Heft haben wir auf Wunsch vieler Leser in Form gleich zweier Beiträge die Informationen über Ausbildungsmöglichkeiten mathematisch Interessierter wieder aufgenommen. Angestrebt wird, diese Beiträge stets mit mathematischen Problemen anzureichern. Daß der Beitrag der Leipziger Universität da etwas aus dem Rahmen fällt, hat gute Gründe. Seit 25 Jahren prüfen Mathematiker dieser Universität die meisten Beiträge auf Eignung für alpha, hilft das Sudhoff-Institut bei historischen Belangen und findet alpha dort zuverlässige Autoren, haben sich also enge Kontakte zum Wohle von alpha entwickelt.

Alphons

Landeswettbewerb Mathematik auch in Rheinland-Pfalz



Erstmalig nahmen an der Erfurter Kreisolympiade 25 Schülerinnen und Schüler aus Rheinland-Pfalz teil. Neben der Teilnahme an der 2. Stufe gab es für die Gäste ein interessantes Rahmenprogramm (Stadtführung durch Erfurt, Besuch des optischen Museums und der Zeisswerkstatt in Jena, Stadtbummel durch Weimar, Besichtigung der Wartburg in Eisenach). Das Wichtigste aber dürften die geknüpften Freundschaften sein. Im April 1991 ist dann der Gegenbesuch der Erfurter Schüler in Mainz geplant.

Wir erfuhren, daß auch in Rheinland-Pfalz ein Mathematikwettbewerb stattfindet. Seit dem Schuljahr 1989/90 gibt es für die Schüler der 8. und 9. Klassen einen Landeswettbewerb.

*Monoid** berichtet darüber:

„Die Beteiligung an der 1. Runde im November 1989 übertraf bereits alle Erwartungen: An insgesamt 94 Gymnasien beteiligten sich 1500 Schülerinnen und Schüler der 8. Klassen an einer zweistündigen Klausur, zusätzlich versuchten sich auch 180 „Frühstarter“ aus 7. Klassen an der Lösung der anspruchsvollen und interessanten Aufgaben.

Der Wettbewerb besteht aus insgesamt drei Runden.

Die 1. Runde richtet sich an Schüler der 8. Klassen, die in einer zweistündigen Klausur 5 „Knobel- und Denkaufgaben“ lösen müssen.

Die 2. Runde richtet sich an die Preisträger der 1. Runde, die dann in der 9. Klasse sind und hier 4 umfangreichere Aufgaben in Hausarbeit bewältigen müssen. Die 3. Runde schließlich hat weniger Wettbewerbs- als zusätzlichen Anregungs- und Förderungscharakter: kleinere Gruppen besonders begabter Schüler werden zu einem mehrtägigen „mathematischen Feriencamp“ an die Universitäten unseres Landes eingeladen, wo sie zusammen mit Professoren interessante Einblicke in die Welt der Mathematik erhalten und ihre Problemlösefähigkeiten trainieren können.“ [1]

Nachstehend stellen wir euch die Aufgaben der 1. Runde 1990 vor und wünschen euch viel Spaß beim Lösen. (Lösungen auf S. 48)

W. Moldenhauer

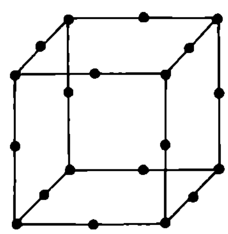
/1/ Monoid, 10 (1990) 28, S. 22

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

Die Aufgaben müssen nicht in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. Es werden auch richtige Teillösungen gewertet. Die wichtigsten Lösungsschritte müssen aufgeschrieben werden. Es genügt nicht, nur das Ergebnis einer Aufgabe anzugeben. In den meisten Fällen ist es nützlich, die Lösung an Hand einer Skizze, Zeichnung oder Tabelle zu erläutern.

Aufgabe 1

Aus Kugeln und Verbindungsstäben werden – wie in der Abbildung zu sehen ist – Würfel gebaut.



Bestimme in der Tabelle jeweils die fehlende Anzahl!

Kugelanzahl auf einer Kante	3	4	10		1000
Gesamtzahl der Kugeln	20	32		80	

Begründe den Rechenweg für die Kugelanzahl auf einer Kante: 1000.

Aufgabe 2

Aus dem Alltag im alten Ägypten:

Ein Schuhmacher vermag an einem Tag entweder 15 Paare Sandalen aus dem Leder zuzuschneiden oder 10 Paare Sandalen aus bereits zugeschnittenen Teilen zusammenzunähen.

Nun will er an einem Tag sowohl zuschneiden als auch zusammennähen.

Wie viele Sandalenpaare kann er dann an einem Tag aus noch nicht zugeschnittenem Leder herstellen?

Aufgabe 3

Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC. Markiere D als Mittelpunkt der Strecke AB und E als Mittelpunkt der Strecke AC. Verlängere die Strecke DE über E hinaus auf die doppelte Länge. Der Endpunkt dieser Verlängerung ist F.

Begründe nun, daß das Viereck $ADCF$ ein Rechteck ist!

Aufgabe 4

Es gilt: $1 = 77:77$

$2 = 7:7 + 7:7$

$3 = (7 + 7 + 7):7$

Stelle nun die Zahlen 4, 5, 6 und 7 ebenfalls mit Hilfe von genau vier Ziffern 7 dar! Verwende dabei die Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und Klammern!

Aufgabe 5

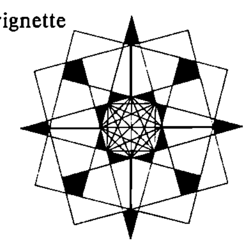
In einem Jahr stieg die Einwohnerzahl einer Stadt um 6 %, das Müllvolumen jedoch nur um 2 %.

Wieviel % Müll wurden durchschnittlich eingespart?

Gib das Ergebnis mit einer Nachkommastelle an!

* MONOID – Mathematikblatt für Mitdenker erschien erstmals im Juni ’81. Ursache war ein innerschulischer Wettbewerb zur 200-Jahrfeier des Karolinen-Gymnasiums, Frankenthal im Jahr 1980. Die Ergebnisse und schönsten Lösungen wurden festgehalten, eine Lösung des damals hochaktuellen „Rubik-Würfels“, eine Knobelseite und neue Aufgaben kamen hinzu, Name und Titelblatt wurden gesucht – fertig war die 32seitige Zeitschrift. Und da sich die Herausgeber (Lehrer und Schüler) darin zu einer zweiten Ausgabe verpflichteten, wurde eine Schülerzeitschrift ins Leben gerufen. Bisher erschienen 23 Hefte, davon drei Sonderhefte in Zusammenarbeit von Lehrern und Schülern, inzwischen auch vom Gymnasium an der Frankenstraße, Alzey.

Titelvignette



Ähnlich wie *alpha* hat auch *Monoid* feste Rubriken: „Neue Aufgaben“, „Gelöste Aufgaben“, „Wir lernen eine neue Formel“, „Knobelseite“, „Die Aufgabe von Anno dazumal“, ...

In der Rubrik „Neue Aufgaben“ erscheinen pro Heft 10–15 von Lehrern oder Schülern gestellte Aufgaben. Die Lösungen können eingesandt werden. Die Korrektur übernehmen Schüler der Stufen 12–13, die Preisverleihung findet im festlichen Rahmen kurz vor den Weihnachtsferien statt.

Inzwischen arbeiten mindestens 15 verläßliche Mitarbeiter mit viel Engagement an ihrer Zeitschrift, die mit einer Auflage von etwa 350 Exemplaren die Grenzen beider Gymnasien weit überschritten hat. *Alphons*

Mathematik – katastrophal und paradox!?

Es ist schon paradox, da gibt es schöne neue Regeln für das Kürzen von Brüchen, und kein Lehrer bringt sie seinen Schülern bei:

$$\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\quad \frac{1998}{8991}=\frac{198}{891}=\frac{18}{81}.$$

Und nicht nur für das Kürzen von Brüchen gibt es so einfache Regeln, es sind auch

$$\frac{9-25}{6+10}=\frac{9}{6}-\frac{25}{10},$$

$$\frac{121-64}{55+40}=\frac{121}{55}-\frac{64}{40},$$

sogar das manchmal verflixt komplizierte Rechnen mit Wurzeln kann ganz einfach sein:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}},\quad \sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}.$$

Dies sind nur einige Möglichkeiten, die die Lehrer den Schülern nicht verraten. Es gibt noch viel mehr!

Und jetzt gibt es ein Buch, das dem schlauen Schüler allerhand solcher Geheimnisse verrät:

Logischen Katastrophen auf der Spur heißt es, wurde von **A. G. Konforowitsch** geschrieben, 1990 beim **Fachbuchverlag Leipzig** verlegt (ISBN 3-343-00551-7) und bietet dem Leser für 16,– DM „Mathematische Sophismen und Paradoxa“ (so der Untertitel) in 122 Bildern und 178 Aufgaben mit Lösungen – sowie auf jeden Fall viel Spaß beim Lesen und Mitdenken.

Nicht nur überraschend einfache Rechenregeln kennt der Verfasser dieses Buches, er kann auch katastrophal erscheinende Resultate herleiten wie beispielsweise $1 = 2$.

Und das geht sogar ganz einfach:

Es ist nämlich $1=\frac{2}{3-1}$ und mithin ist auch

$$1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-1}}.$$

Dieses Einsetzen von $\frac{2}{3-1}$ für 1 ist so einfach, daß man es gleich noch mehrmals machen möchte und am liebsten damit gar nicht mehr aufhört, weil man schließlich

$$1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\dots}}}$$

erhält und dieser „Kettenbruch“ so schön einfach und symmetrisch ist. Da sollte man doch gleich einmal versuchen, auch die Zahl 2 solcherart darzustellen.

In der Tat ist $2=\frac{2}{3-2}$, also auch

$$2=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-2}}$$

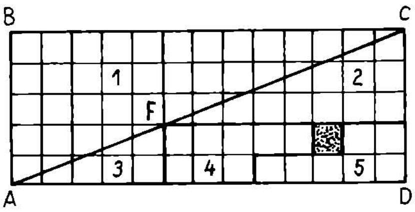
und fortgesetztes Einsetzen ohne Ende liefert dem neugierigen Rechner

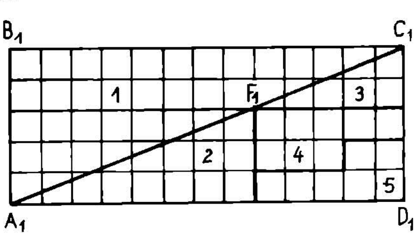
$$2=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\dots}}}$$

und damit die Gleichheit $1 = 2$.

Für den Leser, der dieser Rechnung mißtraut, hält unser Buch auch einen geometrischen Beweis parat. Er ist allerdings etwas umständlicher, weil er einen Umweg beschreitet und erst als Zwischenresultat $64 = 65$ zu beweisen verlangt. Das ist aber ganz einfach einzusehen, wie sich aus den beiden folgenden Bildern durch Flächenumlagerung (nach Zerschneiden längs der stark gezeichneten Linien) sofort ergibt. und damit ist natürlich wieder

$1 = 64 - 63 = 65 - 63 = 2.$





Weitere katastrophale Resultate wie $\pi = 2$ oder $4 > 12$, wie die Gleichwinkligkeit und die Gleichschenkligkeit aller Dreiecke oder die Formel $0 = \pi^2R^2$ für die Oberfläche einer Kugel vom Radius R, die alle in diesem Buch zu finden sind, verschweigen wir lieber. Statt dessen wollen wir die Leser, die jetzt noch nicht auf dem Weg in den nächsten Buchladen sind, noch mit einer Aufgabe aus diesem Buch erfreuen:

Ein Logiker besuchte eine Insel, auf der zwei Völkerschaften lebten, Wahrheitsliebende und Lügner. Die einen sprachen stets die Wahrheit, während die anderen stets logen. An einer Weggabelung fragte der Logiker einen Inselbewohner, welcher Weg ins Dorf führt. Der Reisende wußte nicht, welcher Völkerschaft der Inselbewohner angehörte. Trotzdem stellte er nur eine Frage, aus deren Antwort er genau erfahren konnte, welcher Weg ins Dorf führte. Welche Frage hat er gestellt?

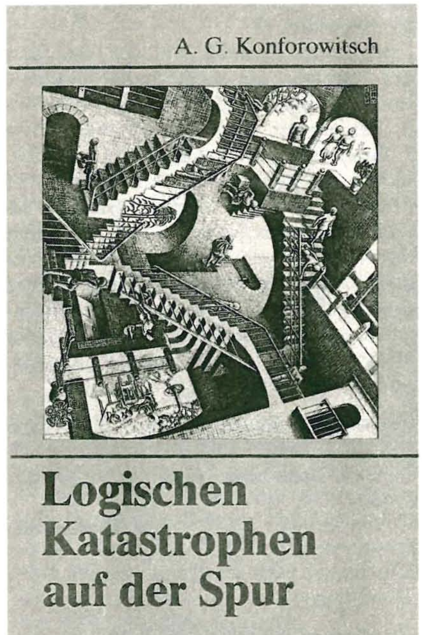
Aber nicht nur mathematische Scherze (mit durchaus ernstem Hintergrund) und Knobeleien bietet dieses Büchlein, es vermittelt dem Leser auch einen Einblick in schwieriger lösbare, scheinbar paradoxe Probleme wie die Frage, ob der jetzt folgende, halbfett gedruckte Satz

Dieser Satz ist falsch.

wahr oder falsch ist. Ist er nämlich wahr, d. h. stimmt es, was er besagt, dann ist er falsch – weil er ja die eigene Falschheit besagt; ist dieser Satz aber falsch, dann stimmt es ja gerade, was er besagt – und also muß er wahr sein. Das Büchlein zeigt auch, wie man durch Übereinanderstellen von 4 Stühlen einen Fluß überqueren kann, es weist nach, daß alle Katzen dieselbe Augenfarbe haben – und es zeigt ein perpetuum mobile, in dem ein Wasserfall in einem geschlossenen Wasserkreislauf ein Mühlrad pausenlos antreibt.

Mathematische und andere Knobeleien im vergnüglichen Gewande erwarten den Leser. Sie bieten dem Lehrer viele Möglichkeiten, im Unterricht nicht nur todernste Aufgaben zu stellen – und gewitzten Schülern manche Variante, ihre „heißgeliebten“ Lehrer mit kniffligen Problemen aufs (mathematische oder logische) Glatteis zu locken. Und ganz nebenbei bekommt jeder Leser noch manch bedenkenswertes Zitat mit auf den Weg, wie eine Bemerkung des deutschen Mathematikers Hermann Weyl (1885–1955): „Die Logik ist die Hygiene, deren sich der Mathematiker bedient, um seine Gedanken gesund und kräftig zu erhalten“ und einen Hinweis des österreichischen Schriftstellers Alfred Polgar (1875–1955): „Und dann erweitern Bücher den Gesichtskreis. Wenn man sie nämlich liest“.

S. Gottwald

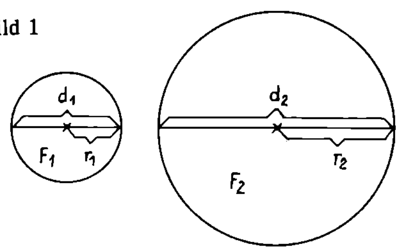


Zwei Sätze über Flächenverhältnisse

Das Flächenverhältnis ähnlicher Figuren

Satz 1: Die Flächeninhalte ähnlicher ebener Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Längen einander entsprechender Strecken.
Dieser Satz ist uns allen gut bekannt.
Deshalb nur drei Beispiele zur Illustration:
a) Zwei Kreise sind immer ähnlich, siehe Bild 1.

Bild 1



Ihre Flächeninhalte seien F_1 und F_2.

$$F_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \quad \text{und}$$

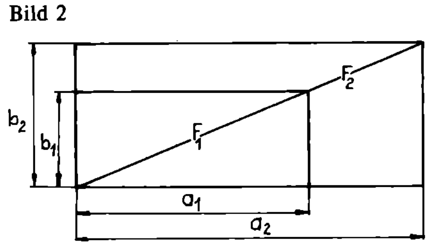
$$F_2 = \pi r_2^2 = \frac{\pi}{4} d_2^2.$$

Also gilt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

b) Zwei Rechtecke sind genau dann ähnlich, wenn die einander entsprechenden Seiten jeweils im gleichen Verhältnis stehen, siehe Bild 2.

Bild 2

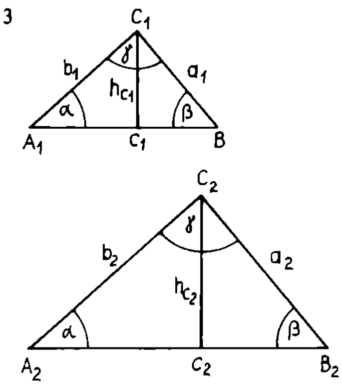


Wegen der Ähnlichkeit gilt
$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$. Die Flächeninhalte sind $F_1 = a_1 b_1$ und $F_2 = a_2 b_2$. Daher gilt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{b_1^2}{b_2^2},$$

was der Leser nachrechnen möge.
c) Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in der Größe zweier ihrer Winkel übereinstimmen, siehe Bild 3.
Einander entsprechende Strecken stehen im gleichen Verhältnis:
$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = h_{c_1} : h_{c_2} = \ldots .$

Bild 3



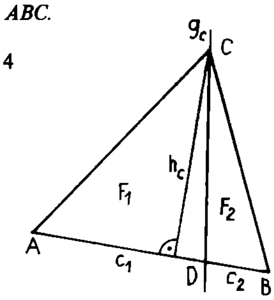
Die Flächeninhalte sind $F_1 = \frac{1}{2} c_1 \cdot h_{c_1}$
und $F_2 = \frac{1}{2} c_2 \cdot h_{c_2}$.
Also kann man für das Flächenverhältnis schreiben:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}, \; \frac{F_1}{F_2} = \frac{b_1^2}{b_2^2}, \; \frac{F_1}{F_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \; \frac{F_1}{F_2} = \frac{h_{c_1}^2}{h_{c_2}^2}.$$

Das Flächenverhältnis bei geteilten Dreiecken

Wir betrachten ein Dreieck $\triangle ABC$. Es werde durch eine Gerade g durch einen Eckpunkt und seine Gegenseite in zwei Teildreiecke zerlegt. Eine solche Gerade nennt man Transversale, genauer Ecktransversale. Bild 4 zeigt eine Ecktransversale g_C durch den Eckpunkt C des Dreiecks ABC.

Bild 4



D sei der Schnittpunkt von g_C mit der Seite c. Es liege D zwischen A und B, und es sei insbesondere $D \neq A$ und $D \neq B$. Dann teilt g_C das Dreieck ABC in die beiden Teildreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ und die Seite c in die Teilstrecken c_1 und c_2.

$c = c_1 + c_2$
Flächeninhalt von $\triangle ABC = F$
Flächeninhalt von $\triangle ADC = F_1$
Flächeninhalt von $\triangle DBC = F_2$
$F = F_1 + F_2$.

Die Flächeninhalte berechnen sich zu

$$F_1 = \frac{1}{2} c_1 h_c \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{1}{2} c_2 h_c.$$

Also gilt hier für das Flächenverhältnis

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{oder in Worten}$$

Satz 2: Wird ein Dreieck durch eine Ecktransversale in zwei Teildreiecke zerlegt, so verhalten sich die Flächeninhalte der Teildreiecke wie die Teilstrecken der geteilten Seite.

Problem

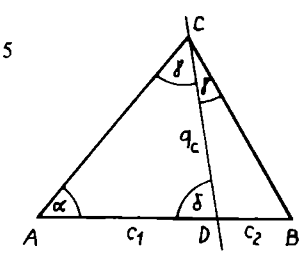
Nun ist folgendes recht bemerkenswert: Wir haben zwei Sätze, die etwas aussagen über das Verhältnis von Flächeninhalten. Beim ersten Satz gehen die Quadrate (also die zweiten Potenzen) von gewissen Streckenlängen ein, beim zweiten Satz sind es die ersten Potenzen der Längen der Teilstrecken. Beide Sätze haben aber gemeinsam, daß sie anwendbar sind auf ein Dreieckspaar (Δ_1, Δ_2).
Satz 1 sagt etwas aus unter der Voraussetzung, daß die Dreiecke des Paares ähnlich sind, also $\Delta_1 \sim \Delta_2$. Satz 2 sagt etwas aus für den Fall, daß die Dreiecke des Paares durch Teilung aus einem Dreieck hervorgegangen sind.

Wir fragen uns nun:
Kann es vorkommen, daß bei Teilung eines Dreiecks durch eine seiner Ecktransversalen zwei zueinander ähnliche Dreiecke entstehen, bei denen die beiden Teile der geteilten Seite des ursprünglichen Dreiecks einander entsprechende Seiten sind?
Ist dies der Fall, so ist das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke zum einen gleich dem Verhältnis der genannten Längen dieser beiden einander entsprechenden Seiten, zum anderen gleich dem Verhältnis der Quadrate dieser beiden Seitenlängen.

Antworten

Wir teilen (siehe Bild 5) $\triangle ABC$ durch eine Ecktransversale g_C in die Teildreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$. Es soll nun $\triangle ADC \sim \triangle DBC$ sein, wobei $\overline{AD} = c_1$ und $\overline{DB} = c_2$ einander entsprechen sollen.

Bild 5



Gehen wir das Problem arithmetisch an, so führen die Sätze 1 und 2 auf die Gleichung $x^2 = x$ mit $x = \frac{c_1}{c_2}$. Sie hat in der Menge der reellen Zahlen genau zwei Lösungen, nämlich $x = 0$ und $x = 1$.
$\frac{c_1}{c_2} = 0$ bedeutet, daß $c_1 = 0$, also $D = A$ ist.

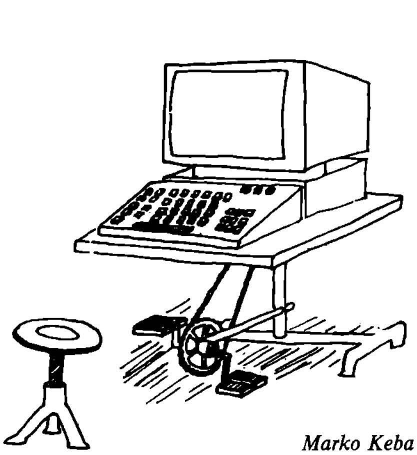
Diesen Grenzfall hatten wir in Abschnitt 2 ausgeschlossen. Es bleibt also $\frac{c_1}{c_2} = 1$. Der Ähnlichkeitsfaktor ist dann 1, also sind die Teildreiecke nicht nur ähnlich, sondern sogar kongruent.
Eine geometrische Betrachtung liefert uns weitere Eigenschaften der Teildreiecke:
ΔADC habe die Innenwinkel α, δ, γ. Zu jedem dieser Winkel muß es im Dreieck ΔDBC einen gleichgroßen Innenwinkel geben.
Da c_1 und c_2 in den ähnlichen Teildreiecken einander entsprechende Strecken sein sollen, muß $\sphericalangle DCB = \gamma$ sein. Für die Winkel α und δ gibt es nun im Dreieck ΔDBC zwei Möglichkeiten:

1. Fall: $\sphericalangle DCB = \delta$ und $\sphericalangle CBD = \alpha$;
$2 \cdot \delta = 180°$, also $\delta = 90°$.
Das Dreieck ΔABC ist gleichschenklig, und die Ecktransversale g_C ist gleichzeitig Höhe h_c und Symmetrieachse des Dreiecks ΔABC. Das entsprechende Dreieckspaar besteht aus kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken.

2. Fall: $\sphericalangle CDB = \alpha$ und $\sphericalangle CBD = \delta$.
Aus $\alpha + \delta + \gamma = 180°$ (Innenwinkelsatz) und $\alpha + \delta = 180°$ ($\sphericalangle ADB$ ist gestreckter Winkel) folgt $\gamma = 0°$
und damit $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \gamma = 0°$.
Der Fall 2 kann also nicht eintreten, solange ΔABC kein entartetes Dreieck ist.

Damit haben wir gefunden:
Wenn es Dreiecke der gesuchten Art gibt, so entstehen sie durch Teilung eines gleichschenkligen Dreiecks durch seine Symmetrieachse.
Jedes Paar kongruenter rechtwinkliger Dreiecke hat aber auch tatsächlich die geforderten Eigenschaften, denn
1. sind wegen der Kongruenz beider Dreiecke des Paares auch ähnlich,
2. lassen sich zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke stets zu einem (gleichschenkligen) Dreieck zusammensetzen,
3. ist das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden kongruenten Dreiecke gleich 1, also sowohl gleich dem Verhältnis der Längen zweier kongruenter Katheten als auch gleich dem Verhältnis der Quadrate dieser Längen.

W. Dörband



Marko Keba

Alphons logische Abenteuer (4)

Alphons hörte, wie sein Vater, nachdem er in sein Zimmer geschaut hatte, zu seiner Mutter sagte: „Alphons arbeitet und schläft nicht." Dann, am Abend, bemerkte der Vater plötzlich mitten im Zeitunglesen: „Das hätte ich nicht gedacht, Herr Grau ist gestorben!" Die Mutter schüttelte nachdenklich den Kopf und meinte: „In der Tat, woran nur, er rauchte und trank nicht." Da mischte sich Alphons ein: „Eins von beiden reicht eben schon, also Papi, höre auf zu rauchen." Seine Eltern schauten sich verblüfft an. „Junge", sagte die Mutter, „du hast nicht richtig hingehört, ich habe doch gesagt, daß Herr Grau nicht rauchte." Nun war die Reihe des Staunens an Alphons.
Er hatte am Nachmittag gearbeitet und nicht geschlafen, als sein Vater ins Zimmer schaute. Auf den jetzigen Fall übertragen bedeutet das doch, Herr Grau hat geraucht und nicht getrunken. Deswegen hat er seinen Vater gebeten, das Rauchen einzustellen. Nun sagte aber seine Mutter, daß Herr Grau nicht geraucht habe. Wollte sie also sagen, Herr Grau habe vermutlich geraucht oder getrunken, sie wisse nur nicht, welches von beiden? Laut sagte Alphons deshalb: „Es ist wirklich egal, ob man raucht oder ob man trinkt, beides kann eben zum Tode führen." Ehe die Eltern etwas dazu sagen konnten, warf Alphons' Schwester spitzbübisch ein: „Alphons scheint heute im Sportunterricht mit Nachwirkungen auf den Kopf gefallen zu sein." Das reichte Alphons. Um Streit zu vermeiden, ging er in sein Zimmer und dachte nach. Wenn „Alphons arbeitet und schläft nicht" etwas anderes bedeuten soll als der grammatisch gleichgebaute Satz „Grau raucht und trinkt nicht", so muß das etwas mit der Verneinung, dem „nicht", und seiner Stellung im Satz zu tun haben. In meinem Fall haben wir eine Und-Verbindung zweier Aussagen, von denen die eine verneint ist. Wollte meine Mutter so verstanden sein, daß beide Aussagen verneint sind? „Moment", sagte da Alphons laut zu sich, „die deutsche Grammatik erlaubt, daß zwei Sätze mit demselben Prädikat und durch „und" verbunden so zu einem Satz umgestellt werden, daß die Subjekte beider Sätze mit „und" verbunden werden und das Prädikat dann angefügt wird. Werden die beiden Aussagen nachgestellt verneint, haben wir etwas wie ein gleiches Prädikat, also wird umgestellt: Wieder in der Stube, sagte er seiner Mutter: „Ich verstehe dich so: Herr Grau rauchte nicht und Herr Grau trank nicht." Bei den Tücken der deutschen Sprache (wie eben vollständige Sätze als Satzteile zu behandeln) hat seine Schwester wohl nicht recht, wenn sie die Bemerkung nicht unterlassen konnte: „Bei manchen fällt der Groschen eben langsam."

L. Kreiser

Für Aufgabenfans

Jahrgangsstufe 5
Für ein Konzert wurden genau 1999 Eintrittskarten verkauft. An Kasse A Eintrittskarten der Nummern 1 bis 504, an Kasse B Eintrittskarten der Nummern 1296 bis 2001. An Kasse C hatte die erste verkaufte Eintrittskarte die Nummer 4000.
Welche Nummer stand auf der Eintrittskarte, die an Kasse C zuletzt verkauft wurde?

Jahrgangsstufe 6
Ein Rechteck ist 9 cm lang und 6 cm breit. Um welche Strecke ist dieses Rechteck zu a) verlängern, b) verbreitern, damit sein Flächenumfang um ein Viertel zunimmt?

Jahrgangsstufe 7
Auf welche Ziffer endet die Zahl 12^{100}?

Jahrgangsstufe 8
Mayers waren 25 Tage im Urlaub. Zurückgekehrt, wurden sie nach dem Wetter gefragt. Herr Mayer antwortete:
„95 % der Tage waren kalt, 85 % naß, 75 % windig und 55 % trübe." Wie viele Tage des Urlaubs waren zugleich kalt, naß, windig und trübe?

Jahrgangsstufe 9
Es ist die Lösungsmenge der Exponentialgleichung
$2^{x+1} + 3^{x-3} + 2^{x-2} = 3^{x-1}$
zu ermitteln.

Jahrgangsstufe 10
Ein Berghotel liegt $a = 70{,}20$ m über dem Wasserspiegel eines Sees. Vom Hotel aus erblickt ein Beobachter einen Wetterballon unter dem Höhenwinkel $\alpha = 58{,}1°$, dessen Spiegelbild unter dem Tiefenwinkel $\beta = 61{,}2°$.
In welcher Höhe befindet sich der Ballon über dem See?

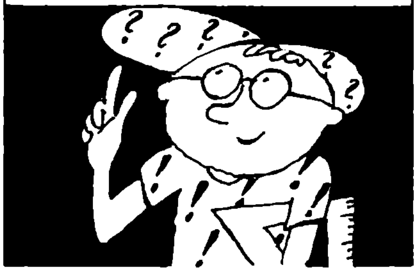
Diese und noch 334 Aufgaben zum Köpfeheißwerden findet Ihr in den Aufgabensammlungen für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler des 5.–7., 8.–10. und 11.–13. Jahrgangs, erschienen im MANZ Verlag München, herausgegeben von Hermann-Dietrich Hornschuh. Die Aufgaben sind ausnahmslos der „elementaren" Mathematik entnommen und bieten für jeden Anspruch viel. Und – natürlich – gibt es zu jedem Bändchen ein Lösungsheft.

5.–7. Jahrgangsstufe
Aufgaben: 48 S., DM 9,80, ISBN 3-7863-0841-1
Lösungen: 80 S., DM 12,80, ISBN 3-7863-0842-X

8.–10. Jahrgangsstufe
Aufgaben: 48 S., DM 9,80, ISBN 3-7863-0843-8
Lösungen: 80 S., DM 12,80, ISBN 3-7863-0844-6

11.–13. Jahrgangsstufe
Aufgaben: 48 S., DM 9,80, ISBN 3-7863-0845-4
Lösungen: 80 S., DM 12,80, ISBN 3-7863-0846-2

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/90

5/1 Wegen $14\,\text{km} = 3 \cdot 4\,\text{km} + 2\,\text{km}$ beträgt die reine Wanderzeit der ersten Gruppe 3 Stunden und 30 Minuten. Hinzu kommt eine Pause von 20 Minuten; das ergibt eine Gesamtzeit von 3 Stunden und 50 Minuten. Da die Wanderung um 8.30 Uhr begann, trifft die erste Gruppe nach 3 h 50 min, also um 12.20 Uhr am Ziel ein.
Wegen $14\,\text{km} = 1 \cdot 12\,\text{km} + 2\,\text{km}$ beträgt die reine Fahrzeit der zweiten Gruppe 1 Stunde und 10 Minuten. Hinzu kommt eine Pause von 10 Minuten; das ergibt eine Gesamtzeit von 1 Stunde und 20 Minuten. Um nicht vor 12.20 Uhr am Ziel zu sein, darf die zweite Gruppe frühestens um 11.00 Uhr abfahren.

5/2 Die Fahrzeit für eine Hin- und Rückfahrt beträgt
$(18 + 8 + 14)\,\text{min} = 40\,\text{min}$; für 12 solcher Fahrten benötigt der Bus
$12 \cdot 40\,\text{min} = 480\,\text{min} = 8\,\text{h}$. Am Busbahnhof ergeben sich zwischen 12 Fahrten elf Pausen von je einer Minute. Somit benötigt der Bus insgesamt 8 Stunden und 11 Minuten.

5/3 Wir geben für a) und b) jeweils eine mögliche Lösung an:

a)

×	×		
	×	×	
		×	×
×			×

b)

		×	
×	×	×	
	×	×	×
	×		

5/4 Es gibt folgende fünf Zerlegungen von 112 in zwei Faktoren, nämlich
$1 \cdot 112$, $2 \cdot 56$, $4 \cdot 28$, $7 \cdot 16$, $8 \cdot 14$.
Die ersten beiden Produkte entfallen, da kein Faktor größer als 31 sein kann. Die letzten beiden Produkte entfallen, da die Differenzen
$16 - 7 = 9$ und $14 - 8 = 6$ beide einstellig sind. Also erfüllen nur die Zahlen 4 und 28 alle Bedingungen. Susi hat am 28. April Geburtstag.

5/5 Die Zahl 4895 besitzt nur den einstelligen Teiler 5. Wegen $4895 : 5 = 979$ lautet der erste Faktor 979, der zweite $*5*$. Da $2 \cdot 979 = 1958$ bereits eine vierstellige Zahl ergibt, sind die beiden Sternchen des zweiten Faktors durch die Ziffer 1 zu ersetzen.
Die vollständige Aufgabe lautet

$$\begin{array}{r} 979 \cdot 151 \\ \hline 979 \\ 4895 \\ 979 \\ \hline 147\,829 \end{array}$$

5/6 Wegen der Eindeutigkeit der Faktorenzerlegung von 32 in
$32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, gibt es nur die beiden Lösungen $n_1 = 5$ und $n_2 = 19$.
Proben: $(5 - 3) \cdot (21 - 5) = 2 \cdot 16$ und
$(19 - 3) \cdot (21 - 19) = 16 \cdot 2$

5/7 Da eine quadratische Platte abgesägt wurde, ist die eine Seite der Sperrholzplatte 30 cm lang. Wegen
$30\,\text{cm} \cdot 100\,\text{cm} = 3000\,\text{cm}^2$ ist die andere Seite der Sperrholzplatte 100 cm lang. Deshalb ist die zweite Seite der übrig bleibenden rechteckigen Platte $100\,\text{cm} - 30\,\text{cm} = 70\,\text{cm}$ lang.

6/1 Es sei $\overline{a7b}$ eine solche dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise; dann gilt
$1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$.
Wegen $15 = 3 \cdot 5$ muß eine solche Zahl durch 3 und durch 5 teilbar sein, d. h., ihre Quersumme muß durch 3 teilbar und sie muß auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Das trifft nur für folgende Zahlen zu: 270, 570, 870, 375, 675, 975.

6/2 Ist a die gedachte Zahl, so erhält man schrittweise $a + 11$,
$9 \cdot (a + 11) = 9a + 99$,
$9a + 99 + (a + 1) = 10a + 100$.
Subtrahiert man nun eine natürliche Zahl zwischen 90 und 100, so erhält man $10a + n$, wobei n eine einstellige natürliche Zahl ist, also im Ergebnis die Anzahl der Einer darstellt. Streicht man diese Einer, so erhält man die gedachte Zahl a.
Beispiel: $a = 17$, also
$(17 + 11) \cdot 9 + 18 = 28 \cdot 9 + 18 = 270$,
$270 - 92 = 178$, also 17.

6/3 Angenommen, Ute ist x Jahre alt; dann ist die Mutter $4x$ Jahre und die Oma $7x$ Jahre alt, und es gilt
$7x - 4x = 24$, $3x = 24$, $x = 8$.
Somit ist die Mutter 32 Jahre, Ute 8 Jahre alt. Wegen $32 - 8 = 24$ war die Mutter 24 Jahre alt, als Ute geboren wurde.

6/4 Es sei $n = \overline{abc}$ eine beliebige dreistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise, wobei weder a, noch b, noch c die Grundziffer 0 vertritt. Durch Umstellung der Grundziffern lassen sich weitere fünf Zahlen bilden, nämlich $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ und $\overline{cba}$. Die Summe der sechs zu addierenden Zahlen läßt sich somit darstellen durch
$s = 222a + 222b + 222c = 222 \cdot (a + b + c)$.
D. h. die Summe ist stets durch 222 teilbar.

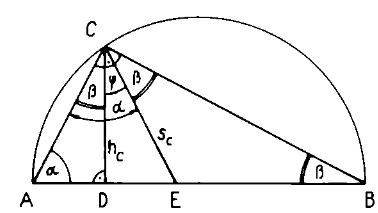
6/5 Es seien n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; ihre Summe beträgt dann $5n + 10$; das Doppelte davon ist
$2 \cdot (5n + 10) = 10 \cdot (n + 2)$. Die Lösung endet also auf die Ziffer Null. Rita braucht daher zu der ersten gesehenen Zahl n nur die Zahl 2 zu addieren, an die Summe eine Null anzuhängen, und schon hat sie die Lösung ermittelt.

6/6 Ist a die gedachte Zahl, so erhält man schrittweise
$a + 10$, $10 \cdot (a + 10) = 10a + 100$. Subtrahiert man nun eine natürliche Zahl zwischen 90 und 100, so erhält man $10a + n$, wobei n eine einstellige natürliche Zahl ist, also im Ergebnis die Anzahl der Einer darstellt. Streicht man diese Einer, so erhält man die gedachte Zahl a.
Beispiel: $a = 13$, also
$(13 + 10) \cdot 10 = 230$, $230 - 98 = 132$,
also 13.

6/7 Die Fahrzeit t beträgt 32 min, der Weg s 38 km.
Nach der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ ergibt sich
$v = 1{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$. In einer Minute fährt der Zug 1,2 km, in einer Stunde (60 min) 72 km. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt also $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7/1 Um zum Ausgangspunkt zurückzukommen, muß der Kettenschlepper immer eine gewisse Anzahl von Teilstrecken vorwärts und die gleiche Anzahl rückwärts fahren. Er muß aber auch die Anzahl der nach rechts bzw. links gefahrenen Strecken wieder nach links bzw. rechts zurücklegen. Somit muß die Anzahl aller Teilstrecken durch vier teilbar sein. Da $10 \cdot 6$ Sekunden $= 60$ Sekunden $= 1$ Minute und 10 kein Vielfaches von 4 ist, kann der Kettenschlepper nicht nach genau einer Minute wieder am Ausgangspunkt sein, sondern höchstens 12 Sekunden vorher oder nachher.

7/2 Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt
$\sphericalangle ACD = 90° - \alpha = \beta$.
Nach dem Satz des Thales gilt
$\overline{EC} = \overline{EB}$ und somit $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ECB = \beta$.
Daraus folgt weiter
$\sphericalangle ACE = 90° - \beta = \alpha$. Es sei $\sphericalangle DCE = \varphi$; dann gilt $\varphi = \alpha - \beta$.



7/3 (1) Angenommen, mit dem ersten Wurf erzielte Rolf x Punkte, Paul also $(x + 3)$ Punkte, Otto $(2x - 3)$ Punkte; deshalb gilt $4x = 20$, $x = 5$. Mit dem ersten Wurf erreichte Otto 7, Paul 8, Rolf 5 Punkte.
(2) Da zum Kegelspiel 9 Kegel gehören, erreichte Paul mit dem zweiten Wurf 9 Punkte, Otto 4 Punkte, Rolf 5 Punkte.
(3) Mit dem dritten Wurf erreichte Paul $(18 - 9 - 8)$ Punkte, also einen Punkt, Otto 9 Punkte. Rolf erreichte mit drei Würfen $(48 - 20 - 18)$ Punkte $= 10$ Punkte, mit dem dritten Wurf also keinen Punkt; er warf eine „Ratte".

7/4 Jede natürliche Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2. Es gilt also
$a = 3x + 1$ oder $a = 3x + 2$, $b = 3y + 1$ oder $b = 3y + 2$, $c = 3z + 1$ oder $c = 3z + 2$. Lassen alle drei Zahlen a, b, c den Rest 1, dann gilt
$a + b + c = 3x + 3y + 3z + 3$
$= 3 \cdot (x + y + z + 1)$, also ist $a + b + c$ durch 3 teilbar. Lassen alle drei Zahlen a, b, c den Rest 2, dann gilt
$a + b + c = 3x + 3y + 3z + 6$
$= 3 \cdot (x + y + z + 2)$, also ist $a + b + c$ durch 3 teilbar. Läßt eine der drei Zahlen, zum Beispiel a, den Rest 1, eine zweite Zahl, zum Beispiel b, den Rest 2, dann gilt (ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit)
$a + b = 3x + 3y + 3 = 3 \cdot (x + y + 1)$,
also ist $a + b$ durch 3 teilbar.

7/5 Angenommen, Beate ist x Jahre, der Vater also $3x$ Jahre, die Mutter $(3x - 3)$ Jahre und Elke $(1{,}5x - 1{,}5)$ Jahre alt; das sind zusammen $(8{,}5x - 4{,}5)$ Jahre. Nun gilt
$8{,}5x - 4{,}5 = 123$, $8{,}5x = 127{,}5$ und somit $x = 15$. Beate ist 15 Jahre, Elke 21 Jahre, die Mutter 42 Jahre und der Vater 45 Jahre alt.

7/6 Das Verhältnis Länge der Tretkurbel zu Radius des Kettenrades beträgt 2 : 1, am Kettenrad wirkt also die doppelte Kraft wie an der Tretkurbel. Diese Kraft muß die Kette übertragen (200 N). Da das Verhältnis der Radien am Hinterrad 10 : 1 beträgt und auf das kleine Kettenrad 200 N wirken, wirken am Umfang des Hinterrades 20 N.

7/7 Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht. Da l_2 doppelt so lang ist wie l_1, muß F_2 die Hälfte von F_1 betragen, also 2 N. Der Federkraftmesser zeigt 7 N an.

8/1 (1) Die kleinste Zahl sei gerade:
$2n(2n + 1)(2n + 2) = 8n^3 + 12n^2 + 4n$
$= 4(2n^3 + 3n^2 + n)$; das Produkt enthält den Faktor 4; $(n \in N)$.
(2) Die kleinste Zahl sei ungerade:
$(2n + 1)(2n + 2)(2n + 3)$
$= 8n^3 + 24n^2 + 22n + 6$, $(n \in N)$.
Wie man sieht, enthält nicht jeder Summand den Faktor 4; somit ist das Produkt nur dann durch 4 teilbar, wenn $22n + 6$ durch 4 teilbar ist (z. B., wenn $n = 3$ ist).

8/2 Das Quadrat $ABCD$ habe die Seitenlänge a; die Länge des Umkreisradius beträgt dann $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$, die Länge eines Halbkreisradius $\frac{a}{2}$, und es gilt

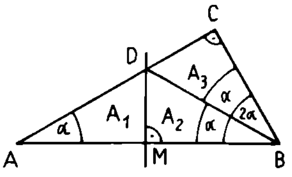
$$A_1 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

$$A_1 = a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \pi,$$

$A_1 = a^2$, $A_2 = a^2$, also $A_1 = A_2$.

8/3 Nach Voraussetzung hat der spitze Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe α und der spitze Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 2α.
Wegen $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$ und $3\alpha = 90°$ gilt $\alpha = 30°$, $2\alpha = 60°$.
Wegen $\overline{AD} \cong BD$ gilt $\sphericalangle MBD \cong \sphericalangle MAD = \alpha$, also auch $\sphericalangle CBD = \alpha$.
Die Dreiecke MBD und BCD sind deshalb kongruent (sww). Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 gilt somit
$A_1 = A_2$, $A_2 = A_3$, also $A_2 + A_3 = 2 \cdot A_1$ bzw. $A_1 : (2 \cdot A_1) = 1 : 2$.

Skizze (nicht maßgerecht!)



8/4 Der Umfang des Dreiecks $A_1B_1C_1$ beträgt
$u_1 = a_1 + a_1 + 7\,\text{cm} + a_1 - 2\,\text{cm}$
$= 3a_1 + 5\,\text{cm}$; der Umfang des Dreiecks $A_2B_2C_2$ beträgt
$u_2 = a_2 + 5a_2 + 10\,\text{cm} = 6a_2 + 10\,\text{cm}$.
Wegen $a_1 = a_2$ gilt somit $u_1 : u_2 = 1 : 2$.

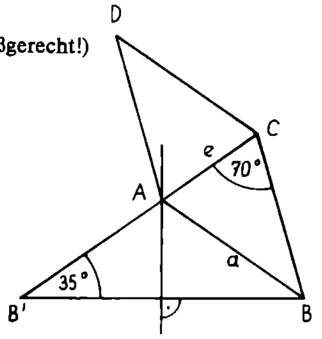
8/5 Nicht durch 3 teilbare natürliche Zahlen können durch $3n - 1$ oder $3n - 2$ mit $n \in N$ und $n \geqq 1$ dargestellt werden. Der Vorgänger des Quadrates einer solchen Zahl ist dann
$(3n - 1)^2 - 1$ oder $(3n - 2)^2 - 1$.
Im ersten Fall erhalten wir nach Umformung den äquivalenten Term $9n^2 - 6$, im zweiten Fall $9n^2 - 12n + 3$; jeder dieser Terme ist durch 3 teilbar. Eine durch 3 teilbare natürliche Zahl sei in der Form $3n$ mit $n \in N$ dargestellt. Der Vorgänger ihres Quadrates ist dann $(3n)^2 - 1$ bzw. $9n^2 - 1$, und dieser Term ist nicht durch 3 teilbar.

8/6 Das Volumen des verdrängten Wassers beträgt $x \cdot A$ (x – Eintauchtiefe), die Gewichtskraft des verdrängten Wassers
$F_W = x \cdot A \cdot g \cdot \varrho_W$ (Beachte: Gewichtskraft = Masse · Fallbeschleunigung).
Die Gewichtskraft des Körpers beträgt
$F_K = h \cdot A \cdot g \cdot \varrho_K$. Nach dem Gesetz von Archimedes und der Bedingung für das Schwimmen gilt: $F_W = F_K$.
Daraus ergibt sich $x = \frac{h \cdot \varrho_K}{\varrho_W}$.
Setzt man die Werte ein $\left(\varrho_K = 0{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},\ \varrho_W = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$, so erhält man $x = 20\,\text{cm}$.

8/7 Die zum Erwärmen des Wassers benötigte Wärme Q beträgt
$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \left(c_{\text{Wasser}} = 4{,}186 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}},\ m_{\text{Wasser}} = 2\,\text{kg},\ \Delta T = 80\,\text{K}\right)$. $Q = 670\,\text{kJ}$.
Es werden $V_{\text{Prop.}} = \frac{Q}{H_{\text{Prop}}}$ Propan benötigt.
$V_{\text{prop}} \approx 3{,}6\,\text{l}$.

9/1 Kurzbeschreibung: $\overline{CB'} = a + e = 8\,\text{cm}$ zeichnen; in B' an $B'C$ Winkel der Größe 35° und in C an CB' Winkel der Größe 70° antragen, die freien Schenkel dieser Winkel schneiden einander in B. Die Mittelsenkrechte von BB' schneidet CB' in A; die Kreise um A und um C mit einem Radius der Länge von AB schneiden einander in D.

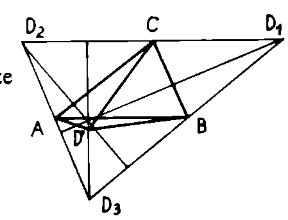
Skizze
(nicht maßgerecht!)



9/2 Aus $abc = 1$ folgt
$ab = \frac{1}{c}$, $ac = \frac{1}{b}$, $bc = \frac{1}{a}$. Durch Einsetzen erhalten wir $a + b + c + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$
$= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right)$.
Wegen $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ gilt somit
$a + b + c + ab + ac + bc \geqq 2 + 2 + 2 = 6$.
Für $a = b = c = 1$ gilt das Gleichheitszeichen.

9/3 a) Es ist leicht nachzuweisen, daß alle entstandenen Dreieckseiten paarweise zueinander kongruent sind (Parallelität!). Somit sind alle Dreiecke nach dem Kongruenzsatz *sss* paarweise kongruent zueinander.
b) Die Lote von D_1, D_2 und D_3 auf CB, AC und AB schneiden einander in D' (Fußpunkt der Tetraederhöhe im Grundrißbild und damit Bild der Pyramidenspitze im Grundriß). Nun sind die Strecken $D'A$, $D'B$ und $D'C$ einzuzeichnen. Damit ist das Grundrißbild der Pyramide mit ABC als Grundfläche und D' als Spitze konstruiert.

Skizze



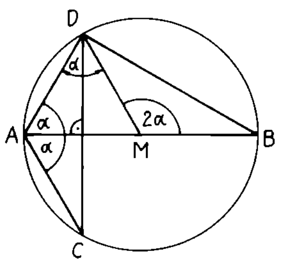
9/4 Man formt die vorgegebene Gleichung äquivalent um und erhält:
$10(4a + bc) = 17c(a + b)$,
$40a + 10bc = 17ac + 17bc$,
$a(40 - 17c) = 7bc$.
Da a, b, c Primzahlen sind, ist nur $c = 2$ möglich (für $c > 2$ wäre eine der Variablen negativ). Wegen $6 \cdot a = 7 \cdot b \cdot 2$ ist $a = 7$ und $b = 3$.
Probe in der Ausgangsgleichung:
$\frac{4 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{(7 + 3) \cdot 2} = \frac{17}{10}$, $\frac{34}{20} = \frac{17}{10}$
(wahre Aussage).

9/5 Schreibt man die Gleichung in Dezimalbrüchen und quadriert die Gleichung, so erhält man
$\frac{z}{10} - \frac{z}{100} = \frac{z^2}{100}$, $\frac{z^2}{100} - \frac{9z}{100} = 0$,
$\frac{z}{100} \cdot (z - 9) = 0$. Da wegen $z \neq 0$ nur $z = 9$ diese Gleichung erfüllt, ist auch nur die Gleichung $\sqrt{0{,}9 - 0{,}09} = 0{,}9$ eine wahre Aussage.

9/6 Nach dem Volumen-Temperatur-Gesetz (Druck bleibt konstant) kann man das Volumen der heißen Luft berechnen. Da sich die Ballonhülle nicht ausdehnt, müssen 513 m^3 Luft entweichen. Nach dem Archimedischen Gesetz ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft der verdrängten kalten Luft.
Die Masse dieser kalten Luft beträgt
$3500\,m^3 \cdot 1{,}293\,\frac{kg}{m^3} = 4525\,kg$,
die Masse der heißen Luft im Ballon
$3500\,m^3 \cdot 1{,}127\,\frac{kg}{m^3} = 3945\,kg$. Die Auftriebskraft muß mindestens genau so groß sein wie die Gewichtskraft aus Hülle, Gondel, Ladung und heißer Luft im Ballon. Diese darf demzufolge höchstens 5800 N betragen.

9/7 Die Wärme
$Q = 4{,}19\,\frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot 10\,kg \cdot 80\,K$ muß dem Wasser zugeführt werden. Da dies in $30\,min = 30 \cdot 60\,s$ erfolgen soll, ergibt sich für die elektrische Leistung
$P = \frac{Q}{30 \cdot 60\,s} = 1{,}86\,\frac{kJ}{s}$.
Die erforderliche Leistung beträgt
$\frac{1{,}86\,\frac{kJ}{s}}{0{,}95} = 1{,}958\,\frac{kJ}{s}$, also rund 2 kW.

10/1 Es sei $\sphericalangle DAM = \alpha$. Wegen $AM \cong DM$ ist auch $\sphericalangle MDA = \alpha$ und somit $\sphericalangle BMD = 2\alpha$ (Außenwinkelsatz).
Aus Symmetriegründen halbiert der Durchmesser $\overline{AB}$ den Winkel $\sphericalangle DAC$, also ist $\sphericalangle DAC = 2\alpha$.
Daraus folgt die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle DMB$.



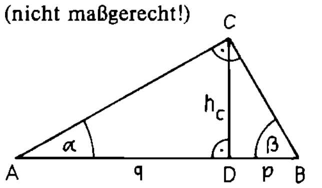
10/2
a) (8; 0) $x - y \neq 0$; $y = 0 \rightarrow x = 8$
b) kein Paar erfüllt die Bedingungen
c) (1; 10)
d) (4; 1), (6; 4), (12; 11)

10/3 Es seien a und b die Maßzahlen der Längen der Katheten und c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse eines solchen rechtwinkligen Dreiecks; dann gilt
$a + b + c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$,
$a + b = \frac{a \cdot b}{2} - c$, $(a + b)^2 = \left(\frac{a \cdot b}{2} - c\right)^2$,
$a^2 + 2ab + b^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 b^2 - abc + c^2$
und wegen $a^2 + b^2 = c^2$ somit
$2ab + abc = \frac{1}{4}a^2b^2$ und wegen $a \cdot b \neq 0$
schließlich
$2 + c = \frac{1}{4}ab$, also $c = \frac{ab}{4} - 2$.
Durch Einsetzen erhalten wir
$a + b + \frac{ab}{4} - 2 = \frac{ab}{2}$,
$4a + 4b + ab - 8 = 2ab$, $ab - 4a = 4b - 8$,
$a \cdot (b - 4) = 4b - 8$, $a = \frac{4b - 8}{b - 4}$,
$a = 4 + \frac{8}{b - 4}$.
Es existieren genau vier solcher Dreiecke. Die nachfolgende Tabelle enthält die Maßzahlen der Seitenlängen.

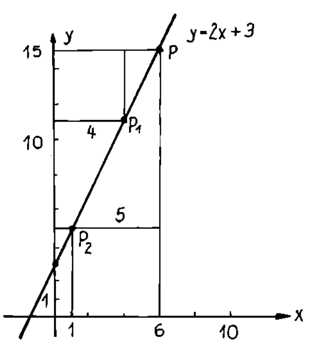
a	b	c
12	5	13
8	6	10
6	8	10
5	12	13

Von diesen vier Dreiecken sind jeweils zwei kongruent.

10/4 Im Dreieck ABC gilt: $(p < q)$
$h_c^2 = p \cdot q$ (Höhensatz); $p : q = q : (p + q)$ (goldener Schnitt); daraus folgt
$q^2 = p^2 + pq$; $q^2 - pq - p^2 = 0$;
$q_{1,2} = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4p^2}{4}}$;
$q_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})p$; $q_1 \approx 1{,}618p$;
q_2 ist nicht definiert.
Im Dreieck DBC gilt:
$h_c^2 = pq \approx 1{,}618p^2$; $h \approx 1{,}272p$;
$\tan(\sphericalangle DBC) = h_2 : p \approx 1{,}272$.
Es folgen $\beta \approx 51{,}83°$ und $\alpha \approx 38{,}17°$.
Skizze (nicht maßgerecht!)



10/5 Quadrat 1: Ist $P_1(x_1; y_1)$ der gesuchte Eckpunkt des Quadrats, so ist $x_1 = 15 - y_1$, $x_1 = 15 - (2x_1 + 3)$, $3x_1 = 12$, $x_1 = 4$ und somit $y_1 = 11$. Die Seiten des Quadrats haben die Länge 4.



Quadrat 2: Ist $P_2(x_2; y_2)$ der gesuchte Eckpunkt des Quadrats, so ist $6 - x_2 = y_2$, $6 - x_2 = 2x_2 + 3$, $3 = 3x_2$, $x_2 = 1$ und somit $y_2 = 5$. Die Seiten des Quadrats haben die Länge 5.

10/6 Das Seil dient nur zum Übertragen der Kraft.
Im Seil wirkt eine Kraft von 50 N.

10/7 Der Körper führt zwei Bewegungen aus: eine gleichförmige in Richtung parallel zur Erdoberfläche und eine Fallbewegung. Für den Zeitpunkt des Auftreffens auf die Erdoberfläche ist nur die Fallbewegung entscheidend.
Unter Benutzung von $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ ergibt sich mit $s = 80\,m$ und $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ $t = 4\,s$, der Körper trifft also nach 4 s auf.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Für Tierfreunde
Der *Kletterfisch* (anabas testudineus) ist ein kleiner, die Binnengewässer Südostasiens bewohnender Fisch, der durch sein zusätzliches Luftatmungsorgan, das Labyrinthorgan, auch in sauerstoffarmen Gewässern überleben kann und bei hoher Luftfeuchtigkeit robbend über das Land kriechen soll. (Nach Brockhaus abc Biologie, F. A. Brockhaus Verlag, Leipzig 1986)

Für Straßenbahnfans
Zunächst ermitteln wir die Anzahl aller möglichen Einstellungen des Entwerters, einschließlich der laut Aufgabe unzulässigen: Für 1 Stanzeisen gibt es 2 Möglichkeiten, für 2 Stanzeisen gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten, für 3 Stanzeisen gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Möglichkeiten, ..., für 8 Stanzeisen gibt es $2^8 = 256$ Möglichkeiten.
Unzulässig ist die (eine) Möglichkeit, alle Stanzeisen auf Ruhestellung zu schalten, und unzulässig sind die acht verschiedenen Möglichkeiten, nur ein Stanzeisen in Arbeitsstellung zu bringen. Es verbleiben also $256 - 9 = 247$ Möglichkeiten.

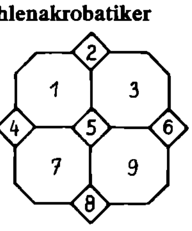
Für Scherzkekse
a) Man gibt 4 Mädchen je einen Apfel, und dem 5. Mädchen den übrigen Apfel zusammen mit dem Korb.
b) 4 Katzen

Für Rätselfreunde
1. Diameter; 2. Hadamard; 3. Aehnlich; 4. Pentagon; 5. Addition; 6. Zissoide; 7. Bhaskara; 8. Schenkel
Gesuchtes Wort: Mantisse

Für Hobbyhistoriker
Laut Aufgabe ist 1 Faß + 20 Eimer = 3 Faß; also sind 20 Eimer = 2 Faß, so daß 1 Faß = 10 Eimer ist. Außerdem sind 19 Faß + 1 Nasadka + $15\frac{1}{2}$ Eimer = 20 Faß + 8 Eimer, woraus man 1 Nasadka = 1 Faß − $7\frac{1}{2}$ Eimer = $2\frac{1}{2}$ Eimer und somit 1 Faß = 4 Nasadka errechnet. 1 „Vedro" ≈ 12 Liter.

Für Naturfreunde
Das erste Huhn kriegte 18, das zweite 20, das dritte 22 Körner mit.

Für Zahlenakrobatiker



Für Logiker

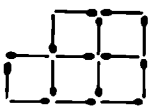
Es ist die 2. Zahl das Querprodukt, die 3. Zahl die Quersumme und die 4. Zahl die alternierende Quersumme der 1. Zahl. Es ist folglich $x = 120$, $y = 15$ und $z = 3$.

Für Osterhasenfans

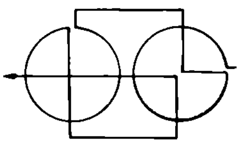
Zwei mögliche Lösungen:

$$\begin{array}{r} 83\,620 \\ +83\,620 \\ \hline 167\,240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 69\,370 \\ +69\,370 \\ \hline 138\,740 \end{array}$$

Für Trickkünstler



Für Könner



Lösungen zu:
Ein interessanter Bildungsweg

▲B_1▲ $\tan\alpha = \sqrt{2}$

▲B_4▲ a) $0{,}5 \leqq a \leqq 1{,}5$

▲P_1▲ a) $A \setminus B \cup C$ b) $A \cap C \setminus B$
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ d) $C \cup B \setminus A$
e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$
f) $A \cap B \cap C$

▲P_2▲ $a < 2$: keine Lösung; $a = 2: x = 1$; $2 < a < 3: x_1 = 3 - a$, $x_2 = a - 1$
$a \geqq 3: x_1 = \frac{3-a}{3}$, $x_2 = \frac{3+a}{3}$

▲P_3▲ Hinweis:
$m^3 - 3m^2 + 4 = (m-2)^2 \cdot (m+1)$

▲S_5▲ keine Lösung

▲S_6▲ $x = 0$

▲S_8▲ $(2; 4; 6)$, $(-2; -4; -6)$

▲T_1▲ b) 29,57 c) 6,26

▲T_2▲ b) 1. Parallelogramm:
$\alpha = 66{,}7°$, $\beta = 113{,}3°$, $A = 16{,}8\ \text{cm}^2$
2. Parallelogramm:
$\alpha = 113{,}3°$, $\beta = 66{,}7°$, $A = 7{,}85\ \text{cm}^2$

▲T_3▲ a) $\alpha = 53{,}1°$, $\beta = 67{,}4°$, $\gamma = 112{,}6°$, $\delta = 126{,}9°$ b) $69\ \text{cm}^2$

▲U_1▲ $n = 8$

▲U_2▲ nein

▲U_4▲ 0,116

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ **Finde die Linie**

Die Zeichnung zeigt zwei Parallelogramme in derselben Ebene. Es ist sehr leicht, jedes in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen. Wir können in jedem für sich eine Linie finden, welche diese Teilung liefert. Aber kannst du eine Gerade finden, welche beide Parallelogramme in zwei kongruente Teile zerlegt? Ja, du kannst. Versuche diese Linie zu finden.

Lösung: Jedes Parallelogramm hat ein Zentrum. Jede Linie durch dieses Zentrum teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Teile. Die Verbindungslinie der zwei Zentren erfüllt dies in beiden Parallelogrammen.

▲2▲ Es ist bekannt, daß $a + \frac{1}{a}$ eine ganze Zahl ist. Beweise, daß dann auch $a^3 + \frac{1}{a^3}$ eine ganze Zahl ist.

Lösung: Wenn $a + \frac{1}{a} = z$ $(a \neq 0)$ eine ganze Zahl ist *, dann ist es sicher auch
$$z^3 - 3z = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a - 3 \cdot \frac{1}{a} = a^3 + \frac{1}{a^3}.$$
w. z. b. w.

* Daß ein solches z existiert, überprüft man leicht, indem man $a = 1$ setzt.

▲3▲ **Drei Kreise**

Die Kreise (1), (2) und (3) haben alle einen Durchmesser von 2 m. Die Gerade (D) ist Tangente an den Kreis (3), d. h. $\overline{O_3T}$ ist senkrecht zu $\overline{AT}$.
Bestimme die Länge der Strecke BC!

Lösung: H sei der Fußpunkt des Lotes von O_2 auf die Gerade AT. Nach dem Satz des Pythagoras folgt im Dreieck O_2HC:
$$\overline{HC}^2 = 1 - \overline{O_2H}^2 \qquad (1).$$
Nach dem Strahlensatz ergibt sich:
$$\frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_3T}} = \frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO_3}} = \frac{3}{5} \text{ bzw. } \overline{O_2H} = \frac{3}{5}, \text{ da } \overline{O_3T} = 1.$$
Unter Verwendung von (1) erhält man:
$$\overline{HC}^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}, \text{ also } \overline{HC} = \frac{4}{5}.$$ Da das Dreieck BO_2C gleichschenklig ist, gilt:
$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{HC} = \frac{8}{5}.$$
Die Strecke $\overline{BC}$ ist also 1,60 m lang.

Lösungsskizzen zu: Landeswettbewerb Mathematik Rheinland-Pfalz

1. Die Kugelanzahl auf einer Kante sei n, wobei $n \in N$ und $n \geqq 2$ gilt. Von diesen n Kugeln bilden genau 2 Kugeln die Enden eines Verbindungsstabes und $n - 2$ Kugeln sind „innere" Kugeln. Nun besteht der Würfel aus genau 12 Kanten und 8 Ecken, so daß sich die Gesamtzahl der Kugeln zu $12(n-2) + 8$ ergibt. Die in der Tabelle fehlenden Zahlen lauten also: 104, 8, 11 984 (in dieser Reihenfolge).

2. Der Schuhmacher möge an einem Tag x Paare Sandalen zuschneiden und y Paare zugeschnittener Sandalen zusammennähen. x und y seien dabei natürliche Zahlen und es muß $x \geqq y$ gelten, da er nur zugeschnittene Sandalen zusammennähen kann. Da der Schuhmacher $\frac{1}{15}$ Tag zum Zuschneiden eines Paares und $\frac{1}{10}$ Tag zum Zusammennähen eines Paares benötigt, verbraucht er für den obigen Vorgang $x \cdot \frac{1}{15} + y \cdot \frac{1}{10}$ Tag. Es muß also
$$\frac{x}{15} + \frac{y}{10} \leqq 1 \text{ und damit } 2x + 3y \leqq 30$$
gelten. Wegen $x \geqq y$ folgt $5y \leqq 2x + 3y \leqq 30$, also $y \leqq 6$. Da sicher danach gefragt ist, wieviel Paare er maximal an einem Tage aus noch nicht zugeschnittenem Leder herstellen kann, ergibt sich $y = 6$ und hieraus $x = 6$. Der Schuhmacher kann also 6 Paare an einem Tag aus noch nicht zugeschnittenem Leder herstellen.

3. Die Diagonalen $\overline{DF}$ und $\overline{AC}$ des Vierecks $ADCF$ halbieren einander, denn E ist Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und es gilt $\overline{ED} = \overline{EF}$. Damit ist das Viereck $ADCF$ ein Parallelogramm. $\overline{CD}$ ist im gleichseitigen Dreieck ABC Seitenhalbierende und damit gleichzeitig Höhe. Also gilt $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ und mithin $\sphericalangle ADC = 90°$. Folglich ist das Parallelogramm $ADCF$ sogar ein Rechteck. (Die verwendeten Eigenschaften kann man als bekannt zitieren, oder sie über die Kongruenzsätze beweisen.)

4. Es ist z. B.
$4 = 77 : 7 - 7$, $5 = 7 - (7 + 7) : 7$,
$6 = (7 \cdot 7 - 7) : 7$, $7 = (7 - 7) \cdot 7 + 7$.

5. Von e Einwohnern stieg die Einwohnerzahl in einem Jahr auf
$e + \frac{6}{100} e = 1{,}06e$ und das Müllvolumen m erhöhte sich in diesem Jahr auf $1{,}02m$. Damit produzierte die neue Einwohnerzahl
$\frac{1{,}02}{1{,}06} \cdot 100\,\% = 96{,}22\ldots\,\%$ und mithin wurden durchschnittlich 3,8 % Müll eingespart.

Lösung zur Schachecke

Holger erzielt 5 und Christian 4 Punkte. Somit verbleiben von den 15 gespielten Partien noch 6 Punkte für Angela, Katrin, Frank und Martin, und bei gleichem Stand erzielten sie jeweils 1,5 Punkte. Martin verlor nur gegen Holger und Christian und spielte gegen Katrin, Frank und Angela remis.

Lösungen zu: Für Aufgabenfans

5. Die Karte trug die Nummer 4788.
6. Ursprünglicher Flächenumfang 30 cm; veränderter Umfang 37,5 cm;
a) $2 \cdot (9 + x + 6) = 37{,}5$; $x = 3{,}75$;
b) $2 \cdot (9 + 6 + x) = 37{,}5$; $x = 3{,}75$;
Das Rechteck muß um 3,75 cm verlängert bzw. verbreitert werden.
7. Endet die Zahl 2^4 auf 6, so auch 2^{4n}; Wegen $12^{100} = 12^{4 \cdot 25}$ endet diese Zahl auf 6.
8. An mindestens 10 % der Tage.
9. Einzige Lösung: $x = 5$
10. Der Ballon befindet sich 1135 m über dem See.

Erster mathematischer Unfall

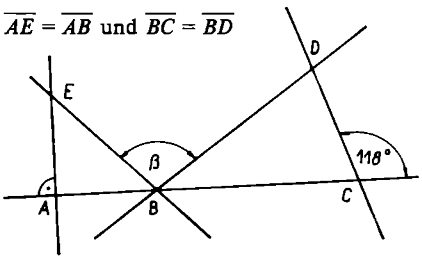
Ein Rechteck fuhr mit dem Quadrat
auf einem schnellen Motorrad.
Doch kamen beide nicht sehr weit!
Zu hoch war die Geschwindigkeit.
Woran sie beide nicht gedacht,
in einer Kurve hat's gekracht.
Sie rammten eine Häuserwand,
an der man sie verunglückt fand.
Nun waren beide Invalid:
ein Rhombus und ein Rhomboid.

Ehrenfried Winkler
aus: H.-D. Hornschuh, Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag, München

Kurz nachgedacht

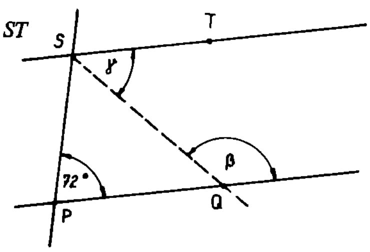
1. Wie groß ist β? Begründe!

$\overline{AE} = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \overline{BD}$



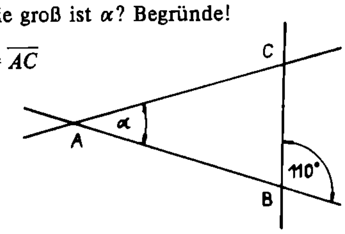
2. SQ sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$. Wie groß sind die Winkel β und γ? Begründe!

$PQ \parallel ST$

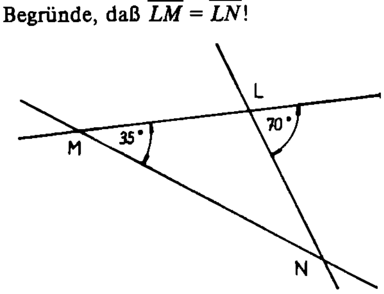


3. Wie groß ist α? Begründe!

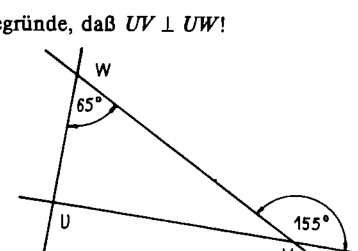
$\overline{AB} = \overline{AC}$



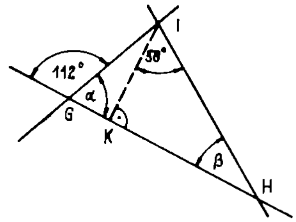
4. Begründe, daß $\overline{LM} = \overline{LN}$!



5. Begründe, daß $UV \perp UW$!

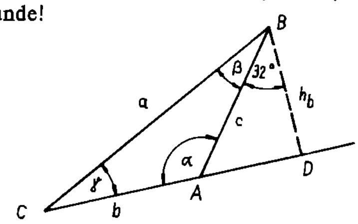


6. Wie groß sind die Winkel α, β und $\sphericalangle GIK$? Begründe!



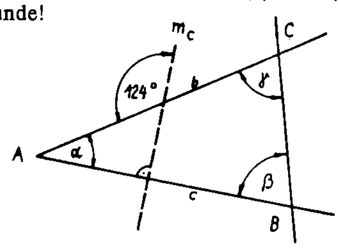
7. Wie groß sind die Winkel α, β und γ? Begründe!

$b = c$

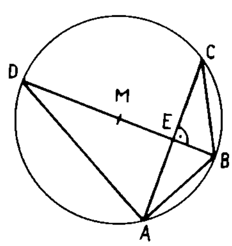


8. Wie groß sind die Winkel α, β und γ? Begründe!

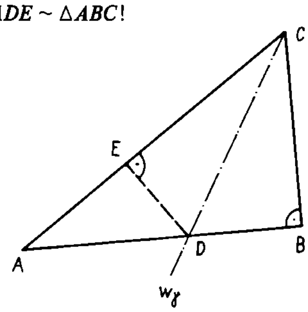
$b = c$



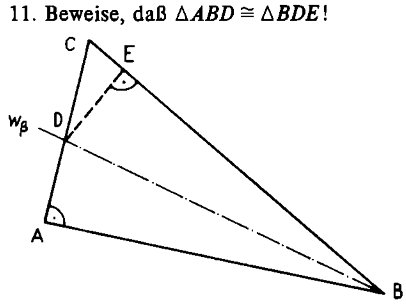
9. Beweise, daß $\Delta ABD \sim \Delta EBC$!



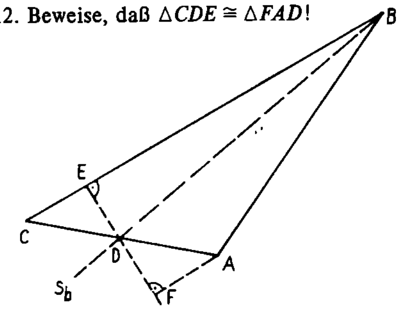
10. Beweise, daß a) $\Delta DBC \sim \Delta DCE$ b) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$!



11. Beweise, daß $\Delta ABD \cong \Delta BDE$!

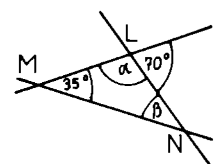


12. Beweise, daß $\Delta CDE \cong \Delta FAD$!

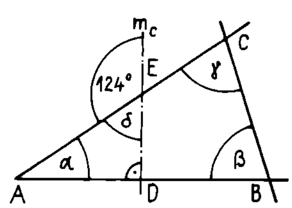


Lösungen:

1. $\beta = 180° - 45° - 56° = 79°$
2. $\gamma = 54°$, $\beta = 126°$
3. $\alpha = 40°$
4. $\overline{LM} = \overline{LN}$ genau dann, wenn $\beta = 35°$.
Vollwinkel um L: $360° = 2 \cdot 70° + 2 \cdot \alpha$;
$\alpha = 110°$
Winkelsumme im Δ: $\alpha + \beta + 35° = 180°$;
$\beta = 180° - 145° = 35°$, w. z. b. w.



5. $UV \perp UW$ genau dann, wenn $\sphericalangle WUV = 90°$.
Vollwinkel um V: $2 \cdot 155° + 2 \cdot \sphericalangle UVW = 360°$;
$\sphericalangle UVW = 25°$;
Winkelsumme im ΔUVW:
$65° + 25° + \sphericalangle WUV = 180°$;
$\sphericalangle WUV = 90°$, w. z. b. w.
6. $\alpha + 112° = 180°$ (Nebenwinkel); $\alpha = 68°$;
ΔkHI: $90° + \beta + 58° = 180°$; $\beta = 32°$;
ΔGHI: $\alpha + \beta + \sphericalangle GIH = 180°$; $\sphericalangle GIH = 80°$;
$\sphericalangle GIK = 22°$.
7. Winkelsumme im ΔADB:
$\sphericalangle BAD + 90° + 32° = 180°$; $\sphericalangle BAD = 58°$;
$\alpha + \sphericalangle BAD = 180°$ (Nebenwinkel); $\alpha = 122°$;
Winkelsumme im ΔCAB: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
$\gamma = \beta$ $(b = c)$;
$2\alpha + 122° = 180°$; $\alpha = 29°$; $\gamma = 29°$
8. Vollwinkel um E: $2 \cdot 124° + 2 \cdot \delta = 360°$;
$\delta = 56°$
Winkelsumme im ΔADE: $\alpha + 90° + \delta = 180°$;
$\alpha = 34°$;
Winkelsumme im ΔABC: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
$2\beta + 34° = 180°$ $(b = c)$; $\beta = \gamma = 73°$



9. I) $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ACB$ (Peripheriewinkel zu $\overset{\frown}{AB}$)
II) $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CEB$ (Satz des Thales)
$\Delta ABD \sim \Delta EBC$ nach Hauptähnlichkeitssatz

10. a) $\Delta DBC \sim \Delta DCE$ nach Hauptähnlichkeitssatz, denn $\sphericalangle DEC \cong DBC$ und (da w_γ) $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle DCB$.
b) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ nach Hauptähnlichkeitssatz, denn $\sphericalangle AED \cong \sphericalangle ABC = 90°$ und $\sphericalangle EAD \cong \sphericalangle CAB$.

11. I) $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DEB = 90°$
II) $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle DBE$ (da w_β)
III) $\overline{BD} = \overline{BD}$
$\Delta ABD \cong \Delta BDE$ nach wsw

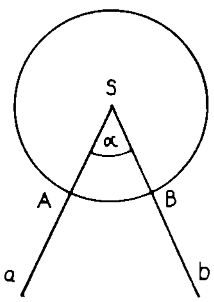
12. I) $\sphericalangle CDE = \sphericalangle FDA$ (Scheitelwinkel)
II) $\sphericalangle DCE \cong \sphericalangle DAF$ (Innenwinkelsumme im Δ)
III) $\overline{CD} = \overline{DA}$ (S_b – Seitenhalbierende)
$\Delta CDE \cong \Delta DFA$ wegen wsw

Dreiteilung eines beliebigen Winkels

Die Dreiteilung oder Trisektion eines beliebigen Winkels ist ein bekanntes Problem der Geometrie, das im klassischen Sinne – d. h., nur durch Anwendung von Zirkel und Lineal – nicht lösbar ist.
Allerdings ist eine exakte Konstruktion (keine Näherungskonstruktion) bei Erweiterung der zugelassenen Instrumentariums möglich. Das Verfahren soll am folgenden Beispiel demonstriert werden:

Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\sphericalangle(a, b)$ (Bild 1).

Bild 1



Der vorliegende Sachverhalt könnte auch als der Grundriß eines geraden Kreiszylinderkörpers, dessen Achse durch den Scheitelpunkt S des Winkels $\sphericalangle(a, b)$ geht, interpretiert werden (Bild 2).

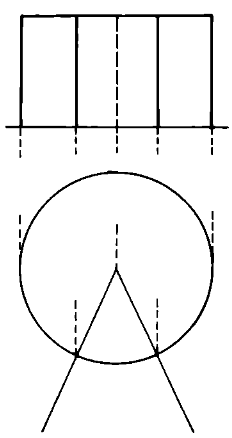
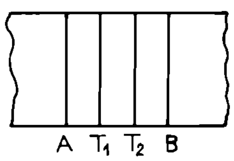


Bild 2

Durch Abwicklung des Zylindermantels oder eines entsprechenden Teils desselben wird der Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ zur Strecke $\overline{AB}$, die mit Hilfe des Strahlensatzes leicht in drei gleiche Teile geteilt werden kann (Bild 3).

Bild 3

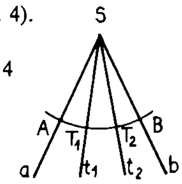


Die mit T_1 und T_2 bezeichneten Teilungspunkte der Strecke $\overline{AB}$ werden dann nach Wiederherstellung der Ausgangslage des Mantels zu Punkten des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$. Es gilt also

$$\overset{\frown}{AT_1} \cong \overset{\frown}{T_1T_2} \cong \overset{\frown}{T_2B}.$$

Somit hat jeder der drei Teilwinkel $\sphericalangle(a, t_1)$, $\sphericalangle(t_1, t_2)$ und $\sphericalangle(t_2, b)$ die Größe $\frac{\alpha}{3}$ (Bild 4).

Bild 4



Die beschriebene Methode läßt sich für jede Winkelteilung von beliebigen Winkeln anwenden und somit ist die Konstruktion beliebiger regelmäßiger n-Ecke stets ausführbar, freilich nicht allein mit Zirkel und Lineal.
Zur Ausführung der Konstruktion benötigt man daneben noch den Mantel eines geraden Kreiszylinders. Es ist zweckmäßig, einen oben offenen Hohlkörper mit durchsichtiger Grundfläche zu verwenden. Durchmesser und Höhe des Zylinders sind beliebig wählbar; beispielsweise $d = 6$ cm, $h = 3$ cm.

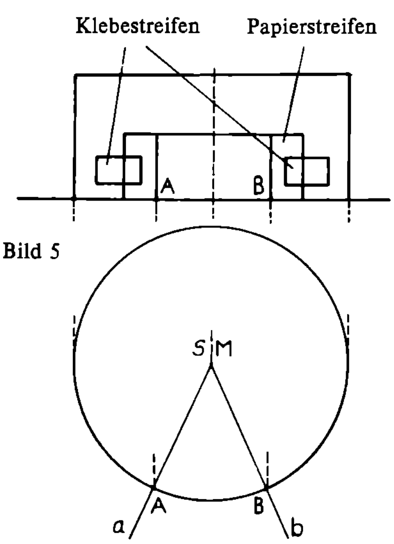
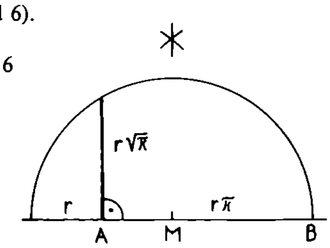


Bild 5

In Bild 5 ist der beschriebene Hohlkörper mit einem am Zylindermantel befestigten Papierstreifen versehen. Der Mittelpunkt M des Grundkreises und der Radius $\overline{MA}$ sind auf der Grundfläche eingezeichnet. Der abnehmbare Papierstreifen bildet nunmehr den Zylindermantel bzw. eines Teils davon. Setzt man den Hohlzylinder so auf das Zeichenblatt, daß der Mittelpunkt M der Grundfläche auf den Scheitelpunkt S des Winkels $\sphericalangle(a, b)$ und der Radius $\overline{MA}$ auf den Schenkel a zu liegen kommen, dann lassen sich die Schnittpunkte der Schenkel mit dem Zylindermantel auf dem Papierstreifen markieren. Diese Punkte seien A und B. Nach Abnehmen des Papierstreifens vom Zylinder kann die Strecke $\overline{AB}$ in drei oder auch mehr gleiche Teile geteilt werden. Durch Befestigen des Papierstreifens am Zylinder wird die Ausgangslage wiederhergestellt.
Der Punkt A liegt auf a, der Punkt B auf b und M auf S.
Jetzt können die Teilungspunkte auf dem Zeichenblatt markiert und mit S verbunden werden. Damit ist die Teilung des Winkels in drei gleiche Teile (bzw. in n gleiche Teile) vollzogen.
Der bei der Konstruktion verwendete Zylinder öffnet den Weg auch noch für die Lösung eines anderen Problems. Markiert man nämlich die Schnittpunkte der Schenkel eines gestreckten Winkels auf dem Papierstreifen, so ist die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ genau $r\pi$. Addiert man dazu noch den Radius des Zylinders, so läßt sich hier der Höhensatz anwenden. Die Länge der so konstruierten Strecke beträgt dann genau $r\sqrt{\pi}$. Der Flächeninhalt des mit dieser Seitenlänge konstruierten Quadrates beträgt genau $r^2\pi$. Die Quadratfläche ist demnach genausogroß wie die Grundfläche des verwendeten Zylinders. Die Konstruktion führt somit zur Quadratur des Kreises (Bild 6).

Bild 6



Aus dem Radius und dem halben Umfang des Grundkreises des Zylinders läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Der halbe Kreisumfang hat nämlich die Länge $r\pi$. Mit Hilfe dieses feststehenden Dreiecks kann die Konstruktion weiterer Quadratseiten wegen der Proportionalität auf Kreise mit beliebigem Radius angewandt werden (Bild 7).

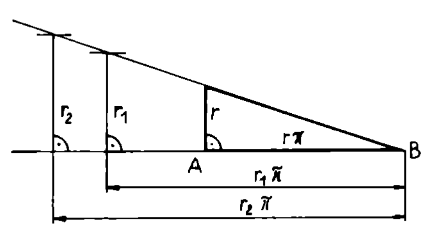


Bild 7

M. Walter