

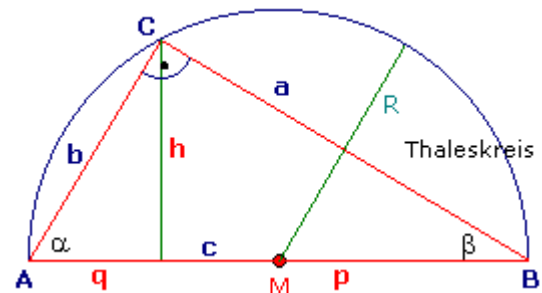


## Trigonometrische Berechnungen

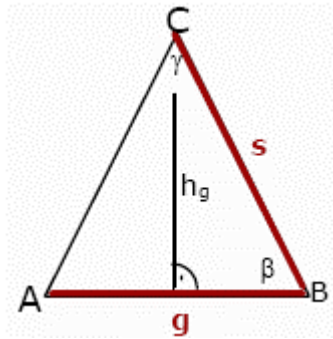
### Aufgabe 1

Berechnen Sie im rechtwinkligen Dreieck die fehlenden Seiten und Winkel:

- a)  $p = 4,93$  ,  $\beta = 70,3^\circ$
- b)  $p = 28$  ,  $q = 63$
- c)  $a = 12,5$  ,  $p = 4,4$
- d)  $h = 9,1$  ,  $q = 6,0$
- e)  $a = 27,8$  ,  $A = 373$
- f)  $a:b = 3:4$  , Umfang  $u = 60$
- g)  $h = 12,3$  ,  $b = 18,5$
- h)  $h = 6,08$  ,  $\alpha = 23,7^\circ$
- j)  $a:b = 3:2$  ,  $A = 15$



- i)  $a = 27,8$  , Fläche  $A = 373$
- k)  $b:c = 5,13$  , Umfang  $u = 75$



### Aufgabe 2

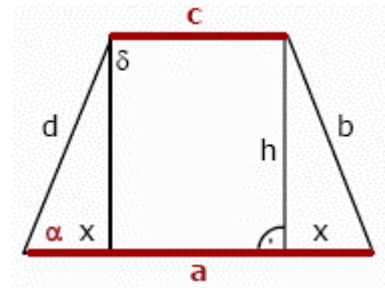
Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel der folgenden gleichschenkligen Dreiecke:

- a)  $s = 25$  ,  $g = 14$
- b)  $s = 9,3$  ,  $\beta = 70^\circ$
- c)  $s = 40,3$  ,  $h_s = 11,5$
- d)  $h_g = 57,1$  ,  $\gamma = 57,2^\circ$
- e)  $h_s = 34,2$  ,  $\gamma = 51^\circ$
- f)  $g = 15$  ,  $\beta = 63^\circ$
- g)  $h_g = 8,76$  ,  $g = 7,38$

### Aufgabe 3

Berechnen Sie bei den folgenden gleichschenkligen Trapezen die fehlenden Größen:

- a)  $a = 37,2$  ,  $c = 15,8$  ,  $\alpha = 62^\circ$
- b)  $a = 24$  ,  $b = 9$  ,  $\alpha = 64,8^\circ$
- c)  $b = 61$  ,  $c = 37$  ,  $h = 17$
- d)  $c = 29$  ,  $h = 14$  ,  $\alpha = 71,5^\circ$
- e)  $a = 45$  ,  $c = 33$  , Diagonale  $e = 89$
- f)  $a = 40$  ,  $b = 27$  ,  $c = 29$



### Aufgabe 4

Von einem Parallelogramm kennt man den Flächeninhalt  $A = 143$  sowie die Seiten  $a = 17,2$  und  $b = 8,7$ . Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  zwischen den Seiten AB und DA.

### Aufgabe 5

Wie groß ist in einem Würfel der Winkel zwischen

- a) Raumdiagonale und Kante
- b) Flächendiagonale und Kante
- c) Raumdiagonale und Flächendiagonale?

### Aufgabe 6

Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die fehlenden Seiten und Winkel zu berechnen:

- a) das Dreieck ist spitzwinklig;  $a = 4,38$  ,  $b = 6,15$  ,  $h_c = 3,71$
- b)  $a = 0,62$  ,  $b = 0,83$  ,  $h_b = 0,38$  ( $\gamma < 90^\circ$ )
- c)  $h_a = 4,2$  ,  $\beta = 37^\circ$  ,  $\gamma = 46^\circ$
- d)  $a = 6,2$  ,  $c = 5,6$  ,  $\beta = 35^\circ$

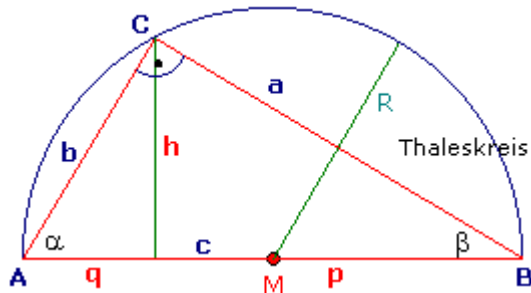
**Aufgabe 7**

Wie lang sind die Diagonalen eines Rhombus, von dem ein Innenwinkel von  $61^\circ$  und der Flächeninhalt  $A = 28$  bekannt sind?

**Aufgabe 8**

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kreissegmentes. Radius  $r$ , Sehne  $s$ , Zentriwinkel  $\alpha$

- a)  $r = 12$  ,  $\alpha = 81^\circ$
- b)  $s = 34$  ,  $\alpha = 17^\circ$
- c)  $s = 40$  ,  $r = 58$



**Aufgabe 9**

Berechne im rechtwinkligen Dreieck ABC die fehlenden Seiten und Winkel.

- a)  $a = 20$  ,  $b = 21$
- b)  $a = 88$  ,  $c = 137$
- c)  $a = 12$  ,  $\alpha = 40^\circ$
- d)  $b = 5,8$  ,  $\beta = 78,2^\circ$
- e)  $c = 32,7$  ,  $\beta = 47,3^\circ$
- f)  $c = 7,68$  ,  $\alpha = 3\beta$

**Aufgabe 10**

Im rechtwinkligen Dreieck ABC (Hypotenuse  $c = AB$ ) sind gegeben:

- a)  $a = 24$  ;  $c = 74$
- b)  $h = 25$  ;  $w_\gamma = 32$
- c)  $a = 15$  ;  $w_\beta = 17$
- d)  $b = 83$  ;  $w_\alpha = 100$
- e)  $\alpha = 36^\circ$  ;  $w_\alpha = 20$
- f)  $c = 39$  ;  $\beta = 52^\circ$

- gesucht  $w_\alpha$  und  $w_\beta$
- gesucht  $a$  und  $b$
- gesucht  $s_a$
- gesucht  $c$
- gesucht  $w_\beta$
- gesucht  $h$

**Aufgabe 11**

Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ist durch die Kathete  $b = 65$  und die Hypotenuse  $c = 97$  gegeben. Wie lang ist die Halbierende des kleinsten Innenwinkels?

**Aufgabe 12**

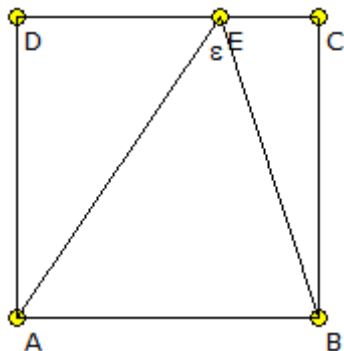
Bestimme in einem Rechteck mit den Seiten  $a = 2,8$  und  $b = 4,5$  den spitzen Schnittwinkel der Diagonalen.

**Aufgabe 13**

Wie groß sind die Innenwinkel eines Rhombus mit den Diagonalen  $e = 57,2$  und  $f = 81,7$ ?

**Aufgabe 14**

Das gleichschenklige Trapez ABCD ist gegeben durch die parallelen Seiten  $a = 45$  und  $c = 33$  sowie die Diagonale  $e = 89$ . Wie groß sind seine Basiswinkel?



**Aufgabe 15**

Im Quadrat ABCD gilt:  $AB = 6$  ,  $DE = 4$ . Wie groß ist der Winkel  $\epsilon$ ?

**Aufgabe 16**

Ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seite  $s = 1$  ist gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Fünfecks sowie die Länge seiner Diagonalen.

**Aufgabe 17**

Die Höhe eines Turms ist gesucht: Horizontaldistanz Beobachter - Turm 25 m; Höhenwinkel Beobachter - Turmspitze  $53^\circ$ ; Tiefenwinkel Beobachter - Turmfuß  $17^\circ$ .

## Lösung

- 1 a)  $\alpha = 19,7^\circ$ ;  $a = 14,62$ ;  $b = 40,84$ ;  $c = 43,39$   
b)  $\alpha = 33,69^\circ$ ;  $\beta = 56,31^\circ$ ;  $h = 42$ ;  $b = 75,52$ ;  $a = 50,48$   
c)  $\alpha = 20,61^\circ$ ;  $\beta = 69,39^\circ$ ;  $b = 33,24$ ;  $c = 35,51$   
d)  $\alpha = 56,60^\circ$ ;  $\beta = 33,40^\circ$ ;  $b = 10,9$ ;  $c = 19,80$ ;  $a = 16,53$   
e)  $\alpha = 46,01^\circ$ ;  $\beta = 43,99^\circ$ ;  $b = 26,83$ ;  $c = 38,64$   
f)  $\alpha = 36,87^\circ$ ;  $\beta = 53,13^\circ$ ;  $a = 15$ ;  $b = 20$ ;  $c = 25$   
g)  $a = 16,47$ ;  $c = 24,77$ ;  $\alpha = 41,67^\circ$ ;  $\beta = 48,33^\circ$   
h)  $a = 6,64$ ;  $b = 15,13$ ;  $c = 16,52$ ;  $\beta = 66,3^\circ$   
i)  $b = 26,83$ ;  $c = 38,64$ ;  $\alpha = 46,01^\circ$ ;  $\beta = 43,99^\circ$   
j)  $a = 6,71$ ;  $b = 4,47$ ;  $c = 8,06$ ;  $\alpha = 56,31^\circ$ ;  $\beta = 33,69^\circ$   
k)  $a = 30$ ;  $b = 12,5$ ;  $c = 32,5$ ;  $\alpha = 67,38^\circ$ ;  $\beta = 22,62^\circ$
- 2 a)  $\alpha = 73,74^\circ$ ;  $\gamma = 32,52^\circ$   
b)  $g = 6,36$ ;  $\gamma = 40^\circ$   
c)  $\alpha = 81,71^\circ$ ;  $\gamma = 16,58^\circ$ ;  $g = 11,62$   
d)  $\alpha = 61,4^\circ$ ;  $s = 65,04$ ;  $g = 62,26$   
e)  $\alpha = 64,5^\circ$ ;  $s = 4,01$ ;  $g = 37,89$   
f)  $a = 16,52$ ;  $\gamma = 54^\circ$   
g)  $a = 9,51$ ;  $\beta = 67,16^\circ$ ;  $\gamma = 45,68^\circ$
- 3 a)  $x = 10,7$ ;  $d = 22,79$ ;  $h = 20,12$ ;  $\delta = 118^\circ$   
b)  $h = 8,14$ ;  $x = 3,83$ ;  $c = 16,34$ ;  $\delta = 115,2^\circ$   
c)  $\beta = 16,18^\circ$ ;  $\delta = 163,82^\circ$ ;  $x = 58,58$ ;  $a = 154,17$   
d)  $\delta = 108,5^\circ$ ;  $d = 14,76$ ;  $x = 4,68$ ;  $a = 38,37$   
e)  $x = 6$ ;  $h = 80$ ;  $\beta = 85,71^\circ$ ;  $\delta = 94,29^\circ$ ;  $b = 13,69$   
f)  $h = 26,43$ ;  $\alpha = 78,25^\circ$
- 4  $h = 8,31$ ;  $\alpha = 72,87^\circ$
- 5 a)  $\alpha = 54,74^\circ$       b)  $45^\circ, 90^\circ$       c)  $35,26^\circ$
- 6 a)  $\beta = 57,89^\circ$ ;  $\alpha = 37,10^\circ$ ;  $y = 4,90$ ;  $c = 7,23$ ;  $\gamma = 85,01^\circ$   
b)  $\gamma = 37,80^\circ$ ;  $\alpha = 48,17^\circ$ ;  $c = 0,51$ ;  $\beta = 94,03^\circ$   
c)  $\alpha = 97^\circ$ ;  $c = 6,97$ ;  $b = 5,84$ ;  $a = 9,63$   
d)  $h_a = 3,21$ ;  $\gamma = 63,34^\circ$ ;  $\alpha = 81,66^\circ$ ;  $b = 3,59$
- 7  $e = 9,75$ ;  $f = 5,74$
- 8 a)  $A = 30,67$   
b)  $A = 28,67$   
c)  $A = 95,46$
- 9 a)  $c = 29$ ;  $\alpha = 43,6^\circ$ ;  $\beta = 46,4^\circ$   
b)  $b = 105$ ;  $\alpha = 39,97^\circ$ ;  $\beta = 50,03^\circ$   
c)  $b = 14,3$ ;  $c = 18,67$ ;  $\beta = 50^\circ$   
d)  $a = 1,21$ ;  $c = 5,93$ ;  $\alpha = 11,8^\circ$   
e)  $a = 22,18$ ;  $b = 24,03$ ;  $\alpha = 42,7^\circ$   
f)  $a = 7,10$ ;  $b = 2,94$ ;  $\alpha = 67,5^\circ$ ;  $\beta = 22,5^\circ$
- 10 a) 70,97 und 29,49  
b) 225,15 bzw. 25,16  
c) 23,58  
d) 219,69  
e) 15,51  
f) 18,92
- 11  $w_\beta = 77,14$
- 12  $63,78^\circ$

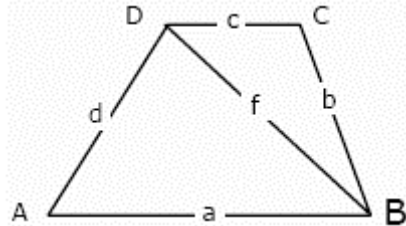
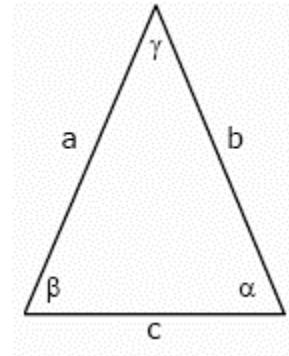
13             $110,01^\circ$  und  $69,99^\circ$   
14             $85,71^\circ$   
15             $52,13^\circ$   
16             $A = 1,72$  ;  $d = 1,62$   
17            41 m



## Trigonometrische Berechnungen am allgemeinen Dreieck

### Aufgabe 1

Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man  $a = b = 9$  und  $\alpha = \beta = 48^\circ$ . Berechnen Sie:  $h_a$ ,  $s_a$  und  $w_a$ .



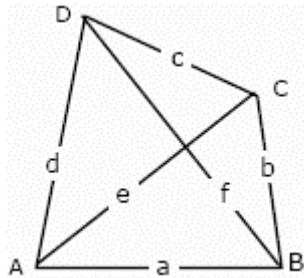
### Aufgabe 2

Bestimmen Sie im gegebenen Trapez die fehlenden Grössen:

- $a = 50$ ,  $c = 20$ ,  $d = 27$ ,  $\alpha = 71^\circ$
- $b = 19$ ,  $c = 33$ ,  $\alpha = 47^\circ$ ,  $\beta = 59^\circ$
- $b = c = d = 7,8$ ,  $\beta = 37^\circ$
- $b = d = 12$ ,  $f = 27$ ,  $\alpha = 70^\circ$

### Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Seitenhalbierenden des Dreiecks aus den Seiten  $a = 7$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ .



### Aufgabe 4:

Bei den folgenden drei Vierecken sind die fehlenden Seiten und Winkel zu berechnen:

- $a = 8,14$ ;  $e = 8,43$ ;  $\alpha = 75^\circ$ ;  $\beta = 67,5^\circ$ ;  $\gamma = 108,7^\circ$
- $a = 47,1$ ;  $b = 52,3$ ;  $\alpha = 117,8^\circ$ ;  $\beta = 85,2^\circ$ ;  $\gamma = 98,5^\circ$
- $a = 8,4$ ;  $d = 3,7$ ;  $e = 6,8$ ;  $\alpha = 125^\circ$ ; Winkel be =  $58^\circ$

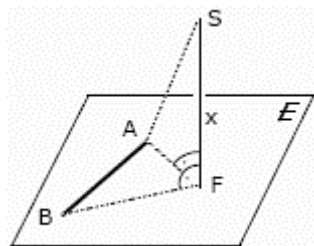
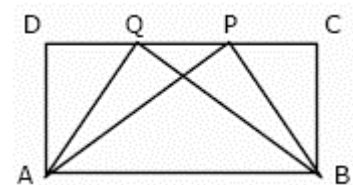
### Aufgabe 5:

Man berechne am allgemeinen Dreiecke die Winkelhalbierende von  $\gamma$  aus  $a = 7,5$ ,  $b = 4,5$  und  $\gamma = 54,54^\circ$ .

### Aufgabe 6

$AD = 99$ ,  $AB = 210$ ,  $DQ = QP = PC$ .

Herr K. behauptet, die Dreiecke ABP und ABQ seien rechtwinklig. Wenn ja, geben Sie eine Begründung an; wenn nein, berechnen Sie die Abweichung des Winkels APB von  $90^\circ$ .

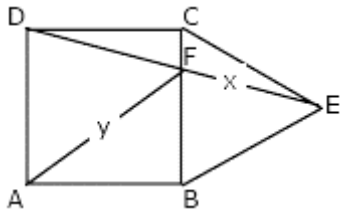


### Aufgabe 7

Die Bergspitze S liegt  $x$  Meter über der waagerechten Ebene E. Messungen:  $AB = 120\text{m}$ , Winkel  $BAF = 48^\circ$ , Winkel  $FBA = 76^\circ$ , Winkel  $FAS = 71^\circ$ , Zu berechnen:  $x = FS$

### Aufgabe 8

Ein Antennenmast steht auf waagerechter Ebene. Von einem Punkt dieser Ebene aus erscheint die Spitze unter dem Höhenwinkel  $\alpha = 19.5^\circ$ . Geht man  $a = 330$  m auf den Mast zu, so erscheint sie unter dem Höhenwinkel  $\beta = 36.5^\circ$ . Wie hoch ist der Mast?



### Aufgabe 9

ABCD ist ein Quadrat mit  $AB = 4$ , BEC ein gleichseitiges Dreieck.

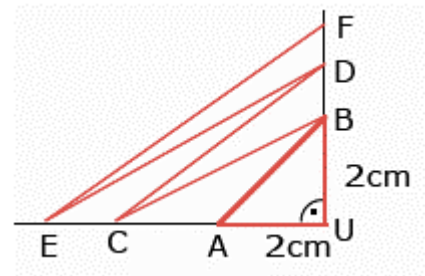
Berechnen Sie  $x = EF$  und  $y = AF$ .

### Aufgabe 10

Alle Dreiecke sind flächengleich.

Berechnen Sie die Längen der Strecken UE und UF.

(Abbildung rechts)



## Lösung

1  $\gamma = 84^\circ$ , Sinussatz  $c = 12,04$ ,  $h_a = 8,95$ ,  $s_a = 9,63$ ,  $w_a = 9,41$

2 a)  $f = 48,5$ ;  $\delta = 109^\circ$ ;  $b = 33,2$ ;  $\gamma = 50,3^\circ$ ;  $\beta = 50,3^\circ$

b)  $f = 45,8$ ;  $d = 22,3$ ;  $a = 58,0$

c)  $f = 14,8$ ;  $\alpha = \beta = 37^\circ$ ;  $a = 20,26$  / 2.Lösung Parallelogramm

d)  $\alpha = \beta = 70^\circ$ ;  $\delta = \gamma = 110^\circ$ ;  $a = 28,64$ ;  $c = 20,43$

3 nach dem Kosinussatz

$$bc \cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2$$

$$s_c^2 = b^2 + c^2/4 - bc \cos \alpha$$

$$s_c = 6,02 ; s_b = 7 ; s_a = 7,76$$

4 a)  $b = 6,92$  ;  $\delta = 108,8^\circ$  ;  $d = 6,36$  ;  $c = 3,85$

b)  $e = 67,39$  ;  $\delta = 58,5^\circ$  ;  $d = 64,23$  ;  $c = 72,83$

c)  $\beta = 43,35^\circ$  ;  $b = 9,71$  ;  $c = 5,02$  ;  $\delta = 101,4^\circ$

5 Dreieck ABC:  $c = 6,11$  ;  $\beta = 36,86^\circ$  Sinussatz

Teildreieck a,  $\beta$ ,  $\gamma/2$  ...  $\varepsilon = 115,9^\circ$

Winkelhalbierende = 5,00

6 für die zwei anderen Winkel bei P wird über die rechtwinkligen Dreiecke

$$35,2658^\circ ; 54,7370^\circ$$

und damit für  $\beta = 89,9972^\circ$

7 Sinussatz  $b = 140,4$

$$x = 408 \text{ m}$$

8 Turmhöhe 224 m

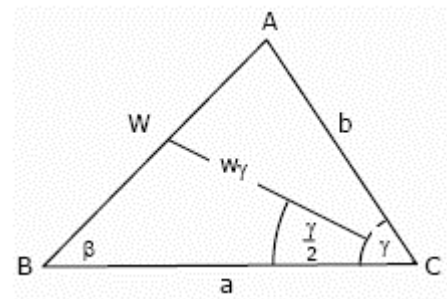
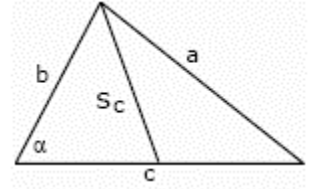
9  $x = 3,6$  ;  $y = 4,96$

10 ABU und CBA sind flächengleich; sie haben die gleiche Höhe UB und gleiche Grundlinie:  $UA = AC = 2\text{cm}$  ...  $UC = 4\text{cm}$

CBU und CBD haben die gleiche Höhe UC; CBU ist 2 mal so gross, die Grundlinie halb so gross:  $DB = 1/2 UB = 1\text{cm}$  ...  $UD = 3\text{cm}$

CUD und ECD haben die gleiche Höhe UD; CUD ist 3 mal so gross ...

$$UE = 5 \frac{1}{3} \text{ cm} ; \text{ analog } UF = 3 \frac{3}{4} \text{ cm}$$





## Trigonometrische Berechnungen - Sachaufgaben

### Aufgabe 1

Eine Radarstation R peilt einen heranfliegenden Überschalljäger F an und ermittelt alle 5 s die Entfernung  $r = RF$  des Flugzeugs zur Station sowie den Winkel  $\varphi$  der Geraden RF zur Horizontalen. Zwei aufeinanderfolgende Datensätze sind  $r_1 = 6946$  m;  $\varphi_1 = 30,26^\circ$  und  $r_2 = 5000$  m;  $\varphi_2 = 36,87^\circ$ .

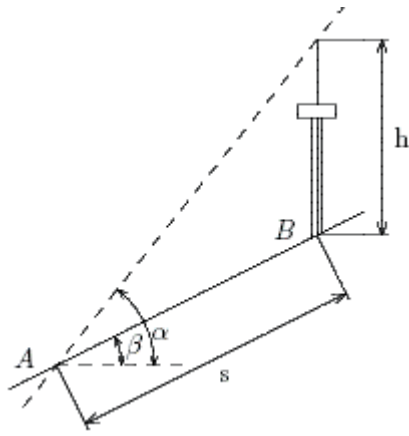
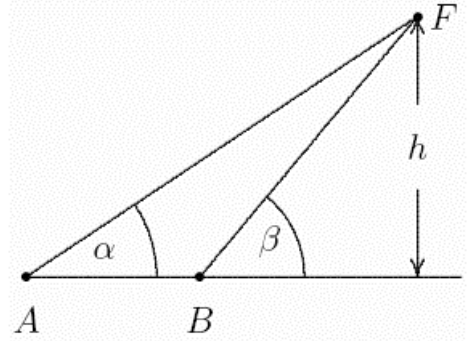
Berechne die horizontale Geschwindigkeit  $v_H$ , die Sinkgeschwindigkeit  $v_s$  sowie die Gesamtgeschwindigkeit  $v$  des Flugzeugs.

### Aufgabe 2

Zwei Buben haben sich an den Orten A und B aufgestellt ( $AB = 1000$  m) und bestimmen mit selbstgebastelten Winkelmessern die Winkel  $\alpha = 30^\circ$  und  $\beta = 45^\circ$  eines Flugzeuges F zur Horizontalen (siehe Abb.).

a) Berechne die Höhe  $h$  des Flugzeuges über Grund unter der Annahme, dass die beiden gemessenen Winkel exakt sind.

b) In welchem Intervall liegt  $h$ , wenn die gemessenen Winkel jeweils mit einem Fehler von  $\pm 1^\circ$  behaftet sind?



### Aufgabe 3

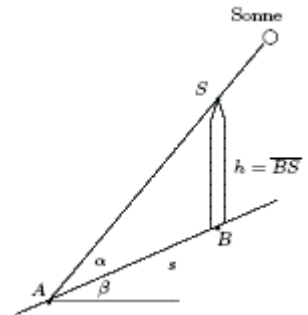
Ein Turm der Höhe  $h = 25$  m steht auf einem Hang, der unter dem Winkel  $\beta = 28^\circ$  gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge  $s = AB$  des Turms beträgt bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand 45 m. Berechnen Sie den Höhenwinkel  $\alpha$  unter dem die Sonne erscheint, auf Grad genau.

### Aufgabe 4

Ein Turm der Höhe  $h$  steht an einem Hang, der unter dem Winkel  $\beta = 30^\circ$  gegen die Horizontale geneigt ist.

Die Schattenlänge  $s = AB$  des Turms

ist bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand gerade doppelt so groß wie die Turmhöhe. Berechne den Winkel zwischen Sonnenstrahlen und Hang.



### Aufgabe 5

Die Höhe eines Schlottes soll durch Winkelmessung mit einem Theodoliten bestimmt werden. Vom Punkt A aus wird der Winkel  $\alpha$  zwischen der Horizontalen und der Blickrichtung zur Turmspitze gemessen. Anschließend wird der Theodolit waagrecht in Richtung des Turms zum Punkt B bewegt und die Messung wiederholt (Winkel  $\beta$ ).

a) Berechnen Sie die Turmhöhe  $h$  aus  $AB = 51,7$  m,  $\alpha = 23,65^\circ$  und  $\beta = 26,20^\circ$ .

b) Wie ändert sich dieses Ergebnis, wenn annimmt, dass der Messwert von  $\alpha$  mit einem Fehler von  $\pm 0,05^\circ$  behaftet ist?



## Lösungen

- 1  $v_H = 400 \text{ m/s} ; v_s = 100 \text{ m/s} ; v = 412 \text{ m/s}$
- 2 a)  $h = AB \cdot \tan \alpha \tan \beta / (\tan \beta - \tan \alpha) = 1366 \text{ m}$   
b)  $h_{\min} = 1193 \text{ m} ; h_{\max} = 1590 \text{ m}$
- 3  $\tan \alpha = (h + s \sin \beta) / (s \cos \beta) ; \alpha = 49,3^\circ$
- 4  $\tan (\alpha + \beta) = (h + 2h \sin \beta) / (2h \cos \beta) ; \alpha = 19,1^\circ$
- 5 a)  $h = \sin \alpha \sin \beta / \sin (\beta - \alpha) \cdot AB = 205,8 \text{ m}$   
b) Fehler: ca. 4m,  $h = 206 \text{ m}$