Vektorrechnung

Aufgabe 1

a. Die Punkte A(1,1,3), B(4,3,3) und C(2,-1,-5) definieren eine Ebene E. Gib für die Gleichung von E eine Parameterform und eine Koordinatenform an. Berechne die Determinante der Ortsvektoren der Punkte A, B, C. Interpretiere das Ergebnis geometrisch.

b. Berechne den Schnittpunkt S von E mit der Geraden

$g: x=[-2,3,-1]+t\cdot[2,-3,1]$.

Welche Entfernung hat S vom Ursprung des Koordinatensystems?

c. Berechne die Gleichung der Schnittgeraden h, die E mit der Ebene

$E' : 2x+y-z=8$

bildet. Schreibe die Geradengleichung so, dass der Antragspunkt die x-Komponente 2 hat und die Komponenten des Richtungsvektors möglichst kleine natürliche Zahlen sind. Unter welchem Winkel Schneiden sich die Ebenen E und E' in h?

Hinweis: Berechne dazu den Winkel, den die Normalenvektoren von E und E' einschließen.

d. Gib die Koordinatenform der Gleichung der Ebene an, die parallel zur Ebene E' ist, und durch den Punkt A verläuft.

Aufgabe 2

In einem Busch, bei dem der Verlauf der Zweige durch Geradengleichungen beschrieben werden können, leben der Käfer Karl und die Käferin Karla. Karl krabbelt einen Zweig z entlang. Seine Position x kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Gleichung

$x = [3, 1, -2] + t\cdot[2, -2, -1]$

beschrieben werden.

a. Karlas Ruheplatz befindet sich an einer Stelle mit den Koordinaten K(9|-3|0). Wann ist die Entfernung zwischen Karl und Karlas Ruheplatz am geringsten? Wie groß ist die Minimalentfernung? Gib die Geschwindigkeit von Karl an.

b. An Karlas Ruheplatz ist eine Gabelung von der zwei Zweige ausgehen. Ein Zweig z' mit der Gleichung

$x = [9,-3,0]+t\cdot[1,0,c]$

berührt den Weg von Käfer Karl. Welchen Wert hat c? Welchen Winkel schließen die Zweige z und z' ein?

c. Aus einem Grund, den nur Käfer verstehen, krabbelt Karla den anderen Zweig entlang. Ihre Bewegung wird durch die Gleichung

$x = [9, -3, 0] + t\cdot[1, -2, -2]$

beschrieben. Zu welcher Zeit sind sich die Käfer am nächsten? Wie weit sind sie zu diesem Zeitpunkt voneinander entfernt?

d. An Karlas Geburtstag düst Karl entsprechend der Gleichung

$x = [3, 1, -2] + 2\cdot t^2\cdot[2, -2, -1]$

den Zweig entlang. Wie lange dauert es jetzt, bis er Karlas Ruheplatz am nächsten ist?

Lösungen

1a) Parametergleichung:

$x = a + s\,(b-a) + t\,(c-a)$ $\qquad$ $x = [1, 1, 3] + s\,[3, 2, 0] + t\,[1, -2, -8]$

Der Vektor n=[2,-3,1] ist senkrecht zu den Richtungsvektoren (b-a) und (c-a) . Die Koordinatengleichung ist dann: $n\cdot x = n\cdot a \Rightarrow 2\cdot x - 3\cdot y + z = 2$

Der Betrag der Determinante

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} = -16$$

gibt das Volumen des Spats an, der von den Vektoren a, b, c aufgespannt wird. Die Dreieckspyramide (Tetraeder) O, A, B, C hat das Volumen V=16/6 = 8/3.

b) Einsetzen des Geradenterms in die Ebenengleichung (mit n=[2,-3,1]) ergibt eine Gleichung für t: $\quad n([-2,3,-1]+t\cdot[2,-3,1]) = 2 \;\Rightarrow\; 14\cdot(t-1) = 2 \Leftrightarrow t = {}^{8}/_{7}$.

Einsetzen in den Geradenterm ergibt den Vektor des Schnittpunkts:

$s = [-2,3,-1]+{}^{8}/_{7}\cdot[2,-3,1] = {}^{1}/_{7}\cdot[2,-3,1]$.

Der Abstand des Schnittpunktes S vom Ursprung ist $|s| = {}^{\sqrt{14}}/_{7}$.

c) Gleichungssystem:

$[2\cdot x - 3\cdot y + z = 2,\; 2\cdot x + y - z = 8]$.

Jetzt werden zwei Punkte P, Q berechnet:

P: Wähle x=2 : Das Gleichungssystem $[- 3\cdot y + z = -2,\; y - z = 4]$ hat die Lösung: $[y = -1 ,\; z = -5] \Rightarrow P(2,-1,-5)$

Q: Wähle x=4 : Das Gleichungssystem $[- 3\cdot y + z = -6,\; y - z = 0]$ hat die Lösung: $[y = 3 ,\; z = 3] \Rightarrow Q(4,3,3)$

Geradengleichung:

$x = p + t\cdot(q-p) = [2,-1,-5] + 2\cdot t\cdot[1,2,4] = [2,-1,-5] + r\cdot[1,2,4]$

Winkel: mit n=[2,-3,1] und m=[2,1,-1] ergibt sich aus $m\cdot n=0$ dass der Schnittwinkel 90° beträgt.

d) Gesuchte Ebenengleichung: $m\cdot x = m\cdot a \Rightarrow 2\cdot x + y - z = 0$ (m=[2,1,-1])

3a) Entfernungsquadrat:

$|[3, 1, -2] + t\,[2, -2, -1] - [9, -3, o]|^2 = 9t^2 - 36t + 56$

Bestimmung des Minimums:

$D(t) = 9t^2 - 36t + 56.\;\; D'(t) = 18t - 36.\; D'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$

Minimale Entfernung: $\sqrt{D(2)} = 5\sqrt{2} = 4.47..$

b) Gleichungen von z und z' :

$x = [3, 1, -2] + t\cdot[2, -2, -1]$ und $x = [9, -3, 0] + s\cdot[1, 0, c]$

z und z' schneiden sich, wenn die Determinante

$\mathrm{DET}([[9, -3, 0] - [3, 1, -2], [2, -2, -1], [1, 0, c]]) = 8 - 4\cdot c = 0$

Daraus ergibt sich c=2. Der Winkel zwischen z und z' ist wegen

$[2, -2, -1]\cdot[1, 0, 2] = 0$ wieder a = 90°.

c) In diesem Fall ist das Entfernungsquadrat D(t)

$|[3,1,2] + t[2,-2,-1] - ([9,-3,0] + t\,[1,-2,-,2])|^2 = 2\,(t^2 - 8t + 28)$

Bestimmung des Abstandsminimums:

$D'(t) = 4\cdot t - 16,\;\; D'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$

Minimale Entfernung: $\sqrt{D(4)} = \sqrt{24} = 4.898979485...$

d) Berechnung des Entfernungsquadrats D(t) und Berechnung von D'(t) ergibt:

$|[3,1,-2] + 2t^2\,[2,-2,-1] - [9,-3,0]|^2 = 36\,t^4 - 72t^2 + 56$

$d/dt\,(36\,t^4 - 72t^2 + 56) = 144\,t\,(t^2-1)$

$D'(t) = 0 \Leftrightarrow t=0$ oder $t=1$ oder $t = -1$. Einsetzen dieser Werte in $D''(t) = 144\cdot(3\cdot t^2 - 1)$ zeigt dass bei t=0 ein lokales Maximum und bei t=1 ein Minimum liegt.

Vektorrechnung: Ebenen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene E mit $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

a. Prüfen Sie, ob die Punkte $A(3|2|1)$, $B(1|4|2)$ und $C(-1|2|3)$ in E liegen?
b. Für welches a liegen die Punkte $D(a|a+3|3)$ bzw. $F(a|2a|3)$ in E?
c. Bestimmen Sie eine Parameter- bzw. Koordinatengleichung von E.
d. Geben Sie eine andere Normalengleichung derselben Ebene E an.

Aufgabe 2
Gegeben sind die Ebenen E_1, E_2 und E_3 mit

$$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \quad E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0, \quad E_3: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.$$

a. Wie lauten die vereinfachten Normalengleichungen von E_1 und E_2?
b. Begründen Sie: E_1 und E_2 sind identisch.
c. Begründen Sie: E_1 und E_3 sind echt parallel.
d. Bestimmen Sie eine Normalengleichung einer Ebene E_4, die zu E_2 echt parallel ist.
e. Bestimmen eine Koordinatengleichung von E_1, E_2 und E_3.

Aufgabe 3
Stellen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C in Parameterform, in Normalenform und in Koordinatenform auf.

a. $A(1|2|-2)$, $B(0|5|0)$, $C(5|0|-2)$
b. $A(2|1|1)$, $B(4|2|2)$, $C(3|3|4)$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E:

a. $E: \; -4x + 5y + 3z = 12$

b. $E: \; x + 2z = 4$

c. $E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$

d. $E: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Aufgabe_1a $\left[\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=1-1=0\Rightarrow A\in E$

Aufgabe_1a $\left[\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=-1-3+2=-2\neq 0\Rightarrow B\notin E$

Aufgabe_1a $\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=-3-1+4=0\Rightarrow C\in E$

Aufgabe_1b

$$\left[\begin{pmatrix}a\\a+3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2\\a+2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\ \Leftrightarrow a-2-a-2+4=0\ \ \forall a\in E$$

Aufgabe_1b

$$\left[\begin{pmatrix}a\\2a\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2\\2a-1\\3-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\quad\Leftrightarrow a-2-2a+1+4=0\quad\Leftrightarrow a=3$$

Aufgabe_1b

$$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=x-2-y+1+2z-2=0\ \Leftrightarrow x-y+2z=3$$

Aufgabe_1c

$$\textit{Stützvektor}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \textit{erster Richtungsvektor}\ \vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\quad d.h\quad \vec{u}\cdot=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\textit{zweiter Richtungsvektor}\ \vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=0\quad d.h\quad \vec{v}\cdot=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\quad \vec{v}\ \textit{und}\ \vec{u}\ \sin d\ \textit{linear}$$

$$\textit{unabhängig also lautet die Ebene}\qquad E=\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe_1d

Ein weiterer Normalenvektor muß kollinear zum vorgegebenen Normalenvektor sein, zum Beispiel $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Suche einen Punkt B, der in E liegt, jedoch vom jetzigen Stützvektor verschieden ist. Er muß die Normalenform identisch erfüllen.

$$\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .da \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad d.h. (3/2/1) \Rightarrow \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe_2a

$$E_1 : \ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \qquad E_2 : \ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 15$$

Aufgabe_2b
Dies kann man zum Beispiel zeigen, in dem man die zugehörigen Koordinaten-gleichungen vergleicht und feststellt, dass sie linear abhängig sind.

$$E_1 : \ x - y + 2z = 5 \quad und \quad E_2 := 3x - 3y + 6z = 15$$

Die zweite Möglichkeit die Ebenengleichheit zu zeigen besteht darin, indem man einen Punkt aus E_1 in E_2 einsetzt und zeigt, dass die Ebenengleichung gilt. Vorher müßte noch gezeigt werden, dass die beiden Normalenvektoren linear abhängig sind.

$$\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe_2c
Aufgabe_2d
Aufgabe_2e

$$E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = x - y + 2z - 5 = 0 \qquad x - y + 2z = 5$$

$$E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3x - 3y + 6z = 15 \qquad E_3 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2x - 2y + 4z = 4$$

Aufgaben: Vektorrechnung Ebenen und Geraden

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und der Punkt $A(5|-5|1)$.

a. Bestimmen Sie eine zur E orthogonale Gerade g, die den Punkt A enthält.

b. Bestimmen Sie den Schnittpunkt F der Geraden g mit der Ebene E.

c. A wird an E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes A'.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Gleichung der Geraden g, die E im Stützpunkt senkrecht schneidet.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Gerade g und die Ebene E auf Orthogonalität bzw. Parallelität.

a.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

b.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

c.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad x + 2y - 4z = 0$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Ebene $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ sowie der Punkt $A(-2|1|2)$.

Gesucht ist eine Ebene E_2, die A enthält und orthogonal zu E_1 ist. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

Lösung

Aufgabe 1: Als Stützvektor der Geraden wählt man A, als Richtungsvektor kann man

den Normalenvektor der Ebene E benutzen.

$$a)\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b)\quad F(1/-4/2)\quad (F\ \textit{heißt Lotfusspunkt})$$

$$c)\quad \overrightarrow{Sp}=\overrightarrow{OA}+2\,\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}\quad Sp(-3/-3/3)$$

Aufgabe 2:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

$$a)\ -\tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}\quad g\ \textit{senkrecht}\ E\qquad b)\ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}=0\quad g\ \textit{parallel}\ E\qquad c)\ \textit{weder noch}$$

Aufgabe 4:

$$E_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\qquad E_1\cap E_2=\left[E_2-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0\qquad \begin{pmatrix}-2+2\mu\\1+\lambda+\mu\\1-2\mu\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$\lambda=-9\mu+5\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+(-9\mu+5)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}$$

Vektorrechnung: Geraden

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Gesucht ist ein Punkt P auf der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Abstand 6 von A(15|-1|8).

Aufgabe 3
Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel von g und h.

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 51 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

A(-1|3|-5) und C(7|5|-1) sind Ecken eines Rechtecks. Die Ecke B liegt auf $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken B und D.

Lösungen

Aufgabe 1

a) parallel und verschieden
b) S(0 | 0 | -3)
c) windschief

Aufgabe 2

Ein variabler Punkt auf g hat die Koordinaten P (1+2t | -t | -4 +2t).

Damit erhält man: AP = $\begin{pmatrix} 1+2t-15 \\ -t-(-1) \\ -4+2t-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-14 \\ 1-t \\ 2t-12 \end{pmatrix}$

Die Länge von AP soll 6 sein:

$\sqrt{(2t-14)^2 + (1-t)^2 + (2t-12)^2} = 6$

$9t^2 - 106t + 305 = 0$

$t_1 = 5$ ... P1(11 | -5 | 6) und $t_2 = 61/9$ ... P2 (14 5/9 | -6 7/9 | 9 5/9)

Aufgabe 3

Gleichungssystem (Parameter beachten!)

$5 + 4t = 49 + 2s$
$51 - t = 4 - 5s$
$6 + 7t = 7 - 6s$

Am einfachsten ist es, wenn wir aus den ersten beiden Gleichungen t eliminieren, indem wir die zweite 4 multiplizieren und zur ersten addieren. ... s = -8

Schnittpunkt: S(33 44 55)

Winkel = 116,28° , spitzer Winkel 63,72°

Aufgabe 4

Jeder beliebige Punkt auf g hat die Koordinaten: B(−4+2t5+t2−t)

Daraus berechnen sich AB und CB wie folgt:

AB = $\begin{pmatrix} -4+2t-(-1) \\ 5+t-3 \\ 2-t-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ t+2 \\ 7-t \end{pmatrix}$ CB = $\begin{pmatrix} -4+2t-7 \\ 5+t-5 \\ 2-t-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-11 \\ t \\ 3-t \end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren müssen senkrecht aufeinander stehen, ihr Skalarprodukt ist 0:

$(2t-3)(2t-11) + t(t+2) + (7-t)(3-t) = 0$ ... $6t^2 - 36t + 54 = 0$

t = 3 ... B (2 | 8 | -1)

OD = OC - AB ... D (4 | 0 | -5)

Vektorrechnung: Geraden

Aufgabe 1:
Gegeben sind die Punkte $A(-5/4/-2)$; $B(7/-1/0)$ und $C(-3/2/-3)$.

a) Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks *ABC*.
b) Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks *ABC*.
c) Bestimmen Sie die Höhe h_c (d.h. den Abstand des Punktes C zur Seite c bzw. den Abstand des Punktes C zur Seite $\overline{AB}$.

Aufgabe 2:
Überprüfen Sie die gegenseitige Lage der Geraden *g* und *h*. Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel, falls die Geraden sich schneiden.

a) $g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $g_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
Gegeben sind die Geraden $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel von *g* und *h*.

Aufgabe 4:
Gegeben sind die Geraden $g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und

$g_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die drei Geraden ein Dreieck bilden und bestimmen Sie die Koordinaten der drei Eckpunkte *A*, *B* und *C*.
b) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks *ABC*.
c) Bestimmen Sie die Länge der Dreieckseiten.
d) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes *B* von der Seite *b*.

Aufgabe 5:
Gegeben sind der Punkt $P(3/4/-1)$ und die Gerade $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

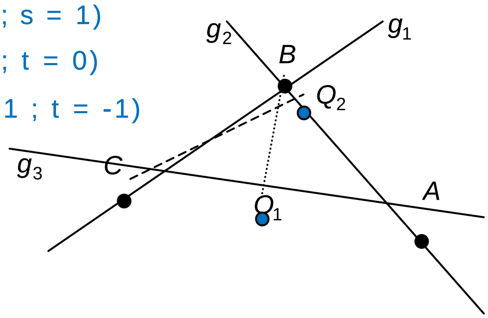
a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes *P* von der Geraden *g*.
b) Geben Sie einen Vektor an, der orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden *g* verläuft.

LÖSUNGEN:

<table>
<tr><td>A1</td><td>a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{173} \approx 13{,}15\ LE$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{118} \approx 10{,}86\ LE$ und $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9} = 3\ LE$

b) $\cos\alpha \approx 0{,}81 \Rightarrow \alpha \approx 35{,}8°$; $\cos\beta \approx 0{,}99 \Rightarrow \beta \approx 9{,}3°$ und
$\cos\gamma \approx -0{,}71 \Rightarrow \gamma \approx 134{,}9°$

c) $r \approx 0{,}185$ also $Q(2{,}78 / 3{,}08 / -1{,}63) \Rightarrow h_c \approx 1{,}76\ LE$</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>a) Die Geraden sind „echt“ parallel.
(Richtungsvektoren Vielfache; Geraden aber nicht identisch, da $(-1/2/-3)$ nicht auf h_2 liegt bzw. $(3/4/-2)$ nicht auf h_1.)

b) $S(1/-2/-4)$ ($r = -1; s = 4$) $\alpha \approx 118{,}76°$</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>$S(3/3/2)$ $\varphi = 60°$</td></tr>
<tr><td>A4</td><td>a) g_1 und g_2 schneiden sich in $B(3/2/4)$ (r = 2 ; s = 1)
g_2 und g_3 schneiden sich in $A(4/6/1)$ (s = 2 ; t = 0)
und g_1 und g_3 schneiden sich in $C(1/2/1)$ (r = 1 ; t = -1)


b) $\alpha \approx 41{,}82°$; $\beta \approx 67{,}62°$ und $\gamma \approx 70{,}56°$

c) $\left|\overrightarrow{AC}\right| \approx 5$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| \approx 3{,}6$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| \approx 5{,}1$

d) $d_1 = \left|\overrightarrow{BQ_1}\right| \approx 3{,}4$ ($d_2 = \left|\overrightarrow{CQ_2}\right| \approx 3{,}33$ und $d_3 = \left|\overrightarrow{AQ_3}\right| \approx 4{,}71$)</td></tr>
<tr><td>A5</td><td>a) $r = -3\frac{5}{6} = -3{,}8\overline{3}$ $Q(3{,}8\overline{3} / 3{,}8\overline{3} / -0{,}\overline{6})$ $d = \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0{,}91\ LE$

b) zum Beispiel $\overrightarrow{v_o} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

Vektorrechnung Punkte, Geraden, Ebene

Aufgabe 1 (Abstand Punkt/Ebene)
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

a. $E: \quad 4x - 4y + 2z = 16$, $P(5|-5|6)$ b. $E: \quad -4x + 5y + z = 10$, $P(-3|7|5)$

Aufgabe 2 (HNF, Abstand Punkt/Ebene , Halbraum)
Stellen Sie zunächst eine Hesse'sche Normalengleichung der Ebene E auf. Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q von E mithilfe der HNF. Liegen P und Q im gleichen Halbraum bezüglich der Ebene E ? Liegt einer der beiden Punkte im gleichen Halbraum wie der Origo $O(0|0|0)$?

a.
$E: \; 6x + 3y + 2z = 22$
$P(7|5|7)$, $Q(6|1|2)$

b.
$E: \quad x - 2y + 2z = 8$
$P(7|1|6)$, $Q(2|-4|8)$

c.
$E: \quad 2x + 3y + 6z = 12$
$P(4|3|5)$, $Q(-2|1|-6)$

d. $E: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$P(4|4|4)$, $Q(4|-0{,}5|1)$

e. $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix}$
$P(7|11|5)$, $Q(-5|-7|1)$

Aufgabe 3 (Abstand Punkt/Gerade im $\Re^2$ bzw. im $\Re^3$)
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g im $\Re^2$ bzw. im $\Re^3$.

a. $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(6|-1)$ b. $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P(1|-2{,}5)$

c. $A(4|2|1)$, $B(0|6|3) \in g$, $P(2|1|8)$ d. $A(4|8|7)$, $B(9|3|7) \in g$, $P(0|0|0)$

Aufgabe 4 (Abstand windschiefer Geraden)
Zeigen Sie, dass g und h windschief sind. Berechnen Sie den Abstand von g und h.

a.
$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b.
$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c.
$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung

Aufgabe_1a $d(E;P)=6$

Aufgabe_1b $d(E;P)=6{,}48$

Aufgabe_2a $d(E;P)=7 \quad d(E;Q)=3 \quad d(E;O)=-\frac{22}{7}<0$

O liegt nicht im gleichen Halbraum wie P und Q.

Aufgabe_2b $d(E;P)=3 \quad d(E;Q)=6 \quad d(E;O)=-3<0$

O liegt nicht im gleichen Halbraum wie P und Q.

Aufgabe_2c $d(E;P)=5 \quad d(E;Q)=-7 \quad d(E;O)=-\frac{12}{7}<0$

P liegt nicht im gleichen Halbraum wie O und Q.

Aufgabe_2d $d(E;P)=5 \quad d(E;Q)=-7 \quad d(E;O)=-\frac{12}{7}<0$

P liegt nicht im gleichen Halbraum wie O und Q.

Aufgabe_2e $d(E;P)=11 \quad d(E;Q)=-11 \quad d(E;O)=-\frac{30}{7}<0$

P liegt nicht im gleichen Halbraum wie O und Q.

Aufgabe_3a

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad P(6/-1)=-11 \quad \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad |\vec{n}|=\sqrt{2}$$

$$g:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=0 \qquad d(P/g)=4{,}24$$

Aufgabe_3b $d(P/g)=4{,}24$

Aufgabe_3c

$$A(4/2/1) \quad B(0/6/3) \quad C(2/1/8) \quad g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\textit{Hilfsebene}\quad E:\left[\vec{x}-\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}=0 \quad \textit{Gesucht ist der Lotfußpunkt } F$$

$$\textit{am Schnittpunkt } g\cap E \quad \lambda=\tfrac{1}{2} \quad \overline{OF}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$F(2/4/2) \quad d(P/g)=6{,}71$$

Aufgabe_3d

$$g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\8\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix} \quad \lambda=\tfrac{2}{5} \qquad F(6/6/7) \quad d(P/g)=11$$

Zu Beginn immer zeigen dass g und h windschief sind.

Idee: Den Abstand messen in denen die Geraden liegen.

Aufgabe_4a

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix} \quad \vec{n}=\sqrt{81}=9 \qquad H:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\8\\10\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{9}=0$$

$$d(P/h)=d(P/H)=6{,}71=\left|\left[\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\8\\10\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{9}\right|=9$$

Aufgabe_4b $d(P/h)=d(P/H)=7$

Aufgabe_4c $d(P/h)=d(P/H)=9{,}27$

Vektorrechnung: Beispielklausur

Aufgabe

Gegeben sind die Punkte *A, B* und *C* mit $A(2/-4/6)$, $B(-2/4/4)$ und $C(6/2/-4)$.
Die Gerade *g* durch die Punkte *A* und *B* kann dargestellt werden durch

$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$. Durch $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und

$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -4{,}6 \\ 7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ sind zwei weitere Geraden gegeben.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks $A'B'C'$, das sich ergibt, wenn man die Punkte *A*, *B* und *C* am Punkt $P(-1/1/3)$ spiegelt (Punktspiegelung).

b) Bestimmen Sie den Punkt *D* so, dass die Punkte ABCD ein Parallelogramm bilden.

c) Geben Sie jeweils die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Parallelogramms an (M_{AB} und M_{BC}).

d) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden f_M durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Parallelogramms an (durch M_{AB} und M_{BC}).

e) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden *g* mit den drei Koordinatenebenen.

f) Überprüfen Sie, ob der Punkt $P(-1/1/3)$ auf der Geraden *g* liegt.

g) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Geraden *g* und *h* parallel zueinander verlaufen, aber <u>nicht identisch</u> sind.

h) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden f_1 an, die parallel zur Geraden *g* durch den Punkt $P(-1/1/3)$ verläuft.

i) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden f_2 an, die parallel zur *y*-Achse durch den Punkt $P(-1/1/3)$ verläuft.

j) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade *g* in genau einem Punkt schneidet und begründen Sie die Konstruktion ihrer Geraden.

k) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die parallel zu den Geraden *g* und *h* verläuft, aber mit keiner der beiden identisch ist und begründen Sie die Konstruktion ihrer Geraden.

l) Überprüfen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden *f* und *h*.

Lösungen

(a) $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0A'}$

$$\overrightarrow{0B'} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0B'}$$

$$\overrightarrow{0C'} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0C'}$$

Die gesuchten Spiegelpunkte sind somit:
$A'(-4/6/0)$, $B(0/-2/2)$ und $C(-8/0/10)$.

(b)
Damit die vier Punkte ein Parallelogramm bilden, müssen die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang sein, somit müssen die Vektoren, die gegenüberliegende Seiten beschreiben identisch sein. Somit gilt: $\overrightarrow{ADB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Somit gilt: $D(10/-6/-2)$.

(c)

$$M_{AB} = \overrightarrow{0A} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

$$M_{BC} = \overrightarrow{0B} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$ (d)

$$f_3: \quad \vec{x} = \overrightarrow{0M_{AB}} + r\cdot\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} x = 2 - 4u \\ y = -4 + 8u \\ 0 = 6 - 2u \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ -6 \,\big|\, :(-2) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = 2 - 4u \\ y = -4 + 8u \\ 3 = u \end{array}\right| \begin{array}{l} u = 3 \; einsetzen \\ u = 3 \; einsetzen \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} x = 2 - 4 \cdot 3 \\ y = -4 + 8 \cdot 3 \\ 3 = u \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = -10 \\ y = 20 \\ 3 = u \end{array}\right|$$

$also: S_{xy}\left(-10/20/0\right)$

$$S_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} 0 = 2 - 4u \\ y = -4 + 8u \\ z = 6 - 2u \end{array}\right| \begin{array}{l} -2 \,\big|\, (-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} 0{,}5 = u \\ y = -4 + 8u \\ z = 6 - 2u \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ u = 0{,}5 \; einsetzen \\ u = 0{,}5 \; einsetzen \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} 0{,}5 = u \\ y = -4 + 8 \cdot 0{,}5 \\ z = 6 - 2 \cdot 0{,}5 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} 0{,}5 = u \\ y = 0 \\ z = 5 \end{array}\right|$$

$also: S_{yz}\left(0/0/5\right)$

$$S_{xz} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} x = 2 - 4u \\ 0 = -4 + 8u \\ z = 6 - 2u \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ +4 \,\big|\, :8 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = 2 - 4u \\ 0{,}5 = u \\ z = 6 - 2u \end{array}\right| \begin{array}{l} u = 0{,}5 \; einsetzen \\ \\ u = 0{,}5 \; einsetzen \end{array}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} x = 2 - 4 \cdot 0{,}5 \\ 0{,}5 = u \\ z = 6 - 2 \cdot 0{,}5 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = 0 \\ 0{,}5 = u \\ z = 5 \end{array}\right|$$

$also: S_{xz}\left(0/0/5\right)$

(f) $P\left(-1/\,1/\,3\right)$ einsetzen in die Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{c}-1=2-4u\\1=-4+8u\\3=6-2u\end{array}\right|\begin{array}{l}-2\\+4\\-6\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}-3=-4u\\5=8u\\-3=-2u\end{array}\right|\begin{array}{l}(-4)\\:8\\:(-2)\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}\frac{3}{4}=u\\\frac{5}{8}=u\\1{,}5=u\end{array}\right|\qquad \textit{also liegt P nicht auf g.}$$

(g)
Dazu wird überprüft, ob die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.

$$u\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0{,}5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\left|\begin{array}{c}-4u=1\\8u=-2\\-2u=0{,}5\end{array}\right|\begin{array}{l}:(-4)\\:(8)\\:(-2)\end{array}\quad\Rightarrow\left|\begin{array}{c}u=-\frac{1}{4}\\u=-\frac{1}{4}\\u=-\frac{1}{4}\end{array}\right|$$

Die beiden Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander, somit verlaufen die Geraden parallel zueinander. Zum Nachweis der Identität der beiden Geraden reicht es, nachzuweisen, dass der Stützvektor der einen Geraden auf der jeweils anderen Geraden liegt. Ist dies nicht der Fall, so verlaufen sie im Abstand s (mit $s\neq 0$) parallel zueinander.

$$\begin{pmatrix}1{,}6\\-4{,}6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\-2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\left|\begin{array}{c}1{,}6=2-4u\\-4{,}6=-4+8u\\7=6-2u\end{array}\right|\begin{array}{l}-2\\+4\\-6\end{array}\quad\Rightarrow\left|\begin{array}{c}-0{,}4=-4u\\-0{,}6=8u\\1=-2u\end{array}\right|\begin{array}{l}:(-4)\\:(8)\\:(-2)\end{array}\quad\Rightarrow\left|\begin{array}{c}0{,}1=u\\-0{,}075=u\\-0{,}5=u\end{array}\right|$$

Somit liegt der Punkt $(1{,}6/-4{,}6/7)$ (Stützvektor von h) <u>nicht</u> auf der Geraden g, die beiden Geraden sind also nicht identisch.

(h)
Die Bedingung wird erfüllt, falls der Richtungsvektor der Geraden ein Vielfaches des Richtungsvektors von g ist (oder sogar mit ihm identisch). Der Stützvektor der neuen Geraden kann dann der Vektor $\overrightarrow{0P}$ sein. Eine mögliche Parameterdarstellung ist dann:

$$f_1:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\-2\end{pmatrix}$$

(i)

Jeder Vektor der Art $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ kann Richtungsvektor der y-Achse sein. z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Der Stützvektor der neuen Geraden kann dann der Vektor $\overrightarrow{0P}$ sein. Eine mögliche Parameterdarstellung ist dann: $f_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(j)
Die gesuchte Gerade muss einen gemeinsamen Punkt mit g besitzen und darf nicht parallel zu g verlaufen (das heißt ihr Richtungsvektor darf kein Vielfaches des Richtungsvektors von g sein).
Dies erreicht man zum Beispiel, indem man als Stützvektor der gesuchten Geraden den Stützvektor von g benutzt und als Richtungsvektor einen Vektor, der sich aus dem Richtungsvektor von g ergibt indem man die x-Koordinate und die y-Koordinate beibehält (mit 1 multipliziert) und die z-Koordinate mit 2 multipliziert. (Damit ist sichergestellt, dass der neue Richtungsvektor nicht parallel verläuft.) Somit ergibt sich:

$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(k)
Hier kann zum Beispiel der Richtungsvektor der Geraden g beibehalten werden, es muss jedoch ein Stützvektor benutzt werden, der auf keiner der beiden Geraden liegt. Dies kann man zum Beispiel sicherstellen, indem man den Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Stützvektoren der Geraden g und h wählt.

$$\vec{x}_M = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -4{,}6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ -0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ -4{,}3 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Gleichung: $g_d: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ -4{,}3 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

(l)

<u>I. Parallelität überprüfen:</u>

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{rl} 2r = 1 & :2 \\ 3r = -2 & :3 \\ -5r = 0{,}5 & :(-5) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} r = \frac{1}{2} \\ r = -\frac{2}{3} \\ r = -0{,}1 \end{array} \right|$$

Die Richtungsvektoren sind also keine Vielfachen voneinander, d.h. die Geraden verlaufen nicht parallel.

II. Schnittpunkt nachweisen:

Bed: $f_3 = h$

$\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}6\\-4{,}6\\7\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\0{,}5\end{pmatrix}$	$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{rl} 3{,}5r &= -0{,}7 \\ 1{,}5r &= -2{,}3 - v \\ 5-5r &= 7+0{,}5v \end{array} \right\| :3{,}5$
$\Rightarrow \left\| \begin{array}{rl} 2r &= 1{,}6+v \\ 3r &= -4{,}6-2v \\ 5-5r &= 7+0{,}5v \end{array} \right\| :(2)$	$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{rl} r &= -0{,}2 \\ 1{,}5r &= -2{,}3 - v \\ 5-5r &= 7+0{,}5v \end{array} \right\|$
$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{rl} 2r &= 1{,}6+v \\ 1{,}5r &= -2{,}3-v \\ 5-5r &= 7+0{,}5v \end{array} \right\| +Z_2$	

$r = -0{,}2$ einsetzen in Z_2:

$\Rightarrow\ 1{,}5 \cdot (-0{,}2) = -2{,}3 - v$

$\Leftrightarrow\ -0{,}3 = -2{,}3 - v \quad |+v \quad |+0{,}3$

$\Leftrightarrow\ v = -2$

$r = -0{,}2$ und $v = -2$ einsetzen in Z_3:

$\Rightarrow\ 5 - 5 \cdot (-0{,}2) = 7 + 0{,}5 \cdot (-2)$

$\Leftrightarrow\ 5 + 1 = 7 - 1$

$\Leftrightarrow\ 6 = 6$

III. Schnittpunkt berechnen: $r = -0{,}2$ einsetzen in k:

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + (-0{,}2) \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}4\\-0{,}6\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-0{,}4\\-0{,}6\\6\end{pmatrix}}}$$