## Stammfunktionen ermitteln

Aufgabe 1) Ermittle die Stammfunktionen der folgenden Funktionen!

1. $f(x) = 3x$
2. $f(x) = 8x^3$
3. $f(x) = x^2 + x$
4. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
5. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^3$
6. $f(x) = x^2/3 + x/4$
7. $f(x) = x^4/10 - 3x^2 + 2/3$
8. $f(x) = 1/x^2$
9. $f(x) = 1/x^3$
10. $f(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 2) Ermittle die Gleichung der Funktion, wenn die Ableitung und ein Punkt des Funktionsgraphen gegeben ist.

11. $f'(x) = 4x$; P(2/5)
12. $f'(x) = 2x - 3$; P(1/0)
13. $f'(x) = -6x + 5$; P(2/3)
14. $f'(x) = -x + 1$; P(-1/1)
15. $f'(x) = 3x^2 - 4x$; P(0/-4)
16. $f'(x) = 6x^2 - 5$; P(-2/-5)
17. $f'(x) = -x^2 + x + 4$; P(3/4)
18. $f'(x) = 2x^3 - 6x$; P(-2/1)

Aufgabe 3) Bestimme die zugehörigen Stammfunktionen!.

1. $y = x$
2. $y = 2x - 3$
3. $y = 4x + 1$
4. $y = 81x^2 + 2x$
5. $y = - 3x^2 + 10x - 3$
6. $y = 16x^3 - 6x$
7. $y =-12/7\ x^3 - 12x + 1/2$
8. $y = 2/3\ x^5 - 100x$
9. $y = (x - 1)(x + 2)(x-3)$
10. $y = (x - 5)^4$
11. $y = (2x - 5)^4$
12. $y = (1 - 3x)^3$
13. $y = -4 / x^2$
14. $y = 1 / (3x + 1)^2$
15. $y = x / (x^2 + 1)^3$
16. $y = (x + 2) / (x + 1)^3$
17. $y = 2x / (x^2+ 1)^3$
18. $y = (2x + 1) / (x^2 + x + 1)$
19. $y = 2x / (x^2 + 1)$
20. $y = x^2 / (x^3 + 1)^2$
21. $y = (x - 3)(x + 5) / (x + 1)$

22. $y = \sin(x)$
23. $y = \sin(x) + 3$
24. $y = 8x - \sin(x)$
25. $y = x \sin(x)$
26. $y = x \sin(2x)$
27. $y = 4x \sin(2x)$
28. $y = x^2 \sin x$
29. $y = \sin^2(x)$
30. $y = \sin^3(x)$
31. $y = \sin^4(x)$
32. $y = 1 / \sin^2(x)$
33. $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
34. $y = \sin(x) \cos(x)$
35. $y = \sin(2x) \cos(3x)$
36. $y = \sin(2x) \cos(x/2)$
37. $y = \sin(x)\ e^x$
38. $y = \cos(x)$
39. $y = x \cos(x)$
40. $y = x \cos(3x)$
41. $y = e^x$
42. $y = e^{-x}$
43. $y = e^{4x}$
44. $y = e^{\sqrt{(x)}}$
45. $y = x\ e^x$
46. $y = (1+x)\ e^x$
47. $y = x\ e^{-x}$
48. $y = x\ e^{2x}$
49. $y = (x - 1)\ e^x$
50. $y = x^2\ e^x$
51. $y = x^2\ e^{x/2}$
52. $y = x^2\ e^{-x}$
53. $y = x^3\ e^x$
54. $y = \ln x$
55. $y = x \ln(x)$
56. $y = x \ln(3x)$
57. $y = x^2 \ln(x)$
58. $y = x^2 \ln(3x)$
59. $y = (\ln(x))^2$
60. $y = \ln(x) / x^2$
61. $y = 1/x$
62. $y = \tan^2 x$
63. $y = 1 / (x - 3)^2$

Ergebnisse: Stammfunktionen

1. $F(x) = 3x^2/2 + C$
2. $F(x) = 2x^4 + C$
3. $F(x) = x^3/3 + x^2/2 + C$
4. $F(x) = x^3 + 2x^2 + x + C$
5. $F(x) = x^7/7 - x^6/2 + 7x^4/4 + C$
6. $F(x) = x^3/9 + x^2/8 + C$
7. $F(x) = x^5/50 - x^3 + 2x/3 + C$
8. $F(x) = -1/x + C$
9. $F(x) = -1/2x^2 + C$
10. $F(x) = 2/3 \cdot$Ö$x^3 + C$
11. $f(x) = 2x^2 - 3$
12. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
13. $f(x) = -3x^2 + 5x + 5$
14. $f(x) = -x^2/2 + x + 5/2$
15. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$
16. $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$
17. $f(x) = -x^3/3 + x^2/2 + 4x - 7/2$
18. $f(x) = x^4/2 - 3x^2 + 5$

**Teil 2**

ganzrationale Funktionen

| Funktion | Stammfunktion |
|---|---|
| X | $½ x^2$ |
| $2x - 3$ | $x^2 - 3x$ |
| $4x + 1$ | $2x^2 + x$ |
| $81x^2 + 2x$ | $27x^3 + x^2$ |
| $- 3x^2 + 10x - 3$ | $- x^3 + 5x^2 - 3x$ |
| $16x^3 - 6x$ | $4x^4 - 3x^2$ |
| $-12/7 x^3 - 12x + 1/2$ | $- 3/7 x^4 - 6x^2 + 1/2 x$ |
| $2/3 x^5 - 100x$ | $1/9 x^6 - 50x^2$ |
| $(x - 1)(x + 2)(x-3)$ | $1/4 x^4 - 2/3 x^3 - 5/2 x^2 + 6x$ |
| $(x - 5)^4$ | $1/5 (x - 5)^5$ |
| $(2x - 5)^4$ | $1/10 (x - 5)^5$ |
| $(1 - 3x)^3$ | $-1/4 (1 - x)^4$ |

gebrochenrationale Funktionen

| | |
|---|---|
| $- 4 / x^2$ | $4/ x$ |
| $1 / (3x + 1)^2$ | $- 1 / 3(3x+1)$ |
| $x / (x^2 + 1)^3$ | $- 1 / 4(x^2 + 1)^2$ |
| $(x + 2) / (x + 1)^3$ | $- (x + 2)^2 / 2(x + 1)^2$ |
| $2x / (x^2+ 1)^3$ | $- 1 / 2(x^2 + 1)^2$ |
| $(2x + 1) / (x^2 + x + 1)$ | $\ln (x^2 + x + 1)$ |
| $2x / (x^2 + 1)$ | $\ln (x^2 + 1)$ |
| $x^2 / (x^3 + 1)^2$ | $- 1 / 3(x^3 + 1)$ |
| $(x - 3)(x + 5) / (x + 1)^2$ | $(x - 3)^2 / (x+1)$ |

Sinusfunktion und davon abgeleitete Funktionen

| | |
|---|---|
| $\sin(x)$ | $- \cos(x)$ |
| $\sin(x) + 3$ | $- \cos(x) - 3x$ |
| $8x - \sin(x)$ | $4 x^2 - \cos(x)$ |
| $x \sin(x)$ | $\sin(x) - x \cos(x)$ |

| | |
|---|---|
| x sin(2x) | 1/4 sin(2x) - 1/2 x cos(2x) |
| 4x sin(2x) | sin(2x) - 2x cos(2x) |
| $x^2$ sin x | - $x^2$ cos(x) + 2x sin(x) + 2 cos(x) |
| $\sin^2(x)$ | ½ (x - sin(x) cos(x)) |
| $\sin^3(x)$ | ( - 1/3 $\sin^2(x)$ - 2/3 ) cos(x) |
| $\sin^4(x)$ | ( - 1/4 $\sin^3(x)$ - 3/8 sin(x))) cos(x) + 3x/8 |
| 1 / $\sin^2(x)$ | - cot(x) |
| $\sin^2(x)$ + $\cos^2(x)$ | x |
| sin(x) cos(x) | 1/2 $\sin^2(x)$ |
| sin(2x) cos(3x) | 3/5 sin(2x) cos(3x) + 2/5 cos(2x) cos(3x) |
| sin(2x) cos(x/2) | - 1/5 cos(5x/2) - 1/3 cos(3x/2) |
| sin(x) $e^x$ | 1/2 (sin(x) - cos(x)) $e^x$ |
| arcsin(x) | x arcsin(x) + sqrt(1 - $x^2$) |

Kosinusfunktion und davon abgeleitete Funktionen

| | |
|---|---|
| cos(x) | sin(x) |
| x cos(x) | cos(x) + x sin(x) |
| x cos(3x) | 1/9 cos(3x) + 1/3 x sin(3x) |

natürliche Exponentialfunktion und davon abgeleitete Funktionen

| | |
|---|---|
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{-x}$ | - $e^{-x}$ |
| $e^{4x}$ | $e^{4x}$ / 4 |
| $e^{sqrt(x)}$ | 2 (sqrt(x) - 1) $e^{sqrt(x)}$ |
| x $e^x$ | (x - 1) $e^x$ |
| (1+x) $e^x$ | x $e^x$ |
| x $e^{-x}$ | (-x -1) $e^{-x}$ |
| x $e^{2x}$ | (1/2 x - 1/4) $e^{2x}$ |
| (x - 1) $e^x$ | (x - 2) $e^x$ |
| $x^2$ $e^x$ | ($x^2$ - 2x + 2) $e^x$ |
| $x^2$ $e^{x/2}$ | 2 ($x^2$ - 4x + 8) $e^{x/2}$ |
| $x^2$ $e^{-x}$ | (- $x^2$ - 2x - 2) $e^{-x}$ |
| $x^3$ $e^x$ | (- $x^3$ - 3$x^2$ - 6x - 6) $e^x$ |

natürliche Logarithmusfunktion und davon abgeleitete Funktionen

| | |
|---|---|
| ln x | x ln x - x |
| x ln(x) | 1/2 $x^2$ ln(x) - 1/4 $x^2$ |
| x ln(3x) | 1/2 $x^2$ ln(3x) - 1/4 $x^2$ |
| $x^2$ ln(x) | 1/3 $x^3$ ln(x) - 1/9 $x^3$ |
| $x^2$ ln(3x) | 1/3 $x^3$ ln(3x) - 1/9 $x^3$ |
| $(\ln(x))^2$ | x $(\ln(x))^2$ - 2x ln(x) + 2x |
| ln(x) / $x^2$ | - ln(x)/x - 1/x |

Sonstige Funktionen

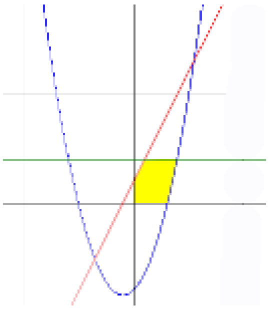
| | |
|---|---|
| 1/x | ln \|x\| |
| $\tan^2$ x | tan x - x |
| 1 / $(x - 3)^2$ | - 1 / (x - 3) |
| $a^x$ mit a>0 und a¹1 | |

## Integralrechnung

1. Schreiben Sie $F(x)=\int_0^x \left(\left|t^3-3\cdot t^2+3\cdot t-1\right|\right)\cdot dt$ als integralfreie, abschnittsweise definierte Funktion.

2. Schreiben Sie die Funktion $g(x)=x^2-\frac{1}{x}$ als Integralfunktion mit geeigneter unterer Grenze, geben Sie die Definitionsmenge dieser Integralfunktion an und grenzen Sie sie von der Definitionsmenge von $g$ ab.

3. Bestimmen Sie v so, dass für jede quadratische Funktion $f$ gilt:
$f\left(\int_0^{-v} f(t)\cdot dt+\int_0^{v} f(t)\cdot dt\right)=0$. Begründen Sie anhand der Definitionsvorrausetzungen der Parameter von $f$, warum das Ergebnis keine praktische Bedeutung hat.

4. 

Ein Flächenstück wird von der quadratischen Funktion $f$, ihren beiden Ableitungen und den beiden Koordinatenachsen begrenzt. Berechnen Sie (ohne Auflösung der entstehenden Integrale) allgemein den Flächeninhalt $A(f(x))$ und leiten Sie daraus alle Vorraussetzungen der Parameter von f ab, die erfüllt werden müssen, damit ein so begrenztes Flächenstück entsteht.

5. Berechnen Sie das Integral $\int_{-a}^{a}\left(\left|\sum_{i=0}^{n} x^{2\cdot i+1}\right|\right)\cdot dx$ zunächst allgemein und danach konkret für $n=1$.

6. Beweisen Sie, dass $\int \frac{1}{(\cos(x))^2}\cdot dx=\tan(x)$ gilt und lösen Sie mit dieser Integrationsregel das Integral $\int_0^{\pi} a\cdot(\tan(x))^2\cdot dx$. Begründen Sie, warum das Ergebnis unbrauchbar ist.

7. Bestimmen Sie die Funktion $v(f(x))$ so, dass folgende Gleichung für Geraden der Form $f(x)=m\cdot x+a$ gilt: $\int_{v(f(x))}^{x} f(t)\cdot dt=f(x)$.

**1. Aufgabe**

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x-1)^4}{4}+\dfrac{1}{4} & \text{für } x<1\\ \dfrac{(x-1)^4}{4}+\dfrac{1}{4} & \text{für } x\geq 1\end{cases}$$

**2. Aufgabe**

$$F(x)=\int_1^x\left(2\cdot t+\frac{1}{t^2}\right)\cdot dt$$

$$D_{g(x)}=R\setminus\{0\};D_{F(x)}=]0;\infty]$$

**3. Aufgabe**

$$v=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a\cdot b}}$$

$$\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}\geq b\Rightarrow 4\cdot a\cdot c=0\Rightarrow c=0$$

**4. Aufgabe**

$$A(f(x))=\int_0^{\frac{2\cdot a-b}{2\cdot a}} f'(x)\cdot dx+\int_{\frac{2\cdot a-b}{2\cdot a}}^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}} f''(x)\cdot dx+\int_{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot(c-2\cdot a)}}{2\cdot a}}\left(f''(x)-f(x)\right)\cdot dx$$

$$a>0$$

$$2\cdot a<\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}<\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot(c-2\cdot a)}$$

**5. Aufgabe**

$$n=n:\ 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a^{2\cdot i+2}}{2\cdot i+2}\right)$$

$$n=1:\quad a^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a^2+1\right)$$

**6. Aufgabe**

$$(\tan(x))'=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2=\frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$\int_0^{\pi}a\cdot(\tan(x))^2\cdot dx=-\pi$$

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)};\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;0<\frac{\pi}{2}<\pi$$

**7. Aufgabe**

$$v(f(x))=\frac{-a\pm\sqrt{(f(x))^2-2\cdot f'(x)\cdot f(x)}}{f'(x)}$$

# Übungen zur Integralrechnung Klasse 12

① Berechnen Sie:

a) $\int_0^1 (4x+2)^3\,dx$  b) $\int_1^0 \frac{1}{(5x+4)^2}\,dx$  c) $\int_{-3}^0 \sqrt{\left(1-x^3\right)}\,dx$

d) $\int_{3\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{x}\,dx$  e) $\int_{-3}^{\sqrt{9}} \left(\sin(x) - \frac{x}{x^2+1} + x^3\right)dx$  f) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)dx$

g) $\int_3^9 \left(\frac{1}{x} + x^2 - \sqrt{x}\right)dx - \int_6^9 \frac{1}{x}\,dx + \int_6^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx$  h) $\int_{-3}^{-1} \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx$

② Berechnen Sie aus den folgenden Gleichungen jeweils k:

a) $\int_k^{k+1} (kx+k)\,dx = 7$  b) $\int_{-k}^{\sqrt{k}} \left(k \cdot x \cdot \sqrt{k-x}\right)dx = 0$

c) $\int_{k-1}^{k} \left(2x+k^2\right)dx = \frac{3}{10}$

③ Das Schaubild von $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = b$, $b > 0$, begrenzen eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}$ FE vollständig.
Berechnen Sie den Wert von b.

④ Das Schaubild von $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche im 1. Feld vollständig. Diese Fläche wird durch die Gerade $x = c$ halbiert.
Berechnen Sie den Wert von c.

⑤ Das Schaubild von $f: x \mapsto \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche im 1. Feld vollständig. Diese Fläche wird durch die Gerade $y = m \cdot x$ halbiert.
Berechnen Sie den Wert von m.

⑥ Das Schaubild von $f: x \mapsto \sqrt{4x}$ wird an der Geraden mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt.
Wie groß ist die Fläche, die von Original und Bild eingeschlossen wird ?

⑦ Leiten Sie die Formel für das Volumen eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Radius r durch eine geeignete Integration her.

⑧ Leiten Sie die Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius r mithilfe der Integralrechnung her.

# Übungen zur Integralrechnung Klasse 12

⑨ $f_1\colon x \mapsto \sqrt{x \cdot \left(x^2 - 9\right)}$ und $f_2 = x \mapsto -\sqrt{x \cdot \left(x^2 - 9\right)}$

a) Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen $f_1$ und $f_2$ und geben Sie deren Definitionsmengen sowie die Nullstellen an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte. Bestimmen Sie auch die Gleichung(en) der Wendetangente(n).

c) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotationn des geschlossenen Kurvenstücks um die x-Achse entsteht.

d) Führen Sie dieselben Untersuchungen für die Funktionen $f_3\colon x \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{x \cdot \left(3 - x\right)^2}$ und $f_4\colon x \mapsto -\frac{1}{3}\sqrt{x \cdot \left(3 - x\right)^2}$ durch.

⑩ Die Steigung einer Funktion f ist in jedem Punkt des Schaubilds durch $m = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ gegeben. Die von den positiven Koordinatenachsen, der Kurve und der Geraden $x = 2$ eingeschlossene Fläche hat den Inhalt $A = 4$ FE.

a) Wie lautet der Funktionsterm von f ?

b) Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Nullstellen und Extrema und fertigen Sie eine Skizze an.

⑪ Gegeben ist für $t > 0$ die Funktionenschar $f(t,x) = \sqrt{2tx + t^2 - 1}$ und die Geradenschar $g(t,x) = t \cdot x$.

a) Ermitteln Sie die Definitionsmenge der $f(t,x)$.

b) Ermitteln Sie die Abszissen (x-Werte) der gemeinsamen Punkt der Schaubilder von $f(t,x)$ und $g(t,x)$.
Untersuchen Sie, für welche Werte von t genau 1 gemeinsamer Punkt existiert. Für welche Werte von t existieren genau zwei gemeinsame Punkte ?

c) Prüfen Sie, ob es einen Wert von t gibt, für den die Gerade $g(t,x)$ Tangente an das Schaubild von $f(t,x)$ ist.

d) Erarbeiten Sie eine Vorstellung über die Funktionen der Schar $f(t,x)$ und der Geraden $g(t,x)$. Stellen Sie dazu einige Schaubilder zu selbst gewählten Werten für den Parameter t dar.

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Schaubilder für $t = 0{,}5$ einschließen.

f) Beschaffen Sie sich eine Formel für die Berechnung der Bogenlänge einer Funktion und ermitteln Sie die Länge des Umfangs der in e) berechneten Fläche.

g) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der oben genannten Fläche um die x-Achse entsteht.

⑫ Gegeben sind die Funktionen $f_n$ durch $f_n(x) = x^n$ und $g_n$ durch $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Ihre Schaubilder begrenzen im 1. Feld eine Fläche mit dem Inhalt $A_n$ vollständig.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ und interpretieren Sie das Ergebnis graphisch.

# Ergebnisse zu den Aufgaben

①, ② selbst rechnen mit TI 92plus und Nachdenken.

③ $b = 2$; ④ $c = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{6}$ ⑤ $m = \frac{7}{15}$

⑥ $A = \frac{16}{3}$ (FE) ⑦ $\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx$

⑧ $\pi\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

⑨ a) $D = ]-3\,;\,0] \cup [3\,;\,\infty[$ ;

Nullstellen: $x_1 = -3$ ; $x_2 = 0$ ; $x_3 = 3$

b) HoP(TiP) bei $x = -\sqrt{3}$

WeP bei $x \approx 4{,}4$

Wendetangenten:

$y = 3{,}63(x - 4{,}4) + 6{,}76$

$y = -3{,}63(x - 4{,}4) - 6{,}76$

c) $V = 20{,}25 \cdot \pi$

d) $D = [0\,;\,\infty[$ ;

Nullstellen: $x_1 = 0$ ; $x_2 = 3$

HoP$(1|\frac{2}{3})$ [TiP$(1|-\frac{2}{3})$]

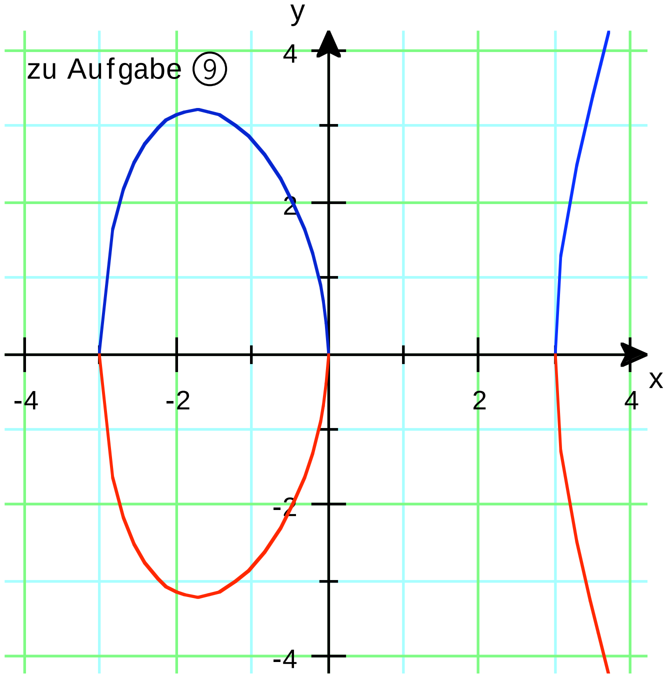
TiP$(3|0)$ [HoP$(3|0)$] ; kein WeP.

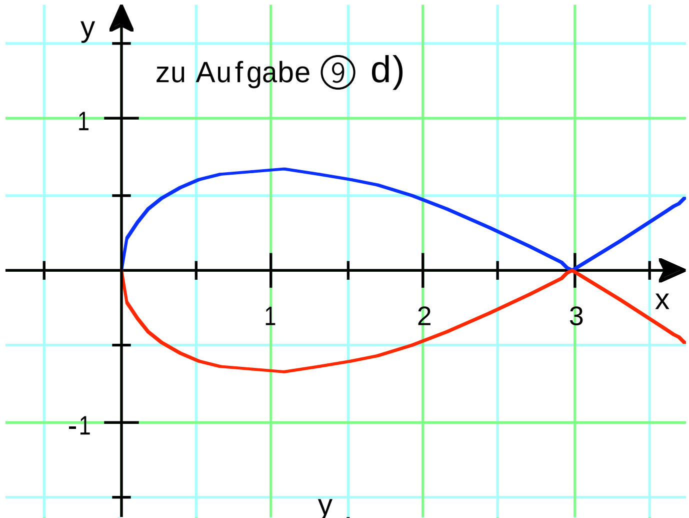
$V = \frac{3}{4}\pi$ (VE)

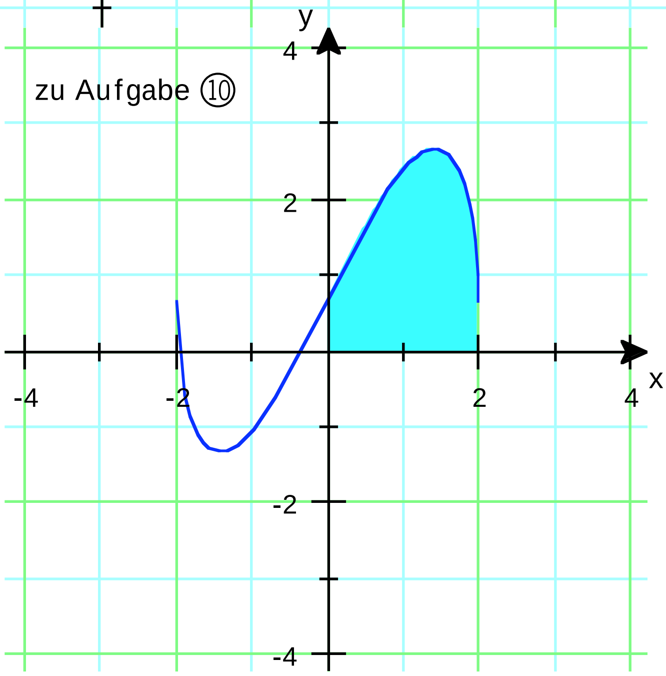
⑩ a) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} + \frac{2}{3}$

b) HoP$\left(\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{8}{3}\right)$ ; TiP$\left(-\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{4}{3}\right)$

Nullstellen: $x_1 \approx -1{,}97$ und $x_2 \approx -0{,}34$



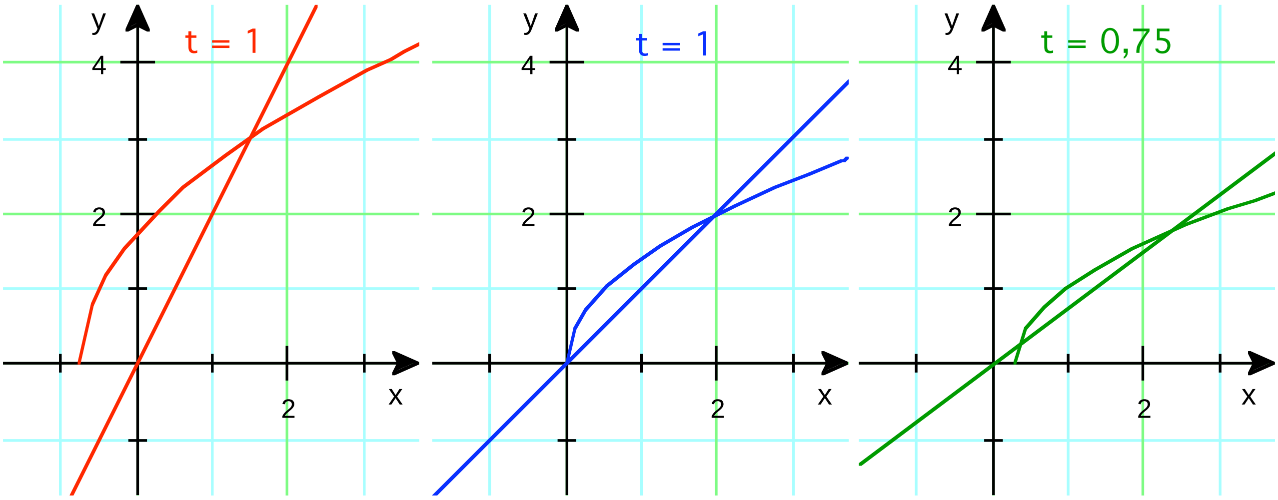
# Ergebnisse zu den Aufgaben

⑪ a) $D = \left\{ x \,\middle|\, x \geq \frac{1-t^2}{2t} \right\}$ ;

b) Nullstellen: $x_1 = \frac{t+1}{t}$ ; $x_2 = \frac{1-t}{t}$ ; nur 1 Schnittpunkt für $t > 1$

c) keine der Geraden ist Tangente

d) Beispiele:




e) $A = \frac{1}{6}$ ;

f) Formel für Bogenlänge zwischen den beiden Kurvenpunkten A(a|f(a)) und B(b|f(b)):

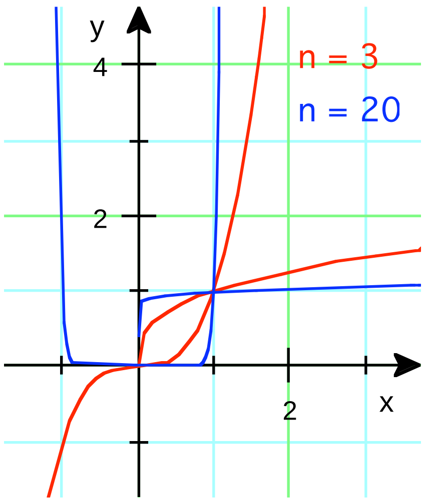
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Umfang: Bogenlänge + Länge der Strecke zwischen den Schnittpunkten ≈ 2,27 + 4,51 (LE)

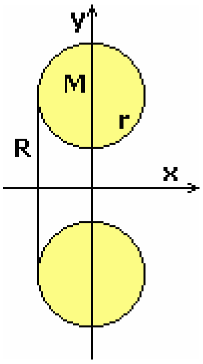
g) $V = \frac{\pi}{3}$ (VE)

⑫ $A_n = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{2}{n+1}$

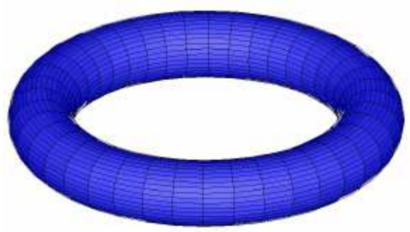
$\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 1$ ; die Flächen nähern sich dem Quadrat mit den Ecken (0|0) und (1|1) an.



**Übungsaufgaben: Anwendung der Integralrechnung**

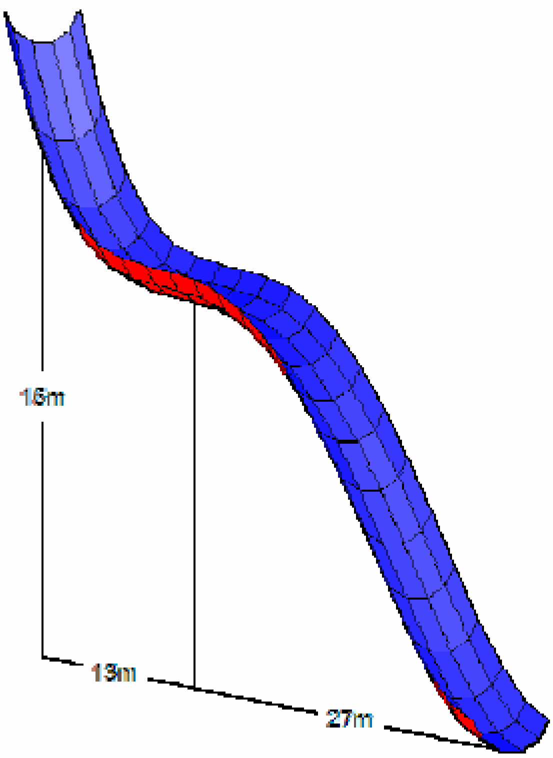



**Aufgabe 1:**
Ein Schwimmreifen hat die Form eines Torus (Kreisringfläche) mit dem Meridiankreisradius r = 5 cm und dem Mittenkreisradius R = 25 cm.



a) Wie viel Luft passt in den Schwimmreifen, wenn er voll aufgeblasen wird?
b) Wie lange dauert das Aufblasen, wenn pro Atemzug etwa 0,5 Liter Luft ausgeatmet werden und man in Ruhe etwa 15 Atemzüge pro Minute macht?

**Guldinsche Regel**
Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche A und dem Umfang des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreises.

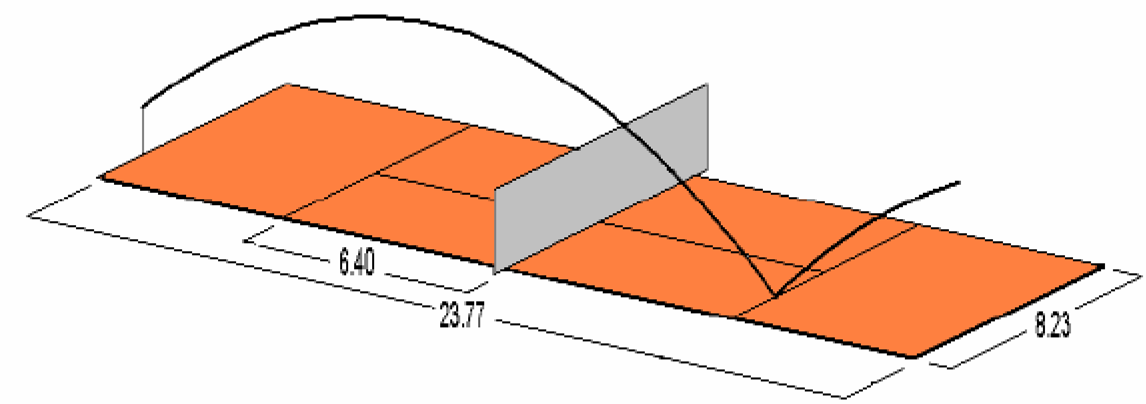



**Aufgabe 2:**
Eine Wasserrutsche wird durch die Polynomfunktion
$f(x) = 0{,}00005267\,x^4 - 0{,}004635\,x^3 + 0{,}127x^2 - 1{,}424\,x + 15 \quad ; x \text{ in } [0;40]$
beschrieben.
Wie lang ist die durch f(x) definierte Rutsche?

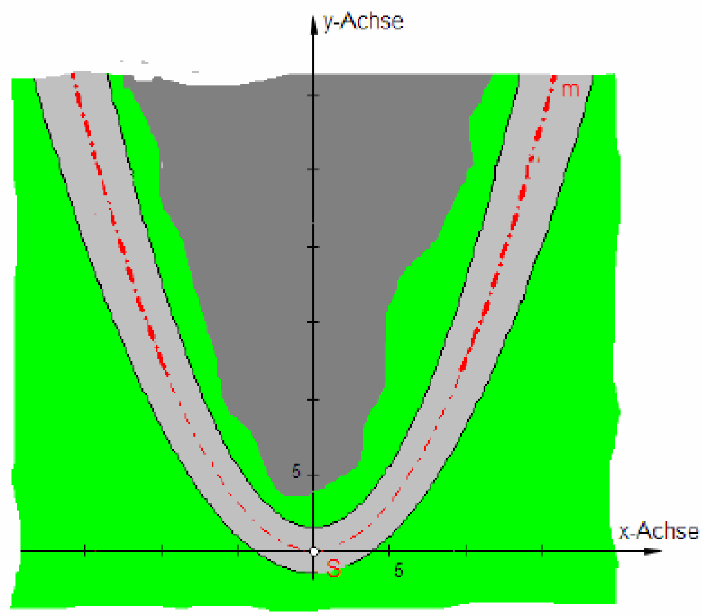
**Aufgabe 3:**
Wird ein Tennisball auf der Grundlinie in 0,6m Höhe so getroffen, dass er parallel zum Feldrand das Netz in 2,0m Höhe überquert und das gegnerische Feld auf der Aufschlaglinie trifft, dann wird die Flugbahn durch die Funktion

$$f(x) = -0{,}024\,x^2 + 0.397\,x + 0{,}6$$

beschrieben.




a) Welchen Weg legt der Ball (eigentlich der Schwerpunkt des Balls) zurück?
b) Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat der Ball, wenn die Flugzeit etwa 1,5 Sekunden beträgt?
c) Wie schnell müsste der Tennisspieler (ohne Berücksichtigung des Netzes) durchschnittlich laufen, wenn er den Ball auf der Grundlinie anspielt und danach auf der gegnerischen Aufschlaglinie den Ball wieder anspielen wollte?




**Aufgabe 4:**
Die (gedachte) Mittellinie m einer Straßenkurve wird näherungsweise durch die Funktion

$y = 0{,}125\, x^2$

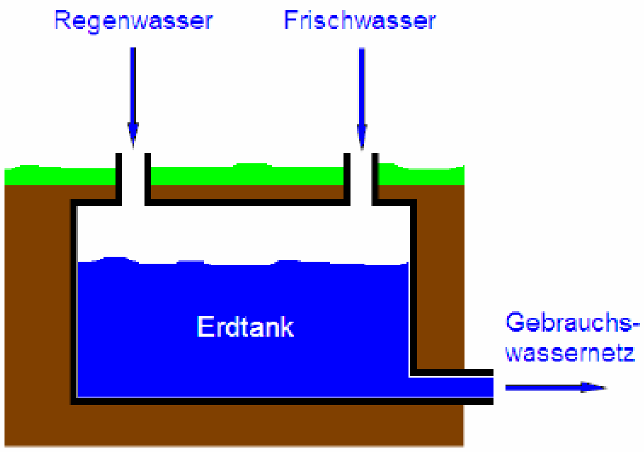
beschrieben.

Da sich die Kurve im Bereich des Scheitels verengt und aufgrund der Geländeform die Sicht in die Kurve hinein eingeschränkt ist, sollen 30m vom Kurvenscheitel entfernt zwei über der Straßenmitte hängenden Ampeln aufgestellt werden.

a) Wo müssen die Ampeln (bezüglich des x-y-Systems) angebracht werden?

b) Wie lange benötigt ein PKW zum Passieren der Kurve, wenn er die Strecke von Ampel zu Ampel mit durchschnittlich 25 km/h zurücklegt?

Hinweis: $\int \sqrt{1+(x/4)^2}\,dx = 2\ln(\sqrt{x^2+16}+x)+\dfrac{x\sqrt{x^2+16}}{8}+C$




**Aufgabe 5:**
Eine Familie nutzt Regenwasser zur Bewässerung des Gartens und im Haushalt (WC). Dazu wird Regenwasser in einem 2 m hohen Erdtank gesammelt und der Tank in regenarmen Zeiten auch mit Frischwasser gefüllt.
Man kann annehmen, dass der Füllstand sich an einem Regentag um etwa 6 cm erhöht, sich durch Bewässern des Gartens um etwa 6 cm und durch Nutzung im Sanitärbereich (WC) um etwa 2 cm pro Tag verringert.
Dann kann der Füllstand (in cm) des Regenwassertanks in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden.

$h(t) = -0{,}2\, t^3 + 3{,}6\, t^2 - 15{,}2\, t + 150$ ; t aus [0 ; 13]

Der Hersteller empfiehlt eine Sollfüllhöhe von $h_0$=150 cm.

a) Stelle die Funktion dar.
b) Wann wurde die maximale, wann die minimale Füllhöhe erreicht?
c) Wie groß ist die mittlere Füllhöhe, d.h. das Integral $\frac{1}{13}\int_0^{13} h(t)dt$ ?
d) Wie groß ist die mittlere Abweichung von der Sollfüllhöhe?

Lösung:

**Lösungen**

**Aufgabe 1:**
a) Torusvolumen V = 2 $\pi^2$ r² R = 12,34 dm³
b) 24,68 Atemzüge ... 1,7 min

**Aufgabe 2:**
Bogenlänge 44,3 m

**Aufgabe 3:**
a) Wurfweite 18,285 m , d.h. Bogenlänge von 0 bis 18,285 ... 37,741 m
b) 25,16 m/s = 90,6 km/h
c) 18,825 m / 1,5 s = 12,19 m/s = 43,9 km/h

**Aufgabe 4:**
a) Bogenlänge $= \int_0^r \sqrt{1+(0.25x)^2}\,dx = 30$

$\left[2\ln(\sqrt{x^2+16}+x)+\frac{x\sqrt{x^2+16}}{8}\right]_0^r = 30$ wird numerisch gelöst r = 14,1607

Punkte für die Ampeln (14,2 | 25,2) und (-14,2 | 25,2)
b) Wegstrecke zwischen A und B = 60,3 m Zeit 8,6 s

**Aufgabe 5:**
b) lokales Maximum bei 9,266 mit 159 cm
lokales Minimum bei 2,734 mit 121,4 cm

c) mittlere Füllhöhe $= \frac{1}{13}\int_0^{13} h(x)\,dx =$ 144,15

d) mittlere Abweichung $= \frac{1}{13}\int_0^{13} |h(x)-150|\,dx =$ 9,978

# Flächenberechnung mittels Integralrechnung

Aufgabe 1:
Berechne die Integrale der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall:

| Funktion | Intervall | Funktion | Intervall |
|---|---|---|---|
| $f(x) = 2x$ | [1, 3] | $f(x) = x/2 + 1$ | [-2, 2] |
| $f(x) = 5 - x$ | [1, 4] | $f(x) = x^2$ | [1, 3] |
| $f(x) = x^2/4 + 2$ | [0, 4] | $f(x) = 4 - x^2/3$ | [-3, 3] |
| $f(x) = 4x - x^2$ | [0, 4] | $f(x) = x^3 + 1$ | [-1, 1] |
| $f(x) = x^3/4 - x + 1$ | [-2, 2] | $f(x) = x^3/4 - 3x^2/2 + 7x/2$ | [0, 3] |
| $f(x) = x^4/4 - 2x^2 + 4$ | [-2, 2] | $f(x) = 4 - 1/x^2$ | [0,5; 2] |
| $f(x) = x + 1/x$ | [1, 2] | $f(x) = \sqrt{x}$ | [0, 9] |

Aufgabe 2:
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse:

a) $f(x) = 4 - x^2$
b) $f(x) = x^2 - x - 2$
c) $f(x) = 4x^2 - x^3$
d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
f) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$
g) $f(x) = x^3/3 - 3x$
h) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Aufgabe 3:
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 6$
b) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x$
c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - x^2$
d) $f(x) = x^2$, $g(x) = 5 - x^2/4$
e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$
f) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$
g) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 4x + 1$
h) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $g(x) = 3x - x^2$

Aufgabe 4:
Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2/4 + 2$, der Tangente im Punkt $P(4/y_P)$ und den Koordinatenachsen begrenzt wird?

Aufgabe 5:
Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3/16 - 3x^2/8 + 4$, der Wendetangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird?

Aufgabe 6:
Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 1$, der Normalen im Punkt $P(1/y_P)$ und der x-Achse begrenzt wird?

Lösung:

1) Berechne die Integrale der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall:

| Funktion | Intervall | Lösung | Funktion | Intervall | Lösung |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2x$ | [1, 3] | 8 | $f(x) = x/2+1$ | [-2, 2] | 4 |
| $f(x) = 5 - x$ | [1, 4] | 7,5 | $f(x) = x^2$ | [1, 3] | 8,67 |
| $f(x) = x^2/4+2$ | [0, 4] | 13,33 | $f(x) = 4-x^2/3$ | [-3, 3] | 18 |
| $f(x) = 4x-x^2$ | [0, 4] | 10,67 | $f(x) = x^3+1$ | [-1, 1] | 2 |
| $f(x) = x^3/4-x+1$ | [-2, 2] | 4 | $f(x) = x^3/4-x^2/2+7x/2$ | [0, 3] | 7,31 |
| $f(x) = x^4/4-2x^2+4$ | [-2, 2] | 8,53 | $f(x) = 4-1/x^2$ | [0,5; 2] | 4,5 |
| $f(x) = x+1/x$ | [1, 2] | 2,19 | $f(x) = \sqrt{x}$ | [0, 9] | 18 |

2) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse:

$f(x) = 4 - x^2$ 10,67
$f(x) = x^2 - x - 2$ 4,5
$f(x) = 4x^2 - x^3$ 21,33
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 6,75
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ 8
$f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ 21,08
$f(x) = x^3/3 - 3x$ 13,5
$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ 8

3) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 6$ 20,83
$f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x$ 4,5
$f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - x^2$ 2,67
$f(x) = x^2$, $g(x) = 5 - x^2/4$ 13,33
$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ 0,083
$f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ 0,267
$f(x) = x^3+1$, $g(x) = 4x+1$ 8
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $g(x) = 3x - x^2$ 3,08

4) Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) =x^2/4 +2$, der Tangente im Punkt $P(4/y_P)$ und den Koordinatenachsen begrenzt wird? Lösung 4,33

5) Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3/16 - 3x^2/8 + 4$, der Wendetangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird? Lösung 13,25

6) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 1$, der Normalen im Punkt $P(1/y_P)$ und der x-Achse begrenzt wird? Lösung 8