1. Berechne die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.1}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{4+t}{t^3}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

(g) $\displaystyle\int_0^4 u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

2. Zeige mit Abschätzungen durch Integrale, dass der Grenzwert für $n \to \infty$ existiert bzw. nicht existiert.

(a) $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ existiert nicht

(b) $\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ existiert

3. Welchen Inhalt hat die Fläche, die alle Punkte enthält, deren Koordinaten die Bedingungen

$$0 \leq y \leq \frac{1}{(x-2)^2} \quad \text{und} \quad x \geq 3$$

erfüllen?

4. Der Graph der Funktion f rotiert für $x \geq 1$ um die x-Achse. Dabei entsteht ein Körper, der sich ins Unendliche erstreckt. Wie gross ist sein Volumen?

(a) $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x^3}$

(b) $\displaystyle f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$

1. (a) $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^a = -\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(b) $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^{1.1}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{10}{x^{0.1}}\right]_1^a = -\frac{10}{a^{0.1}} + \frac{10}{1^{0.1}} = 10 - \frac{10}{a^{0.1}}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(10 - \frac{10}{a^{0.1}}\right) = 10$$

(c) $\displaystyle\int_3^a \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2}{t^2} - \frac{1}{t}\right]_3^a = -\frac{2}{a^2} - \frac{1}{a} - \left(-\frac{2}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a}$

$$\lim_{a\to\infty}\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a}\right) = \frac{5}{9}$$

(d) $\displaystyle\int_a^0 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_a^0 = -1 + \mathrm{e}^{-a}$

$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\left(-1 + \mathrm{e}^{-a}\right)$ existiert nicht

(e) $\displaystyle\int_a^2 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{x}\right]_a^2 = -1 + \frac{2}{a}$

$\displaystyle\lim_{a\to 0}\left(\frac{2}{a} - 1\right)$ existiert nicht

(f) $\displaystyle\int_a^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[4\sqrt{t}\right]_a^4 = 8 - 4\sqrt{t}$

$$\lim_{a\to 0}\left(8 - 4\sqrt{t}\right) = 8$$

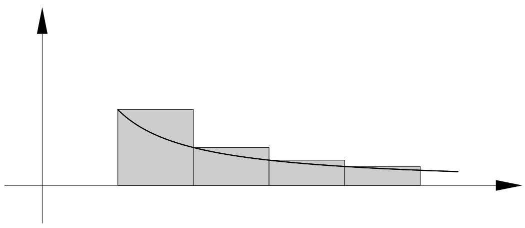
(g) $\displaystyle\int_a^4 u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u = \left[-2u^{-\frac{1}{2}}\right]_a^4 = -1 + \frac{2}{\sqrt{a}}$

$\displaystyle\lim_{a\to 0}\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ existiert nicht

(h) $\displaystyle 2\int_a^b \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\left[\arctan z\right]_a^b = 2(\arctan b - \arctan a)$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to\infty} 2(\arctan b - \arctan a)\right) &= \lim_{a\to-\infty} 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan a\right)\\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\end{aligned}$$

2. (a) $f(1) = 1,\ f(2) = \dfrac{1}{2},\ f(3) = \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$



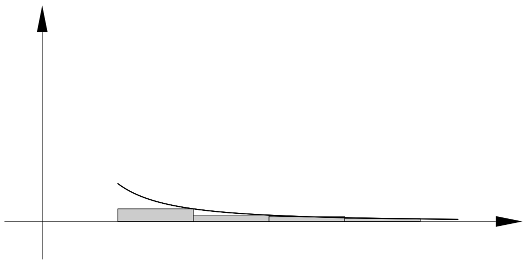
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Das Integral ist eine *Minorante* der Summe. Wenn das Integral keinen Grenzwert hat, so kann auch die Summe keinen endlichen Grenzwert haben.

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} [\ln x]_1^n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n \quad$ existiert nicht

(b) $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{6}$, $f(3) = \frac{1}{12}$, $\ldots$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$



Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Mit der gleichen Begründung wie im letzten Beispiel, wurde der erste Summand der Summe weggelassen.

Besitzt das Integral einen Grenzwert, so hat auch die Summe einen Grenzwert:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\int_1^n \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x\right] < \lim\limits_{n\to\infty} \left[\int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] = \cdots = 1$

Wobei wir ausgenützt haben, dass für jedes $x > 1$ der Funktionswert $\frac{1}{x^2}$ grösser ist, als der von $\frac{1}{x^2+x}$, was zu einer entsprechenden Abschätzung der Integrale führt.

3. Die Bedingung führt auf das uneigentliche Integral:

$$\lim_{a\to\infty} \int_3^a \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{-1}{x-2}\right]_3^a = \lim_{a\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a-2}\right) = 1$$

4. Formel für die Volumenberechnung von Rotationskörpern: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$

(a) $\lim\limits_{a\to\infty} \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^6}\,\mathrm{d}x = \cdots = \pi \lim\limits_{a\to\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5a^5}\right) = \frac{\pi}{5}$

(b) $\lim\limits_{a\to\infty} \pi \int_1^a \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \cdots = \pi \lim\limits_{a\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{\pi}{2}$