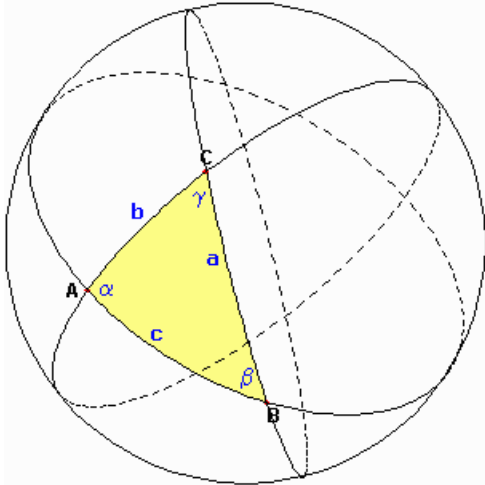


Sphärische Trigonometrie

Bei geodätischen Messungen, die sich über größere Entfernungen erstrecken, muss die Kugelgestalt der Erde berücksichtigt werden. Dazu ist eine Geometrie auf der Kugel erforderlich. Insbesondere werden Formeln zur Berechnung sphärischer Dreiecke benötigt, also für Dreiecke, die auf einer Kugel liegen. Das wurde schon im alten Griechenland erkannt, und so kam es neben der Entwicklung der ebenen Trigonometrie zur Entwicklung der sphärischen Trigonometrie, als deren Begründer Hipparch anzusehen ist.



Größen:

a, b, c ... Seiten ; α, β, γ ... Winkel

R ... Radius der Kugel ; ε ... sphärischer Exzess

sphärischer Exzess

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Flächeninhalt im Kugelzweieck

$$A = 2R^2 * \alpha$$

Großkreise sind die Schnittlinien, in denen Ebenen durch den Kugelmittelpunkt die Kugeloberfläche schneiden.

Nebenkreise sind die Schnittlinien, in denen nicht durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Ebenen die Kugeloberfläche schneiden.

Durch zwei Großkreise wird die Kugeloberfläche in vier paarweise kongruente Kugelzweiecke (sphärische Zweiecke) geteilt. Jedes von den vier Kugelzweiecken hat gleiche Seiten der Größe $s = \pi$. Sphärische Zweiecke werden von zwei Großkreisen, sphärische Dreiecke von drei Großkreisen begrenzt.

Allgemeines sphärisches Dreieck

Es seien A, B und C drei Punkte auf einer Kugeloberfläche, die nicht auf einem Großkreis liegen. Werden jeweils zwei dieser Punkte durch einen Großkreis verbunden, so entsteht das sphärische Dreieck ABC, auch Kugeldreieck oder Eulersches Dreieck genannt.

Seitensumme

$$a + b + c < 2\pi$$

Winkelsumme

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Flächeninhalt

$$A = R^2 * \varepsilon$$

Umfang

$$2s = a + b + c$$

Sinussatz

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Seitenkosinussatz

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Winkelkosinussatz

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

$$\sin a \cot b = \cot \beta \sin \gamma + \cos a \cos \gamma$$

$$\sin \alpha \cot \beta = \cot b \sin c - \cos \alpha \cos c$$

Halbwinkelsatz, sphärisch

$$\tan \gamma/2 = \sqrt{[(\sin(s-a)) * \sin(s-b)] / (\sin s * \sin(s-c))}$$

$$\sin \gamma/2 = \sqrt{[(\sin(s-a)) * \sin(s-b)] / (\sin a * \sin b)}$$

$$\cos \gamma/2 = \sqrt{[(\sin s * \sin(s-c)) / (\sin a * \sin b)]}$$

Halbseitensatz mit $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$

$$\tan c/2 = \sqrt{[(-\cos \sigma * \cos(\sigma-\gamma)) / (\cos(\sigma-\alpha) * \cos(\sigma-\beta))]}$$

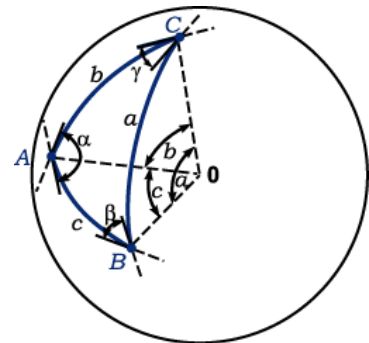
$$\sin c/2 = \sqrt{[(-\cos \sigma * \cos(\sigma-\gamma)) / (\sin \alpha * \sin \beta)]}$$

$$\cos c/2 = \sqrt{[(\cos(\sigma-\alpha) * \cos(\sigma-\beta)) / (\sin \alpha * \sin \beta)]}$$

Polarer Sinus-Kosinussatz

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos a \cos \gamma$$

Der Sinus-Kosinussatz entspricht dem Projektionssatz der ebenen Trigonometrie. Da er fünf Größen des sphärischen Dreiecks enthält, wird er nicht unmittelbar zur Auflösung sphärischer Dreiecke benutzt, sondern hauptsächlich zur Ableitung weiterer Gleichungen.



Nepersche Analogien

$$\tan c/2 * \cos(\alpha-\beta)/2 = \tan(a+b)/2 * \cos(\alpha+\beta)/2$$

$$\tan c/2 * \sin(\alpha-\beta)/2 = \tan(a-b)/2 * \sin(\alpha+\beta)/2$$

$$\cot \gamma/2 * \cos(a-b)/2 = \tan(\alpha+\beta)/2 * \cos(a+b)/2$$

$$\cot \gamma/2 * \sin(a-b)/2 = \tan(\alpha-\beta)/2 * \sin(a+b)/2$$

Delambresche Formeln

$$\sin \gamma/2 * \sin(a+b)/2 = \sin c/2 * \cos(\alpha-\beta)/2$$

$$\sin \gamma/2 * \cos(a+b)/2 = \cos c/2 * \cos(\alpha+\beta)/2$$

$$\cos \gamma/2 * \sin(a-b)/2 = \sin c/2 * \sin(\alpha-\beta)/2$$

$$\cos \gamma/2 * \cos(a-b)/2 = \cos c/2 * \sin(\alpha+\beta)/2$$

Gauß-Mollweidesche Formeln

$$\sin(\alpha+\beta)/2 = \cos(a-b)/2 * \cos \gamma/2 / \cos c/2$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)/2 &= \sin(a-b)/2 * \cos \gamma/2 / \sin c/2 \\ \cos(\alpha+\beta)/2 &= \cos(a+b)/2 * \sin \gamma/2 / \cos c/2 \\ \cos(\alpha-\beta)/2 &= \sin(a+b)/2 * \sin \gamma/2 / \sin c/2\end{aligned}$$

Fünfstückebeziehungen

$$\begin{aligned}\sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos b &= \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a\end{aligned}$$

Sphärisches Dreieck

Umkreisradius r $\cot r = \sqrt{[-\cos(\sigma-\alpha) \cdot \cos(\sigma-\beta) \cdot \cos(\sigma-\gamma) / \cos \sigma]} = \cot a/2 \cdot \cos(\sigma-\alpha)$

Inkreisradius ρ $\tan \rho = \sqrt{[\sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c) / \sin s]} = \tan \alpha/2 \cdot \sin(s-a)$

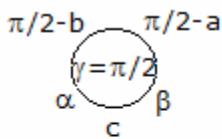
Sphärischer Exzess ε (L'Huiliersche Formel)

$$\tan \varepsilon/4 = \sqrt{[\tan s/2 \cdot \tan(s-a)/2 \cdot \tan(s-b)/2 \cdot \tan(s-c)/2]}$$

Sphärischer Defekt

$$\tan d/4 = \sqrt{(-\tan(\pi/4-\sigma) \tan(\pi/4-(\sigma-\alpha)/2) \tan(\pi/4-(\sigma-\beta)/2) \tan(\pi/4-(\sigma-\gamma)/2))}$$

mit $\sigma = (\alpha+\beta+\gamma)/2$



Rechtwinkliges Kugeldreieck

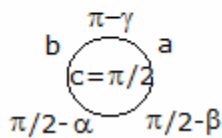
$a, b \dots$ Katheten, $c \dots$ Hypotenuse, $\gamma = 90^\circ$

$$\sin a = \cos(90^\circ - a) = \sin \alpha * \sin c = \tan b * \cot \alpha = \cot(90^\circ - b) * \cot \alpha$$

$$\cos c = \sin(90^\circ - a) * \sin(90^\circ - b) = \cos a * \cos b = \cot \alpha * \cot \beta$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - a) * \sin \beta = \cos a * \sin \beta = \tan b \cot c = \cot(90^\circ - a) * \cot c$$

Weitere Gleichungen durch Austausch von a und b , sowie α und β .



Nepersche Regel

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck

Es ist der Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der

1. Kotangens der anliegenden Stücke
2. Sinus der nicht anliegenden Stücke

Satz von Yang Lu

Ist die Fläche eines sphärischen Dreiecks gleich $1/4$ der Kugeloberfläche, so ist sein Mittendreieck mit der Seitenlänge $r * \pi/2$ gleichseitig.

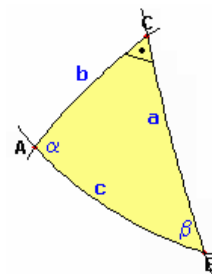
Rechtseitiges sphärisches Dreieck

Dabei sind

1. der rechte Winkel auszulassen und die Katheten durch ihre Komplemente zu ersetzen
2. die 90° -Seite auszulassen und die ihr anliegenden Winkel durch ihre Komplemente, der gegenüberliegende durch sein Supplement zu ersetzen

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck; rechtwinkliges Kugeldreieck; seien c die Hypotenuse, a und b die Katheten und α, β die den Katheten gegenüberliegenden Winkel. Die Seiten sind im Bogenmaß $0 \dots 2\pi$, die Winkel im Gradmaß $0 \dots 360^\circ$ einzugeben.



gegeben: Hypotenuse c , Kathete a

Kathete b $\cos b = \cos c / \cos a$ Winkel α $\sin \alpha = \sin a / \sin c$

Winkel β $\cos \beta = \tan a \cot c$

gegeben: Hypotenuse c , Winkel α

Kathete a $\sin a = \sin c \sin \alpha$ Kathete b $\tan b = \tan c \cos \alpha$

Winkel β $\cot \beta = \cos c \tan \alpha$

gegeben: Kathete a , Winkel β

Hypotenuse c $\cot c = \cot a \cos \beta$ Kathete b $\tan b = \sin a \tan \beta$

Winkel α $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$

gegeben: Kathete a , Winkel α

Hypotenuse c $\sin c = \sin a / \sin \alpha$ Kathete b $\sin b = \tan a \cot \alpha$

Winkel β $\sin \beta = \cos \alpha / \cos a$

gegeben: beide Katheten a und b

Hypotenuse c $\cos c = \cos a \cos b$ Winkel α $\cot \alpha = \cot a \sin b$

Winkel β $\cot \beta = \sin a \cot b$

gegeben: beide Winkel α und β

Hypotenuse c $\cos c = \cot \alpha \cot \beta$ Kathete a $\cos a = \cos \alpha / \sin \beta$

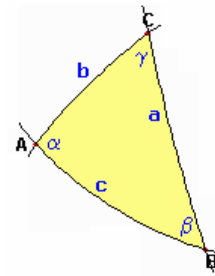
Kathete b $\cos b = \cos \beta / \sin \alpha$

Sind die Werte der gesuchten Stücke nahe 0° bzw. 90° , so ist es günstiger über nachfolgende Formeln zu rechnen. Zu beachten ist, dass $\alpha + \beta > 90^\circ$ sein muss.

Hypotenuse c $\cot c = \cot a \cot \beta$
 $\tan (\pi/4 + c/2) = \sqrt{\tan ((a+\alpha)/2) / \tan ((\alpha-a)/2)}$
 $\cos c = 1/2 \cos (a+b) + 1/2 \cos (a-b)$
 Kathete a $\sin a = 1/2 \cos (c-\alpha) - 1/2 \cos (c+\alpha)$
 Kathete b $\tan b/2 = \sqrt{\tan ((c-a)/2) \tan ((c+a)/2)}$
 $\tan b = \tan c \cos \alpha = \tan \beta \cos a$
 $\tan (\pi/4 + b/2) = \sqrt{\sin ((a+\alpha)/2) / \sin ((\alpha-a)/2)}$
 Winkel α $\tan (45^\circ + \alpha/2) = \sqrt{\tan (c+a) / \tan (c-a)}$
 $\cot \alpha = \cot a \sin b$
 Winkel β $\tan \beta/2 = \sqrt{\sin (c-a) / \sin (c+a)}$
 $\cot \beta = \cos c \tan \alpha$
 $\tan (\pi/4 + \beta/2) = \sqrt{\cot ((a+\alpha)/2) / \tan ((\alpha-a)/2)}$
 $\cot \beta = \cot b \sin a$

Fächeninhalt sphärisches Dreieck, Schiefwinkliges Kugeldreieck

In einem sphärischen Dreieck seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die zugehörigen Winkel und r der Radius der Kugel. Dann gilt für den Flächeninhalt A des Kugeldreiecks



$$A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2$$

$$A = (\alpha + \beta) r^2 - 1/2 r^2 \pi ; \text{ wenn } \gamma = 90^\circ$$

$$A = \alpha r^2 ; \text{ wenn } \beta = \gamma = 90^\circ$$

Sind die zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben, so wird mit dem Hilfswinkel ϕ

$$\cot \phi/2 = (\cot b/2 \cot c/2 + \cos \alpha) / \sin \alpha$$

$$A = \phi r^2$$

Sind die drei Seiten a, b, c gegeben, so wird mit dem Hilfswinkel ϕ

$$\sin \phi/2 = \sqrt{(\sin ((a+b+c)/2) \sin ((a+b-c)/2) \sin ((a-b+c)/2) \sin ((-a+b+c)/2)) / (2 \cos a/2 \cos b/2 \cos c/2)}$$

$$A = \phi r^2$$

Ist das Dreieck mit $b = c$ gleichschenkelig, so vereinfacht sich ϕ auf

$$\sin \phi/2 = \tan a/2 / (2 \cos^2 b/2) \sqrt{(\sin (b+a/2) \sin (b-a/2))}$$

Ist das Dreieck gleichseitig, so vereinfacht sich ϕ auf

$$\sin \phi/2 = \tan a/2 / (2 \cos^2 b/2) \sqrt{(\sin (3/2 a) \sin (a/2))}$$

Beziehungen am sphärischen Dreieck

An einem sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den zugehörigen Winkeln α, β, γ gilt stets

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$$

$$\sin a \sin \gamma = \sin c \sin \alpha$$

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha ; \text{ Seitenkosinussatz}$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a ; \text{ Winkelkosinussatz}$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

$$\tan ((b-a)/2) = \tan c/2 \sin ((\beta-\alpha)/2) / \sin ((\beta+\alpha)/2)$$

$$\tan ((b+a)/2) = \tan c/2 \cos ((\beta-\alpha)/2) / \cos ((\beta+\alpha)/2)$$

$$\tan ((\beta-\alpha)/2) = \cot \gamma/2 \sin ((b-a)/2) / \sin ((b+a)/2)$$

$$\tan ((\beta+\alpha)/2) = \cot \gamma/2 \cos ((b-a)/2) / \cos ((b+a)/2)$$

Relation zwischen zwei Winkeln und drei Seiten

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$$

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha$$

weitere Beziehungen durch zyklisches Tauschen der Größen

Relation zwischen zwei Winkeln und zwei Seiten

$$\sin a \sin \beta \cot \alpha = \cos a \sin c - \cos \beta \sin a \cos c$$

$$\sin a \sin \gamma \cot \alpha = \cos a \sin b - \cos \gamma \sin a \cos b$$

$$\sin \alpha \sin b \cot a = \cos \alpha \sin \gamma - \cos b \sin \alpha \cos \gamma$$

$$\sin \alpha \sin g \cot a = \cos \alpha \sin \beta - \cos g \sin \alpha \cos \beta$$

weitere Beziehungen durch zyklisches Tauschen der Größen

Schiefwinklig sphärisches Dreieck

Bei 3 gegebenen Stücken unterscheidet man wie im Falle der rechtwinklig sphärischen Dreiecke 6 Grundaufgaben.

Sphärisches Dreieck - Grundaufgabe SSS

Gegeben: 3 Seiten a, b, c

Bedingungen:

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ, a + b > c, a + c > b, b + c > a$$

1. Lösung: Gesucht α

$$\cos \alpha = (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c)$$

$$\tan \alpha/2 = \sqrt{(\sin(s-b) \sin(s-c) / (\sin s \sin(s-a)))}$$

$$\text{mit } s = (a + b + c)/2$$

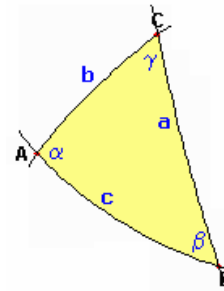
2. Lösung: Gesucht α, β, γ

$$k = \sqrt{(\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c) / \sin s)}$$

$$\tan \alpha/2 = k / \sin(s-a) \quad \tan \beta/2 = k / \sin(s-b)$$

$$\tan \gamma/2 = k / \sin(s-c)$$

Mögliche Proben $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s \quad \tan \alpha/2 \tan \beta/2 \tan \gamma/2 \sin s = k$



Sphärisches Dreieck - Grundaufgabe WWW

Gegeben: 3 Seiten α, β, γ

Bedingungen: $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ, \alpha + \beta > 180^\circ + \gamma, \alpha + \gamma > 180^\circ + \beta, \beta + \gamma > 180^\circ + \alpha$

1. Lösung: Gesucht a

$$\cos a = (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma) / (\sin \beta \sin \gamma)$$

$$\cot a/2 = \sqrt{(\cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma) / (-\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha)))} \text{ mit } \sigma = (\alpha + \beta + \gamma)/2$$

2. Lösung: Gesucht a, b, c

$$k' = \sqrt{(\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma) / (-\sin \sigma))}$$

$$\cot a/2 = k' / \cos(\sigma - \alpha)$$

$$\cot b/2 = k' / \cos(\sigma - \beta)$$

$$\cot c/2 = k' / \cos(\sigma - \gamma)$$

Mögliche Proben $(\sigma - \alpha) + (\sigma - \beta) + (\sigma - \gamma) = \sigma \quad \cot a/2 \cot b/2 \cot c/2 (-\sin \sigma) = k'$

Sphärisches Dreieck - Grundaufgabe SWS

Gegeben: 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel, z.B. a, b, γ

Bedingungen: Keine

1. Lösung: Gesucht c bzw. α und α

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \sin \gamma$$

$$\sin \alpha = \sin a \sin \gamma / \sin c$$

α kann im I. oder II. Quadranten liegen. Es existieren zwei Entscheidungsmöglichkeiten:

1. Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber oder

2. Durchführung einer Kontrollrechnung:

2. Lösung: Gesucht α bzw. α und c

$$\tan u = \tan a \cos \gamma$$

$$\tan \alpha = \tan \gamma \sin u / \sin(b - u)$$

$$\tan c = \tan(b - u) / \cos \alpha$$

3. Lösung: Gesucht α und β

$$\tan(\alpha + \beta)/2 = \cos(a-b)/2 / \cos(a+b)/2 \cot \gamma/2$$

$$\tan(\alpha - \beta)/2 = \sin(a-b)/2 / \sin(a+b)/2 \cot \gamma/2 \dots (-90^\circ < (\alpha - \beta)/2 < 90^\circ)$$

$$\alpha = (\alpha + \beta)/2 + (\alpha - \beta)/2$$

$$\beta = (\alpha + \beta)/2 - (\alpha - \beta)/2$$

4. Lösung: Gesucht α, β, c

$$\tan(\alpha + \beta)/2 = (\cos(a-b)/2 \cos \gamma/2) / (\cos(a+b)/2 \sin \gamma/2) = Z/N$$

$$\tan(\alpha - \beta)/2 = (\sin(a-b)/2 \cos \gamma/2) / (\sin(a+b)/2 \sin \gamma/2) = Z'/N'$$

$$\alpha = (\alpha + \beta)/2 + (\alpha - \beta)/2$$

$$\beta = (\alpha + \beta)/2 - (\alpha - \beta)/2$$

$$\cos c/2 = Z / (\sin(\alpha + \beta)/2)$$

$$\sin c/2 = Z' / (\sin(\alpha - \beta)/2)$$

Sphärisches Dreieck - Grundaufgabe WSW

Gegeben: 1 Seite und die zwei anliegenden Winkel, z.B. α, β, c

Bedingungen: Keine

1. Lösung: Gesucht γ bzw. γ und a

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

$$\sin a = \sin \alpha \sin c / \sin \gamma$$

a kann im I. oder II. Quadranten liegen. Es existieren zwei Entscheidungsmöglichkeiten:

1. Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber oder

2. Durchführung einer Kontrollrechnung $\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma > 0$ oder < 0

2. Lösung: Gesucht a bzw. a und γ

$$\cot \mu = \tan \alpha \cos c$$

$$\tan a = \tan c \cos \mu / \cos(\beta - \mu)$$

$$\tan \gamma = \cot(\beta - \mu) / \cos a$$

3. Lösung: Gesucht a und b

$$\tan(a + b)/2 = \cos(\alpha - \beta)/2 / \cos(\alpha + \beta)/2 \tan c/2$$

$$\tan(a - b)/2 = \sin(\alpha - \beta)/2 / \sin(\alpha + \beta)/2 \tan c/2 \dots (-90^\circ < (a - b)/2 < 90^\circ)$$

$$a = (a + b)/2 + (a - b)/2$$

$$b = (a + b)/2 - (a - b)/2$$

4. Lösung: Gesucht a, b, γ

$$\tan(a + b)/2 = (\cos(\alpha - \beta)/2 \sin c/2) / (\cos(\alpha + \beta)/2 \cos c/2) = Z/N$$

$$\tan(a - b)/2 = (\sin(\alpha - \beta)/2 \sin c/2) / (\sin(\alpha + \beta)/2 \cos c/2) = Z'/N'$$

$$a = (a + b)/2 + (a - b)/2$$

$$b = (a + b)/2 - (a - b)/2$$

$$\cos \gamma/2 = Z / (\sin(a + b)/2)$$

$$\sin \gamma/2 = Z' / (\sin(a - b)/2)$$

Sphärisches Dreieck - Grundaufgabe SSW

Gegeben: 2 Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel, z.B. a, b, α

Lösung: Gesuchte beliebige fehlende Größe

$$\sin \beta = \sin b \sin \alpha / \sin a$$

zwei Werte β_1 und β_2 sind möglich. Für β_1 spitz und $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ stumpf wird:

$$\sin b \sin \alpha / \sin a > 1 \dots \text{kein Lösung}$$

$$\sin b \sin \alpha / \sin a = 1 \dots 1 \text{ Lösung } \beta_1 = 90^\circ$$

$$\sin b \sin \alpha / \sin a < 1 \dots \text{Fallunterscheidung}$$

$$\sin a > \sin b \text{ und } b < 90^\circ \dots 1 \text{ Lösung } \beta_1$$

$$\sin a > \sin b \text{ und } b > 90^\circ \dots 1 \text{ Lösung } \beta_2$$

$$\sin a < \sin b \text{ und } a < 90^\circ, \alpha < 90^\circ \text{ oder } a > 90^\circ, \alpha > 90^\circ \dots 2 \text{ Lösungen } \beta_1, \beta_2$$

$$\sin a < \sin b \text{ und } a < 90^\circ, \alpha > 90^\circ \text{ oder } a > 90^\circ, \alpha < 90^\circ \dots 0 \text{ Lösungen}$$

Anschließend weitere Berechnung mit einem Winkel oder zwei Winkeln β .

Sphärisches Dreieck - Grundaufgabe WWS

Gegeben: 2 Winkel und die einem Winkel gegenüberliegende Seite, z.B. a, α , β

Lösung: Gesuchte beliebige fehlende Größe

$$\sin b = \sin a \sin \beta / \sin \alpha$$

zwei Werte b_1 und b_2 sind möglich. Für b_1 spitz und $b_2 = 180^\circ - b_1$ stumpf wird:

$$\sin a \sin \beta / \sin \alpha > 1 \dots \text{kein Lösung}$$

$$\sin a \sin \beta / \sin \alpha = 1 \dots 1 \text{ Lösung } b = 90^\circ$$

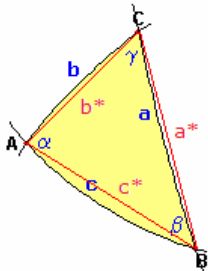
$$\sin a \sin \beta / \sin \alpha < 1 \dots \text{Fallunterscheidung}$$

$$\sin \alpha > \sin \beta \text{ und } \beta < 90^\circ \dots 1 \text{ Lösung } b_1$$

$$\sin \alpha > \sin \beta \text{ und } \beta > 90^\circ \dots 1 \text{ Lösung } b_2$$

$$\sin \alpha < \sin \beta \text{ und } a < 90^\circ, \alpha < 90^\circ \text{ oder } a > 90^\circ, \alpha > 90^\circ \dots 2 \text{ Lösungen } \beta_1, \beta_2$$

$$\sin \alpha < \sin \beta \text{ und } a < 90^\circ, \alpha > 90^\circ \text{ oder } a > 90^\circ, \alpha < 90^\circ \dots 0 \text{ Lösungen}$$



Sphärisches Sehnendreieck

In einem sphärischen Dreieck seien a, b, c die Seiten und α , β , γ die Winkel. Mit a^* , b^* , c^* seien die Seiten des zugehörigen Sehnendreiecks bezeichnet, mit α^* , β^* , β^* die entsprechenden Innenwinkel. Dann gilt:

$$a^* = 2 \sin a/2 ; b^* = 2 \sin b/2 ; c^* = 2 \sin c/2$$

$$\cos a = 1 - 1/2 a^{*2} ; \cos b = 1 - 1/2 b^{*2} ; \cos c = 1 - 1/2 c^{*2}$$

$$\cos \alpha = (2 b^{*2} + 2 c^{*2} - 2 a^{*2} - b^* c^*) / (b^* c^* \sqrt{4 - b^{*2}} \sqrt{4 - c^{*2}})$$

$$\cos \alpha = (4 \cos \alpha^* - b^* c^*) / (\sqrt{4 - b^{*2}} \sqrt{4 - c^{*2}})$$

$$\cos \alpha^* = \cos b/2 \cos c/2 \cos \alpha + \sin b/2 \sin c/2$$

$$\cos \alpha^* = (\sin^2 b/2 + \sin^2 c/2 - \sin^2 a/2) / (2 \sin b/2 \sin c/2)$$

durch zyklisches Vertauschen der Größen ergeben sich weitere Gleichungen

Ist das Sehnendreieck gleichschenkelig mit $b^* = c^*$, so wird

$$\sin \alpha/2 = a^* / (b^* \sqrt{4 - b^{*2}}) = 2 \sin (\alpha^*/2) / \sqrt{4 - b^{*2}}$$

Ist das sphärische Dreiecke mit $b = c$ gleichschenkelig, gilt

$$\sin \alpha^*/2 = \sin a/2 / (2 \sin b/2) = \cos b/2 \sin \alpha/2$$

Ist das Sehnendreieck gleichseitig, so auch das sphärische Dreieck

$$\sin \alpha/2 = 1 / \sqrt{4 - b^{*2}}$$

Differenziale am sphärischen Dreieck

Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Seiten oder Winkel als unveränderlich angesehen werden können, so wird eine sehr kleine Veränderung eines dritten Teils auf die anderen Größen eine Auswirkung besitzen. Für diese gilt:

1) eine Seite a und ein anliegender Winkel β sind konstant

$$\partial c = \partial b / \cos \alpha = \partial b \sec \alpha = \partial b \sin b \sin c / (\cos a - \cos b \cos c) =$$

$$= \partial b \sin c / (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma) = \partial b / (\cos a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) =$$

$$= -\partial \alpha \tan b / \sin \alpha = -\partial \alpha \sin c / (\sin^2 \alpha + \cot \beta + \sin \alpha \cos \alpha \cos c) = -\partial \alpha \sin b \tan b / (\sin a \sin \beta) =$$

$$= \partial \gamma \sin b / \sin \alpha = \partial \gamma \sin^2 b / (\sin a \sin \beta) = \partial \gamma \sin b \sin c / (\sin a \sin \gamma)$$

$$\partial \alpha = -\partial b \tan \alpha \cot b = -\partial b \sin \alpha (\cos c + \tan \alpha \cot \beta) / \sin c =$$

$$= -\partial b \sin \gamma / (\sin b (\tan b \cot a - \cos \gamma)) = -\partial c (\sin^2 \alpha \cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \cos c) / \sin c =$$

$$= -\partial c \sin \alpha \cot \beta = -\partial c \sin a \sin \beta / (\sin b \tan b) = -\partial \gamma (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) / (\sin \alpha \sin \gamma) =$$

$$= -\partial \gamma \cos b = -\partial \gamma (\sin a \sin c \cos \beta + \cos a \cos c)$$

$$\partial \gamma = \partial b \tan \alpha / \sin b = \partial b \sin \gamma / (\sin^2 b \cot a - \sin b \cos b \cos \gamma) = \partial b \sin \alpha \tan \alpha / (\sin a \sin \beta) =$$

$$= \partial c \sin \alpha / \sin b = \partial c \sin a \sin \beta / \sin^2 b = \partial c \sin a \sin \gamma / (\sin b \sin c) =$$

$$= \partial c \sin^2 \alpha / (\sin a \sin \beta) = -\partial \alpha / \cos b = -\partial \alpha \sec b = -\partial \alpha \sin \gamma \sin \alpha / (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) =$$

$$= -\partial \alpha / (\sin a \sin c \cos \beta + \cos a \cos c)$$

$$\begin{aligned}\partial b &= \partial c \cos \alpha = \partial c (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c) = \partial c (\cos a \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) = \\ &= \partial c (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma) / \sin c = -\partial \alpha \cot \alpha \tan b = \\ &= -\partial \alpha \sin c / (\sin \alpha (\cos c + \tan \alpha \cot \beta)) = -\partial \alpha \sin b (\tan b \cot a - \cos \gamma) / \sin \gamma = \\ &= \partial \gamma \sin b \cot \alpha = \partial \gamma (\sin^2 b \cot a - \sin b \cos b \cos \gamma) / \sin \gamma = \partial \gamma \sin a \sin \beta / (\sin 4a \tan \alpha)\end{aligned}$$

2) eine Seite a und der Gegenwinkel α sind konstant

$$\begin{aligned}\partial c &= -\partial b \cos \gamma / \cos \beta = -\partial b (\cos c \sin \alpha \tan \beta - \cos \alpha) = -\partial b / (\cos b \sin \alpha \tan \gamma - \cos \alpha) = \\ &= -\partial b \sin c (\cos c - \cos a \cos b) / (\sin b (\cos b - \cos a \cos c)) = -\partial \beta \tan b \cos \gamma / \sin \beta = \\ &= -\partial \beta \sin c / (\cos b \tan \gamma) = -\partial \beta (\tan b \cos c - \sin c \cos \alpha) / \sin \alpha = -\partial \beta \sin a / (\cos \beta \tan \gamma + \cos a \sin \beta) = \\ &= -\partial \beta (\tan a - \tan c \cos \beta) / (\sin \beta (1 + \tan a \tan c \cos \beta)) = \partial \gamma \tan c \cot \gamma = \\ &= -\partial \beta (\sin c (\cos c \tan \alpha \tan \beta - 1)) / (\cos c \tan \alpha \tan \beta - 1) = \partial \gamma \sin b / (\sin \alpha + \cos b \cos \alpha \tan \gamma) = \\ &= \partial \gamma (\sin b - \cos b \cos \alpha \tan c) / \sin \alpha = -\partial b (\tan b \cot c - \cos \alpha) / (1 - \tan b \cot c \cos \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial \beta &= \partial b \cot b \tan \beta = \partial b (\sin \alpha + \cos \alpha \cos c \tan \beta) / \sin c = \partial b (\sin \gamma + \cos \gamma \cos a \tan \beta) / \sin a = \\ &= \partial b \sin a / (\sin c - \cos c \tan b \cos \alpha) = \partial b \sin \gamma / (\sin a - \cos a \tan b \cos \gamma) = -\partial c \sin \beta / (\tan b \cos \gamma) = \\ &= -\partial c \cos b \tan \gamma / \sin c = -\partial c \sin \alpha / (\tan b \cos c - \sin c \cos \alpha) = -\partial c (\cos \beta \tan \gamma + \cos a \sin \beta) / \sin a = \\ &= -\partial c (\sin \beta (1 + \tan a \tan c \cos \beta)) / (\tan a - \tan c \cos \beta) = -\partial \gamma / (\sin a \tan b \cos \gamma + \cos a) = \\ &= -\partial c (\cos c \tan \beta + \tan \alpha) / ((\cos c \tan \alpha \tan \beta - 1) \sin c) = -\partial \gamma \cos b / \cos c = \\ &= -\partial \gamma (\sin a \tan c \cos \beta + \cos a) = -\partial \gamma (\sin \beta (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma)) / (\sin \gamma (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial \gamma &= -\partial b \sin \gamma / (\tan c \cos \beta) = -\partial b \cos c \tan \beta / \sin b = -\partial b \sin \alpha / (\cos b \tan \gamma - \sin b \cos \alpha) = \\ &= -\partial b (\cos \gamma \tan \beta + \cos a \sin \gamma) / \sin a = -\partial b (\sin \gamma (1 + \tan a \tan b \cos \gamma)) / (\tan a - \tan b \cos \gamma) = \\ &= -\partial b (\cos b \tan \gamma + \tan \alpha) / (\sin b (\cos b \tan \alpha \tan \gamma - 1)) = \partial c \cot c \tan \gamma = \\ &= \partial c (\sin \alpha + \cos b \cos \alpha \tan \gamma) / \sin b = \partial c (\sin \beta + \cos a \cos \beta \tan \gamma) / \sin a = \\ &= \partial c \sin \alpha / (\sin b - \cos b \tan c \cos \alpha) = \partial c \sin \beta / (\sin a - \cos a \tan c \cos \beta) = -\partial \beta \cos c / \cos b = \\ &= -\partial \beta (\sin a \tan b \cos \gamma + \cos a) = -\partial \beta / (\sin a \tan c \cos \beta + \cos a) = \\ &= -\partial \beta (\sin \gamma (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta)) / (\sin \beta (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma)) = \\ &= -\partial \beta (\tan \beta \cot \gamma + \cos a) / (1 + \cos a \tan \beta \cot \gamma)\end{aligned}$$

2) eine Seite a und der Gegenwinkel α sind konstant

$$\begin{aligned}\partial b &= -\partial c \cos \beta / \cos \gamma = -\partial c / (\cos c \sin \alpha \tan \beta - \cos \alpha) = -\partial c (\cos b \sin \alpha \tan \gamma - \cos \alpha) = \\ &= -\partial c (\sin b (\cos b - \cos a \cos c)) / (\sin c (\cos c - \cos a \cos b)) = \\ &= -\partial c (1 - \tan b \cot c \cos \alpha) / (\tan b \cot c - \cos \alpha) = \partial \beta \sin c / (\sin \alpha + \cos c \cos \alpha \tan \beta) = \\ &= \partial \beta \tan b \cot \beta = \partial \beta \sin a / (\sin \gamma + \cos a \tan \beta \cos \gamma) = \partial \beta (\sin c - \tan b \cos c \cos \alpha) / \sin \alpha = \\ &= \partial \beta (\sin a - \cos a \tan b \cos \gamma) / \sin \gamma = -\partial \gamma \tan c \cos \beta / \sin \gamma = -\partial \gamma \sin b / (\cos c \tan \beta) = \\ &= -\partial \gamma (\cos b \tan \gamma - \sin b \cos \alpha) / \sin \alpha = -\partial \gamma \sin a / (\tan \beta \cos \gamma + \cos a \sin \gamma) = \\ &= -\partial \gamma (\tan a - \tan b \cos \gamma) / (\sin \gamma (1 + \tan a \tan b \cos \gamma))\end{aligned}$$

3) zwei Seiten b und c sind konstant

$$\begin{aligned}\partial \alpha &= \partial a \sin a / (\sin b \sin c \sin \alpha) = \partial a / (\sin c \sin \beta) = \partial a / (\sin b \sin \gamma) = \\ &= -\partial \beta \sin^2 a / (\sin^2 b (\cos c - \cot b \sin c \cos \alpha)) = -\partial \beta / (\sin^2 \beta (\cos c - \cot \alpha \cos \beta)) = \\ &= -\partial \beta \sin \alpha / (\sin \beta \cos \gamma) = -\partial \beta \sin a / (\sin b \cos \gamma) = -\partial \beta \sin^2 a / (\cos c - \cos a \cos b) = \\ &= -\partial \beta / (\cos c - \cot a \sin c \cos \beta) = -\partial \gamma \sin^2 a / (\sin^2 c (\cos b - \sin b \cot c \cos \alpha)) = \\ &= -\partial \gamma / (\sin^2 \gamma (\cos b - \cot \alpha \cot \gamma)) = -\partial \gamma \sin \alpha / (\cos \beta \sin \gamma) = -\partial \gamma \sin a / (\sin c \cos \beta) = \\ &= -\partial \gamma \sin^2 a / (\cos b - \cos a \cos c) = -\partial \gamma / (\cos b - \cot a \sin b \cos \gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial \beta &= -\partial a \cot \gamma / \sin a = -\partial a (\cot c - \cot a \cos \beta) / \sin \beta = -\partial a \cos \gamma / (\sin c \sin \alpha) = \\ &= -\partial a (\cos c \sin \beta - \cot \alpha \cos \beta) / \sin c = -\partial a \sin^2 b (\cos c - \sin c \tan b \cos \alpha) / \sin^2 a = \\ &= -\partial a \sin^2 \beta (\cos c - \cot \alpha \cot \beta) = -\partial a \sin \beta \cos \gamma / \sin \alpha = -\partial a \sin b \cos \gamma / \sin a = \\ &= -\partial a (\cos c - \cos a \cos b) / \sin^2 a = -\partial a (\cos c - \sin c \cot a \cos \beta) = \partial \gamma \tan \beta \cot \gamma = \\ &= \partial \gamma \cos \gamma / (\sin a \cot b - \cos a \cos \gamma) = \partial \gamma (\cos c - \cos a \cos b) / (\cos b - \cos a \cos c) = \\ &= \partial \gamma (\sin a \cos b - \cos a \cos \beta) / \cos \beta = \partial \gamma (\sin b \cot c - \cos b \cos \alpha) / (\sin c \cot b - \cos c \cos \alpha)\end{aligned}$$

3) zwei Seiten b und c sind konstant

$$\begin{aligned}\partial \gamma &= -\partial a \cot \beta / \sin a = -\partial a (\cot b - \cot a \cos \gamma) / \sin \gamma = -\partial a \cos \beta / (\sin b \sin \alpha) = \\ &= -\partial a (\cos b \sin \gamma - \cot \alpha \cos \gamma) / \sin b = -\partial a \sin^2 c (\cos b - \sin b \cot c \cos \alpha) / \sin^2 a = \\ &= -\partial a \sin^2 \gamma (\cos b - \cot \alpha \cot \gamma) = -\partial a \sin \gamma \cos \beta / \sin \alpha = -\partial a \sin c \cos \beta / \sin a = \\ &= -\partial a (\cos b - \cos a \cos c) / \sin^2 a = -\partial a (\cos b - \sin b \cot a \cos \gamma) = \partial \beta \cot \beta \tan \gamma = \\ &= \partial \beta (\sin a \cot b - \cos a \cos \gamma) / \cos \gamma = \partial \beta (\cos b - \cos a \cos c) / (\cos c - \cos a \cos b) = \\ &= \partial \beta \cos \beta / (\sin a \cos b - \cos a \cos \beta) = \partial \beta (\sin c \cot b - \cos c \cos \alpha) / (\sin b \cot c - \cos b \cos \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial a &= \partial \alpha \sin b \sin c \sin \alpha / \sin a = \partial \alpha \sin c \sin \beta = \partial \alpha \sin b \sin \gamma = -\partial \beta \sin a \tan \gamma = \\ &= -\partial \beta \sin \beta / (\cot c - \cot a \cos \beta) = -\partial \beta \sin c \sin \alpha / \cos \gamma = -\partial \beta \sin c / (\cos c \sin \beta - \cot \alpha \cos \beta) = \\ &= -\partial \gamma \sin a \tan \beta = -\partial \gamma \sin \gamma / (\cot b - \cot a \cos \gamma) = -\partial \gamma \sin b \sin \alpha / \cos \beta = \\ &= -\partial \gamma \sin b / (\cos b \sin \gamma - \cot \alpha \cos \gamma)\end{aligned}$$

4) zwei Winkel β und γ sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial b &= \partial a \sin^2 b (\cos \gamma + \cot a \cot b) = \partial a \sin b \cos c / \sin a = \partial a \sin \beta \cos c / \sin \alpha = \\
&= \partial a (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) / \sin^2 \alpha = \partial a (\cos \gamma + \cos b \sin \gamma \cot \alpha) = \partial c \tan b \cot c = \\
&= \partial c \cos c / (\sin \alpha \cot \beta + \cos \alpha \cos c) = \partial c (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) / (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) = \\
&= \partial c (\sin \alpha \cot \gamma + \cos b \cos \alpha) / \cos b = \partial c (\sin b \cot \gamma + \cos a \cos \beta) / (\sin \gamma \cot \beta + \cos a \cos \gamma) = \\
&= \partial \alpha \cot c / \sin \alpha = \partial \alpha (\cot \gamma + \cot b \cot \alpha) / \sin b = \partial \alpha \cos c / (\sin a \sin \gamma) = \\
&= \partial \alpha (\sin b \cos \gamma + \cot a \cos b) / \sin \gamma
\end{aligned}$$

4) zwei Winkel β und γ sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial a &= \partial b / (\sin^2 b (\cos \gamma + \cot a \cot b)) = \partial b \sin a / (\sin b \cos c) = \partial b \sin \alpha / (\cos c \sin \beta) = \\
&= \partial b \sin^2 \alpha / (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) = \partial b / (\cos \gamma + \cos b \cot \alpha \sin \gamma) = \partial c / (\sin^2 c (\cos \beta + \cot a \cot c)) = \\
&= \partial c \sin a / (\sin c \cos b) = \partial c \sin \alpha / (\cos b \sin \gamma) = \partial c \sin^2 \alpha / (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) = \\
&= \partial c / (\cos \beta + \cos c \cot \alpha \sin \beta) = \partial \alpha \sin \alpha / (\sin a \sin \beta \sin \gamma) = \partial \alpha / (\sin c \sin \beta) = \partial \alpha / (\sin b \sin \gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial c &= \partial a \sin^2 c (\cos \beta + \cot a \cot c) = \partial a \sin c \cos b / \sin a = \partial a \cos b \sin \gamma / \sin \alpha = \\
&= \partial a (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) / \sin^2 \alpha = \partial a (\cos \beta + \cos c \cot \alpha \sin \beta) = \partial b \cot b \tan c = \\
&= \partial b (\sin \alpha \cot \beta + \cos c \cos \alpha) / \cos c = \partial b (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) / (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) = \\
&= \partial b \cos b / (\sin \alpha \cot \gamma + \cos b \cos \alpha) = \partial b (\cot \beta \sin \gamma + \cos a \cos \beta) / (\sin b \cot \gamma + \cos a \cos \beta) = \\
&= \partial \alpha \cot b / \sin \alpha = \partial \alpha (\cot \beta + \cot a \cot c) / \sin c = \partial \alpha \cos b / (\sin a \sin \beta) = \\
&= \partial \alpha (\sin c \cos \beta + \cot a \cos c) / \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \alpha &= \partial a \sin a \sin \beta \sin \gamma / \sin \alpha = \partial a \sin c \sin \beta = \partial a \sin b \sin \gamma = \partial b \tan c \sin \alpha = \\
&= \partial b \sin b / (\cot \gamma + \cos b \cot \alpha) = \partial b \sin a \sin \gamma / \cos c = \partial b (\sin b \cos \gamma + \cot a \cos b) / \sin \gamma = \\
&= \partial c \tan b \sin \alpha = \partial c \sin c / (\cot \beta + \cot a \cos c) = \partial c \sin a \sin \beta / \cos b = \\
&= \partial c \sin \beta / (\sin c \cos \beta + \cot a \cos c)
\end{aligned}$$

Differenziale am rechtseitigen sphärischen Dreieck

Wenn in einem rechtseitigen sphärischen Dreieck; eine Seite ist 90° ; zwei Stücke, Seiten oder Winkel, als unveränderlich angesehen werden können, so wird eine sehr kleine Veränderung eines dritten Teils auf die anderen Größen eine Auswirkung besitzen. Für diese gilt:

1) die Seite $a = 90^\circ$ und der Winkel β sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial b &= -\partial c \cot b \cot c = \partial \alpha \sin b \cot \gamma = -\partial \gamma 1/2 \sin 2b \cot \gamma \\
\partial c &= -\partial b \tan b \tan c = \partial \alpha 2 \cot c / \sin 2\alpha = \partial \gamma \sin 2c / \sin 2\alpha \\
\partial \alpha &= \partial b \tan \gamma / \sin b = \partial c 1/2 \sin 2\alpha \tan c = \partial \gamma \cot \alpha \tan \gamma \\
\partial \gamma &= -\partial b 2 \tan \gamma / \sin 2b = \partial c \sin 2\gamma / \sin 2c = \partial \alpha \tan \alpha \cot \gamma
\end{aligned}$$

2) die Seite $a = 90^\circ$ und der Gegenwinkel α sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial b &= -\partial c \sin 2b / \sin 2c = -\partial c \cos \beta / \cos \gamma = \partial c \cos^2 \beta / \cos \alpha = \partial c \cos \alpha / \cos^2 \gamma = \partial \beta \tan b \cot \beta = \\
&= -\partial \gamma 2 \cot b \sin 2\gamma \\
\partial c &= -\partial b \sin 2c / \sin 2b = -\partial b \cos \gamma / \cos \beta = \partial b \cos \alpha / \cos^2 \beta = \partial b \cos^2 \gamma / \cos \alpha = -\partial \beta 2 \cot c / \sin 2\beta = \\
&= \partial \gamma \tan c \cot \gamma \\
\partial \beta &= \partial b \tan b \cot \beta = -\partial c 1/2 \sin 2\beta \tan c = -\partial \gamma \cot \beta \tan \gamma \\
\partial \gamma &= \partial b 1/2 \sin 2\gamma \tan b = \partial c \cot c \tan \gamma = -\partial \beta \tan \beta \cot \gamma
\end{aligned}$$

3) zwei Seiten $b = 90^\circ$ und c sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial a &= \partial \alpha \cot a \tan \alpha = \partial \beta 1/2 \sin 2a \tan \beta = -\partial \beta \cos c \tan \gamma / \cos \gamma = -\partial \beta \sin a \tan \gamma = -\partial \gamma \sin a \tan \beta \\
\partial \alpha &= \partial a \tan a \cot \alpha = \partial \beta \sin 2\alpha / \sin 2\beta = -\partial \beta \sin a / \cos \gamma = -\partial \beta \cos c / \cos^2 \gamma = \partial \gamma 2 \tan \alpha / \sin 2\gamma \\
\partial \beta &= \partial a 2 \cot \beta / \sin 2a = -\partial a \cos \gamma \cot \gamma / \cos c = -\partial a \cot \gamma / \sin a = \partial \alpha \sin 2\beta / \sin 2\alpha = -\partial \alpha \cos \gamma / \sin a = \\
&= -\partial \alpha \cos^2 \gamma / \cos c = \partial \gamma \tan \beta \cot \gamma \\
\partial \gamma &= -\partial a \cot \beta / \sin a = \partial \alpha 1/2 \cot \alpha \sin 2\gamma = \partial \beta \tan \beta \cot \gamma
\end{aligned}$$

Differenziale am rechtwinkligen sphärischen Dreieck

Wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck; ein Winkel ist 90° ; zwei Stücke, Seiten oder Winkel, als unveränderlich angesehen werden können, so wird eine sehr kleine Veränderung eines dritten Teils auf die anderen Größen eine Auswirkung besitzen. Für diese gilt:

1) die Seite a und ein anliegender Winkel $\beta = 90^\circ$ sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial b &= \partial c \tan c \cot b = -\partial \alpha \sin b \tan \gamma = \partial \gamma 1/2 \sin 2b \tan \gamma \\
\partial c &= \partial b \tan b \cot c = -\partial \alpha 2 \tan c / \sin 2\alpha = \partial \gamma \sin 2c / \sin 2\gamma \\
\partial \alpha &= -\partial b \cot \gamma / \sin b = \partial c 1/2 \sin 2\alpha \cot c = -\partial \gamma \cot \alpha \cot \gamma \\
\partial \gamma &= -\partial b 2 \cot \gamma / \sin 2b = \partial c \sin 2\gamma / \sin 2c = -\partial \alpha \tan \alpha \tan \gamma
\end{aligned}$$

2) die Seite a und der Gegenwinkel $\alpha = 90^\circ$ sind konstant

$$\begin{aligned}
\partial b &= -\partial c \cot b \tan c = \partial \beta \cot b \tan \beta = \partial \gamma 2 \sin 2b \tan \gamma \\
\partial c &= -\partial b \tan b \cot c = -\partial \beta 2 \tan \beta \sin 2c = \partial \gamma \tan c \cot \gamma \\
\partial \beta &= \partial b \tan \beta \cot b = \partial c 2 \cot \beta / \sin 2c = -\partial \gamma \sin 2\beta / \sin 2\gamma = -\partial \gamma \cos b / \cos c = -\partial \gamma \cos^2 b / \cos a = \\
&= -\partial \gamma \cos a / \cos^2 c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\gamma &= -\partial b \frac{2 \cot \gamma}{\sin 2b} = \partial c \tan \gamma \cot c = -\partial\beta \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} = -\partial\beta \frac{\cos c}{\cos b} = -\partial\beta \frac{\cos a}{\cos^2 b} = \\ &= -\partial\beta \frac{\cos^2 c}{\cos a} \end{aligned}$$

3) zwei Winkel $\beta = 90^\circ$ und γ sind konstant

$$\begin{aligned} \partial a &= \partial b \frac{\sin 2a}{\sin 2b} = \partial b \frac{\sin a}{\cos c} = \partial b \frac{\cos \gamma}{\cos^2 c} = \partial c \frac{2 \tan a}{\sin 2c} = \partial\alpha \cot a \tan \alpha \\ \partial b &= \partial a \frac{\sin 2b}{\sin 2a} = \partial a \frac{\cos c}{\sin \alpha} = \partial a \frac{\cos^2 c}{\cos \gamma} = \partial c \tan b \cot c = \partial\alpha \frac{2 \cot b}{\sin 2\alpha} = \\ &= \partial\alpha \cot c \cos c / \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\partial c = \partial a \frac{1}{2} \sin 2c \cot a = \partial b \cot b \tan c = \partial\alpha \cot b / \sin \alpha$$

$$\partial\alpha = \partial a \tan a \cot \alpha = \partial b \frac{1}{2} \tan b \sin 2\alpha = \partial b \frac{\cos \gamma \tan c}{\cos c} = \partial c \tan b \sin \alpha$$

Verebnung eines Dreiecks

Unter Verebnung wird eine vereinfachte Berechnungsmethode für Kugeldreiecke verstanden, die sie auf ebene Dreiecke zurückführt.

Die Methode wird in der Geodäsie und teilweise in der Sphärischen Trigonometrie verwendet, wenn 2-3 Dreieckswinkel in der Natur gemessen oder sonstwie bekannt sind. Sie ergibt bis zu Dreiecksseiten von etwa 100 km eine Genauigkeit im Millimeter-Bereich.

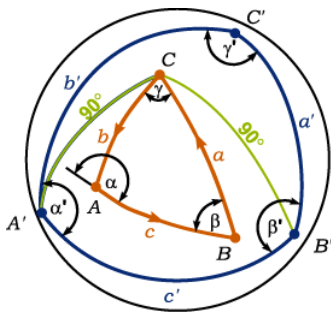
Rechenvorgang:

- 1) genäherte Berechnung der Dreiecksfläche
- 2) Berechnung des sphärischen Exzesses mittels der Dreiecksfläche A
 $A = \varepsilon/180^\circ R^2\pi$, wobei R den Kugelradius bedeutet
- 3) Drittelung von ε und
- 4) Verminderung aller gemessenen, sphärischen Dreieckswinkel um diesen Betrag
- 5) Berechnung der Dreiecksseiten mittels ebener Trigonometrie

Bei einem sehr kleinen Kugeldreieck; klein im Vergleich zur gesamten Erdoberfläche; übersteigt die Winkelsumme 180° nur wenig. Ein gleichseitiges Dreieck mit 21 km langen Seiten hat einen Exzess von nur $1''$, etwa das Zehnfache der modernen Messgenauigkeit.

Legendrescher Satz

nach Adrien-Marie Legendre, 1787: Ein kleines sphärisches Dreieck kann nach Seiten und Winkeln näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Exzesses ε verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.



Polardreieck

Das Polardreieck $A'B'C'$ zu einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC heißt ein sphärisches Dreieck, für dessen Seiten die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks Pole sind. Zu jedem sphärischen Dreieck ABC existiert ein Polardreieck $A'B'C'$. Ist das Dreieck $A'B'C'$ das Polardreieck des sphärischen Dreiecks ABC , dann ist auch das Dreieck ABC das Polardreieck des Dreiecks $A'B'C'$. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks und die entsprechenden Seiten seines Polardreiecks sind Supplementwinkel, ebenso wie die Seiten des sphärischen Dreiecks und die Winkel des Polardreiecks Supplementwinkel sind:

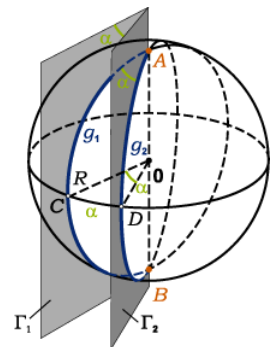
$$a' = 180^\circ - \alpha \quad b' = 180^\circ - \beta \quad c' = 180^\circ - \gamma$$

Sphärisches Zweieck

Durch die Endpunkte A und B eines Kugeldurchmessers sollen zwei Ebenen Γ_1 und Γ_2 verlaufen, die den Winkel α miteinander einschließen und zwei Großkreishälften g_1 und g_2 definieren.

Der von zwei Großkreishälften begrenzte Teil der Kugeloberfläche wird sphärisches Zweieck oder Kugelzweieck genannt. Als Seiten des sphärischen Zweiecks werden die sphärischen Abstände zwischen den Punkten A und B auf den Großkreisen definiert. Jede Seite beträgt daher 180° .

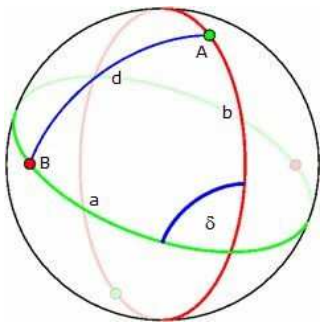
Als Winkel des sphärischen Zweiecks werden die Winkel zwischen den Tangenten an die Großkreise g_1 und g_2 in den Punkten A und B definiert. Sie sind gleich und stimmen mit dem sogenannten Keilwinkel α zwischen den Ebenen Γ_1 und Γ_2 überein. Sind C und D die Halbierungspunkte der beiden Großkreisbögen durch A und B , dann kann der Winkel α auch als sphärischer Abstand der Punkte C und D aufgefasst werden. Die Fläche A_z des Kugelzweiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie der Winkel α zu 360° . Daraus folgt $A_z = 4\pi R^2 \alpha / 360^\circ = 2R^2 \alpha / \rho = 2R^2 \arccos \alpha$.



Dualität auf der Kugel

Die sphärische Geometrie ist eine projektive Geometrie. In der projektiven Geometrie lassen sich alle Sätze dualisieren, das heißt, die Begriffe Punkt und Gerade werden vertauscht; demzufolge auch Längen und Winkeln.

Auf der Kugel lässt sich sogar jeder Geraden a ihr dualer Punkt A sowie umgekehrt jedem Punkt A seine duale Gerade a eindeutig zuweisen. Zu einem Kreis erhält man das duale Punktepaar als Schnittpunkte der Kugel mit der durch den Kugelmittelpunkt verlaufenden Senkrechten zur Ebene des Kreises.



Bei der Dualisierung bleibt die Inzidenz von Punkten und Geraden erhalten. Es gilt:

Wenn ein Punkt A auf einer Geraden b liegt, so verläuft die zu ihm duale Gerade a durch den zur Geraden b dualen Punkt B .

Aber nicht nur die Inzidenz bleibt erhalten, sondern auch Winkel und Längen gehen ineinander über. Das Maß d des Winkels zwischen zwei Geraden a und b entspricht auf der Einheitskugel dem Maß des Abstands d zwischen den zu den Geraden dualen Punkten A und B .

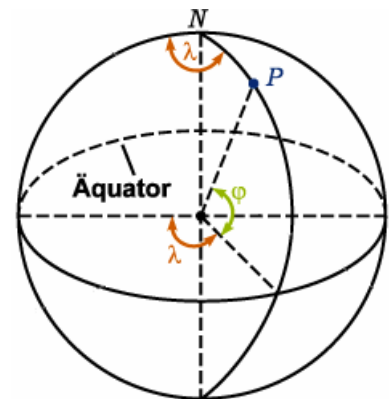
Geographische Koordinaten

Zur Bestimmung von Punkten P auf der Erdoberfläche werden geographische Koordinaten benutzt, d.h. Kugelkoordinaten mit dem Radius der Erdkugel, der geographischen Länge λ und der geographischen Breite ϕ .

Längengradeinteilung

Zur Längengradzählung ist die Erdoberfläche in halbe, vom Nordpol zum Südpol verlaufende Großkreise, die Meridiane, eingeteilt. Der Nullmeridian verläuft durch die Sternwarte Greenwich.

Von ihm aus erfolgt die Zählung mit Hilfe von 180 ganzzahligen Meridianen östlicher Länge (ö.L.) und 180 ganzzahligen Meridianen westlicher Länge (w.L.), die am Äquator einen gegenseitigen Abstand von 111 km haben. Östliche Längen werden positiv, westliche Längen negativ angegeben.



Breitengradeinteilung

Zur Breitengradzählung ist die Erdoberfläche in parallel zum Äquator verlaufende Kleinkreise, die Breitengrade, eingeteilt. Vom Äquator aus, einem Großkreis, zählt man 90 ganzzahlige Breitengrade nördlicher Breite (n.Br.) und 90 südlicher Breite (s.Br.). Nördliche Breiten werden positiv, südliche Breiten negativ angegeben.

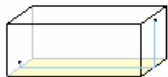
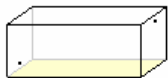
Geodätische Linie

Durch jeden Punkt einer Fläche $M(u;v)$ kann in jeder durch den Differenzialquotienten dv/du bestimmten Richtung auf der Fläche eine gedachte Kurve verlaufen, die geodätische Linie genannt wird. Sie spielt auf der Fläche die gleiche Rolle wie die Gerade auf der Ebene und zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus:

1. Die geodätischen Linien sind die Linien der kürzesten Entfernung zwischen zwei Punkten auf einer Fläche.

2. Wenn ein materieller Punkt, der gezwungen ist, auf einer vorgegebenen Fläche zu bleiben, von einem anderen auf der gleichen Fläche befindlichen materiellen Punkt angezogen wird, dann bewegt er sich in Abwesenheit anderer äußerer Kräfte auf einer geodätischen Linie.

3. Wird ein elastischer Faden über eine vorgegebene Fläche gespannt, dann nimmt er die Form einer geodätischen Linie an.



Beispiel für eine geodätische Linie

Fliege-Spinne-Problem

In einem quaderförmigen Raum mit den Maßen $30' \times 12' \times 12'$ ($9,14 \text{ m} \times 3,65 \text{ m} \times 3,65 \text{ m}$) sitzt eine Spinne oben rechts auf einer Seitenfläche in der Mitte, 1 Fuß von der Decke entfernt. Eine Fliege sitzt unten auf der gegenüberliegenden Wand auch in der Mitte und 1 Fuß vom Boden entfernt. Die Fliege ist vor Angst gelähmt und bewegt sich nicht.

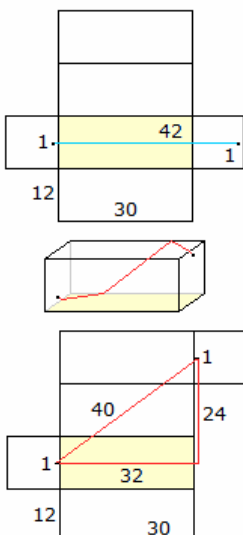
Welches ist der kürzeste Weg, den die Spinne zurücklegen muss, um die Fliege zu erreichen?

Die nahe liegende Lösung ist der direkte Weg. Er beträgt 42 Fuß.

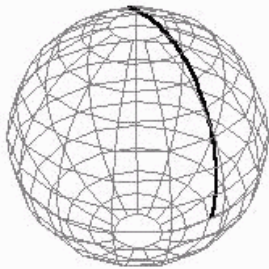
Allerdings existiert ein kürzerer Weg. Man betrachtet ein passendes Netz des Quaders und zeichnet eine gerade Linie als kürzeste Verbindung ein.

Dieser Weg ist kürzer und nach dem Satz des Pythagoras 40 Fuß lang. Es gibt noch eine zweite, spiegelbildliche Lösung.

Eine solche Linie heißt geodätische Linie. Sie besteht aus fünf Streckenabschnitten, lässt sich aber auf eine Strecke zurückführen.



Martin Gardner beschreibt das Rätsel in einem Artikel über Dudeney ("Henry Ernest Dudeney: Englands größter Rätselerfinder"). Dudeney veröffentlichte das Problem 1903 in einer englischen Zeitung. Es wurde bekannt, als es 1905 in der "Daily Mail" abgedruckt wurde.



Orthodrome, Großkreis

... der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf einer Kugel
gegeben: Kugelradius r , zwei Punkt P_1, P_2 mit den Breitengraden δ_1, δ_2 und den Längengraden λ_1, λ_2

Abstand der zwei Punkte

$$d = r \arccos(\cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin \delta_1 \sin \delta_2)$$

Für Berechnungen auf der Erde ist $r = 6378$ km zu setzen. Die in der Realität auftretende Abplattung der Erde kann bei diesen einfachen Berechnungen nicht berücksichtigt werden.

Länge in Meter von 1' der geografischen Länge bzw. Breite auf der Erdkugel

geogr. Breite	1' der Länge	1' der Breite	Fallbeschleunigung g in m/s^2
0°	1855,398	1842,925	9,780350
15°	1792,580	1844,170	9,783800
30°	1608,174	1847,580	9,793238
45°	1314,175	1852,256	9,806154
60°	930,047	1856,951	9,819099
75°	481,725	1860,401	9,828593
90°	0	1861,666	9,832072

Sind die geografischen Koordinaten zweier Punkte auf der Erdoberfläche gegeben, so kann der kürzeste Abstand s zwischen diesen Punkten, die Orthodrome, berechnet werden.

Geht man von einer idealen Kugelform der Erde aus, so erhält man eine höhere Genauigkeit nach Andoyer (1950) mit folgender Berechnungsvorschrift.

Es seien a der Äquatorradius, f die Abplattung der Erde und ϕ_1, λ_1 bzw. ϕ_2, λ_2 die geografischen Koordinaten der zwei Punkte. Dann wird berechnet:

$$F = (\phi_1 + \phi_2) / 2$$

$$G = (\phi_1 - \phi_2) / 2$$

$$L = (\lambda_1 - \lambda_2) / 2$$

$$S = \sin^2 G \cos^2 L + \cos^2 F \sin^2 L$$

$$C = \cos^2 G \cos^2 L + \sin^2 F \sin^2 L$$

$$\tan \omega = \sqrt{S / C}$$

$$R = \sqrt{(SC) / \omega} ; \omega \text{ im Bogenmaß}$$

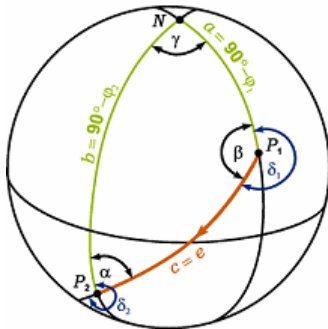
$$D = 2\omega a$$

$$H_1 = (3R - 1) / (2C)$$

$$H_2 = (3R + 1) / (2S)$$

und für den Abstand

$$s = D (1 + fH_1 \sin^2 F \cos^2 G - fH_2 \cos^2 F \sin^2 G)$$



Loxodrome

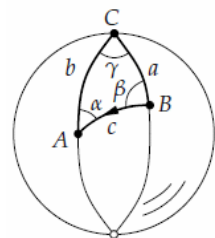
Unter einer Loxodrome versteht man die Linie, die alle Meridiane unter dem gleichen Winkel schneidet und deswegen eine konstante und somit einfache Kursvorausberechnung ermöglicht.

Bei Kurzstreckenflügen ist die Differenz zwischen loxodromischer und kürzester Distanz unwesentlich, bei Kontinentalflügen kann der Unterschied jedoch beträchtlich sein.

Anhand der Weltkugel wird klar, dass die Loxodrome (violette Farbe 9.493 km) - also die kurskonstante Flugstrecke - einen erheblichen Umweg gegenüber der kürzesten Verbindung (hellblau $d = 6.520$ km) von Helsinki nach Anchorage darstellt. Man bezeichnet die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 auf einer Fläche F als geodätische Linie.

Der portugiesische Mathematiker Pedro Nunez (1492-1577) erkannte als erster, dass ständige Kursänderungen den Weg zwischen weit entfernten Orten erheblich verkürzen können.

Wichtige Untersuchungen zur Loxodrome stammen auch von Stevin (1608) und Snellius (1624), der der Kurve auch ihren Namen gab.



Sphärische Trigonometrie-Anwendung

1) Schiffsfahrt von San Diego (Kalifornien) nach Honolulu (Hawaii)

Aufgabe: Wie weit ist die kürzeste Entfernung zwischen diese beiden Hafenstädten?

Mit welchem Winkel β muss das Schiff in San Diego starten?

Lösung: Beide Städte besitzen die folgenden geographischen Koordinaten:

A Honolulu: 22° nördliche Breite, 157° westliche Länge

B San Diego: 33° nördliche Breite, 117° westliche Länge

In der Abbildung gilt:

$$\gamma = 157^\circ - 117^\circ = 40^\circ, a = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ, b = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$$

und $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

$$\cos \beta = (\cos b - \cos a \cos c) / (\sin a \sin c)$$

Das ergibt sich $c = 37^\circ$ und $\beta = 97^\circ$. Der Radius der Erde beträgt $R = 6370$ km. Somit ist die Dreieckseite c

$$c = R \cdot 2\pi \cdot c^\circ / 360^\circ = 4100 \text{ km.}$$

2) Transatlantikflug von Kopenhagen nach Chicago

Wie weit ist die kürzeste Entfernung zwischen diese beiden Städten? Mit welchem Winkel β muss das Flugzeug starten?

Lösung: Beide Städte besitzen die geographischen Koordinaten

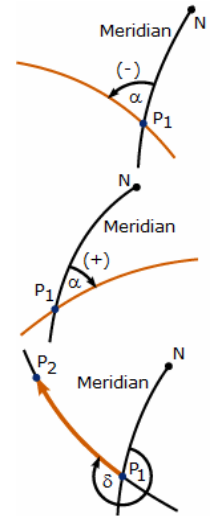
A Chicago: 42° nördliche Breite, 88° westliche Länge,

B Kopenhagen: 56° nördliche Breite, 12° östliche Länge.

Analog zu oben wird

$$\gamma = 100^\circ, a = 34^\circ, b = 38^\circ \quad \text{und} \quad c = 54^\circ$$

d.h. $c = 6000 \text{ km}$. Der Winkel β wird 82° .



Winkel bei sphärischen Kurven

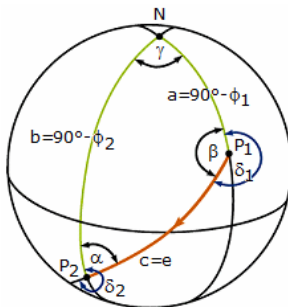
Schnittwinkel, Kurswinkel und Azimut

Unter dem Schnittwinkel zweier sphärischer Kurven versteht man den Winkel, den ihre Tangenten im Kurvenschnittpunkt P_1 bilden. Ist eine der beiden Kurven ein Meridian, dann wird der Schnittwinkel der nördlich von P_1 gelegenen Kurvenabschnitte in der Navigation Kurswinkel α genannt.

Zur Beschreibung der östlichen und westlichen Neigung der Kurve ordnet man dem Kurswinkel der beiden obersten Abbildungen ein Vorzeichen zu und beschränkt ihn auf das Intervall $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Der Kurswinkel ist ein orientierter, d.h. mit einem Vorzeichen versehener Winkel. Er ist unabhängig von der Orientierung der Kurve - das ist ihr Durchlaufsin. Die Orientierung der Kurve von P_1 nach P_2 in der untersten Abbildung wird durch das Azimut δ beschrieben: Es ist der Schnittwinkel zwischen dem durch den Kurvenschnittpunkt P_1 verlaufenden und nach Norden weisenden Meridian und dem von P_1 nach P_2 verlaufenden Kurvenabschnitt. Man beschränkt das Azimut auf das Intervall $0^\circ \leq \delta < 360^\circ$.

Hinweis: In der Navigation werden die Ortskoordinaten meist in sexagesimalen Altgraden, sphärische Abstände sowie Kurswinkel und Azimute dagegen in dezimalen Altgraden angegeben.



Kurswinkel

Berechnung der Kurswinkel δ_1 und δ_2 bei Abfahrt und Ankunft sowie die Entfernung in Seemeilen für eine Schiffsreise auf einem Großkreis von einem Ort λ_1, ϕ_1 zu einem anderen Ort λ_2, ϕ_2

Lösung:

Die Berechnung der zwei Seiten $a = 90^\circ - \phi_1$, $b = 90^\circ - \phi_2$ sowie des eingeschlossenen Winkels $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$ im sphärischen Dreieck P_1P_2N mit den geographischen Koordinaten (λ_1, ϕ_1) , (λ_2, ϕ_2) mit Hilfe des Kosinussatzes $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma = \cos e$

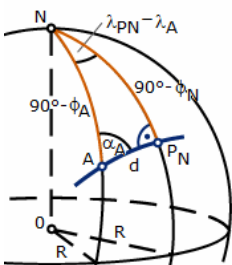
Mit dem Seitenkosinussatz $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ erhält man

$$\alpha = \arccos((\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c))$$

$$\beta = \arccos((\cos b - \cos a \cos c) / (\sin a \sin c))$$

und somit

$$\delta_1 = 360^\circ - \beta; \quad \delta_2 = 180^\circ + \alpha$$



Nordpolnächster Punkt und Äquatorschnittpunkte

Nordpolnächster Punkt

Die Koordinaten des nordpolnächsten Punktes $P(\lambda_N, \phi_N)$ einer Orthodrome mit dem Kurswinkel α durch den Punkt $A(\lambda_A, \phi_A)$ ergeben sich unter Berücksichtigung seiner relativen Lage zu P_N sowie des Vorzeichens von α nach der Neperschen Regel entsprechend der Abbildung als:

$$\phi_N = \arccos(\sin |\alpha| \cos \phi_A)$$

$$\lambda_N = \lambda_A + \text{sgn}(\alpha) \cdot \arccos(\tan \phi_A / \tan \phi_N) \mid$$

Äquatorschnittpunkte

Die Äquatorschnittpunkte $P_1(\lambda_1, 0^\circ)$ und $P_2(\lambda_2, 0^\circ)$ der Orthodrome ergeben sich wegen

$$\tan \phi_N \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_N) = 0$$

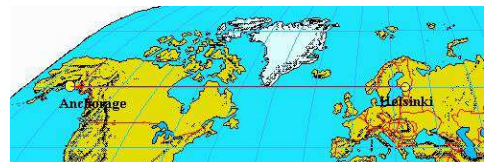
$$\tan \phi_N \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_N) = 0$$

zu $\lambda_1 = \nu_N - 90^\circ$

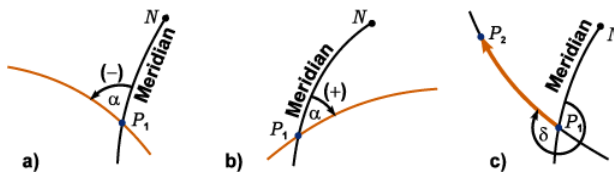
$$\lambda_2 = \nu_N + 90^\circ$$

Schnittwinkel, Kurswinkel und Azimut

Unter dem Schnittwinkel zweier sphärischer Kurven versteht man den Winkel, den ihre Tangenten im Kurvenschnittpunkt P_1 bilden. Ist eine der beiden Kurven ein Meridian, dann wird der Schnittwinkel der nördlich von P_1 gelegenen Kurvenabschnitte in der Navigation Kurswinkel α genannt. Zur Beschreibung der



östlichen und westlichen Neigung der Kurve ordnet man dem Kurswinkel gemäß Teil a) und b) der Abbildung ein Vorzeichen zu und beschränkt ihn auf das Intervall $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.



Der Kurswinkel ist ein orientierter, d.h. mit einem Vorzeichen versehener Winkel. Er ist unabhängig von der Orientierung der Kurve - das ist ihr Durchlaufsin. Die Orientierung der Kurve von P_1 nach P_2 gemäß Teil c) der Abbildung wird durch das Azimut δ beschrieben: Es ist der Schnittwinkel

zwischen dem durch den Kurvenschnittpunkt P_1 verlaufenden und nach Norden weisenden Meridian und dem von P_1 nach P_2 verlaufenden Kurvenabschnitt. Man beschränkt das Azimut auf das Intervall $0^\circ \leq \delta < 360^\circ$. Hinweis: In der Navigation werden die Ortskoordinaten meist in sexagesimalen Altgraden, sphärische Abstände sowie Kurswinkel und Azimute dagegen in dezimalen Altgraden angegeben.

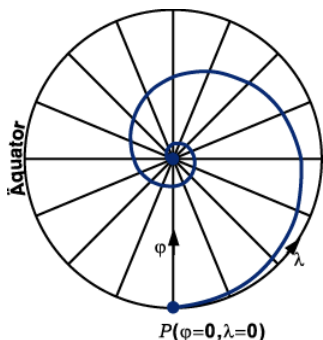
Schnittpunkte mit einem Meridian

Die Berechnung der geographischen Breiten der Schnittpunkte $Y_1(\lambda_Y, \varphi_1)$ und $Y_2(\lambda_Y, \varphi_2)$ des Kleinkreises mit dem Meridian $\lambda = \lambda_Y$ erfolgt mit den Gleichungen

$$\varphi_n = \arcsin((-AC \pm B \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}) / (A^2 + B^2)) \quad n = 1, 2$$

wobei gilt: $A = \sin \varphi_M$ $B = \cos \varphi_M \cos(\lambda_Y - \lambda_M)$ $C = -\cos r$

Für $A^2 + B^2 > C^2$ gibt es im allgemeinen zwei verschiedene Lösungen, von denen jedoch eine entfällt, wenn ein Pol im Kleinkreis liegt. Gilt $A^2 + B^2 = C^2$ und liegt keiner der Pole im Kleinkreis, dann berührt der Meridian den Kleinkreis in einem Tangierpunkt mit der geographischen Breite $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_T$.



Loxodromen - ausgenommen Breitenkreise und Meridiane - wickeln sich spiralförmig-asymptotisch um die Pole. Die unendlich vielen Schnittpunkte $Y_n(\lambda_Y, \varphi_n)$, $n=0,1,2,\dots$ der durch $A(\lambda_A, \varphi_A)$ mit dem Kurswinkel α verlaufenden Loxodrome mit dem Meridian $\lambda = \lambda_Y$ berechnen sich zu

$$\varphi_n = 2 \arctan(\exp((\lambda_Y - \lambda_A + n 360^\circ) / \tan \alpha \pi / 180^\circ) \tan(45^\circ + \varphi_A / 2)) - 90^\circ$$

Ist A der Äquatorschnittpunkt $P_{Ae}(\lambda_{Ae}, 0^\circ)$ der Loxodrome, dann ergibt sich vereinfacht:

$$\varphi_n = 2 \arctan(\exp((\lambda_Y - \lambda_{Ae} + n 360^\circ) / \tan \alpha \pi / 180^\circ)) - 90^\circ$$

Schnittpunkte mit einem Breitenkreis

Für die Schnittpunkte $X_1(\lambda_1, \varphi_X)$ und $X_2(\lambda_2, \varphi_X)$ einer Orthodrome mit dem

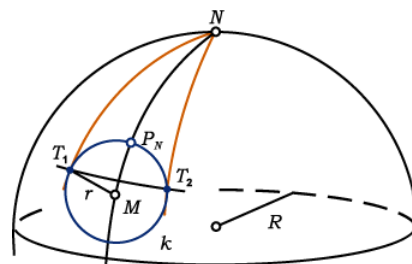
Breitenkreis $\varphi = \varphi_X$ ergibt sich

$$\lambda_{Xn} = \lambda_N \pm (-\arccos(\tan \varphi_X / \tan \varphi_N)) \quad n = 1, 2$$

Nach der Napierschen Regel gilt für die beiden Schnittwinkel α_1 und α_2 , unter denen eine Orthodrome mit dem nordpolnächsten Punkt $P_N(\lambda_N, \varphi_N)$ den Breitenkreis $\varphi = \varphi_X$ schneidet:

$$|\alpha_{Xn}| = \arcsin(\cos \varphi_N / \cos \varphi_X) \quad n = 1, 2$$

Für den minimalen Kurswinkel $|\alpha_{\min}|$ muss das Argument in der Arkussinusfunktion hinsichtlich der Variablen φ_X extremal sein. Man erhält: $\sin \varphi_X = 0 \rightarrow \varphi_X = 0$, d.h., in den Schnittpunkten mit dem Äquator ist der Betrag des Kurswinkels minimal: $|\alpha_{\min}| = 90^\circ - \varphi_N$.



Der Schnittpunkt $X(\lambda_X, \varphi_X)$ einer Loxodrome mit dem Kurswinkel α durch den Punkt $A(\lambda_A, \varphi_A)$ mit dem Breitenkreis $\varphi = \varphi_X$ berechnet sich zu

$$\lambda_X = \lambda_A + \tan \alpha \ln(\tan(45^\circ + \varphi_X / 2) / \tan(45^\circ + \varphi_A / 2)) \cdot 180^\circ / \pi \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

Es lässt sich speziell der Äquatorschnittpunkt $P_A(\lambda_{Ae}, 0^\circ)$ berechnen

$$\lambda_{Ae} = \lambda_A - \tan \alpha \ln(\tan(45^\circ + \varphi_A / 2)) \cdot 180^\circ / \pi \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

Tangierpunkte

Der Kleinkreis wird von zwei Meridianen, den Tangiermeridianen, in den Tangierpunkten $T_1(\lambda_1, \varphi)$ und $T_2(\lambda_2, \varphi)$ berührt.

Aus der Forderung, dass für sie das Argument des Arkuskosinus hinsichtlich der Variablen φ_X extremal sein muss, erhält man: $\varphi = \arcsin(\sin \varphi_M / \cos r)$,

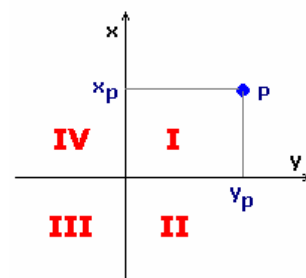
$$\lambda = \lambda_M \pm (-\arccos((\cos r - \sin \varphi_X \sin \varphi_M) / (\cos \varphi_X \cos \varphi_M)))$$

Geodätische rechtwinklige Koordinaten

Im ebenen linkshändigen rechtwinkligen Koordinatensystem der Geodäsie ist die x-Achse die nach oben weisende Abszisse, die y-Achse die nach rechts weisende Ordinate.

Ein Punkt P besitzt die Koordinaten $(y_p; x_p)$.

Die Ausrichtung der x-Achse erfolgt nach praktischen Erwägungen. Bei Messungen über größere Distanzen, für die meist das Soldner-System oder



das Gauß-Krüger-System verwendet wird, zeigt die positive x-Achse nach Gitter-Nord, die nach rechts weisende y-Achse nach Osten.

Die Zählung der Quadranten erfolgt im Gegensatz zu der in der Geometrie sonst üblichen Praxis im Uhrzeigersinn.

Maßstab

Maßstab M nennt man im Karten- und Zeichenwesen das Verhältnis von Strecken s_1 in einem Koordinatensystem K_1 relativ zu einer Strecke s_2 in einem anderen Koordinatensystem K_2 .

Maßstabsumrechnung für Strecken: Mit m als Modul oder Maßzahl und N als Index für Natur und K als Index für Karte gilt

$$M = 1 : m = s_K : s_N$$

Für zwei Strecken s_1, s_2 mit verschiedenen Modulen m_1, m_2 gilt $s_1 : s_2 = m_2 : m_1$

Maßstabsumrechnung für Flächen: Wenn die Flächen mit $F_K = a_K b_K, F_N = a_N b_N$ berechnet werden, gilt $F_N = F_K m^2$

Für zwei Flächen F_1, F_2 mit verschiedenen Modulen m_1, m_2 gilt $F_1 : F_2 = m_2^2 : m_1^2$

Historische Ereignisse der mathematischen Geographie

Eratosthenes bestimmt den Erdumfang (für damalige Verhältnisse sehr genau), weiterhin führt er Längen- und Breitenkreis ein.

Hipparch bestimmt Ortspositionen mittels Längen- und Breitenkreisen, als Nullmeridian legt er einen Großkreis durch Rhodos / über die Beobachtung der Mondbewegung findet er die Differenz zwischen absoluter und Ortszeit

Ptolemäus schreibt ein Buch über Geographie in dem er Anweisungen zur Konstruktion von Karten gibt.

Für verschiedene Orte Europas, Afrikas und Asiens gibt er die Koordinaten an. Allerdings nutzte er einen zu kleinen Erdradius (obwohl bessere Werte schon lange bekannt waren)

- 10. Jh. Abu'l-Wafa, Mansur und al-Biruni schreiben Werke über Geographie. Letzterer definiert Längen- und Breitenkreise. Außerdem glaubt er, dass die Erde um ihre eigene Achse rotiert
- 1493 erklärt Papst Alexander VI alles Land westlich einer Linie von 100 Leagues (Seewegstunden) bzgl. der Azoren zum spanischen Territorium, östlich davon portugiesisch
- 1514 übersetzt Johann Werner das Ptolemäische Werk und erläutert eine Methode zur Längenbestimmung mittels Mondbewegung
- 1529 Nunez wird zum führenden Geographen zur Längenkreisbestimmung, u.a. ermittelt er die Entfernung der Gewürzinseln zu Spanien
- 1530 Gemma Frisius ermittelt Längenkreise mit Hilfe einer Uhr; erst 250 Jahre später wird seine Methode bewiesen
- 1598 ein Preis von 6000 Dukaten und 2000 Dukaten lebenslänglich wird von Phillip III. von Spanien für eine Methode zur Längenkreisbestimmung ausgeschrieben
- 1616 arbeitet Galilei an einer erfolgversprechenden Lösung; da er vor der Fertigstellung von der Inquisition unter Hausarrest gestellt wurde, war ein Kontakt zum streng katholischen Spanien nicht mehr möglich; nach dem Tode Galileis verlor Spanien das Interesse an dessen Verfahren
- 1630 Kardinal Richelieu, Premierminister von 1624 bis 1642 unter Louis XIII. in Frankreich, beruft eine Kommission mit Etienne Pascal, Mydorge, Beaugrand, Herigone, Boulenger und de la Porte zur Lösung des Problems
- 1634 Jean-Baptiste Morin greift Frisius Idee auf und versucht eine transportable Uhr zu konstruieren;
- 1642 erhält er von Richelieus Nachfolger Kardinal Mazarin einen Preis von 2000 Livres
- 1656 Huygens gelingt die Konstruktion einer Pendeluhr
- 1662 Charles II gründet am Gresham College die Royal Society of London of Promotion of Natural Knowledge, welcher John Wilkins, J.Wallis und Robert Hooke angehören. Christopher Wren schrieb die Royal Society Charta, in welcher die Beschäftigung mit der Bestimmung der Longitude explizit hervorgehoben wird
- 1666 am 22. Dezember gründet Jean-Baptiste Colbert, ein Vertrauter Mazarins und Louis XIV., die Pariser Akademie der Wissenschaften, der die 15 führenden Wissenschaftler angehören, darunter Huygens, Leibniz, Tschirnhaus, Hevelius, Viviani, Romer und Newton. Diese sollen u.a. das immer noch offene Problem der Längenkreisbestimmung lösen
- 1669 Graindorge stellt eine neue Methode vor, welche von Huygens und Jean Picard als nutzbar anerkannt wird
- 1669 Huygens versucht seine Uhr zu vervollkommen. U.a. gelingt es ihm die Distanz zwischen Toulon und Kreta auf $20^{\circ}30'$ zu bestimmen. Da der wahre Wert $20^{\circ}13'$ ist, beträgt die Differenz nur 100 km, für damalige Verhältnisse sehr gut
- 1669 Picard gelingt über Triangulation die Bestimmung des Erddurchmessers zu 57060 toises = 12554 km (wahrer Wert 12756 km)
- 1670 Cassini veröffentlicht Erdkarten mit dem Nordpol als Zentrum
- 1672 Picard unternimmt eine Expedition nach Cayenne und erreicht, dass seine Uhr nur 2,5 Minuten je Tag falsch geht

Winkeltreue Karten, Kartenkunde

Mercator-Karte (Zylinderprojektion)

Lambert-Karte (Kegelprojektion)

Stereographische Karte (Azimutalprojektion)

Mercator-Karte

ist eine Zylinderprojektion welche gerechnet ($1:\cos \text{lat}$) ist, und erst somit winkeltreu wird. (Gerhard Kremer 1512 - 1594)

Normale Mercatorkarte:

Der Behührungskreis ist der Äquator. Meridiane sowie die Breitenkreise verlaufen parallel und stehen senkrecht zueinander. Der Abstand der Breitenkreise nimmt mit zunehmender Latitude stark zu.

Transversale Mercatorkarte

Den Behührungskreis bilden zwei sich gegenüberliegende Meridiane. Meridiane in Polnähe sind praktisch Geraden, die gegen den Äquator hin immer gekrümmter verlaufen. Breitenkreise sind Ellipsen, welche alle Meridiane senkrecht schneiden.

Schiefwinklige Mercatorkarte

Berührungskreis ist ein beliebiger, schief zur Erdachse verlaufender Grosskreis. Die Meridiane sind leicht gerümmt und laufen gegen den Pol zusammen. Die Breitenkreise erscheinen ebenfalls als gekrümmte Linien, welche alle Meridiane senkrecht schneiden.

Lambert-Karte

J.H. Lambert hat erstmals die geometrisch projizierte Kegelkarte gerechnet und somit winkeltreu gemacht.

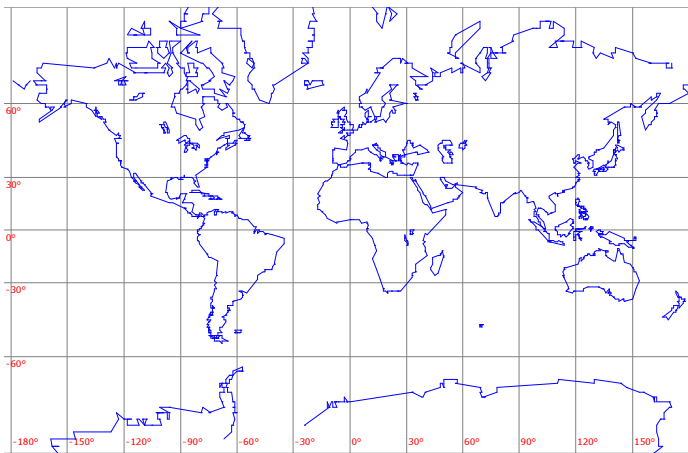
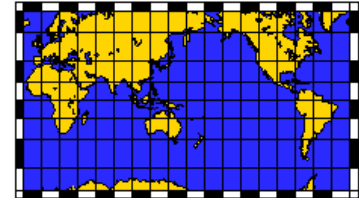
Die Meridiane laufen als Geraden polwärts zusammen. Die Breitenkreise erscheinen als konzentrische Kreisbogen, welche alle Meridiane unter rechten Winkeln schneiden.

Die wichtigste Navigationskarte ist die Lambert-Karte mit zwei „standard parallels“. Die mittlere Breite zwischen den beiden standard parallels („Behührungskreise“) wird als mit latitude bezeichnet.

Stereographische Karte

... ist geeignet für Polgegenden.

Die Meridiane sind Geraden. Die Breitenkreise verlaufen als konzentrische Kreise, deren gegenseitiger Abstand in Richtung gegen den Äquator immer grösser wird. Meridiane und Breitenkreise schneiden sich unter rechten Winkeln.



Mercator Projektion

Wahrscheinlich die berühmteste Projektion. Sie erhielt ihren Namen von Mercator, der diese Projektion 1569 vorstellte.

Sie ist eine winkeltreue, zylindrische Projektion und besitzt keine Verzerrung am Äquator. Ihre für die Navigation wichtige Eigenschaft besteht darin, dass eine Linie konstanten Azimuths gerade erscheint. Eine solche Linie heißt auch Loxodrom.

Will man von einem Punkt zu einem anderen gelangen (z.B. in der Seefahrt), so braucht man die Punkte auf einer Mercator-Karte nur mit dem Lineal zu verbinden, und erhält so den Kurs für die Reise. Mercator-Projektionen

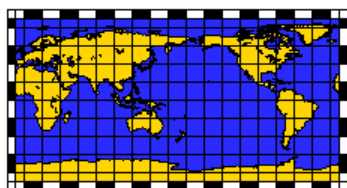
werden häufig für Weltkarten verwendet, wobei die Verzerrung für die Polar-Gebiete sehr stark wächst. So entsteht zum Beispiel der falsche Eindruck, Grönland sei größer als Süd-Amerika, oder die ehemalige Sowjetunion größer als Afrika.

Die Mercator-Projektion erzeugt rechteckige Darstellungen des Gebiets. Gebiete nördlich von 85°N und südlich von 85°S werden nicht dargestellt.

Sind λ die geographische Länge eines Ortes, λ_0 die Länge des Kartenmittelpunktes und ϕ die geographische Breite des Ortes, so ergeben sich die Kartenkoordinaten mit $x = \lambda - \lambda_0$

$$y = \ln(\tan(\pi/4 + \phi/2)) = \operatorname{arsinh}(\tan \phi)$$

Abbildung: Erde in Mercator-Projektion



Äquidistant-Zylindrische Projektion

Diese einfache zylindrische Projektion ist in Wahrheit eine lineare Darstellung der Längen und Breiten. Meridiane und Breitenkreise erscheinen als gerade Linien. Die Projektion erzeugt rechteckige Darstellungen des Gebiets.

Zusätzlich zu den Meridianen wird auch der Äquator längentreu übertragen. Diese Plattkarte ist jedoch weder flächentreu noch winkeltreu.

Diese Projektionsart soll bereits auf die Phönizier zurückgehen.

Eine Karte wird als äquidistant bezeichnet, wenn sie Entfernungen vom Zentrum der Karte genauso wiedergibt, wie alle anderen Entfernungen auf der Karte.
 Unter äquidistant wird manchmal auch verstanden, wenn die Abstände im Netz der Längen- und Breitengrade auf der Karte gleich sind.



Lamberts Zylinderprojektion

Ein flächentreuer Zylinderentwurf kann geometrisch einfach realisiert werden.

Man legt einen Zylinder der Höhe 2 um die Einheitskugel und projiziert waagrecht nach außen. Diese Idee geht schon auf Archimedes zurück. Durch Lambert wurden die

differenzialgeometrischen Grundlagen geliefert. Diese Projektion ist genau am Äquator auch winkeltreu.

Presst man die Karte in Ost-West-Richtung zusammenpressen, bzw. zieht sie in Nord-Süd-Richtung auseinander, so gibt es in der nördlichen und südlichen Hemisphäre je eine geografische Breite, bei der die Karte winkeltreu wird. Soll bei der geografischen Breite ϕ die Projektion winkeltreu werden, so muss mit dem Faktor $\cos^2 \phi$ gestaucht bzw. gestreckt werden.

Für $\phi = 30^\circ$ ist $\cos^2 30^\circ = 3/4$ und man erhält die Karte von Walter Emmerich Behrmann (1882-1955) aus dem Jahr 1910. Sie ist winkeltreu für 30° N/S.

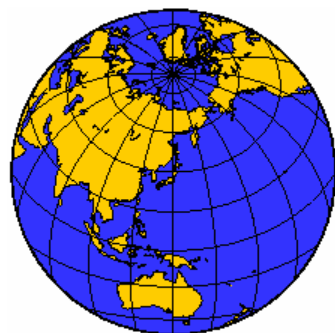
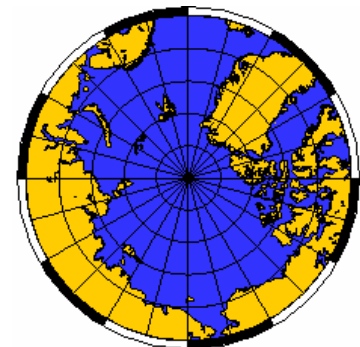
Für $\phi = 45^\circ$ ist $\cos^2 45^\circ = 1/2$. Diese Projektion wird nach Gall-Peters (James Gall, 1808-1895, und Arno Peters, 1916-2002) benannt. Sie ist winkeltreu für 45° N/S.

Polar-Stereografische Projektion

Diese stereografische Projektion; die stereografisch-winkeltreue Projektion mit der Polar-Stereographischen Projektion als besonderer Fall; ist eine winkeltreue Projektion, die auf die Griechen zurückgeht. Sie wird hauptsächlich verwendet, um polare Gebiete darzustellen. In der Pol-Darstellung sind die Meridiane gerade Linien und die Breitengrade erscheinen als Kreisbögen.

Bei einer Polar-Stereografischen Projektion erhält man Karten in Form eines Kreisausschnitts für West-Ost-Erstreckungen kleiner als 360° oder eines Kreises, wenn man eine West-Ost-Erstreckung von 360° für den Kartenausschnitt wählt.

Der Begriff "stereografische Projektion" wurde 1613 von François d'Aiguillon in seinem Werk "Opticorum libri sex philosophis juxta ac mathematicis utiles" (Sechs Bücher über Optik, für Philosophen und Mathematiker geeignet) eingeführt.



Flächentreue Lambert Azimutal Projektion

Diese Projektion wurde von Lambert im Jahre 1772 entwickelt und wird typischerweise für die Darstellung großer Gebiete und ganzer Hemisphären benutzt.

Es handelt sich um ein flächen- und winkeltreue Projektion, die Perspektive wird jedoch verzerrt. Diese Verzerrung ist gleich Null am Zentrum der Projektion, steigt aber mit der Entfernung davon an.

Eine Karte dieser Projektion erscheint als rechteckige Darstellung bei kleinen und mittleren Kartenausschnitten, für grössere Gebiete erscheint eine ganze Hemisphäre, wobei das vorgegebene Gebiet im Zentrum der Karte liegt.

Karten-Projektion mit $x = k' \cos \phi \sin(\lambda - \lambda_0)$
 $y = k' [\cos \phi_1 \sin \phi - \sin \phi_1 \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_0)]$
 mit $k' = \sqrt{2 / (1 + \sin \phi_1 \sin \phi + \cos \phi_1 \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_0))}$

Die umgekehrten Gleichungen sind

$$\phi = \arcsin(\cos c \sin \phi_1 + y \sin c \cos \phi_1 / \rho)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan(x \sin c / (\rho \cos \phi_1 \cos c - y \sin \phi_1 \sin c))$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $c = 2 \arcsin(\rho/2)$

Eine Karte ist flächentreu, wenn sie Flächen so darstellt, dass alle Flächen auf der Karte das gleiche Verhältnis zu den Flächen auf der Erde haben, die sie darstellen.

Beispiel: Afrika hat als zweitgrößter Kontinent eine Fläche von 29800000 km², Grönland als größte Insel der Erde nur 2175600 km², d.h. 13,7 mal kleiner.

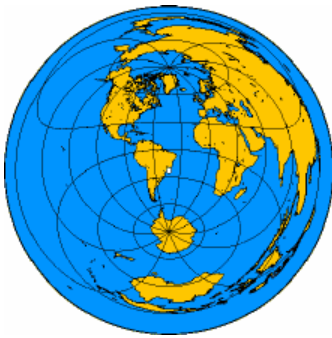
Auf einer Karte in Mercator Projektion sieht Grönland ebenso groß aus wie Afrika. Die azimutale Lambert Projektion hingegen ist flächengetreu und gibt Grönland im Flächenvergleich zu Afrika richtig wieder.



Mercator-Projektion



Lambert-Projektion



Azimuthal-Äquidistante Projektion

Die auffälligste Eigenschaft dieser winkeltreuen Projektion ist die Tatsache, dass Entfernungen vom Zentrum der Karte wahr sind. Schlägt man einen Kreis um das Zentrum, so verbindet dieser alle Orte mit gleichem Abstand vom Zentrum.

Darüber hinaus sind auch die Winkel zum Zentrum wahr. Diese Projektion gibt es als Pol-Darstellung schon seit einigen Jahrhunderten. Sie ist nützlich für eine globale Darstellung verschiedener Orte mit variierendem oder auch gleichem Abstand zu einem bestimmten Punkt; dem Kartenzentrum.

Sind ϕ_1 und λ_0 die Breite und die Länge des Projektionszentrums, so ergibt sich

$$x = k' \cos \phi \sin (\lambda - \lambda_0)$$

$$y = k' [\cos \phi_1 \sin \phi - \sin \phi_1 \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_0)]$$

mit $k' = c / \sin c$

$$c = \sin \phi_1 \sin \phi + \cos \phi_1 \cos \phi \cos (\lambda - \lambda_0)$$

c ist der Winkelabstand vom Zentrum. Erstmals wurde die azimuthal-äquidistante Projektion von dem arabischen Mathematiker Al-Biruni angegeben.

Orthografische Projektion

Die orthografisch-azimutale Projektion erzeugt eine Perspektive als schaue man aus sehr großer Entfernung (mit unendlichem Abstand) auf das Gebiet. Darum wird sie oft dafür verwendet, die Erde so darzustellen, als schaue man vom Weltraum aus.

Wie bei Lamberts flächentreuen Projektion kann immer nur eine Hemisphäre dargestellt werden. Diese Projektion ist weder flächentreu noch winkeltreu und die Ränder der Darstellung werden stark verzerrt. Richtungen vom Zentrum der Projektion sind wahr. Ägypter und Griechen kannten diese Projektion bereits vor mehr als 2000 Jahren.

geg.: Kugelkoordinaten ($O; r, \lambda, \theta$), Länge $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, Breite $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$, Radiusvektor r

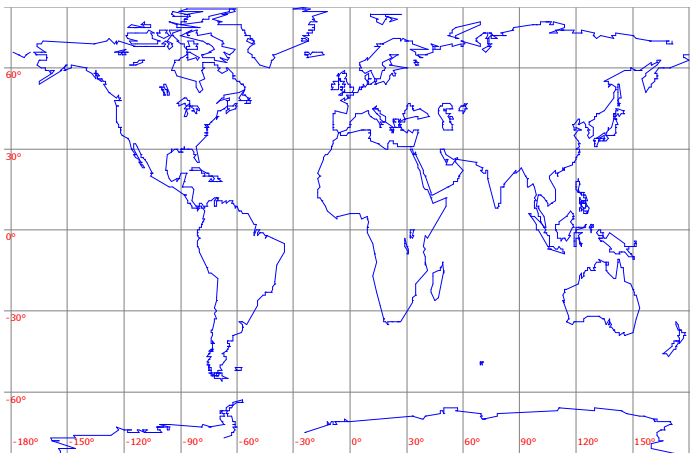
Umwandlung in kartesische Koordinaten bei zusätzlichem Drehen um Breitenwinkel α und Längewinkel β unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches für ϕ und λ

$$x' = -(\sin \alpha \cdot \sin \phi + \cos \alpha \cdot \cos \phi \cdot \cos(\beta-\lambda))$$

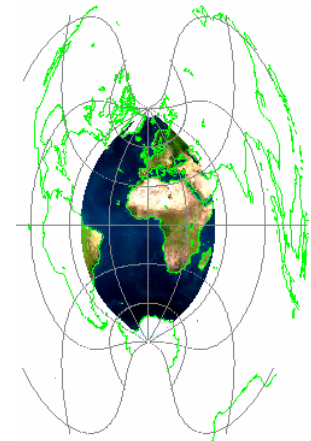
$$y' = \cos \phi \cdot \sin(\beta-\lambda)$$

$$z' = \sin(\alpha-\phi) - \cos \phi \cdot (1-\cos(\beta-\lambda)) \cdot \sin \alpha$$

Darstellungsidee: alle Punkte werden mit den Koordinaten (y' -radius ; z' -radius) gezeichnet, wenn deren x -Koordinate größer als Null ist



Erde in Rechteck-Projektion



Cassini-Projektion

Karten-Projektion mit

$$x = \arcsin (\cos \phi \sin(\lambda - \lambda_0))$$

$$y = \arctan [\tan \phi / (\cos(\lambda - \lambda_0))]$$

Die umgekehrten Gleichungen sind $\phi = \arcsin (\sin D \cos x)$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan (\tan x / \cos D)$$

wobei $D = y + \phi_0$



Mollweide-Projektion

Elliptische Kartenprojektion, die flächentreu ist mit

$$x = 2 \sqrt{2} (\lambda - \lambda_0) \cos \theta / \pi$$

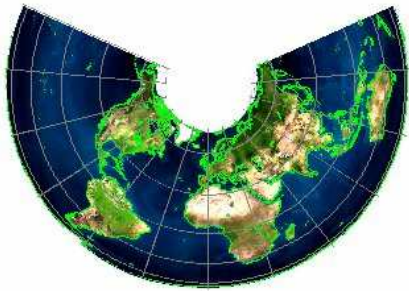
$$y = \sqrt{2} \sin \theta$$

wobei θ Lösung der Gleichung $2\theta + \sin(2\theta) = \pi \sin \phi$ ist

Die umgekehrten Gleichungen sind

$$\phi = \arcsin [(2\theta + \sin(2\theta)) / \pi] \quad \lambda = \lambda_0 + \pi x / (2 \sqrt{2} \cos \theta)$$

wobei $\theta = \arcsin (y / \sqrt{2})$



Albers flächentreue Kegelprojektion

ϕ_0 sei die Breite des Ursprungs in kartesischen Koordinaten und λ_0 deren Länge. ϕ_1 und ϕ_2 seien weiter zwei Standardparallele. Dann gelten für eine Einheitskugel die Umwandlungsformeln zur Alberschen flächentreuen Kegelprojektion für die geografischen Koordinaten (ϕ, λ) und die kartesischen Koordinaten (x, y)

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta & y &= \rho_0 - \rho \cos \theta \\ \text{mit } n &= 1/2 (\sin \phi_1 \sin \phi_2) & \theta &= n (\lambda - \lambda_0) \\ C &= \cos^2 \phi_1 + 2 n \sin \phi_1 & \rho &= 1/n \sqrt{C - 2n \sin \phi} \\ \rho_0 &= 1/n \sqrt{C - 2n \sin \phi_0} \end{aligned}$$

Für die Umkehrformeln ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi &= \arcsin ((C - \rho^2 n^2) / (2n)) & \lambda &= \lambda_0 + \theta/n \\ \text{mit } \rho &= \sqrt{x^2 + (\rho_0 - y)^2} & \theta &= \arctan (x / (\rho_0 - y)) \end{aligned}$$



Bonne-Projektion

Der Grundgedanke bei diesem Kartenentwurf ist, neben der Flächentreue, die Breitenkreise längentreu auf konzentrische Kreise abzubilden.

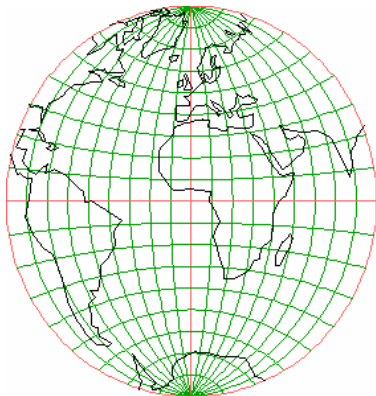
Der Entwurf wurde schon um 150 u.Z. von Claudius Ptolemäos für seine Karten verwendet, allerdings ohne Kenntnis der Flächentreue. Die genaue Beschreibung erfolgte durch Rigobert Bonne 1752.

Nordpol und Südpol entsprechen jeweils einem Punkt, dem Nullmeridian die Polarachse, die Breitenkreise werden längentreu auf konzentrische Kreise um den Nullpunkt abgebildet. Die Bilder der Meridiane sind transzendente Kurven mit der Polargleichung

$$t = \lambda \sin(r) / r$$

die die Polarachse in N berühren. Die zum Sonderfall $k = \pi/2$ gehörende

Karte wurde erstmals 1514 vom Nürnberger Mathematiker Johann Werner nach Angaben des Mechanikers Johann Stab gezeichnet.



Globularentwurf

Der Globularentwurf dient zur Abbildung einer Halbkugel, etwa zwischen dem Längengraden $\lambda = -90^\circ$ und $\lambda = +90^\circ$ und ist durch folgende Beschreibung festgelegt:

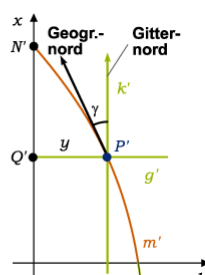
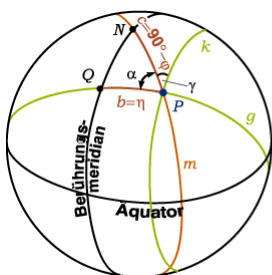
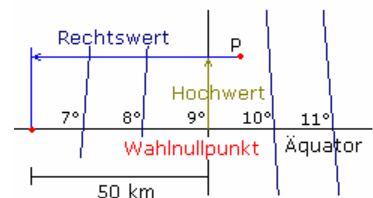
- 1) Die Bilder der Längen- und Breitenkreise sind Kreisbögen
- 2) Die beiden Grenzmeridiane werden längentreu auf den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ abgebildet
- 3) Der Äquator und der Mittelmeridian werden proportional auf die x- und die y-Achse abgebildet

Die Bilder aller weiteren Längen- bzw. Breitenkreise können als Umkreis eines Dreieckes konstruiert werden, das seine Ecken je nachdem auf dem Äquator bzw. dem Mittelmeridian und den Grenzmeridianen hat.

Der Globularentwurf wurde von dem arabischen Mathematiker Al-Biruni entdeckt.

Gauß-Krüger-Koordinaten

Um Teile der gekrümmten Erdoberfläche winkeltreu, d.h. konform, auf eine Ebene abzubilden, geht man beim Gauß-Krüger-System von einer Einteilung in Meridianstreifen aus. Für Deutschland liegen die Mittelmeridiane bei $6^\circ, 9^\circ, 12^\circ$ und 15° ö. L. Der Koordinatenursprung jedes Meridianstreifensystems ist der Schnittpunkt des Meridians mit dem Äquator. In der Nord-Süd-Richtung gehen die Systeme über das gesamte Gebiet hinweg, in der Ost-West-Richtung sind die Gebiete beidseitig auf $1^\circ 40'$ begrenzt. In Deutschland sind das etwa ± 100 km. Die Überlappung von etwa $20'$ entspricht hier ca. 20 km.



Aufgabe: Das Gradnetz einer Kugel ist auf einen Zylinder abzubilden, der die Kugel in einem Meridian berührt. Der Berührungsmeridian und der Äquator bilden die Achsen eines Gauß-Krüger-Systems.

Lösung: Ein Punkt P der Kugeloberfläche wird zu P' der Ebene. Der Großkreis g durch P senkrecht zum Berührungsmeridian bildet sich als Gerade g' senkrecht zur x-Achse und der Kleinkreis k durch P parallel zum Berührungsmeridian als Gerade k' parallel zur x-Achse ab. Der Meridian m durch P hat als Bild keine Gerade, sondern

eine Kurve m' . Die nach oben zeigende Richtung der Tangente von m' in P gibt die geographische Nordrichtung an, die nach oben zeigende Richtung von k' die geodätische Nordrichtung. Der Winkel γ zwischen beiden Nordrichtungen heißt Meridiankonvergenz .
 Im rechtwinklig sphärischen Dreieck QPN mit $c = 90^\circ - \varphi$ und $b = \eta$ ergibt sich γ aus $\alpha = 90^\circ - \gamma$. Nach der Neperschen Regel ist

$$\cos \alpha = \tan b / \tan c \text{ oder } \cos(90^\circ - \gamma) = \tan \eta / \tan(90^\circ - \varphi),$$

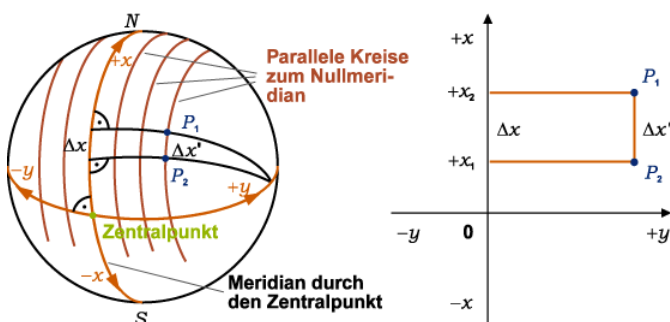
$$\sin \gamma = \tan \eta \tan \varphi.$$

Da γ und η meist klein sind, folgt mit $\tan \eta \approx \eta$, $\sin \gamma \approx \gamma$ daraus $\gamma = \eta \tan \varphi$. Die Längenverzerrung γ dieses Zylinderentwurfes ist bei kleinen Abständen η gering, und es kann $\eta = y/R$ gesetzt werden, wobei y der Rechtswert von P ist. Man erhält $\gamma = y/R \tan \varphi$.

Die Umrechnung von γ aus dem Bogen- ins Gradmaß ergibt zum Beispiel für $\varphi = 50^\circ$, $y = 100$ km eine Meridiankonvergenz von $\gamma = 0.018706$ bzw. $\gamma = 1^\circ 4' 19''$.

Soldner-Koordinaten

Für großräumige Vermessungen sind die rechtwinkligen Soldner-Koordinaten sowie die Gauß-Krüger-Koordinaten von Bedeutung. Um Teile der gekrümmten Erdoberfläche in Ordinatenrichtung längentreu auf ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem abzubilden, legt man nach Soldner die x-Achse auf einen Meridian und den Koordinatenursprung in einen gut vermessenen Zentralpunkt (linke Abbildung).



Die Ordinate y und die Abszisse x eines Punktes P sind durch die Strecken von den Fußpunkten der sphärischen Lote auf den durch den Zentralpunkt verlaufenden Hauptmeridian und auf den durch den Zentralpunkt verlaufenden Hauptbreitenkreis gegeben (rechte Abbildung). Bei der Übertragung der sphärischen Abszissen und Ordinaten in das ebene Koordinatensystem werden Strecken Δx gedehnt und Richtungen verschwenkt. Der Dehnungsfaktor a in der Abszissenrichtung beträgt

$$a = \Delta x / \Delta x' = 1 + y^2 / (2R^2), \quad R = 6371 \text{ km}$$

Zur Begrenzung der Dehnung des Systems darf die Ausdehnung zu beiden Seiten des Hauptmeridians nicht größer als 64 km betragen. Eine 1 km lange Strecke besitzt dann bei $y = 64$ km eine Dehnung von 0,05 m.



Kugelmodell der Erde

Für die Form der Erde kann näherungsweise eine Kugelgestalt angenommen werden. Nimmt man genauere Messungen bezüglich der Erde vor, so ist die Kugelform nicht mehr korrekt.

Geschichte:

- Pythagoras (582 v.u.Z.) beschreibt als einer der ersten die Kugelgestalt der Erde
- Aristoteles (384-322 v.u.Z.) schließt aus der Beobachtung eines stets kreisförmigen Erdschattens bei Mondfinsternissen auf die Kugelform der Erde
- die erste überlieferte Ermittlung von Umfang und Radius der Erde führte

der griechische Mathematiker Eratosthenes (276-195 v.u.Z.) durch, der im 3.Jahrhundert v.u.Z. Leiter der Bibliothek in Alexandria war

- eine weitere überlieferte Bestimmung gab Posidonius (135-51 v.u.Z.). Mit Winkelmessungen, die er in Rhodos und Alexandria vornahm, berechnete er einen Wert mit einer Abweichung von +11% vom mittleren Radius der Erde
- Im Kalifat von al-Mamun wurde 827 des Erdradius bestimmt. Dabei wurde aus Winkelmessungen ein Radius ermittelt, der eine Abweichung von +10% hat
- 1525 bestimmte der französische Arzt Fernel den Radius der Erde mit einer Abweichung von +0,1%
- der Niederländer W.Snell van Rojen konnte durch Triangulation mittels Keplerschen Fernrohres 1615 einen Erdradius bestimmen, der um -3,4% vom mittleren Radius abweicht
- mit einem Fernrohr mit Fadenkreuz führte der französische Abbe J.Picard 1669/70 zwischen Malvoisine und Amiens eine Gradmessung mittels Triangulation durch. Sein Wert weicht nur um +0,1% vom mittleren Erdradius ab
- die Messung des Abbe Picard diente Isaac Newton zur Überprüfung seines 1665/66 hergeleiteten Gravitationsgesetzes.

Ellipsoidmodell der Erde

- 1672 beobachtete der Astronom J. Richer in Cayenne (Französisch-Guyana), dass ein Sekundenpendel, das in Paris justiert worden war, verkürzt werden musste, um wieder

Sekundenschwingungen zu erhalten. Dies bedeutet, dass die Schwerkraft vom Äquator zu den Polen hin zunimmt

- Isaac Newton und Christian Huygens entwickelten daraus physikalisch begründete Modelle der Erde, mit einer Abplattung an den Polen
- Huygens nahm 1690 als Ursprung der Erdanziehung den geometrischen Mittelpunkt der Erde, und erhielt eine rotationsymmetrische Gleichgewichtsfigur mit einer Abplattung $f = 1 : 578$
- 1743 gelang A.C.Clairaut die Synthese von physikalischer und geodätischer Begründung der ellipsoidischen Erdgestalt
- Delambre und Méchain führten 1792-1798 Messungen im Meridian von Paris durch. Diese Messung diente als Grundlage für die Meterdefinition von 1791. Durch Kombination mit einer Messung, die 1735-1744 in Peru von Godin, Bouguer und La Condamine getätigt worden war, ergab sich eine Abplattung von $f = 1 : 334$
- 1841 entwickelte F.W.Bessel das erste allgemein benutzte Ellipsoid der Erde mit den Werten $a = 6377,397$ m, $b = 6356,078$ m, $f = 1:299,15$
- 1880 begründete F.R.Helmert die Geodäsie als Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche
- 1924 führte die Internationale Union für Geodäsie und Geophysik (IUGG) das 1909 von J.F.Hayford berechnete Ellipsoid als Internationales Referenz Ellipsoid (IRE) ein. Parameter: $a = 6378,388$ m, $f = 1 : 297$
- 1930 wurde das Modell durch die internationale Schwereformel erweitert:
 $g_0 = 9,78049 (1 + 0,00528841 \sin^2 \phi - 0,0000059 \sin^2 2\phi) \text{ m/s}^2$
- 1967 wurde das System durch das Geodätische Referenzsystem abgelöst: $a = 6378,160$ m, $b = 6356,775$ m, $f = 1:298,247$

Das Referenzsystem 1967 findet bis heute Anwendung. Es stellt eine optimale Annäherung an das mittlere Erdellipsoid dar.

Geoid

Die Darstellung der Erdkugel als Ellipsoid vereinfacht die wahre Gestalt der Erde. In Wirklichkeit ist die Erdoberfläche viel komplizierter, da das Erdinnere kein homogenes Material ist. Man nennt die wahre idealisierte Erdform Geoid.

Der Geoid ist die gedachte Fortsetzung des spiegelglatten Ozeans unter den Kontinenten.

Die Geoidoberfläche wird durch die Abstände von der Referenzoberfläche des errechneten Erdellipsoids definiert. Die größte negative Abweichung ist im indischen Ozean mit -106 m, die höchste Abweichung liegt bei + 85 m.

siehe auch <http://dgfi2.dgfi.badw-muenchen.de/geodis/GRAV/Geoid.html>

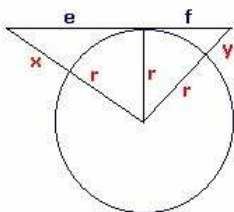
Darstellung einer Erdkugel

Kugelkoordinaten $(O; r, \lambda, \theta)$, Länge $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ Breite $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$
 Radiusvektor r

Orthografische Projektion: Umwandlung in kartesische Koordinaten bei zusätzlichem Drehen um Breitenwinkel α und Längewinkel β unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches für ϕ und λ

$$\begin{aligned} x' &= -(\sin \alpha * \sin \phi + \cos \alpha * \cos \phi * \cos(\beta - \lambda)) \\ y' &= \cos \phi * \sin(\beta - \lambda) \\ z' &= \sin(\alpha - \phi) - \cos \phi * (1 - \cos(\beta - \lambda)) * \sin \alpha \end{aligned}$$

Darstellungsidee: alle Punkte werden mit den Koordinaten $(y' * \text{radius}; z' * \text{radius})$ gezeichnet, wenn deren x -Koordinate größer als Null ist



Sichtweite auf der Erde

Problem: Wie weit kann man von einem x Meter hohen Punkt einen y Meter hohen Punkt auf der Erdoberfläche noch sehen?

Aus der Skizze ergibt sich $e^2 = (r + x)^2 - r^2$, $e = \sqrt{2 r x + x^2}$

Für den Erdradius von $r = 6378$ km ist der Wert $(x / 1000)^2$ für Werte von $x < 6000$ m vernachlässigbar. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} e &\approx \sqrt{12756} * \sqrt{(x / 1000)} \approx 113 \sqrt{(x / 1000)} \\ e + f &\approx 113 [\sqrt{(x / 1000)} + \sqrt{(y / 1000)}] \end{aligned}$$

Von einem 250 m hohen Turm kann man damit einen anderen 40 m hohen Turm im ebenen Gelände etwa 79 km weit sehen.

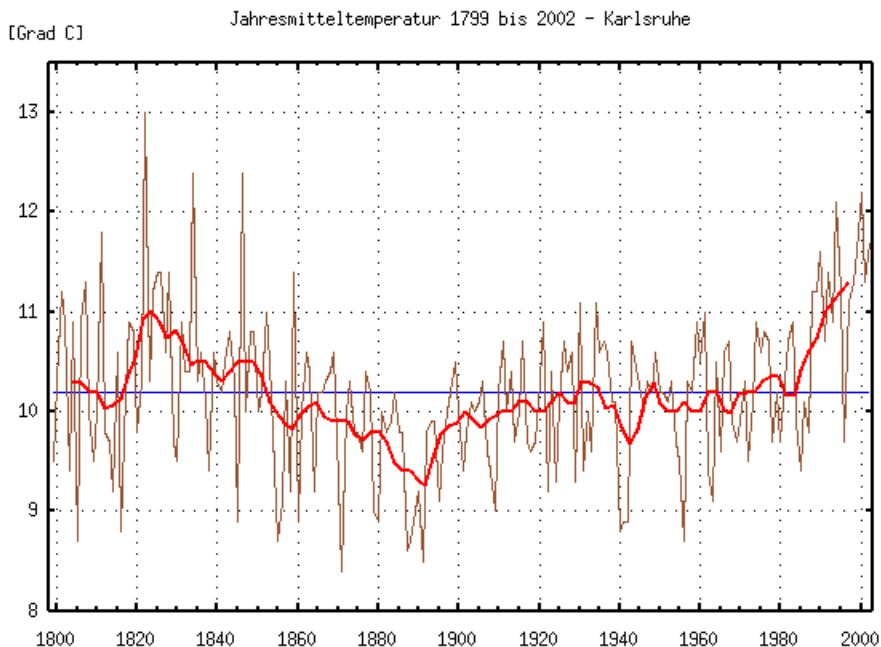
Für die exakte Länge des Kreisbogens ergibt sich $L = r (\arccos(r/(r+x)) + \arccos(r/(r+y)))$

Sind die Objekte höchstens 6500 m hoch, so ist der Fehler der obigen Näherung immer kleiner als 0,1 %.

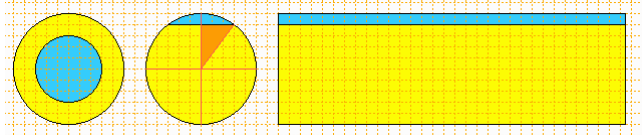
Polarlichter finden in Höhen von 100-150 km statt, mitunter auch 700 km über der Erde. Im Beispiel wird ein Polarlicht über Reykjavik in 450 km Höhe betrachtet. Mit der exakten Formel ergibt sich, dass diese Polarlichter noch in 2364 km zu sehen wären.



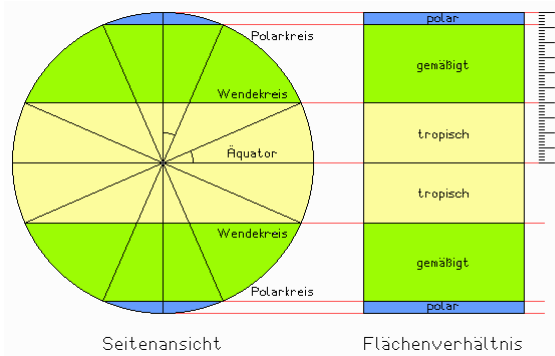
1871-1900 [°C]	0.3	2.2	5.3	9.7	13.4	17.5	19.0	18.2	14.6	9.2	5.1	1.1	9.6
1881-1910 [°C]	0.3	2.1	5.3	9.6	13.8	17.5	18.9	18.0	14.4	9.4	5.0	1.7	9.7
1891-1920 [°C]	0.8	2.4	5.8	9.6	14.2	17.5	18.8	18.1	14.5	9.6	4.8	2.5	9.9
1901-1930 [°C]	1.5	2.5	6.0	9.5	14.5	17.3	19.1	18.0	14.5	9.8	4.8	2.6	10.0
1911-1940 [°C]	1.9	2.5	6.1	9.6	14.7	17.5	19.2	18.4	14.9	9.7	5.3	2.1	10.1
1921-1950 [°C]	1.3	2.1	5.8	10.0	14.4	17.6	19.6	18.6	15.2	10.1	5.3	1.4	10.1
1931-1960 [°C]	0.9	1.7	5.8	10.0	14.3	17.7	19.5	18.6	15.2	9.8	5.3	1.7	10.0
1941-1970 [°C]	0.6	1.8	5.6	10.2	14.2	17.6	19.4	18.5	15.3	10.2	5.1	1.8	10.0
1951-1980 [°C]	1.1	2.3	5.9	9.8	14.1	17.5	19.3	18.4	15.1	9.9	5.2	2.1	10.1
1961-1990 [°C]	1.2	2.5	6.0	9.9	14.3	17.5	19.6	18.8	15.4	10.4	5.3	2.2	10.3
1971-2000 [°C]	1.9	2.9	6.8	10.0	14.7	17.6	20.1	19.7	15.4	10.4	5.4	3.0	10.7
Änderung [K]	+0.7	+0.4	+0.8	+0.1	+0.4	+0.1	+0.5	+0.9	0.0	0.0	+0.1	+0.8	+0.4
Änderung [K]	+0.8	+0.6	+0.9	+0.2	+0.6	+0.1	+0.8	+1.3	+0.3	+0.5	+0.2	+0.9	+0.6
10-jähr. Mittel:
1801-1810 [°C]	0.5	2.3	5.0	9.5	15.7	17.7	19.9	19.7	15.4	10.2	5.2	2.5	10.3
1811-1820 [°C]	-0.3	3.3	5.9	11.0	15.3	17.4	18.7	18.3	15.5	10.4	4.8	1.2	10.2
1821-1830 [°C]	-0.6	2.1	6.8	11.6	15.7	18.4	20.4	19.5	16.3	10.9	6.0	3.3	10.9
1831-1840 [°C]	0.3	2.9	5.5	9.6	15.2	18.8	19.9	19.3	15.7	10.8	5.6	2.2	10.5
1841-1850 [°C]	-0.1	2.7	5.8	10.8	15.6	18.7	19.6	19.1	15.6	10.7	6.1	1.9	10.5
1851-1860 [°C]	1.6	1.4	4.9	9.6	13.7	18.4	19.5	19.4	15.0	10.7	3.7	1.3	9.9
1861-1870 [°C]	0.5	3.2	5.0	10.7	15.0	17.6	19.4	18.2	15.3	9.8	4.9	1.1	10.1
1871-1880 [°C]	0.8	2.5	5.7	9.9	12.8	17.5	19.4	18.6	14.9	9.4	4.6	0.5	9.6
1881-1890 [°C]	0.3	1.8	4.7	9.3	14.0	17.4	18.7	17.6	14.1	8.5	5.4	1.0	9.5
1891-1900 [°C]	-0.2	2.3	5.5	10.0	13.5	17.7	19.0	18.4	14.9	9.8	5.2	1.7	9.8
1901-1910 [°C]	0.7	2.1	5.6	9.5	14.0	17.5	19.0	18.0	14.2	10.0	4.5	2.3	9.8
1911-1920 [°C]	1.8	2.7	6.4	9.4	15.1	17.2	18.5	18.0	14.3	8.9	4.8	3.6	10.1
1921-1930 [°C]	2.1	2.6	6.0	9.7	14.5	17.2	19.7	18.0	15.1	10.5	5.0	2.0	10.2
1931-1940 [°C]	1.7	2.1	5.8	9.7	14.4	18.1	19.3	18.7	15.2	9.6	6.0	0.8	10.1
1941-1950 [°C]	0.0	1.5	5.6	10.6	14.2	17.4	19.7	19.0	15.4	10.1	4.8	1.4	10.0
1951-1960 [°C]	1.1	1.4	6.1	9.7	14.3	17.5	19.4	18.2	15.0	9.7	5.2	3.0	10.0
1961-1970 [°C]	0.6	2.4	5.2	10.4	14.1	17.8	19.2	18.2	15.5	10.7	5.4	0.9	10.0
1971-1980 [°C]	1.6	3.3	6.4	9.4	14.2	17.4	19.3	18.8	15.0	9.6	5.3	2.7	10.3
1981-1990 [°C]	1.5	1.8	6.5	9.9	14.6	17.3	20.2	19.5	15.7	11.0	5.2	3.1	10.5
1991-2000 [°C]	2.6	3.5	7.5	10.9	15.4	18.3	20.7	20.7	15.7	10.5	5.7	3.2	11.2



Klimazonen



Die Flächen der Zonen zwischen Pol, Polarkreis, Wendekreis und Äquator verhalten sich wie die Differenzen der \sin der zugehörigen Breiten. Dies ergibt sich mit Lamberts flächentreuer Zylinderkarte.

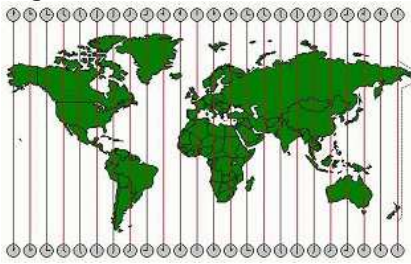


Zeitzone

Eine Zeitzone ist ein Abschnitt der Erdoberfläche, auf dem zu einem gegebenen Zeitpunkt dieselbe Uhrzeit und dasselbe Datum gelten.

Bei der Bildung der Zeitzone besteht das Bestreben, einerseits den Tag an der Erdrotation auszurichten und andererseits Gebiete mit einheitlicher Zeit zu definieren, zwischen denen ein leicht zu berechnender Zeitversatz, meist 1 Stunde, besteht.

Dies kann erreicht werden, indem man die Zeitzone als Gebiete zwischen zwei geographischen Längen mit einem Abstand von 15° definiert. Bei der Bildung der tatsächlichen Zeitzone wurde von diesen Linien abgewichen.



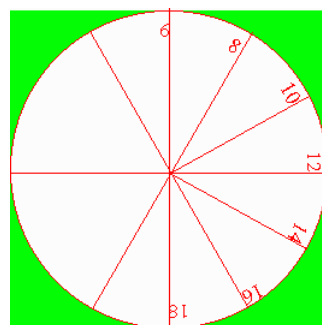
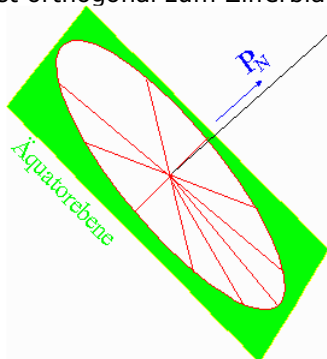
In der folgenden Zusammenstellung sind für jede Zeitzone Gebiete und Länder verzeichnet, die die zugehörige bürgerliche Zeit benutzen. Will man die momentane Uhrzeit eines Landes erfahren, so muss man dT zu der augenblicklichen Weltzeit addieren. Geht man von MEZ aus, so ist die betreffende Landeszeit $(MEZ-1h)+dT$. Die Sommerzeit ist nicht berücksichtigt.

- | | | |
|---|-------------------|---|
| 0 | 0h UT | Europa: Andorra, Faröer, Großbritannien, Irland, Island
Afrika: Algerien, Elfenbeinküste, Gambia, Ghana, Guinea, St. Helena, Kanarische Inseln, Liberia, Maderia, Mali, Marokko, Mauretanien, Obervolta, São Tomé und Príncipe, Senegal, Sierra Leone, Togo, Westsahara |
| 1 | +1h MEZ | Europa: Albanien, Belgien, Deutschland, Dänemark, Frankreich
Italien, ehem. Jugoslawien, Liechtensten, Luxemburg, Malta, Monaco, Niederlande, Norwegen mit Spitzbergen, Österreich, Polen, San Mario, Schweden, Schweiz, Slowakei, Spanien, Tschechei, Ungarn
Afrika: Angola, Äquatorial-Guinea, Benin, Gabun, Kamerun, Kongo, Niger, Nigeria, Tschad, Tunesien, Zaïre (Westteil), Zentralafrikanische Republik |
| 2 | +2h OEZ | Europa: Bulgarien, Finnland, Griechenland, Rumänien
Asien: Israel, Jordanien, Libanon, Syrien, Türkei, Zypern
Afrika: Ägypten, Botswana, Burundi, Lesotho, Libyen, Malawi, Mocambique, Namibia, Rwanda, Sambia, Simbabwe, Sudan, Swasiland, Zaïre (Ostteil) |
| 3 | +3h Moskauer Zeit | Europa: Rußland (St. Petersburg, Moskau)
Asien: Irak, Iran (+3h30m), Jemen, Kuwait, Saudi-Arabien
Afrika: Äthiopien, Djibouti, Kenia, Komoren, Madagaskar, Somalia, Tansania, Uganda |
| 4 | +4h | Europa: Rußland (Gorki)
Asien: Afghanistan (+4h30m), Bahrein, Oman, Vereinigte Arabische Emirate
Afrika: Mauritius, Seychellen |
| 5 | +5h | Asien: Bhutan (+5h30m), Indien (+5h30m), Malediven, Nepal (+5h30m), Pakistan, Rußland (Swerdlowk, Aralsee, Nowafa, Semlja), Sri Lanka (+5h30m) |
| 6 | +6h | Asien: Bangladesch, Burma (+6h30m), Cocosinseln (+6h30m), Rußland (Omsk) |
| 7 | +7h | Asien: Indonesien (Sumatra, Jawa), Kampuchea, Laos, Malaysia (Malakka +7h30m), Mongolei (Westteil), Rußland (Nowosibirsk), Thailand |
| 8 | +8h | |

- Asien: China, Indonesien (Sulawesi, Flores, Kalimantan), Malaysia (Sarawak, Borneo), Mongolei (Ostteil), Philippinen, Rußland (Baikalsee), Taiwan; Vietnam
Australien: Westaustralien
- 9 +9h
Asien: Indonesien (Maluku, West-Neuginea), Japan, Nordkorea, Südkorea, Rußland (Flußgebiet der Lena)
Australien: Nordterritorium, Südaustralien (beide +9h30m)
- 10 +10h
Asien: Papua-Neuginea, Rußland (Wladiwostok)
Australien und Ozeanien: Australien (Ostteil), Guam, Marianen
- 11 +11h
Asien: Rußland (Magdan, Sachalin, Kurilen)
Ozeanien: Karolinen, Nauru (+11h30m), Neue Hebriden, Neukaledonien, Norfolk (+11h30m), Salomoninseln
- 12 +12h
Asien: Rußland (Kamtschatka)
Ozeanien: Fidschiinseln, Gilbert- und Elliceinseln, Neuseeland, Wallisarchipel
- 13 +13h, -11h
Asien: Rußland (Tschuktschenhalbinsel +13h)
Ozeanien: Tongainseln (+13h); östlich der Datumsgrenze (-11h) Midway, Phönixinseln, Samoa; Tokelau (-11h30m)
Amerika: Alaska (Westteil -11h)
- 14 -10h
Ozeanien: Cookinseln (-10h30m), Hawaii, Polynesien
Amerika: Alaska (östl. 160° westl. Länge)
- 15 -9h
kein Landgebiet
- 16 -8h
Amerika: Kanada (Whitehorse), Mexiko (Nordteil Niederkaliforniens), USA (Pazifische Staaten)
- 17 -7h
Amerika: Kanada (Edmonton), Mexiko (Westteil), USA (Rocky Mountain-Staaten)
- 18 -6h
Amerika: El Salvador, Guatemala, Kostarika, Honduras, Kanada (Winnipeg), Mexiko (Hauptteil), Nikaragua, USA (mittlere Westen)
- 19 -5h
Amerika: Bahamas, Dominikanische Republik, Ecuador, Haïti, Jamaika, Kanada (Ottawa), Kolumbien, Kuba, Panama, Peru, USA (Ostküste)
- 20 -4h
Amerika: Bermudas, Bolivien, Brasilien (Westteil), Chile, Falklandinseln, Grönland (Nordwestteil), Kanada (äußerster Nordosten), Paraguay, Puerto Rico, Trinidad und Tobago, Venezuela
- 21 -3h
Amerika: Argentinien, Brasilien (Ostteil), Französisch Guayana, Grönland (Westteil), Guayana (-3h45m), Neufundland (-3h30m), Surinam, Uruguay
- 22 -2h
Amerika: Grönland (Ostteil) / Afrika: Kapverden
- 23 -1h
Europa: Jan Mayen / Afrika: Guinea-Bissau, Azoren / Amerika: Grönland (äußerster Nordosten)

Äquatorialsonnenuhr

Der einfachste Sonnenuhrtyp ist die Äquatorialsonnenuhr. Ihr Zifferblatt liegt in einer Ebene parallel zur Äquatorebene und ist gleichmäßig aufgeteilt: Jede Stunde entspricht 15° . Der Schattenstab (der Gnomon) ist orthogonal zum Zifferblatt, er zeigt also genau in Richtung Himmelsnordpol.

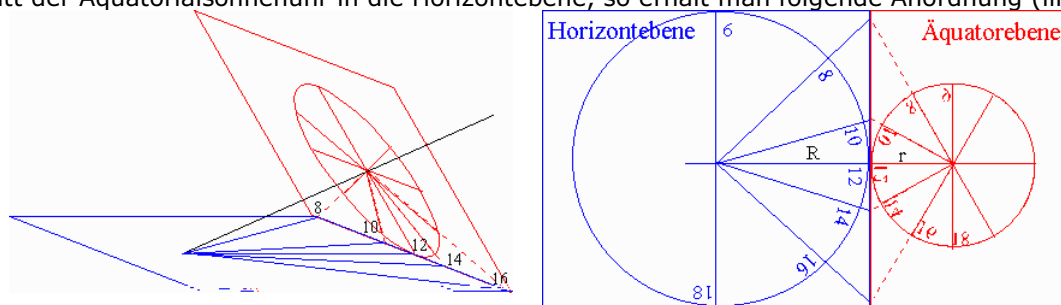


Damit der Schatten auf dem Zifferblatt auch bei negativen Deklinationen der Sonne sichtbar ist, müsste ein ebenes Zifferblatt transparent sein. Das Zifferblatt wird daher i.a. auf einem halbkreisförmigen Band in der Äquatorialebene angebracht.

Horizontalsonnenuhr

Bei der Horizontalsonnenuhr liegt das Zifferblatt in der Horizontalebene. Der Schattenstab ist wieder zum Himmelsnordpol ausgerichtet, er bildet also mit der Horizontalebene einen Winkel, der der geographischen Breite des Aufstellungsortes entspricht.

Das Zifferblatt ist nun nicht mehr gleichförmig aufgeteilt. Die Aufteilung kann aber aus der der Äquatorialsonnenuhr konstruiert werden, indem wir den Schatten, den die Äquatorialsonnenuhr wirft bis zur Schnittgerade von Äquator- und Horizontebene verlängern und mit dem Anfang des Schattenstabes verbinden: Wir projizieren den Schatten von der Äquatorebene in die Horizontalebene. Klappt man das Zifferblatt der Äquatorialsonnenuhr in die Horizontalebene, so erhält man folgende Anordnung (links):



Damit kann das Zifferblatt der Horizontalsonnenuhr konstruiert werden (rechts). Zwischen den Radien der beiden Zifferblätter besteht die Beziehung $\sin \varphi = r/R$. Dabei ist φ die geographische Breite, r ist der Radius des Äquatorial- und R der Radius des Horizontalzifferblattes. Ist α der Winkel zwischen der t-Uhr- und der 12-Uhr-Linie auf dem horizontalen Zifferblatt und α' der entsprechende Winkel auf dem äquatorialen Zifferblatt, so gilt: $\tan \alpha = d/R$ und $\tan \alpha' = d/r$. Daraus ergibt sich $\tan \alpha = \sin \varphi \tan \alpha'$. Wegen $\alpha' = 15/h (t - 12h)$ erhält man daraus die Winkel der einzelnen Stundenlinien des horizontalen Zifferblattes.

Korrekturen aufgrund des Längengrades

Die oben konstruierten Sonnenuhren zeigen (wenn man zunächst von der mittleren Sonne ausgeht) die mittlere Ortszeit am Aufstellungsort. Die bürgerliche Zeit ist i.a. die mittlere Ortszeit des nächsten durch 15 teilbaren Längengrades. Diese Zeit sollte die Sonnenuhr eigentlich anzeigen.

Beispiel: Stuttgart hat die geographische Länge 10° O. Die Zonenzeit der zugehörigen Zeitzone ist die mittlere Ortszeit für 15° O.

Die Längengraddifferenz von 5° entspricht einer Zeitdifferenz von 20 min. Die Sonnenuhr geht also im Vergleich zur Zonenzeit immer um 20 min nach. Wenn wir also auf einer in Stuttgart aufgestellten Sonnenuhr die Zonenzeit ablesen möchten, müssen wir die 11.40-h-Linie auf dem Zifferblatt einzeichnen, und es mit 12 h beschriften, ebenso müssen wir die 12.40-h-Linie konstruieren und sie mit 13 h beschriften.

Korrekturen aufgrund der wahren Sonne

Der Schatten den der Schattenstab wirft, wird nicht von der mittleren Sonne (Äquatorebene, gleichförmige Bewegung der Erde um die Sonne), sondern von der wahren Sonne erzeugt. Die wahre Sonne bewegt sich nicht in der Äquatorebene sondern mit Deklinationen zwischen $-23,5^\circ$ und $+23,5^\circ$, ferner bewegt sich die Erde auf einer Ellipsenbahn um die Sonne.

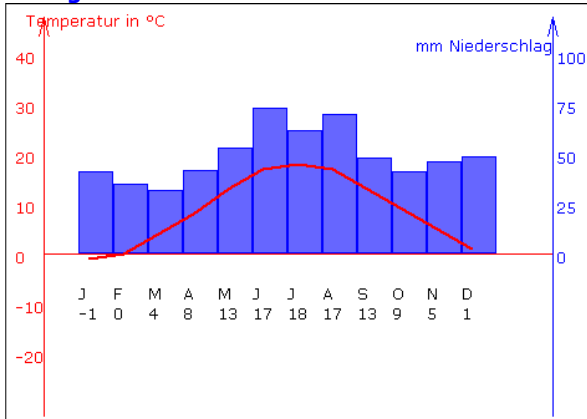
Die Zeit, die die Sonnenuhr aufgrund der obigen Korrekturen anzeigt, ist daher die wahre Ortszeit (WOZ) und nicht die mittlere Ortszeit (MOZ) des nächsten durch 15 teilbaren Längengrades.

Die Differenz zwischen WOZ und MOZ beträgt bis zu ca. 15 min und heißt Zeitgleichung. Da sie von der Deklination der Sonne und von der Position der Erde auf der Ellipsenbahn abhängt, ist sie vom Datum abhängig.

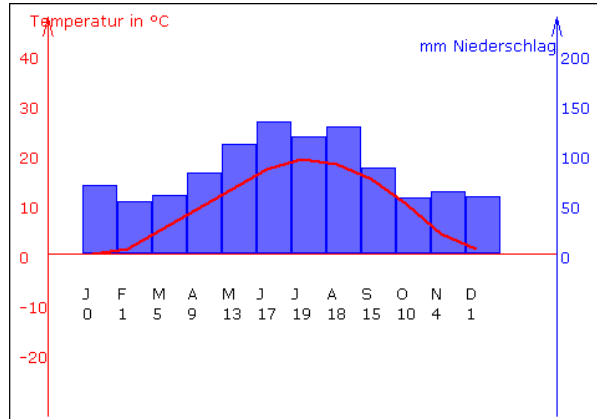
Bei den oben besprochenen Sonnenuhren ist die Zeitgleichung nicht berücksichtigt. Möchte man dies tun, muss man für die einzelnen Monate/Tage, je nach Genauigkeit verschiedene Zifferblätter berechnen. Baut man alles in ein Zifferblatt ein, so erhält man statt der Stundenlinien geschlossene Kurven ("Analemma"), die je nach Datum an verschiedenen Punkten abgelesen werden.

Da die Deklination der Sonne auch zeitabhängig ist, besteht eine weitere Möglichkeit, die Zeitgleichung einzubauen darin, den Schattenstab durch einen Rotationskörper zu ersetzen, der je nach Einstrahlwinkel der wahren Sonne den Schatten nach links oder rechts korrigiert.

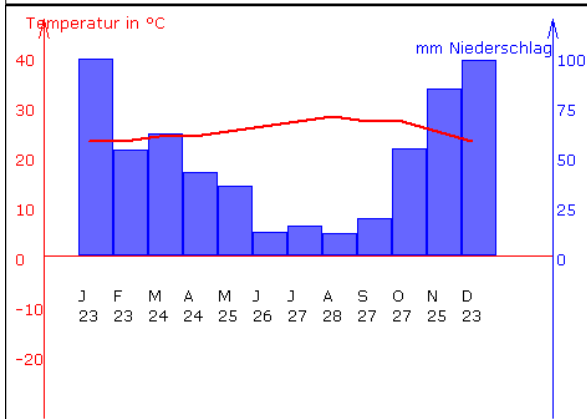
Klimadiagramme



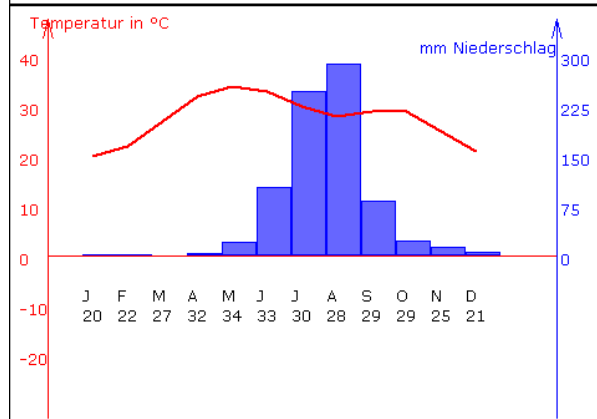
Berlin / Deutschland; 51 m NN
Temperaturmittel 8.7 °C | 592 mm Jahresniederschlag



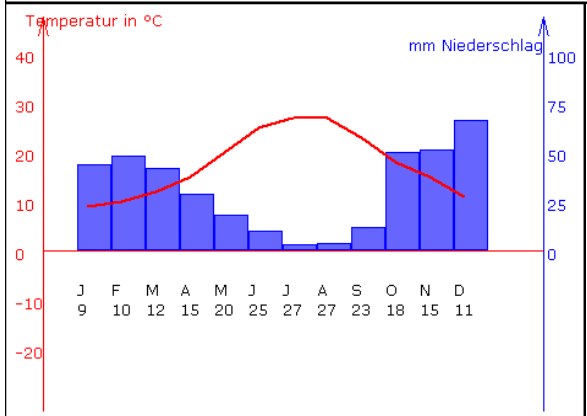
München / Deutschland; 515 m NN
Temperaturmittel 9.3 °C | 1009 mm Jahresniederschlag



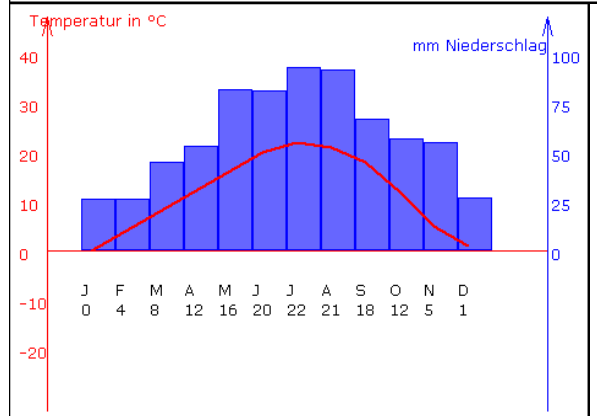
Honolulu / USA, Hawaii; 2 m NN
Temperaturmittel 25.2 °C | 583 mm Jahresniederschlag



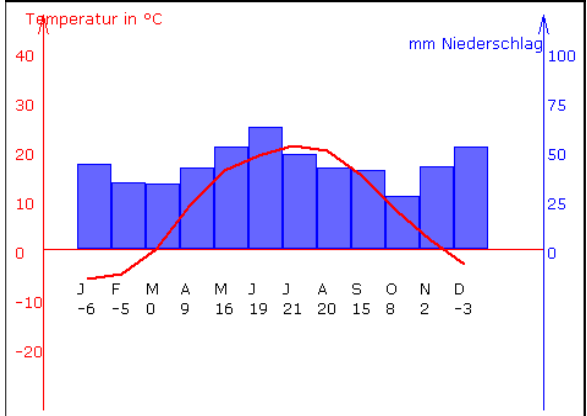
Ahmadabad / Indien; 55 m NN
Temperaturmittel 27.5 °C | 789 mm Jahresniederschlag



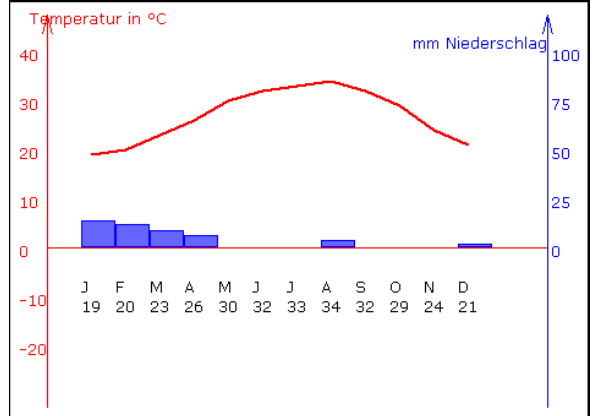
Athen / Griechenland; 107 m NN
Temperaturmittel 17.7 °C | 377 mm Jahresniederschlag



Bozen / Italien; 250 m NN
Temperaturmittel 11.6 °C | 704 mm Jahresniederschlag



Donezk / Ukraine; 225 m NN
Temperaturmittel 8 °C | 515 mm Jahresniederschlag



Abu Dhabi / Emirate; 5 m NN
Temperaturmittel 26.9 °C | 47 mm Jahresniederschlag