

Euklids "**Stoicheia**", bei uns besser als "*Euklids Elemente*" oder "*Die Elemente*" bekannt, war bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meist verbreitete Werk der Weltliteratur. Es gibt uns einen guten Überblick über den mathematischen Kenntnisstand der Griechen gegen Ende des 4. Jahrhunderts v. Chr..

Bei den *Elementen* handelt es sich um ein Lehrbuch der Mathematik, das aus 13 "*Büchern*" besteht.

Die älteste erhaltene Handschrift stammt aus dem Byzanz des Jahres 888 und wird heute in der Bodleian Library in Oxford aufbewahrt. Eine Übersetzung des Boethius aus dem Griechischen ins Lateinische (um 500) ist heute nur teilweise, und auch nur in späteren Bearbeitungen erhalten.

Von den zahlreichen arabischen Übersetzungen und Kommentaren waren für die Überlieferung besonders die beiden Übersetzungen des al-Haggag gegen Ende des 8. Jahrhunderts und diejenigen von Ishaq ibn Hunain/Tabit ibn Qurra (Ende 9. Jahrhundert) bzw. von Nasi al-Din al-Tusi (1248) von Bedeutung.

Die erste mittelalterliche Übersetzung der Elemente ins Lateinische verdanken wir dem Engländer Adelard von Bath. Dieser durchstreifte im 12. Jahrhundert Europa auf der Suche nach Handschriften und übertrug so um 1120 auch dieses Werk aus dem Arabischen.

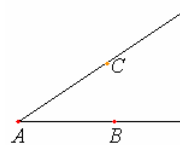
Unabhängig davon wurden die Elemente dann im gleichen Jahrhundert in Spanien auch noch von mindestens zwei weiteren berühmten Übersetzern aus dem Arabischen übertragen: von Hermann von Kärnten und von Gerhard von Cremona.

Ebenfalls im 12. Jahrhundert, allerdings in Süditalien von einem unbekanntem Autor, ist eine weitere Übersetzung der Elemente aus dem Griechischen entstanden. Wegen des Stils der Übersetzung liegt die Vermutung nahe, dass es sich bei diesem unbekanntem Autor um denselben handelt, der um 1160 auch den *Almagest* des Ptolemäus übersetzte.

Natürlich gehörten die Elemente zu den ersten Werken, die man gedruckt haben wollte. Die vorbereitende Bearbeitung des Regiomontanus blieb in den 1460er Jahren unvollendet. Eine vollständige Übersetzung aus dem Griechischen von Zamberti konnte 1505 gedruckt werden.

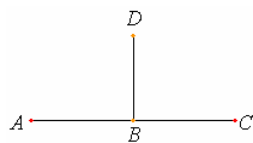
I. Buch Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.
2. Eine **Linie** breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine **ebene** Fläche ist eine solche, die zu den gleichmäßig liegt.
8. Eine ebener **Winkel** ist die Neigung zweier gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.



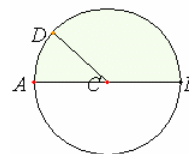
geraden Linien auf ihr
Linien in einer Ebene

10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**.



11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,
12. **Spitz**, wenn kleiner als ein Rechter.

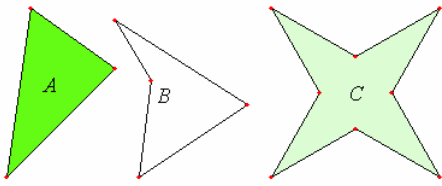
13. Eine **Grenze** ist das, worin etwas endigt.
14. Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren
15. Eine **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie heißt umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie zum Umfang Strecken einander gleich sind;
16. Und **Mittelpunkt** des Kreises heißt dieser Punkt.



Grenzen umfasst wird.
die **Umfang (Bogen)**
von einem innerhalb
des Kreises laufenden

17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

18. Ein **Halbkreis** ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur; und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise.



19. **Geradlinige Figuren** sind solche, die von Strecken umfasst werden,

dreiseitige die von drei,

vierseitige die von vier,

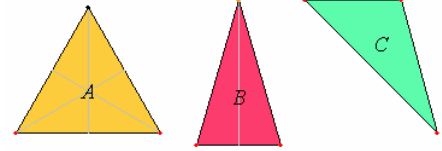
vielseitige die von mehr als vier Seiten umfassten.

20. Von den dreiseitigen Figuren ist

ein **gleichseitiges Dreieck** jede mit drei gleichen Seiten

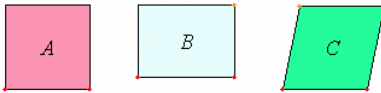
ein **gleichschenkliges** jede mit nur zwei gleichen Seiten

ein **schiefes** jede mit drei ungleichen Seiten



21. Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein

rechtwinkliges Dreieck jede mit einem rechten Winkel, ein **stumpfwinkliges** jede mit einem stumpfen Winkel, ein **spitzwinkliges** jede mit drei spitzen Winkeln.



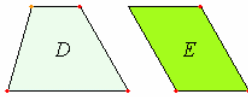
22. Von den vierseitigen Figuren ist ein

Quadrat jede, die gleichseitig und rechtwinkliges ist,

ein **längliches Rechteck** jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist,

ein **Rhombus** jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,

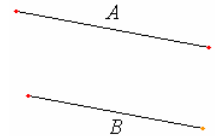
ein **Rhomboid** jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als



Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;

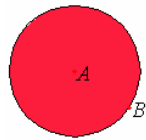
die übrigen vierseitigen Figuren sollen **Trapeze** heißen.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.



Postulate

Gefordert werden soll:



1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,

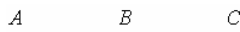
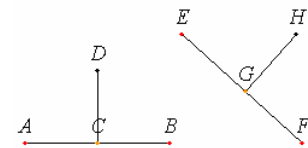


2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,

3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,

4. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind,

5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendlich sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.



Axiome



1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.

2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.

3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.

4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.

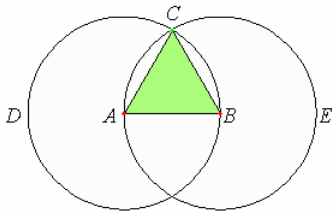
5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.

6. Die Halben von demselben sind einander gleich.

7. Was einander deckt, ist einander gleich.

8. Das Ganze ist größer als der Teil.

9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.



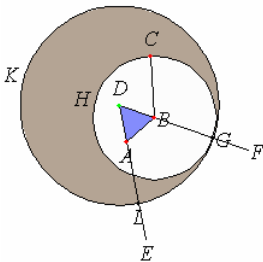
§ 1 (A. 1)

Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Postulat 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE; ferner ziehe man von Punkte C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Postulat 1).

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist $AC = AB$ (I, Definition 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, $BC = BA$. Wie oben bewiesen, ist auch $CA = AB$; also sind CA und CB beide $= AB$. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Axiom 1); also ist auch $CA = CB$; also sind CA, AB, BC alle drei einander gleich. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Definition 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet - dies hatte man ausführen sollen.



§ 2 (A. 2)

An einem gegebenen Punkt eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen.

Der gegebene Punkt sei A und die gegebene Strecke sei BC. Man soll an dem Punkt A einer der gegebenen Strecke B C gleiche Strecke hinlegen. Man ziehe von Punkt A nach Punkt B die Strecke AB und errichte über derselben das gleichseitige Dreieck DAB (I, 1), verlängere ferner DA, DB

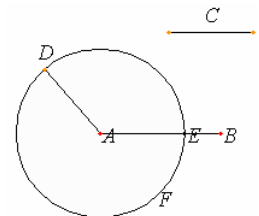
gerade um die Strecken AE, BF (Postulat 2) und zeichnen mit B als Mittelpunkt und BC als Abstand den Kreis CGH, ebenso mit D als Mittelpunkt und DG als Abstand den Kreis GKL. Da hier Punkt B Mittelpunkt von CGH ist, ist $BC = BG$. Ebenso ist, da Punkt D Mittelpunkt des Kreises GKL ist, $DL = DG$; von diesen Strecken sind Teile $DA = DB$. Also sind die Reste $AL = BG$ (Axiom 3). Wie oben bewiesen, ist auch $BC = BG$; also sind AL und BC beide $= BG$. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Axiom 1); also ist $AL = BC$. Also hat man am gegebenen Punkt A einer der gegebenen Strecke BC gleiche Strecke hingelegt, nämlich AL - dies hatte man ausführen sollen.

§ 3 (A. 3)

Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke anzutragen.

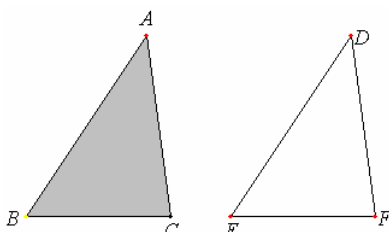
Die zwei gegebenen ungleichen Strecken seien AB, C; von ihnen sei AB die größere. Man soll auf AB, der größeren Strecke, eine C, der kleineren, gleiche abtragen.

Man lege am Punkte A eine Strecke $AD = C$ hin (I, 2) und zeichne mit A als Mittelpunkt und AD als Abstand den Kreis DEF. Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises DEF ist, ist $AE = AD$; aber auch $C = AD$. Also sind AE, C beide $= AD$; folglich ist auch $AE = C$. Also hat man, während zwei ungleiche Strecken AB, C gegeben waren, auf AB, der größeren, eine C, der kleineren, gleiche abgetragen, nämlich AE - dies hatte man ausführen sollen.



§ 4 (L. 1)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.



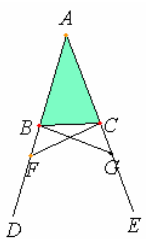
ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich $AB = DE$ und $AC = DF$, ferner $\angle BAC = \angle EDF$. Ich behaupte, dass auch Grundlinie $BC =$ Grundlinie EF , ferner $\triangle ABC = \triangle DEF$ und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein

müssen, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $\angle ABC = \angle DEF$ und $\angle ACB = \angle DFE$.

Deckt man nämlich $\triangle ABC$ auf $\triangle DEF$ und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie eine gerade Linie AB auf DE, so muss auch Punkt BE decken, weil $AB = DE$; da so AB DE deckt, muss auch die gerade Linie AD DF decken, weil $\angle BAC = \angle EDF$; daher muss auch Punkt C Punkt F decken, weil gleichfalls $AC = DF$.

B deckte aber E; folglich muss die Grundlinie BC die Grundlinie EF decken denn würde, während BE und CF deckt, die Grundlinie BC EF nicht decken, so würden zwei Strecken einen Flächenraum umfassen; das ist aber unmöglich (Axiom 9). Also muss die Grundlinie BC EF decken und ihr gleich sein (Axiom 7); folglich muss auch das ganze Dreieck ABC das ganze Dreieck DEF decken und ihm gleich sein, auch müssen die übrigen Winkel die übrigen Winkel decken und ihnen gleich sein, $ABC = DEF$ und $ACB = DFE$.

Wenn also in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Winkel (Seiten!) gegenüberliegen - dies hatte man beweisen sollen.



§ 5 (L. 2)

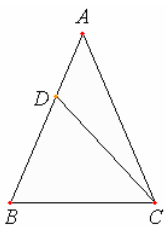
Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein.

ABC sei ein gleichschenkliges Dreieck (I, Definition 20) mit den Seiten $AB = AC$, auch seien AB, AC um die geraden Linien BD, CE verlängert. Ich behaupte, dass $\angle ABC = \angle ACB$ und $\angle CBD = \angle BCE$.

Man wähle nämlich auf BD Punkt F beliebig, trage auf AE, der längeren Strecke, $AG = AF$, der kürzeren ab (I, 3) und ziehe die Strecken FC, GB. Da $AF = AG$ und $AB = AC$, so sind zwei Seiten, nämlich FA, AC zwei Seiten, nämlich GA, AB entsprechend gleich, und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, nämlich FAG; also ist Grundlinie FC = Grundlinie GB, $\triangle AFC = \triangle AGB$, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $\angle ACF = \angle ABG$ und $\angle AFC = \angle AGB$ (I,4).

Und da die ganzen Strecken $AF = AG$, sowie von ihnen Teile $AB = AC$, so sind die Reste $BF = CG$ (Axiom 3). Wie oben bewiesen, ist aber auch $FC = GB$; mithin sind zwei Seiten, BF, FC, zwei Seiten, CG, GB entsprechend gleich; auch ist $\angle BFC = \angle CGB$ und die Grundlinie BC ihnen gemeinsam; also muss auch $\triangle BFC = \triangle CGB$ sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, also $\angle FBC = \angle GCB$ und $\angle BCF = \angle CBG$ (I, 4).

Da nun, wie oben bewiesen, die ganzen Winkel $\angle ABG = \angle ACF$ und von ihnen die Teile $\angle CBG = \angle BCF$, so sind die Restwinkel $\angle ABC = \angle ACB$; diese liegen an der Grundlinie des Dreiecks ABC. Wie oben bewiesen, ist ferner $\angle FBC = \angle GCB$; und diese liegen unter der Grundlinie - S.



§ 6 (L. 3)

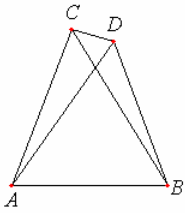
Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, müssen auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein.

ABC sei ein Dreieck mit $\angle ABC = \angle ACB$. Ich behaupte, dass auch Seite AB = Seite AC.

Wäre nämlich AB ungleich AC, so wäre von ihnen die eine größer; AB sei größer; dann trage man auf AB, der größeren Strecke, $DB = AC$, der kleineren, ab und ziehe DC. Da dann $DB = AC$ wäre und BC gemeinsam, so wären zwei Seiten, nämlich DB, BC, zwei Seiten, nämlich AC, CB, entsprechend gleich und $\angle DBC = \angle ACB$; also wäre Grundlinie DC = Grundlinie AB und $\triangle DBC = \triangle ACB$ (I, 4), das kleinere dem größeren (Axiom 8); dies wäre Unsinn; also kann AB nicht ungleich AC sein, ist ihm also gleich - S.

§ 7 (L. 4)

Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.

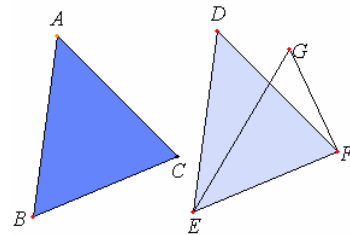


Wäre dies nämlich möglich, so bringe man über derselben Strecke AB zwei den festen Strecken AC, CB entsprechend gleiche weitere Strecken AD, DB in verschiedenen Punkten C und D zusammen, und zwar auf derselben Seite und an denselben Enden ansetzend, so dass CA und DA, die an demselben Ende, nämlich A ansetzen, einander gleich sind, ebenso CB und DB, die an demselben Ende B ansetzen; ferner ziehe man CD.

Da dann $AC = AD$, so wäre auch $\angle ACD = \angle ADC$ (I, 5); als wäre $\angle ADC > \angle DCB$ (Axiom 8), um so mehr also $\angle CDB > \angle DCB$. Da ebenso $CB = DB$, so wäre auch $\angle CDB = \angle DCB$. Wie oben bewiesen, wäre er zugleich weit größer als dieser; dies ist aber unmöglich - S.

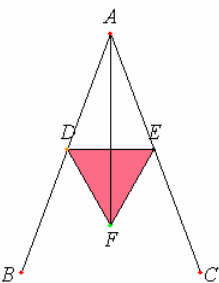
§ 8 (L. 5)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, dann müssen in ihnen auch die von gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich sein.



ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich $AB = DE$ und $AC = DF$, ferner sei Grundlinie $BC =$ Grundlinie EF . Ich behaupte, dass auch $\angle BAC = \angle EDF$.

Denkt man nämlich $\triangle ABC$ auf $\triangle DEF$ und legt dabei Punkt B auf Punkt E sowie die gerade Linie BC auf EF, so muss auch Punkt C auf EF decken, weil $BC = EF$; da so BC EF deckt, müssen auch BA, CA die Seiten ED, DF decken. Würden nämlich zwar die Grundlinien BC, EF einander decken, die Seiten BA, AC aber ED, DF nicht decken, sondern abweichen wie EG, GF, dann hätte man über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden ansetzend auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammengebracht. Sie lassen sich aber nicht so zusammenbringen (I, 7); dass also, wenn man Grundlinie BC auf Grundlinie EF deckt, die Seiten BA, AC dabei ED, DF nicht deckten, trifft nicht zu. Also decken sie sich, und $\angle BAC$ muss $\angle EDF$ decken und ihm gleich sein (Axiom 7) - S.

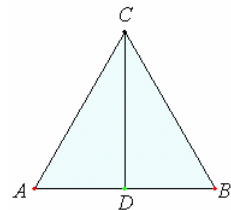


§ 9 (A. 4)

Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbieren

Der gegebene geradlinige Winkel sei BAC. Ihn soll man halbieren. Auf AB wähle man Punkt D beliebig, trage $AE = AD$ auf AC ab, ziehe DE, errichte über DE das gleichseitige Dreieck DEF (I, 1) und ziehe AF; ich behaupte, dass $\angle BAC$ durch die gerade Linie AF halbiert wird. Da nämlich $AD = AE$ ist und AF gemeinsam, so sind zwei Seiten DA, AF zwei Seiten EA, AF entsprechend gleich; ferner

Grundlinie $DF =$ Grundlinie EF ; also ist $\angle DAF = \angle EAF$ (I, 8). Der gegebene geradlinige Winkel BAC wird also durch die gerade Linie AF halbiert - dies hatte man ausführen sollen.

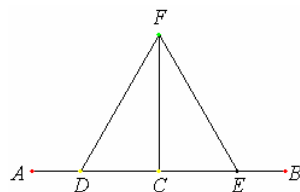


§ 10 (A. 5)

Eine gegebene Strecke zu halbieren

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll die Strecke AB halbieren.

Man errichte über ihr das gleichseitige Dreieck ABC (I, 1) und halbiere $\angle ACB$ durch die gerade Linie CD (I, 9); ich behaupte, dass die Strecke AB im Punkte D halbiert wird. Da nämlich $AC = CB$ ist und CD gemeinsam, so sind zwei Seiten AC, CD zwei Seiten BC, CD entsprechend gleich; ferner $\angle ACD = \angle BCD$; also ist Grundlinie $AD =$ Grundlinie BD (I, 4).

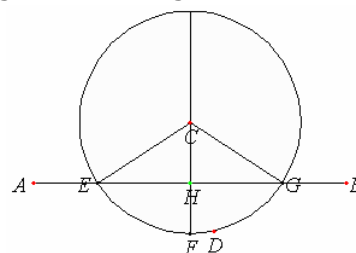


Die gegebene Strecke AB ist also in D halbiert - dies hatte man ausführen sollen.

§ 11 (A. 6)

Zu einer gegebenen Linie rechtwinklig von einem auf ihr gegebenen Punkte aus eine gerade Linie zu ziehen.

Die gegebene gerade Linie sei AB und der gegebene Punkt auf ihr C. Man soll vom Punkte C aus rechtwinklig zur geraden Linie AB eine gerade Linie ziehen. Auf AC wähle man den Punkt D beliebig, trage $CE = CD$ ab, errichte über DE das gleichseitige Dreieck FDE (I, 1) und ziehe FC; ich behaupte, dass die gerade Linie FC rechtwinklig zu der gegebenen geraden Linie AB von dem auf ihr gegebenen Punkte C aus gezogen ist. Da nämlich $DC = CE$ ist und CF gemeinsam, so sind zwei Seiten DC, CF zwei Seiten EC, CF entsprechend gleich; ferner Grundlinie DF = Grundlinie FE; also ist $\angle DCF = \angle ECF$ (I, 8); sie sind dabei Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Definition 10); also sind DCF und FCE beide Rechte. Man hat also zu einer gegebenen Strecke AB rechtwinklig von einem auf ihr gegebenen Punkte C aus eine gerade Linie gezogen, nämlich CF – dies hatte man ausführen sollen.



§ 12 (A. 7)

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie von einem gegebenen Punkte, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot zu fällen.

Es sei AB die gegebene unbegrenzte gerade Linie und C der gegebene Punkt, der nicht auf ihr liegt.

Man soll auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot fällen. Man wähle auf der anderen Seite der geraden Linie AB Punkt D beliebig, zeichnen mit C als Mittelpunkt und CD als Abstand den Kreis EFG, halbiere die Strecke EG in H (I, 10) und ziehe die Strecken CG, CH, CE; ich behaupte, dass man auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von dem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, aus das Lot gefällt hat, nämlich CH.

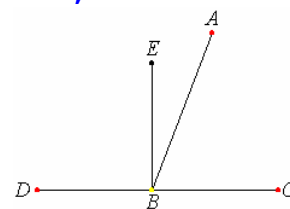
Da nämlich $GH = HE$ ist und HC gemeinsam, so sind zwei Seiten GH, HC zwei Seiten EH, HC entsprechend gleich; ferner Grundlinie CG = Grundlinie CE; also ist $\angle CHG = \angle EHC$ (I, 8); sie sind dabei Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter, und die stehende gerade Linie heißt Lot auf die, auf der sie steht (I, Definition 10). Man hat also auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie AB von einem gegebenen Punkte C, der nicht auf ihr liegt, das Lot gefällt, nämlich CH – dies hatte man ausführen sollen.

§ 13 (L. 6)

Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muss sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden.

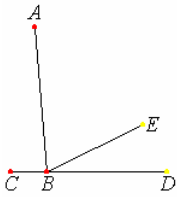
Eine gerade Linie AB bilde nämlich, auf die gerade Linie CD gestellt, die Winkel CBA, ABD. Ich behaupte, dass die Winkel CBA, ABD entweder beide Rechte sind oder zusammen zwei Rechten gleich.

Ist $CBA = ABD$, so sind beide Rechte (I, Definition 10). Anderenfalls ziehe man von Punkt B aus $BE \perp CD$ (I, 11); CBE, EBD sind also zwei Rechte. Hier ist $CBE = CBA + ABE$; daher füge man EBD beiderseits hinzu; dann sind $CBE + EBD = CBA + ABE + EBD$ (Axiom 2). Ebenso ist $DBA = DBE + EBA$; daher füge man ABC beiderseits hinzu; dann sind $DBA + ABC = DBE + EBA + ABC$. Wie oben bewiesen, sind aber auch CBE + EBD denselben drei Winkeln zusammen gleich; was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Axiom 1); also sind auch $CBE + EBD = DBA + ABC$; aber CBE, EBD sind zwei Rechte; also sind auch $DBA + ABC = 2 R.$ – S.



§ 14 (L. 7)

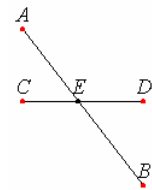
Bilden an einer geraden Linie in einem Punkte auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien Nebenwinkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, dann müssen diese geraden Linien einander gerade fortsetzen.



An einer geraden Linie AB mögen nämlich in dem Punkte B auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien BC, BD die Nebenwinkel ABC, ABD bilden, die zusammen = 2 R. Ich behaupte, dass BC CB gerade fortsetzt. Wenn nämlich BD BC nicht gerade fortsetzen sollte, möge BE CB gerade fortsetzen (Postulat 2). Da dann die gerade Linie AB auf der geraden Linie CBE stünde, so wären $\angle ABC + \angle ABE = 2 R.$ (I, 13); aber auch $\angle ABC + \angle ABD = 2 R.$; also wären $\angle CBA + \angle ABE = \angle CBA + \angle ABD$ (Postulat 4, Axiom 1). Man nehme $\angle CBA$ beiderseits weg; dann wäre der Restwinkel ABE dem Restwinkel ABD gleich (Axiom 3), der kleinere (Axiom 8) dem größeren; dies ist aber unmöglich. Also setzt BE nicht CB gerade fort. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere von BD verschiedene gerade Linie es tut; also setzt CB BD gerade fort (Postulat 12) – S.

§ 15 (L. 8)

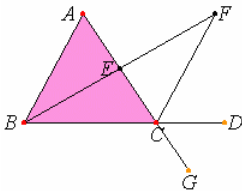
Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.



Zwei gerade Linien AB, CD mögen einander im Punkte E schneiden. Ich behaupte, dass $\angle AEC = \angle DEB$ und $\angle CEB = \angle AED$.

Da nämlich die gerade Linie AE auf der geraden Linie CD steht und dabei die Winkel CEA, AED bildet, so sind $\angle CEA + \angle AED = 2 R.$ (I, 13). Da ebenso die gerade Linie DE auf der geraden Linie AB steht und dabei die Winkel AED, DEB bildet, so sind $\angle AED + \angle DEB = 2 R.$ Wie oben bewiesen, sind auch $\angle CEA + \angle AED = 2 R.$; also sind $\angle CEA + \angle AED = \angle AED + \angle DEB$ (Postulat 4; Axiom 1). Man nehme $\angle AED$ beiderseits weg; dann sind die Reste $\angle CEA = \angle DEB$ (Axiom 3); ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $\angle CEB = \angle AED$ – S.

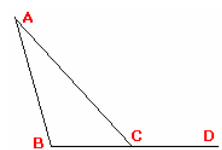
Zusatz: Hiernach ist klar, dass zwei gerade Linien, wenn sie einander schneiden, am Schnittpunkte Winkel bilden müssen, die zusammen vier Rechte gleich sind.



§ 16 (L. 9)

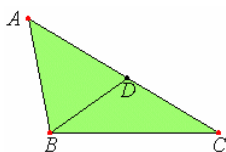
An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Das Dreieck sei ABC; man verlängere seine eine Seite BC nach D. Ich behaupte, dass der Außenwinkel ACD größer ist als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel CBA, BAC. Man halbiere AC in E (I, 10), ziehe BE und verlängere es nach F; ferner mache man $EF = BE$, verbinde FC und ziehe AC nach G hin durch. Da $AE = EC$ und $BE = EF$, so sind zwei Seiten AE, EB zwei Seiten CE, EF entsprechend gleich; ferner $\angle AEB = \angle FEC$ als Scheitelwinkel (I, 15); also ist Grundlinie AB = Grundlinie FC, $\triangle ABE = \triangle FEC$, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also $\angle BAE = \angle ECF$. Aber $\angle ECD > \angle EDF$ (Axiom 8); also ist $\angle ACD > \angle BAE$. Ähnlich lässt sich, bei Halbierung von BC, zeigen, dass auch $\angle BCG$, d.h. $\angle ACD > \angle ABC$ – S.



§ 17 (L. 10)

In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.



Das Dreieck sei ABC. Ich behaupte, dass in dem Dreieck ABC zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner sind als zwei Rechte.

Man verlängere BC nach D. Als Außenwinkel am Dreieck ABC ist dann $\angle ACD$ größer als der gegenüberliegende Innenwinkel ABC (I, 16). Man füge $\angle ACB$ beiderseits hinzu; dann sind $\angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle BCA$. Aber $\angle ACD + \angle ACB = 2 R.$ (I, 13); also sind $\angle ABC + \angle BCA < 2 R.$ Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $\angle BAC + \angle ACB < 2 R.$, desgleichen $\angle CAB + \angle ABC$ – S.

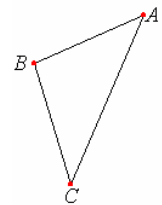
Man füge $\angle ACB$ beiderseits hinzu; dann sind $\angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle BCA$. Aber $\angle ACD + \angle ACB = 2 R.$ (I, 13); also sind $\angle ABC + \angle BCA < 2 R.$ Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $\angle BAC + \angle ACB < 2 R.$, desgleichen $\angle CAB + \angle ABC$ – S.

§ 18 (L. 11)

In jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

ABC sei ein Dreieck mit der Seite $AC > AB$. Ich behaupte, dass auch $\angle ABC > \angle BCA$.

Hier ist $AC > AB$; man trage daher $AD = AB$ ab und ziehe BD . Als Außenwinkel am Dreieck BCD ist dann $\angle ADB$ größer als der gegenüberliegende Innenwinkel DCB (I, 16); aber $ADB = ABD$, da die Seite $AB = AD$ (I, 5); also ist auch $ABD > ACB$, um so mehr $ABC > ACB$ (Axiom 8) – S.



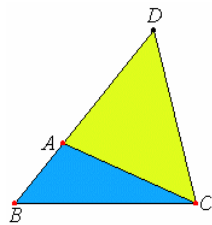
§ 19 (L. 12)

In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

ABC sei ein Dreieck mit $\angle ABC > \angle BCA$. Ich behaupte, dass auch die Seite $AC > AB$. Anderenfalls wäre AC nämlich entweder $=$ oder $<$ AB . Gleich AB kann AC nicht sein; denn sonst wäre auch $\angle ABC = \angle ACB$ (I, 5); dies ist aber nicht der Fall: also ist nicht $AC = AB$. Aber auch $< AB$ kann AC nicht sein; denn sonst wäre auch $\angle ABC < \angle ACB$ (I, 18); dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht $AC < AB$. Wie oben bewiesen, sind sie auch nicht gleich. Also ist $AC > AB$. – S.

§ 20 (L. 13)

In jedem Dreieck sind zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte.



Das Dreieck sei ABC . Ich behaupte, dass in dem Dreieck ABC zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer sind als die letzte: $BA + AC > BC$, $AB + BC > AC$ und $BC + CA > AB$.

Man verlängere BA nach Punkt D , mache $AD = CA$ und ziehe DC .

Da $DA = AC$, ist auch $\angle ADC = \angle ACD$ (I, 5); also $BCD > ADC$ (Axiom 8); und da DBC ein Dreieck ist mit $\angle BCD > \angle BDC$, dem größeren Winkel aber die größere Seite gegenüberliegt (I, 19), so ist $DB > BC$. Aber $DA = AC$; also sind $BA + AC > BC$. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $AB + BC > CA$ und $BC + CA > AB$ – S.

§ 21 (L. 14)

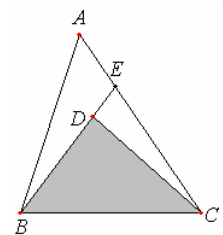
Sind in einem Dreieck über einer seiner Seiten von ihren Enden aus zwei Strecken innerhalb zusammengebracht, so müssen die zusammengebrachten Strecken kleiner sein als die beiden übrigen Dreiecksseiten zusammen, dabei aber den größeren Winkel umfassen.

Im Dreieck ABC seien nämlich über BC , einer seiner Seiten, von ihren Enden B, C aus zwei Strecken BD, DC innerhalb zusammengebracht. Ich behaupte, dass BD und DC zusammen kleiner als die beiden übrigen Dreiecksseiten $BA + AC$ sind, dabei aber den größeren Winkel umfassen, nämlich $BDC > BAC$.

Man verlängere BD nach E . Da in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die letzte (I, 20), so sind im Dreieck ABE die zwei Seiten $AB + AE > BE$; man füge EC beiderseits hinzu; dann sind $BA + AC > BE + EC$.

Ebenso sind im Dreieck CED die zwei Seiten $CE + ED > CD$; man füge daher DB beiderseits hinzu; dann sind $CE + EB > CD + DB$. Wie oben bewiesen, sind $BA + AC > BE + EC$; um so mehr sind $BA + AC > BD + DC$.

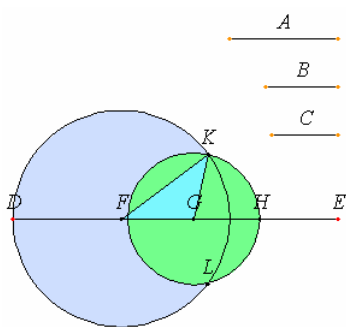
Zweitens ist, da an jedem Dreieck der Außenwinkel größer als der gegenüberliegende Innenwinkel ist (I, 16), am Dreieck CDE der Außenwinkel $BDC > CED$. Aus demselben Grunde ist auch am Dreieck ABE der Außenwinkel $CEB > BAC$. Wie oben bewiesen, ist $BDC > CEB$; um so mehr ist $BDC > BAC$ – S.



§ 22 (A. 8)

Aus drei Strecken die drei gegebenen gleich sind, ein Dreieck zu errichten; hierbei müssen weil in jedem Dreieck zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer sind als die letzte (I, 20) stets zwei beliebige zusammengenommen, größer sein als die letzte.

Die drei gegebenen Strecken seien A, B, C , und von ihnen seien stets zwei, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte: $A + B > C, A + C > B, B + C > A$. Man soll aus Strecken, die A, B, C gleich sind, ein Dreieck errichten.



Man ziehe eine in D begrenzte, nach E unbegrenzte gerade Linie DE und trage $DF = A, FG = B, GH = C$ ab; ferner zeichne man mit F als Mittelpunkt, FD als Abstand den Kreis DKL , ebenso mit G als Mittelpunkt, GH als Abstand den Kreis KLH , ziehe KF und KG ; ich behaupte, dass das Dreieck KFG aus drei Strecken errichtet ist, die A, B, C gleich sind.

Da nämlich Punkt F Mittelpunkt des Kreises DKL ist, ist $FD = FK$; aber $FD = A$; also ist auch $KF = A$. Da ebenso Punkt G Mittelpunkt des Kreises LKH ist, ist $GH = GK$; aber $GH = C$; also ist auch $KG = C$. Ferner ist $FG = B$. Die drei Strecken KF, FG, GK sind also den drei Strecken A, B, C gleich. Also hat man aus drei Strecken KF, FG, GK , die drei gegebenen Strecken A, B, C gleich sind, ein Dreieck errichtet, nämlich KFG – dies hatte man ausführen sollen.

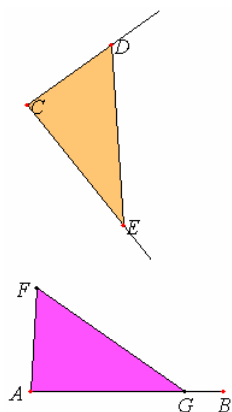
Die drei gegebenen Strecken A, B, C gleich sind, ein Dreieck errichtet, nämlich KFG – dies hatte man ausführen sollen.

§ 23 (A. 9)

An eine gegebene gerade Linie in einem Punkte auf ihr einen einem gegebenen geradlinigen Winkel gleichen geradlinigen Winkel anzutragen.

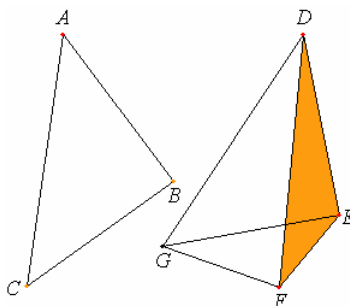
Die gegebene gerade Linie sei AB , der Punkt auf ihr A , der gegebene geradlinige Winkel DCE . Man soll an die gegebene gerade Linie AB in dem Punkte A auf ihr einen dem gegebenen geradlinigen Winkel DCE gleichen geradlinigen Winkel antragen.

Man wähle auf beiden geraden Linien CD, CE Punkte D, E beliebig und ziehe DE ; ferner errichte man aus drei Strecken, die den drei Strecken CD, DE, CE gleich sind, ein Dreieck AFG (I, 22), so dass $CD = AF, CE = AG$ und $DE = FG$. Da hier zwei Seiten DC, CE zwei Seiten FA, AG entsprechend gleich sind, auch Grundlinie $DE =$ Grundlinie FG , so ist $\angle DCE = \angle FAG$ (I, 8). Man hat also an eine gegebene gerade Linie AB in einem Punkte A auf ihr einen einem gegebenen geradlinigen Winkel DCE gleichen geradlinigen Winkel angetragen, nämlich FAG – dies hatte man ausführen sollen.



§ 24 (L. 15)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind, der von den gleichen Strecken umfasste Winkel aber im ersten Dreieck größer ist als im zweiten, dann muss auch die Grundlinie im ersten Dreieck größer sein als im zweiten.

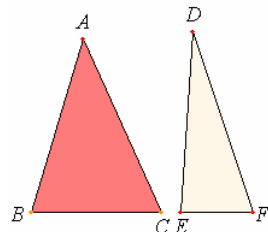


ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich $AB = DE, AC = DF$; der Winkel bei A sei aber größer als der Winkel bei D . Ich behaupte, dass auch Grundlinie $BC >$ Grundlinie EF .

Hier ist $\angle BAC > \angle EDF$; man trage daher an die gerade Linie DE im Punkte D auf ihr $\angle EDG = \angle BAC$ an (I, 23), mache $DG = AC$ oder DF und ziehe EG, FG .

Da $AB = DE$ und $AC = DG$, so sind zwei Seiten BA, AC zwei Seiten

ED, DG entsprechend gleich; ferner $\angle BAC = \angle EDG$; also ist Grundlinie $BC =$ Grundlinie EG (I, 4). Andererseits ist, da $DF = DG$, auch $\angle DGF = \angle DFG$ (I, 5); also $DFG > EGF$ (Axiom 8); um so mehr ist $EFG > EGF$. Da so EFG ein Dreieck mit $\angle EFG > \angle EGF$ ist, dem größeren Winkel aber die größere Seite gegenüberliegt (I, 19), so ist auch die Seite $EG > EF$. Aber $EG = BC$; also ist auch $BC > EF$ – S.



§ 25 (L. 16)

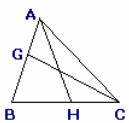
Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind, die Grundlinie aber im ersten Dreieck größer ist als im zweiten, dann muss auch der von den gleichen Strecken umfasste Winkel im ersten Dreieck größer sein als im zweiten.

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich $AB = DE$, $AC = DF$; Grundlinie BC sei aber $>$ Grundlinie EF. Ich behaupte, dass auch $\angle BAC > \angle EDF$.

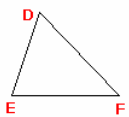
Anderenfalls wäre er entweder ihm gleich oder kleiner. Gleich EDF kann BAC nicht sein; denn sonst wäre auch Grundlinie BC = Grundlinie EF (I, 4); dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht $\angle BAC = EDF$. Aber auch $<$ EDF kann BAC nicht sein; denn sonst wäre auch Grundlinie BC $<$ Grundlinie EF (I, 24), dies ist aber nicht der Fall; also ist nicht $\angle BAC < EDF$. Wie oben bewiesen, sind sie auch nicht gleich also ist $BAC > EDF - S$.

§ 26 (L. 17)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel zwei Winkeln entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite, nämlich entweder die den gleichen Winkeln anliegenden oder die einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten einander gleich, dann müssen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten entsprechend gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel.



ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Winkel ABC, BCA zwei Winkeln DEF, EFD entsprechend gleich sind, nämlich $ABC = DEF$, $BCA = EFD$; ferner sei in ihnen eine Seite einer Seite gleich, zunächst die den gleichen Winkeln anliegende $BC = EF$.



Ich behaupte, dass in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten entsprechend gleich sein müssen, $AB = DE$, $AC = DF$, und der letzte Winkel dem letzten Winkel, $BAC = EDF$.

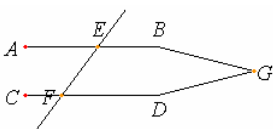
Wäre nämlich AB ungleich DE, so müsste eine der Strecken größer sein. AB sei die größere; dann trage man $BG = DE$ ab und ziehe GC. Da hier $BG = DE$ und $BC = EF$, so wären zwei Seiten BG, BC zwei Seiten DE, EF entsprechend gleich; ferner $\angle GBC = \angle DEF$; also wäre Grundlinie $GC = DF$, $\triangle GBC = \triangle DEF$, und die übrigen Winkel müssten den übrigen Winkeln gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also wäre $\angle GCB = DFE$. Nach Voraussetzung ist aber $DFE = BCA$; also wäre auch $\angle BCG = BCA$, der kleinere dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. AB ist also nicht ungleich DE, also ihm gleich. Aber auch $BC = EF$; mithin sind zwei Seiten AB, BC zwei Seiten DE, EF entsprechend gleich; ferner $\angle ABC = \angle DEF$; also ist Grundlinie $AC = DF$ und der letzte Winkel BAC dem letzten Winkel EDF gleich (I, 4).

Zweitens seien Seiten gleich, die gleichem Winkel gegenüberliegen, etwa $AB = DE$. Ich behaupte wieder, dass die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein müssen, $AC = DF$ und $BC = EF$, schließlich auch der letzte Winkel BAC dem letzten Winkel EDF gleich.

Wäre nämlich BC ungleich EF, so müsste eine der Strecken größer sein. BC sei etwa die größere; dann trage man $BH = EF$ ab und ziehe AH. Da hier $BH = EF$ und $AB = DE$, so wären zwei Seiten AB, BH zwei Seiten DE, EF entsprechend gleich; auch umfassten sie gleiche Winkel; also wäre Grundlinie $AH = DF$, $\triangle ABH = \triangle DEF$, und die übrigen Winkel müssten den übrigen Winkeln gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also wäre $\angle BHA = EFD$. Aber $EFD = BCA$; mithin wäre am Dreieck AHC der Außenwinkel BHA dem gegenüberliegenden Innenwinkel BCA gleich; dies ist aber unmöglich (I, 16). BC ist also nicht ungleich EF, also ihm gleich. Aber auch $AB = DE$; mithin sind zwei Seiten AB, BC zwei Seiten DE, EF entsprechend gleich; auch umfassen sie gleiche Winkel; also ist Grundlinie $AC = DF$, $\triangle ABC = \triangle DEF$ und der letzte Winkel BAC dem letzten Winkel EDF gleich (I, 4) – S.

§ 27 (L. 18)

Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien einander gleiche innere Wechselwinkel bildet, müssen diese geraden Linien einander parallel sein.



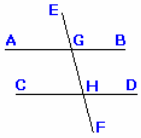
Die gerade Linie EF bilde nämlich beim Schnitt mit den zwei geraden Linien AB, CD einander gleiche Wechselwinkel AEF, EFD.

Ich behaupte, dass $AB \parallel CD$. Anderenfalls müssten sich nämlich AB, CD bei Verlängerung treffen entweder nach B, D zu oder nach A, C zu (I, Definition 23); man verlängere sie, sie mögen sich nach B, D zu treffen, in G. Dann wäre am Dreieck GEF der Außenwinkel AEF dem gegenüberliegenden Innenwinkel EFG gleich; dies ist aber unmöglich (I, 16); also treffen sich AB, CD bei Verlängerung nicht auf der Seite B, D.

Ähnlich lässt sich zeigen; dass sie es auch nach A, C zu nicht tun; nach keiner Seite hin sich treffende sind aber parallel (I, Definition 23); also ist $AB \parallel CD$ – S.

§ 28 (L. 19)

Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass ein äußerer Winkel dem auf derselben Seite innen gegenüberliegenden gleich oder innen auf derselben Seite liegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich werden, dann müssen diese geraden Linien einander parallel sein.

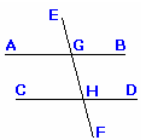


Die gerade Linie EF mache nämlich beim Schnitt mit den zwei geraden Linien AB, CD den äußeren Winkel EGB dem innen gegenüberliegenden Winkel GHD gleich oder innen auf derselben Seite liegenden $BGH + GHD = 2 R.$ Ich behaupte, dass $AB \parallel CD.$

Da nämlich $EGB = GHD,$ andererseits $EGB = AGH$ (I, 15), so ist auch $AGH = GHD;$ sie sind dabei Wechselwinkel; also ist $AB \parallel CD$ (I, 27). Im zweiten Fall sind, da $BGH + GHD = 2 R.,$ aber auch $AGH + BGH = 2 R.$ (I, 13), $AGH + BGH = BGH + GHD$ (Postulat 4, Axiom 1); man nehme BGH beiderseits weg; dann ist Rest $AGH = \text{Rest } GHD;$ sie sind dabei Wechselwinkel; also ist $AB \parallel CD$ (I, 27) – S.

§ 29 (L. 20)

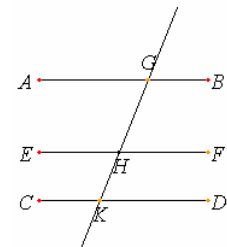
Beim Schnitt einer geraden Linie mit zwei parallelen geraden Linien werden innere Wechselwinkel einander gleich, jeder äußere Winkel wird dem innen gegenüberliegenden gleich, und innen auf derselben Seite entstehende Winkel werden zusammen zwei Rechten gleich.



Man bringe nämlich die gerade Linie EF mit den parallelen Geraden AB, CD zum Schnitt. Ich behaupte, dass dann die Wechselwinkel AGH, GHD gleich werden, der äußere Winkel EGB dem innen gegenüberliegenden GHD gleich und die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel $BGH + GHD = 2 R.$

Wäre nämlich AGH ungleich GHD, so müsste einer der Winkel größer sein. AGH sei der größere; man füge BGH beiderseits hinzu; dann wären $AGH + BGH > BGH + GHD.$ Aber $AGH + BGH = 2 R.$ (I, 13); also wären $BGH + GHD < 2 R.$ Von Winkeln aus, die zusammen $< 2 R.$ sind, uns unendliche verlängerte treffen sich aber (Postulat 5); also müssten AB, CD sich bei der Verlängerung ins unendliche treffen; sie treffen sich aber nicht, da sie nach Voraussetzung parallel sind (I, Definition 23). AGH ist also nicht ungleich GHD, also ihm gleich.

Weiter ist $AGH = EGB$ (I, 15), also auch $EGB = GHD.$ Man füge BGH beiderseits hinzu; dann sind $EGB + BGH = BGH + GHD;$ aber $EGB + BGH = 2 R.$ (I, 13); also sind auch $BGH + GHD = 2 R.$ – S.



§ 30 (L. 21)

Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel.

AB, CD seien beide $\parallel EF.$ Ich behaupte, dass auch $AB \parallel CD.$

Man bringe die gerade Linie GK mit ihnen zum Schnitt. Da die parallelen geraden Linien AB, EF von der geraden Linie GK geschnitten werden, ist $AGK = GHF$ (I, 29).

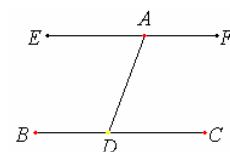
Ebenso ist, da die parallelen geraden Linien EF, CD von der geraden Linie GK geschnitten werden, $GHF = GKD$ (I, 29). Wie oben bewiesen, ist $AGK = GHF;$ also ist auch $AGK = GKD;$ sie sind dabei Wechselwinkel. Also ist $AB \parallel CD$ (I, 27) – S. dies hatte man beweisen sollen.

§ 31 (A. 10)

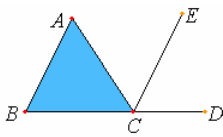
Durch einen gegebenen Punkt eine einer gegebenen geraden Linie parallele gerade Linie zu ziehen.

Der gegebene Punkt sei A, die gegebene gerade Linie BC. Man soll durch den Punkt A eine der geraden Linie BC parallele gerade Linie ziehen.

Auf BC wähle man Punkt D beliebig, ziehe AD, trage an die geraden Linie DA im Punkte A auf ihr $\angle DAE = ADC$ an (I, 23) und verlängere EA gerade um die gerade Linie AF. Da die gerade Linie AD beim Schnitt mit den zwei geraden Linien BC, EF einander gleiche Wechselwinkel



bildet, nämlich EAD, ADC, so ist $EAF \parallel BC$ (I, 27). Also hat man durch den gegebenen Punkt A zur gegebenen geraden Linie BC parallel die gerade Linie EAF gezogen – dies hatte man ausführen sollen.



§ 32 (L. 22)

An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich.

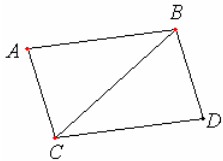
Das Dreieck sei ABC. Man verlängere seine eine Seite BC nach D; ich behaupte, dass der Außenwinkel ACD den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln $CAB + ABC$ gleich ist und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks $ABC + BCA + CAB = 2 R.$

Durch Punkt C ziehe man $CE \parallel$ zur geraden Linie AB (I, 31). Da $AB \parallel CE$ und sie von AC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel $BAC = ACE$ (I, 29). Ebenso ist, da $AB \parallel CE$ und sie von der geraden Linie BD geschnitten werden, der äußere Winkel ECD dem innen gegenüberliegenden ABC gleich (I, 29).

Wie oben bewiesen, ist auch $ACE = BAC$; also ist der ganze Winkel ACD gen beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln $BAC + ABC$ gleich (Axiom 2). Man füge ACB beiderseits hinzu; dann sind $ACD + ACB = ABC + BCA + CAB$. Aber $ACD + ACB = 2 R.$ (I, 13); also sind auch $ACB + CBA + CAB = 2 R. - S.$

§ 33 (L. 23)

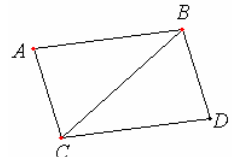
Strecken, welche gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind auch selbst gleich und parallel.



AB, CD seien gleich und parallel, und die Strecken AC, BD mögen sie auf denselben Seiten verbinden. Ich behaupte, dass auch AC, BD gleich und parallel sind. Man ziehe BC.

Da $AB \parallel CD$ und sie von BC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel $ABC = BCD$ (I, 29). Da $AB = CD$ ist und BC gemeinsam, so sind zwei Seiten

AB, BC zwei Seiten BC, CD gleich; auch $\angle ABC = \angle BCD$; also ist Grundlinie $AC =$ Grundlinie BD , $\triangle ABC = \triangle BCD$, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4); also ist $\angle ACB = \angle CBD$. Da hier die gerade Linie BC beim Schnitt mit den zwei geraden Linien AC, BD einander gleiche Wechselwinkel bilden, so ist $AC \parallel BD$ (I, 27). Die Gleichheit ist oben bewiesen – S.

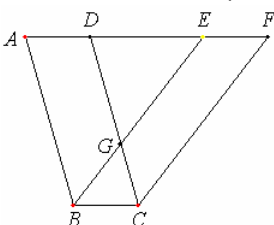


§ 34 (L. 24)

Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich, und die Diagonale halbiert es.

ACDB sei ein Parallelogramm, BC Diagonale in ihm. Ich behaupte, dass im Parallelogramm ACDB die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und dass die Diagonale BC es halbiert.

Da $AB \parallel CD$ und sie von der geraden Linie BC geschnitten werden, sind die Wechselwinkel $ABC = BCD$ (I, 29). Ebenso sind, da $AC \parallel BD$ und sie von BC geschnitten werden, die Wechselwinkel $ACB = CBD$. Mithin sind ABC, BCD zwei Dreiecke, in denen zwei Winkel ABC, BCA zwei Winkeln BCD, CBD entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite gleich, nämlich die den gleichen Winkeln anliegende BC, die ihnen gemeinsam ist; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten entsprechend gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel (I, 26); also ist die Seite $AB = CD$, $AC = BD$ sowie $\angle BAC = \angle CBD$. Und da $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle CBD = \angle ACB$, so sind die ganzen Winkel $\angle ABD = \angle ACD$ (Axiom 2). Dass auch $\angle BAC = \angle CBD$, ist oben bewiesen.



Im Parallelogramm sind also die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich. Weiter behaupte ich, dass die Diagonale es halbiert. Da nämlich $AB = CD$ ist und BC gemeinsam, so sind zwei Seiten AB, BC zwei Seiten CD, BC entsprechend gleich; ferner $\angle ABC = \angle BCD$; also ist auch Grundlinie $AC = BC$ und $\triangle ABC = \triangle BCD$ (I, 4). Also

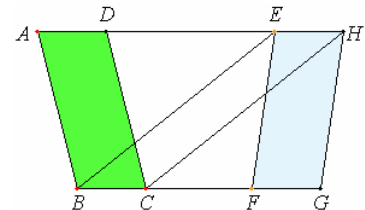
halbiert die Diagonale BC das Parallelogramm ABCD – die hatte man beweisen sollen.

§ 35 (L. 25)

Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.

Die Parallelogramme ABCD, EBCF mögen auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen AF, BC liegen. Ich behaupte, dass Parallelogramm ABCD = EBCF.

Da ABCD ein Parallelogramm ist, ist $AD = BC$ (I, 34). Aus demselben Grunde ist $EF = BC$, so dass auch $AD = EF$; DE ist gemeinsam; also sind die ganzen Strecken $AE = DF$ (Axiom 2). Aber auch $AB = DC$; mithin sind zwei Seiten EA, AB zwei Seiten FD, DC entsprechend gleich; ferner ist $\angle FDC = \angle EAB$, der äußere dem inneren (I, 29); also ist Grundlinie EB = Grundlinie FC, und $\triangle EAB$ muss = $\triangle DFC$ sein (I, 4). Man nehme das gemeinsame $\triangle DGE$ weg; dann ist das Resttrapez ABGD = dem Resttrapez EGCF (Axiom 3). Man füge $\triangle GBC$ beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm ABCD = dem ganzen Parallelogramm EBCF (Axiom 2) – S.



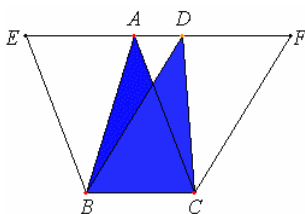
§ 36 (L. 26)

Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich.

ABCD, EFGH seien auf gleichen Grundlinien BC, FG zwischen denselben Parallelen AH, BG gelegene Parallelogramme. Ich behaupte, dass Parallelogramm ABCD = EFGH.

Man ziehe BE, CH. Da $BC = FG$, andererseits $FG = EH$ (I, 34), so ist auch $BC = EH$; dabei sind sie parallel; und EB, HC verbinden sie. Strecken, die gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind aber gleich und parallel (I, 33) auch EB, HC sind also gleich und parallel; also ist EBCH ein Parallelogramm.

Und es ist = ABCD; denn es hat mit ihm dieselbe Grundlinie BC und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen BC, AH (I, 35). Aus demselben Grunde ist auch EFGH demselben EBCH gleich, so dass auch Parallelogramm ABCD = EFGH – S.

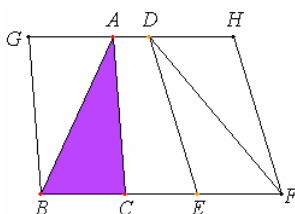


§ 37 (L. 27)

Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich.

Die Dreiecke ABC, DBC mögen auf derselben Grundlinie BC zwischen denselben Parallelen AD, BC liegen. Ich behaupte, dass $\triangle ABC = \triangle DBC$.

Man verlängere AD nach beiden Seiten nach E, F, ziehe durch B BE || CA und durch C CF || BD (I, 31). Dann sind EBCA und DBCF beide Parallelogramme; und sie sind gleich; denn sie liegen auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen BC, EF (I, 35). Ferner ist $\triangle ABC$ vom Parallelogramm EBCA die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale AB halbiert (I, 34). Und $\triangle DBC$ ist vom Parallelogramm DBCF die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale DC halbiert. Die Hälften gleicher Ganzen sind aber gleich (Axiom 6). Also ist $\triangle ABC = \triangle DBC$ – S.



§ 38 (L. 28)

Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich.

Die Dreiecke ABC, DEF mögen auf gleichen Grundlinien BC, EF zwischen denselben Parallelen BF, AD liegen. Ich behaupte, dass $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Man verlängere AD nach beiden Seiten nach G, H, ziehe durch B BG || CA und durch F FH || DE.

Dann sind GBCA und DEFH beide Parallelogramme; und GBCA = DEFH; denn sie liegen auf gleichen Grundlinien BC, EF und zwischen denselben Parallelen BF, GH (I, 36). Ferner ist $\triangle ABC$ vom Parallelogramm GBCA die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale AB halbiert (I, 34). Und $\triangle FED$ ist vom Parallelogramm DEFH die Hälfte; denn dieses wird von der Diagonale DF halbiert. Die Hälften gleicher Ganzen sind aber gleich (Axiom 6). Also ist $\triangle ABC = \triangle DEF$ – S.

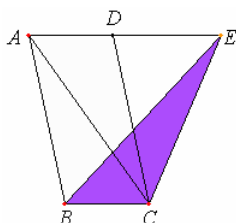
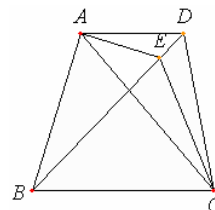
§ 39 (L. 29)

Auf derselben Grundlinie nach derselben Seite gelegene gleiche Dreiecke liegen auch zwischen denselben Parallelen.

ABC, DBC seien gleiche auf derselben Grundlinie BC nach derselben Seite gelegene Dreiecke. Ich behaupte, dass sie zwischen denselben Parallelen liegen. Man ziehe AD. Ich behaupte, dass $AD \parallel BC$.

Anderenfalls ziehe man durch Punkt A $AE \parallel$ zur geraden Linie BC und verbinde EC. Dann wäre $\triangle ABC = \triangle EBC$; denn es läge mit ihm auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen (I, 37).

Aber $ABC = DBC$; also wäre auch $DBC = EBC$; das größere dem kleineren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich; also ist AE nicht \parallel BC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere von AD verschiedene Linie es ist; also ist $AD \parallel BC$ (I, 31) – S.



§ 40 (L. 30)

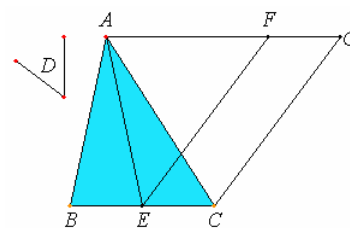
Auf gleichen Grundlinie nach derselben Seite gelegene gleiche Dreiecke liegen auch zwischen denselben Parallelen.

§ 41 (L. 31)

Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck.

Das Parallelogramm ABCD habe nämlich mit dem Dreieck EBC dieselbe Grundlinie BC und liege zwischen denselben Parallelen BC, AE. Ich behaupte, dass Parallelogramm ABCD = 2 \triangle BEC.

Man ziehe AC. Dann ist $\triangle ABC = \triangle EBC$; denn es liegt mit ihm auf derselben Grundlinie BC und zwischen denselben Parallelen BC, AE (I, 37). Aber Parallelogramm ABCD = 2 \triangle ABC; denn es wird von der Diagonale AC halbiert (I, 34); folglich ist auch Parallelogramm ABCD = 2 \triangle EBC – S.



§ 42 (A. 11)

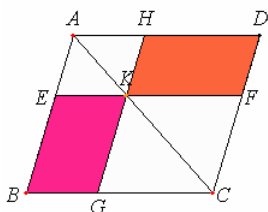
Ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten.

Das gegebene Dreieck sei ABC, der gegebene geradlinige Winkel D. Man soll ein dem Dreieck ABC gleiches Parallelogramm in dem geradlinigen Winkel D errichten.

Man halbiere BC in E (I, 10), ziehe AE und trage an die gerade Linie EC im Punkte E auf ihr $\angle CEF = \angle D$ an (I, 23), ziehe ferner durch A $AG \parallel$ EC und durch C $CG \parallel$ EF (I, 31).

Dann ist FECE ein Parallelogramm. Da $BE = EC$, ist ferner $\triangle ABE = \triangle AEC$; denn sie liegen auf gleichen Grundlinien BE, EC und zwischen denselben Parallelen BC, AG (I, 38); also ist $\triangle ABC = 2 \triangle AEC$. Aber auch Parallelogramm FECE = 2 $\triangle AEC$; denn es hat mit ihm dieselbe Grundlinie und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen (I, 41). Also ist Parallelogramm FECE = $\triangle ABC$; und sein Winkel CEF ist dem gegebenen $\angle D$ gleich.

Also hat man ein dem Dreieck ABC gleiches Parallelogramm, nämlich FECE, im Winkel $\angle CEF = D$ errichtet – dies hatte man ausführen sollen.



§ 43 (L. 32)

In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.

ABCD sei ein Parallelogramm, AC Diagonale in ihm; EH, FG seien die Parallelogramme um AC, und BK, KD die sogenannten Ergänzungen. Ich behaupte, dass die Ergänzung BK der Ergänzung KD gleich ist.

Da nämlich ABCD ein Parallelogramm ist, AC Diagonale in ihm, ist $\triangle ABC = \triangle ACD$ (I, 34).

Ebenso ist, da EH ein Parallelogramm ist, AK Diagonale in ihm, $\triangle AEK = \triangle AHK$.

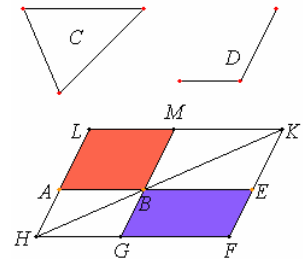
Aus demselben Grunde ist auch $\triangle KFC = \triangle KGC$. Da hier sowohl $\triangle AEK = \triangle AHK$ als auch $\triangle KFC = \triangle KGC$, so ist $\triangle AEK$ mit $\triangle KGC$ zusammen = $\triangle AHK$ mit $\triangle KFC$ zusammen (Axiom 2). Aber auch das ganze $\triangle ABC$ ist dem ganzen $\triangle ADC$ gleich; also ist der Rest, die Ergänzung BK, dem Rest, der Ergänzung KG, gleich. (Axiom 3) – S.

§ 44 (A. 12)

An eine gegebene Strecke ein einem gegebenem Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.

Die gegebene Strecke sei AB, das gegebene Dreieck C und der gegebene geradlinige Winkel D. Man soll an die gegebene Strecke AB ein dem gegebenem ΔC gleiches Parallelogramm in einem Winkel = D anlegen.

Man errichte im Winkel $\text{EBG} = D$ das Parallelogramm $\text{BEFG} = \Delta C$ (I, 42) und lege es so, dass BE AB gerade fortsetzt, ziehe FG nach H durch, ziehe ferner durch A AH \parallel BG oder EF und verbinde HB. Da hier die Parallelen AH, EF von der geraden Linie HF geschnitten werden, so sind $\angle \text{AHF} + \text{HFE} = 2 \text{ R.}$ (I, 29). Dann sind $\text{BHG} + \text{GFE} < 2 \text{ R.}$ (Axiom 8).



Von Winkeln aus, die zusammen $< 2 \text{ R.}$ sind, ins unendliche verlängerte treffen sich aber (Postulat 5); also müssen sich HB, FE bei Verlängerung treffen. Man verlängere sie, sie mögen sich in K treffen.

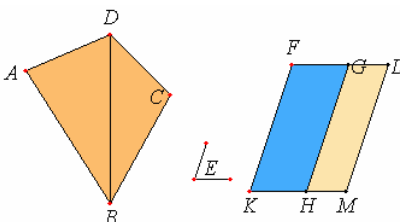
Ferner ziehe man durch Punkt K KL \parallel EA oder FH und verlängere HA, GB nach den Punkten L, M. Dann ist HLMK ein Parallelogramm, HK Diagonale in ihm, und um HK liegen die Parallelogramme AG, ME; die sogenannten Ergänzungen sind LB, BF; also ist $\text{LB} = \text{BF}$ (I, 43). Aber Parallelogramm $\text{BF} = \Delta C$; also ist auch Parallelogramm $\text{LB} = \Delta C$. Und da $\angle \text{GBE} = \text{ABM}$ (I, 15), andererseits $\text{GBE} = \angle D$, so ist auch $\text{ABM} = \angle D$.

Man hat also an die gegebene Strecke AB ein dem gegebenem ΔC gleiches Parallelogramm, nämlich LB, in dem Winkel $\text{ABM} = D$ angelegt – dies hatte man ausführen sollen.

§ 45 (A. 13)

Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten.

Die gegebene geradlinige Figur sei ABCD, der gegebene Winkel E. Man soll ein der geradlinigen Figur ABCD gleiches Parallelogramm in dem gegebenen Winkel errichten. Man ziehe DB, errichte im Winkel $\text{HKF} = E$ das Parallelogramm $\text{FH} = \Delta \text{ABD}$ (I, 42) und lege an die Strecke GH im Winkel $\text{GHM} = E$ das Parallelogramm $\text{GM} = \Delta \text{DBC}$ an (I, 44). Da $\angle E$ sowohl = HKF als auch = GHM, ist auch $\text{HKF} = \text{GHM}$. Man füge KHG beiderseits hinzu; dann sind $\text{FKH} + \text{KHG} = \text{KHG} + \text{GHM}$. Aber $\text{FKH} + \text{KHG} = 2 \text{ R.}$ (I, 29); also sind auch $\text{KHG} + \text{GHM} = 2 \text{ R.}$



Hier bilden an einer geraden Linie GH im Punkte H auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien KH, HM Nebenwinkel, die zusammen = 2 R. sind; also setzt KH HM gerade fort (I, 14). Da ferner die Parallelen KM, FG von der geraden Linie HG geschnitten werden, sind die Wechselwinkel $\text{MHG} = \text{HGF}$ (I, 29). Man füge HGL beiderseits hinzu; dann sind $\text{MHG} + \text{HGL} = \text{HGF} + \text{HGL}$.

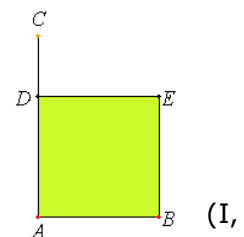
Aber $\text{MHG} + \text{HGL} = 2 \text{ R.}$ (I, 29); also sind auch $\text{HGF} + \text{HGL} = 2 \text{ R.}$; also setzt FG GL gerade fort (I, 14). Und da $\text{FK} = \text{GM}$ und $\parallel \text{HG}$ (I, 34), ebenso HG mit ML, so ist auch $\text{KH} = \text{ML}$ und $\parallel \text{LM}$ (I, 30); und die Strecken KM, FL verbinden sie; also sind auch KM, FL gleich und parallel (I, 33); also ist KFLM ein Parallelogramm. Da $\Delta \text{ABD} = \text{Parallelogramm FH}$ und $\text{DBC} = \text{GM}$, so ist die ganze geradlinige Figur ABCD dem ganzen Parallelogramm KFLM gleich (Axiom 2). Man hat also ein der gegebenen geradlinigen Figur ABCD gleiches Parallelogramm, nämlich KFLM, im Winkel FKM , der dem gegebenen $\angle E$ gleich ist, errichtet – dies hatte man ausführen sollen.

§ 46 (A. 14)

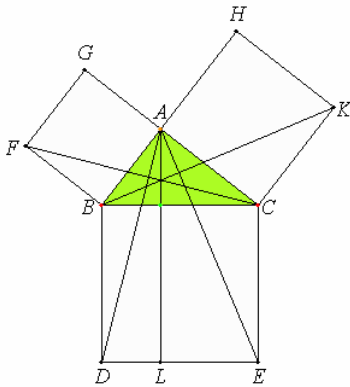
Über einer gegebenen Strecke das Quadrat zu zeichnen.

Die gegebene Strecke sei AB. Man soll über der Strecke AB das Quadrat zeichnen.

Man ziehe AC rechtwinklig zur geraden Linie AB vom Punkte A auf ihr aus (I, 11) und trage $\text{AD} = \text{AB}$ ab; ferner ziehe man durch Punkt D $\text{DE} \parallel \text{AB}$ (I, 31) und durch Punkt B $\text{BE} \parallel \text{AD}$.



Dann ist ADEB ein Parallelogramm; also $AB = DE$ und $AD = BE$ (I, 34). Aber $AB = AD$; also sind BA, AD, DE, EB alle vier einander gleich (Axiom 1); das Parallelogramm ADEB ist also gleichseitig. Ich behaupte, dass es auch rechtwinklig ist. Da nämlich die Parallelen AB, DE von der geraden Linie AD geschnitten werden, so sind $\angle BAD + ADE = 2 R.$ (I, 29). $\angle BAD$ ist aber ein Rechter; also ist auch $\angle ADE$ ein Rechter (Axiom 3). Im Parallelogramm sind aber die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich (I, 34); auch die gegenüberliegenden Winkel $\angle ABE, \angle BED$ sind also beide Rechte; also ist ADEB rechtwinklig. Die Gleichseitigkeit ist oben bewiesen. Also ist es Quadrat (I, Definition 22), und man hat es über der Strecke AB gezeichnet – dies hatte man ausführen sollen.



§ 47 (L. 33)

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel $\angle BAC$. Ich behaupte, dass $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Man zeichne nämlich über BC das Quadrat $BDEC$ (I, 46) und über BA, AC die Quadrate GB, HC ; ferner ziehe man durch A $AL \parallel BD$ oder CE und ziehe AD, FC .

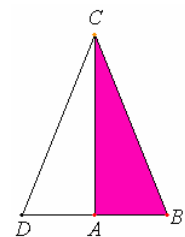
Da hier die Winkel $\angle BAC, \angle BAG$ beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen $= 2 R.$ sind; also setzt CA, AG gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch BA, AH gerade fort.

Ferner ist $\angle DBC = \angle FBA$; denn beide sind Rechte (Postulat 4); daher füge man $\angle ABC$ beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel $\angle DBA$ dem ganzen $\angle FBC$ gleich (Axiom 2). Da ferner $DB = BC$ und $FB = BA$ (I, Definition 22), sind die zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC übereinander entsprechend gleich; und $\angle DBA = \angle FBC$; also ist Grundlinie $AD =$ Grundlinie FC und $\triangle ABD = \triangle FBC$ (I, 4).

Ferner ist Parallelogramm $BL = 2 \triangle ABD$; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41); auch ist das Quadrat $GB = 2 \triangle FBC$; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB , und liegen zwischen denselben Parallelen FB, QC . Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Axiom 5). Also ist Parallelogramm $BL =$ Quadrat GB . Ähnlich lässt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, dass auch Parallelogramm $CL =$ Quadrat HC ; also ist das ganze Quadrat $BDEC$ den zwei Quadraten $GB + HC$ gleich (Axiom 2). Dabei ist das Quadrat $BDEC$ über BC gezeichnet und GB, HC über BA, AC . Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich. – S.

§ 48 (L. 34)

Wenn an einem Dreieck das Quadrat über einer Seite den Quadraten über den beiden anderen Seiten zusammen gleich ist, dann ist der von diesen beiden übrigen Seiten des Dreiecks umfasste Winkel ein Rechter.



Am Dreieck ABC sei nämlich das Quadrat über den einen Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich. Ich behaupte, dass $\angle BAC$ ein Rechter ist.

Man ziehe AD vom Punkte A aus \perp zur geraden Linie BC (I, 11), mache $AD = BA$ und ziehe AC . Da $DA = AB$, ist auch $DA^2 = AB^2$. Man füge AC^2 beiderseits hinzu; dann sind $DA^2 + AC^2 = BA^2 + AC^2$. Aber $DA^2 + AC^2 = DC^2$; denn $\angle DAC$ ist ein Rechter (I, 47). Andererseits ist $BA^2 + AC^2 = BC^2$; dies hatten wir nämlich vorausgesetzt. Also ist $DC^2 = BC^2$, so dass auch die Seite $DC = BC$. Da ferner $DA = AB$ ist und AC gemeinsam, so sind zwei Seiten DA, AC zwei Seiten BA, AC gleich; auch ist Grundlinie $DC =$ Grundlinie BC ; also ist $\angle DAC = \angle BAC$ (I, 8). $\angle DAC$ ist aber ein Rechter; also ist auch $\angle BAC$ ein Rechter. – S.