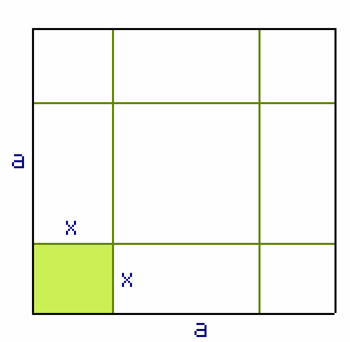
Extremwertaufgaben



Aufgabe 1

Von einem quadratischen Blech (Seitenlänge = a) werden an den Ecken Quadrate ausgeschnitten, aus dem Rest wird eine Schachtel gebildet. Wie groß muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate sein, dass das Volumen der Schachtel maximal wird?

Aufgabe 2

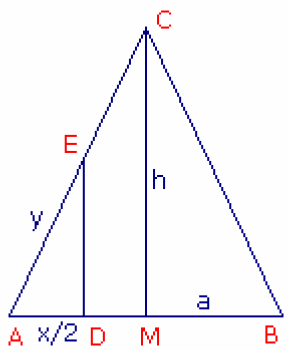
Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell einer quadratischen Säule hergestellt werden. Wie lang sind die Kanten zu wählen, damit die Säule maximales Volumen hat?

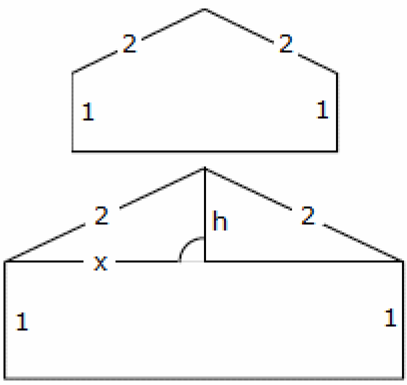
Aufgabe 3

Gegeben ist $f(x) = -x^2 + 4$. Der Funktionsgraph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Beschreibe dieser Fläche ein rechtwinkliges Dreieck so ein, dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt und die andere Ecke auf dem oberen Parabelbogen liegt. Bei Drehung um die x-Achse soll ein Kegel von möglichst großem Volumen entstehen.

Aufgabe 4

Einem gleichschenkligen Dreieck soll jenes Rechteck eingeschrieben werden, dass den größten Flächeninhalt besitzt.





Aufgabe 5

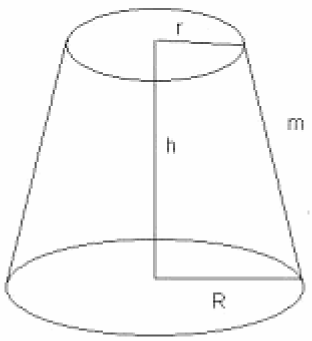
Einem Rechteck der Höhe 1 wird ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln = 2 aufgesetzt. Wie breit muss das Rechteck sein, damit der Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird?

Aufgabe 6

Aufgabe (Schweizer Vorprüfung 1999):
Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.

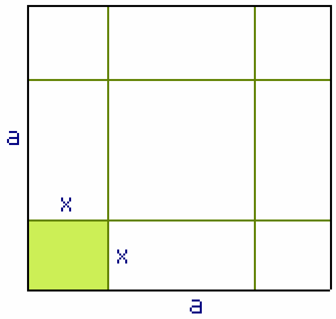
a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Extremal- und Wendepunkte mit Steigung - überall exakte Werte).

b) Ein Rechteck hat seine Ecken auf der x-Achse und auf dem Graphen von f(x). Zeigen Sie, dass zwei dieser Ecken in den Wendepunkten des Graphen von f(x) liegen, wenn das Rechteck maximale Fläche hat.



Aufgabe 7

Aus einem Kegelstumpf soll eine Verpackung konstruiert werden, die bei einem Volumen von 1 Liter möglichst wenig Verpackungsmaterial benötigt. Außerdem sei der Grundradius R gleich 2r, wobei r der Deckradius ist.



Lösungen

Aufgabe 1

Von einem quadratischen Blech (Seitenlänge = a) werden an den Ecken Quadrate ausgeschnitten, aus dem Rest wird eine Schachtel gebildet. Wie groß muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate sein, dass das Volumen der Schachtel maximal wird?

Hauptbedingung: $V = G \cdot h = (a - 2x)^2 \cdot x = f(x)$
Definitionsbereich $Db = [0;a/2]$

$f'(x) = 2(a - 2x)(-2)x + (a - 2x)^2 = -4x(a - 2x) + (a - 2x)^2$
$0 = -4x(a - 2x) + (a - 2x)^2$
$4x(a - 2x) = (a - 2x)^2 \quad | :(a - 2x)$
$a - 2x = 0$
$4x = a - 2x$
$a = 2x$
$6x = a$ … $x = a/2 \rightarrow$ Randextremum
$x = a/6$
$V = (a - a/3)^2 \cdot a/6 = (2a/3)^2 \cdot a/6 = (4a^2)/9 \cdot a/6$
$= 4a^3/54 = 2a^3/27$
$f''(x) = -4(a - 2x) + (-4x)(-2) + 2(a - 2x)(-2) = -8a + 24x$
$f''(a/6) = -8a + 24a/6 = -8a + 4a = -4a < 0 \Rightarrow$ Max.
$f''(a/2) = -8a + 24a/2 = -8a + 12a = 4a > 0 \Rightarrow$ Min.

Antwort:
Die Quadrate müssen die Seitenlänge a/6 haben, damit das Volumen maximal
$V = 2a^3/27$
wird.

Aufgabe 2

Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell einer quadratischen Säule hergestellt werden. Wie lang sind die Kanten zu wählen, damit die Säule maximales Volumen hat?

Lösung:
Extremalbedingung $V_{max} = a^2 b$
Mit einer Nebenbedingung lässt sich die Funktion so umstellen, dass sie nur noch von einer Variablen abhängt.
Nebenbedingung $8a + 4b = 36$ … $b = 9 - 2a$
Zielfunktion $V(a) = a^2(9-2a) = -2a^3 + 9a^2;\ a \in [0; 4,5]$

Suche nach Extremstellen
$V'(a) = -6a^2 + 18a$
$V'(a) = 0 = 6a(-a + 3)$
Es existieren zwei potentielle Lösungen. Der gesuchte Extremwert könnte bei a = 3 bzw. a = 0 sein. Mittels zweiter Ableitung wird auf Extremeigenschaft getestet.
$V''(a) = -12a + 18$
$V''(3) = -18 < 0$, d.h Maximum liegt vor.

Untersuchung auf Randstellen
Die Zielfunktion ist im Intervall (0; 4,5) überall differenzierbar.
Für x = 0 wird V(0) = 0, d.h. es liegt kein Randextremum vor, analog für x = 4,5 … V(4,5) < 0.

Wird a = 3 in die Nebenbedingung eingesetzt, ergibt sich b = 3, d.h. der gesuchte Körper ist der Würfel.

Aufgabe 3

Gegeben ist $f(x) = -x^2 + 4$. Der Funktionsgraph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Beschreibe dieser Fläche ein rechtwinkliges Dreieck so ein, dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt und die andere Ecke auf dem oberen Parabelbogen liegt. Bei Drehung um die x-Achse soll ein Kegel von möglichst großem Volumen entstehen.

Lösung:

Extremalbedingung $V(r,h) = \pi/3\ r^2\ h$; Volumen eines Kegels

Nebenbedingung: $h = -x^2 + 4$, $r = x$

Durch das Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt sich die Zielfunktion $V(x) = \pi/3\ (x^2\ (-x^2 + 4))$

Die Zielfunktion wird auf Extremstellen untersucht.

$$V'(x) = \pi/3\ (-4x^3 + 8x) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Setzt man in die zweite Ableitung

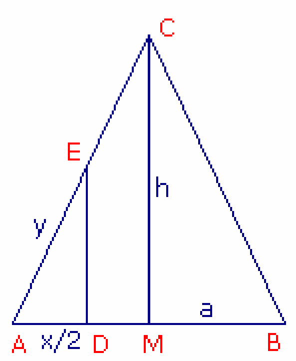
$$V''(x) = \pi/3\ (-12x^2 + 8)$$

ein, so wird

$$V''(\pm\sqrt{2}) = -16/3\ \pi < 0$$

Beide Werte liefen ein Maximum. Damit nimmt der gesuchte Kegel für $r = \sqrt{2}$ und $h = 2$ maximales Volumen an. Es beträgt: $V = 4{,}18$.

Aufgabe 4



Einem gleichschenkligen Dreieck soll jenes Rechteck eingeschrieben werden, dass den größten Flächeninhalt besitzt

Hauptbedingung: $A = x \cdot y$ … Maximum

$\Delta AMC \approx \Delta ADE$ … nach Strahlensatz

$a/2 : h = AD : DE$

$a/2 : h = (a/2 - x/2) : y$

$a/2 \cdot y = h\ (a/2 - x/2)$

$y = (2h\ (a/2 - x/2))\ /a$

Nebenbedingung: $y = (h\ (a - x))\ /a$

$A = x \cdot (h\ (a - x))\ /a$

$f(x) = x \cdot (h\ (a - x))\ /a = h/a \cdot x(a-x)$

$$f(x) = h/a\ (ax - x^2)$$

$$f'(x) = h/a\ (a - 2x)$$

$$h/a\ (a - 2x) = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$x = a/2$$

Nebenbedingung: $y = (h\ (a - a/2))\ /a = (a\ h/2)\ /a = a\ h\ /(2a) = h/2$

$$y = h/2$$

Definitionsbereich $Db = [0;a]$

Wertebereich $Wb = [0;h]$

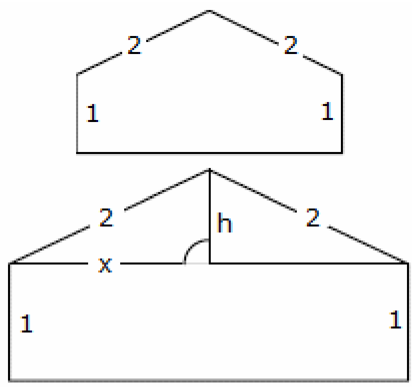
Hauptbedingung: $A = x \cdot y = a/2 \cdot h/2 = a\ h/4$

$$f''(x) = h/a\ (-2)$$

$$f''(a/2) = -2h\ /a < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Antwort: Das Rechteck mit den Seiten $a/2$; $h/2$ hat den maximalen Flächeninhalt $a\ h/4$.

Aufgabe 5



Einem Rechteck wird ein gleichschenkliges Dreieck aufgesetzt. Wie breit muss das Rechteck sein, damit der Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird?

Lösung:
Zur Vermeidung von Brüchen bezeichnen wir die halbe Grundlinie mit x. Dann ist

$h = \sqrt{4 - x^2}$

Die Fläche berechnet sich aus Rechteck und Dreieck

$A = 2x \cdot 1 + 1/2 \cdot 2x \cdot h = 2x + x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

Die Ableitung; unter Verwendung von Produkt und Kettenregel; wird Null gesetzt

$A' = 2 + 1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot 1/(2\sqrt{4 - x^2}) \cdot (-2x) =$

$= 2 + \sqrt{4 - x^2} - x^2/\sqrt{4 - x^2} = 0$

Diese Gleichung wird mit dem Nenner $\sqrt{4 - x^2}$ multipliziert

$2\sqrt{4 - x^2} + (4 - x^2) - x^2 = 0$

$0 = x^4 - 3x^2 = x^2 (x^2 - 3)$

Die einzige brauchbare Lösung dieser Gleichung ist $x = \sqrt{3}$. Die Breite des Rechtecks ist $2\sqrt{3}$.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Extremal- und Wendepunkte mit Steigung - überall exakte Werte).

b) Ein Rechteck hat seine Ecken auf der x-Achse und auf dem Graphen von f(x). Zeigen Sie, dass zwei dieser Ecken in den Wendepunkten des Graphen von f(x) liegen, wenn das Rechteck maximale Fläche hat.

Lösung:

a) $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} (1-2x^2)$

Nullstelle keine

Verhalten im Unendlichen ... die x-Achse ist Asymptote

Maximum (0 ; 1)

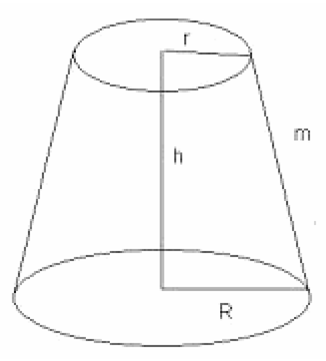
Wendepunkte $W_{1,2}$ $(\pm 1/\sqrt{2} \;;\; 1/\sqrt{e})$ mit Anstieg $-(\pm\sqrt{2/e})$

b) Zielfunktion $A = 2x\, e^{-x^2}$

$A' = 2e^{-x^2} (1-2x^2) = 0$

mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$, d.h. gerade die ermittelten Wendepunkte.

Aufgabe 7



Aus einem Kegelstumpf soll eine Verpackung konstruiert werden, die bei einem Volumen von 1 Liter möglichst wenig Verpackungsmaterial benötigt. Außerdem sei der Grundradius R gleich 2r, wobei r der Deckradius ist.

Lösung:

Volumen $1 = 7/3\, \pi\, h\, r^2$

Höhe h $h = 3/(7\pi r^2)$

Für die Oberfläche O wird dann

$O = \pi r^2 + 4\pi r^2 + 3\pi r \sqrt{r^2 + 9/(49\pi^2 r^4)}$

1.Ableitung $O' = 10\pi r + 3/2\, \pi\, (4r^3 - 18/(49\pi^2 r^3)) / \sqrt{r^4 + 9/(49\pi^2 r^2)}$

Die Nullstellen dieser Funktion sind nicht analytisch bestimmbar. Hilfe GTR

Der GTR ergibt als Lösung

$r = 0{,}3258$