Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der
Deutschen Demokratischen Republik

Aufgabensammlung

Mathematik

Klasse 10

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1981

Akademie
der
Pädagogischen
Wissenschaften
der
Deutschen
Demokratischen
Republik

Aufgabensammlung Mathematik Klasse 10

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1981

Die Aufgabensammlung wurde im Auftrag der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik von einem Autorenkollektiv des Bereichs Methodik des Mathematikunterrichts der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena unter Leitung von Günter Schlosser in Zusammenarbeit mit der Abteilung Mathematik der APW entwickelt.

Die Aufgabensammlung ist als Arbeitsmaterial für Schüler vom Ministerium für Volksbildung bestätigt.

Autoren bzw. Bearbeiter:

Gunter David, Rainer Dörr, Achim Friedrich, Alfred Groß, Jörg Hesselbarth, Karl Lemnitzer, Rudi Lenertat, Reinhold Mattasch, Klaus Scheibe, Günter Schlosser, Gisela Schulze

Ausgabe 1978
Lizenz-Nr. 203 · 1000/80 (UN 00 10 03-4)
LSV 0681
Zeichnungen: Gerda Titze
Typografische Gestaltung: Atelier vwv, Wolfgang Lorenz
Printed in the German Democratic Republic
Satz und Reproduktion: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Druck und Binden: Graphische Werkstätten Zittau-Görlitz, Werk Görlitz
Schrift: 9/10 Gill Monotype
Redaktionsschluß: 23. Juni 1980
Bestell-Nr. 730 818 4
Schulpreis DDR: 0,30 M

Inhalt

I. Vorbemerkungen

Die vorliegende Aufgabensammlung soll Ihnen, liebe Schülerinnen, liebe Schüler, bei der Aneignung sicheren Wissens und Könnens im Fach Mathematik helfen. Dieses Ziel werden Sie nur erreichen, wenn es Ihnen in zunehmendem Maße gelingt, mathematische Aufgaben selbständig zu lösen. Dazu bietet die Aufgabensammlung *eine* Möglichkeit.

Wenn Sie sich mit der Aufgabensammlung beschäftigen, werden Sie im Verlaufe der Arbeit wichtige Stoffgebiete des Mathematiklehrgangs wiederholen und dabei auch feststellen können, an welchen Stellen noch Lücken in Ihrem Wissen und Können vorhanden sind, die Sie schließen müssen.

Damit erhalten Sie zugleich die Möglichkeit, sich zielstrebig auf Klassenarbeiten und auf die Abschlußprüfung vorzubereiten.

Am Ende dieser Vorbemerkungen geben wir Ihnen Hinweise zum Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben sowie von Beweisaufgaben.

Diese Hinweise sollen Ihnen beim Lösen der entsprechenden Aufgaben in der Aufgabensammlung helfen.

Sie können diese Hinweise auch beim Lösen anderer Sach- und Anwendungsaufgaben bzw. Beweisaufgaben benutzen. Diese sehr allgemeinen Hinweise garantieren natürlich noch nicht das Lösen der Aufgabe, aber ein selbständiges Bemühen unter Verwendung dieser Anleitungen wird Ihnen in vielen Fällen helfen, die entscheidenden Schritte zu gehen.

Sie sollten immer versuchen, zunächst ohne fremde Hilfe auszukommen. Bei den meisten Aufgaben ist eine Kontrolle der Lösung durch Vergleichen mit den im Abschnitt III gegebenen Lösungen möglich.

Sollten Sie trotzdem Hilfen zum Lösen einer Aufgabe benötigen, so verwenden Sie die am Ende einer jeden Aufgabe angegebenen Literaturhinweise. Da sich diese sämtlich auf „Mathematik in Übersichten" beziehen, wird in der Aufgabensammlung dieser Buchtitel abgekürzt und jeweils nur mit „Ma i Üb" bezeichnet und durch die entsprechenden Seitenangaben ergänzt.

Beachten Sie noch folgende Hinweise!

Wenn Sie die Aufgaben außerhalb des Unterrichts lösen, dann gehen Sie mit der gleichen Konzentration und Sorgfalt an die Arbeit wie bei einer Klassenarbeit oder einer Prüfung!

Das bedeutet u. a.:

- Stellen Sie die notwendigen Schritte zur Lösung einer Aufgabe sauber und übersichtlich dar!
- Verwenden Sie beim Arbeiten mit Koordinatensystemen Millimeterpapier!
- Legen Sie die Einheiten fest, und bezeichnen Sie die Achsen!

- Zeichnen Sie die Graphen von Funktionen unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (Schablonen usw.), und beschriften Sie die Graphen entsprechend!
- Bezeichnen Sie bei Darstellungen im Zweitafelverfahren die Punkte normgerecht, und zeichnen Sie die Ordnungslinien ein!
- Führen Sie die Konstruktionen sauber mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus!
- Beschriften Sie Diagramme in entsprechender Weise!
- Formulieren Sie Antwortsätze, wenn die Aufgabenstellung dies erfordert!
- Verwenden Sie den Rechenstab, und schlagen Sie gegebenenfalls in „Tabellen und Formeln" (Titel-Nr. 000713) nach!
- Runden Sie die erzielten Ergebnisse sinnvoll!
- Wenden Sie alle Möglichkeiten zur Kontrolle der erzielten Resultate an!

Sicher werden Sie nicht alle Aufgaben mühelos bewältigen können. Aber wir sind davon überzeugt, daß Sie das Wissen und Können und genügend Beharrlichkeit für das Lösen der Aufgaben besitzen.

Dazu wünschen wir Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben

1. *Machen Sie sich die Aufgabe klar!*
   - Lesen Sie die Aufgabe genau durch!
   - Überprüfen Sie, ob Sie alle vorkommenden Begriffe erklären können!
   - Notieren Sie das Gegebene und das Gesuchte!
   - Versuchen Sie, den Sachverhalt zu veranschaulichen!
   - Benutzen Sie zur Bezeichnung des Gegebenen und Gesuchten Symbole oder Variablen!
   - Prüfen Sie, ob Sie schon Aussagen über das zu erwartende Resultat treffen können!

2. *Versuchen Sie, eine Lösungsidee zu finden!*
   - Überlegen Sie, wie Sie bei der Lösung ähnlicher Aufgaben vorgegangen sind!
   - Ordnen Sie die Aufgabe einem Sachgebiet zu!
   - Suchen Sie nach Beziehungen oder Zusammenhängen zwischen Gegebenem und Gesuchtem!
   - Versuchen Sie, eine Gleichung (eine Ungleichung, ein Gleichungssystem) mit dem Gegebenen und dem Gesuchten aufzustellen!

3. *Schreiben Sie die Lösung nieder!*
   - Führen Sie – falls angebracht – eine Überschlagsrechnung durch!
   - Lösen Sie die Gleichung (die Ungleichung, das Gleichungssystem)!
   - Beachten Sie vor Angabe der Lösung die sich aus dem Aufgabensachverhalt ergebenden Bedingungen!

4. *Überblicken Sie noch einmal die gelöste Aufgabe!*
   - Vergleichen Sie Lösung und Überschlag!
   - Führen Sie die Probe am Text aus!
   - Formulieren Sie einen Antwortsatz!

Hinweise für das Lösen von Beweisaufgaben

1. *Machen Sie sich die Aufgabe klar!*
   - Lesen Sie den zu beweisenden Satz genau durch!
   - Formulieren Sie den Satz in der „Wenn-dann"-Form!
   - Schreiben Sie die Voraussetzung und die Behauptung des Satzes auf!
   - Prüfen Sie, ob sich der Sachverhalt veranschaulichen läßt!
   - Formulieren Sie Voraussetzung und Behauptung mit Hilfe der Symbolik so knapp wie möglich!

2. *Versuchen Sie, eine Beweisidee zu finden!*
   - Überlegen Sie, wie Sie bei der Lösung ähnlicher Aufgaben vorgegangen sind!
   - Versuchen Sie, das zu lösende Problem auf ein bereits gelöstes Problem zurückzuführen!
     (Bei geometrischen Beweisaufgaben geschieht das häufig durch Einzeichnen einer Hilfslinie!)
   - Verschaffen Sie sich Klarheit über die im zu beweisenden Satz vorkommenden Begriffe!

- Versuchen Sie, beim Beweis solche bekannten Sätze zu verwenden, die die gleiche Voraussetzung oder die gleiche Behauptung wie der zu beweisende Satz haben!

3. *Schreiben Sie den Beweis nieder!*
   - Verwenden Sie bei der Beweisniederschrift folgendes Schema:

     Voraussetzung:
     Behauptung:
     Beweis:

Schlüsse	Begründung

Daraus folgt: ...
Schreiben Sie beim Beweisgang alle Schlußfolgerungen auf, die zur Behauptung führen! (Vergessen Sie insbesondere nicht, einen deutlichen Bezug von der letzten Schlußfolgerung zur Behauptung herzustellen!)

4. *Überblicken Sie noch einmal den geführten Beweis!*
   - Überprüfen Sie jeden Schritt in Ihrer Beweisdarstellung!

II. Aufgaben

Anwendung von Verhältnisgleichungen

1. Die Sowjetunion liefert uns auf Grund langfristiger Verträge den wichtigen Rohstoff Erdöl. Daraus können anteilmäßig folgende Produkte gewonnen werden:
32,5% Dieselkraftstoff,
25,6% Benzin,
20,0% Heizöl,
4,5% Schmieröl,
1,5% gasförmige Wasserstoffe,
15,9% Teerprodukte.
In der Zeit von 1966 bis 1970 erhielt die Deutsche Demokratische Republik 38 Millionen Tonnen Erdöl. 1971 bis 1975 wurde die Lieferung auf 65 Millionen Tonnen erhöht.
Im Zeitraum von 1976 bis 1980 soll die Lieferung 88 Millionen Tonnen betragen.
a) Um wieviel Prozent stieg die Erdöllieferung von 1971 bis 1975 im Vergleich zum Zeitraum von 1966 bis 1970?
b) Auf wieviel Prozent wird die Erdölmenge 1976 bis 1980 im Vergleich zu 1971 bis 1975 ansteigen?
c) Wieviel Millionen Tonnen Benzin konnten 1971 bis 1975 aus sowjetischem Erdöl hergestellt werden?
d) Ermitteln Sie, wieviel Kubikmeter Erdöl nötig sind, um 750 Hektoliter Dieselkraftstoff herzustellen!
e) Stellen Sie den prozentualen Anteil der Produkte aus Erdöl in einem Kreisdiagramm dar!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 85

2. Drei Mähdrescher desselben Typs ernten eine Fläche von 200 Hektar in 80 Stunden ab.
a) In welcher Zeit ernten sie bei gleicher Leistung eine Fläche von 65 Hektar ab!
b) Wieviel Zeit wird benötigt, wenn fünf dieser Mähdrescher auf einer 200 Hektar großen Fläche eingesetzt werden?
c) Berechnen Sie die Anzahl der benötigten Mähdrescher des gleichen Typs, wenn das Abernten der 200 Hektar in 15 Stunden geschafft werden soll!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 82–84

3. Eine Schulküche gibt täglich 600 Portionen Mittagessen aus. Für jede Portion werden 200 g Kartoffeln benötigt.

a) Wieviel Tonnen Kartoffeln müssen dafür jeweils für 30 Tage bestellt werden?

b) Die Schulküche muß ab sofort noch zusätzlich für 120 Kinder einer Nachbarschule kochen. Für wieviel Tage wird der gleiche Vorrat nun reichen?

c) Wieviel Tonnen Kartoffeln werden nun für 30 Tage benötigt?

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 83–84

Planimetrie

4. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $c = 8$ cm und der Höhe $h_c = 3$ cm zu konstruieren.

a) Fertigen Sie eine Skizze an, und stellen Sie einen Lösungsplan auf!

b) Führen Sie die Konstruktion aus!

c) Beschreiben Sie die Konstruktion!

d) Begründen Sie, daß die durch die Konstruktion gewonnenen Dreiecke tatsächlich rechtwinklig sind!

e) Ist die Konstruktion eindeutig?

f) Ist die Konstruktion immer – für beliebige c und h_c – möglich, oder ist sie an gewisse Bedingungen gebunden?

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 201

5. Gegeben sind eine Strecke $\overline{AB} = 3{,}0$ cm und ein Punkt P, der von $\overline{AB}$ den Abstand $d = 2{,}4$ cm hat.

a) Konstruieren Sie $\overline{A'B'}$ bei der zentrischen Streckung $(P; \frac{5}{3})$!

b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Strecke $\overline{A'B'}$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $AA'B'B$!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 142, S. 215–217, S. 232–233

6. Die Drahtseilbahn, die von Oberwiesenthal zum 1214 m hohen Fichtelberg führt, überwindet bei einer Streckenlänge von 1175 m einen Höhenunterschied von 305 m.

a) Ermitteln Sie rechnerisch die durchschnittliche Streckenlänge, bei der die Gondel um 10 m steigt!

b) Wie groß ist der Höhenunterschied, der im Durchschnitt auf 100 m Streckenlänge überwunden wird?

c) Bestimmen Sie rechnerisch den durchschnittlichen Steigungswinkel!

d) Überprüfen Sie die ermittelte Winkelgröße mit Hilfe einer maßstabgerechten Zeichnung!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 208–209, S. 220–223, S. 118–119

7. Der Flächeninhalt A_1 eines Kreises k_1 beträgt 1 500 dm².

a) Geben Sie den Radius r_1 dieses Kreises an!

b) Bestimmen Sie den Umfang u_1 des Kreises!

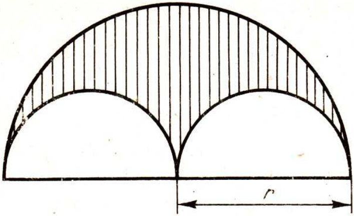


Abb. 1

c) Welchen Radius r_2 hat ein Kreis k_2, dessen Flächeninhalt $\frac{A_1}{4}$ beträgt?

d) Welchen Radius r_3 hat ein Kreis k_3, dessen Umfang $\frac{u_1}{4}$ beträgt?

e) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes der in der Abb. 1 schraffierten Fläche auf!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 233–234

8. Ein Trapez $ABCD$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) besitzt einen rechten Winkel bei D. Die Länge der Schenkel des Trapezes beträgt 45 cm und 53 cm, die größere Grundseite ist 54 cm lang.

a) Welcher Schenkel ist 45 cm und welcher 53 cm lang?

b) Konstruieren Sie das Trapez im Maßstab 1:5!

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 180–183, S. 232–233

Arbeiten mit Variablen

9. a) Formen Sie das folgende Produkt in eine Summe um, und fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

$(m + 1) \cdot (m^2 - m - 1)$

b) Formen Sie den folgenden Term in ein Produkt um, indem Sie *alle* gemeinsamen Faktoren ausklammern!

$14q^2r^2s - 28q^2rs^2 + 91qr^2s^2$

c) Fassen Sie nach Anwendung der binomischen Formel soweit wie möglich zusammen!

$(3d - 2e)^2 - (2d + 3e)^2$

d) Führen Sie die folgende Division aus!

$(m^3n - m^2n^3 + m^3n^2 + mn) : mn$

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 45–47

10. Berechnen Sie!

a) $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ $\quad (m, n \neq 0)$

b) $\frac{4xy^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{16x^2y^3}$ $\quad ((a+b), x, y \neq 0)$

c) $\frac{7ab}{16y^3} : \frac{49bx^2}{8y^3}$ $\quad (y \neq 0, b \neq 0, x \neq 0)$

d) $\sqrt{\frac{4a^2}{b^2}}$ $\quad (b \neq 0)$

Hinweis: Vereinfachen Sie jeweils soweit wie möglich!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 36, S. 37

11. Formen Sie jede der folgenden Summen in einen Quotienten um, und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich!

a) $\frac{1}{4y} + \frac{1}{3x} - \frac{4xy + 3x}{12xy} + \frac{1}{3}$ $\quad (x, y \neq 0)$

b) $\frac{5}{4a} + \frac{7}{2b} + \frac{4a - 2b}{8ab}$ $\quad (a, b \neq 0)$

c) $\frac{m-7}{25m} - \frac{m-4}{25m} + \frac{m+3}{25m}$ $\quad (m \neq 0)$

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 31–33, S. 35–36

12. a) Drücken Sie den in Textform gegebenen mathematischen Sachverhalt durch einen Term aus!

Mathematischer Sachverhalt	*Term*
(1) Gegeben ist eine Summe. Der 1. Summand ist das Doppelte einer reellen Zahl. Der 2. Summand ist das Dreifache einer anderen reellen Zahl.	
(2) Gegeben ist eine Differenz. Der Minuend ist eine reelle Zahl. Der Subtrahend ist eine Summe aus einer anderen reellen Zahl und der Hälfte des Quadrates des Minuenden.	
(3) Gegeben ist ein Produkt. Der 1. Faktor ist der 5. Teil einer reellen Zahl. Der 2. Faktor ist die Summe aus einer anderen reellen Zahl ($\neq 0$) und dem Reziproken dieser Zahl. Der 3. Faktor ist die 3. Potenz des 1. Faktors.	

b) Formulieren Sie die gegebenen drei Terme in Textform!

Mathematischer Sachverhalt (Textform)	*Term*
(1)	$\frac{a}{3} - 5b$; $(a, b \in P)$
(2)	$u + u^2 + \sqrt{v}$; $(v \geqq 0)$ $(u, v \in P)$
(3)	$a(b^2 + c^2) \cdot (d - e)$ $(a, b, c, d, e \in P)$

c) Überprüfen Sie, ob der vorgegebene mathematische Sachverhalt durch den Term richtig wiedergegeben wird!
Es bedeuten: r – richtig wiedergegeben,
f – falsch wiedergegeben.
Tragen Sie gegebenenfalls den Ihrer Meinung nach zutreffenden Term in das freie Feld ein!

In Textform vorgegebener mathematischer Sachverhalt	*Term*	*Entscheidung* r	f	*Raum für Eintragung*
(1) Gegeben ist ein Quotient. Im Zähler steht die Summe der Quadrate zweier Zahlen. Im Nenner steht die Differenz der Quadrate derselben Zahlen.	$\frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2}$ $(a^2 + b^2)$			
(2) Gegeben ist ein Quotient. Im Zähler steht die Differenz der Quadrate zweier Zahlen. Im Nenner steht das Quadrat der Differenz derselben Zahlen.	$\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$ $(a + b)$			

13. Bei der Berechnung eines Linsensystems findet die folgende Formel Anwendung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

Es bedeuten:

f – Brennweite des Linsensystems,
f_1 – Brennweite der Linse 1,
f_2 – Brennweite der Linse 2,
d – Abstand der Linsenmittelpunkte.

a) Formen Sie diese Gleichung nach der Variablen d um!
b) Formen Sie diese Gleichung nach der Variablen f_1 um!
Vereinfachen Sie jeweils soweit wie möglich!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 35–38

Gleichungen und Ungleichungen

14. Von drei natürlichen Zahlen x, y und z ist bekannt:
(1) $x = 8$
(2) z ist um 2 kleiner als y.
(3) Wenn man zum Produkt aus x und y das Quadrat der Zahl z addiert, erhält man 49.
Ermitteln Sie die Zahlen y und z!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 92

15. **a)** Lösen Sie rechnerisch jede der folgenden Gleichungen:
$(x - 2)(x + 3) = 0, \quad 4x^2 + 4x - 3 = 0.$

b) Bestimmen Sie von der Funktion $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$ zeichnerisch die Nullstellen! Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lösung der Gleichung $4x^2 + 4x - 3 = 0$!

c) Gegeben ist die quadratische Gleichung
$x^2 - 2x + q = 0, \quad x \in P.$
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen q, für die die Gleichung
1. *keine* reelle Lösung, 2. *eine* reelle Lösung,
3. *zwei* reelle Lösungen besitzt!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 91–94

16. Gegeben ist die Ungleichung

$$12 - x > \frac{1}{3}(36 - x) - 1.$$

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge L_1 der Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!
b) Geben Sie die Lösungsmenge L_2 der Ungleichung im Bereich der gebrochenen Zahlen an!
c) Geben Sie die Lösungsmenge L_3 im Bereich der natürlichen Zahlen an!
d) Stellen Sie L_1 und L_3 auf je einer Zahlengeraden dar!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 72–73

17. In einem unverzweigten Stromkreis befinden sich drei Widerstände R_1, R_2 und R_3. Die Widerstände R_1 und R_2 stehen im Verhältnis 2:5, wobei der Widerstand R_2 $22\,\Omega$ beträgt. Die Arbeitsweise der Schaltung läßt eine Toleranz des Gesamtwiderstandes R_G zu. Dieser muß größer als $40\,\Omega$ und kleiner als $50\,\Omega$ sein. Berechnen Sie, aus welchem Bereich der Widerstand R_3 gewählt werden darf!

18. **a)** Bestimmen Sie von der Gleichung

$$\frac{6}{5x - 2} = \frac{7}{3x - 8} \quad (5x - 2 \neq 0,\ 3x - 8 \neq 0)$$

die Lösungsmenge L_1 im Bereich der natürlichen Zahlen und die Lösungsmenge L_2 im Bereich der ganzen Zahlen!

b) Stellen Sie eine lineare Gleichung der Form $ax + b = 0$ ($a, b, x \in P$; $a, b \neq 0$) auf, die die Lösungsmenge $L = \{3\}$ besitzt!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 68–72

Funktionen

19. Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad \text{mit } x \in P.$$

a) Stellen Sie diese Funktionen graphisch dar!

b) Lesen Sie die Nullstellen der Funktionen und die Schnittpunktskoordinaten der entsprechenden Geraden aus Ihrer Zeichnung ab!

c) Betrachten Sie die beiden Funktionsgleichungen als Gleichungssystem, und lösen Sie es rechnerisch! Vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse mit den Koordinaten des Schnittpunktes [vgl. b)]!

d) Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ mit $m_1, m_2, n_1, n_2, x \in P$.

- Welche Bedingungen müssen m_1, m_2, n_1 und n_2 erfüllen, damit die Graphen der Funktionen
  1. einander in einem Punkt schneiden,
  2. zusammenfallen,
  3. parallel zueinander verlaufen, aber nicht zusammenfallen?

  Geben Sie für die 3 Fälle zugehörige Funktionsgleichungen an!
- Welche Aussagen lassen sich bezüglich der Lösungsmengen für die zugehörigen Gleichungssysteme machen?

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 75–79

20. Die Abbildung 2 zeigt die Graphen g_1 und g_2 zweier linearer Funktionen.

a) Ermitteln Sie die zum Graph g_1 gehörende Funktionsgleichung!

b) Ermitteln Sie die zum Graph g_2 gehörende Funktionsgleichung!

c) Geben Sie die Gleichung einer Funktion an, deren Graph parallel zu g_1 verläuft!

d) Geben Sie die Gleichung einer linearen Funktion an, deren Graph die y-Achse im gleichen Punkt schneidet wie g_2!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 62–65

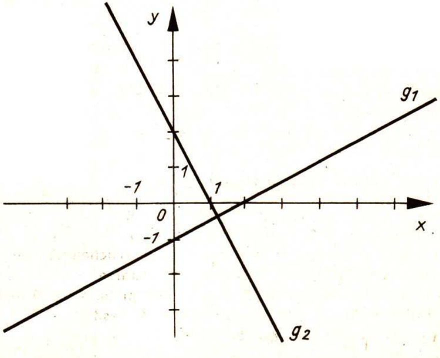


Abb. 2

21. Gegeben ist die quadratische Funktion mit der Gleichung $y = x^2 - 6x + 5 \quad (x \in P)$.

a) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Geben Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes an!

b) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 6$!

c) Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!

d) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab!

e) Überprüfen Sie die Richtigkeit der in **d)** ermittelten Werte rechnerisch!

f) Berechnen Sie den Funktionswert y, der dem Argument $x = 2$ zugeordnet ist!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 89–92

22. Eine quadratische Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q \quad (x \in P)$ hat als Graph eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-3; -4)$.

a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Intervall $-6 \leqq x \leqq 0$!

b) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion!

c) Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion für den gesamten Definitionsbereich $(x \in P)$ an!

d) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab!

e) Ermitteln Sie die Nullstellen auch rechnerisch, und vergleichen Sie sie anschließend mit den aus der Zeichnung gefundenen Werten!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 89–92

23. **a)** Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ y = f_1(x) = \sin x \\ (2)\ y = f_2(x) = 2 \sin x \\ (3)\ y = f_3(x) = \sin 2x \end{array}\right\} \quad \text{im Intervall } 0 \leqq x \leqq 2\pi$$

$$(4)\ y = f_4(x) = \sin \frac{1}{2} x \qquad \text{im Intervall } 0 \leqq x \leqq 4\pi$$

$$(5)\ y = f_5(x) = \frac{3}{2} \sin 2x \qquad \text{im Intervall } 0 \leqq x \leqq 2\pi$$

in rechtwinklige Koordinatensysteme, deren Achsen jeweils gleichgeteilt sind!

- Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen (2) bis (5) mit dem Graph der Funktion (1)!
- Geben Sie für die Funktionen (1) bis (5) alle im Intervall auftretenden Nullstellen an!
- Geben Sie für $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{1}{2} x$ und $y = \frac{3}{2} \sin 2x$

  die kleinste Periode an!

b) Gegeben sei die Funktion $y = a \sin bx \quad (x \in P;\ a,\ b \in P;\ a,\ b > 0)$. Welche Bedingungen müssen für a und b erfüllt sein, wenn für den Graph der Funktion $y = a \sin bx$ im Vergleich zum Graph der Funktion $y = \sin x \ (x \in P)$ gilt:

- Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse *gestreckt*. Außerdem sind die Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse *verkleinert*.

- Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse *gestreckt*. Außerdem sind die Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse *vergrößert*.
- Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse *gestaucht*. Außerdem sind die Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse *verkleinert*.
- Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse *gestaucht*. Außerdem sind die Abstände zwischen den benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse *vergrößert*.

Geben Sie zu den vier Bedingungen jeweils die Gleichung einer Funktion an!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 116–117

24. Welche der folgenden Mengen geordneter Paare sind *keine* Funktionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

$M_1 = \{[1; 1], [2; 4], [3; 9], [4; 16], [5; 25], [6; 36]\}$

$M_2 = \{[-2; 0], [-1; 0], [0; 0], [1; 0], [2; 0]\}$

$M_3 = \{[0; -2], [0; -1], [0; 0], [0; 1], [0; 2]\}$

$M_4 = \{[0; 2], [1; 3], [2; 4], [3; 5], [4; 6], [5; 7], [6; 8]\}$

$$M_5 = \left\{\left[\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{16}; -\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right]\right\}$$

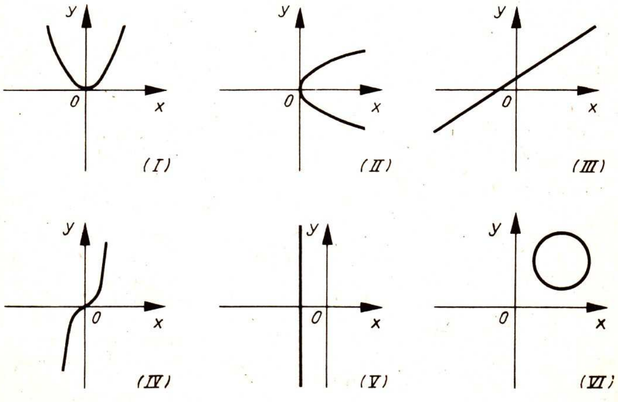
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 57–58

25. Welche der folgenden Kurven sind nicht Graph einer Funktion der Form $y = f(x)$?

Begründen Sie Ihre Antwort!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 57–58

Abb. 3



26. Gegeben sind Funktionen mit den Gleichungen:

a) $y = -3x + 5$ $(x \in P)$,
b) $y = x^{-2}$ $(x \in P;\ x \neq 0)$,
c) $y = (x + 2)^2 - 4$ $(x \in P)$,
d) $y = \sqrt{x}$ $(x \in P;\ x \geqq 0)$,
e) $y = 10^x$ $(x \in P)$,
f) $y = \lg x$ $(x \in P;\ x > 0)$ und
g) $y = \sin x$ $(x \in P)$.

Welche der folgenden Bedingungen werden durch die einzelnen Funktionen erfüllt?

(1) Die Funktion hat keine Nullstellen.
(2) Die Funktion hat genau eine Nullstelle.
(3) Die Funktion hat mehr als eine Nullstelle.
(4) Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich monoton steigend.
(5) Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich monoton fallend.
(6) Die Funktion ist periodisch.

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 60–61, S. 62–63, S. 89, S. 99, S. 100, S. 104, S. 106, S. 110, S. 111

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

27. Wenden Sie Ihre Kenntnisse über die Definitionen von Wurzeln, Potenzen und Logarithmen bei der Lösung folgender Aufgaben an:

a) Berechnen Sie 7^0!
b) Formen Sie die Potenz a^{-3} $(a \in P;\ a \neq 0)$ so um, daß kein negativer Exponent auftritt!
c) Geben Sie eine andere Schreibweise für $a^{\frac{1}{2}}$ $(a \in P;\ a \geqq 0)$ an!
d) Schreiben Sie die Wurzel $\sqrt[3]{k^2}$ als Potenz! $(k \in P,\ k > 0)$
e) Schreiben Sie die Gleichung $2^3 = 8$ in der Form $\log_a b = c$!
f) Schreiben Sie die Gleichung $\log_5 125 = 3$ in der Form $a^c = b$!
g) Berechnen Sie $\sqrt{0{,}09}$!
h) Schreiben Sie die Gleichung $3^4 = 81$ in der Form $\sqrt[n]{a} = b$!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 95, S. 100, S. 101, S. 105

28. **a)** Definieren Sie:

(1) a^0 $(a \in P;\ a \neq 0)$
(2) a^{-n} $(a \in P;\ a \neq 0;\ n \in G,\ n \geqq 0)$
(3) $\sqrt[n]{a}$ $(a \in P;\ a \geqq 0;\ n \in N,\ n \geqq 1)$
(4) $a^{\frac{m}{n}}$ $(a \in P;\ a > 0;\ m,n \in G,\ n > 0)$
(5) $\log_a b$ $(a,b \in P;\ a,b > 0;\ a \neq 1)$

b) Wenden Sie die Definitionen bei den folgenden Aufgaben an!

(1) Berechnen Sie die Wurzel $\sqrt[3]{0{,}008}$!
(2) Schreiben Sie $1\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ als Produkt!

(3) Berechnen Sie $\left(3{,}5 \cdot \frac{11}{3} + 13{,}5\right)^0$!

(4) Schreiben Sie $\sqrt[4]{a^3}$ als Potenz!

(5) Bestimmen Sie $\log_2 32$!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 95, S. 100, S. 101, S. 105

29. **a)** Vereinfachen Sie die folgenden Terme! Geben Sie dabei die Nummern derjenigen Gesetze (1) bis (10) aus der dargestellten Übersicht an, die Sie bei der Umformung verwendet haben!

1. $2pq^{k+1} \cdot 4p^{-2}q^k \quad (p \neq 0)$
2. $\frac{(5a^4x^2)^3}{25a^6x^7} \quad (a, x \neq 0)$
3. $\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[4]{m^7} \quad (m \geqq 0)$
4. $\sqrt[3]{135} : \sqrt[3]{5}$

Übersicht über eine Auswahl von Gesetzen für das *Rechnen mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen:*

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
(2) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
(3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
(4) $a^r : b^r = (a : b)^r$
(5) $a^r : a^s = a^{r-s}$

Gilt für alle positiven reellen Zahlen a, b und für alle rationalen Zahlen r und s.

(6) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
(7) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$

Gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b und für alle natürlichen Zahlen n $(n \geqq 1)$.

(8) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
(9) $\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v$
(10) $\log_a u^r = r \cdot \log_a u \quad (r \in P)$

Gilt für alle positiven reellen Zahlen u, r, v und a mit $a \neq 1$.

b) Drücken Sie die Gesetze (2) und (9) in Worten aus!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 96, S. 97, S. 101, S. 102, S. 106

30. Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes:

a) $x_1 = 1{,}68 \cdot 4{,}35$

b) $x_2 = \frac{7{,}05}{2{,}39}$

c) $x_3 = \frac{0{,}276 \cdot 765}{0{,}038}$

d) $x_4 = \frac{\sqrt{545} \cdot 23{,}2}{4\,680 \cdot 0{,}665}$

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 53

31. Berechnen Sie die Mindestaufheizzeit für einen Heißwasserspeicher vom Typ Ultra-Therm, die benötigt wird, um den Inhalt des Speichers von 16 °C auf die maximal einstellbare Wassertemperatur von 85 °C zu erhitzen!
Das Gerät besitzt eine elektrische Leistung von 1,25 kW und einen Inhalt von 10,5 l. (Der ständige Wärmeverlust bleibe bei der Berechnung unberücksichtigt!)
Benutzen Sie zur Berechnung die Gleichung $t = \frac{m \cdot c \cdot \Delta\vartheta}{k \cdot P}$, die sich aus den Formeln für die elektrische Energie und die Wärmeenergie ergibt!
Bedeutung der Variablen:

m	Masse des Wassers in g
$c = 1\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1}$	spezifische Wärme des Wassers
$\Delta\vartheta$	Temperaturdifferenz in °C
$k = 0{,}239\ \text{cal}\ (\text{Ws})^{-1}$	eine Konstante
P	elektrische Leistung in kW

Verwenden Sie bei der Berechnung den Rechenstab!
Arbeiten Sie beim Überschlag mit abgetrennten Zehnerpotenzen!

32. Welchen elektrischen Widerstand hat eine Leitung aus Kupferdraht von 1 300 m Länge und einem Querschnitt von 1,77 mm²?
Der spezifische Widerstand des Kupfers beträgt $\varrho = 0{,}016\ \Omega\text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$.
Die Formel zur Berechnung des Widerstandes lautet $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ (l bedeutet Länge in m; A bedeutet Querschnitt in mm²).
Führen Sie die Rechnung mit dem Rechenstab aus!
Arbeiten Sie beim Überschlag mit abgetrennten Zehnerpotenzen!

Darstellende Geometrie und Körperberechnung

33. **a)** Stellen Sie den in senkrechter Zweitafelprojektion dargestellten regelmäßigen Pyramidenstumpf (Abb. 4) in Kavalierperspektive dar! Grund- und Deckfläche sind Quadrate.

Die Seitenlängen der Quadrate betragen $\overline{AB} = a = 57$ mm und $\overline{EF} = b = 21$ mm, die Körperhöhe ist $h_K = 42$ mm.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche A_0 des Körpers!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 243, S. 247–258

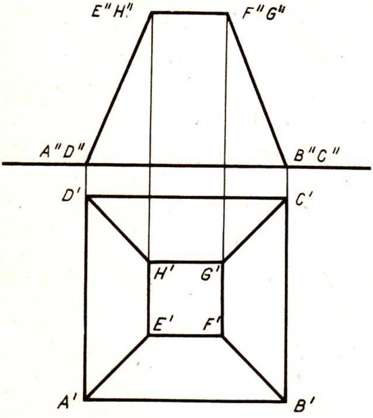


Abb. 4

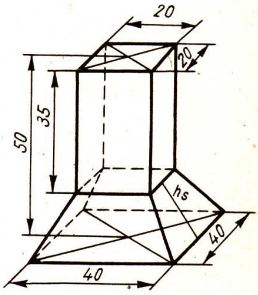


Abb. 5

34. **a)** Stellen Sie den in Kavalierperspektive abgebildeten Körper (Abb. 5) in senkrechter Zweitafelprojektion dar!

b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Länge der Seitenhöhe h_s!

c) Überprüfen Sie das Ergebnis von **b)** durch Rechnung!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 247–258, S. 226

35. **a)** Welche der folgenden Aussagen sind
- für die senkrechte Eintafelprojektion,
- für die senkrechte Zweitafelprojektion,
- für die Kavalierperspektive

wahr?

(1) Strecken, die parallel zur Bildebene liegen, werden in wahrer Größe abgebildet.
(2) Strecken, die senkrecht auf der Bildebene stehen, werden verkürzt abgebildet.
(3) Strecken, die senkrecht auf der Bildebene stehen, werden als Punkte abgebildet.
(4) Jedem Punkt des Raumes ist ein und nur ein (genau ein) Bildpunkt zugeordnet.
(5) Ein Bildpunkt kann unendlich viele Originalpunkte haben.

b) Bei der Darstellung eines Originals wurde die Bezeichnung der Risse markanter Punkte weggelassen (siehe Skizze in Abb. 6). Das Original kann verschiedene Gestalt haben.
Geben Sie zu dieser Skizze drei Originale an!
Bezeichnen Sie für diese drei Möglichkeiten die Risse markanter Punkte so, daß die Darstellung unmißverständlich wird!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 247–258

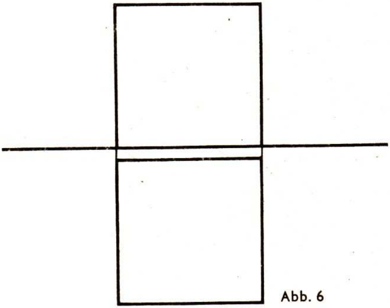


Abb. 6

36. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c rotiere um die Kathete a.

a) Welcher Rotationskörper entsteht auf diese Weise?
b) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers für $a = 16$ cm, $b = 12$ cm und $c = 20$ cm!
c) In welchem Verhältnis stehen die Volumina der Körper, die entstehen, wenn das Dreieck erstens um a und zweitens um b rotiert?

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 244

37. a) Geben Sie die Formeln für Volumen und Mantelflächeninhalt gerader Kreiszylinder an!
b) Prüfen Sie, wie sich das Volumen und der Mantelflächeninhalt ändern, wenn man den Durchmesser d ($d \neq 0$) verdoppelt und die Höhe h ($h \neq 0$) konstant läßt!

c) Geben Sie den funktionalen Zusammenhang von Volumen und Durchmesser an, und skizzieren Sie den Graph der Funktion $V = f(d)$, wobei h $(h \neq 0)$ konstant bleibt!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 239, S. 87

Trigonometrie

38. Von einem Punkt P, der außerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt M liegt, sind die Tangenten an diesen Kreis gelegt. Sie berühren den Kreis in den Punkten B_1 und B_2. Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{MP}$ ist Q.

a) Wie weit ist der Punkt P vom Mittelpunkt M des Kreises entfernt, wenn die beiden Tangenten einen Winkel von 50° einschließen und der Radius des Kreises 5,0 cm beträgt?

b) Berechnen Sie die Länge der Tangentenabschnitte $\overline{PB_1}$ bzw. $\overline{PB_2}$!

c) Weisen Sie nach, daß die Dreiecke MQB_1 und QPB_1 untereinander und außerdem zum Dreieck MPB_1 ähnlich sind!

d) Welche Entfernung haben die beiden Berührungspunkte B_1 und B_2 voneinander?

e) Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks PB_1MB_2?

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 194–197, S. 118–119, S. 222–223, S. 231

39. Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, wurde parallel zum Ufer im Abstand von 10 m zum Flußlauf eine 80 m lange Standlinie abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wurde ein direkt am jenseitigen Ufer gelegener Punkt angepeilt. Die Peilrichtungen bildeten mit der Standlinie Winkel von 81° und 38°.

Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Breite des Flusses!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 120–126

40. **a)** Untersuchen Sie für die nachfolgenden drei Fälle, ob aus den jeweils gegebenen Stücken ein Dreieck konstruierbar ist!

(1)	(2)	(3)
$a = 4$ cm	$a = 4$ cm	$a = 4$ cm
$b = 6$ cm	$b = 8$ cm	$b = 10$ cm
$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 30^\circ$

b) Welche Schlußfolgerung läßt sich aus dem Aufgabenteil **a)** hinsichtlich der Konstruierbarkeit eines Dreiecks ziehen, wenn zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind?

c) Berechnen Sie für die unter **a)** genannten drei Fälle den Winkel $\sphericalangle\ CBA = \beta$!

Begründen Sie, warum die Anzahl der jeweils erhaltenen Lösungen unterschiedlich ist!

d) Untersuchen Sie die Konstruktion eines Dreiecks aus a, b und α für $a > b$!

Berechnen Sie den Winkel β für
$a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $\alpha = 30^\circ$!

Beachten Sie die Anzahl der Lösungen für den Winkel β!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 123–124, S. 115

41. Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Seiten $a = 8{,}0$ cm, $b = 5{,}0$ cm und der Winkel $\alpha = 60°$ gegeben. Wie lang sind die Diagonalen? Lösen Sie die Aufgabe rechnerisch und zeichnerisch!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 123, S. 184–186

Zahlenbereiche

42. In der folgenden Tabelle sind Zahlen und Ungleichungen mit zugehörenden Grundbereichen gegeben. Überprüfen Sie, ob diese Zahlen zur Lösungsmenge gehören (kreuzen Sie Zutreffendes an)!

Zahl / *Ungleichung*	-2	$0{,}6$	$\sqrt{2}$
$-3{,}5 < x < 6{,}8 \quad x \in R^*$			
$-3{,}5 < x < 6{,}8 \quad x \in R$			
$\lvert x\rvert < 4 \quad x \in P$			

Es bedeuten:
R^* Menge der gebrochenen Zahlen,
R Menge der rationalen Zahlen,
P Menge der reellen Zahlen.
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 30, S. 41, S. 48

43. **a)** Ordnen Sie (1) bis (12) nach Definitionen, Aussagen, Termen und anderen Ausdrücken!
b) Erläutern Sie bei den einzelnen Definitionen, was definiert wird!
c) Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind! (Begründen Sie Ihre Entscheidung!)

(1) Für alle Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
(2) Man bezeichnet $\frac{a}{b}$ als echten Bruch genau dann, wenn $a < b$ ($a, b \in N$; $b \neq 0$).
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
(4) $a : (19 - x)$
(5) Für alle reellen Zahlen x gilt $\tan x \cdot \cot x = 1$.
(6) $3 - 2x = 5$
(7) Von zwei beliebigen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.
(8) Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.
(9) Für alle reellen Zahlen a, b gilt $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
(10) Für beliebige natürliche Zahlen a, b und c gilt: Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.
(11) $a^0 = 1$ ($a \in P$; $a \neq 0$)
(12) $x \cdot \sin 138°$

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 9, S. 12, S. 65–66

Beweisaufgaben

44. Gegeben sind zwei Strahlen s_1, s_2 mit dem Scheitelpunkt S und zwei parallele Geraden g_1, g_2, die die Strahlen in den Punkten A, B und C, D schneiden (Abb. 7).

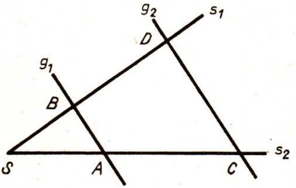


Abb. 7

Beweisen Sie, daß die Dreiecke SAB und SCD einander ähnlich sind!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 222–223

45. Beweisen Sie die Wahrheit folgender Aussagen!

a) Die Summe aus jeder geraden natürlichen Zahl und ihrem Quadrat ist immer durch 2 teilbar.

b) Die Summe aus jeder ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Quadrat ist immer durch 2 teilbar.

c) $m^2 - 1$ ist für jede ungerade natürliche Zahl m durch 4 teilbar.

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 13, S. 26

46. Die Diagonalen eines Trapezes $ABCD$ ($AB \parallel CD$) schneiden einander im Punkt S.

a) Beweisen Sie, daß die Dreiecke ABS und CDS einander ähnlich sind!

b) Welches Verhältnis bilden die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, wenn gilt: $\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{BS} : \overline{SD} = 3 : 2$?

c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden ähnlichen Dreiecke?

Begründen Sie Ihre Aussagen zu **b)** und **c)**!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 222–223

47. Durch den Punkt A eines Dreiecks ABC wird die Seitenhalbierende s_a gezeichnet.
Auf diese Gerade werden von den Punkten B und C die Lote gefällt, die die Gerade s_a in den Punkten D und E schneiden. Beweisen Sie, daß die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ gleich lang sind!
Formulieren Sie das Ergebnis als Satz!
Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 158–162, S. 168–171, S. 175–176

48. Gegeben sei folgende Aussage:
„Es gilt stets: Wenn a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen sind, so ist $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$."

a) Beweisen Sie die Wahrheit dieser Aussage!

b) Weisen Sie nach, warum die Voraussetzung „a und b — zwei nichtnegative reelle Zahlen" erfüllt sein muß!

c) Geben Sie eine Bedingung dafür an, daß das Gleichheitszeichen gilt!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 12, S. 13, S. 35, S. 45–47, S. 73

49. Gegeben sei ein beliebiges (konvexes) Viereck $ABCD$.
Verbindet man die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 benachbarter Seiten, so erhält man wiederum ein Viereck.

a) Zeichnen Sie in ein beliebiges unregelmäßiges Viereck $ABCD$ ein so beschriebenes Viereck $M_1M_2M_3M_4$!

b) Stellen Sie eine Vermutung über die Art des Viereckes $M_1M_2M_3M_4$ an, und verallgemeinern Sie diese Vermutung für alle (konvexen) Vierecke $ABCD$!
Hinweis: Formulieren Sie Ihre Vermutung in Form eines Satzes!

c) Beweisen Sie den aufgestellten Satz!
Hinweis: Bedenken Sie, daß bei Beweisen geometrischer Aussagen oft Hilfsgrößen bzw. Hilfslinien erforderlich sind! (Benutzen Sie als Hilfslinie die Diagonalen des Vierecks!)

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 9–10, S. 12, S. 184–187, S. 208, S. 211

50. Eine Umkehrung des Höhensatzes lautet:
„Wenn eine Seite eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe h in zwei Abschnitte p und q geteilt wird und $h^2 = p \cdot q$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig und p und q sind die Hypotenusenabschnitte."
Beweisen Sie indirekt, daß diese Umkehrung des Höhensatzes eine wahre Aussage ist!

Literaturhinweis: Ma i Üb, S. 14

III. Lösungen

1. a) um 71 % b) auf 135 % c) 16,64 Mill. t d) 231 m^3

2. a) 26 h b) 48 h c) 16 Mähdrescher

3. a) 3,6 t b) 25 Tage c) 4,320 t

5. b) Der Punkt P besitzt von der Strecke $\overline{A'B'}$ den Abstand 4,0 cm.
c) Der Flächeninhalt des Trapezes $AA'B'B$ beträgt 6,4 cm^2.

6. a) 39 m b) 26 m c) 15°

8. c) $A = 1\,800\ cm^2$

9. a) $m^3 - 2m - 1$ c) $5d^2 - 24de - 5e^2$

10. a) $\frac{n^2 - m^2}{m^2n^2}$ bzw. $\frac{n^2 - m^2}{(mn)^2}$

b) $\frac{1}{4xy}$ c) $\frac{a}{14x^2}$ d) $2\left|\frac{a}{b}\right|$

11. a) $\frac{1}{3x}$ b) $\frac{b + 4a}{ab}$ bzw. $\frac{4a + b}{ab}$ c) $\frac{1}{25}$

13. a) $d = f_1 + f_2 - \frac{f_1 \cdot f_2}{f}$ bzw. $d = \frac{ff_1 + ff_2 - f_1f_2}{f}$

b) $f_1 = \frac{f(f_2 - d)}{f_2 - f}$ bzw. $f_1 = \frac{ff_2 - df}{f_2 - f}$

14. $y = 5;\ z = 3$

15. a) $x_1 = 2;\ x_2 = -3$ $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $x_1 = 0{,}5;\ x_2 = -1{,}5$ c) 1. $q > 1$ 2. $q = 1$ 3. $q < 1$

16. a) $L_1 = \left\{x < \frac{3}{2};\ x \in P\right\}$

b) $L_2 = \left\{0 \leqq x < \frac{3}{2};\ x \in R^*\right\}$

c) $L_3 = \{0,1\}$

d) (siehe Abb. 8)

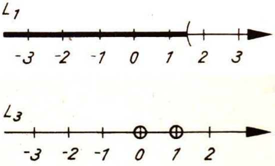


Abb. 8

18. a) $L_1 = \emptyset$ im Bereich der natürlichen Zahlen.
$L_2 = \{-2\}$ im Bereich der ganzen Zahlen.

29. a)

mögliche Vereinfachung	*angewendete Gesetze aus der Übersicht*
1. $\frac{8q^{2k+1}}{p}$	(1)
2. $\frac{5a^6}{x}$	(2), (3), (5)
3. m^2	(6)
4. 3	(7)

30. a) $x_1 = 7{,}31$ b) $x_2 = 2{,}95$ c) $x_3 = 5\,550$ d) $x_4 = 0{,}174$

31. $t = 40\frac{1}{3}$ min

32. $R = 11{,}75\ \Omega$

33. b) $A_0 = 110\ \text{cm}^2$

34. $h_s = 18$ mm

36. b) $A_0 = 1\,200\ \text{cm}^2$ c) $V_a : V_b = b : a$

37. b) $V_2 = 4V_1$ und $A_{M_2} = 2A_{M_1}$ bzw. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$ und $\frac{A_{M_1}}{A_{M_2}} = \frac{1}{2}$

c) $V = f(d) = \frac{\pi}{4} h\, d^2 = ad^2$ $(d > 0)$ (quadratische Funktion)

38. a) $\overline{PM} = 11{,}8$ cm b) $\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = 10{,}7$ cm

d) $\overline{B_1Q} = 4{,}5$ cm, $\overline{B_1B_2} = 9{,}0$ cm e) $A_{PB_1MB_2} \approx 53\ \text{cm}^2$

39. Die Breite des Flusses beträgt 46 m.

41. $e = 11{,}4$ cm $f = 7{,}0$ cm

Kurzwort: 001003 Aufg. Sa. Mathe Kl 10
Schulpreis DDR: 0,30