H 11328 F

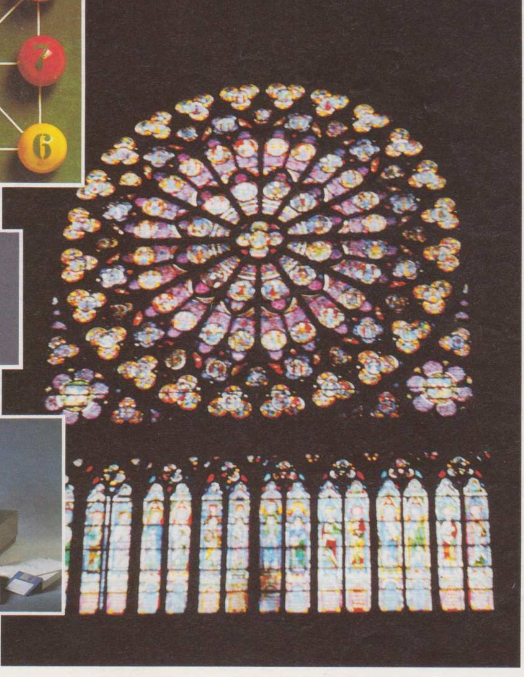
Heft 6
Dezember 1991
25. Jahrgang

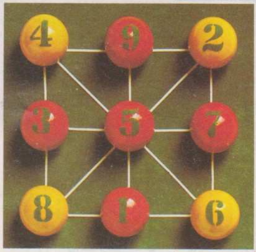
Fachzeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Kirchen, Kreisketten und eigene Kunstwerke





Magie im Großformat

Geheimschrift EAN?

Attraktive Preise im alpha-Wettbewerb 1991/92

Hallo, liebe Mathe-Fans!

Vor Euch liegt die letzte Nummer des 25. Jahrgangs der alpha. Hoffentlich gefällt sie Euch! Wenn ja, dann schreibt uns doch und wenn nicht, dann wollen wir das auch gern wissen.
Machen wir ihn doch gemeinsam – den 26. Jahrgang.

Ein Leser kritisierte kürzlich, daß so viele Autoren aus dem Universitätsbereich stammen, wo bleiben die Lehrer und vor allem die Schüler?! Die Kritik ist – meinen wir – berechtigt!
Also – stürmt die Bastionen der Mathematik!
Es muß sich ja nicht immer nur um innermathematische und komplizierte Probleme handeln. Mathematik ist überall im Alltag zu finden, man muß sie nur aufspüren, aufschreiben und an die Redaktion alpha senden. Vielleicht schon mit Euren Lösungen zum alpha-Wettbewerb?

Gabriele Liebau

Übrigens

Da es unsere Zeitschrift nun nicht mehr am Zeitungskiosk gibt, könnt Ihr sie direkt beim Erhard Friedrich Verlag in W-3016 Seelze 6, Postfach 10 01 50 bestellen. Wer interessierte Bekannte und Freunde hat, kann uns ebenfalls deren Anschrift mitteilen. Sie erhalten dann ein kostenloses Probeexemplar.

Weihnachtsgrüße

Wir überbringen allen Lesern zum Jahreswechsel einen herzlichen Gruß.
Der Wortlaut dieses Grußes wurde allerdings in Geheimschrift angegeben, die es zu entschlüsseln gilt. Der angewendete Code besteht in einer eindeutigen Abbildung des Alphabets auf sich.

Der Gruß lautet:

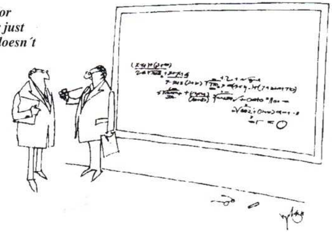
XIS XUEPTDJEP AMMEP
AMQJAMETESP EIP
GSOJET XEIJPADJTGETV
TOXIE EIP HETUPFET
UPF ESGOMHSEIDJET
PEUET KAJS !

R. Mildner, Leipzig

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind.

Alphonsvignetten: Lothar Otto (Leipzig)

„... Professor Schlemmer just proved he doesn't exist..."



alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett.

Redaktion:
Dr. Gabriele Liebau, Tel. (Leipzig) 58 18 54, PSF 129, Leipzig, O-7010
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. C. P. Helmholz (Leipzig), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), Herbert Kästner (Leipzig), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Dr. P. Schreiber (Greifswald), Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01.01.1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag
GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 3016 Seelze 6
Telefon (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für alpha besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt DM 12,00, im Einzelbezug DM 2,50. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten.
Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.
Herstellung: Pädagogika Zentrale
Druck: Druckerei Schröer, Seelze
ISBN 3-617-34006-7

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Die Idee zu einem Wecker

Leonardo da Vinci hatte stets Schwierigkeiten mit dem Aufstehen. Deshalb hatte er die Idee zu einem Wecker als Uhr für diejenigen, "... die in der Verwendung ihrer Zeit geizig sind. Und sie wirkt so: wenn der Wassertrichter soviel Wasser in das Gefäß fließen ließ, wie in der anderen Waagschale ist, so gießt diese, indem sie sich hebt, ihr Wasser in das erstgenannte Gefäß.
Dieses hebt, indem es sein Gewicht (dadurch) verdoppelt, mit Gewalt die Füße des Schlafenden, dieser richtet sich auf und geht seinen Geschäften nach".

aus:
Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, Fachbuchverlag Leipzig

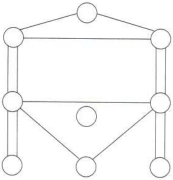
Erstaunlich viele Weihnachtsgeschenke

Vier Freunde berichten über die Zahl ihre diesjährigen Weihnachtsgeschenke:
Rest 19 bleibt beim Teilen durch 91.
Durch 19 geteilt entsteht Rest 9 und die Ziffer 1 kommt in der vierstelligen Lösung vor.
Haben sie vielleicht doch etwas geflunkert?

Dr. Ch. Werge, Leipzig

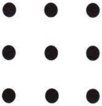
Alle zu Haus

Verteile die Primzahlen von 2 bis 23 so in der Figur, daß die Summe in jedem der Drei- und Vierecke ein und dieselbe Primzahl ist!



Dr. Ch. Werge, Leipzig

Zum Knobeln



Verbinde diese 9 Punkte mit 4 geraden Linien, ohne dabei den Bleistift abzusetzen.

Übereinstimmung

Jan und Norbert, beide im gleichen Jahr geboren, Jan im Januar und Norbert im November, stellen zu Weihnachten 1991 fest: In 43 Jahren fielen unsere Geburtstage jeweils auf gleiche

Die Magie der Weihnachtssterne

In **Abb. 1** seht Ihr ein gezacktes regelmäßiges Zwölfeck.
Auf die Ecken und den Mittelpunkt sind die Zahlen von 1 bis 13 so verteilt, daß die Summe der sich paarweise gegenüberliegenden Zahlen an den Außenecken stets 20 und an den Innenecken stets 7 beträgt. Der Mittelpunkt trägt die Zahl 10.

Die magische Summe dieses Stern beträgt 27 ($= 3^3$). Sie kann insgesamt 18mal durch Addition von geeignet gewählten vier Zahlen, die auf einfachen geometrischen Bildern liegen, erzeugt werden.

Bevor Ihr weiterlest, solltet Ihr selbst versuchen, diese Möglichkeiten aufzuspüren!

1. Verbindet man jede Innenecke mit den beiden benachbarten Innenecken, so erhält man

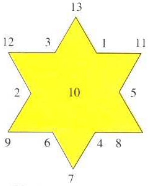


Abb. 1

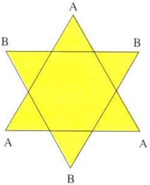


Abb. 2

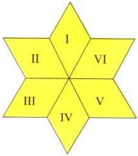


Abb. 3

Wochentage. In welchem Jahr wurden beide geboren?

W. Träger, Döbeln

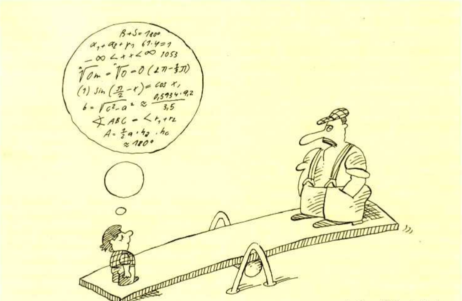
Ohne Fleiß kein Preis!

Mit 4 Ziffern wird eine 4stellige natürliche Zahl aufgeschrieben. Mit den gleichen 4 Ziffern werden zwei 2stellige natürliche Zahlen aufgeschrieben. Dabei ist das Produkt der beiden zweistelligen Zahlen gleich der 4stelligen Zahl.
Wer findet eine derartige vierstellige Zahl und die zugehörige Produktdarstellung?

W. Träger, Döbeln

Hölzchentricks

Wer kann aus neun Streichhölzern zwei große und vier kleine Quadrate legen?(siehe rechts)



Lothar Otto, Leipzig

Mathematische Liebe

(Verfasser unbekannt)

Ein Sinus liebt eine Tangente
Und seufzet und sinnet voll Harm
Wie durch den Bogen er könnte
Sie führen in seinen Arm.

Da lauert ein grauer Philister,
Herr Kosinus wird er genannt,
Vom König Radius ist er
Der Rat und die rechte Hand.

Und neidisch sieht er die Beiden
Sich lieben so aus der Fern',
Er kann den Sinus nicht leiden
Und die Tangente so gern.

An Ränken in Plus und in Minus
Ist der Halunke so reich,
Er dividiert den unglücklichen Sinus
Und erhält die Tangente sogleich.

aus: H.-D. Hornschuh: Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag München

zwei sich überschneidende gleichseitige Dreiecke A und B (**Abb. 2**).
Die Summe der auf den sechs Seiten dieser Dreiecke stehenden vier Zahlen ergibt jeweils 27.
2. Verbindet man jede Innenecke des Sterns mit seinem Mittelpunkt, so entstehen sechs Rauten (**Abb. 3**).
Die Summe der vier Zahlen an den Ecken jeder Raute beträgt stets 27.

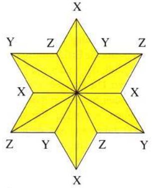


Abb. 4

3. Die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Innenecken bildet mit der Verbindungslinie der ihnen nicht benachbarten Außenecken ein ungleichseitiges rechtwinkliges Kreuz (**Abb. 4**). Es ergeben sich drei solcher Kreuze, die im Bild mit X, Y und Z bezeichnet sind.
Die Summe der vier Zahlen an den Endpunkten jedes dieser Kreuze ergibt stets die magische Summe.
4. Betrachtet man die Verbindungslinie zweier einander gegenüberliegender Innenecken und den doppelt gezählten Mittelpunkt als eine entartete Raute (mit den Winkeln 0° und 180°), so kann man wie bei 3. verfahren: Die Summe der Zahlen an den beiden Innenecken und das Doppelte der Zahl des Mittelpunktes ergeben auch hier jeweils die magische Summe, also auch hier insgesamt 3mal.
Gibt es noch einen weiteren solchen magischen Stern mit den Zahlen 1 bis 13?

Hermann Oehl, München

Verschlüsselter Weihnachtswunschzettel

Bernd übergibt seinen Eltern, die gern knobeln, den abgebildeten Zettel mit den Worten: Mein Wunschzettel enthält zwei Worte, deren Buchstaben in Form von zwei Rösselsprüngen in ein 4x4-Schachbrett eingetragen sind. Die Zugfolge des einen Springers bestimmt das eine Wort und die des anderen das zweite. Dabei wird jedes Feld nur einmal von einem Springer betreten. – Was wünscht sich Bernd zu Weihnachten?

H	E	L	E
L	H	N	S
E	C	H	A
U	B	C	S

W. Träger, Döbeln

Diceboard Games

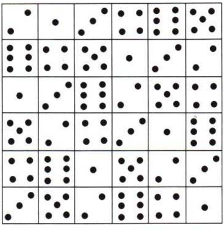
Neue Spielideen mit Würfeln für lange Winterabende

Was Ihr braucht

16 Spielwürfel, davon je 4 in der gleichen Farbe (z. B. 4 weiß, 4 gelb, 4 rot, 4 blau).

1 quadratischer Spielplan mit 6 x 6 Feldern in der Größe je einer Würfelfläche, bedruckt mit Punkten von 1 bis 6 in der vom Würfel gewohnten Anordnung (und zwar so, daß jede Punktezahl in jeder Reihe und jeder Spalte nur einmal vorkommt; siehe Zeichnung unten).

> *Spiele und Leben bilden eine Einheit – magisch ineinander verwoben. Die Spiele nehmen die kräftige Farbe der Wirklichkeit an, die Wirklichkeit hat den schillernden Zauber der Phantasie.*
>
> *Klaus Mann*



Die Grundidee

Die Würfel werden nicht nur zum Ermitteln von Zufallszahlen, sondern gleichzeitig auch als Spielsteine verwendet.
Sie können nur auf ein Feld gesetzt werden, dessen Punktezahl der vorher geworfenen Augenzahl entspricht.
(Der gesetzte Würfel zeigt also auf seiner obersten Fläche die gleiche Anzahl an Augen, wie er mit seiner Grundfläche Feldpunkte verdeckt.)

Eine Menge Spielvorschläge

Variante 1:
2-4 Spieler, jeder hat 3 Würfel einer anderen Farbe. Jeder Spieler wirft mit einem Würfel; der Spieler mit der höchsten Augenzahl eröffnet das Spiel, ihm folgen die anderen reihum im Uhrzeigersinn.
Jeder am Zug befindliche Spieler nimmt einen seiner Würfel, wirft damit und setzt den Würfel anschließend auf eines der Felder des Spielplans, das in seiner Punktezahl der geworfenen Augenzahl entspricht.
Sieger ist, wem es als erster gelingt, drei waagerecht, senkrecht oder diagonal aneinandergrenzende Felder mit seinen Würfeln zu besetzen.
Sind nach dem dritten Zug eines Spielers alle seine Würfel gesetzt, ohne daß er oder einer seiner Mitspieler dieses Ziel erreicht hat, so nimmt er ab jetzt für jeden Wurf und Zug einen seiner bereits gesetzten Würfel, dessen Position er damit aufgibt. Ein Spieler, der eine Augenzahl wirft, von der auf dem Spielplan kein entsprechendes Punktefeld mehr frei ist, scheidet aus.

Variante 2:
Wie vorher, aber jeder Spieler erhält 4 Würfel einer Farbe, mit denen er ein Quadrat von 2 x 2 Feldern zu besetzen versucht.

Variante 3:
Wie vorher, aber die 3 (4) Würfel müssen nicht in aneinandergrenzende Felder gesetzt werden, sondern so, daß ihre Augensumme einem vorher vereinbarten Wert entspricht (z. B. 12 bei 3 Würfeln oder 16 bei 4 Würfeln) oder sie alle die gleiche Augenzahl zeigen.

Variante 4:
2-4 Spieler, jeder hat 2 Würfel der gleichen Farbe und sitzt an einer anderen Seite des Spielplans.
Beginn wie vorher, aber jeder Spieler muß bei seinem ersten Zug seinen Würfel auf das entsprechende Feld der ihm zugekehrten ersten (äußersten) Reihe setzen. Kommt er dann wieder zum Zug, so darf er seinen zweiten Würfel nur in ein waagerecht oder senkrecht angrenzendes Feld setzen. Gelingt es ihm nicht, die dafür notwendige Augenzahl zu werfen, so ist der nächste Spieler am Zug.
Ist der zweite Würfel gesetzt, wird der erste Würfel vom Feld genommen. Mit ihm wird jetzt versucht, das an den zweiten Würfel waagerecht oder senkrecht angrenzende Feld zu besetzen usw. Sieger ist, wer als erster mit einem seiner Würfel den gegenüberliegenden Spielfeldrand erreicht.

Variante 5:
Wie vorher, aber mit 3 Würfeln gleicher Farbe.

Variante 6:
Wie Variante 4 bzw. 5, aber die zu besetzenden Felder müssen diagonal aneinandergrenzen.

Vereinbart man zusätzlich zum Setzen als weiteren möglichen Zug das Kippen des Würfels um eine seiner Grundkanten (er gelangt dadurch auf ein waagerecht oder senkrecht angrenzendes Feld, dessen Punktezahl nun nicht mehr mit der auf der obersten Würfelfläche sichtbaren Augenzahl übereinstimmen muß; es darf allerdings von keinem anderen Würfel bereits besetzt sein), so lassen sich etwa die folgenden Varianten spielen:

Wie alt ist der Würfel?

Würfeln ist wahrscheinlich das älteste Glücksspiel der Welt. Nach dem römischen Geschichtsschreiber Tacitus sollen die alten Germanen das Würfeln erfunden haben. Nun, ihre Spielleidenschaft ist uns zwar sogar in liedhafter Form überliefert, aber die Erfindung des Würfels kann ihnen nicht zugeschrieben werden. Der als Vater der Geschichtsschreibung bekannte Grieche Herodot schreibt die Erfindung des Würfelspiels dem Volk der Lyder (6./7. Jahrhundert v. u. Z.) zu. Die ältesten Würfel, die wir kennen, wurden bei Ausgrabungen in Ur, Mesopotamien, gefunden. Sie sind damit etwa 4 000 Jahre alt. Mit dem heutigen Würfel haben sie allerdings wenig Ähnlichkeit.
Sie weisen die Form einer vierseitigen Pyramide auf.

Variante 7:
2-4 Spieler, je ein andersfarbiger Würfel.
Die Spieler kommen reihum abwechselnd zum Zug. Beim ersten Zug würfelt jeder Spieler und setzt seinen Würfel auf ein entsprechendes Feld.
Beim zweiten Zug kippt er seinen Würfel auf ein angrenzendes Feld.
Der Spieler, bei dem die Summe aus der vor dem Kippen auf der obersten Würfelfläche sichtbaren Augenzahl und der nach dem Kippen besetzten Punktezahl am größten ist, hat gewonnen.

Variante 8:
Wie vorher, aber es zählt nicht die Summe, sondern die Differenz aus Augen- und Punktezahl.
Oder: Der Spieler mit der größten Summe bzw. Differenz hat verloren.

Variante 9:
Wie vorher, aber das Ergebnis der Rechnung soll möglichst nahe an eine vorher vereinbarte Zielzahl herankommen (Überschreitungen erlaubt).

Variante 10:
2 Spieler; Spieler A hat 1 Würfel, Spieler B hat 3 Würfel einer anderen Farbe.
Spieler A würfelt einmal und setzt seinen Würfel. Dann würfelt B dreimal und setzt seine drei Würfel möglichst nahe an den Würfel von A.
Ab jetzt besteht jeder Zug im Kippen eines Würfels. Aufgabe von B ist es, durch seine Züge den Würfel von A in eine Ecke des Spielfeldes abzudrängen, sodaß er schließlich nicht mehr gekippt werden kann. A versucht mit seinen Zügen, dies zu verhindern. Gelingt es B, innerhalb einer vereinbarten Anzahl von Zügen den Würfel von A zu blockieren, so hat er gewonnen; schafft er es nicht, ist A der Sieger.

Variante 11:
Wie vorher, aber B hat 4 Würfel.
(Dadurch ist es ihm möglich, den Würfel von A auch in der Mitte des Spielfelds zu blockieren.)

Bei den nachfolgend beschriebenen Varianten gilt, daß auch nach dem Kippen die auf der obersten Würfelfläche sichtbare Augenzahl mit der auf dem besetzten Feld verdeckten Punktezahl übereinstimmen muß.
(Der Würfel darf vor dem Kippen um 90 oder 180 Grad nach links oder rechts verdreht werden.)

Variante 12:
1 Spieler, 1 Würfel.
Der Spieler würfelt und setzt seinen Würfel auf ein entsprechendes Feld.
Dann wählt er ein beliebiges anderes Feld, das die gleiche Punkteanzahl aufweist, als Ziel und versucht, es in möglichst wenigen Zügen durch Kippen zu erreichen.

Variante 13:
2 Spieler, 1 Würfel.
Der erste Spieler würfelt und setzt seinen Würfel. Der zweite Spieler bestimmt, welches der 5 Felder, die die gleiche Punktezahl aufweisen, das Ziel sein soll.
Der erste Spieler versucht, es in möglichst wenigen Zügen zu erreichen. (Die Anzahl der Züge wird notiert.)
Anschließend Wiederholung mit vertauschten Rollen. Sieger ist, wer von den beiden die wenigsten Züge benötigt hat.

Als Abschluß noch zwei Varianten mit veränderter Ausgangslage:

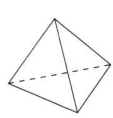
Variante 14:
1 Spieler, 1 Würfel.
Der Spieler würfelt und setzt seinen Würfel auf ein Eckfeld, dessen Punkteanzahl nicht mit der geworfenen Augenzahl übereinstimmt. (Ist das nicht möglich, würfelt er nochmals, gegebenenfalls ein drittes Mal.)
Dann versucht er, durch fortgesetztes Kippen des Würfels alle 36 Felder des Spielplans nacheinander in einem Zug zu durchlaufen; jedes Feld muß genau einmal berührt werden. Die Zahl der Fälle, wie oft dabei die Punktezahl eines Feldes mit der auf der Würfeloberseite sichtbaren Augenanzahl übereinstimmt, wird notiert.
Als erstrebenswert kann entweder eine möglichst hohe oder eine möglichst niedrige Zahl von Übereinstimmungen festgelegt werden.

Variante 15:
2 Spieler, 1 Würfel.
Wie vorher, aber zwei Spieler nacheinander. Der Spieler mit der höheren Zahl von Übereinstimmungen verliert (gewinnt).

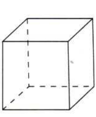
Werner Miller, Wien

Würfelspieler. Holzschnitt aus de Cessolis „Schachzabel" von 1477

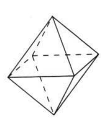
Es lassen sich übrigens alle regelmäßigen Körper als Würfel verwenden, da infolge ihrer Symmetrie alle Seiten gleichberechtigt sind.
Schwierigkeiten, nichtkubische Würfel anzufertigen, verhinderten allerdings, daß alle unten dargestellten Körper in den Spielwürfelstand erhoben wurden.
Gemogelt wurde auch früher schon gern. Die alten Römer zum Beispiel versahen den Würfel an geeigneter Stelle mit Blei und halfen so dem Glück nach.
Und nicht immer war der Würfel gern gesehen. Im Jahr 1452 wurden in Nürnberg etwa 40 000 Würfel und zahlreiche andere Spielgeräte als Werke des Teufels verbrannt.
Wer mehr über den Würfel erfahren möchte und sich generell für Spiele interessiert, findet mehr in **Die gefesselte Zeit** von Rüdiger Thiele, erschienen im Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin.



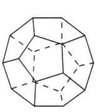
Tetraeder (Vierflächner)



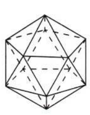
Hexaeder (Sechsflächner oder Würfel)



Oktaeder (Achtflächner)



Pentagondodekaeder (Zwölfflächner)



Ikosaeder (Zwanzigflächner)

Die XXXII. Internationale Mathematik-Olympiade

Vom 15.7. bis 23.7. fand in Schweden die 32. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Zum ersten Mal nahm nur *eine* deutsche Mannschaft teil.

Sie bestand aus Martin Wiechert, Jakob Stix, Jan-Christoph Puchta, Bodo Laß, Norbert Hoffmann und Michael Dreher. Delegationsleiter bzw. Stellvertreter waren Dr. Horst Sewerin und Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau. Die Mannschaften aus 55 teilnehmenden Ländern mit je maximal 6 Schülern waren in der Internatsschule von Sigtuna untergebracht. Sigtuna liegt 50 km nördlich von Stockholm, war früher schwedische Hauptstadt und ist berühmt für ihr Pensionat. Viele bekannte schwedische Persönlichkeiten, wie z. B. Olof Palme oder König Karl XVI. Gustaf gingen hier zur Schule.

Am Tag nach unserer Ankunft besuchten wir zunächst das Schloß von SkoKloster. Dieses nicht ganz vollendete Schloß gehörte einem Grafen, der seine restlichen Schlösser z. T. in Mecklenburg-Vorpommern bauen ließ, z. B. bei Stralsund oder Wolgast.

Am Abend wurde die Olympiade feierlich im Festsaal der Universität Uppsala eröffnet. Bei dieser Veranstaltung sahen wir zum ersten Mal unseren Delegationsleiter wieder, der schon vor uns nach Schweden gereist war, um mit seinen Kollegen aus den anderen Ländern die Klausuraufgaben auszuwählen, die wir dann zu lösen hatten. Selbstverständlich war garantiert, daß die Mannschaften bei dieser Gelegenheit nicht die Aufgabenstellungen erfahren konnten.

An den nächsten zwei Vormittagen schrieben wir die zwei Klausuren mit einer Arbeitszeit von je 4,5 Stunden. Vor allem bei der dritten Aufgabe hatten wir alle einige Schwierigkeiten. Zwar hatte jeder als Lösung ein Ergebnis, das allen Anschein nach richtig war. Aber niemand von uns konnte eine überzeugende Begründung liefern. Doch diese Schwäche war kein Grund zur Aufregung, denn wir hörten, daß es vielen anderen Mannschaften genauso ging.

Hinten v.l.n.r.: Prof. Gronau, Dr. Sewerin, Michael Dreher, Bodo Laß, Jan-Christoph Puchta; von v.l.n.r.: Norbert Hoffmann, Jakob Stix, Martin Wiechert

Nach der zweiten Klausur nahmen wir an einem Fußballturnier teil. Wenn man außer acht ließ, daß wir keine Fußballer, sondern Mathefans sind, so vermutete man hinter dem Spiel Deutschland-Argentinien eine hochklassige Begegnung. Doch es kam anders. Bei unserer 0 : 2 Niederlage machten wir keine gute Figur und aufgrund des k.o.-Systems war das dann auch schon unser letztes Spiel.

Am Tag danach besuchten wir eine IBM-Firma in Kista. Unser Gesamteindruck war eher mäßig, lediglich die Vorführung neuer Techniken zur computergestützten Video-, Bild-, Sprach- und Musikbearbeitung traf unser Interesse. Der größte Teil des folgenden Tages war ausgefüllt mit einem Bummel durch Stockholm. Stockholm liegt zum Teil auf einigen Inseln, hat eine sehr gut erhaltene Altstadt und zählt wohl auch deshalb zu den schönsten Städten Europas.

Am Abend gab es eine Experimentalvorlesung über physikalische Phänomene. Der Moderator tauchte z. B. seine Hand in flüssiges Blei und erläuterte, warum ihm kaum etwas passiert. Obwohl die Erklärungen überzeugend klangen, möchte ich meine Hand dafür lieber nicht hergeben.

Am nächsten Tag fuhren wir per Schiff durch Stockholm und besichtigten das Vasa-Museum. Die Vasa war ein riesiges Kriegsschiff zur Zeit des Dreißigjährigen Krieges. Bekannt wurde das Prachtschiff dadurch, daß es auf der allerersten Fahrt noch im Stockholmer Hafen sank.

Inzwischen waren unsere Lösungen schon korrigiert und die Punktzahlen aller Lösungen koordiniert worden. Wir waren sehr verwundert, als wir hörten, daß drei von uns bei der angeblich verkorksten dritten Aufgabe volle Punktzahl hatten und der Rest zum großen Teil nur minimale Punktabzüge. Offensichtlich war hier aufgrund der Internationalität der Anspruch an Exaktheit geringer als bei unseren Olympiaden, so daß sich die Koordinatoren mit unseren unscharfen Begründungen zufrieden gaben.

Der folgende Tag war der Tag der Abschlußveranstaltung. Vorher machten wir noch einen Bummel durch Uppsala und schauten uns den Dom an. Bei der Preisverleihung bekamen wir unsere Medaillen überreicht (Norbert: Gold; die anderen Silber) und anschließend ging es zum Bankett. Den Abend beschloß ein buntes Unterhaltungsprogramm.

Damit war die 32. IMO beendet, am nächsten Tag flogen wir wieder nach Hause.

Für mich war die Internationale Mathematik-Olympiade in Schweden ein schöner Schlußpunkt meiner Olympiade-Laufbahn.

Michael Dreher

Aufgaben des 1. Tages

1. Es sei I der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC. Die Halbierenden der Innenwinkel bei A, B, bzw. C schneiden die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten A', B' bzw. C'. Man beweise:

$$\frac{1}{4} < \frac{\overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI}}{\overline{AA'} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{CC'}} \leq \frac{8}{27}.$$

2. Es sei n eine natürliche Zahl größer als 6 und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ alle diejenigen natürlichen Zahlen, die kleiner als n und teilerfremd zu n sind.

Man beweise: Falls $a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_k-a_{k-1}>0$, dann ist n entweder eine Primzahl oder eine Potenz von 2 mit natürlichen Exponenten.

3. Es sei $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft:
In jeder n-elementigen Teilmenge von S gibt es 5 Elemente, die paarweise teilerfremd sind.

Aufgaben des 2. Tages

4. Es sei G ein zusammenhängender Graph mit genau k Kanten. Man beweise, daß man die Kanten von G mit den Zahlen 1 bis k so numerieren kann, daß für jeden Eckpunkt von G gilt: Laufen in diesem Eckpunkt zwei oder mehr Kanten zusammen, so ist der größte gemeinsame Teiler der Nummern dieser Kanten gleich 1.

(Ein Graph G besteht aus einer Menge von Eckpunkten und einer Menge von Kanten, welche gewisse Paare verschiedener Eckpunkte verbinden. Dabei ist jedes Paar verschiedener Eckpunkte durch höchstens eine Kante verbunden. Der Graph heißt zusammenhängend, wenn es für jedes Paar (x, y) verschiedener Eckpunkte eine Folge $x = v_0, v_1, v_2, \ldots v_m = y$ von Eckpunkten gibt, so daß jedes Paar (v_i, v_{i+1}) $(0 \le i < m)$ durch eine Kante von G verbunden ist.

5. Es sei P ein beliebiger Punkt im Inneren eines Dreiecks ABC.
Man beweise, daß wenigstens einer der Winkel $\sphericalangle BAP$, $\sphericalangle CBP$ bzw. $\sphericalangle ACP$ kleiner oder gleich 30° ist.

6. Eine unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reeller Zahlen heißt beschränkt, wenn es eine Konstante C gibt, so daß $|x_i| \le C$ für alle $i \ge 0$ gilt.
Es sei a eine beliebige reelle Zahl größer als 1. Man konstruiere eine beschränkte, unendliche Folge reeller Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$, so daß für alle nicht negativen ganzen Zahlen i, j mit $i \ne j$ die folgende Ungleichung gilt: $|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \ge 1$.

Bei jeder Aufgabe konnten 7 Punkte erreicht werden, insgesamt also 42. Ab 39 Punkten gab es Gold, das schafften 20 Schüler, 51 Schüler mit mindestens 31 Punkten Silber und 84 Schüler erhielten bei mindesten 19 erreichten Punkten Bronze.
In der Länderwertung nahmen die UdSSR, China, Rumänien und Deutschland in dieser Reihenfolge die vorderen vier Plätze ein.
Die XXXIII. IMO findet 1992 in Moskau statt.

Die Lösungen dieser Aufgaben senden wir Euch auf Wunsch zu, wenn Ihr uns einen adressierten und frankierten (2,60 DM!) DIN A4-Rückumschlag beilegt.

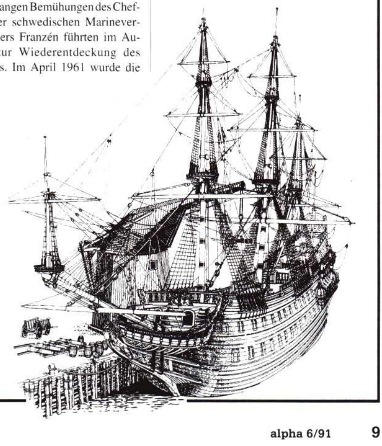
„Kleine Schiffe zu bauen führt bloß zur Vergeudung von Jungholz."

(Gustav II., König von Schweden; 1611 - 1632)

Im Januar 1625 erhielt die Stockholmer Werft den Auftrag, bis zum Ablauf des Jahres 1629 zwei kleinere und zwei größere Schiffe für die Kriegsflotte des Königs zu bauen. Am 10. August 1628 sollte das Flaggschiff, die Vasa, auf ihre erste Reise gehen. Die Jungfernfahrt war kurz, etwa 1500 m. Ein Windstoß drückte das prachtvolle Kriegsschiff, das durch sagenhaften Prunk und seine für damalige Zeiten enorme Größe und Bestückung die Feinde Schwedens erschauern lassen sollte, so auf die Backbordseite, daß Wasser eindringen konnte. In wenigen Minuten sank das stolze Schiff. An Bord befanden sich etwa 250 Menschen, über die Anzahl der Opfer ist jedoch nichts bekannt.
Sofort begonnene Untersuchungen brachten zutage, daß die Vasa topplastig gewesen war. Die Schiffsbaumeister konnten aber nicht belastet werden, da sie nach ausdrücklichen Direktiven des Königs gebaut hatten und eine negativ verlaufene Probe der Lastigkeit während des Baus von Admiral Fleming, der rechten Hand des Vorsitzenden des Untersuchungsausschusses, ohne die erforderlichen Konsequenzen abgebrochen wurde. So verlief der Prozeß ergebnislos und in den Jahren bis 1683 wurden lediglich eine Reihe der Geschütze geborgen.
Die Vasa geriet in Vergessenheit.
Erst die jahrelangen Bemühungen des Chefingenieurs der schwedischen Marineverwaltung Anders Franzén führten im August 1956 zur Wiederentdeckung des Schiffswracks. Im April 1961 wurde die Vasa nach 333 Jahren auf dem Meeresgrund gehoben. Sie war, wie viele Ausrüstungsgegenstände auch, relativ gut erhalten. Mit den modernsten Mitteln der Wissenschaft ging man nun daran, das Verbliebene zu erhalten und zu rekonstruieren. Die Restauration dauerte bis Ende 1988. Am 15. Juni 1990 eröffnete der schwedische König das Vasa-Museum auf Djurgården.

Der Name des Schiffes wurde damals nicht an die Bordwand geschrieben, sondern durch ein Symbol, in diesen Falle eine Getreidegarbe (vasakärven), verdeutlicht. In älteren Dokumenten wurden die Bezeichnungen "Wasan" bzw. "Vasan" gebraucht. Da in Schweden heute der w-Laut immer mit "v" geschrieben wird, hat sich das schwedische Sprachkomitee für "Vasa" entschieden. Im Deutschen ist aber auch der Schiffsname "Wasa" gebräuchlich.

Viele weitere interessante Dinge rund um die Vasa könnt Ihr in dem Buch **Die Wasa von 1628** von Günter Lanitzki erfahren, das 1990 im Verlag für Verkehrswesen der DDR erschien. Aus diesem Buch entnahmen wir auch unsere Informationen. Fragt doch mal in Eurer Bücherei nach.



Magie im Großformat

Von den Schwierigkeiten, einen Weltrekord aufzustellen

Schon nach der ersten Bahn zeigte sich, daß die Halle zu klein war. Aber man wußte sich zu helfen. Der „Überhang" wurde einfach mit Klebeband an der Hallenwand befestigt.

Zu den beliebtesten Problemen der Unterhaltungsmathematik gehört das Bilden magischer Quadrate. Das älteste bekannte magische Quadrat wurde vor etwa 4000 Jahren in China aufgezeichnet. Die Spalten- und Zeilensummen ergeben jeweils 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Bereits im Jahr 1612 gab C.G. Bachet de Mézeriac ein Verfahren zur Aufstellung magischer Quadrate mit ungerader Feldanzahl an. Auch für Quadrate mit gerader Feldanzahl gibt es entsprechende Verfahren.
Somit ist für den ausschließlich theoretisch interessierten Hobbymathematiker das Problem beliebig großer magischer Quadrate gelöst. Mit dem ersten bekannten **Weltrekord** von R. Suntag (USA) mit seinem 105 x 105 Quadrat im Jahre 1975 begann jedoch ein Wettkampf um die Berechnung des größten magischen Quadrates, dem ich mich als Mathematikstudent und mehrfacher Rekordhalter nicht entziehen konnte. Mein Ziel war ein Quadrat mit 2121 x 2121 Feldern. Das Computerprogramm zur Bildung des Quadrates war schnell geschrieben, einen Partner zu finden, der schnelle Drucker, Computer und Papier bereitstellt, schon schwieriger. Ich fand ihn in Alex Dummer, Inhaber der Firma pro data service in Langburkersdorf. Er kümmerte sich hervorragend um die Organisation. An einem Tag im August sollte nun der Rekord aufgestellt werden. Mein Partner hatte sich jedoch in der nötigen Zeit zum Ausdrucken der etwa 30 Millionen Ziffern gehörig verschätzt und so mußte der Termin für die Aufstellung des Rekords verschoben werden. Um das Quadrat mit der Hand zu schreiben, hätte ich übrigens ein Jahr ununterbrochen arbeiten müssen. Noch vier Tage war man bei pro data service beschäftigt, weitere Listen mit Zahlen zu bedrucken. Schließlich sollte auf dem Sportplatz von Langburkersdorf das Quadrat von über 400 m^2 zusammengelegt werden. Ein Windstoß wedelte uns jedoch bereits die erste Rolle um die Ohren. Es war völlig aussichtslos, den Rekord an diesem Tag auf dem Sportplatz aufzustellen. Beim dritten Versuch waren wir schlauer: Das Quadrat sollte in einer entsprechend großen Turnhalle in Leipzig aufgestellt werden. Mein Partner schickte mir die Papierrollen in vier Paketen zu. Die Turnhalle war reserviert, Interessenten benachrichtigt – was nicht kam, war das vierte Paket. Und als hätte es die Bundespost darauf abgesehen, mich zu ärgern, kam es kurz *nach* dem geplanten Termin.
Nun aber war endlich alles beisammen; ich konnte den vierten und letzten Anlauf zum Rekord nehmen. Am 24. Oktober wurde das Weltrekord-Quadrat vor etlichen Zuschauern ausgebreitet. Der Rekord ist nun "offiziell": Er wird in der nächsten Ausgaben des **„Lexikons der Superlative"** erscheinen, wenn bis zum Redaktionsschluß im Mai '92 nicht ein noch größeres magisches Quadrat zusammengestellt wird. Allerdings würde es mich auch nicht stören, wenn mein Rekord nur kurzen Bestand hätte. Im Gegenteil, ich hoffe, mit diesem Artikel vielleicht den einen oder anderen Leser zum Sturm auf neue Bestmarken angeregt zu haben. Die Bedingungen für diesen und weitere mathematische Rekorde teile ich Interessenten gerne mit.

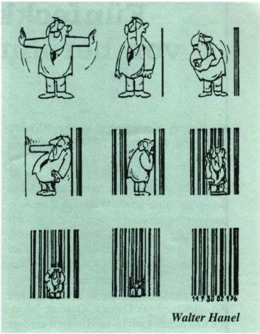
R. Laue, Mathematikstudent
an der Leipziger Universität,
Postfach 80, O-7060 Leipzig

Daten des aktuellen Rekordquadrates

Felder:	2121 x 2121
gedruckte Zahlen:	4 498 641
gedruckte Ziffern:	30 379 384
Summe in jeder Zeile und Spalte:	4 770 807 720
Größe:	über 400 m^2
Rechenzeit:	2 Rechner und Drucker je 59 Stunden

Ralf Laue ist Mitglied des Rekord-Klubs Saxonia. In diesen 1988 gegründeten Klub darf nur, wer einen originellen Weltrekord aufgestellt hat. Viermal jährlich berichtet das Saxonia-Info über neue Rekorde.
Weitere Weltrekorde von Ralf Laue:
- größte private Rekordsammlung im deutschsprachigen Raum (Daten zu etwa 8000 Rekorden, u.a. mehr als 70 Rekordbücher)
- größter Kartenfächer (310 Karten), aufgestellt 1991
- längstes Bilderrätsel der Welt (37,42 m lang, 4,3 cm breit, 215 Wörter verschlüsselt durch 272 farbige Bilder, kein Wort wiederholt sich, ausgedacht und gezeichnet von September 1984 bis August 1986)
- längstes Wort in einem Kreuzworträtsel: *Kraftfahrzeughaftpflichtversicherung* Inzwischen überboten von Georgios Stefanidis aus Reutlingen mit *Fußballweltmeisterschaftsendrundenteilnehmer*
- Ordnen des "Zauberwürfels" während einer Fahrradtour in 41,56 s, aufgestellt bei den Weltrekordfestspielen in Zürich 1991; bei den offiziellen WM im Würfeldrehen wäre das der drittletzte Platz gewesen, aber da wurde dabei nicht Fahrrad gefahren.

Geheimschrift EAN?



Immer häufiger findet sich auf der Verpackung unserer eingekauften Waren die EAN (Europäische Artikelnummer) sowie ihre Verschlüsselung in Form eines Strichcodes.

Welche Vorteile bringt diese Nummer?

Zum einen sollen die Kassenbereiche im Handel automatisiert werden, denn mittels eines Lesegerätes wird der Artikel erkannt und der festgelegte Preis eingesetzt. Der wesentliche Vorteil liegt aber darin, daß damit zugleich automatisch jede Warenbewegung erfaßt, der Warenbestand in kürzester Zeit überprüft und bei Unterschreitung eines Mindestbestandes sofort neue Ware nachbestellt werden kann. Mit der EAN werden drei Informationen gegeben:

4 007817 308431

- Prüfziffer
- Artikelnummer
- Betriebsnummer
- Ländernummer

Firmen in der Bundesrepublik Deutschland, die mit dem EAN-Code arbeiten wollen, erhalten von der Centrale für Coorganisation in Köln eine Bundeseinheitliche Betriebsnummer zugewiesen.

Einige EAN-Länderkennzeichen

00-09	USA, Kanada
30-37	Frankreich
40-43	Bundesrepublik Deutschland
49	Japan
50	Großbritannien ...

Aufgabe 1: Wie viele verschiedene Artikelnummern verstecken sich in diesem System?

Welchen Sinn hat nun die Prüfziffer?

Beim Ablesen oder Eingeben der Nummer können Fehler auftreten. Die Kassiererin muß das Lesegerät solange über den Strichcode führen, bis dieses durch einen Piepton die Annahme des Strichcodes signalisiert. Genau hier kommt die Prüfziffer zum Tragen.

Aufgabe 2: Sucht Euch verschiedene EAN-Nummern und rechnet jeweils die Summen nach dem in **Abb. 1** gezeigten System aus! Gemerkt? Die Summe ergibt jeweils eine durch 10 teilbare Zahl.

Aufgabe 3: Gibt es ein kürzeres Verfahren zur Berechnung der Prüfziffer?

Aufgabe 4: Berechne für folgende neue Artikelnummer die Prüfziffer!
49 06550 25409 p

Machen wir uns nun mittels der Prüfziffer auf Fehlerjagd!
Welche Fehler tauchen am häufigsten auf? Die Tabelle (**Abb. 2**) ist das Ergebnis einer statistischen Untersuchung. Problemlos ist Fall b). Was aber passiert, wenn eine der Prüfziffern falsch ist?

Aufgabe 5: Ersetze in unserer oben gegebenen EAN jeweils eine der Ziffern durch eine andere und berechne die Prüfziffern. Warum ist eine Vertauschung unfehlbar zu erkennen?

Alles klar? Wird eine mit 1 zu multiplizierende Zahl vertauscht, kann die Summe nicht mehr eine durch 10 teilbare Zahl ergeben.
Wird eine mit 3 zu multiplizierende 0 durch eine der Zahlen von 1 bis 9 ersetzt, dann kann sich ebenfalls nicht ein Vielfaches von 10 ergeben, da keines der Produkte $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, ..., $9 \cdot 3$ auf 0 endet.
Wird eine der mit 3 zu multiplizierenden Zahlen ungleich 0 ersetzt, kann die Prüfbedingung ebenfalls nicht mehr erfüllt werden, da sich in der Dreierreihe bis 9 nie gleiche Einerstellen ergeben. Damit erkennt der Kollege Computer in diesem Fall sofort, daß ein Fehler vorliegt, er erkennt aber nicht die Stelle.

Aufgabe 6: In folgender EAN ist eine der Ziffern falsch. Welche Möglichkeiten für eine richtige EAN gibt es?
40 04400 23456 7

Unfehlbar ist das Prüfsystem aber nicht! Werden zum Beispiel zwei Ziffern so verändert, daß die Differenzen zu den ursprünglichen Ziffern ein Vielfaches von 10 ergeben, wird die Nummer akzeptiert.
Das Vertauschen benachbarter Zweierblöcke bleibt gänzlich unbemerkt, da die Zahlen jeweils wieder mit dem gleichen Faktor multipliziert werden.
Ebenfalls unentdeckt bleiben Zahlendreher der Form 0/5, 1/6, 2/7, 3/8 und 4/9.

Aufgabe 7: Warum entdeckt der Computer diese Zahlendreher nicht?

Sicher gibt es Prüfverfahren, welche diese Fehler ausschließen. Dafür versagen sie aber bei anderen Eingabefehlern. Die Anwendung dieses Prüfverfahrens wird dadurch gerechtfertigt, daß es die am häufigsten auftretenden Fehlertypen (a) und b)) sicher erkennt.

nach einem Beitrag von Wilfried Herget in mathematik lehren

Im nächsten Heft knacken wir den Strichcode!

4	0	0	7	8	1	7	3	0	8	4	3	1	
·1	·3	·1	·3	·1	·3	·1	·3	·1	·3	·1	·3	·1	
4	+ 0	+ 0	+ 21	+ 8	+ 3	+ 7	+ 9	+ 0	+ 24	+ 4	+ 9	+ 1	= 90

Abb. 1

Fehlertyp	Häufigkeit
a) Eine Ziffer falsch	60%
b) Anzahl der Ziffern falsch	25%
c) Zwei oder mehr Ziffern falsch	8%
d) Vertauschen benachbarter Ziffern	5%
e) Vertauschen benachbarter Zweierblöcke	1%

Abb. 2

Fünfeckkonstruktionen von berühmten Künstlern

Ein Beitrag, den Ihr ohne Papier, Bleistift, Zirkel und Lineal daneben nicht anfangen solltet.

Regelmäßige Vielecke haben gleichlange Seiten und gleichgroße Winkel in allen Eckpunkten. Sie lassen sich daher in einem Kreis einzeichnen, ihre Seiten sind dann Sehnen, dieser Umkreis ist ein ideales Hilfsmittel zur Konstruktion der Vielecke. Natürlich haben sie auch einen Inkreis, ihre Seiten sind dann Tangenten. Die einfachsten Vielecke dieser Art, gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Sechseck und Achteck mit In- und Umkreis gehören heute zu den Grundaufgaben im Geometrieunterricht unserer Schulen.

Nicht so das Fünfeck: seine Konstruktion hat nicht nur die Mathematiker seit Jahrtausenden herausgefordert. Der Sage nach war das Pentagramma, das ist das regelmäßige Sternfünfeck, Geheimzeichen der legendenumwobenen Pythagoräer in der Zeit der Antike. Es wird aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks gezeichnet, benachbarte Eckpunkte werden demzufolge nicht verbunden (**Abb. 1**).

Im berühmten Almagest des Griechen Claudius Ptolemäus (geb. um 85, gest. um 165), den uns die Araber durch ihre Übersetzungen aus der Antike überliefert haben, ist die exakte Konstruktion des einem Kreise einbeschriebenen Fünfecks bewahrt. Natürlich kannte auch Euklid in seinen Elementen die Konstruktion und benutzte für seinen Beweis das regelmäßige Zehneck mit dem daraus folgenden goldenen Schnitt.

Albrecht Dürer

Doch nicht nur in der Baukunst, auch von berühmten Malern der Vergangenheit sind uns mehr oder weniger exakte, aber praktische Konstruktionen des Fünfecks auch mit dem Umkreis als Bestimmungsstück überliefert und bekannt geworden. Kein Geringerer als Albrecht Dürer (1471 - 1528) beschreibt eine originelle, sehr einfache Näherungskonstruktion "mit dem unverrückten Zirkel" zur praktischen Anleitung für die Jünger der Baukunst. Sie steht in seiner Hauptschrift aus dem Jahre 1525 mit dem Titel:

"Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien ebenen und gantzen Corporen durch Albrecht Dürer zusammengetzogen und zu nutz allen Kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren in truck gebracht."

Diese auch auf dem Gebiet der Stereometrie wertvolle mathematische Schrift ist seinem Freund und Förderer Willibald Pirckheimer (1470 - 1530) in Nürnberg gewidmet. (**Abb. 2**)

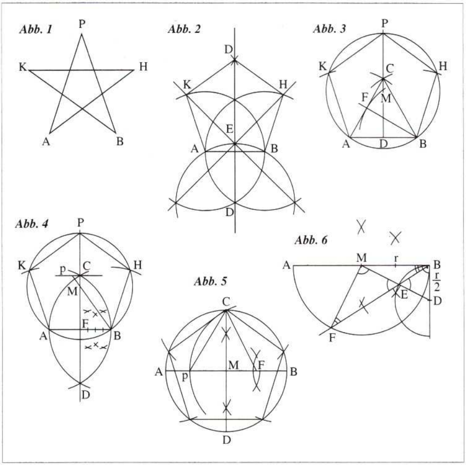
Mit dem Radius r = AB werden um A und B zwei Kreise geschlagen, dazu ein dritter mit dem Mittelpunkt im unteren Schnittpunkt D der beiden ersteren. Die Sehne DC senkrecht auf AB schneidet diesen dritten Kreis in E. Durch E müssen nun die beiden Sehnen zu den unteren Schnittpunkten der drei Kreise gezogen werden. Ihre Verlängerungen liefern bereits den 3. und 4. Eckpunkt des gesuchten Fünfecks H und K. Mit dem anschließenden Zirkelschlag um H und K ist der 5. Eckpunkt P gewonnen und damit das Fünfeck zu zeichnen.

Leonardo da Vinci

Der größte Maler des 15. Jahrhunderts jenseits der Alpen, Leonardo da Vinci (1452 - 1519) hat sich ebenfalls wiederholt mit mathematischen Aufgaben beschäftigt, leider ist uns nur weniges erhalten geblieben. Doch die verschiedenen regelmäßigen Vielecke finden sich wiederholt in seinen fragmentarischen Blättern und Aufzeichnungen, darunter das uns hier interessierende Fünfeck (**Abb. 3**).

Er geht dabei anders als Dürer vom gleichseitigen Dreieck ABC aus, dessen Seite AB zugleich Seite des gesuchten Fünfecks werden soll. Mit dieser Grundseite AB muß er auf der Höhe CD aus Symmetriegründen den noch unbekannten Mittelpunkt des Umkreises M finden, dann ist das Fünfeck fertig zu zeichnen. Zu diesem Zweck fällt er das Lot vom Punkt B auf die Dreieckseite AC und erhält dort den Fußpunkt F. Der Kreis um B mit dem Radius der Lotlänge BF schneidet die Höhe im Dreieck im Punkte M, damit hat er schon Mittelpunkt und Radius des Umkreises gewonnen und kann leicht das Fünfeck zeichnen. Neben einem Vorversuch auf ähnlichem Wege mittels eines Dreiecks, den Leonardo schon selbst mit der Bemerkung "falso" (= falsch) versehen hat, beschreibt er an anderer Stelle seiner Schriften noch eine dritte Konstruktion (**Abb. 4**).

Mit der festgelegten Fünfeckseite AB = a werden als Radius zwei Kreise um A und B geschlagen. Ihre Schnittpunkte C und D liefern eine gemeinsame Sehne CD, die senkrecht auf der Grundlinie AB steht und diese in F halbiert. Die rechte Hälfte BF wird dann in vier gleiche Abschnitte geteilt, einen davon trägt Leonardo in C parallel zu AB nach links ab und erhält den neuen Punkt p. Die Verbindungslinie durch B und p schneidet die senkrechte Sehne DC in M, dies ist schon der Mittelpunkt des Umkreises für unser Fünfeck, hat also den Radius MB. Mit vier weiteren

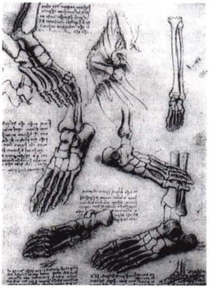


Zirkelschlägen ist dann das gesuchte Fünfeck fertig.
Diese und andere mathematische Arbeiten von Leonardo entstanden etwa in der Zeit zwischen 1480 und 1500, sind also älter als das Buch von Albrecht Dürer.
Etwa um 1600 hat Christoph Clavius (1537 - 1612), Mathematikprofessor am berühmten Collegium Germanicum in Rom, die Fünfeckkonstruktionen der Künstler genauer unter die Lupe genommen und nachgerechnet. Er fand für die Winkel im Fünfeck von Dürer an der Basis in A und B die Werte 108°22', also etwas zu groß, in den Eckpunkten H und K den Wert 107°2' also zu klein, und in der Spitze 109°12', wieder zu groß.

Hat Clavius mit seiner Nachprüfung der Konstruktion von Dürer richtig gerechnet? Man überprüfe Clavius und auch Leonardo mit den Mitteln der Trigonometrie! Wie groß sind genau die Eckwinkel, d. h. wieviel weichen sie vom theoretischen Wert 108° ab?

Leonardo da Vinci

Der italienische Maler, Bildhauer, Baumeister, Ingenieur, Mathematiker, Naturwissenschaftler, Kunsttheoretiker und Philosoph lebte von 1452 bis 1519. Er ist wohl der genialste Künstler und enzyklopädische Wissenschaftler der Renaissance und gilt als Begründer der experimentellen Naturwissenschaft. Leonardo da Vinci nahm anatomische Sektionen vor und wurde durch meisterhafte Darstellungen der Ergebnisse zum Schöpfer der wissenschaftlichen Demonstrationszeichnung.
Das Bild verdeutlicht sehr gut, daß da Vinci Linkshänder war und die Eigenart besaß, seine Manuskripte in Spiegelschrift zu schreiben.
Vermutet wird, daß er damit vermeiden wollte, daß Unbefugte darin stöbern.



Anatomische Studien

Griechische Mathematik

Die exakte Konstruktion des regelmäßigen Füxcks in einem gegebenen Umkreis mit festem Radius verdanken wir schon der frühen griechischen Mathematik. Die Konstruktion ist sehr einfach (**Abb. 5**).
Im Mittelpunkt M des Umkreises zwei senkrechte Durchmesser gezeichnet, dann muß man den Radius MB halbieren im Punkt F. Mit der Strecke FC als neuem Radius schlägt man um F einen Kreis, der den waagerechten Durchmesser in P trifft. Die Sehne in diesem Kreis PC ist bereits die genaue Seite des einbeschriebenen Fünfecks! Zusätzlich hat man noch die Seite des regelmäßigen Zehnecks gewonnen, es ist die Strecke MP.
Der geometrische Beweis, wie er von den Griechen vor mehr als 2000 Jahren geführt wurde, geht zuerst vom Zehneck aus und führt über den eingangs erwähnten goldenen Schnitt.
Die in **Abb. 5** vorgestellte Konstruktion von Ptolemäus läßt sich leicht berechnen: nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Hypotenuse im Dreieck FCM der Ansatz

$FC^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = 5\frac{r^2}{4}$ und daraus die Wurzel gezogen $FC = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\sqrt{5}$.

Da auch P auf diesem Kreis liegt, sind beide Strecken FC und PF gleich lang. Bis zum Mittelpunkt reicht $PM = \left(\frac{r}{2}\right)\left(\sqrt{5}-\frac{r}{2}\right)$

oder kürzer $PM = \left(\frac{r}{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$

also schon das einbeschriebene Zehneck. Das gesuchte Fünfeck hat die Sehne PC als Kante, denn es gilt im Dreieck PCM

$PC^2 = MC^2 + PM^2 = r^2 + \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

und aufgelöst

$PC^2 = \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(10-2\cdot\sqrt{5}\right)$, daraus

$PC = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

liefert die Seite im Fünfeck nach der Formel.

Konstruktion eines Unbekannten

Eine leider wenig bekannte Konstruktion des Fünfecks finden wir im Briefwechsel zwischen Gauß und seinem Schüler und Freund Gerling. Dieser berichtet in einem Brief vom 17.2.1814 aus Kassel von einer originellen Konstruktion eines seiner Schüler, die **Abb. 6** zeigt.
Auf dem Durchmesser des Umkreises AB wird in B senkrecht nach unten der halbe Radius nach D abgetragen. Der Halbkreis um D als Mittelpunkt schneidet die vorher eingezeichnete Verbindungsstrecke MD in E. Mit ME ist schon die exakte Seite des Zehnecks gewonnen. Verlängert man die Verbindungsgerade EB über E hinaus bis zum Schnitt mit dem Umkreis in F, so hat man die exakte Seite für das gesuchte Fünfeck gewonnen (EF).
Zum Beweis rechnen wir nacheinander:

$MD^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = 5\frac{r^2}{4}$

und die Wurzel $MD = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\sqrt{5}$

davon muß noch der halbe Radius abgezogen werden, damit ist $ME = \left(\frac{r}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$

die fertige Zehneckseite, wie es die Formel verlangt. Die gesuchte Fünfeckseite ist Hypotenuse im Dreieck FEM, daher gilt für sie:

$FE^2 = FM^2 + ME^2 = r^2 + \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2 =$

$= \left(\frac{r^2}{4}\right)\cdot\left(10-2\sqrt{5}\right)$, die Wurzel

$FE = \left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

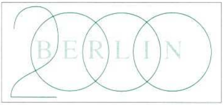
so wie es die Formel für das Fünfeck verlangt.
Die exakten Formeln für die einem Kreis einbeschriebenen Vielecke bis hin zum 24-Eck findet der interessierte alpha-Leser in der "Kleinen Enzyklopädie Mathematik" auf der Seite 190, er muß nur noch die Sehne DE in der Zeichnung eintragen und ausrechnen.
Doch zurück zum Fünfeck. Wie schon gesagt, kennen wir leider nicht den Namen des Schülers, der die Konstruktion nach Bild 6 ersonnen hat.
In seiner Antwort an Gerling schreibt Gauß am 20. Februar 1814:
"Die Konstruktion des Fünfecks, auf welche Ihr Schüler gekommen ist, hat mir sehr wohl gefallen.
Ich gestehe indes, daß ich Ihnen in diesem Augenblick keine befriedigende Antwort geben kann, ob sie neu ist, ja, ich muß bekennen, daß mir Ptolemäus' Konstruktion nicht gleich gegenwärtig ist." Diese ehrlichen Zeilen des Princeps mathematicorum sind bemerkenswert, wenn man bedenkt, welchen entscheidenden Beitrag er zu diesem Problem selbst geleistet hat und das schon mit 18 Jahren.

Dr. Joachim Buhrow ist Dozent an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Fachrichtungen Mathematik/Informatik

Komisches, Kniffliges und Knackiges

Olympische Spiele im Jahr 2000 in Berlin?

Im obigen Symbol ist für jeden der sechs Buchstaben B, E, R, L, I und N je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 so einzusetzen, daß gilt: Denkt man sich zwischen die in einem Kreis (einer Null von 2000) stehenden Ziffern Pluszeichen gesetzt, so sind diese drei Summen für die drei Kreise einander gleich. Wieviel Möglichkeiten für das Einsetzen der zulässigen Zahlen gibt es?



Damit Euch genügend Zeit zur Beschäftigung mit dieser Aufgabe zur Verfügung steht, wird die zugehörige Lösung erst im Folgeheft veröffentlicht. *Walter Träger, Döbeln*

Mathematische Fahndung

Im Silbenrätsel sind 13 mathematische Begriffe versteckt!

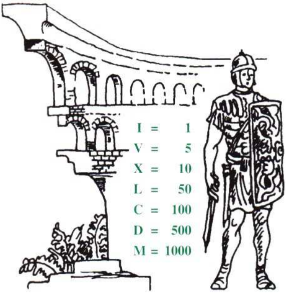
Tan	Seh	kan	ti	Py	pli
Mul	Di	qua	tient	ne	ra
Sum	Quo	Mi	Ra	nu	end
mi	den	stumpf	Se	Dia	Ka
tion	te	gen	die	sion	drie
Geo	te	go	zie	le	me
ren	vi	me	na	trie	ren

Schülerin Andrea Leuschke, Aue

Den alten Römern auf die Fi Zahlen geschaut

Die alten Römer hatten es mit ihren Zahlenzeichen nicht leicht! Oder kommt Ihr ohne Mühe mit solchen Jahreszahlangaben klar, wie Ihr sie an vielen alten Gebäuden findet?
Die römische Jahreszahl auf dem nebenstehend abgebildeten Rathaus in Leipzig verrät Euch das Jahr der Fertigstellung des Renaissancebaus nach Plänen von Hieronymus Lotter.

Klären wir also mal die Sache auf. Die Römer und auch unsere Vorfahren bis etwa zum Jahr 1500 mußten mit den sieben Zahlenzeichen auskommen, die in der folgenden Zeichnung abgebildet sind.
(Das "M" gibt es übrigens erst seit dem Mittelalter, die Römer schrieben "CI0")



Nach welchen Regeln werden nun diese Zeichen zusammengestellt:

1. Gleiche Zahlen werden zusammengezählt.
Zum Beispiel:
II = 1 + 1 = 2, III = 1 + 1 + 1 = 3,
XXX = 10 + 10 + 10 = 30,
MM = 1000 + 1000 = 2000

2. Kleinere Zahlen, die hinter größeren Zahlen stehen, werden dazugezählt:
Zum Beispiel:
VI = 5 + 1 = 6,
XII = 10 + 1 + 1 = 12,
XVIII = 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 18,
DXVI = 500 + 10 + 5 + 1 = 516

3. Kleinere Zahlen, die vor größeren Zahlen stehen, werden abgezogen:
Zum Beispiel:
IV = 5 - 1 = 4, IX = 10 - 1 = 9,
XIV = 10 + (5 - 1) = 14, CD = 500 - 100 = 400
MDXC = 1000 + 500 + 100 - 10 = 1590

Nun seid Ihr an der Reihe!

1. Übersetzt folgende römischen Zahlen in unsere Schreibweise: VIII, XII, CX, DC, CXL, CM, XL, XIX, MCCC, LIX.

2. Nun das Ganze umgekehrt:
7, 13, 45, 101, 450, 543, 333, 876, 999

3. Übersetze die folgenden Zahlen, die auf Denkmälern zu finden sind:
Schiller, geb. MDCCLIX gest. MDCCCV
Goethe, geb. MDCCIL gest. MDCCCXXXII
Kant, geb. MDCCXXIV gest. MDCCCIV
Galilei, geb. MDLXIV gest. MDCXLII
Friedrich der Große, geb. MDCCXII gest. MDCCLXXXVI

4. An einem alten Burgtor steht MDCLXXIV. Welcher der zuvor genannten Herren könnte darin gewohnt haben?

nach: R. Strüter: Knobeln und Kombinieren, Verlag Die Schulpraxis

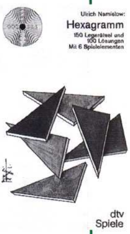
Alphons logische Abenteuer (8)

Alphons las auf der einem medizinischen Präparat beigefügten Information: „Durch Einwirkung des Medikaments und/oder infolge des fortgeschrittenen Erkrankungsgrades kann es zu zeitweiligen Übelkeitsgefühlen kommen." Was, so fragte er sich, bedeutet das „und/oder"? Würde nur „und" stehen, so wäre das Übelkeitsgefühl Folge sowohl des fortgeschrittenen Erkrankungsgrades als auch des Medikaments. Beides zusammen bewirkt zeitweilige Übelkeit. Würde nur „oder" stehen, so ist dieser Fall nicht ausgeschlossen, wenn man „oder" nicht im ausschließenden Sinn versteht, ausgedrückt durch „entweder, oder". Anders als im ersteren Sinn kann das „oder" in „und/oder" auch gar nicht verstanden werden, denn das „und" schließt das „entweder, oder" aus und umgekehrt. Die Übelkeit kann des einschließenden „oder" wegen aber auch Folge nur der Einnahme des Präparates bzw. nur Anzeiger des Grades der Erkrankung sein. Wenn also das „oder" in der Kombination „und/oder" den Fall des „und" einschließt, warum wird dieser dann extra angeführt? Vermutlich will man mit „und/oder" gerade die Verstehensweise des „oder" betonen: Im Zusammenhang mit Grad der Erkrankung und Einnahme der Medizin kann mindestens eines zu zeitweiliger Übelkeit führen. Dann aber darf man überall, wo das einschließende „oder" gemeint ist, „und/oder" verwenden.

„Alphons" rief seine Schwester, „wann schreibst Du den aufgegebenen Aufsatz?" Er antwortete:„Heute und/oder morgen." Seine Schwester erwiderte: „Besser, Du schreibst ihn heute und morgen, als nur morgen." Nachdem Alphons sie über den Gebrauch von „und/oder" aufgeklärt hatte, meinte sie: „Und warum drückst Du Dich dann so kompliziert aus?" Diese Frage gab Alphons seinem Deutschlehrer weiter. „Man greift zu dieser Konstruktion, weil oft „oder" verwendet wird, wo eigentlich „entweder, oder " stehen müßte", meinte dieser. „So erhält man auf eine Frage eine Oder-Antwort, obwohl sachlich klar ist, daß nur ein Entweder – Oder zutreffen kann. Auf die Frage z. B., wann jemand heute von Berlin nach Madrid fliege, ist die Antwort: 15 Uhr oder 17 Uhr, nicht ungewöhnlich. Der Gebrauch von „und/oder" soll dem Mißverstehen vorbeugen, obwohl es doch den viel einfacheren Weg gibt, die schon zur Verfügung stehenden unterscheidenden Sprachausdrücke korrekt zu verwenden. Es liegt ja hier kein echter Mangel der deutschen Sprache vor, sondern nur unangemessene Lockerheit im Umgang mit ihr. Ganz ausschließen kann auch diese Konstruktion das Mißverstehen nicht. Wichtiger aber ist, ihren Gebrauch übt man durch Rückgriff auf die Unterscheidung von ein- und ausschließendem oder. So wird denn diese schon gegebene sprachliche Unterscheidung wieder in das Bewußtsein gerückt und die Konstruktion macht sich auf diese Weise selbst wieder überflüssig."

Prof. Dr. L. Kreiser
Institut für allgemeine Logik der Universität Leipzig

Verhextes Hexagramm



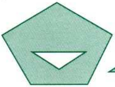
Eine Empfehlung für „Legebesessene"

Als der dtv (Deutscher Taschenbuch Verlag) uns das Büchlein **„Hexagramm"** von Ulrich Namislow sandte, kam die Arbeit in der Redaktion für einige Zeit zum Erliegen. Allerdings ohne schlechtes Gewissen darüber, denn wir wollen Euch ja nichts empfehlen, was wir nicht selbst ausprobiert haben.

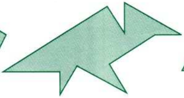
In dem Büchlein werden 150 Legerätsel zum Knacken vorgegeben, die aus den sechs kongruenten, ungleichseitig-rechtwinkligen Dreiecken zusammenzulegen sind. 

Für ganz Ungeduldige stellen wir hier einige Rätsel vor. Die erforderlichen Dreiecke sind schnell gebastelt. Zu beachten ist noch, daß stets alle Spielfiguren zu verwenden sind und sich jeweils mindestens zwei Eckpunkte und zwei Seiten berühren müssen.

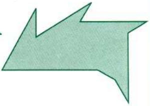
1)



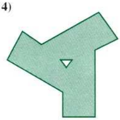
2)



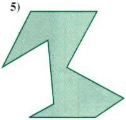
3)



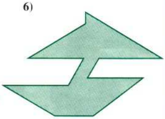
4)



5)



6)



Übrigens – zusammen mit dem Büchlein (**ISBN 3-423-10340-X**, Preis 14,80 DM) erhaltet Ihr gleich ein stabiles Legespiel mit.

Sprachecke

Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?

aus: Quant, Moskau

Le mousse tache

Le jeune mousse a fait une tache sur le journal de bord du capitaine. Sur cette page, le capitaine avait reporté le montant de la facture correspondant aux 36 chandelles achetées lors de la dernière escale. Au niveau du total, on lit maintenant: ?7,4? DM.

Les points d'interrogation désignent les taches faites par le mousse. Indiquez le prix d'une chandelle, sachant qu'il est inférieure à 2 DM.

aus: Tangente, Paris

For christmas eve

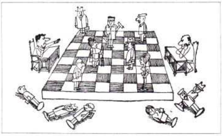
In the problem each letter must be replaced by a digit in such a way that the addition is correct.

$$\begin{array}{r} N\ O\ E\ L \\ +\ N\ O\ E\ L \\ \hline B\ E\ L\ L\ S \end{array}$$

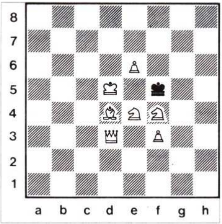
aus: fun with mathematics, Toronto

alpha-Schachwettbewerb

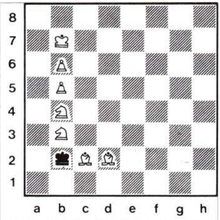
Zum 9. Mal fordert alpha alle Schachfreunde und jene, die es werden wollen, zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf! Wiederum sind acht Schachaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad zum Lösen vorgegeben. Vordergründig soll dieser Wettbewerb Spaß an den reizvollen Knobeleien auf dem Schachbrett vermitteln, wobei bis zum Erreichen der Lösungen einige Fallstricke zu erkennen und zu durchschauen sind, was die Entwicklung mathematischer Analysetätigkeit unterstützt.



Schachwelt *Tiber Kajan*



Nr. 1 Matt in zwei Zügen



Nr. 2 Matt in zwei Zügen

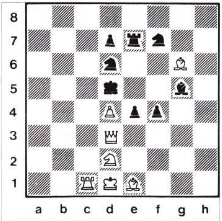
In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt. Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden!

Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt. In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.

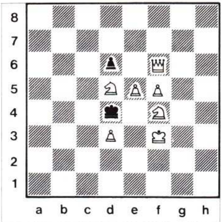
Die Einsendung der Lösungen ist bitte bis zum 1. März 1992 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

Redaktion alpha
PSF 129
O - 7010 Leipzig

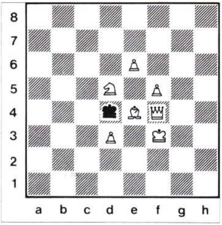
Die Lösungen und die Gewinner werden in alpha 4/1992 veröffentlicht.



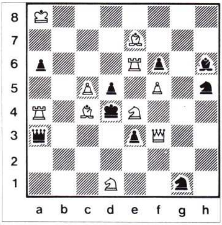
Nr. 3 Matt in vier Zügen



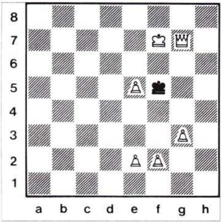
Nr. 4 Matt in zwei Zügen



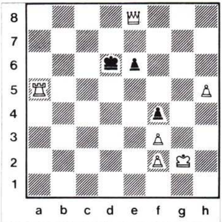
Nr. 5 Matt in zwei Zügen



Nr. 6 Matt in zwei Zügen



Nr. 7 Matt in drei Zügen



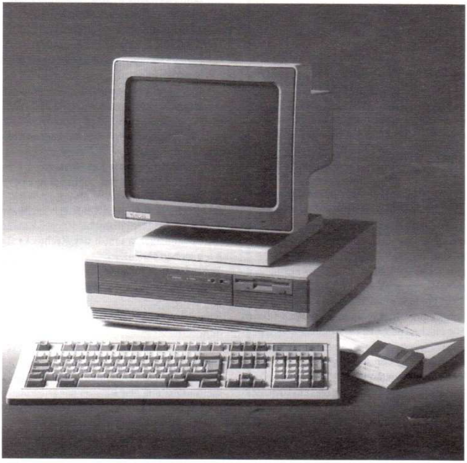
Nr. 8 Matt in vier Zügen

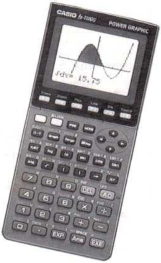
alpha-Wettbewerb

Hauptpreis: 1 Vegas Computer CE 0808 incl. 20 MB Festplatte und Bildschirm

Attraktive Preise im alpha-Wettbewerb 1991/92

Tolle Preise gibt es beim alpha-Wettbewerb 1991/92 zu gewinnen. Mitmachen lohnt sich also und bringt neben dem Spaß an der Mathematik auch die Möglichkeit, einen attraktiven Preis zu ergattern. Die Wettbewerbsbedingungen findet Ihr auf Seite 22. Wir bedanken uns bei den Sponsoren des Wettbewerbs und wünschen uns eine rege Teilnahme.





Die Preise:

- Ein ***Vegas Computer CE 0808 mit 20 MB Festplatte, Tastatur und Bildschirm***, Hantarex Deutschland Vertriebsges. mbH., W-5230 Altenkirchen
- Vier ***Software-Programme*** des CoMet Verlages für Unterrichtssoftware, 4100 Duisburg: Cabri Geomètre, Derive 2.0, Treffer!, Graphix Erforderliche Hardware: jeweils PC mit MS-DOS ab unterschiedlichen Versionen 2,11; 3,2; 3,3; 512 bzw. 648 KB Hauptspeicher und Graphikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA)
- Ein ***Graphik-Rechner FX-7700 G*** von Casio Computer Co. GmbH, 2000 Hamburg
- Zehn ***Electronic-Rechner*** unterschiedlicher Ausstattung von Texas Instruments Deutschland GmbH, 8050 Freising
- Zehnmal die ***Bände I-III "Internationale Mathematik-Olympiade"*** für die Oberstufe vom Manz Verlag, 8000 München
- Fünf ***Electronic Translators mit Währungsrechner und sechs Weltsprachen im Griff*** von Conrad Electronic, 8452 Hirschau
- Zwei Bände ***Schülerduden, Mathematik I und II*** vom Bibliographischen Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
- Fünfzehn ***Spiele*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg
- Ein ***Schülerduden "Die Informatik"***. Bibliographisches Institut & Fa. Brockhaus AG, 6800 Mannheim
- Jeweils fünf ***Arbeitshefte und Lösungsbände der "Aufgabensammlung für mathematisch interessierte Schüler"***: 5. - 7. Jahrgangsstufe, 8. - 10. Jahrgangsstufe und 11. - 13. Jahrgangsstufe. Insgesamt 15 Preise! Sponsor: Manz Verlag, 8000 München
- Fünfzehn ***Bücher*** unterschiedlicher Ausstattung vom Otto Maier Verlag Ravensburg AG, 7980 Ravensburg.

Mitarbeiter/innen des Verlages und deren Angehörige können nicht am Wettbewerb teilnehmen. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Die Verlosung erfolgt unter den Einsendern, die die Aufgaben richtig gelöst haben. Der Vegas Computer wird unter den fünf Besten aller Klassenstufen verlost.

alpha-Wettbewerb

Wer löst mit?

Wettbewerbsbedingungen

1. Der Wettbewerb 1991/92 läuft über zwei Teilwettbewerbe in den Heften 6/91 und 1/92.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Anschrift, Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter) zu richten an:
Mathematische Schülerzeitschrift alpha
Postfach 129
O-7010 Leipzig
Den Lösungen ist die frankierte und an Euch adressierte **Antwortkarte** beizulegen, welche Ihr **im Mittelteil unserer Zeitschrift** findet. Darauf erhaltet Ihr die Ergebnisse dieses Teilwettbewerbes mitgeteilt. Steht mehreren Schülern nur eine Zeitschrift zur Verfügung, so kopiert Euch die Auswertungsseite der Antwortkarte und klebt sie auf eine an Euch adressierte Postkarte (Porto nicht vergessen).
Schulen beachten bitte, daß die gesammelte Rücksendung entsprechend mehr Porto verlangt.
3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe zu lösen. Schüler ab Klassenstufe 10 und Erwachsene lösen die mit 10 und E gekennzeichneten Aufgaben.
4. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um diese mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen zu vergleichen.
5. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens 8 Aufgaben richtig (gut oder sehr gut) gelöst haben, senden bis zum 10. September beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten und adressierten Rückumschlag und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die beiden bereits vorhandenen Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten.
6. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Urkunde und einen alpha-Button. Pro Klassenstufe 5 bis 10 werden die 5 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen jeweils fünf Teilnehmer ausgelost.) (Außerdem prämieren wir 5 Frühstarter (Klassen 1 bis 4)). Diesen Glücklichen winken attraktive Preise, welche wir auf Seite 21 vorstellen.
Beachtet bitte, daß wir Einsendungen ohne Rückporto nicht mehr bearbeiten können.

Einsendeschluß: 22. Februar 1992

Klassenstufe 5

5/1
Von drei Freunden mit den Rufnamen André, Bernd und Christian und den Familiennamen (in anderer Reihenfolge) Lange, Meier und Neumann ist folgendes bekannt:
(1) Bernd und der Junge mit dem Familiennamen Lange besuchen die gleiche Schule.
(2) André, Christian und der Junge mit dem Familiennamen Neumann betreiben aktiv Sport.
(3) Der Junge mit dem Familiennamen Lange ist mit Christian verwandt.
Wie heißen die drei Freunde mit vollem Namen?
Schüler Sven Reinald, Zerbst

5/2
Bestimme die kleinste und die größte dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 10. (Beispiel für eine Quersumme: Die Zahl 369 hat die Quersumme $3 + 6 + 9 = 18$.)
Schülerin Corinna Petzold, Cottbus

5/3
Eine Familie besteht aus vier Personen, die zusammen 101 Jahre alt sind. Der Vater ist viermal so alt wie sein Sohn und drei Jahre älter als die Mutter. Der Sohn ist vier Jahre jünger als seine Schwester. Wie alt ist jedes Familienmitglied?
Schülerin Corinna Petzold, Cottbus

5/4
Drei Freunde mit den Vornamen Ronny, Falk und Ingmar haben (in anderer Reihenfolge) die Nachnamen Krause, Lumnitz und Schettler.
Von ihnen wissen wir folgendes:
(1) Falk hilft Krause in Mathematik.
(2) Falk, Ingmar und Lumnitz sind Klassenkameraden.
Wie heißen die drei Freunde mit vollem Namen?
Schülerin Sandra Löser, Grüningen

5/5
In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{r} A\ R\ I\ E \\ +\ A\ R\ I\ E \\ \hline O\ P\ E\ R\ A \end{array}$$

Schülerin Melanie Anefeld, Herges-Hallenberg

5/6
Die drei Geschwister Axel, Beate und Christian sind im Alter jeweils zwei Jahre auseinander. Beate ist älter als Christian, aber jünger als Axel. Zusammen sind sie 24 Jahre alt. Wie alt ist jedes dieser drei Kinder?
Sch.

5/7
Ein Hotel hat zusammen 20 Ein- und Zweibettzimmer mit insgesamt 32 Betten. Über wieviel Ein- bzw. Zweibettzimmer verfügt es?
Sch.

Klassenstufe 6

6/1
Die vier Jungen Dirk, Rico, Mark und Lars haben (in anderer Reihenfolge) die Nachnamen Wagenknecht, Stöwesand, Fischer und Jakobi. Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Die drei Jungen Rico, Mark und der mit dem Nachnamen Stöwesand sind zusammen auf einem Erinnerungsfoto zu sehen.
(2) Lars heißt nicht Stöwesand.
(3) Mark, Lars und der Schüler mit dem Nachnamen Jakobi waren kürzlich zusammen im Schwimmbad.
(4) Mark und der Schüler mit dem Nachnamen Fischer waren zusammen im Ferienlager.
Wie heißt jeder dieser vier Jungen mit vollständigem Namen?
Schülerin Annekatrin Voß, Gielow

6/2
Ein Rechteck hat einen Umfang von 26 cm und einen Flächeninhalt von 40 cm^2. Es sind die Seitenlängen a und b des Rechtecks für $a > b$ zu berechnen!
Sch.

6/3
Kürze so weit wie möglich: $\frac{131313}{656565}$
Sch.

6/4
Weise nach, daß in einem konvexen Viereck die Summe aus den Längen der Diagonalen größer ist als die Summe aus den Längen zweier gegenüberliegender Seiten.
Sch.

6/5
Der Nenner eines Bruches ist um 3521 größer als sein Zähler. Nach dem Kürzen dieses Bruches erhält man $\frac{4}{11}$. Durch welche Zahl wurde der Bruch gekürzt?
Sch.

6/6
Für alle natürlichen Zahlen gilt folgende Aussage: "Wenn die kleinste von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, so ist deren Summe durch 10 teilbar." Es ist nachzuweisen, daß diese Aussage wahr ist.
Sch.

6/7
Ein Fußgänger bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 4$ km/h. Welchen Weg legt er in 30 min zurück?
R.

Klassenstufe 7

7/1
Eine vierköpfige Familie ist zusammen 88 Jahre alt.
Die Mutter ist viermal so alt wie die Tochter, der Vater dreimal so alt wie der Sohn. Vater und Mutter sind zusammen 48 Jahre älter als Tochter und Sohn zusammen. Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?
Schülerin Melanie Anefeld, Herges-Hallenberg

7/2
Addiert Tobias zur Zahl seines Geburtsjahres deren Quersumme, so erhält er als Ergebnis 2000. In welchem Jahr wurde Tobias geboren?
Schüler Thomas Schaller, Bad Langensalza

7/3
"Gib mir einen Apfel; dann habe ich doppelt soviel Äpfel wie du", sagte Axel zu seiner Schwester Beate. "Das ist ungerecht. Gib du mir einen Apfel von deinen, dann haben wir gleichviel Äpfel", antwortete die Schwester. Wie viele Äpfel hat jedes der beiden Geschwister?
Schülerin Jana Motzing, Möhra

7/4
In zwei Jahren wird Axel doppelt so alt sein, wie er vor zwei Jahren alt war. Wie alt ist Axel gegenwärtig?
Schülerin Jana Motzing, Möhra

7/5
Addiert man zu einer dreistelligen natürlichen Zahl 297, so erhält man eine weitere natürliche Zahl, die aus den gleichen Ziffern bei umgekehrter Anordnung besteht.

a) Wie viele solcher Zahlen gibt es?
b) Wie lautet die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

Sch.

7/6
Ein Fahrzeug bewegt sich eine Strecke von 20 km mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h und 10 km mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?
R.

7/7
Ein Mondauto hat auf der Erde eine Masse von 240 kg.
Welche Masse hat es auf dem Mond? (Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt $1{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)
R.

▶

Preisträger im alpha - Wettbewerb 1990/91

Sonderpreise für Frühstarter (Klassenstufe 2 - 4): Susann Fellenberg, *Torgau*; Stephanie Möder, *Schmalkalden*; Claudia Schreiber, *Leipzig*

Klassenstufe 5: AG Mathe Kl. 5, *Dallgow*; Christiane Dammann, *Freital*; Stefan Herrmann, *Wegefarth*; Thomas Kalinowski, *Grambow*; Doreen Köhler, *Cottbus*; Sylke Kowtsch, *Dresden*; Kordula Petri, *Berlingerode*; Stephanie Ratzke, *Klein Oschersleben*; Roland Voigt, *Böhlen*; Daniel Wille, *Sondershausen*

Klassenstufe 6: AG Mathe 6/7, *Mieste*; Sarah Bardy, *Netphen*; Anja Biallas, *Magdeburg*; Lydia Franck, *Potsdam*; Martin Friederichs, *Bergfelde*; Jan Kasper, *Herzberg*; Anja Mann, *Bautzen*; Silke Rudolph, *Großröhrsdorf*; Henryk Schreiber, *Wulfen*; Andreas Stolle, *Wittenberg*

Klassenstufe 7: AG Mathe 7, *Dallgow*; Thomas Kranhold, *Wasserthaleben*; Ulrike Kretschmer, *Dresden*; Karen Mühlenbein, *Rampe*; Lars-Peter Müller, *Leipzig*; Ulrike Müller, *Fischheim*; Arlett Prengel, *Rostock*; Manuela Vogel, *Halberstadt*; Georg Wenig, *Kaiserslautern*; Angela Wiesjahn, *Holzendorf*

Klassenstufe 8: Diana Fanghänel, *Gersdorf*; Anja Friederichs, *Bergfelde*; Anett Gschwender, *Brohm*; Christoph König, *Greifswald*; Thomas Prüver, *Bad Freienwalde*; Norbert Schröder, *Bernau*; Antje Vogt, *Worbis*; Andrea Weigl, *Bad Salzungen*; Andreas Willnow, *Lindenthal*; Daniel Wolf, *Mittweida*

Klassenstufe 9: Kristian Debrabant, *Eisleben*; Birgit Elßner, *Werneuchen*; Christian Föllmer, *Berlin*; Andreas Hamm, *Suhl*; Yvonne Langer, *Eisenach*
Matthias Loesdau, *Landshut*; Thomas Lotze, *Suhl*; Falk Pätzold, *Werdau*; Jörg Siede, *Zepernick*; Ulrich Voigt, *Böhlen*

Klassenstufe 10: Dr. Frank Aßmus, *Oranienburg*; Bertram Bracher, *Schwarzheide*; Stefan Erb, *Schwallungen*; Matthias Kassner, *Meiningen*; Astrid Mirle, *Kleindehsa*; Jens Pönisch, *Chemnitz*; Doris Seifert, *Rochlitz*; Matthias Tittel, *Berlin*; Sylvia Wachholz, *Görlitz*; Heike Walter, *Berlin*

Wir gratulieren herzlich!

Die Liste der Teilnehmer, die mindestens dreimal teilgenommen haben, veröffentlichen wir in Heft 1/92.

Beteiligung im Team Wettbewerb 1990/91

Peter - Lamberz - OS, *Bergfelde*; Regelschule Lindenberg/Eichsfeld, *Berlingerode*; Sekundarschule, *Bismark*; Grundschule, Blumberg

Theodor-Körner-OS, *Chemnitz*; Obere Luisenschule, *Chemnitz*; Haus der Freizeit/ Klub Junge Mathematiker, *Cottbus*

Grundschule, *Dallgow*; Schülerfreizeitzentrum "Anne Frank", *Dresden*

OS "Thomas Müntzer", *Ebeleben*; 2. OS, *Eberswalde-Finow; Grundschule am Schloßplatz, Elsterwerda*

Ernst-Thälmann-OS, *Freital*; Helene-Lange-Gymnasium, *Fürth*

Erwin - Hartsch - OS, *Gersdorf*; John - Brinckmann - OS, *Goldberg*; Rosa - Luxemburg - OS, *Gotha*; Juri - Gagarin - OS, *Grünhain*

Matheklub Sekundarschule, *Iden*; Goethe - Schule, *Ilsenburg*; Schule, *Ivenack*

Erich - Weinert - OS, *Johanngeorgenstadt*

alpha-club Oberschule, *Latdorf*; Goetheschule, *Lauscha*; OS, Leutersdorf 1. OS, *Lommatzsch*

Oberschule I, *Mieste*

Max - Langer - OS/AG Mathematik, *Niederoderwitz*

H. - Warnke - Schule, *Oederan*; Alfred - Wirth - OS, *Osternienburg*

Oberschule, *Schneidlingen*; Hans-Beimler-OS/AG Mathematik, *Schönhausen*; Realschule mit Grundschulteil, *Schorssow*; OS "Glückauf", *Sondershausen*; Schule, *Steinbach*

POS Ernst Schneller, *Töplitz*

Johann-Gottfried-Seume OS, *Vacha*

OS Wachau/Seifersdorf, *Wachau*; EOS Alexander von Humboldt, *Werdau*; alpha-club, *Werneuchen*; Heinrich - Heine - Schule, *Wörmlitz*; Sekundarschule Thomas Müntzer, *Wulfen*

Staatliches Gymnasium, *Zeulenroda*; Real- und Grundschule, *Züssow*

Klassenstufe 8

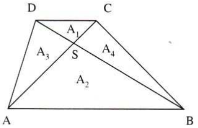
8/1
Wo steckt der Fehler?
16 - 36 = 25 - 45 (Das ist sicher wahr!)
Auf beiden Seiten wird $\frac{81}{4}$ addiert, das ergibt
$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$.
Das läßt sich, wie bekannt, umformen zu
$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(5-\frac{9}{2}\right)^2$
Auf beiden Seiten wird nun die Quadratwurzel gezogen:
$4-\frac{9}{2} = 5-\frac{9}{2}$, und auf beiden Seiten $\frac{9}{2}$ addiert, ergibt 4 = 5.
aus einer Mathematikolympiade

8/2
Mit welchen Ziffern müssen die Leerstellen in der Zahl 52☐2☐ belegt werden, damit die entstehende fünfstellige Zahl
a) durch 36 teilbar ist,
b) durch 11 teilbar ist?
Es sind stets alle Möglichkeiten anzugeben!
Fr.

8/3
Man zeichne ein beliebiges Dreieck ABC.
Es ist eine Gerade g so zu konstruieren, daß
(1) g das Dreieck ABC schneidet,
(2) g zu keiner Dreieckseite parallel ist und
(3) g ein Dreieck abschneidet, das zu ABC ähnlich ist.
Fr.

8/4
Eine zweistellige natürliche Zahl z besitzt die Quersumme 9. Vertauscht man die Grundziffern von z, so erhält man eine zweistellige Zahl z', die größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache von z ist. Um welche Zahl z handelt es sich?
Sch.

8/5
In dem abgebildeten Trapez ABCD, dessen Diagonalen sich im Punkte S schneiden, seien A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 die Flächeninhalte der Teildreiecke Δ CDS, Δ ABS, Δ DAS bzw. Δ BCS. Es ist nachzuweisen, daß die Beziehung $A_3 = \sqrt{A_1 \cdot A_2}$ gilt!



Sch.

8/6
Um auf der Erde einen Körper auf einer Unterlage gleiten zu lassen, ist ein Kraft F von 3,5 N erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient μ=0,35 beträgt. Welche Kraft F' ist auf dem Mond erforderlich, um den Körper auf der gleichen Unterlage gleiten zu lassen?
R.

8/7
Um die Erde sei längs des Äquators ein Stahlgürtel gespannt. Wie groß wäre dessen Längenzunahme bei einer Erwärmung um 1 K? Der Erdumfang wird mit 40 000 km angenommen.
R.

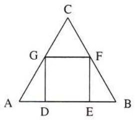
Klassenstufe 9

9/1
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht Null ist. Nun vertausche man ihre erste mit ihrer dritten Ziffer und bilde die Differenz der so entstandenen Zahl mit der ursprünglichen Zahl.
Es sind alle natürlichen Zahlen zu finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind.
von einer Fachgruppe Mathematik aus Altenburg/Thür.

9/2
Es ist das Produkt zweier verschiedener zweistelliger Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern zu bilden.
Anschließend sind die beiden Ziffern in jeder Zahl zu vertauschen und das Produkt aus den beiden neuen Zahlen zu bilden. Unter welchen Bedingungen sind beide Produkte gleich?
Es sind zwei Beispiele anzuführen!
Fr.

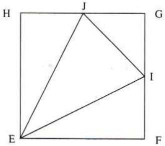
9/3
Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r = 4 cm. Lege im Innern des Kreises k einen Punkt P fest, der nicht mit dem Mittelpunkt M zusammenfällt. Konstruiere eine Sehne, die 6 cm lang ist und durch Punkt P geht! Die Konstruktion ist zu begründen!
Sch.

9/4
Einem gleichseitigen Dreieck ABC wurde, wie aus der Abbildung ersichtlich, ein Quadrat DEFG einbeschrieben. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks macht der Flächeninhalt des Quadrates aus?



Sch.

9/5
Das Quadrat EFGH habe die Seitenlänge a. Der Punkt I ist Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$, und der Punkt J ist Mittelpunkt der Seite $\overline{HG}$. Welches Verhältnis besteht zwischen dem Flächeninhalt des Dreiecks EIJ und dem des Quadrates EFGH?



Fr.

9/6
Der Meßbereich eines Drehspulmeßwerkes beträgt 3 mA, sein Widerstand 20 Ω. Durch einen Parallelwiderstand soll der Meßbereich auf 300 mA erweitert werden. Welcher Widerstand R_p muß parallel geschaltet werden?
R.

9/7
Der Brunnen auf der Festung Königstein ist 152,3 m tief, der Wasserstand beträgt 12 m. Wieviel Zeit vergeht vom Abwurf eines Steines, bis man seinen Aufschlag hört, wenn die Schallgeschwindigkeit c=340 m/s beträgt? (Fallbeschl. = 9,81 m $\cdot$ s^{-2}).
R.

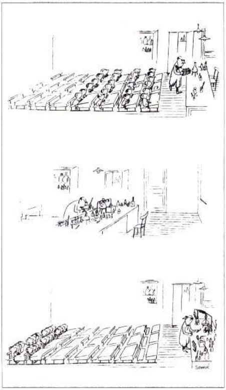
Klassenstufe 10

10/1
Es seien a, b und c paarweise voneinander verschiedene Grundziffern und a = 0.
Wie lautet die im dekadischen Positionssystem geschriebene vierstellige natürliche Zahl $\overline{abcb}$, wenn die Zahlen $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{ac}$ und b jeweils Quadratzahlen sind?
Sch.

10/2
Gegeben sei die Gleichung
$\sin\alpha + \cos\alpha = m. \quad (0° \leq \alpha \leq 90°)$
Es ist für $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ein Ausdruck in m zu finden!

10/3
Welche Paare natürlicher Zahlen (a;b) sind Lösungen der Gleichung
$$\frac{\sqrt{8}}{b^2} \cdot a^{(a+a)} = \frac{\sqrt{2}}{50} \cdot a^{(3a)} \quad (a \neq 0; b \neq 0)\ ?$$
Frank Pampel, Zeulenroda

10/4
Gegeben sei ein spitzer Winkel mit seinem Scheitel S und seinen Schenkeln s_1 und s_2



aus: Archimedes, Niederlande

sowie ein innerer Punkt dieses Winkels, der nicht auf seiner Halbierenden liegt.
Es sind alle Kreise durch P zu konstruieren, die die Schenkel des gegebenen Winkels berühren.
Sch.

10/5
Das Geburtsjahr des Enkels von Herrn Meyer ist ein Produkt $x \cdot y$ zweier natürlicher Zahlen x und y.
Im Jahre x^2 wird der Enkel x Jahre alt sein.
In welchem Jahre wurde der Enkel, der gegenwärtig noch ein Kind ist, geboren?
Sch.

10/6
Ein Körper mit der Gewichtskraft G=1kN bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 20\ m \cdot s^{-1}$. Er soll auf einem 20 m langen Weg l zum Stillstand gebracht werden. Welche Kraft F ist dazu erforderlich?
R.

10/7
An einem Kondensator mit der Kapazität C von 5µF liegt eine Spannung U von 218 V. Es fließt ein Strom I von 0,342 A. Welche Frequenz f hatte die angelegte Wechselspannung?
R.

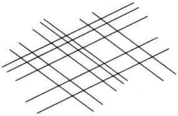
Aufgaben ab Klassenstufe 11

E1
Fred und Rainer wollen sich künftig Briefe in einer "Geheimschrift" senden, die sie selbst erfinden wollen. Jeder Buchstabe soll aus einer bestimmten, aber gleichen Anzahl weißer oder schwarzer Punkte dargestellt werden, also z. B.:

○○○ oder ○● oder ○○○
●●○ ● usw.
usw. ●○
usw.

Wieviele weiße oder schwarze Punkte muß man für jeden Buchstaben mindestens festlegen, damit alle 26 Buchstaben verschieden darstellbar sind?
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn auch für die verschiedenen Buchstaben unterschiedliche Anzahlen weißer oder schwarzer Punkte zugelassen sind und für die Darstellung des Alphabets die geringstmögliche Anzahl von Zeichen gefordert wird?
Fr.

E2
Wie das Bild zeigt, wird eine Schar von 5 zueinander parallelen Geraden von einer zweiten Schar von 7 zueinander parallelen Geraden geschnitten.
Wieviele Parallelogramme entstehen dadurch?



E3
Gegeben sei ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 1 cm^2. Es werde ein zweites Quadrat konstruiert, so daß die Eckpunkte des ersten zu Seitenmittelpunkten des zweiten Quadrates werden. Das werde so fortgesetzt, daß das n-te Quadrat als Seitenmittelpunkte die Eckpunkte des (n-1)-ten Quadrates hat. Das wievielte Quadrat übertrifft erstmalig die Fläche von einem Hektar?
Fr.

E4
Bei welcher der neu erfundenen Wettarten ist die Chance, einen Hauptgewinn zu erzielen, am größten, bei welcher am geringsten? Wir wollen von der Höhe des Gewinns absehen.
(1) Aus 60 Zahlen sollen 8 gezogen werden. Der Hauptgewinn ist ein "Achter".
(2) In einem neuen Fußballtoto soll von 20 Spielen vorausgesagt werden, welches gewonnen, welches verloren, welches unentschieden ausfällt.
(3) Bei einem internationalen Skispringen kämpfen am letzten Tag nur noch 13 Springer um die Plätze.
Es soll die genaue Plazierung dieser 13 Springer vorausgesagt werden.
(4) An einem Marathonlauf nehmen genau 100 Läufer teil.
Es soll vorausgesagt werden, wer die Gold-, wer die Silber- und wer die Bronzemedaille erkämpft.
Fr.

E5
Wieviele Schnittpunkte können n Geraden ($n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$) in einer Ebene höchstens erzeugen?
Die Vermutung ist mit Hilfe der Beweismethode der vollständigen Induktion zu zeigen!
Fr.

E6
Eine Druckflasche enthält verdichtetes Gas unter einem Druck von p = 4 MPa und der Temperatur t = 27 °C. Auf welchen Druck ändert sich das Gas, wenn nach Ablassen der Hälfte des eingeschlossenen Gases die Temperatur um 15 K abnimmt?
R.

E7
An einem Serienschwingkreis (L=0, 25 H, C=25 µF, R=12 Ω) liegt eine Wechselspannung U von 125 V. Berechnen Sie die Stromstärke I im Resonanzfall!
R.

Die Lösungen veröffentlichen wir in Heft 2/92.

Ein Dankeschön

Die Redaktion alpha konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbes 1990/91 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Fachbuchverlag, Leipzig
Deutscher Taschenbuchverlag (dtv), München
Urania Verlag, Leipzig · Jena · Berlin
Aulis Verlag, Köln
Universitätsverlag Wagner GmbH, Innsbruck
Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Leipzig
Philipp Reclam jun. Verlag, Ditzingen
Bleicher Verlag, Gerlingen
Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart
Manz Verlag, München
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Kirchen, Kreisketten und eigene Kunstwerke

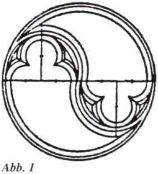


Abb. 1


Abb. 2


Abb. 3


Abb. 4

Sicher wird jeder von Euch schon einmal eine mittelalterliche Kirche gesehen und ihre Schönheit bewundert haben. Besonders an gotischen Kirchen und Kathedralen haben die damaligen Künstler mit bewundernswertem Geschick eine ganz besondere Art der Kreisbogenornamentik entwickelt und zu hoher Blüte gebracht. Diese Formenbildungen werden als Maßwerk bezeichnet. Die Gestaltung der Ornamente mittels Zirkel, Lineal und Winkelmaß lag der Kunstbetätigung dieser Epoche nahe.

Die Umsetzung dieser Ornamente im Bauwerk stellt übrigens eine technische Meisterleistung dar.


Notre Dame, Paris

Gotik ist die zweite große Stilperiode der mittelalterlichen Kunst in Europa. Neben dem Kirchenbau als Hauptaufgabe erlebt der bürgerliche Profanbau eine erste Blüte, im Städtebau wird eine planmäßige Anlage angestrebt, an Wohn- und Gemeinschaftsbauten (z. B. Rathäusern) äußert sich Repräsentationsbedürfnis. Am Ende der Gotik wird die Burg zum Schloß.
Übrigens – das erste deutsche Bauwerk, dem ein gotischer Bauplan zugrunde lag, ist der Magdeburger Dom (seit 1209), das bedeutendste der Hoch-Gotik ist der Dom zu Köln (seit 1248).

Bekannte und allgemein benutzte Einzelformen sind die Fischblasen (**Abb. 1 – 4**), das Dreiblatt (**Abb. 5 und 6**), das Vierblatt (**Abb. 7**) u.s.w., der Dreipaß, Vierpaß, Fünfpaß u.s.w. (einen Vierpaß zeigt das Mittelfeld von **Abb. 8**, zwei Dreipässe stehen rechts und links darüber).

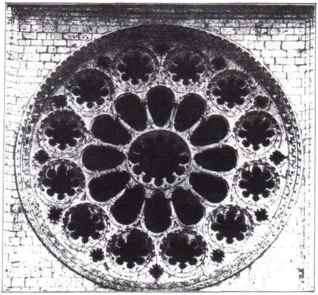
Die Abbildungen entnahmen wir dem Handbuch der Ornamentik von Franz Sales Meyer, das 1927 im Seemannverlag in Leipzig erschien. Gedacht war es "Zum Gebrauche für Musterzeichner, Architekten, Schulen, Gewerbetreibende sowie zum Studium im allgemeinen".

Habt Ihr nicht Lust, Euch auf den Spuren der mittelalterlichen Künstler selbst als Ornamentzeichner zu probieren? Wir würden es empfehlen.

Hervorragende Beispiele dieser Ornamentmotive finden sich an der Kathedrale Notre-Dame von Chartres. Die Baugeschichte dieser Kathedrale ist kompliziert. Der Nordturm wurde 1134 bis 1150 und der Südturm 1145 bis 1170 errichtet. 1194 brannte der Vorgängerbau der Kathedrale ab. Die beiden unversehrt gebliebenen Türme wurden nun dem unmittelbar nach dem Brand in Angriff genommenen Neubau eingegliedert.

So entstand schließlich im Jahr 1276 das zwischen beiden Türmen angeordnete Rundfenster über dem Hauptportal der Westfassade. Es weist den enormen Durchmesser von 13,5 m auf.

Dieses Radfenster besitzt 12 Speichen in Gestalt kurzer glatter Säulen. Geometrisch liegt dem Fenster eine Zwölfer-Kreiskette zugrunde, deren Glieder mit Achtpässen ausgefüllt sind, ferner eine innere und kleinere Zwölfer-Kreiskette, und schließlich befindet sich im Zentrum noch ein Zwölfer-Paß. Es liegen also zwei Kreisketten mit identischer Gliederzahl ineinander und zwar so, daß jedes Glied der äußeren Kette von zwei benachbarten Gliedern der inneren Kette berührt wird.


Die Westrose der Kathedrale von Chartres aus dem Jahr 1276, Außenansicht

Die zwölf großen Rosetten werden vom Dreifußmaß bestimmt, indem sechs Quadrate von 12 Fuß* Seitenlänge um die zentrale Rosette gezeichnet werden. Deren Seitenlinien sind danach zu einem 24zackigen Stern erweitert. Dieser Stern legt schließlich die Mittelpunkte der Kreisketten-Glieder sowie deren Berührungspunkte fest.

Versucht doch selbst einmal, hinter das Geheimnis der geometrischen Struktur der Westrose von Chartres zu kommen.

Alphons

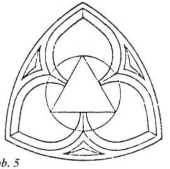


Abb. 5

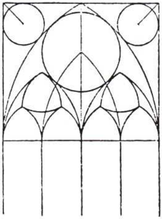


Abb. 6

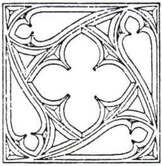


Abb. 7

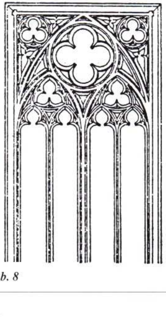
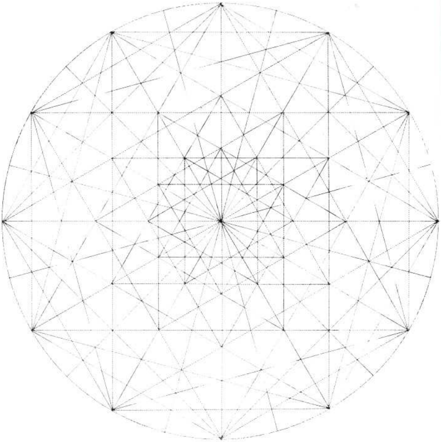


Abb. 8

* Fuß – veraltetes, von der Länge des Fußes abgeleitetes Längenmaß unterschiedlichen Betrages um 30 cm. In Deutschland gab es früher über 100 verschiedene Fußmaße.

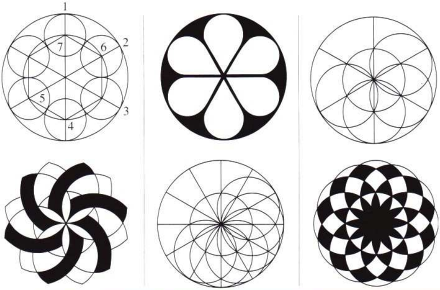
Ein Tip für den Weihnachtsgruß – Kunst im Kreis

Mit Zirkel und Lineal lassen sich sehr schöne "Kunstwerke im Kreis" herstellen. Eine mögliche Ausgangsfigur ist hier abgebildet. Sie kann nun von Euch durch Weglassen verschiedener Linien, Hinzufügen von Kreisen,... vielfältig abgewandelt werden. Wenn Ihr die einzelnen Segmente dann noch farbig ausmalt, könnt Ihr die schönsten Poster oder ganze Serienproduktionen von Weihnachtskarten selbst gestalten.



Falls Euch die Puste noch nicht ausgegangen ist, versucht doch, die folgenden Figuren nachzuzeichnen.

Alphons



Mathematik am Billardtisch

Teil 1

Es ist doch erstaunlich, wo in unserem Leben überall Mathematik steckt. Ob aber zum Beispiel der Billardspieler immer daran denkt, daß sein Spiel mathematischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt?
Begleiten wir doch einmal Klaus, Hans und Eberhard sowie ihren Klassenleiter bei einem Exkurs in die Mathematik am Billardtisch.

Es war einer dieser Abende in der Jugendherberge, an denen man im Spielzimmer oder sonstwo herumlungert, dies und das beginnt, aber noch nicht recht weiß, womit er ausgefüllt werden soll.

Klaus, Hans und Eberhard, die „Mathematiker" meiner Klasse, hatten sich am Billardtisch versammelt. Sie versuchten diesen oder jenen Stoß, wobei sie offensichtlich auch Gesetzmäßigkeiten auf die Spur zu kommen hofften. Ich hatte mich etwas abseits niedergelassen und verfolgte mehr beiläufig ihr Treiben.

„Ich möchte doch zu gern wissen" – Hans richtete das Queue aus verschiedenen Richtungen auf die einzige noch auf dem Tisch liegende Kugel – „ob ich diese Kugel so anstoßen kann, daß sie wieder an dieselbe Stelle zurückkommt, nachdem sie nacheinander jede Bande berührt hat!"

Sofort entspann sich eine hitzige Debatte, begleitet von mehreren erfolglosen Versuchen von Hans und Klaus. Plötzlich verlangte Eberhard das Queue, führte nach einem kurzen Blick tatsächlich einen erfolgreichen Stoß aus und lieferte, wie es so seine Art war, anhand einer Skizze an der Ergebnistafel auch gleich die Erklärung (siehe **Abb. 1**).

„Stoße ich in Richtung einer Diagonalen, so läuft die Kugel nach der Reflexion in Richtung der zweiten weiter. Klaro? –
Außerdem ist $b_1 : b_2 = a_1 : a_2$ und
$(b_1 + b_2) : b_2 = \frac{d}{2} : x$, sowie $(a_1 + a_2) : a_2 = \frac{d}{2} : y$.

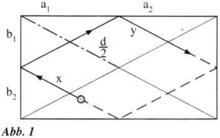


Abb. 1

Setzt man die erste Gleichung in die beiden nächsten ein, so findet man ohne Mühe die Beziehung x = y! Also schließt sich der Weg der Kugel zu einem Parallelogramm".

Klaus mußte Theorien immer in der Praxis überprüfen und wiederholte den Versuch von einer anderen Stelle des Tisches aus, hatte ebenfalls Erfolg und nun begann erst einmal eine Runde ‚Entspannungsübung'. Mitten aus der begeisterten Ruhe hörte ich plötzlich Hans fragen: „Kommt es mir nur so vor, oder brauchen die Kugeln auf ihren geschlossenen Wegen immer die ungefähr gleiche Zeit? Sind die Wege etwa alle gleich lang?"

„Waaas ...", das war Klaus, der gleichzeitig etwas an die Tafel zeichnete (**Abb. 2**).

„Sollen diese beiden Wege etwa gleich lang sein? ... Das würde ja bedeuten, daß alle diagonalparallelen, einem Rechteck einbeschriebenen Vierecke die gleiche Länge 2d haben müßten, wenn wir den Grenzfall in Betracht ziehen!" „Und doch ist es wirklich so!" – Diesmal war es Hans, der die Anwendbarkeit der Ähnlichkeitssätze zuerst erkannt hatte. –

„Wir sehen sofort $l_1 : a_1 = l_2 : a_2 = d : (a_1 + a_2)$ ein. Daraus folgt

$l_1 = a_1 \cdot d / (a_1 + a_2)$ und

$l_2 = a_2 \cdot d / (a_1 + a_2)$, also

$l = l_1 + l_2 = (a_1 + a_2) d / (a_1 + a_2) = d$

Das gilt aber offensichtlich für jedes diagonalparallele Viereck dieser Art."

Jetzt war der Moment gekommen, wo die Jungen aus dem deutlichen Gefühl heraus, eine Entdeckung gemacht zu haben, dafür Anerkennung brauchten, und jetzt fiel ihr Blick in meine Richtung.

„Herr Hofmann, was meinen Sie zu unserer Entdeckung?" – sie hatten meinem Blick wohl die Gewißheit abgelesen, daß ich alles mit angehört hatte. Und ob ich nun wollte oder nicht, ich mußte meine Meinung sagen und war von nun an mitten im Disput. Ich hielt auch mit meinem Lob nicht hinter dem Berg. Weil aber Lehrer ‚natürlich' immer noch ein wenig klüger sein müssen, strengte ich mich an und konnte (zu meiner eigenen Verblüffung, ehrlich!) tatsächlich noch eins draufsetzen (**Abb. 3**).

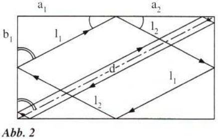


Abb. 2

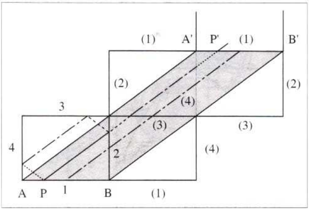


Abb. 3

„Seht her! Ich kann den geschlossenen ‚Spiegelweg' durch drei Spiegelungen, nacheinander an den Seiten ausgeführt, als gerade Strecke [PP'] darstellen. Weil $AB \| A'B'$ ist, kommt der Weg in P' unter dem gleichen Winkel an, unter dem er die Seite [AB] im Punkte P verläßt. Außerdem ist aber $\overline{AP} = \overline{A'P'}$.

Nun seht Ihr wohl auch ohne Rechnung sofort ein, daß **alle** diese Wege die gleiche Länge 2d besitzen müssen. Wir sehen aber sogar noch mehr: unsere ‚Reflexionswege' innerhalb des Rechteckes sind die einbeschriebenen Vierecke mit dem kleinstmöglichen Umfang!"

„Sie haben recht" – meldete sich Eberhard aus seinen Überlegungen zurück – „die gerade Strecke ist die kürzeste Verbindung der Punkte P und P'. Klaro!" Dies letzte Wort aber zeigte mir, daß er nun all' seine Gedanken anspannen würde, um wieder an die Spitze des unerklärten Wettstreites zu kommen.

Zunächst war es aber wieder einmal Hans, dem es zu langweilig wurde und der deshalb mit der Frage nach einem ‚Billard-Tisch mit allgemein viereckiger Grundfläche' kam!

Den hatten wir nicht, und nun mußten wir die Debatte wohl oder übel anhand von ‚Kreide-Physik' weiterführen. –

Warum wollen wir eigentlich alles allein machen? Diskutiert Ihr, liebe LeserInnen, doch selbst einmal die Frage, ob es in allgemeinen Vierecken einbeschriebene geschlossene ‚Reflexionswege' gibt und wie man sie gegebenenfalls beschreibt und konstruiert.

Wir berichten im nächsten Heft, wie unter uns der Disput weitergegangen ist.

Dr. habil. Reinhard Hofmann
Gymnasiallehrer für Mathematik, Mitglied des Redaktionskollegiums der alpha

Zeitungsschnipsel

Auch ein flüchtiger Zeitungsleser wird immer wieder auf Meldungen stoßen, die etwas mit Mathematik zu tun haben. Solche, aber auch Informationen, die wir allgemein interessant finden, sind hier aufgeführt. Wenn Ihr so einen Schnipsel findet, schneidet ihn doch bitte aus und sendet ihn an uns!
Vergeßt aber bitte nicht, die Quelle anzugeben!

ca. 69 x 137 cm 249,–
ca. 91 x 152 cm 359,–
ca. 122 x 183 cm 499,–
ca. 183 x 274 cm 1298,–

Sparen und Teuerung

Ein Sparer hat einen Teil seines Sparguthabens als Festgeld mit dem jährlichen Zinssatz 6,75 % bei einer Bank angelegt.
Um wieviel Prozent ist der Realwert (Kaufwert) dieses Sparguthabens im Laufe des Jahres 1990 durch Zinsen und Inflationsrate gestiegen?
(siehe Abb. Geldwert in Gefahr)

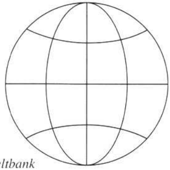
Verkaufspraktiken

Der Sommerschlußverkauf ist schon wieder vergessen, wir haben noch ein Problem!

Nahm bei den zum Sommerschlußverkauf angebotenen handgeknüpften Chinateppichen der Preis je Quadratmeter stets mit wachsender Teppichgröße (Flächeninhalt) ab?

Symbolik der Weltbank

Sicher habt Ihr dieses Zeichen schon in einer Zeitung oder Zeitschrift gesehen. Es wird übrigens nicht nur von der Weltbank verwendet.

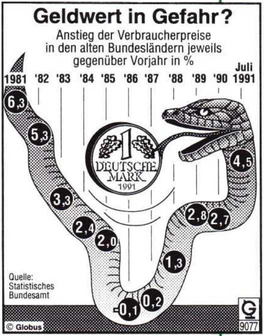


Weltbank

Die seit 1945 bestehende Weltbank IBRD (engl.: International Bank for Reconstruction and Development) fördert private Kapitalanlagen und hält ihre Mitgliedsländer zur Förderung des Welthandels und zu einer das Gleichgewicht ihrer Zahlungsbilanzen beachtenden Politik an.
Das Symbol der Weltbank umschließt 16 von Kreisbögen oder Stecken begrenzte Flächen, von denen keine zwei innere Punkte gemeinsam haben. Mit vier Farben sind diese 16 Flächen so zu färben, daß nie gleichgefärbte Flächen einen Randpunkt gemeinsam haben.

Sparen und Teuerung

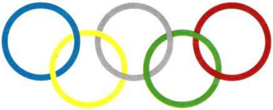
Die *Hannoversche Allgemeine Zeitung* brachte unter der Überschrift *„Nur" 4,4 Prozent Teuerungsrate* folgende Übersicht:



Wie groß ist die Inflationsrate (Teuerungsrate) für die Lebenshaltung privater Haushalte im Jahre 1990 gegenüber dem Jahre 1980?

Ausblick auf Olympia

Welt am Sonntag berichtet unter dem Motto *Standpunkt*, daß nun endlich die seriöse Olympiawerbung für Berlin beginnen kann. Wir wollen uns hier nicht über Für und Wider der Austragung Olympischer Spiele im Jahr 2000 in Berlin streiten, sondern die olympische Symbolik unter die mathematische Lupe nehmen.
Die olympische Flagge wird seit der VII. Olympiade 1920 in Antwerpen gehißt. Sie besteht aus einem weißem Tuch mit fünf ineinander verschlungenen farbigen Ringen, die die fünf Erdteile symbolisieren. Diese Kreise begrenzen 9 Flächen, von denen keine zwei innere Punkte gemeinsam haben. Der Rand dieser Flächen wird von zwei oder drei Kreisbögen gebildet.
Trage in jede dieser 9 Flächen eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so ein, daß gilt: Die in jeder der vier von zwei kongruenten Kreisbögen begrenzten Flächen stehende Zahl ist die Summe der in den beiden angrenzenden Flächen stehenden Zahlen.



In den Zeitungen geblättert hat für Euch: Walter Träger aus Döbeln.

Über ein neues Fernrohr und seine Größe

Aus einer knappen Angabe kann manchmal erstaunlich viel berechnet werden. Ein Beispiel dafür möchte ich hier wiedergeben. Ich hörte eine kurze Meldung im Radio: "Für ein neues Fernrohr wird gerade der Spiegel hergestellt, und zwar wird die nötige Wölbung des Spiegels dadurch erzeugt, daß die Schmelze mit sehr gleichmäßigen sechs Umdrehungen pro Minute in Rotation gehalten wird." Ich fragte mich, was für ein Fernrohr das nun werden mag; speziell interessierte mich, was die einzige Zahlenangabe der Meldung bedeuten könnte. Es stellte sich heraus, daß man daraus tatsächlich die Länge des Fernrohrs berechnen kann. Wir wollen die entsprechende Rechnung hier nachvollziehen.

Vorbetrachtung

Wir haben nur eine Angabe, die Drehzahl n, nämlich n = 6U/min. Gesucht ist die Länge L des Fernrohrs. Da n die Einheit Umdrehungen pro Minute, also "Anzahl dividiert durch Zeit" hat, läßt sich daraus noch keine Länge bilden.

Kann man aus der Angabe, daß die nötige Wölbung eines Spiegels für ein neues Fernrohr durch eine mit sechs Umdrehungen pro Minute gleichmäßigen Schmelze erzeugt wird, die Länge des Fernrohrs berechnen?

Rein formal wäre natürlich der Ausdruck c/n (mit c als Lichtgeschwindigkeit, also c = 300 000 km/s) eine Länge, aber es gibt nicht den geringsten Anlaß, anzunehmen, daß bei diesem Problem die Größe der Lichtgeschwindigkeit eine Rolle spielen könnte. Was aber eine Rolle spielt, ist die Fallbeschleunigung g im Schwerefeld der Erde. Deren Größe beträgt g = 9,81 m/s^2. Eine kurze Rechnung zeigt, daß es genau eine Möglichkeit gibt, daß ein Produkt aus einer Potenz von n mit einer Potenz von g eine Länge bildet. Es handelt sich um den Ausdruck $Q = g/n^2$.

Beweis: Zunächst benutzen wir den Fakt, daß 60 Sekunden eine Minute bilden, also die Drehzahl auch als n = 0,1 U/s geschrieben werden kann. Wir setzen n in die a-te und g in die b-te Potenz und bilden das entsprechende Produkt: $n^a \cdot g^b$

Die Einheit dieses Produkts ist $5^{-a} \cdot m^b \cdot s^{-2b}$.

Die Einheit des Produkts ist das Meter genau dann, wenn b = 1 und a = - 2 b = - 2 gilt.

Es liegt nun nahe, anzunehmen, daß dieser Ausdruck Q bis auf einen numerischen Faktor (der Größenordnung 1) gleich der gesuchten Länge L des Fernrohrs ist. Was ist damit gemeint? Es handelt sich hier um ein übliches Vorgehen, ähnlich dem Überschlag bei Rechenaufgaben: Bevor man das Problem im einzelnen behandelt, sucht man eine solche Kombination der Ausgangsdaten, so daß das Ergebnis die korrekte Einheit aufweist. Wenn die Einheit stimmt, kann also höchstens noch der Zahlenwert falsch sein, wenn dieser annähernd gleich 1 gesetzt wird.

Was hat das für unser Beispiel für Konsequenzen?

Es ist n = 6/min = 0,1 / s, also ist 1/n = 10 s, $1/n^2 = 100\ s^2$, also $Q = g/n^2 = 981$ m. Es ist nun offensichtlich unsinnig zu vermuten, daß ein Fernrohr von dieser Größe gebaut werden soll; denn das wäre ja größer als der größte Turm, und ein Fernrohr muß ja – anders als ein Turm – noch beweglich sein. Was haben wir also falsch gemacht? Um dies zu beantworten, wollen wir das Ganze jetzt etwas genauer herleiten.

Das Spiegelteleskop

Beginnen wir kurz mit einer Erläuterung, was ein Spiegelteleskop ist.

Auf dem Foto rechts ist ein Teleskop von 2 Meter Durchmesser abgebildet. Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Typen von Teleskopen: Reflektor (Spiegelteleskop) und Refraktor (Linsenfernrohr). Bei kleinen Teleskopen ist die Ausführung mittels Linsen verbreitet; große Linsen lassen sich dagegen kaum in geeigneter Qualität herstellen, so daß heute alle größeren Fernrohre als Spiegelteleskope ausgebildet sind: Der Spiegel ist so gekrümmt, daß das reflektierte Licht im Spiegelbrennpunkt konzentriert wird, also auch lichtschwache Objekte erkennbar werden. Wir gehen von einem Spiegel mit kleinem Durchmesser aus, so daß z. B. der Unterschied zwischen einem parabolischen und einem sphärischen Spiegel nicht berücksichtigt zu werden braucht. Wir rechnen nachfolgend mit einem sphärischen Spiegel, wie er sich z. B. auch im Innern des abgebildeten Teleskops befindet. In **Abb. 1** ist ein Querschnitt durch den Spiegel skizziert, aus der die Bedeutung der Koordination r und h ersichtlich wird.

Die Spiegeloberfläche wird durch einen Kreisbogen vom Radius R beschrieben; der Mittelpunkt M des Kreises hat die Koordinaten (O, R). Wir bestimmen jetzt die Brennweite dieses Spiegels, vgl. dazu **Abb. 2**.

(Damit die Zeichnung übersichtlich wird, ist dort der Winkel α unrealistisch groß gezeichnet.) Ein aus dem Unendlichen (∞) kommender Lichtstrahl wird im Punkt A auf der Spiegeloberfläche reflektiert und trifft schließlich auf den Brennpunkt F. (Wir gehen davon aus, daß der Stern soweit entfernt ist, daß die von ihm eintreffenden Lichtstrahlen annähernd parallel sind, und dann spricht man üblicherweise von "Strahlen aus Unendlich").

Die Tangente t an die Spiegelfläche schließe mit der Abszisse (also der r-Achse) den Winkel α ein. Da der Radius $\overline{MA}$ senkrecht auf der Tangente in A steht, ergibt sich für den Winkel ∢ NMA ebenfalls der Wert α. Bei der

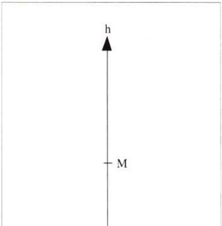


Abb. 1: Querschnitt durch den Spiegel

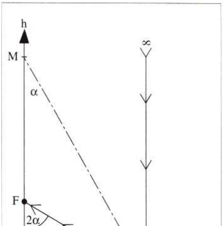
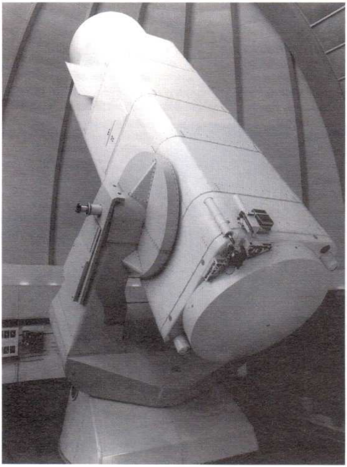


Abb. 2: Der Strahlengang zum Brennpunkt



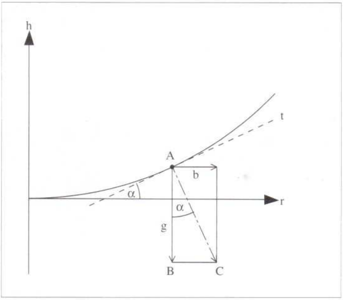


Abb. 3: Das Beschleunigungsparallelogramm

Foto: 2m - Universalspiegelteleskop des Karl-Schwarzschild-Observatoriums Tautenberg.

Aufnahme: ZIAP

Was hier gezeigt werden sollte, ist, daß mitunter aus sehr wenig Angaben erstaunlich konkrete Ergebnisse errechnet werden können.

Dr. Hans-Jürgen Schmidt ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Astrophysik in Potsdam.

Reflexion sind Einfalls- und Ausfallswinkel einander gleich, hier also beide gleich α. Der einfallende Lichtstrahl ist parallel zur Ordinate (also der h-Achse), so daß sich schließlich der Brennpunkt F durch die Bedingung, daß der Winkel $\sphericalangle$ NFA der Wert 2α hat, lokalisieren läßt.

Ohne weitere astronomische Kenntnisse würde man jetzt davon ausgehen, daß die Länge eines Spiegelteleskops im Wesentlichen mit der Brennweite des Spiegels übereinstimmt. In der Tat ist dies auch annähernd der Fall, genauer ist es aber so, daß sich im Teleskop außer dem Spiegel noch eine sogenannte Korrektionsplatte befindet, die die Genauigkeit der Abbildung verbessert. Diese Platte befindet sich etwa im Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, so daß der Krümmungsradius R mit der Gesamtlänge L des Teleskops übereinstimmt. Mit guter Näherung läßt sich also sagen, daß $L = \overline{MN}$ die Länge des Fernrohrs darstellt.

Die Rotationsgeschwindigkeit

Die Erdbeschleunigung g wirkt nach unten, die Zentrifugalbeschleunigung b nach außen, es gilt

$$b = \frac{v^2}{r} \qquad (1)$$

wobei v die Kreisbahngeschwindigkeit ist. Damit die Spiegelform wirklich wie gefordert entsteht, wenn der Spiegel bei der Schmelze in Rotation versetzt wird, muß die Resultierende aus b und g (vgl. Strich-Punkt-Linie in **Abb. 3**) auf der Spiegelfläche senkrecht stehen. Es gilt demnach $\sphericalangle BAC = \alpha$, woraus sich ergibt: Die Dreiecke Δ ABC und Δ MNA sind einander ähnlich, da sie rechtwinklig sind und einen Innenwinkel α haben. Es gilt deshalb die Proportion $\overline{MN} : \overline{NA} = \overline{AB} : \overline{BC}$,

also $L : r = g : b \quad (2)$

Für v erhalten wir $v = 2\,\pi\, r\, n$, so daß sich aus Formel (1)

$b = 4\,\pi^2\, r\, n^2 \qquad (3)$

errechnen läßt. Wir setzen Gleichung (3) in (2) ein, multiplizieren mit r und erhalten

$$L = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \qquad (4)$$

Diskussion

Es ist

$$\frac{1}{4\pi^2} \approx 0{,}0253,$$

also mit der in Abschnitt 1 eingeführten Bezeichnung $Q = g/n^2$ ist Formel (4) als $L = 0{,}0253 \cdot Q$ schreibbar. Mit den obigen Werten erhält man dann $L \neq 24{,}80$ m, ein durchaus plausibler Wert. Wir sehen hier, daß die überschlagsmäßige Vorbetrachtung grundsätzlich das richtige Ergebnis lieferte, nur ist eben der Vorfaktor 0,0253 nicht von der Größenordnung 1. Es soll aber auch betont werden, daß solche Vorbetrachtungen in vielen Fällen verblüffend gute Ergebnisse liefern.

Bücher
Programme
Videos
Spiele

Die Marktecke

Lesens- und Sehenswertes vom Medienmarkt

Matherhorn

Jeder Band enthält 111 Aufgaben. Diese sind in 2 Blöcke – einen thematischen Block (Band 1 – Systematisches Probieren, Band 2 – Winkel am Kreis) und einen Block Vermischte Aufgaben – gegliedert.

Sehr hilfreich für einen raschen Überblick und zur Auswahl der Aufgaben sind die Klassifizierungshinweise vor jeder Aufgabe. Hier sind die Klassenstufe, der Schwierigkeitsgrad und Thementeilbereiche angegeben. In Stichworten sind die zur Lösung der Aufgabe notwendigen Kenntnisse aufgeführt.

Neben dem Aufgabenblock gibt es die jeweils voneinander getrennten Abschnitte "Lösungshinweise", die einen Einstieg in den Lösungsweg bieten, und "Lösungen".

Den Abschluß bietet ein umfassendes Register, das nach Klassenstufen getrennt ist und nach Teilgebieten geordnet die verwendeten Stichworte enthält.

Franz Amann
Matherhorn
111 Aufgaben zur Begabtenförderung
Band 1: Kl. 5-8, Klettbuch 72211; DM 18,80
Band 2: Kl. 9/10, Klettbuch 72221; DM 18,80

Ein Buch sowohl für Erwachsene, als auch für Jugendliche.

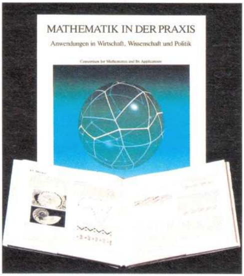
Wer erst einmal angefangen hat, dem wird es so ergehen wie in dem vom Auto Franz Amann aufgeführten Zitat:

Die Mathematik ist eine Mausefalle.
Wer einmal in dieser Falle gefangen ist,
findet selten den Ausgang, der
zurück in seinen vormathematischen
Seelenzustand leitet.
Colerus, 1888 - 1939

Bauernschlau – Ein listenreiches Familienspiel

Die Idylle trügt. List und Bluff am laufenden Band sind die wesentlichen Elemente bei "Bauernschlau", dem gewitzten Familienspiel von Tom Schoeps, für 2 bis 6 Spieler ab 8 Jahren. Rings um die Höfe tobt der Streit um die besten Weiden. Schlaue Bauern, weiße und schwarze Schafe sowie der Bau von Zäunen führen zu einem spannenden Wettbewerb. Bluff, Tricks und ein gutes Gedächtnis bringen den Sieg.

Bauernschlau stammt aus dem ***Priener Spieleverlag F. X. Schmid*** und steht 1991 auf der Auswahlliste zum Spiel des Jahres.



Praxisnahe Mathematik

Mathematik hat heute eine ganz praktische Seite in Wirtschaft, Verwaltung und Politik – sei es nun bei Wahlstatistiken, Planungs- und Organisationsproblemen, wie sie etwa beim Flugbetrieb oder bei der Telefonvermittlung auftreten, oder auch bei der industriellen Produktion. Die Autoren stellen die fünf wichtigsten – und besonders faszinierenden – Forschungsgebiete der modernen Mathematik vor: Planungsforschung, Statistik, Auswahl – und Entscheidungstheorie, Form- und Musterbildung, Computerwissenschaft. "Mathematik in der Praxis" ist eine

Mit Kasparow zum Schachgipfel

Der Autor: Alexander Nikitin, 1935 in Moskau geboren, ist Hochfrequenz-Ingenieur. Während des Studiums vertrat er die UdSSR-Auswahl bei den Schach-Studenten-Weltmeisterschaften. 1973 wurde er überraschend zum Trainer der UdSSR-Nationalmannschaft berufen. Im gleichen Jahr entdeckte er bei einem Nachwuchsturnier in Vilnius den damals 10jährigen Garri Kasparow. Als Nikitins Trainerkarriere 1976 einen jähen Knick bekam, nutzte er konsequent die Gunst der Stunde und führte seine „Entdeckung" zum Schachgipfel. Nikitin hat gemeinsam mit seinem Schützling – ihre Wege trennten sich unmittelbar vor dem WM-Kampf 1990 – zahlreiche bemerkenswerte Schachbücher geschrieben. Der vorliegende Titel ist eine „Weltpremiere", denn über seine mehr als 15jährige Zusammenarbeit mit dem jüngsten Weltmeister der Schachgeschichte hat sich der Autor in der Öffentlichkeit niemals zuvor geäußert. Literatur über berühmte Schachspieler entsteht häufig aus „zweiter Hand", diese Biografie jedoch ist eine bemerkenswerte Ausnahme: Nikitin skizziert alle wichtigen Stationen seines Schützlings auf dem Weg zum Schachgipfel und bezieht die entscheidenden Partien aus den Jahren 1976 – 1990 mit ein. Dabei wird ein geradezu sensationelles Geheimnis gelüftet: warum nämlich ausgerechnet Alexander Nikitin sich das Ziel stellte, den Schachkometen aus Baku auf den Weltmeisterthron zu bringen.

Alexander Nikitin: Mit Kasparow zum Schachgipfel, Sport Verlag; 39, 80 DM ISBN 3-328-00394-0

Lexikon bedeutender Mathematiker

Jegliche Geschichte wird von Personen gemacht. Daher tritt in der Geschichte von Wissenschaften neben das Interesse an der Entwicklung der fundamentalen Ideen das Interesse an den Personen, die diese Wissenschaftsentwicklung getragen haben. Dieses Lexikon spricht einen breiten Kreis von Nutzern an, zumal sich die Herausgeber bemühten, wo immer es ging, die mathematischen Leistungen mit Begriffen darzustellen, wie sie etwa auch im ***Lexikon der Mathematik*** oder in der ***Kleinen Enzyklopädie Mathematik*** des gleichen Verlages gefunden werden können.

Herausgegeben von Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgauds u. Karl-Heinz Schlote im Bibliographischen Institut, Leipzig. (ISBN 3-323-00319-5)

Gemeinschaftsleistung eines Teams aus dreizehn Autoren, die das Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP) für ein Buch- und Filmprojekt zusammengeholt hat, um Arbeitsweisen und Anwendungen der modernen Mathematik einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Außer dem Buch umfaßt das Projekt eine Filmserie, die als zweiteilige Kurzfassung in der Spektrum-Videothek erschienen ist.

Mathematik in der Praxis
Anwendungen in Wirtschaft, Wissenschaft und Politik
Spektrum der Wissenschaft
296 Seiten, ISBN 3-89330-697-8
DM 78,-/sfr 72,-/öS 608,-

Ziel 2000

mit mathematischen Termen spielen

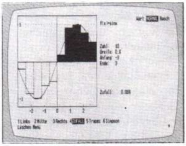
Bei diesem spannenden, bunten „Brettspiel" wird nicht gewürfelt. Ziel 2000 nennt Zufallszahlen, mit denen der Spieler einen mathematischen Term formuliert. Das Ergebnis bestimmt dann den nächsten Zug auf dem Spielplan: einem Zahlenstrahl als Straßenkarte, mit Abzweigungen und Städten.

Das Programm läuft auf PC mit MS-DOS ab Version 3.3, 640 KB Hauptspeicher und Grafikkarte (Herkules, EGA, VGA). ***88,– DM.***

Graphix

der universelle Funktionsplotter

Mit Graphix kann man Funktionen – auch komplizierte wie Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung ... – zeichnen und experimentell untersuchen: Berechnung von Flächeninhalten, Nullstellen, Taylor Polynome, ...



Für Graphix braucht man einen PC mit MS-DOS ab 3.2, 512 KB Hauptspeicher u. Grafikkarte (Hercules, CGA, EGA, VGA). ***168,– DM.***

Beide Programme erscheinen bei ***CoMet Verlag für Unterrichtssoftware in Duisburg***, Bestellungen bitte an: ***Cornelsen Verlagsgesellschaft, Postfach 8729, 4800 Bielefeld.*** Die Preise gelten für Schulen, SchülerInnen, StudentInnen und Studenten.

Klausur- und Abiturtraining

Eine Buchreihe des ***Aulis Verlag Deubner & Co KG*** zur gezielten Vorbereitung auf Klausuren und das Abitur, die sich an alle Schüler der gymnasialen Oberstufe wendet. Anhand zahlreicher Musteraufgaben

wird der Schüler über viele Denkanstöße, Bemerkungen oder ausführliche Hilfestellungen zu ihrer Lösung geführt, um anschließend weitere Übungsaufgaben selbständig lösen zu können. Die Musteraufgaben enthalten typische Aufgabenstellungen, so wie sie in Klausuren, Tests oder in der Abiturprüfung verwendet werden. Für die Mathematik sind bisher erschienen:

- ***Band 1: Grundkurse Analysis: Funktionsuntersuchungen***
- ***Band 2: Grundkurse Analysis: Extremwertaufgaben***
- ***Band 3: Grundkurse Analysis: Integralrechnung***
- ***Band 7: Grundkurse Stochastik: Binomial- und Normalverteilung***

Jeder Band kostet 19,80 DM. In dieser Reihe sind auch Bände zur Chemie, Biologie und Physik erschienen.

Lösungen

• Mathematische Fahndung

Tangente, Sehne, Sekante, Multiplikation, Summe, Minuend, Division, Quadrieren, Radizieren, Quotient, Pyramidenstumpf, Diagonale, Geometrie

• Weihnachtsgrüße

Angewandter Code: Vokale bleiben fest, und Konsonanten werden durch den im Alphabet rechten Nachbarkonsonanten ersetzt; bei der Rückübersetzung durch den linken Nachbarkonsonanten. Der Gruß lautet folglich:

WIR WÜNSCHEN ALLEN ALPHALESERN EIN FROHES WEIHNACHTSFEST SOWIE EIN GESUNDES UND ERFOLGREICHES NEUES JAHR!

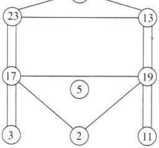
• Erstaunlich viele Weihnachtsgeschenke

Durch Verwendung der Konstantenautomatik eines Taschenrechners erhalten wir
19 [+] 91 [=] [=] [=] ... [=] 1020.
Diese Zahl ist die kleinste vierstellige, die die erste Bedingung erfüllt, nicht aber die zweite. Der nächste Druck auf die Gleichtaste liefert 1111, eine richtige Lösung des Rätsels.
Da 19 und 91 teilerfremd sind, ist jede weitere mögliche Lösung um $19 \cdot 91 = 1729$ größer, also gleich 2840, 4569 usw. Eine Ziffer 1 tritt jedoch bei den vierstelligen Zahlen nicht mehr auf, so daß das mathematische Problem eindeutig lösbar ist. Die Deutung allerdings bleibt im weihnachtlichen Schneegestöber verborgen. Erhielt obendrein jeder der vier Freunde nur ein Geschenk?

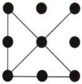
• Die Magie der Weihnachtssterne

Man ersetze einfach jede der 13 Zahlen durch ihre Ergänzung zu 14. Die magische Summe beträgt dann 29.

• Alle zu Haus



• Zum Knobeln



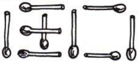
• Übereinstimmung

Die Jahre, in denen Jan und Norbert an gleichen Wochentagen Geburtstag hatten, sind entweder alle aufeinanderfolgende Schaltjahre (1. Fall) oder aufeinanderfolgende Normaljahre (2. Fall). Im 1. Fall wären dies die Schaltjahre 1992 - 4n mit $1 \leq n \leq 22$ und 1900 - 4m mit $1 \leq m \leq 21$, denn 1900 ist kein Schaltjahr. Ihren ersten Geburtstag hätten beide entweder $1900 - 4 \cdot 21 = 1816$, 1815, 1814 oder 1813 gehabt. Beide wären Ende 1991 mindestens $1991 - 1816 - 1 = 176$ Jahre alt. Wegen des hohen Alters scheidet dieser Fall aus. Im 2. Fall wären diese Jahre die Normaljahre 1991 - 4n, 1990 - 4n und 1989 - 4n mit jeweils $0 \leq n \leq 13$ sowie $1991 - 4 \cdot 14 = 1935$. Jan und Norbert wurden 1934 geboren, und da 1934 ein Normaljahr ist, wurden beiden auch am gleichen Wochentag geboren.

• Ohne Fleiß kein Preis

$1260 = 60 \cdot 21$, $1530 = 30 \cdot 51$

• Hölzchentricks



• Verschlüsselter Weihnachtswunsch

Da in mindestens einem Eckfeld von zwei gegenüberliegenden Eckfeldern der Anfangs- oder Schlußbuchstabe eines Wortes stehen muß, tragen mindestens zwei der vier Eckfelder Anfangs- oder Schlußbuchstaben der Lösungsworte. Bernds Wünsche sind: Schneeschuhe, Ball.

3 H	6 E	III L	12 E
IV L	9 H	4 N	7 S
5 E	2 C	11 H	II A
10 U	I B	8 C	1 S

• Den alten Römern auf die ~~Fi~~ Zahlen geschaut

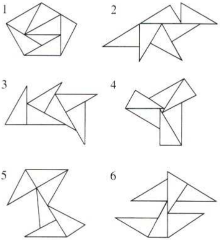
1. VIII = 8, XII = 12, CX = 110, DC = 600, CXL = 140, CM = 900, XL = 40, XIX = 19, MCCC = 1300, LIX = 59

2. 7 = VII, 13 = XIII, 45 = VL, 101 = CI, 450 = LD, 543 = DXLIII, 333 = CCCXXXIII, 876 = DCCCLXXVI, 999 = IM

3. Schiller : 1759 - 1805
Goethe : 1749 - 1832
Kant : 1724 - 1804
Galilei : 1564 - 1642
Friedrich der Große: 1712 - 1786

4. 1674, in dieser Burg hat keiner der fünf Herren gewohnt.

• Verhextes Hexagramm

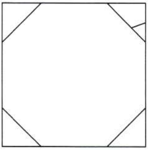


• Sprachecke

Ein quadratisches Stück Papier wurde in 16 Stückchen von der Form konvexer Vielecke zerschnitten.
5 Teilstückchen gingen verloren, übrig bleib ein Teilstück in Form eines regelmäßigen Achtecks. Kann man allein nach diesem Achteck das Ausgangsquadrat rekonstruieren?

Lösung:
Man kann das ursprüngliche Quadrat rekonstruieren. Da die verlorengegangenen Teile konvex sind, kann keines von ihnen gleichzeitig mit zwei verschiedenen Seiten des Achtecks Punkte gemeinsam haben. Deshalb kann die Anzahl der verlorenen Teile nicht geringer

sein als die Anzahl jener Seiten des Achtecks, die nicht in die Begrenzung des Papiers fallen; das heißt, nicht weniger als drei Seiten des Achtecks fallen in die Papierbegrenzung. Da aber das Papierblatt quadratisch ist, sind diese Seiten paarweise zueinander parallel oder senkrecht, das heißt, es sind dies jene drei Seiten des Achtecks, welche mit einer anderen dazwischenliegenden Seite aufeinander folgen.
Somit wird unser Quadrat aus dem Achteck durch Anfügen von vier Eckstücken des Papiers gebildet; im einzelnen fallen genau vier Seiten des Achtecks in die Papierbegrenzung. Da aber fünf Teile verloren gingen, folgt, daß noch ein Eckstück in genau zwei Teile zerschnitten wurde.



Der Fleck des Schiffsjungen
Der Schiffsjunge hat einen Fleck in das Bordbuch des Kapitäns gemacht. Auf einer Seite hat der Kapitän die Kosten für die Rechnung von 36 Kerzen aufgeschrieben, die er anläßlich des letzten Landganges gekauft hatte. Für die Gesamtsumme liest man jetzt: ? 7, 4 ? DM. Die Fragezeichen kennzeichnen die Stellen, die durch die Flecken des Schiffsjungen entstanden sind.
Bestimmt den Preis einer Kerze, von dem man weiß, daß er unter 2 DM liegt!

Lösung:
Eine Kerze kostet 1,04 DM, d. h. die Rechnung beläuft sich auf 37,44 DM.

Für Heiligabend
In der Aufgabe müssen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtige Additionsaufgabe entsteht.

Lösung:
B = 1, N = 9, E = 8, 0 = 3, 1 = 7, S = 4, also

$$\begin{array}{r} 9387 \\ +\ 9387 \\ \hline 18774 \end{array}$$

• Die geometrische Struktur der Westrose der Kathedrale von Chartres

Siehe nebenstehende Abb. 1.

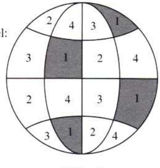
• Sommerschlußverkauf

Nein, denn es gilt:

Preis	Flächeninhalt	Preis je m²
499 DM	2,2m²	223,51 DM/m²
1298 DM	5,0m²	258,86 DM/m²

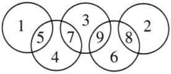
• Weltbank

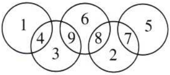
Zum Beispiel:
1 = grün,
2 = rot,
3 = blau,
4 = gelb



Weltbank

• Olympische Ringe





Zwei weitere Lösungen entstehen aus den angegebenen durch Spiegelung an der Symmetrieachse der aus den fünf Kreisen bestehenden Figur.

• „Nur" 4,4 Prozent

Die Preise kletterten von 1980 bis 1990 auf $P_{1990} = P_{1980} \cdot 1{,}063 \cdot 1{,}053 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}024 \cdot 1{,}020 \cdot 0{,}999 \cdot 1{,}002 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}027 = P_{1980} \cdot 1{,}293$
Die Inflationsrate (Preisanstieg) von 1980 bis 1990 beträgt 29,3 %.
Das Sparguthaben K am Jahresbeginn 1990 wächst im Laufe des Jahres 1990 auf $K \cdot 1{,}0675$ und die Preise P steigen von P auf $P \cdot 1{,}027$. Mithin wächst der Kaufwert dieses Sparguthabens von K auf

$$K \cdot \frac{1{,}0675}{1{,}027} \approx K\ 1{,}039.$$

Der Realwert dieses Sparguthabens ist im Laufe des Jahres 1990 um 3,9 % gestiegen.

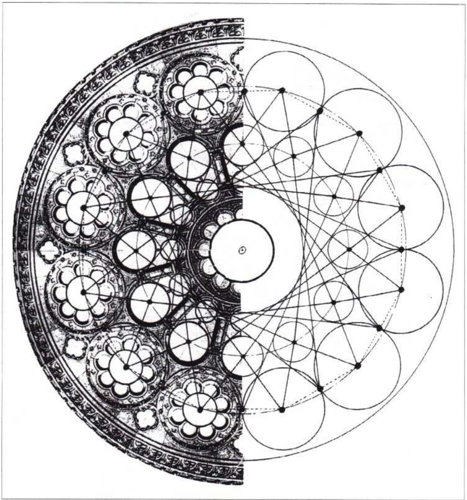
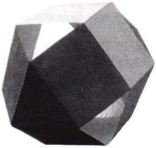
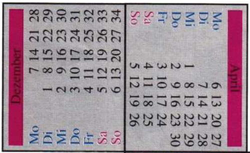


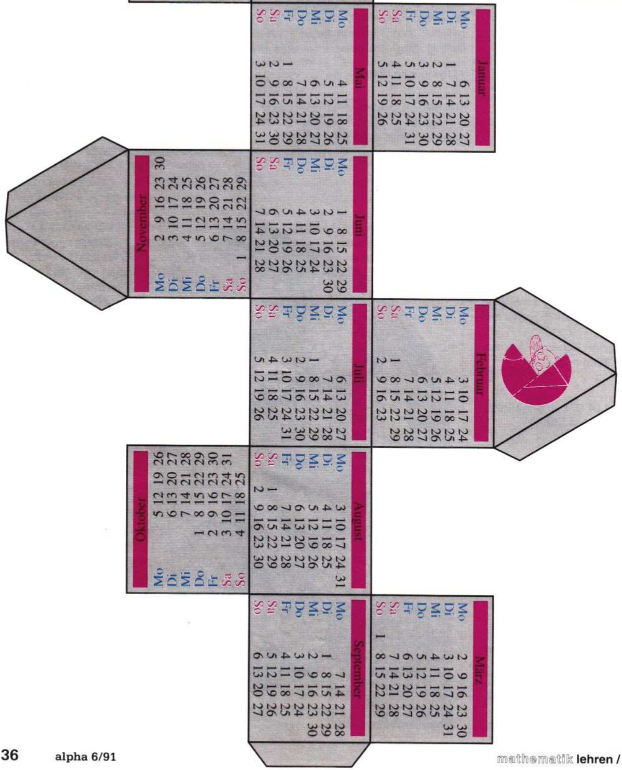
Abb. 1

alpha-Bastelkalender mit Durchblick

Die Idee zu diesem Kalender entnahmen wir der Zeitschrift **matheplus**, verlegt vom Bibliographischen Institut Mannheim, herausgegeben von OStD Eberhard Oettinger, die 1987 nach drei Jahren aus wirtschaftlichen Gründen ihr Erscheinen einstellen mußte.







ISBN 3-617-34006-7 Einzelpreis: 2,50 DM Einzelpreis im Abo: 2,00 DM