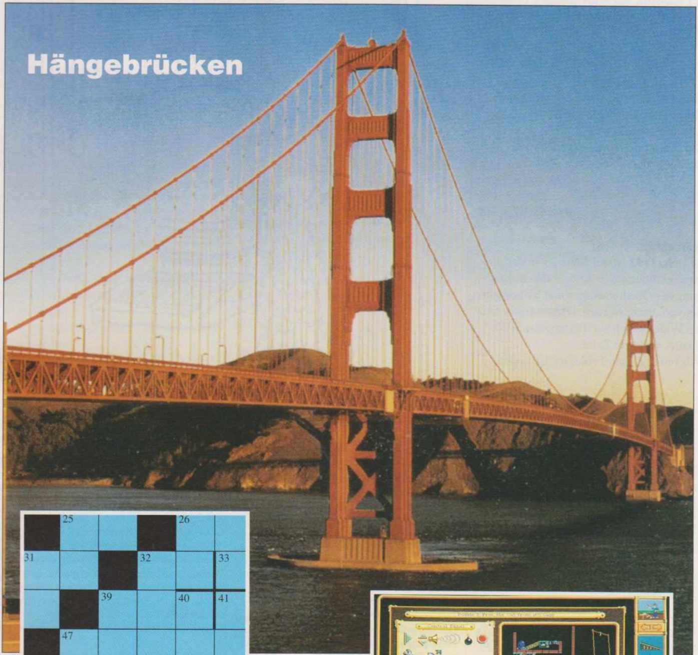
H 11328 F

Heft 3
Juni 1993
27. Jahrgang

Pädagogische
Zeitschriften
bei Friedrich in Velber
in Zusammenarbeit
mit Klett

αlpha

Mathematische Schülerzeitschrift



Hängebrücken

Kreuz-Wort-Zahl-Formel-Rätsel

Incredible Machine

Leserbriefe

Ich möchte Sie auf einen ärgerlichen Fehler im Heft 4/1992 von „alpha" aufmerksam machen. Es geht um die Abbildung 1 auf Seite 8. Wenn der Äquator als Ellipse zu sehen ist – sozusagen etwas „von oben" – dann können Nord- und Südpol nicht dort liegen, wo sie eingezeichnet sind, sondern etwas weiter vorn (N) bzw. hinten (S). Oder umgekehrt – wenn N und S richtig eingezeichnet sind, dann müßte der Äquator als Durchmesser (also als Strecke) gezeichnet werden (senkrecht zur Strecke NS).

Prof. Dr. W. Walsch,
Halle

„Ein seltsamer Beweis"
alpha, Heft 4, 1992. Seite 21
Lösung:
Der Schnittpunkt M von m_1 und m_2 liegt auf der anderen Seite von ABCD.

Daniel Küpper
Dorfstr. 103
B-4761 Wirtzfeld

Korrektur
In alpha 6(92 ist auf Seite 27 in der oberen Zeichnung der Abb. 3 die Bezeichnung der Quadratseiten a und b miteinander vertauscht worden. Daraus ergibt sich ein Widerspruch zur Textangabe S. 26, 1. Spalte, vorletzte Zeile.
Wir bitten diesen Fehler nachzusehen.

alpha wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Dr. Gabriele Liebau, Dr. Claus Peter Helmholtz und Herbert Kästner.

Redaktion:
Jürgen Ricke, Tel.: (05 11) 4 00 04-42
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Redaktionskollegium:
StR F. Arnet (Kleingeschaidt), Prof. Dr. G. Clemens (Leipzig), Dr. L. Flade (Halle), OL Dr. W. Fregin (Leipzig), Dr. J. Gronitz (Chemnitz), Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim), Peter Hoppe (Hildesheim), Hermann-Dietrich Hornschuh (Pliezhausen), StR H.-J. Kerber (Neustrelitz), OStR J. Lehmann (Leipzig), OL Prof. Dr. H. Lohse (Leipzig), StR H. Pätzold (Waren/Müritz), Dr. E. Quaisser (Potsdam), Prof. Dr. P. Schreiber (Greifswald), Prof. Dr. W. Schmidt (Greifswald), OStR G. Schulze (Herzberg), Dr. W. Träger (Döbeln), Prof. Dr. W. Walsch (Halle)

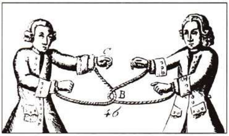
Anzeigenleitung: Bernd Schrader
Anzeigenabwicklung:
Telefon: (05 11) 4 00 04-23
Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 01. 01. 1990
Vertrieb und Abonnement:
Telefon: (05 11) 4 00 04-50
Verlag:
Erhard Friedrich Verlag GmbH & Co. KG,
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Telefon: (05 11) 4 00 04-0
Telefax: 4 00 04-19
Das Jahresabonnement für **alpha** besteht aus 6 Einzelheften. Der Bezugspreis im Abonnement beträgt 12,90 DM, im Einzelbezug 3,00 DM. Alle Preise verstehen sich zuzüglich Versandkosten. Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt 1 Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht 6 Wochen vor dem berechneten Zeitraum gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Abo-Nummer (steht auf der Rechnung).

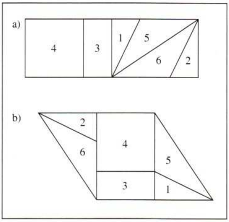
alpha ist direkt vom Verlag zu beziehen. Auslieferung in Österreich durch ÖBV KlettCotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien. Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, DH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

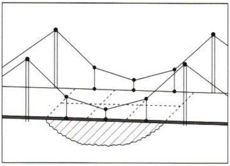
Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschriften im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Herstellung: PZ Pädagogika Zentrale GmbH
Druck: Druckerei Scherrer, Hannover
ISBN 3-617- 34015-6

Inhaltsverzeichnis







Der Irrgarten von Kleinwelka

Abb. 1: Noch sind die Tuja-Hecken im erst 1992 eröffneten Kleinwelkaer Irrgarten nicht hochgewachsen. An Wochenenden werden aber bereits über 1000 Besucher gezählt.

In Kleinwelka, einem Dorf bei Bautzen mit 1800 Einwohnern, befinden sich zwei Touristenattraktionen, der Saurierpark und der neu angelegte Irrgarten. Zum abgebildeten Wegeplan des Irrgartens (**Abb. 3**) sollen weitgehend in Form von Aufgaben dargebotene Überlegungen vorgestellt werden. In diesen Wegeplan ist ein Multigraph[1] eingezeichnet, dessen Kanten auf den Mittellinien der Wege liegen. Die 35 Knoten dieses Multigraphen sind mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 35 kodiert, dem Eingang E ist dabei die Nummer 19 und dem Ziel Z die Nummer 16 zugeordnet. Die Kanten in Abb. 3 sind durch kleine Querstriche in Teilstrecken der Länge a = 2 m zerlegt. Jede Kante dieses Multigraphen denken wir uns mit der Anzahl dieser in ihr enthaltenen Teilstrecken kodiert. Der Multigraph der **Abb. 4** ist mit dem der Abb. 3 identisch: Denn beide Darstellungen enthalten 35 Knoten mit den Kodierungen von 1 bis 35. Und weiterhin sind in beiden Darstellungen die Knoten mit den Kodierungen i und k mit i, k ∈ {1; 2; ...; 35} durch dieselbe Anzahl von Kanten verbunden, und diese die Knoten i und k verbindenden Kanten tragen dieselben Kodierungen (Anzahl der Teilstrecken, in die sie in Abb. 3 zerlegt sind). Mithin sind beide Multigraphen isomorph und sie werden nicht voneinander unterschieden. Darüber hinaus haben beide Darstellungen dieses Multigraphen noch eine weitere Eigenschaft: In beiden Darstellungen folgen die in den Knoten i mit i ∈ {1; 2; ...; 35} einmündenden Kanten mit den gleichen zugeordneten Maßzahlen a, b, c, ... im gleichen Drehsinn aufeinander (**Abb. 5**). Mithin kann die Darstellung dieses Multigraphen in Abb. 3 durch eine Verformung (topologische Abbildung) in die der Abb. 4 überführt werden: Man denkt sich dazu Abb. 3 auf ein „elastisches Gummituch" gezeichnet. Durch geeignetes Dehnen und Stauchen wird dann Abb. 3 in Abb. 4 überführt. Dabei werden die Kanten im allgemeinen nicht längentreu verformt. 5 Schüler, Alphons, Bettina, Christian, Daniella und Erich, haben sich durch Betrachten der Darstellung des Wegeplanes in Abb. 4 vorgenommen, im Kleinwelkaer Labyrinth auf folgenden Wegen zu gehen:

1. Alphons will vom Eingang E (19) durch striktes Anwenden der „Rechte-Hand-Regel" zum Ziel Z (16) gelangen: Er will so laufen, daß seine rechte Hand stets entlang der lotrechten Wegbegrenzung (Hecke) streift.
2. Bettina will vom Eingang aus durch ständiges Anwenden der „Linke-Hand-Regel" das Ziel erreichen.
3. Christof hat sich für einen Weg kleinster Länge entschieden.
4. Daniella hat sich den längsten doppelpunktfreien Weg vom Eingang zum Ziel ausgewählt.

Abb. 2: Der Saurierpark von Kleinwelka ist mit seinen aus Stahl und Beton geschaffenen und mit einer wasserabweisenden Schicht versehenen Saurierplastiken der größte Urzoo Deutschlands.

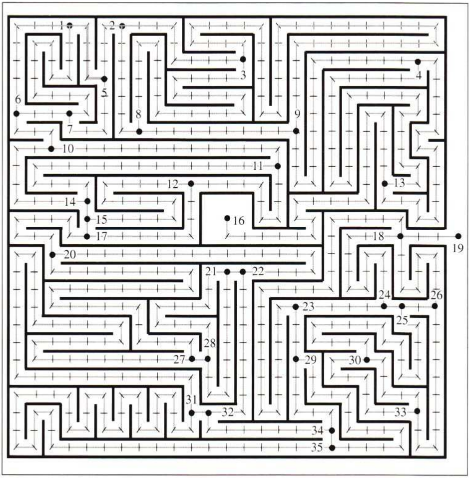


Abb. 3

Irrgarten Kleinwelka

Ein buchstäblich irrer Garten. Auf den ersten Blick sieht er ganz normal aus: saubere, 50 Zentimeter breite Wege, eingesäumt von kniehohen Koniferen-Hecken. Vom Eingang bis zum Ausgang sind es nur 51 Meter Luftlinie. Und doch können die Wege unendlich lang sein – bis zu 1300 Metern! Es handelt sich nämlich um den größten Irrgarten in den neuen Bundesländern.

„Wer nur 350 Meter schafft, muß schon sehr gut sein," sagt Regina Frenzel (36) aus Kleinbrösern. Ihr kam die Idee für den Irrgarten vor zwei Jahren. Bei Schwager Dr. Manfred Frenzel fand sie den richtigen Ansprechpartner. Der Doktor der Physik zeichnete, knobelte dafür am Computer.

Im April begannen dann die Arbeiten auf einem Freigelände neben dem berühmten Saurierpark. Verwandte, Freunde, halfen mit. Sie setzten drei Kilometer Rasenbordsteine, setzten 700 Zaunsäulen, zogen 1,7 Kilometer Maschendraht und pflanzten fast 3200 Koniferen.

Mit ihrem Bruder Steffen (9) testete Doreen Brückner (12) dann den Irrgarten. „Das kann doch so schlimm nicht sein", dachte sie, als sie reinspazierte. Aber: Immer wieder landete sie in der Sackgasse. Auf Zehenspitzen versuchte sie zu schauen, wo sie denn gehen könnte. Lachte: „Verdammt, ich kann doch alles sehen – und weiß doch nicht weiter." Nach acht Minuten hatte sie's geschafft: „Der Garten ist echt stark. Man sieht ihm gar nicht an, wie man sich darin verirren kann." Eintritt: Für Erwachsene eine Mark, Kinder 50 Pfennig.

*4. Juli 1992 * BILD*

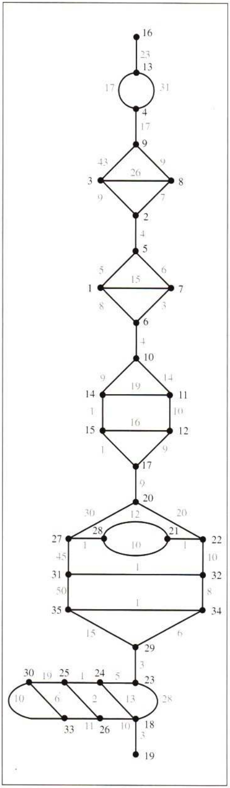


Abb. 4: Multigraph

5. Erich will im Labyrinth 25 mal im gleichen „Kreis" gehen. Dafür hat er sich den „kreisförmigen" (geschlossenen) Weg minimaler Länge ausgesucht.

Aufgabe:

Welchen Weg wählte jeder der 5 Schüler?

Wie lang ist der von ihm gewählte Weg?

Anmerkung

1) In einem Multigraph sind mindestens zwei Knoten durch mehr als eine Kante verbunden.

Dr. W. Träger, Döbeln

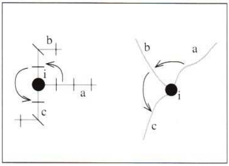


Abb. 5

Mathematische Spiele

Spaß mit Schnüren

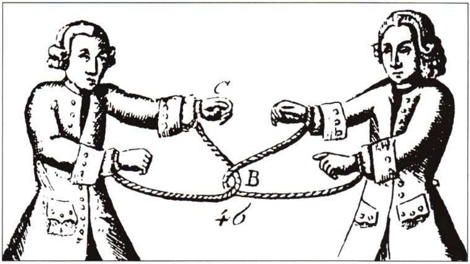


Abb. 1: Zwei Kavaliere beschäftigen sich um 1750 mit einem Schnurspiel.

Schnüre sind schon frühzeitig ein Hilfsmittel beim Problemlösen gewesen: in der griechischen Sage gab Ariadne ihrem Theseus einen Fadenknäuel in das verschlungene Labyrinth auf Kreta mit, so daß Theseus mit diesem Ariadnefaden sicher aus dem Irrgarten kommen konnte. Alexander der Große zerhieb den vom phrygischen König Gordios geflochtenen Knoten mit dem Schwert, anstatt ihn zu lösen. Die ungewöhnliche Methode Alexanders, sich den Preis zu sichern (der allerdings auch ungewöhnlich war, nämlich der Besitz von Asien), gehört eher dem Kraft- als dem Denksport an.

Nehmen wir einen zu Boden gefallenen und sich dort verheddernden Wollknäuel als Gordischen Knoten. Wie ist er zu lösen, d. h. zu entwirren? Zwei gegensätzliche Verfahren sind denkbar: Vorsichtig ein Ende des Fadens durch die Schlingen führen, bis sich alles aufgelöst hat, oder ungeduldig an den Enden zerren, bis man zum Erfolg kommt. Was ist besser?

Überraschenderweise ist die zweite Methode effektiver, auch wenn sie nach der Alexander-Lösung aussieht. Denn ein auf den Boden gefallener Knäuel kann keine Knoten haben, sofern er vorher keine hatte. Zieht man ständig die freien Enden durch Schlaufen, so schafft man sich selbst laufend neue Knoten, die man später wieder auflösen muß. Zerrt man andererseits (mit dem notwendigen Gefühl natürlich) an den Schnurenden und zerrt aus praktischen Gründen den Knäuel zwischendurch immer wieder auseinander, so können keine Knoten entstehen, aber das Ganze muß sich einmal auflösen.

Nach diesen Lockerungsübungen am Seil nun ein Gesellschaftsspiel für zwei, das schon im 18. Jahrhundert beliebt war. Die **Abbildung 1** zeigt zwei Kavaliere der galanten Zeit, die sich mit diesem einfach zu fertigenden Schnurspiel vergnügten. Worum geht es? Zwei Schnüre von etwa 1 m Länge werden an den Enden mit Schlaufen für die Hände versehen und in der in der Abbildung gezeigten Weise zwei Personen über die Hände geschoben. Danach sollen sich die beiden voneinander befreien (natürlich nicht durch Abstreifen der Fesseln!).

Geht das überhaupt? Lassen wir alles Überflüssige wie Kleidung, Beine, Kopf usw. an dem Problem weg, so führt die Aufgabe offenbar darauf hinaus, zwei ineinander hängende Ringe zu trennen (**Abb. 2**). Das ist unmöglich. Wir haben die Aufgabe zu schnell vereinfacht, denn die Ringe sind keine richtigen Ringe, da an den Händen Schlaufen vorhanden sind. Und das ist der springende Punkt! Bevor die Gefesselten diesen Sachverhalt nicht erkennen, können sie sich nicht befreien und erfreuen die Zuschauer durch ihre Verrenkungen und Verwirrungen –

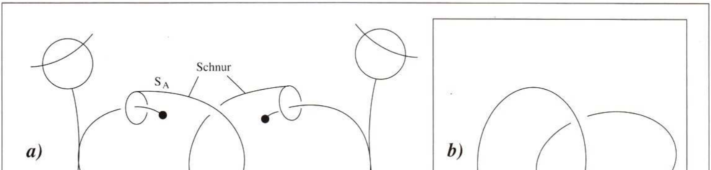


Abb. 2: Das Schnurspiel wird vereinfacht. a) Strichmännchen, b) das falsch vereinfachte mathematische Problem.

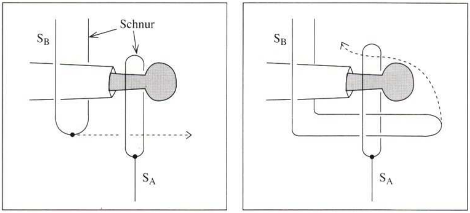


Abb. 3: Zum Lösungsverfahren. a) Schritt 1, b) Schritt 2.

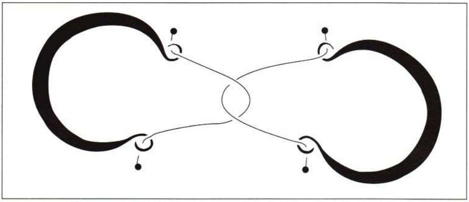


Abb. 4: Die Ein-Personen-Variante als Handschellenproblem.

also ein Spaß, der Stimmung in jede Geburtstagsfeier oder Gartenparty bringt.

Wie klappt der Entfesselungstrick? Hier ist die Anleitung zur Befreiung:

1. Schnur des Partners etwa in der Mitte greifen und zur eigenen Hand bringen;
2. Schnur durch die Schlinge der eigenen Hand in Richtung des Partners bis über die eigene Hand hinaus ziehen;
3. Schlinge nach oben über die eigene Hand führen;
4. Schlinge oberhalb der eigenen Hand zurückziehen;
5. Wenn man jetzt nicht frei ist, dann die Alexander-Methode praktizieren (hier: die Schnüre von den Händen abstreifen), sich neu fesseln und einen weiteren Versuch starten, bis alles wie am Schnürchen läuft.

Das Spiel hat auch eine Robinson-Variante für eine Person:

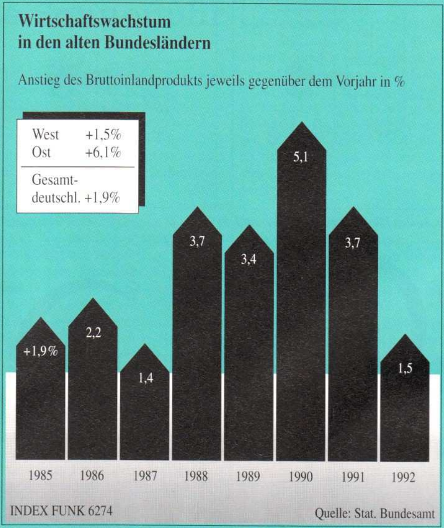
Trennt die in Abbildung 4 gezeigten Handschellen! Die Handschellen sind aus Draht gebogen (etwa 20 cm langer Draht, Fahrradspeiche) und entsprechen den Armpaaren der gefesselten Personen. Und nun viel Spaß!

Konrad Haase und Rüdiger Thiele

Zeitungs-schnipsel

Bau-Fachmesse Leipzig '92
Über 1.800 Aussteller aus dem In- und Ausland. 80.000 m² Informationen, Präsentationen und Vergleichsmöglichkeiten rund ums Bauen, Ausbauen, Modernisieren, Renovieren, Energiesparen.

Aufgabe: Das Emblem dieser Baufachmesse stellt ein Polyeder dar, das durch Aneinandersetzen von drei kongruenten backsteinförmigen Quadern entsteht:
Die konvexe Hülle dieses Polyeders, aufgefaßt als Menge seiner Punkte, ist a) in Kavalierprojektion und b) in Zweitafelprojektion zu zeichnen!
Hinweise: Eine Punktmenge (in der Ebene oder im Raum) heißt konvex, wenn sie zu je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. (Schülerduden Die Mathematik I, Dudenverlag Mannheim/Wien/Zürich 1990)
Die konvexe Hülle einer Punktmenge M ist die kleinste konvexe Punktmenge, welche M umfaßt. (Schülerduden Die Mathematik II, Dudenverlag Mannheim/Wien/Zürich 1991)
Dr. W. Träger, Döbeln



Die gesamtdeutsche Wirtschaft ist 1992 nur noch schwach gewachsen. Gemessen am Bruttoinlandsprodukt (BIP) nahm die Wirtschaftsleistung lediglich um 1,9 Prozent zu.

Aufgabe: Das Verhältnis des Bruttoinlandsproduktes 1991 der alten Bundesländer zu dem der neuen Bundesländer ist zu ermitteln!
Dr. W. Träger, Döbeln

Firmensignets – geometrisch betrachtet

Firmensignets sind häufig nach geometrischen Regeln aufgebaut, um schnell wiedererkannt zu werden und um möglichst lange im Gedächtnis zu bleiben. Wir würden uns freuen, wenn Ihr uns Aufgaben zu den abgebildeten oder auch anderen Signets zuschickt. Wir werden sie in der nächsten alpha veröffentlichen.

TOYOTA
Nichts ist unmöglich

CITROËN

Dresdner Bank

Deutsche Auto Leasing

MITSUBISHI

WESTFALENBANK

KÖNIG + NEURATH

Alphons logische Abenteuer

„Sie sind doch, nicht wahr, viel zu dicht aufgefahren," sagte der eine Mann, nur mit Mühe sich beherrschend zu dem anderen, der, ebenfalls um Fassung bemüht, erwiderte: „Aber Sie, nicht wahr, bremsten doch plötzlich scharf." Alphons, Zeuge der sich nun doch entwickelnden Auseinandersetzung, fragte sich erstaunt, warum jeder in einem Atemzug verneint, was er behauptet. Wenn der eine nicht so dicht aufgefahren ist und der andere nicht so scharf gebremst hat, wieso stießen dann ihre beiden Autos zusammen? Nachdenklich ging Alphons nach Hause. Dort kam seine Schwester auf ihn zu. „Nicht wahr, unsere Schule wird ein Gymnasium?" Alphons, noch mehr irritiert, erwiderte zögernd: „Nicht ganz so schnell..." – „Ja", unterbrach seine Schwester ihn, „da hast Du recht, so schnell wird das bestimmt nicht gehen, aber es wird so werden!" Alphons wollte seinen Redeansatz ganz anders beenden, aber er kam nicht mehr zu einer Korrektur, denn seine Schwester eilte rasch aus dem Haus.

Seine Schwester, so überlegte Alphons sich in seinem Zimmer, hat mit ihrer Frage nicht wissen wollen, ob unsere Schule kein Gymnasium wird, sondern gerade umgekehrt dafür, daß es ein Gymnasium wird, eine Bestätigung erwartet. Dann ist aber der Frageteil „nicht wahr" nicht als Verneinung, sondern als Erwartung auf Zustimmung zu einer fragend gefaßten Aussage zu verstehen. Demzufolge hätte seine Schwester ihre Frage auch so formulieren können: Es trifft doch zu, daß unsere Schule ein Gymnasium wird? Auf das „nicht wahr" in der Rede der beiden Männer übertragen, bedeutet das, daß keiner bestritt, was er sagte, sondern durch die sprachliche Form der fragend gefaßten Aussage andeuten will, daß er keine Verneinung erwartet. „Sie bestätigen mir doch (Sie sind doch mit mir einer Meinung), daß Sie zu dicht aufgefahren sind" bzw. „Sie werden mir bestätigen (Sie sind doch mit mir einer Meinung), daß Sie zu scharf gebremst haben" geben in jeder Variante diese Frageabsicht auch wieder.

Die Fassung ihrer Frage z. B. in der Form: „Sie sind mir doch zu dicht aufgefahren?" bzw. „Haben sie nicht zu scharf gebremst?" würde jedoch das unterdrücken, worauf es den Fragenden gerade ankommt, nämlich die für ihn außer Frage stehende und deshalb nur einzuholende Zustimmung des anderen.

Nach mehrmaliger Aufforderung folgte Alphons endlich dem Ruf seiner Mutter, zum Abendbrot zu kommen. „Alphons saß `mal wieder auf seinen Ohren," sagte seine Mutter und direkt an ihn gewandt fügte sie hinzu: „Nicht wahr?" Zum Erstaunen seiner Schwester nickte Alphons zustimmend. „Du sitzt auf Deinen Ohren? Mache es uns doch einmal vor!" sagte sie. Seine Mutter antwortet für ihn: „Es gibt Sätze, die meinen entgegen ihrem Wortlaut etwas anderes. Nun eßt aber endlich, Kinder!" Alphons mußte doch unwillkürlich schauen, was auf seinem Teller lag.

Prof. Dr. L. Kreiser

Sprachecke

In der letzten Ausgabe von alpha war der Text in russicher Sprache leider fehlerhaft. Wir drucken hier die korrekte Version ab und danken Frau Pietschmann für ihren berechtigten kritischen Hinweis.

Rectangle à reconstituer

Thomas, en fouillant dans la chambre de ses parents a trouvé un vieux puzzle. Celui-ci est constitué de neuf carrés de côtés respectifs: 18; 15; 14; 10; 9; 8; 7; 4 et 1. Une seule indication est donnée: „En utilisant tous ces carrés reconstitue un rectangle". A l'aide d'un schéma, pouvez-vous donner la solution à Thomas? (Tangente, Frankreich)

Из набора гирек с массами в 1 г, 2 г, ... 101 г терялась гирька массой 19 г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на две кучки по 50 штук в каждой так, чтобы массы кучек были одинаковы? (Quant, Moskau)

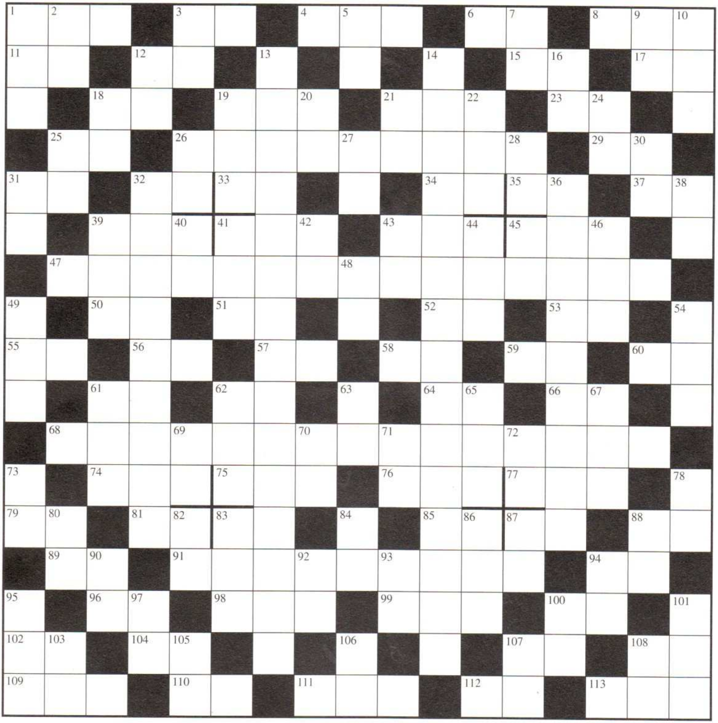
Kreuz-Wort-Zahl-Formel-Rätsel

Mathematisch-Naturwissenschaftliches Mosaik

Hinweise: Potenzen und Symbole mit Index sind jeweils in nur ein Kästchen zu schreiben. Chemische Elementsymbole, die aus zwei Buchstaben bestehen, können entweder ein oder zwei Kästchen beanspruchen. Bei Produkten ist die Reihenfolge der Faktoren geeignet zu wählen.
Verwendete Abkürzungen: (E)... Einheitenzeichen, (F)... Formelzeichen oder Formel, (K)... Kurzbezeichnung oder Abkürzung.

Waagerecht:
1. kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 108 und 378,
3. größter gemeinsamer Teiler von 675 und 1050,
4. Internationale Mathematiker-Union (K),
6. die Geschwindigkeit $v = 313{,}2$ km/h in m/s,
8. Weg (in m), den ein mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h geradlinig gleichförmig bewegter Körper in 11 Minuten und 42 Sekunden zurücklegt,
11. neuntes Glied der arithmetischen Folge (a_n) mit dem Anfangsglied $a_1 = -10$ und der Differenz $d = 5$,
12. Mersennesche Primzahl,
15. Krümmungsradius (in cm), den eine plankonvexe Linse (Brechzahl des Glases: 1,5) haben muß, damit sie eine Brennweite von 188 cm besitzt,
17. Ziffernkombination aus der kleinsten und größten Lösung der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 35x = 0$,
18. Anstieg der Geraden $36x - 2y + 2 = 0$,
19. trigonometrische Funktion (K),
21. norwegischer Mathematiker (1842 – 1899),
23. Gerätewiderstand (in Ohm) eines Amperemeters, bei dem man durch Parallelschaltung eines Nebenwiderstandes von 1 Ohm eine Meßbereichserweiterung von 0,5 A auf 27 A erreicht,
25. Primzahl p, $p < 70$, bei der die Summe der Quadrate der einzelnen Grundziffern 50 beträgt,
26. unveränderliche Größe,
29. Ersatzwiderstand (in Ohm) für zwei parallelgeschaltete Widerstände $R_1 = 33$ Ohm und $R_2 = 2R_1$,
31. Basiszahl des Dezimalsystems,
32. unübliche Längeneinheit (E),
33. chemisches Element (F),
34. in Land- und Forstwirtschaft gebräuchliche Flächeneinheit (E),
35. (meist industrielle) Interessengemeinschaft (K),
37. Anfangsgeschwindigkeit (in m/s), die ein mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 10 m/s gleichmäßig verzögert bergan fahrender Zug besaß, wenn seine Endgeschwindigkeit 5 m/s beträgt,
39. nichtprogrammierbarer Nur-Lese-Speicher eines Mikrorechners (K),
41. SI-fremde Einheit der Äquivalentdosis (E),
43. Waldtier,
45. ein Halogenwasserstoff, wertvolles Lösungsmittel (K),
47. eine hyperbolische Differentialgleichung,
50. englisch: nein,
51. Schwermetall (F),
52. bleiähnliches Metall (F),
53. Begriff aus der Landesvermessung (K),
55. Hydroxylgruppe (F),
56. Längeneinheit (E),
57. Polyisoprenkautschuk (K),
58. chemisches Element, benannt nach dem Begründer der Relativitätstheorie (F),
59. Einheit der Energiedosis (E),
60. Metall, Ordnungszahl 45 (F),
61. sehr hartes Metall (F),
62. Alkalimetall (F),
64. chemisches Element aus der Gruppe der Lanthaniden (F),
66. radioaktives Edelmetall (F),
68. Konvergenzkriterium für unendliche Reihen,
74. lateinisch: Hoffnung (auch Zukunft),
75. physikalische Größe,
76. mineralischer Rohstoff,
77. Teil eines Baumes,
79. Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r (F),
81. Volumeneinheit (E), 83. Schwermetall (F),
85. chemisches Element (F),
87. in einer grauen metallischen und einer gelben nichtmetallischen Modifikation auftretendes chemisches Element (F),
88. Wasser (F),
89. erforderliche Kraft, um einen Körper der Masse m die Beschleunigung a zu erteilen (F),
91. Laubbaum,
94. Schwefeldioxid (F),
96. Weg, den ein mit einer Geschwindigkeit v geradlinig gleichförmig bewegter Körper in der Zeit t zurücklegt (F),
98. Zinn-II-Oxid (F),
99. Technische Kontrollorganisation (K),
100. Säurerest der Kohlensäure (F),
102. die in einem Gleichstromkreis (Stromstärke I, Ohmscher Widerstand R) herrschende Spannung (F),
104. Gewicht eines Körpers der Masse m (F),
107. Stickstoffdioxid (F),
108. Ammoniak (F),
109. die in einem Gleichstromkreis (Stromstärke I, Ohmscher Widerstand R) in der Zeit t aufgebrachte elektrische Arbeit (F),
110. Volumen eines Prismas mit der Grundfläche A und der Höhe h (F),
111. Differentialoperation (K),
112. Blei-II-oxid (F),
113. Ammoniumchlorid (F).

Senkrecht:
1. Primzahl mit dreistelligem Querprodukt,
2. dividiert man das Dreifache der gesuchten Zahl durch 2, und subtrahiert man hiervon 60, so erhält man die Zahl 15,
3. Primzahl mit einstelliger Quersumme,
5. Spannungseinheit (E),
7. elektrische Ladung (in C), die ein Kondensator (Kapazität 79 mF) bei einer angelegten Spannung von 1000 V aufnimmt,
9. Brennweite (in cm) einer Sammellinse mit einer Brechkraft von 1,25 dpt.,
10. Weg (in m), den ein geradlinig gleichmäßig beschleunigter Körper (Beschleunigung sei 2 m/s²) nach einer Zeit von 24 s zurückgelegt hat,
12. Wert der mathematischen Größe $a = \ln e^2 + (\log_2 64)^2$,
13. Begriff aus der Differentialgeometrie,
14. Strecke, deren Länge als Maßeinheit für Längenmessungen dient,
16. Hangabtriebskraft (in N), die auf einen sich auf einer schiefen Ebene der Steigung 3:5 befindlichen Körper vom Gewicht 75 N wirkt,
18. Fermatsche Primzahl,
19. Abschnitt eines Literaturwerkes (K),
20. kleine Zeiteinheit (E),
21. zinnfarbenes Erdmetall (F),
22. griechischer Buchstabe,
24. Arbeit (in J), die ein Körper mit einer Masse von 400 kg bei einer Geschwindigkeit von 40 cm/s aufgrund seines Vorrats an kinetischer Energie verrichten kann,
25. Seitenlänge (in cm) eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$,
26. Entfernungseinheit (E),
27. Chalkogen, 1798 von Klaproth entdeckt (F),
28. tierisches Produkt,
30. Steighöhe (in m) eines Fahrstuhls, der mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s sieben Sekunden lang aufsteigt,
31. eine Lösung der Gleichung $x^2 - 13x + 22 = 0$,
32. Eigenschaft bestimmter komplexer Funktionen,
36. Begriff aus der darstellenden Geometrie,
38. Zeit (in s), nach der ein Auto aus dem Stand heraus eine Geschwindigkeit von 36 km/h erreicht, wenn die Beschleunigung 0,2 m/s² beträgt,
39. Huftier,
40. SI-fremde Volumeneinheit (E),
41. Einheit des physikalischen Röntgenäquivalents (E),
42. Masseeinheit (E),
43. hartes Metall (F),
44. Chlorwasserstoff (F),
45. radioaktives chemisches Element (F),
46. Nebenfluß der Donau,
48. Alkalimetall (F),
49. elementare mathematische Funktion (K),
54. Zeitmesser,
61. Kupfer-II-oxid (F),
62. englisch: neu,
63. Metall, Ordnungszahl 40 (F),
65. mitteleuropäische Zeit (K),



67. Vertiefung, Einschnitt,
69. zum Exempel (K),
70. SI-Basiseinheit (E),
71. lateinisch: das ist, das heißt,
72. radioaktives Erdalkalimetall (F),
73. der Vollwinkel im Bogenmaß (F),
78. Kohlenmonoxid (F),
80. Trägheitsmoment einer im Abstand r vom Drehzentrum befindlichen Punktmasse m (F),
82. übliche Abkürzung für „Längeneinheit“,
83. Bleiglanz (F),
84. ökonomisch wichtiges Schwermetall (F),
86. griechischer Buchstabe,
87. astronomische Entfernungseinheit (E),
88. Wasserstoffperoxid (F),
90. Geschwindigkeit, die ein geradlinig gleichmäßig beschleunigter Körper (Beschleunigung sei a) nach der Zeit t erreicht (F),
92. das dreifache Volumen einer Kugel, ausgedrückt durch ihre Oberfläche O und ihren Radius R (F),
93. SI-fremde Maßeinheit der kinematischen Viskosität (E),
94. Schwefeltrioxid (F),
95. die in einem Gleichstromkreis (Spannung U, Stromstärke I) in der Zeit t aufgebrachte elektrische Arbeit (F),
97. Impuls einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Masse m (F),
100. Kohlendioxid (F),
101. Choräthen (F),
103. die in einem Gleichstromkreis (Stromstärke I, Ohmscher Widerstand R) aufgebrachte elektrische Leistung (F),
105. doppelter Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie g und der Höhe $h_g = h$ (F),
106. mathematische Konstante,
107. Stickstoffmonoxid (F),
108. Ammoniumion (F).

Lösungsworte: Bei richtiger Auslösung des Kreuz-Wort-Zahl-Formel-Rätsels ergeben die Buchstaben bzw. Ziffern aus den folgenden Kästchen den Namen und die Lebensdaten eines genialen Mathematikers und Naturwissenschaftlers des 18. Jahrhunderts:
21-22-55-62-81-87-92-111 28-54-82-85-86: 18-23. 16. 25-1-17-3 bis 31-9. 15. 37-7-6-11

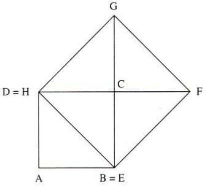
Viel Spaß beim Knobeln wünscht Euch
Dr. Roland Mildner, Leipzig

Lösungen Alphawettbewerb Teil I

5/1
Lösung:
Da alle drei zusammen 112,5 kg, Nicole und Anja zusammen 55 kg wiegen, muß Jens 112,5 kg - 55 kg = 57,5 kg wiegen. Da Nicole und Jens zusammen 80,5 kg wiegen, muß Nicole 80,5 kg - 57,5 kg = 23 kg und Anja 55 kg - 23 kg = 32 kg wiegen. Wegen $30 : 3 = 10$ und $2 \cdot 10 = 20$ ist Anja 10 Jahre, Jens 20 Jahre alt. Also ist Nicole (10 - 3) Jahre = 7 Jahre alt.

5/2
Lösung:
Aus a), b) und c) folgt: Anja hilft Frau Kreher.
Aus b) und d) folgt: Heike hilft Frau Meier.

5/3
Lösung:
Die Diagonale $\overline{BD}$ zerlegt das Quadrat ABCD in zwei deckungsgleiche Dreiecke. Das Quadrat mit der Seite $\overline{BD}$ ist aus vier solcher Dreiecke zusammengesetzt; deshalb ist der Flächeninhalt des Quadrates EFGH doppelt so groß wie der des Quadrates ABCD.



5/4
Lösung:
Aus (1) folgt: Roger kam vor Bernd, Bernd vor Joachim ins Ziel.
Aus (2) folgt: Jürgen kam vor Dieter ins Ziel.
Aus (4) und (5) folgt: Weder Bernd noch Dieter kamen auf den zweiten Platz.
Aus (3) folgt: Herrmann erzielte den vierten Platz.
Daraus ergibt sich folgender Zieleinlauf: Uwe, Jürgen, Dieter, Herrmann, Roger, Bernd, Joachim.

5/5
Lösung:
Für die Augenzahl z eines Würfels gilt $1 \leq z \leq 6$. Läßt man der Reihe nach die erste Ziffer 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 sein, so erhält man nacheinander 4, 5, 6, 5, 4 bzw. 3 Möglichkeiten; das sind insgesamt 27 Möglichkeiten. Deshalb gibt es 27 solcher Zahlen. Es sind

136	226	316	415	514	613
145	235	325	424	523	622
154	244	334	433	532	631
163	253	343	442	541	
	262	352	451		
		361			

5/6
Lösung:
Eine mögliche Lösung ist die folgende:

D C

	X	X		
X				X
	X		X	
X				X
		X	X	

A B

5/7
Lösung:
Nur $8 \cdot 7 = 56$ endet auf die Ziffer 6. Deshalb kaufte Frank 8 Hefte zu je 7 Pf. Wegen 116 Pf - 56 Pf = 60 Pf und weil Hefte zu 10 Pf und 30 Pf gekauft wurden, kaufte Frank ein Heft zu 30 Pf und somit 3 Hefte zu 10 Pf.

6/1
Lösung:
Wegen $24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$ sind drei Möglichkeiten zu untersuchen. Von den Produkten $5 \cdot 19 = 95$, $7 \cdot 17 = 119$, $11 \cdot 13 = 143$ ist nur das letzte Teiler von 2145 ($2145 : 143 = 15$). Folglich ist Andy 11, Jörg 13, Lars 15 Jahre alt.

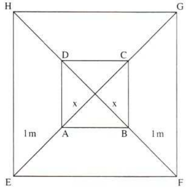
6/2
Lösung:
Zeichnet man die Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$, so erhält man im Quadrat ABCD vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke von je $8\ m^2 : 4 = 2\ m^2$ Flächeninhalt. Aus

$$\frac{x \cdot x}{2} = 2m^2$$

folgt x = 2 m. Die gezeichneten Diagonalen zerlegen das Quadrat EFGH ebenfalls in vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, deren Katheten 2m + 1m = 3m lang sind. Wegen

$$4 \frac{3 \cdot 3}{2} m^2 = 18m^2$$

und $18\ m^2 - 8\ m^2 = 10\ m^2$ hat die schraffierte Fläche einen Inhalt von $10\ m^2$.



6/3
Lösung:
a) Es können höchstens 11 verschiedene Summen gewürfelt werden; die kleinste Summe davon lautet 15 + 35 = 50, die größte 20 + 40 = 60.
b) Die kleinste Zahl auf Würfel A sei a, die größte also a + 5; die kleinste Zahl auf Würfel B sei b, die größte also b + 5; die kleinste Summe davon lautet a + b, die größte Summe a + 5 + b + 5 = a + b + 10. Das ergibt wiederum 11 verschiedene Summen.

6/4
Lösung:
Für 28 m zurückgelegte Wegstrecke hat das Vorderrad wegen $8 \cdot 3{,}50$ m = 28 m genau 8 Umdrehungen, das Hinterrad wegen $7 \cdot 4$ m = 28 m genau 7 Umdrehungen, also eine Umdrehung weniger als das Vorderrad gemacht. Deshalb hat der Ackerwagen $10 \cdot 28$ m = 280 m zurückgelegt, wenn das Hinterrad zehn Umdrehungen weniger als das Vorderrad gemacht hat.

6/5
Lösung:
Die Quersumme dieser vierstelligen Zahlen beträgt stets 20; erst $9 \cdot 20 = 180$ ist

durch 9 teilbar. Deshalb sind mindestens neun solcher vierstelliger Zahlen zu addieren.

6/6

Lösung:

Inhalte der Gefäße mit einem Fassungsvermögen von			erreichte ganzzahlige Literzahlen
7 l	**3 l**	**2 l**	
7	0	0	
4	3	0	(4; 3)
4	1	2	(1; 2)
5	0	2	(5)
5	2	0	
4	3	0	
4	1	2	
6	1	0	(6)

6/7

Lösung:

Gesamtstrecke 100 km, Gesamtzeit 2 h, Durchschnittsgeschwindigkeit 50 $km \cdot h^{-1}$.

7/1

Lösung:

Angenommen, im Kasten befinden sich x grüne, also 2x blaue, 4x weiße, x rote und y gelbe Kugeln; dann gilt $8x + y = 40$, $y = 40 - 8x$, $y = 8 \cdot (5 - x)$. Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten:

Anzahl der

blauen	grünen	weißen	roten	gelben	Kugeln
8	4	16	4	8	(1)
6	3	12	3	16	(2)
4	2	8	2	24	(3)
2	1	4	1	32	(4)

Für (1) müßten $5 \cdot 4 + 1 = 21$ Kugeln, für (2) müßten $(4 + 3 + 4 + 3 + 4) + 1 = 19$ Kugeln, für (3) müßten $(4 + 2 + 4 + 2 + 4) + 1 = 17$ Kugeln, für (4) müßten $(2 + 1 + 4 + 1 + 4) + 1 = 13$ Kugeln dem Kasten entnommen werden. Also gilt (2), es waren 6 blaue, 3 grüne, 12 weiße, 3 rote und 16 gelbe Kugeln im Kasten.

7/2

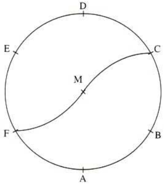
Lösung:

Die erste ungerade natürliche Zahl sei $2a + 1$, die erste gerade natürliche Zahl sei $2a$; die zehnte aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahl lautet dann $2a + 19$, die zehnte aufeinanderfolgende gerade natürliche Zahl $2a + 18$. Ihre Summe lauten $20a + 100$ bzw. $20a + 90$. Nun soll $20a + 100 = 10n$ bzw. $20a + 90 = 10n$ gelten für $n \geq 10$. Daraus folgt $2a = n - 10$, wenn n gerade, bzw. $2a = n - 9$, wenn n ungerade ist. Werden diese Bedingungen erfüllt, so gibt es stets zehn solcher Zahlen. Doris hat recht.

7/3

Lösung:

Der Radius des gegebenen Kreises läßt sich auf dem Kreisumfang sechsmal nacheinander abtragen; auf diese Weise lassen sich die Eckpunkte A, B, C, D, E, F eines regelmäßigen Sechsecks mit Hilfe eines Zirkels konstruieren. Der Kreis um B mit dem Radius r erzeugt den Kreisbogen MC, der Kreis um E mit dem Radius r den Kreisbogen MF. Der Durchmesser $\overline{CF}$ des Kreises halbiert die Kreisfläche. Da die Kreisabschnitte über den Sehnen $\overline{MC}$ und $\overline{MF}$ kongruent sind, erhält man auf diese Weise zwei flächengleiche Teilfiguren.



7/4

Lösung:

Es sei 5k eine durch 5 teilbare natürliche Zahl; dann sind $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine durch 5 teilbar ist. Ihre Summe lautet $20k + 10 = 10 \cdot (2k + 1)$; sie ist stets durch 10 teilbar.

7/5

Lösung:

Angenommen, Anton ist x Jahre alt; dann ist Bernd $(3x - 10)$ Jahre, Christian $(3x - 11)$ Jahre, Daniel 2x Jahre alt. Das sind zusammen $(9x - 21)$ Jahre, und es gilt $9x - 21 = 42$, $9x = 63$, $x = 7$. Anton ist 7, Bernd 11, Christian 10, Daniel 14 Jahre alt.

7/6

Lösung:

Aus $\rho = m / v$ folgt $V = m / \rho \cdot V = 26{,}5\ cm^3$. Wegen der gegenseitigen Verdrängung der Körper fließen 26,5 cm^3 aus.

7/7

Lösung:

Volumen des Pyknometers $V = (65{,}43\ g - 12{,}82\ g) / 1\ g \cdot cm^3 \cdot V = 52{,}61\ cm^3$. Masse der Kalilauge $m = 74{,}56\ g - 12{,}82\ g \cdot m = 61{,}64\ g$. Dichte der Kalilauge = Masse/Volumen. 1,18 $g \cdot cm^{-3}$.

8/1

Lösung:

Es sei x die Anzahl der Zweitbettzimmer und y die Anzahl der Vierbettzimmer, dann gilt

(1) $x + y = 52$ und

(2) $2x + 4y = 144$.

Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 2 und subtrahieren sie von der Gleichung (2). Wir erhalten

(3) $2y = 40$,

$y = 20$.

Diesen Wert setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten $x = 32$.

Das Hotel verfügt über 20 Vierbettzimmer und 32 Zweibettzimmer.

Probe: $20 \cdot 4 + 32 \cdot 2 = 144$.

8/2

Lösung:

(1) $37 \cdot 21 = 777$

(2) $15 \cdot 37 = 555$

8/3

Lösung:

Den Text der Aufgabe kann man durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\left(\frac{x}{10} + 10\right) \cdot 10 - 10 = 10x.$$

Wir formen äquivalent um und erhalten

$x + 100 - 10 = 10x$,

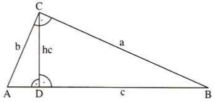
$90 = 9x$,

$10 = x$

Die gedachte Zahl ist 10; die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

8/4

Lösung:

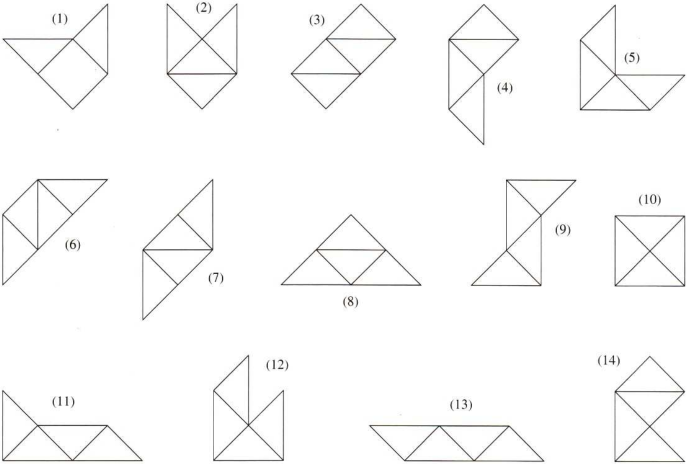


Die Höhe h_c zerlegt das Dreieck ABC in die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ADC und DBC. Beide Dreiecke sind untereinander ähnlich, und jedes Teildreieck ist zum Dreieck ABC ähnlich.

Deshalb gilt

$h_c : a = b : c$ bzw. $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$, w. z. b. w.

8/5
Lösung:



8/6
Lösung:
Aus Hebelgesetz $l_2 = 2{,}67$ m.

8/7
Lösung:
Leistung = Masse · Ortsfaktor · Höhe / benötigte Zeit. 4,5 kW.

9/1
Lösung:
(1) $37 \cdot 27 = 999$
(2) $27 \cdot 37 = 999$

9/2
Lösung:
Wir stellen eine beliebige zweistellige natürliche Zahl in der Form $10a + b$ dar. Ihr Quadrat ist dann $(10a + b)^2$ bzw. $100a^2 + 20ab + b^2$; ihre Quersumme ist $a + b$, das Quadrat ihrer Quersumme also $(a + b)^2$ bzw. $a^2 + 2ab + b^2$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll nun
$100a^2 + 20ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
stets durch 9 teilbar sein.

Wir formen den Term äquivalent um und erhalten
$100a^2 + 20ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 99a^2 + 18ab$.
Da jeder Summand durch 9 teilbar ist, ist auch diese Summe durch 9 teilbar, und da wir nur äquivalent umgeformt haben, ist $(10a + b)^2 - (a + b)^2$ stets durch 9 teilbar, w. z. b. w.

9/3
Lösung:
Es gilt nach Aufgabenstellung
$\frac{a+b}{2} = 25$ und $\sqrt{ab} = 20$,
wobei a und b Variable für die beiden gesuchten Zahlen sind.

Aus $\frac{a+b}{2} = 25$ folgt $a + b = 50$ bzw. $b = 50 - a$.

Aus $\sqrt{ab} = 20$ folgt $ab = 400$. In diese Gleichung setzten wir $b = 50 - a$ ein und erhalten $a(50 - a) = 400$. Das formen wir um zu $a^2 - 50a + 400 = 0$.
Wir lösen diese quadratische Gleichung:
$a_{1,2} = 25 \pm \sqrt{625 - 400}$
$a_{1,2} = 25 \pm 15$
$a_1 = 40$, es folgt $b_1 = 10$ und
$a_2 = 10$, es folgt $b_2 = 40$.
Die beiden gesuchten Zahlen sind 40 und 10.
Die Probe, die wir dem Leser überlassen, bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

9/4
Lösung:
Es seien a und b die beiden Zahlen, dann gilt

(1) $(a + b)^2 = 20{,}25$ und
(2) $(ab)^2 = 20{,}25$.
Aus (1) folgt durch Wurzelziehen
$a + b = 4{,}5$ bzw. $a = 4{,}5 - b$.
Aus (2) folgt durch Wurzelziehen

$a \cdot b = 4{,}5$ bzw. $a = \frac{4{,}5}{b}$.
Daraus folgt nun

(3) $4{,}5 - b = \frac{4{,}5}{b}$.

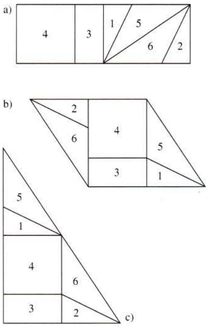
Wir formen diese Gleichung äquivalent um und erhalten
$4{,}5b - b^2 = 4{,}5$,
$b^2 - 4{,}5b + 4{,}5 = 0$.
Diese quadratische Gleichung lösen wir nach der bekannten Lösungsformel und erhalten

$$b_{1,2} = 2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 - 4{,}5}$$

$$b_{1,2} = 2{,}25 \pm \sqrt{0{,}5625}$$

$b_{1,2} = 2{,}25 \pm 0{,}75$
$b_1 = 3$, es folgt $a_1 = 1{,}5$,
$b_2 = 1{,}5$, es folgt $a_1 = 3$.
Die beiden Zahlen heißen 3 und 1,5.
Probe: $(3 + 1{,}5)^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$ und $(3 \cdot 1{,}5)^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25$.

9/5
Lösung:



9/6
Lösung:
$v = a \cdot t$. $s = (a / 2) \cdot t^2$. $v = 7{,}5\ m \cdot s^{-1} - 1$. $s = 56{,}25$ m.

9/7
Lösung:
Zeit = Differenz der Geschwindigkeit / Weg. 40 s.

10/1
Lösung:
z_1 läßt sich in der Form $100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b$ darstellen ($1 \le a \le 9$ und $1 \le b \le 9$). Diesen Term vereinfachen wir zu $101010a + 10101b$.
Nun ist $101010 = 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 37$ und $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.
Da beide Summanden die geforderten Bedingungen erfüllen, erfüllt sie auch die Summe, w. z. b. w.
z_2 läßt sich in der Form $100000a + 10000a + 1000a + 100a + 10a + a$, zusammengefaßt $111111a$, darstellen.
Nun ist $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111111$. Daraus folgt, daß z_2 die gestellten Bedingungen erfüllt, w. z. b. w.

10/2
Lösung:
Wir formen den Term wie folgt um:
$8n^3 + 24n^2 + 22n + 6 = 8n^3 + 12n^2 + 12n^2 + 18n + 4n + 6$
$= 8n^3 + 12n^2 + 4n + 12n^2 + 18n + 6$
$= (4n^2 + 6n + 2) \cdot 2n + (4n^2 + 6n + 2) \cdot 3$
$= (4n^2 + 6n + 2)(2n + 3)$
$= (4n^2 + 2n + 4n + 2)(2n + 3)$
$= ((2n + 1) \cdot 2n + (2n + 1) \cdot 2)(2n + 3)$
$= (2n + 1)(2n + 2)(2n + 3)$.
Nun stellen wir fest, daß der zuletzt erhaltene Term die Darstellung dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist, wenn gilt $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ erhalten wir $1 \cdot 2 \cdot 3$, für $n = 1$ ergibt sich $3 \cdot 4 \cdot 5$ usw. Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine gerade (hier ist es die zweite Zahl) und stets genau eine durch 3 teilbar.
Daraus folgt, daß der Term stets durch 6 teilbar ist und wegen des möglichen Produktes $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ die 6 auch die größte natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

10/3
Lösung:
Die gegebene Gleichung läßt sich darstellen durch
$(10a + a)^n = 1000a + 100n + 10n + a$,
$(11a)^n = 1001a + 11n$,
$11^n \cdot a^n = 11(91a + 10n)$.
Wegen $11^2 = 121 < 1221$ muß $n \ge 3$ sein.
Wegen $11^4 > 10^4 = 10000 > 9889$ kann nur $n = 3$ gelten.
Daraus folgt
$11^3 \cdot a^3 = 11(91a + 30)$,
$121a^3 = 91a + 30$,
$121a^3 - 91a - 30 = 0$,
$a(121a^2 - 91) = 30$.
Nur $a = 1$ erfüllt diese Gleichung. Es existiert genau eine Lösung, nämlich $11^3 = 1331$.

10/4
Lösung:
(1) Strecke $\overline{AB}$ mit Länge 10 cm zeichnen
(2) Thaleskreis über $\overline{AB}$
(3) Kreis um B mit r = 9 cm schneidet Thaleskreis in C
(4) Länge von

$$\overline{AC} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19} \quad \text{cm}$$

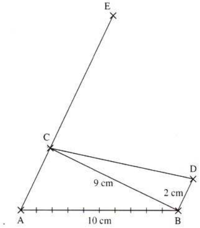
(5) $\overline{AC}$ über C hinaus verlängern
(6) Senkrechte durch B zu $\overline{CB}$ zeichnen und von B aus 2 cm abtragen; wir erhalten Punkt D
(7) Länge von

$$\overline{CD} = \sqrt{9^2 - 2^2} = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85} \quad \text{cm}$$

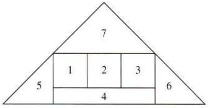
(8) An $\overline{AC}$ in C Strecke $\overline{CD}$ antragen; wir erhalten Punkt E
(9) $\overline{AE}$ ist die gesuchte Strecke mit der Länge

$\left(\sqrt{19} + \sqrt{85}\right)$ cm.

Skizze:



10/5
Lösung:



Alle anderen Lösungen folgen im nächsten alpha-Heft.

992 1742 1917 837

Was geschah vor...Jahren?

1593 Christoph Clavius veröffentlicht sein „Astrolabium“ (siehe zugehörigen Beitrag)

1668 Der schottische Mathematiker J. Gregory (1637 – 1675) gibt in seiner „Geometria pars universalis“ eine Zusammenfassung der englischen und italienischen Ergebnisse der neuen Differential- und Integralrechnung

1668 Der Engländer Isaac Barrow (1630 – 1677) beginnt in Cambridge mit seinen berühmten Vorlesungen über die geometrischen Probleme der Differential- und Integralrechnung. Er gewinnt die fundamentale Erkenntnis, daß das Tangentenproblem (Differentation!) und das Quadraturproblem (Flächenberechnung, Integration!) inverse Probleme sind. Das eine Problem ist also die Umkehrung des anderen. 1670 wird dazu Barrows Buch „Lectiones geometriae“ veröffentlicht.

1693 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1718) führt den Multiplikationspunkt und die Proportionsschreibweise a:b=c:d ein.

1793 Am 15.8. ist Edward Waring gestorben. Der englische Mathematiker wurde wahrscheinlich 1734 geboren. Waring ist noch heute durch das „Waringsche Problem“ bekannt. Bei Waring hatte es noch die sehr einfache Form: jede Zahl läßt sich aus höchstens 9 Kubikzahlen, höchstens 19 Biquadratzahlen usw. darstellen. 1909 löste der deutsche Mathematiker D. Hilbert (1862 – 1943) sensationell das Problem allgemein.

Richard von Mises

Vor vierzig Jahren, am 14.7.1953, starb in Boston Richard von Mises. Mises war einer der herausragenden Vertreter der angewandten Mathematik unseres Jahrhunderts. Geboren am 19.4.1883 in Lemberg (Lwow, Polen), das damals zu Österreich gehörte, studierte er in Wien und beendete seine Ausbildung in Brünn. Ein Bruder des Mathematikers war der bedeutende Volkswirtschaftler Ludwig von Mises (1881 – 1973). 1909 wurde Richard von Mises Professor in Straßburg, 1919 in Dresden und 1920 in Berlin. An der Berliner Universität übernahm er die Leitung des weltweit ersten Instituts für Angewandte Mathematik. Auch Mises wurde von den Nationalsozialisten aus Deutschland vertrieben. Er emigrierte 1933 erst nach Istanbul und dann in die USA. Dort wurde er an der Harvard-Universität Professor für Aerodynamik und Angewandte Mathematik.

Mises faßte den Gegenstand der „angewandten Mathematik“ als alle mathematischen und physikalischen Gebiete, die ein wissenschaftlich arbeitender Ingenieur benötigt. Er verwahrte sich scharf gegen die Auffassung, daß die Mathematik der Techniker simpel und ungenau sein müsse – exakte Mathematik betrieben nur die Vertreter der reinen Mathematik. In seinem Gesamtwerk, das hauptsächlich Probleme der Flugtechnik, des Maschinenbaus, Untersuchungen von Grenzschichten, Stabilitätsuntersuchungen, numerische Integration und technisch wichtige geometrische Konstruktionen umfaßte, bewies er selbst, daß der Gegensatz zwischen reiner und angewandter Mathematik nur scheinbar ist. Von Fragen, die sich aus der ingenieurtechnischen Praxis ergeben, führt ein Weg zur Erforschung der mathematischen Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. Weltweit großen Einfluß übten die Untersuchungen von Mises über Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, die er auf den Begriff des „Kollektivs“ gründete. Ein Kollektiv ist eine unendliche Folge von Beobachtungen. Jede Beobachtung endet dabei mit der Feststellung eines „Merkmals“. Der Begriff „Kollektiv“ war in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts besonders von dem Leipziger Physiker und Philosophen Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887) und dem Leipziger Astronomen und Mathematiker Heinrich Bruns (1848 – 1919) als Ausgangspunkt ihres Zuganges zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gewählt worden. Diese „Kollektivmaßlehre“ ist über Jahrzehnte heftig umstritten gewesen, wird aber seit etwa 1960 in wesentlichen Teilen allgemein akzeptiert.

Als Kuriosum sei zum Schluß erwähnt, daß der erwähnte Fechner auch humoristische Schriften verfaßte. Als Pseudonym wählte Fechner für diese Werke „Dr. Mises“.

H. J. Ilgauds, Universität Leipzig

Eine Vorstufe des logarithmischen Rechnens

1593 veröffentlichte Christoph Clavius (1537 – 1612) in Rom ein Buch mit dem Titel „Astrolabium“. Ein Astrolabium ist ein astronomisches Gerät zur mechanischen Lösung von Aufgaben der Astronomie gewesen. An solchen und ähnlichen Geräten waren die Astronomen besonders interessiert, da sie damals als einzige zu sehr umfangreichen Rechnungen gezwungen waren.
Clavius, aus Bamberg stammend, war Mitglied des Jesuitenordens und galt als der bedeutendste Lehrer der Mathematik in seiner Zeit. Er hat sich große Verdienste um die Entwicklung von Schulbüchern, um die Kalenderreform und um die Herausgabe antiker mathematischer Werke erworben. Es war schon eine Ironie des Schicksals, daß ausgerechnet dieser berühmte Gelehrte in Rom auf der Straße von einem wildgewordenen Ochsen getötet wurde. In seinem „Astrolabium“ behandelte Clavius auch abschließend die Prosthaphairese. Dieses eigenartige Wort bedeutet etwa „Vorwegnahme“. Die Prosthaphairese war 1514 von dem Nürnberger Gelehrten Johann Werner (1468 – 1528) erfunden worden. Heute wissen wir aber, daß auch schon der Kairoer Gelehrte Ibn Yunis (≈ 950 – 1009) diese Rechenmethode kannte. Die Grundlage der Prosthaphairese bilden die drei bekannten trigonometrischen Formen

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

Wir wollen uns auf die erste Formel beschränken. Es sei die Rechenaufgabe 0,3584 · 0,6428 zu lösen. Hat man eine vierstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung, so sieht man: 0,3584 = sin 21°, 0,6428 = sin 40°. Nach der ersten Formel ist

$$\sin 21° \cdot \sin 40° = -\frac{1}{2}(\cos 61° - \cos(-19°)) =$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 61° - \cos 19°) = -\frac{1}{2}(0{,}4848 - 0{,}9455) =$$

$$= 0{,}23035.$$

Also ist somit die Rechenaufgabe 0,3584 · 0,6428 ≈ 0,23035 gelöst. Der Sinn dieser Rechenmethode war: man kann durch die verwendeten trigonometrischen Formeln die Multiplikation (linke Seite) durch die Addition bsw. Subtraktion (rechte Seite) ersetzen. Diese Methode leistet im Prinzip genausoviel wie die Logarithmen. Auch dort wird die Multiplikation durch eine Addition ersetzt. Allerdings ist die Prosthaphairese noch umständlicher als die logarithmische Rechnung und deshalb wurde dieses Verfahren seit etwa 1600 langsam durch das Rechnen mit Logarithmen ersetzt (J. Bürgi (1552 – 1632), J. Neper (1550 – 1617)).

H. J. Ilgauds, Universität Leipzig

32. Mathematik-Olympiade

3. Stufe (Landes-Olympiade)

Sie fand am 6. und 7. Februar 1993 statt. Falls Ihr Interesse an den Lösungen habt – schreibt uns, wir schicken sie gern zu.

Klassenstufe 7

320731

a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, daß sich in A drei und in B vier Kugeln befinden. Wieviele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Numerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wieviele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen. Wieviele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

320732

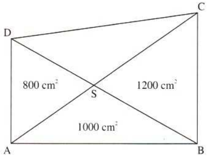


Abb. A 320732

Es sei ABDC ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte 1000 cm^2, 800 cm^2 bzw. 1200 cm^2 haben, so wie dies in der Abb. A 320732 angegeben ist.
Weise nach, daß durch diese Voraussetzungen der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!

320733

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, daß $\overline{BP} = 2$cm gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $\overline{CQ} = 2$cm, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $\overline{AR} = 2$cm.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!

a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.

b) Es ist $MP \cong MQ \cong MR$.

320734

Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

320735

Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\sphericalangle$ ACB die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, daß $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, daß $\overline{BE} = \overline{BC}$ gilt.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\sphericalangle$ DCE eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

320736

Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:
Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist. Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

Klassenstufe 8

320831

Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.
Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so daß die Gleichung

$$\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$$

gilt!

320832

Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d. h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.
Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge.
Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten.
Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.
Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

320833

Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinklige Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Winkel	Größe
$\sphericalangle$ PBA	δ
$\sphericalangle$ PCA	δ'

Winkel	Größe
$\sphericalangle$ PCB	ε
$\sphericalangle$ PAB	ε'

Winkel	Größe
$\sphericalangle$ PAC	φ
$\sphericalangle$ PBC	φ'

(a) Wenn die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

(b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

320834
Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Straße mit der Geschwindigkeit $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am anderen Ende der Brücke.
Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

320835
Beweise, daß für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als *Inkreis* eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von innen berührt.

320836
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, daß jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen. Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen, von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten, die zweite 63 Minuten, die dritte 35 Minuten.
Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

Klassenstufe 9

320931
In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken. Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:
A sagt zu B: „Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."
C sagt zu A: „Du bist von anderer Sorte als ich."
Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben? Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

320932
Wieviele Paare (x; y) natürlicher Zahlen, für die
$10x + y < 1993$
gilt, gibt es insgesamt?

320933
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.
(a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}, b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!
(b) Beweisen Sie, daß es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangenten liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

320934
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p{\cdot}y^2$ darstellen lassen. Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p die folgende Aussage gilt: Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an.

320935

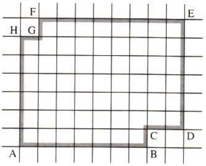


Abb. A 32095

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck ABCDEFGH wie in Abb. A 320935 gezeichnet. Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, daß dabei A mit E zur Deckung kommt. Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.
Beweisen Sie, daß es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

320936
a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0$ (1)
gilt!
b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x; y; z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

Klassenstufe 10

321031
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (x;y) ganzer Zahlen x, y, für die
$19 < x^2 + y^2 < 93$
gilt!

321032
Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.
a) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!
b) Beweisen Sie, daß ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

321033
Zeigen Sie, daß es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, daß jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!
Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundkreisradius r und die Höhe h solcher Kegel!

321034
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x; y; z) natürlicher Zahlen x, y, z, für die

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$ gilt!

321035

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl $k > 1$ die folgende Aussage gilt:

> Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl
>
> 11...1
>
> eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

321036

Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!

Klassenstufe 11 – 13

321231

Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n}+\sqrt{n+4}$ rational ist.

Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, daß für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

321232

Man beweise: Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der die Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$, die durch

$a_1 = c$,

$a_{k+1} = a_k^2 + c$ (k = 1,2,3,...)

definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.

Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$ heißt genau dann *periodisch*, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle k = 1,2,3,... die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine *Periodenlänge* der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$

Von den nachstehenden Aufgaben 321233A und 321233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

321233 A

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2-x-1 \neq 0$ und $x^2+x-1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2\cdot f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right)-3\cdot f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right)=$$

$$=5\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

321233 B

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen n-Tupel $(x_1,x_2,...,x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$x_1 \cdot x_2 = 3\cdot(x_1 + x_2)$,

$x_2 \cdot x_3 = 3\cdot(x_2 + x_3)$,

......................,

$x_{n-1} \cdot x_n = 3\cdot(x_{n-1} + x_n)$,

$x_n \cdot x_1 = 3\cdot(x_n + x_1)$.

321234

Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ werde vorausgesetzt, daß jede der Zahlen 1, 2, ..., n genau einmal unter den $a_1, a_2, ..., a_n$ vorkommt.

Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung das Produkt

$(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot...\cdot(a_n-a)$

stets eine gerade Zahl sein muß.

321235

Man beweise, daß es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so daß für alle reellen Zahlen a > o die Ungleichung

$a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} \leq c\cdot(1 + a^{2n+1})$

gilt. Man beweise auch, daß es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

321236

Es seien k_1, k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\cdot\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$. Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, daß A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegt.

Lösungen und Gewinner

alpha-Preisausschreiben 2

Aufgabe a:

Die Sichtweite bis zum Erdhorizont (bei Erdradius = 6 378 km) etwa 1134 km.

Aufgabe b:

Die Sichtfläche auf der Erdoberfläche beträgt etwa 3 945 550 km^2.

Aus allen richtigen Einsendungen wurden die Gewinner gezogen.

Den TI-81 erhielt Gunther Hosemann, Erfurt; den Galaxy 40X Solar erhielt Kerstin Sieber, Hemhofen.

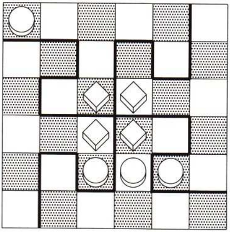
BOMICO-Preisauschreiben

Auch beim BOMICO-Preisausschreiben erhielten wir zahlreiche richtige Lösungen.

Lösung 1. Aufgabe

Vorschlag D ist die gesuchte Figur 5.

Lösung 2. Aufgabe



Aus allen richtigen Einsendungen wurden die Gewinner gezogen.

Je 1 „Castle of Dr. Brain“ geht an:

Martin Bohmeyer, Neuenhagen

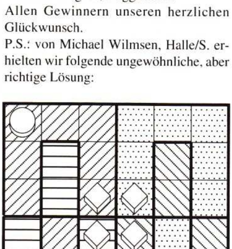
Alexander Keck, Rostock

Thomas Strobel, Lappersdorf

Matthias Wagner, Deggendorf.

Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch.

P.S.: von Michael Wilmsen, Halle/S. erhielten wir folgende ungewöhnliche, aber richtige Lösung:



Oldies: – Loopz

LOOPZ ist ein Denk- und Geschicklichkeitsspiel mit viel Schiebe- und Drehübung. Die Aufgabe erscheint dann auch äußerst einfach. Auf einem Spielfeld von 18 x 7 Feldern blinkt zu Spielbeginn der Cursor, der ein Bauelement frei gibt. Aus vielen verschiedenen Elementen soll ein geschlossener Körper, ein LOOPZ, gebildet werden. Je größer dessen Flächeninhalt, je größer dessen Umfang, desto höher die Punktzahl.

Mit der Tastatur bewegt man das Bauteil an eine beliebige Stelle, wobei man es mit der Space-Taste um einen vorgegebenen Punkt drehen kann. In die gewünschte Position gebracht, verankert man das Teilchen mit der Return-Taste fest auf den Spielplan. Gelingt es, das lineare Gebilde zu schließen, verschwindet es vom Spielplan, der Computer wertet die Punkte, die rechts unter der Spielfläche aufaddiert werden. Links unterhalb der Spielfläche werden die LOOPZe gezählt. Zwischen diesen beiden Anzeigen befindet sich eine weitere, die stets die zur Durchführung der Bewegung vorhandene Zeit verrinnen läßt. Schafft man es während der vorgegebenen Zeit nicht, sein Bauelement in Übereinstimmung mit den Spielregeln abzulegen, werden Versuche (Leben) abgezogen. Drei Versuche stehen einem zur Verfügung. Hat man Glück, taucht ein Bonusstein auf, eine Ratte, die begonnene, nicht zu beendende LOOPZe, löschen kann. Für 25 fertiggestellte LOOPZ-Figuren gibt es einen neuen zusätzlichen Versuch.

LOOPZ ist ein schnelles, zweidimensionales Bauspiel. Wer geometrische Formen gut zusammenstellen, wer unter Zeitdruck aufmerksam und zügig spielen kann, der wird halbwegs verwinkelte Figuren bauen und damit reichlich Punkte einfahren können. Die Steuerung für LOOPZ begrenzt sich alles in allem auf sechs Tasten, ist folglich außergewöhnlich bequem. Mit Mut zur Lücke, die am besten nie zwei Felder groß sein darf, lassen sich auch die verwinkeltsten Bauelemente in einen LOOPZ einpassen. Jammerschade, daß T-Stücke und wenigstens ab und zu mal ein Kreuzungs-Teil fehlt.

Ganz unerschrockene LOOPZer spielen LOOPZ natürlich auch zu Zweit. Dann gewinnt immer bloß der die Punkte, der einen LOOPZ vervollständigt – da läßt der Zweier-Modus von ATOMIX grüßen.

Dem ungeachtet ist LOOPZ ein eigenständiges Spiel. Es ist nicht alltäglich und bei uns sehr begehrt. Wer diese Kategorie Hirnzellen-Training liebt, wird viele LOOPZe bauen.

Hartmut Seitz / -se

LOOPZ, Audiogenic 1990, Genre: schnelles Denkspiel von Ian Upton für 1 oder 2 Spieler mit hoher Spielmotivation und niedlichem Sound. Vertrieb: BOMICO, Idealkonfiguration: VGA, 1 LW, Soundkarte.

Die Olympiade Ecke

*Die **ProblemEcke** –*
Probleme von L(o)esern für L(o)eser

Es gibt rund um den Globus unzählige Mathematikzeitschriften. Einige kommen ziemlich ärmlich daher, andere, wie Eure alpha, gehören zur Luxusklasse ihrer Gattung. Aber gleichgültig ob Billigdruck oder Hochglanzpapier: jedes dieser Magazine besitzt (mindestens) eine Problemseite, mit der die Herausgeber ihre Leser zum Mittun auffordern wollen. Doch leider weisen die dargebotenen Aufgaben manchmal einen derart hohen Schwierigkeitsgrad auf, daß sie dann nur noch von Universitätsprofessoren und ihren Jüngern bewältigt werden können. Da Eure alpha aber weniger ein Hochschulblatt für kluge akademische Köpfe sein soll, sondern in erster Linie Euch Schüler ansprechen will, möchte ich mit dieser Ausgabe in der OLYMPIADE-ECKE eine zweite Unterabteilung eröffnen: *Die ProblemEcke*.

In dieser regelmäßigen Einrichtung werde ich Euch jeweils sechs Aufgaben vorstellen, die fortlaufend numeriert sind. Die Probleme sind unterteilt in drei Schwierigkeitsgrade:

Junior (für Löser bis Klasse 8 einschließlich), **M**ittel (für Tüftler bis einschließlich Jahrgangsstufe 10) und **O**ffene Probleme für jedermann. **Ihr seid eingeladen, zu einem oder mehreren Aufgabenvorschlägen, Lösungen einzureichen. Die elegantesten Auflösungen sollen jeweils in späteren Heften von alpha vorgestellt werden.**

Keine schon einmal gestellte Aufgabe ist dabei völlig abgeschlossen: neue, ungewöhnliche Lösungswege sind jederzeit willkommen. Die erfolgreichen Löser werden am Jahresende bekanntgegeben.

Schickt Eure Lösungen an: **StR Paul Jainta, Werkvolkstraße 10, 91126 Schwabach.** Vergeßt nicht, **Name, Schule** und **Alter** bzw. **Klasse** anzugeben.

Ich möchte Euch zu regelmäßigem Mitmachen ermuntern. Eine mathematische Zeitschrift lesen erschöpft sich nicht darin, nur oberflächlich in ihr zu blättern; besser wäre, ihr legt Euch Stift und Papier daneben, ganz im Sinne des ungarisch-amerikanischen Mathematikprofessors und Erfinders grundlegender Lösungsstrategien für mathematische Wettbewerbsaufgaben, Georg Pólya, der einmal gesagt hat: *Das Lösen von Aufgaben ist eine praktische Kunst wie das Schwimmen oder Klavierspielen. Sie läßt sich nur durch Nachahmung und Übung erlernen.* Die Aufgaben, die ich Euch zusätzlich anbieten möchte, erfordern nicht unbedingt den gesamten Mathe-Stoff der Schule. Mit ein wenig Phantasie, einem Schuß geradlinigem Denken, aber auch mit einer gehörigen Portion Hartnäckigkeit, werdet Ihr gut mit ihnen zurechtkommen. Laßt Eure Gehirnrädchen also schnurren, denn hier erfolgt das Startzeichen für

Die ProblemEcke

J 1. Wie viele natürliche Zahlen n zwischen 1 und 1993 einschließlich, besitzen 3 **oder** 5 **nicht** als Teiler?

J 2. Es gibt beliebig viele Paare ganzer Zahlen x und y, für welche der Term $T = 2x+3y$ ein Vielfaches von 11 ist (z. B. $x=1$, $y=3$).
Zeige, daß für dieselben Zahlenpaare x, y der Term $T^* = 7x + 5y$ ebenfalls ein Vielfaches von 11 ist.

M 1. Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks erfüllen die Bedingung
$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=0.$$
Beweise: Das Dreieck ist gleichschenklig.

M 2. Finde alle vierstelligen natürlichen Zahlen $\overline{abcd}$ mit folgenden Eigenschaften:
1) Die vier Ziffern a, b, c und d sind verschieden.
2) Es gilt: $a = b+c+d$
3) Die Zahlen $\overline{cd}$ und $\overline{abcd}$ sind Quadratzahlen.

O 1. Eine Funktion f erfüllt die Bedingungen
(1) $f(x,x) = x$
(2) $f(x,y) = f(y,x)$ und
(3) $(x+y)f(x,y) = (2x+y)f(x,x+y)$
für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x und y. Man bestimme den Wert von f(19,93).

O 2. Vereinfache den folgenden Ausdruck
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

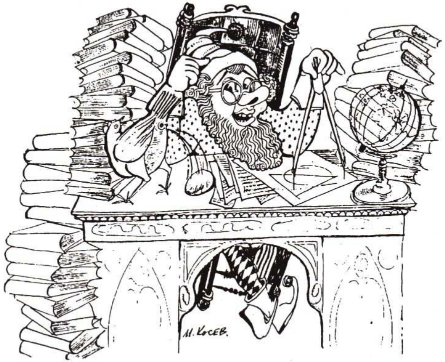
Besonders ermutigen möchte ich auch mathematische Arbeitsgemeinschaften, Schülerzirkel und ausgesprochene Knobelgruppen, sich an der Bearbeitung einzelner (oder aller) Aufgaben zu beteiligen. Es soll ja an einigen Schulen richtige Spezialistenteams geben, die sich nur zu dem Zwecke treffen, neue Probleme zu knacken. Ich würde mich freuen, wenn alpha einen lebhaften Gedankenaustausch zwischen einzelnen Gruppen einleiten könnte.

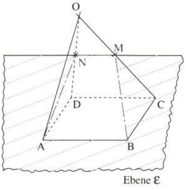
Probleme von L(o)esern für L(o)eser

Wer meint, einige passende Aufgaben (mit den Lösungen dazu) zur Veröffentlichung beisteuern zu können, der möge mir ebenfalls schreiben. Erzählt mir, wie und womit Ihr Euch mathematisch betätigt (dazu Hobbys etc.). Wenn Ihr bei Eurer Beschäftigung mit Mathematik (etwa beim Lösen von Problemen) eine Entdeckung gemacht oder eine Idee verfolgt habt, laßt es mich wissen. Es gibt viele unterhaltende Leckerbissen auf diesem Gebiet, von denen andere Leser von alpha vermutlich auch gerne etwas abhaben wollen. Schickt mir ein Foto (oder anderes Bildmaterial) von Euch, dann kann ich Euch den alpha-Lesern vorstellen. Vielleicht wird daraus eine weitere neue Ecke in alpha: Probleme von L(o)esern für L(o)eser.

Wie Ihr an alpha mitwirken könnt, möchte ich am Beispiel von **Terpu Vlad** verdeutlichen, der in der rumänischen Hauptstadt Bukarest lebt. Terpu hat der Redaktion im Frühjahr des vergangenen Jahres einen längeren Brief geschrieben und gleichzeitig eine Auswahl von Aufgaben aus rumänischen Mathe-Wettbewerben mitgeschickt. Einige der Aufgabenbeispiele hat er selbst als Teilnehmer an der rumänischen Mathematik Olympiade bearbeiten müssen. Terpu ist 15 Jahre alt und besucht derzeit die 10. Klasse an der Deutschen Schule in seiner Landeshauptstadt. Ab der 9. Klasse ist er in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig hinübergewechselt, an dem nach dem deutschen Lehrplan unterrichtet wird. Jeweils Mitte September beginnt in Rumänien ein neues Schuljahr. Terpu nimmt nun schon zum zweiten Male an der rumänischen Mathe-Olympiade teil. Er hat mir den groben Ablauf dieses Landeswettbewerbes geschildert. Danach melden die Mathelehrer aller vierten bis zwölften Klassen dem Olympiade-Komitee alljährlich geeignete Schüler zur Teilnahme. Die Meldezahlen sind dabei gewöhnlich so hoch, daß sie allein in Bukarest auf 6 Distrikte verteilt werden. Aus diesen Stadtbezirken wird in der 1. Stufe, der Distriktphase, zum ersten Mal ausgesiebt. Die dabei erzielten Punktzahlen entscheiden über die weitere Zulassung zu höheren Stufen: wer zwischen 8 und 9 Bewertungseinheiten erreicht hat, steigt in die Bukarestphase auf; bei Wertungsnoten über 9 und unter 10 winkt die Landesstufe. Wer Traumwerte über 10 erzielen konnte, auf den wartet als besondere Belohnung die Teilnahme an einem internationalen Wettbewerb. Doch überstehen in der Regel nur 3 oder 4 Ausnahmetalente das harte Auswahlverfahren auf Landesebene. Terpu hat als Schüler der 8. Klasse an der Mathematikolympiade in Rumänien teilgenommen und die erste Runde glatt genommen. In Phase II, dem Ausscheid in Bukarest, hat er das beste Ergebnis seiner Schule erkämpft (47ster bei 137 Bewerbern). Leider reichte seine dabei erzielte Punktzahl nicht zur Teilnahme an der zweithöchsten Stufe. Aus seiner Vorbereitungsphase für die diesjährige nationale Olympiade in Mathematik hat mir Terpu mehrere landestypische Beispiele aufgeschrieben. Viel Spaß wünsche ich beim Lösen der folgenden Aufgaben!

1) Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Lösungsmenge der Ungleichung
$(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+n) < 1000$
(Distrikphase, Bukarest, 1989, 8. Klasse).
2) Welche natürlichen Zahlen x, y und z (> 0) erfüllen die (diophantische) Gleichung
$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{30}{13}\ ?$$
(Landesphase, 1986, 8. Klasse)
3) Gesucht sind zwei Polynome T(x) und S(x) höchstens zweiten Grades, mit reellen Koeffizienten, die folgender Bedingung genügen:
$T^2(x) + S^2(x) + 13 \leq 4\,T(x) + 6\,S(x)$.
4) OABCD sei eine regelmäßige, vierseitige Pyramide mit der Spitze O. Durch die Kante AB legt man eine Ebene E, welche die Kanten OC, OD in den entsprechenden Punkten M und N schneidet.



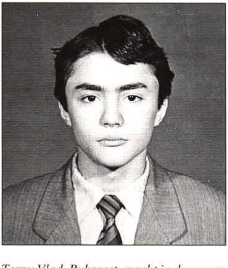


a) Zeige: das Viereck ABMN ist ein gleichschenkliges Trapez.
b) Es bezeichne A_1, A_2 und A_3 in dieser Reihenfolge, die Flächeninhalte der Dreiecke OBM, OMN und OAB. Weise die Gültigkeit der folgenden Beziehung nach:

$$A_1 = \sqrt{A_2 \cdot A_3}$$

(Landesphase, 1987, 8. Klasse)

Übrigens: Auch die Vorschläge M 1 und M 2 aus der ***ProblemEcke*** stammen von Terpu Vlad.
Ich freue mich schon auf Eure pfiffigen Lösungen!
StR Paul Jainta, Schwabach



Terpu Vlad, Bukarest, macht in der neuen Reihe Probleme von L(o)esern für L(o)eser den Anfang mit Aufgaben aus rumänischen Mathe-Wettbewerben.

Was ist beim Bau einer Modellhängebrücke zu beachten? Teil I

Abb. 1: Die „An-Lan"-Seilhängebrücke

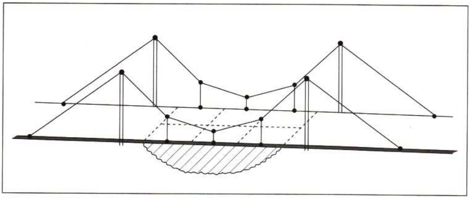


Abb. 2: Modellhängebrücke

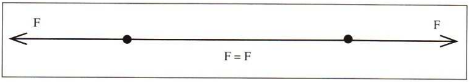


Abb. 3: Durch Kräfte gespanntes Seilstück

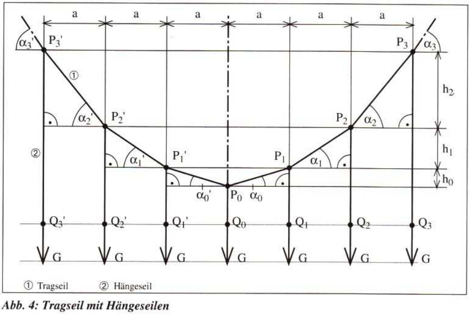


Abb. 4: Tragseil mit Hängeseilen

In alten Zeiten befestigten Gebirgsvölker aus Pflanzenfasern gefertigte Seile an sich gegenüberstehenden Felswänden und benutzten diese als Hängebrücken. Die älteste heute noch existierende Hängebrücke ist die in Kuanhsien (China) um 900 u. Z. erbaute „An-Lan", deren aus Hanf, Bambus und Holz bestehenden Teile immer wieder erneuert wurden und werden (**Abb. 1**). Während zum Bau der „An-Lan" und anderer Brücken kein Metall verwendet wurde, gab es im 6. Jahrhundert in China bereits Hängebrücken, bei denen die Tragseile durch handgeschmiedete Eisenketten ersetzt waren. Anfänglich waren bei den Hängebrücken wie z. B. der „An-Lan" die Hängeseile gleich lang. Dadurch bedingt war der Brückenbelag in gleicher Weise gebogen wie die Tragseile. Später wurde durch verschieden lange Hängeseile erreicht, daß der Brückenbelag ebenflächig war. In Deutschland wurde 1786 in Hanau die erste Hängebrücke mit Ketten gebaut. Auf Grund mangelnder Erfahrungen und Erkenntnisse stürzten auch einige Hängebrücken vor allem durch den Transport von Lasten (Fahrerschütterungen) und durch Windkräfte ein. So brach 1940 kurz nach ihrer Fertigstellung im USA-Bundesstaat Washington die „Tacoma Narrows Bridge", eine Hängebrücke mit 855 m Spannweite, zusammen: Vor ihrer Zerstörung hatte sich ihre Fahrbahn durch Windböen immer stärker wie eine Schlange hin und her gewunden.
Jetzt ist die Storbelt-Brücke (dän.: Storeboelt – Großer Belt), eine Hängebrücke mit einem freien Spann von 1624 m und einer Durchfahrthöhe von 65 m für Schiffe im Bau, mit der eine feste Verbindung der dänischen Hauptinseln Fünen und Seeland geschaffen wird. Die Storbelt-Brücke wird von einer internationalen Arbeitsgemeinschaft errichtet. Die deutsche Firma „Hochtief-AG Essen" führt die Betonarbeiten für die Gründungen und die 254 m hohen Pylone (Stützpfeiler) aus. Während für eine moderne Hängebrücke umfangreiche Berechnungen erforderlich sind, kommt es bei einer einfachen Modellhängebrücke vor allem und wohl auch nur darauf an, daß die Hänge- und Tragseile die richtigen Längen haben. (**Abb. 2**) Die hier betrachtete Modellhängebrücke mit 4 gleich hohen Pylonen und einer ungeraden Zahl von Hängeseilen auf jeder Seite besitzt zwei Symmetrieebenen. Die Abstände zwischen einem Pylon und dem benachbar-

Abb. 5: Die Akashi-Kaikyo-Brücke in Japan, hier eine Computersimulation, wird nach ihrer Fertigstellung 1998 die längste Hängebrücke der Erde sein.

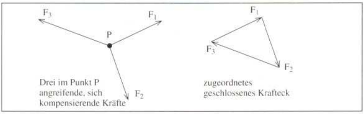


Abb. 6

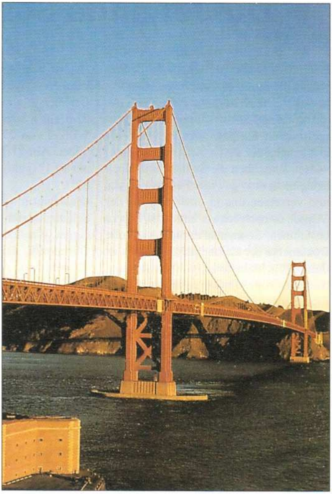


Abb. 7

ten Hängeseil sowie die Abstände zwischen zwei benachbarten Hängeseilen sind sämtlich gleich. Die als Trag- und Hängeseile verwandten Zwirns- oder dünnen Bindfäden können bei den folgenden Betrachtungen als masselos (ohne Eigengewicht), undehnbar (durch wirkende Kräfte und Temperaturschwankungen wird die Länge nicht verändert), biegeschlaff (ohne Kraftaufwand verbiegbar) und als durch die wirkenden Zugkräfte belastbar angenommen werden. In einer Gleichgewichtslage besteht ein durch wirkende Kräfte gespanntes derartiges Seil aus aneinander gereihten geradlinigen Seilstücken. Jedes dieser Seilstücke ist durch zwei an den Enden des Seilstückes angreifende, gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, deren Wirkungslinie mit dem Seilstück zusammenfällt, gespannt. (**Abb. 3**) Die aus dünnen Holzstäben angefertigten Pylone werden als starre Körper (durch wirkende Kräfte nicht deformierbar) aufgefaßt.

Für die folgenden Betrachtungen denken wir uns die Brücke (Fahrbahn) so in kongruente und massegleiche Teile zerlegt, daß an jedem Hängeseil ein solches Teil mit der gleichen Gewichtskraft G hängt (In **Abb. 2** sind die erforderlichen Trennlinien gestrichelt).

In jedem unteren Ende Q_0, Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2, ... der Hängeseile greift je eine Gewichtskraft mit dem Betrag G an (**Abb. 4**). Jeder Seilknoten P_0, P_1, P'_1, P_2, P'_2, ... ist Angriffspunkt von drei Kräften, von denen jede zusammen mit ihrer Gegenkraft eines der drei in den Knoten einmündenden geradlinigen Seilstücke spannt. Da Gleichgewicht herrscht, muß die Summe der drei in einem Knoten angreifenden Kräfte 0 sein.

Diese drei Kräfte müssen also, wie sich durch Zusammensetzen von zwei dieser Kräfte mittels Kräfteparallelogramm ergibt, ein geschlossenes Krafteck bilden: Wird durch Parallelverschiebungen erreicht, daß die Spitze eines ersten Kraftpfeiles mit dem Schaft eines zweiten und die Spitze dieses zweiten mit dem Schaft des dritten zusammenfällt, so fällt auch die Spitze des dritten mit dem Schaft des ersten zusammen (**Abb. 6**).

Durch das Lösen der folgenden Aufgabe erwirbt der Leser die für den Bau einer einfachen Hängebrücke nötigen Kenntnisse.

Aufgabe: Für eine Hängebrücke mit 3 Hängeseilen auf jeder Seite (Abb. 2), bei der der Abstand der beiden Pylone auf jeder Brückenseite 4a = 16 cm beträgt und bei der der Winkel α_0 (Abb. 4) gleich 15° ist, sind die Kraftpfeile der in den Knoten P_0, P_1 und P'_1 angreifenden Kräfte zu konstruieren und ist die Seitenansicht der Modellhängebrücke maßstabsgerecht zu zeichnen! Wie groß ist der Winkel α_1 (Abb. 4)?

Anleitung: Die Kräftepfeile der Gewichtskräfte G können 2 cm lang gewählt werden. Dem Leser sei empfohlen, vor dem Lesen des Teiles II diese Aufgabe zu lösen. Im Teil II, im nächsten Heft, wird die Lösung dieser Aufgabe abgedruckt und es werden Berechnungen für eine Hängebrücke des betrachteten Typs vorgestellt.

Dr. W. Träger

Die lebende Sonnenuhr

Überall kann man sie sehen, die Schönwetter-Zeitanzeiger. An alten Gebäuden, in den Neubauvierteln, in Parks und Gärten sowie auf kunstvoll gestalteten geometrischen Körpern. Auch wenn wir nicht mehr auf deren Zeitanzeige angewiesen sind, üben die Sonnenuhren auch heute noch eine gewisse Faszination aus und versetzen uns in eine Zeit, als der Mensch es noch schwer hatte, die Zeit zu bestimmen. Sonnenuhren sind wertvolle Dokumente der Zeitmeßkunst, und es ist unsere Pflicht, historische sowie künstlerisch wertvolle Objekte zu erhalten.
Eine Sonnenuhr zu bauen ist eigentlich ganz einfach – man steckt einen Stab in die Erde und kennzeichnet die Uhrzeit mittels Steinchen oder sonstigem Materials, so wie man es auf Campingplätzen und am Strand immer wieder sehen kann. Einmal ganz ehrlich! Wir haben es alle schon irgendwann so gemacht. Eine Sonnenuhr ist dies aber nicht!
Zwar kann man für die Dauer des Urlaubes von 2-3 Wochen die Zeit einigermaßen ablesen, jedoch nicht länger.
Der Grund hierfür ist die wechselnde Höhe der Sonne im Laufe des Jahres. Der Schatten eines senkrechten Stabes fällt in den einzelnen Monaten in verschiedene Richtungen. Vielleicht habt Ihr schon einmal bemerkt, daß die Sonne den Balkon oder die Terrasse zu unterschiedlichen Zeiten im Sommer und Frühling/Herbst bescheint. Dieser Unterschied kann etwa eine Stunde betragen.
Beispiel: Ein senkrechter Stab wirft am 21.6. einen Schatten, der um 13 Uhr einen Winkel von 27,7° zur Nord-Süd-Linie bildet. Am 21.12. beträgt dieser Winkel nur 14,1° (gültig für die geogr. Breite von 52°).
Dies zeigt uns, daß sich ein senkrechter Schattenwerfer nicht für eine Sonnenuhr eignet. Wie überall, so gibt es auch in der Gnomonik, der Wissenschaft von den Sonnenuhren, Ausnahmen. Wird nämlich der Schattenwerfer nach einem bestimmten Schema versetzt, kann so die genaue Zeit abgelesen werden. Diese, seit dem 18. Jahrhundert bekannte Sonnenuhr wird als analemmatische Sonnenuhr bezeichnet, ist aber verhältnismäßig wenig bekannt.
Vor dem Raumflugplanetarium in Halle befindet sich eine derartige Sonnenuhr, jedoch wird man den senkrechten und verstellbaren Schattenwerfer vermissen. Man erkennt lediglich eine Monatseinteilung sowie die Stundenbezeichnungen. Das Überraschende an dieser Sonnenuhr ist, daß ein Jeder Schattenwerfer sein und Sonnenuhr „spielen“ kann. Es ist daher nicht übertrieben, von einer lebenden Sonnenuhr zu sprechen.
Wir möchten die beiden Arten von Sonnenuhren vorstellen, die sich als lebende Sonnenuhren eignen:

1. Die analemmatische Bodensonnenuhr

Da der Schatten in verschiedene Richtungen fällt, kann es keine Stundenlinien, sondern nur Stundenpunkte geben. Diese Punkte findet man, indem man die Schattenwinkel (Schattenazimute) vom 21.6. und 21.12. aufträgt und die Richtungen bis zum Schnittpunkt verlängert. Der so ermittelte Schnittpunkt ist der betreffende Stundenpunkt.

Die Änderung der Winkel sind im Sommer um die Mittagszeit am größten. Die Stundenpunkte sind in einem Oval angeordnet, 12 Uhr befindet sich auf der Nord-Südlinie. Es handelt sich um den sogen. wahren Mittag (Sonnenhöchststand, Kulmination). Auf der Nord-Süd-Linie befindet sich die Einteilung entsprechend der Monate.
Die Größe der Sonnenuhr ist davon abhängig, wie weit man die Entfernung zwischen dem 21.6. und 21.12. wählt. Man muß immer davon ausgehen, daß der Schattenwurf möglichst den Stundenpunkt erreicht bzw. in dessen Nähe kommt. Die Sonnenuhr darf also nicht zu groß sein. Als Faustregel gilt: Die Entfernung 21.6....21.12. entspricht etwa der vom 21.6. bis zum Stundenpunkt 12.

Konstruktion der Sonnenuhr
Man zeichnet zuerst das Achsenkreuz Nord-Süd, Ost-West. Auf der Ost-West-Linie befinden sich die Markierungen für den 21.3. und 23.9. (Frühling- und

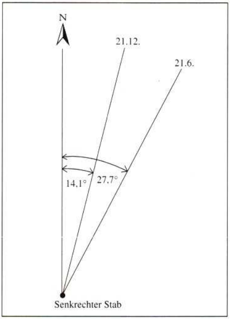


Abb. 1: Schattenwurf eines senkrechten Stabes um 13 Uhr im Sommer und Winter

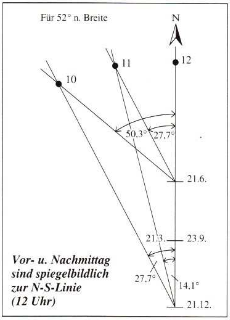


Abb. 2: Schema zur Konstruktion der Stundenpunkte (in Auswahl)

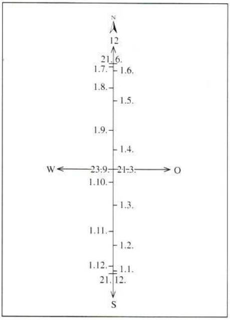


Abb. 3: Einteilung der Datumslinie zur maßstäblichen Übernahme

Herbstbeginn). Davon sind gleich weit entfernt die Markierungen für den 21.6. und 21.12. (Sommer- und Winterbeginn). Die Felder für die einzelnen Monate sind unterschiedlich groß: Das Schema für diese Datumseinteilung ist der Skizze zu entnehmen, die maßstäblich übertragen werden kann. Die Punkte für die Stunden werden nach dem beschriebenen Verfahren und mit Hilfe der Schattenwinkel ermittelt.

Ablesung der Zeit

Das Verfahren ist denkbar einfach. Man stellt sich auf den betr. Monat und verfolgt den Schattenwurf, in welche Richtung dieser fällt. Bei hohem Sonnenstand ist der Schatten kurz; durch Emporheben eines Armes wird der Schatten verlängert. Auf diese Weise kann Jeder selbst Sonnenuhr spielen und Schattenwerfer sein.

Daneben gibt es noch eine andere Möglichkeit, die kaum bekannt ist und selbst in den Büchern über Sonnenuhren nicht erwähnt wird.

2. Die horizontale Polstab-Sonnenuhr

Es handelt sich um eine ganz normale Horizontal-Sonnenuhr mit einem zum Himmelspol gerichteten und fest stehenden Stab. Die Linien für die Stunden haben von der Nord-Süd-Linie (12 Uhr wahre Ortszeit) die in **Tab. 2** aufgeführten Winkel.

Da sich die Winkel nur geringfügig unterscheiden, kann interpoliert werden.

Die Stundenlinien sind ihren Winkeln entsprechend auf dem Boden zu kennzeichnen.

Der um den Betrag der geographischen Breite geneigte Schattenwerfer (Polstab) wird hier nicht benötigt, auch hier dient der eigene Körper als senkrechter Schattenwerfer. Diese lebende Sonnenuhr unterscheidet sich aber dadurch, daß man sich beim Aufstellen nicht nach dem Datum zu richten hat, sondern nach der Körpergröße – die ja jeder kennt.

Angenommen, der Schattenwerfer wäre vorhanden, dann könnte man sich darunter stellen, so daß der Schatten des Kopfes (oberer Teil) mit den Schatten des Polstabes zusammen auf die betreffende Stundenlinie fällt. Der Schatten des Kopfes wandert somit immer entlang der jeweiligen Stundenlinie. Wie schon erwähnt, man kann also auf den Schattenwerfer verzichten. Es ist lediglich darauf zu achten, auf welche Stundenlinie der Schatten des Kopfes fällt.

Berechnung der Skala für die Körpergröße

Hierfür wird b (Entfernung vom Fußpunkt F) nach der Formel

$$b = \frac{a}{\tan \varphi}$$

a: Körpergröße

φ: geogr. Breite

berechnet.

Wer sich die Berechnung ersparen möchte, kann die Übersicht der **Tab. 3** verwenden.

Die Ferse muß auf der jeweiligen Marke der Körpergröße stehen. Da der Schatten des Kopfes ausschlaggebend ist, entfällt hier das Emporheben des Armes.

Wie genau ist die lebende Sonnenuhr?

Jede Sonnenuhr zeigt die wahre Ortszeit, die Sonnenzeit, an. Unsere Mitteleuropäische Zeit (MEZ) stimmt mit dieser nicht überein – ausgenommen in Görlitz, auf dem 15. Längengrad. In allen anderen Orten Deutschlands geht sie, da diese westlich von Görlitz liegen vor.

Mit anderen Worten: Die wahre Ortszeit ist später als die MEZ, der Unterschied richtet sich nach der Längendifferenz zwischen Görlitz und dem betreffenden Ort. Pro Längengrad gilt ein Zeitunterschied von 4 Minuten, d. h. für Potsdam 8 Minuten für Erfurt 16 Minuten und für Aachen 36 Minuten. Besonders in den westlichen Gebieten ist dies zu beachten. Während der Sommerzeit (MESZ) ist selbstverständlich die zur MEZ hinzugefügte Stunde zu berücksichtigen. Das bedeutet, daß zu dem Ortszeitunterschied entsprechend der Längendifferenz noch eine Stunde hinzukommt.

Dieser Beitrag soll auch eine Anregung sein, solche lebenden Sonnenuhren daheim, bei Schulen und Planetarien zu errichten. Schon die alten Römer sagten: UMBRA DOCET, der Schatten erteilt Lehren.

Arnold Zenkert, Potsdam

	Uhrzeit (wahre Ortszeit)	Geographische Breite 48°	50°	52°	54°
Für den 21.6.	12	0°	0°	0°	0°
	11/13	27,6	29,4	27,8	26,3
	10/14	50,3	52,5	50,3	48,4
	9/15	67,7	69,7	67,7	65,9
	8/16	81,7	83,2	81,7	80,3
	7/17	93,7	94,8	93,8	92,8
	6/18	105,0	105,7	104,9	104,3
	5/19	116,0	116,3	116,1	115,7
	4/20	127,6	127,5	127,4	127,3
	Uhrzeit (wahre Ortszeit)	**Geographische Breite 48°**	**50°**	**52°**	**54°**
Für den 21.12.	12	0°	0°	0°	0°
	11/13	14,4	14,3	14,1	14,0
	10/14	28,2	28,0	27,8	27,6
	9/15	40,9	40,8	40,6	40,5
	8/16 *	52,6	52,7	52,7	52,6
	7/17 *	63,5	63,7	64,1	64,3
	6/18 *	73,8	74,4	75,1	75,6
	5/19 *	84,2	85,2	86,3	87,2
	4/20 *	95,4	96,9	98,4	99,4

* Im Winter kein Sonnenschein, die Angaben gelten nur für die Ermittlung der Stundenpunkte.

Tab. 1

Uhrzeit	Geogr. Breite 51°	54°
12	0°	0°
11/13	11,8	12,2
10/14	24,2	25,0
9/15	37,9	39,0
8/16	53,4	54,5
7/17	71,0	71,7
6/18	90,0	90,0
5/19	109,0	108,3
4/20	126,6	125,5

Tab. 2

Körpergröße in cm	b (Entfernung von F) in cm, geogr. Breite 50°	52°	54°
190	159	148	138
180	151	140	131
170	143	133	124
160	134	125	116
150	126	117	109
140	117	109	102
130	109	102	94
120	101	94	87
110	92	86	80
100	84	78	73
90	76	70	65
80	67	62	58
70	59	55	51

Tab. 3

The Incredible Machine

TIM, The Incredible Machine, macht jeder Erfindermesse Ehre, denn es gilt, 87 bisher unbekannte Maschinen zu erfinden. Damit stehen wir vor einer neuen Kategorie von Denk- und Tüftelspielen. Es geht ziemlich betulich zu. Jeder der 87 Level hat ein eigenes Ziel. Die Aufgabe besteht darin, Bauelemente so miteinander zu verbinden, daß man das vorgegebenen Ziel erreicht. Einfach, nicht!

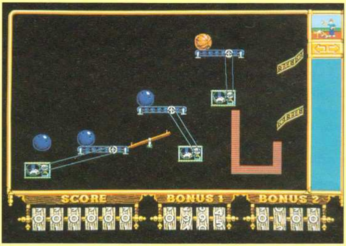
Aber ganz so einfach ist es nicht. Zum Glück stellen die ersten 20 Level alle Maschinenteile vor, die man benutzen kann – oder muß. Grundlage sind Laufbänder, Trampolins und Bälle unterschiedlicher Größen, später kommen noch Generatoren hinzu, ferner Scheren, Fächer, Lupen oder Dynamit. Die Krönung sind radelnde Affen. Und alle Dinge können frei im Raum plaziert werden.

Schleudert man einen Ball gegen eine Wand oder fällt der auf ein Trampolin, springt er in einem bestimmten Winkel ab. Ein schwerer Basketball schleudert um so höher, je mehr Sprunghilfen man ihm gibt.

Das hört sich ziemlich einfach und vielleicht auch noch interessant an: Ein Spiel, bei dem es um Bewegung geht, platzende Ballons, radelnde Affen, das hat sicherlich eine Menge mit Spaß zu tun. Und bereits nach wenigen Leveln steht eines fest. Sobald man sich mit TIM, der Incredible Machine eingelassen hat, sitzt man vor dem Bildschirm und ist gefesselt.

Da hat man nun hochauflösliche VGA-Grafiken (640x480) sehr sauber gezeichnet und teilweise animiert, der Sound wartet mit 10 unterschiedlichen Musikstücken auf. Das muß doch ein perfektes Spiel sein! Zumal sogar bei den gesamten Planungen auf einen drängelnden Zeitfaktor verzichtet wurde, denn welcher Erfinder arbeitet schon unter Zeitdruck?

TIM, The incredible Machine, wird nicht jeden ansprechen. Es ist ein Spiel der Kategorie Denken & Tüfteln. Wenn sich die gebastelte Maschine nicht bewegt, bewegt sich auf dem ganzen Bildschirm absolut nichts. Da wird nicht geschossen, eingefangen oder gejagt. Bei TIM spielt sich die Action nicht auf dem Bildschirm ab, sondern nur in den Köpfen derer, die sich an TIM heranwagen. Man braucht mindestens einen 386er. Da man nur 87 Rätsel angeboten hat, hat man einen „Freiform-Level" mitgeliefert, in dem man eigene Maschinen basteln kann. Mit der bereits angekündigten Data-Disk werden weitere Bastelarbeiten und Musikstücke geboten.



Damit wird The Incredible Machine wohl nie einen Spitzenplatz in der Verkaufshitliste einnehmen, denn es spricht nur einen bestimmten Kreis von Menschen an – und jene, die sich lieber der größeren Action zuwenden, haben selber schuld, wenn sie TIM nicht kennenlernen. Wer sich einen schnellen Rechner leisten kann, sollte sich TIM nicht verschließen und schon einmal anfangen zu sparen, denn mit 139 DM hat man einen recht hohen Preis gefunden.

The Incredible Machine, Sierra-on-Line / Jeff Tunnell 1993, Muster von: Bomico, Südpark 12, 6092 Kelsterbach, Denk & Tüftelspiel, Hardware: 386+, 640 KB RAM, VGA, HD, Maus, Soundkarte
H. Seitz

Geistreiche Eröffnung für Schwarz

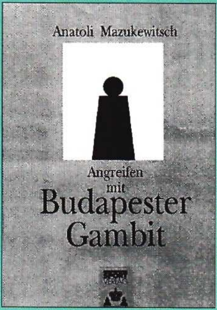
Das Budapester Gambit ist vor allem für kombinations- und risikofreudige Schachspieler ein echter Geheimtip. Wie sich die ideenreiche Eröffnung für Schwarz in der Praxis erfolgreich anwenden läßt, zeigt der Autor anhand von 60 aktuellen Meisterpartien.

Sachbücher über Gambitspiele stehen derzeit hoch im Kurs. Und das aus gutem Grund: „Gambitideen sind fruchtbare Voraussetzungen zur Erschließung neuer Möglichkeiten", schrieb einst Weltmeister Emanuel Lasker, „die Waffe des Gambits ist jederzeit stark genug, um sie auch gegen theoretisch bestens beschlagene Gegner in den Kampf zu führen!"

Angreifen mit Budapester Gambit ist der dritte Band in der Gambit-Reihe des Sportverlags, der bei den Schachfans große Resonanz findet. Diese geistreiche Eröffnung mit Schwarz, die von dem ungarischen Meister-Trio Abonyi, Barász und Breyer erstmals im Jahre 1917 präsentiert wurde, wird seitdem vor allem von kombinations- und risikofreudigen Schachspielern erfolgreich angewendet. Sogar Super-Großmeister wie Englands große WM-Hoffnung Nigel Short oder der Russe Wladimir Epischin haben das Budapester Gambit in ihrem Standard-Repertoire.

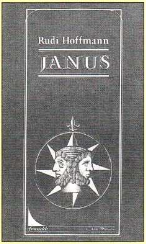
Wie auch bei den Titeln Angreifen mit Evans-Gambit und Angreifen mit Wolga-Gambit (beide 1991 erschienen), ist der theoretische Teil über diese mit zahlreichen Fallen gespickte ideenreiche Eröffnung durch 50 aktuelle Meisterpartien ergänzt. Ein Muß für jeden Gambit-Fan!

Anatoli Mazukewitsch:
Angreifen mit Budapester Gambit
Ca. 160 Seiten, ca. 120 Diagramme, 11,8 x 18,8 cm, gebunden
DM 24,80
ISBN 3-328-00587-0
Sportverlag 1993



Oldies: – Janus

Brettspiele für Denker? Neben allen Neuheiten darf man **Janus** nicht vergessen. Es stammt aus dem Ideenschatz von Rudi Hoffmann. Bevor er 1989 mit dem taktischen Legespiel **Cafe International** das Spiel des Jahres schuf, landete er 1988 bei Franckh/Kosmos mit Janus ein Topspiel. Aber auch 1988 war **Janus** nicht neu, denn **Janus** erschien früher bei Apex-Spear. Von der Spear-Ausgabe unterscheidet sich die Franckh-Ausgabe vor allem durch das schönere Spielmaterial und dem damit verbundenem höherem Preis.



Janus ist etwas für Tüftler und Denker – für den schnellen Spielespaß ist es nicht geeignet. Vor Spielbeginn werden 100 Richtungsplättchen auf dem rollbaren Skaiplan ausgelegt. Jedes Plättchen gibt an wieviele Schritte man in welche Richtung zu gehen hat. Im Spiel wird jedes „besetzte" Plättchen vom Feld genommen, nur die Janus-Kopf-Plättchen verbleiben im Besitz des entsprechenden Spielers. Jeder Kopf kommt in vier Farben zweimal vor. Sooft die eigene Spielfigur im Spiel ein Plättchen in der Farbe eines bereits gesammelten Januskopfes betritt, muß sofort nocheinmal gezogen werden. Janusköpfe zu erobern ist eine wichtige Aufgabe in diesem Spiel, aber die alles entscheidende ist es nicht. Es gilt abzuwägen, ob und welche Köpfe man erobern möchte. Zuviele dieser Bonuszüge zwingen einen sonst im Spielverlauf in Spielplanregionen, die man nicht wünscht.

Die 100 Spielplanfelder sind zu Vierer-Quadraten zusammengefaßt. Wer das letzte Plättchen eines Quadrates entfernen kann, gewinnt dieses Quadrat und besetzt es mit einem seiner eigenen Holzchips. Der Gewinn ist mit jeweils ein bis fünf Punkten verbunden. Zentrale Felder sind neben dem Mittelfeld die vier Eckfelder. Zieht im Spielverlauf ein Mitspieler auf ein besetztes Quadrat, muß er dem Besitzer einen seiner Chips abgeben. So kann man die Zahl seiner 15 Holzchips sehr rasch verringern.

Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler seine 15 Chips losgeworden ist. Spielsieger ist, wer in der Addition der belegten Quadratpunkte und der erhaltenen Chips die meisten Punkte errechnet. Da die Spielfelder nicht gleichwertig sind, ist vorausschauende Planung sehr wertvoll. Vorteile hat, wer unterschiedliche Janusköpfe ergattern kann – aber nicht zu viele. Janus ist ein faszinierendes Spiel. Uns ist es seit seinem Erscheinen 1988 bei Franckh nicht langweilig geworden, denn mit jeder Partie wird durch die Neuverteilung der kleinen Kärtchen ein neuer Spielplan gelegt. Janus ist ein Muß für alle, die raffinierte Taktikspiele mögen, die sich an einer hervorragenden Ausstattung erfreuen, die mehr als 30 Minuten Spaß am Spiel haben. Janus ist wegen seiner mathematischen Überlegungen auch in der Schule einzusetzen.

Janus, 1988 Franckh, von Rudi Hoffmann, (1975 Spear), taktisches Legespiel für 2-4 Personen ab 10, Spieldauer ca. 20 Minuten (2 Personen), erhältlich als Restposten im Spielwarenfachhandel oder auf Floh- und Sammlermärkten *–se*

Lösungen

Lösungen **Der Irrgarten von Kleinwelka**

1. Alfons: 19 –3– 18 –28– 23 –3– 29 –6– 34 –8– 32 –10– 22 –20– 20 –9– 17 –9– 12 –10– 11 –14– 10

| 4

Weglänge: 224 · a = 448 m   16 –23– 13 –31– 4 –17– 9 –9– 8 –7– 2 –4– 5 –6– 7 –3– 6

2. Bettina: 19 –3– 18 –10– 26 –11– 33 –10– 30 –19– 25 –1– 24 –5– 23 –3– 29 –15– 35 –50– 31 –45– 27 –30– 20

| 9

16 –23– 13 –17– 4 –17– 9 –43– 3 –9– 2 –4– 5 –5– 1 –8– 6 –4– 10 –9– 14 –1– 15 –1– 17

Weglänge: 352 · a = 704 m

26 –2– 25

10 1

3. Christof: 19 –3– 18 –13– 24 –5– 23 –3– 29 –6– 34 –8– 32 –10– 22 –20– 20

| 9

16 –23– 13 –17– 4 –17– 9 –9– 8 –7– 2 –4– 5 –6– 7 –3– 6 –4– 10 –9– 14 –1– 15 –1– 17

Weglänge: 178 · a = 356 m

4. Daniella: 19 –3– 18 –10– 26 –11– 33 –10– 30 –19– 25 –1– 24 –5– 23 –3– 29 –15– 35 –50– 31 –45– 27

| 1

5 –6– 7 –15– 1 –8– 6 –4– 10 –14– 11 –19– 14 –1– 15 –16– 12 –9– 17 –9– 20 –20– 22 –1– 21 –12– 28

4 |

2 –7– 8 –26– 3 –43– 9 –17– 4 –31– 13 –23– 16   Weglänge: 458 · a = 916 m

10

5. Erich: 33 30   Weglänge: 25 · 16 · a = 800 m

6

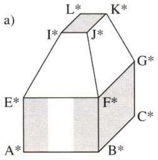
Bemerkungen: Nicht in jedem Labyrinth gelangt man beim Laufen nach der „Rechte-Hand-Regel" vom Eingang oder von einem Eingang zum Ziel. Doch stets findet man beim Laufen nach dieser Regel von einem Eingang wieder zu einem Ausgang (Eingang), man kann sich also so nicht hoffnungslos im Labyrinth verirren. Beim Kleinwelkaer Irrgarten läuft man nach dieser Regel zunächst wie Alfons vom Eingang zum Ziel und dann weiter in umgekehrter Richtung den Weg von Bettina ab.

Im Kleinwelkaer Labyrinth enthalten alle Wege vom Eingang zum Ziel die Kanten 19 – 18, 23 – 29, 20 – 17, 10 – 6, 5 – 2, 9 – 4 und 13 – 16. Durch Löschen einer dieser Kanten entsteht jeweils aus dem zusammenhängenden Multigraphen des Welkaer Labyrinthes ein nicht zusammenhängender Teilmultigraph. Kanten mit dieser Eigenschaft nennt man Brücken.

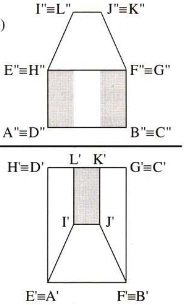
Als Kreise eines Graphen oder Multigraphen bezeichnet man die Teilgraphen, die nur Knoten mit genau zwei einmündenden Kanten (Knoten der Ordnung 2) besitzen. Erich läuft also 25 mal den gleichen Kreis im Welkaer Labyrinth ab. Die Brücken eines Graphen oder Multigraphen gehören nie einem Kreis an. Jeder Multigraph enthält mindestens einen Kreis. In einem Graphen, der keine Kreise enthält, sind alle Kanten Brücken. Ein derartiger Graph wird Baum genannt.

Bau-Fachmesse Leipzig `92

a)



b)



Bemerkung: Diese Hülle ist ein konvexes Polyeder, dessen 12 Ecken mit je einer der 22 Ecken des nichtkonvexen Ausgangspolyeders zusammenfallen.

Schwaches Wirtschaftswachstum

x – Bruttoinlandsprodukt 1991 der alten Bundesländer

y – Bruttoinlandsprodukt 1991 der neuen Bundesländer

Aus $x \cdot 1{,}015 + y \cdot 1{,}061 = (x + y) \cdot 1{,}019$ folgt

$x \cdot 0{,}004 = y \cdot 0{,}042$ und $x:y = 42:4 = 10{,}5 \approx 10$.

Diese graphische Darstellung war mit der folgenden Unterschrift am 14.1.93 in „Döbelns Anzeiger“ abgedruckt.

Schwaches Wachstum: Die gesamtdeutsche Wirtschaft ist 1992 nur noch schwach gewachsen. Gemessen am Bruttoinlandsprodukt (BIP) nahm die Wirtschaftsleistung lediglich um 1,9 Prozent zu. Es ist das erste Mal, daß das Statistische Bundesamt gesamtdeutsche Zahlen vorlegt. Es gibt keine Vergleichswerte. Das BIP erfaßt die Produktion aller Waren sowie Dienstleistungen im Inland.

Mathematisch-Naturwissenschaftliches Mosaik von Dr. R. Mildner

Waagerecht:

1. 756,
3. 75,
4. IMU,
6. 87,
8. 585,
11. 30,
12. 31 (2^5-1),
15. 94,
17. 07,
18. 18,
19. tan (Tangens),
21. Lie,
23. 53,
25. 17,
26. Konstante
29. 22,
31. 10,
32. hm (Hektometer),
33. Mg (Magnesium),
34. ha (Hektar),
35. IG,
37. 15,
39. ROM,
41. rem (roentgen-equivalent-man),
43. Reh,
45. TRI (Trichloräthen),
47. Wellengleichung,
50. no,
51. Pt (Platin),
52. Tl (Thallium),
53. NN (Normalnull),
55. OH,
56. mm (Millimeter),
57. IR,
58. Es (Einsteinium),
59. rd (radiation absorbed dose),
60. Rh (Rhodium),
61. Co (Kobalt),
62. Na (Natrium),
64. Sm (Samarium),
66. Rn (Radon),
68. Wurzelkriterium,
74. spe,
75. Weg,
76. Erz,
77. Ast,
79. πr^2,
81. hl (Hektoliter),
83. Pb (Blei),
85. Er (Erbium),
87. As (Arsen),
88. H_2O,
89. ma,
91. Eberesche,
94. SO_2,
96. tv,
98. SnO,
99. TKO,
100. CO_3,
102. IR,
104. mg,
107. NO_2,
108. NH_3,
109. tI^2R,
110. hA,
111. div (Divergenz),
112. PbO,
113. NH_4Cl.

Senkrecht:

1. 739,
2. 50.
3. 71,
5. MV (Megavolt),
7. 79,
9. 80,
10. 576,
12. 38,
13. Tangentialebene,
14. Einheitsstrecke,
16. 45,
18. 17,
19. Tom (Tomus),
20. ns (Nanosekunde),
21. La (Lanthan),
22. Eta,
24. 32,
25. 10,
26. km (Kilometer),
27. Te (Technetium),
28. Ei,
30. 21,
31. 11,
32. holomorph,
36. Grundriss,
38. 50,
39. Ren,
40. ml (Milliliter),
41. rep (roentgen-equivalent-physical),
42. mg (Milligramm),
43. Re (Rhenium),
44. HCl,
45. Th (Thorium),
46. Inn,
48. Li (Lithium),
49. log (Logarithmus),
54. Uhr,
61. CuS,
62. new,
63. Zr (Zirkonium),
65. MEZ,
67. Nut,
69. z. E.,
70. kg (Kilogramm),
71. i. e. (id est),
72. Ra (Radium),
73. 2π,
78. CO,
80. r^2m,
82. LE,
83. PbS,
84. Fe (Eisen),
86. Rho,
87. AE (Astronomische Einheit),
88. H_2O_2,
90. at,
92. RO,
93. St (Stokes),
94. SO_3,
95. Ult,
97. vm,
100. CO_2,
101. C_2H_3Cl,
103. RI^2,
105. gh,
106. Pi,
107. NO,
108. NH_4.

Lösungsworte:
Leonhard Euler: 15.4.1707 bis 18.9.1783