

**Unsere  
Mathematikaufgabe**

**50 Aufgaben aus  
"Wissenschaft und Fortschritt"  
Sonderheft 1963**

Abschrift und LaTeX-Satz der Aufgaben und Lösungen: Steffen Polster 2018  
<https://mathematikalpha.de>

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons "Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland" Lizenz.



# 1 Aufgaben

1963 wurde ein Sonderheft der "Wissenschaft und Fortschritt" veröffentlicht, in das 50 ausgewählte Aufgaben der Jahrgänge 1961 bis 1963 aufgenommen wurden.

## Aufgabe S 1

Als "magisches Quadrat" bezeichnet man eine quadratische Anordnung von Zahlen, bei der die Summe aller in einer Zeile bzw. Spalte (oft auch Diagonalen) stehenden Zahlen konstant ist.

Manche magischen Quadrate sind zentralsymmetrisch, d.h., die Summe je zweier zum Mittelpunkt des Quadrats symmetrisch gelegener Zahlen ist konstant.

Man beweise, dass in diesem Fall zwei Zeilen bzw. Spalten, die zu einer Mittellinie des Quadrats symmetrisch liegen, die gleiche Quadratsumme ergeben. Beispiel:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

## Aufgabe S 2

Ein Quadrat ist in  $3 \cdot 3 = 9$  quadratische Felder geteilt. In diese 9 Felder sind 9 verschiedene Zahlen aus der Folge  $1, 2, 3, \dots, 30$  so einzutragen, dass das Produkt aus den drei Zahlen einer jeden Zeile und einer jeden Spalte stets gleich 270 ist.

## Aufgabe S 3

Auf einer Feier stößt jeder Anwesende mit jedem anderen an; die Gläser erklingen 120 mal. Als es zum Tanzen geht, sagt jemand: "Wenn jeder Herr mit jeder Dame tanzt, so können wir insgesamt 60 verschiedene Paare bilden."

Wie viele Damen und wie viele Herren waren anwesend? Die Herren war in der Überzahl.

## Aufgabe S 4

Der kleine Zeiger der Uhr wird während eines Umlaufs mehrmals von großen Zeiger überholt.

1. Es sind die Winkel zu berechnen, die beide Zeiger beim Übereinander mit der Zeigerstellung um  $0^h$  bilden.
2. Es ist die Gleichung anzugeben, aus der man die Zeit (in min) errechnen kann, die der große Zeiger von einer beliebigen Stunde bis zum Erreichen des kleinen Zeigers benötigt.

## Aufgabe S 5

Drei Damen, alle unter 50 Jahre alt, treffen sich zur Geburtstagsfeier der jüngsten.

"Ich habe ein seltsames Alter erreicht", sagt das Geburtstagskind, "ich bin  $5\frac{1}{2}$  mal so alt wie meine Tochter und 11 mal so alt wie mein Sohn. Wenn mein Sohn so alt sein wird, wie meine Tochter jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie er und 4 mal so alt wie meine Tochter."

"Merkwürdig", erwiderte die zweite, "mit mir und meinen zwei Kindern steht es ebenso!"

"Das ist doch aber ein Zufall!" sagte die dritte nach einigem Nachdenken, "die gleiche Rechnung stimmt bei mir und meinen zwei Kindern! Und dabei sind wir drei Frauen doch verschieden alt!"

Wie alt sind die Mütter und ihre Kinder?

### Aufgabe S 6

Jörg kann "zaubern". Gestern kam Jörg mit einer Sensation in die Schule; er könne mathematisch zaubern! Wir waren natürlich alle sehr gespannt, wie er das wohl fertigbringen wolle, und gleich in der ersten Pause musste er mit der Zauberei beginnen.

Nachdem er mit dem Gesicht zur Wand gestellt worden war, damit er ja nicht sähe, was ich schrieb, forderte er mich auf, eine dreistellige Zahl zu wählen, deren Ziffer in der Hunderterstelle um 2 höher sein müsse als die Einerstelle; die Zehnerstelle könne eine beliebige Zahl sein.

Ich schrieb 5 1 3 und sollte nun die Zahl "umgedreht" daruntersetzen 3 1 5 und von der ersten abziehen, der Differenz 1 9 8 (die Jörg nicht kannte!) 1 2 hinzuzählen und die Summe  $210 : 70$  teilen; der Quotient 3 musste mit 12 multipliziert werden, was 36 ergab.

Jetzt glänzte Jörg noch mit dem neuesten Wissen, das wir seit der letzten Mathematikstunde hatten, und verlangte, aus dem Produkt die Quadratwurzel zu ziehen:  $\sqrt{36} = 6$ .

Damit war das Kunststück zu Ende. und er verkündete, dass wir 6 erhalten hätten.

Unser Erstaunen war groß! Er wurde bestürzt zu sagen, wie er das mache, und er möchte vor allem noch einmal seine Kunst unter Beweis stellen, was er auch gern tat.

Mir ließ die Sache den ganzen Tag keine Ruhe, und am Nachmittag setzte ich mich hin und grübelte so lange, bis ich die mathematische Gesetzmäßigkeit entdeckt und algebraisch bewiesen hatte, die Jörg dieses "Rechenkunststück" ermöglichte.

Wie muss man das wohl anstellen? Unsere Aufgabe lautet also:

Man schreibe eine beliebige dreistellige Zahl, deren Hunderterstelle um zwei größer ist als die Einerstelle. Von ihr subtrahiere man die Zahl, die man erhält, wenn man in der ursprünglichen Zahl die Reihenfolge der Ziffern umkehrt. Zum Ergebnis addiere man 12; der Reihe nach sind dann mit den jeweiligen Ergebnissen folgende weitere Rechenoperationen auszuführen: Division durch 70; Multiplikation mit 12 und man ziehe die Wurzel! Das Ergebnis ist 6.

1. Wie ist es möglich, dass bei einer beliebigen Zahl als Ausgangsgröße das Ergebnis der Rechenoperationen vorausgesagt werden kann?
2. Ist eine allgemeine Lösung möglich, bei der die Hunderterstelle um  $n$  größer ist als die Einerstelle? ( $n = 1, 2, \dots, 9$ )

### Aufgabe S 7

Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen während der Zeit von  $8^h$  bis  $16^h$  die Wagenzüge in beiden Richtungen in 10-min-Folge verkehren. Die ersten Züge dieser Betriebszeit verlassen  $8^h$  die beiden Endhaltestellen. Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit (einschließlich der Haltezeiten) beträgt  $18 \frac{km}{h}$ . Das Fahrpersonal soll an den Endhaltestellen eine Pause von mindestens 10 und höchstens 20 min haben.

1. Wann verlässt der erste von Endhaltestelle A abfahrende Wagenzug diese Endhaltestelle zum zweitenmal?
2. Wieviel Wagenzüge müssen auf dieser Strecke in der Betriebszeit von  $8^h$  bis  $16^h$  eingesetzt werden? Dabei sollen Züge, die aus dem Berufsverkehr vor  $8^h$  noch auf der Strecke sind und aussetzen, sowie Züge, die für den  $16^h$  beginnenden Berufsverkehr bereits vorher zusätzlich auf die Strecke gehen, nicht mitgerechnet werden.
3. In welchen Zeitabständen begegnen sich die Wagenzüge?

### Aufgabe S 8

Auf einer Eisenbahnstrecke begegnen sich ein D-Zug und ein Schnelltriebwagen. Der D-Zug hat eine Länge von  $l_d = 260$  m und eine Geschwindigkeit von  $v_d = 90 \frac{km}{h}$ , der Schnelltriebwagen ist  $l_s = 30$  m

lang und hat eine Geschwindigkeit von  $v_s = 144 \frac{km}{h}$ .

Wie lange dauert für einen Reisenden im D-Zug die Vorbeifahrt des Triebwagens und für einen Reisenden im Triebwagen die Vorbeifahrt des D-Zuges?

### Aufgabe S 9

Eine Gesellschaft von 12 Personen wollte nach einem 20 km entfernten Ort gelangen. Ihr stand jedoch nur eine Taxe zur Verfügung, die außer dem Fahrer drei Personen befördern kann. Man arbeitete einen "Transportplan" aus, der garantierte, dass bei gleichzeitigem Aufbruch aller Personen auch alle gleichzeitig am Ziel anlangten. Dabei wurde eine Durchschnittsgeschwindigkeit der Taxe von  $65 \frac{km}{h}$  und der Fußgänger von  $5 \frac{km}{h}$  vorausgesetzt.

Wie sah der Transportplan aus?

### Aufgabe S 10

Das Passagierflugzeug IL 14 P der Deutschen Lufthansa wiegt einschließlich voller Nutzlast etwa 18000 kp. Es benötigt beim Start vom Beginn des Rollens bis zum Abheben vom Boden ungefähr 30 s und hat im Augenblick des Abhebens eine Geschwindigkeit von rund  $160 \frac{km}{h}$ .

Bei den folgenden Berechnungen werde von der Reibung und vom Luftwiderstand abgesehen und die Bewegung des Flugzeugs als gleichförmig beschleunigt betrachtet.

1. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit beim Rollen?
2. Wie groß ist die Rollstrecke?
3. Wie groß ist die Beschleunigung des Flugzeugs?
4. Welche Kraft ist notwendig, um diese Beschleunigung hervorzurufen?
5. Welche Arbeit wird von den beiden Motoren während des Rollens für die Beschleunigung vollbracht?
6. Welche Leistung (in PS) muss jeder der beiden Motoren dazu abgeben?

### Aufgabe S 11

Es sind alle vierziffrigen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:

1. Die Summe aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich dem Quadrat aus der ersten Stelle.
2. Die Differenz aus der zweiten und der dritten Stelle ist gleich der ersten Stelle.
3. Die Summe aus der dritten und der vierten Stelle ist gleich der zweiten Stelle.

Wie kann man diese Zahlen allgemein darstellen?

### Aufgabe S 12

Ein Schüler kürzt den Bruch  $\frac{16}{64}$  fälschlicherweise, indem er in Zähler und Nenner jeweils die Ziffer 6 streicht. Er erhält damit das richtige Ergebnis  $\frac{1}{4}$ .

Es ist festzustellen, für welche Brüche mit zweiziffrigem Zähler und zweiziffrigem Nenner dieses fehlerhafte Verfahren ebenfalls zum richtigen Ergebnis führt.

### Aufgabe S 13

Elli und Gerda erhalten das gleiche Monatsgehalt. "Als ich noch mein Anfängergehalt bekam, wurden mir einmal 13 Geldscheine ausgezahlt, und zwar doppelt soviel 50-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch einige 10-DM-Scheine; heute kann ich dasselbe sagen", erklärt Elli.

Da erwidert Gerda: "Ich bekam 5 mal soviel 20-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch 5-DM-Scheine, im ganzen doppelt so viele wie du. Wenn ich erst über 400 DM verdienen werde, spare ich

doppelt soviel wie jetzt.”

Wieviel Gehalt wurde jeder gezahlt, und wieviel Scheine jeder Sorte erhielten sie?

**Aufgabe S 14**

Eine Türöffnung von 90 cm Breite soll mit Brettern zugenagelt werden. Zur Verfügung stehen Bretter passender Länge von 8 cm, 10 cm und 12 cm Breite.

Welche Möglichkeiten gibt es, wenn kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll?

**Aufgabe S 15**

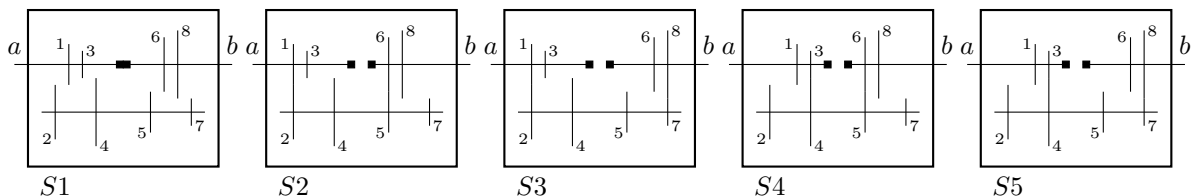
Fünf Hausfrauen wollen Schrippen kaufen. Als der Bäcker die vorrätigen gezählt hatte, erlaubt er sich einen Scherz: ”Wenn jede von Ihnen die Hälfte der jeweils vorhandenen Schrippen und eine halbe dazu kauft, bleibt keine übrig!” Wieviel Schrippen hatte der Bäcker, und wieviel hätten nach diesem Vorschlag die einzelnen Kundinnen erhalten?

**Aufgabe S 16**

In einem Konstruktionsbüro sollen die Konstruktionsunterlagen für die Spezialanfertigung einer Laboratoriumszentrifuge ausgearbeitet werden. Zwischen Antriebsmotor und Zentrifuge wird ein Stufengetriebe eingebaut, das folgenden Anforderungen genügen soll:

1. Die erste Stufe ist Direktkupplung der Zentrifuge an den Motor, der eine Drehzahl  $a_1 = 6400 \text{ min}^{-1}$  hat.
2. Das Getriebe soll insgesamt fünf verschiedene Drehzahlen ermöglichen.
3. Die Drehzahl  $a_2$  soll 75% der Drehzahl  $a_1$  betragen, ebenso die Drehzahl  $a_3$  75% von  $a_2$  und so fort.

Das Getriebe erhält den in der Abbildung schematisch dargestellten Aufbau. (a Antrieb, b Abtrieb, S Schaltstellung)



- a) Es ist die Folge  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  der Drehzahlen aufzustellen.
- b) Welche Übersetzungen müssen die Räderpaare (3, 4), (5, 6), (7, 8) erhalten, wenn das Räderpaar (1, 2) im Verhältnis 1 : 1 übersetzt?
- c) Wie groß müssen die Radien der Räder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 gewählt werden? Der Abstand der Vorlegewelle von der Antriebs- beziehungsweise Abtriebswelle beträgt 175 mm (von Wellenmitte zu Wellenmitte gemessen).

**Aufgabe S 17**

Die Zahlenfolgen  $(s_n) = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$  und  $(t_n) = \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$  haben die Bildungsgesetze  $s_n = \frac{1}{n}$  und  $t_n = \frac{n-1}{n}$ .

Welches Bildungsgesetz hat die aus beiden zusammengesetzte Folge

$$(u_n) = \frac{1}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; \dots$$

Anmerkung: Oft wird angegeben: Es ist  $u_{2n} = t_n$  und  $u_{2n-1} = s_n$ . Das ist nicht die gewünschte Lösung. Gesucht wird vielmehr ein einheitliches Bildungsgesetz  $u_n$ , das für  $n = 1; 2; 3; \dots$  die Glieder der zusammengesetzten Folge ergibt.

**Aufgabe S 18**

Wie lautet das Bildungsgesetz (das allgemeine Glied) der Zahlenfolge

$$(v_n) = 0, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 11, 11, \dots$$

**Aufgabe S 19**

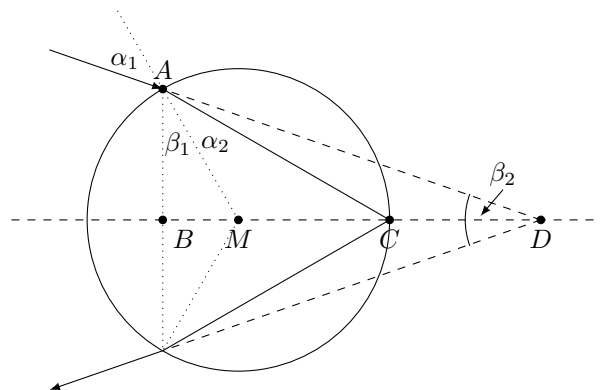
Zu untersuchen sind Kreiskegelstümpfe mit gleicher Höhe und flächengleichen Achsschnitten. Wie groß muss der Deckkreisradius sein, damit das Volumen möglichst groß wird?

Lösung a mit Hilfe, b ohne Verwendung der Differentialrechnung.

**Aufgabe S 20**

Welchen Neigungswinkel  $\alpha$  muss eine schiefe Ebene mit der Basis  $c$  haben, wenn eine Kugel auf ihr in kürzester Zeit herabrollen soll? Die Reibung und das Drehmoment werden vernachlässigt.

**Aufgabe S 21**

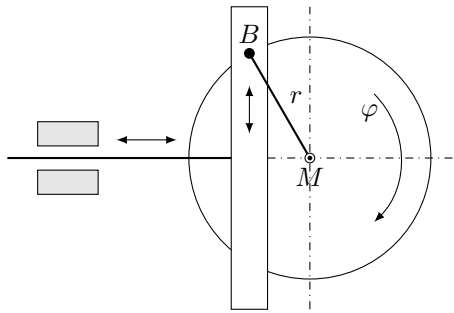


Ein Lichtstrahl werde in einem kugelförmigen Flüssigkeitstropfen einmal partiell reflektiert. Der Brechungsindex Luft-Flüssigkeit sei  $n_{LF}$ .

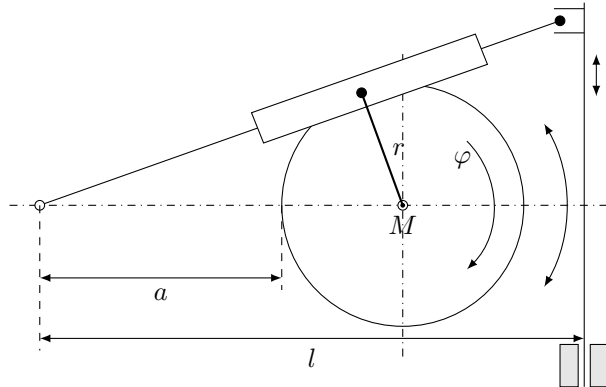
1. Welchen Winkel können einfallender und ausfallender Strahl maximal miteinander bilden (vgl. Abbildung)?
2. Welche Werte ergeben sich, wenn die Flüssigkeit Wasser ist? Für den Brechungsindex Luft-Wasser gilt  $n_{LF} = \frac{4}{3}$ .
3. Welche Folgerung lässt das Ergebnis auf den Regenbogen zu?

**Aufgabe S 22**

Zur Umsetzung von Drehbewegungen in geradlinige Bewegungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Bei Werkzeugmaschinen werden häufig die Kreuzschleife (Konstruktionsprinzip siehe erste Abbildung) und die schwingende Kurbelschleife (Konstruktionsprinzip siehe zweite Abbildung) angewendet.



Der Radius  $r$  der Drehbewegung ist der Abstand vom Drehpunkt  $M$  zum Mittelpunkt des Bolzens  $B$



- Es ist die Auslenkung  $s$  des schwingenden Maschinenteils (Werkzeug oder Werkstück) in Abhängigkeit vom Drehwinkel  $\varphi$  anzugeben und die Funktion  $s = f(\varphi)$  in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit  $r = 1$ ,  $a = 0,5$  und  $l = 3$  darzustellen. Welcher wesentliche Unterschied besteht hinsichtlich der Bewegung des schwingenden Maschinenteils zwischen den beiden Antriebsarten?
- Für die Kreuzschleife sind die Geschwindigkeit  $v = v(t)$  und die Beschleunigung  $b = b(t)$  des schwingenden Maschinenteils zu ermitteln; die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sei konstant:  $\omega = \frac{\varphi}{t} = \text{konstant}$ .
- Wie groß ist der absolute Extremwert der Beschleunigung bei der Kreuzschleife? Welchen Durchmesser  $d$  muss der Bolzen  $B$  mindestens haben, wenn  $\tau$  die Scherfestigkeit des Bolzenwerkstoffs und  $m$  die Masse des schwingenden Maschinenteils ist?  
Es gilt  $\tau = \frac{P}{F}$ , wobei  $F$  der Querschnitt des Materials und  $P$  die zum Abscheren (gegenseitiges Verschieben zweier "benachbarter" Querschnitte) erforderliche Kraft ist. Die Reibung werde vernachlässigt.
- Für die schwingende Kurbelschleife ist aus der graphischen Darstellung der Weg-Zeit-Funktion der annähernde Verlauf der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion und der Beschleunigung-Zeit-Funktion abzulesen und graphisch darzustellen. Auch dabei gelte  $\omega = \frac{\varphi}{t} = \text{konstant}$ .
- Für welche Arten von Maschinen kommen diese beiden Antriebsarten auf Grund ihrer Eigenschaften vorwiegend in Frage?

### Aufgabe S 23

Der Durchmesser  $d$  eines Kreises wird von einer Sehne unter einem Winkel von  $30^\circ$  so geschnitten, dass er im Verhältnis  $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$  geteilt wird.

- Wie lang ist die Sehne?
- Welchen Abstand hat die Sehne vom Mittelpunkt des Kreises?

**Aufgabe S 24**

- a) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser  $D = 2R$  sollen sechs kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und vier der kleineren Kugeln berührt. Wie groß muss der Durchmesser  $d = 2r$  der kleineren Kugeln gewählt werden?
- b) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser  $D = 2R$  sollen acht kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und drei der kleineren Kugeln berührt. Es ist der Durchmesser  $d = 2r$  der kleineren Kugeln zu bestimmen.
- c) Der Hohlkugel sind vier einander gleiche Kugeln so einzulagern, dass jede Kugel jede andere Kugel berührt. Wie groß ist ihr Durchmesser  $d = 2r$ ?

**Aufgabe S 25**

- a) Ein Zahnrad  $K_2$  mit dem Teilkreisdurchmesser  $d = 2r$  rollt auf einem feststehenden Zahnrad  $K_1$  mit dem gleichen Teilkreisdurchmesser ab. Wie oft dreht sich  $K_2$  bei einem vollen Umlauf um  $K_1$  um seine Achse?
- b) Ein Zahnrad  $K_2$  mit dem Teilkreisdurchmesser  $d_2 = 2r_2$  rollt auf einem feststehenden Zahnrad  $K_1$  mit einem Teilkreisdurchmesser  $d_1 = 2r_1 = 3d_2$  ab. Wie oft dreht sich  $K_2$  bei einem vollen Umlauf um  $K_1$  um seine Achse?
- c) Ein Zahnrad  $K_2$  mit dem Teilkreisdurchmesser  $d_2 = 2r_2$  rollt auf einem feststehenden Zahnrad  $K_1$  mit dem Teilkreisdurchmesser  $d_1 = 2r_1 = \frac{1}{3}d_2$  ab. Wie oft muss es umlaufen, bis es sich genau einmal um seine eigene Achse gedreht hat?

**Aufgabe S 26**

Für das Kraftwerk Klingenberg in Berlin-Rummelsburg wurden zwei neue Schornsteine gebaut. Jeder von ihnen besteht aus einem Betonmantel, der die Form eines hohlen Kreiskegelstumpfs mit den folgenden Maßen hat:

Unterer lichter Durchmesser  $d_u = 10,00$  m, oberer lichter Durchmesser  $d_o = 7,50$  m, unterer äußerer Durchmesser  $D_u = 11,20$  m, oberer äußerer Durchmesser  $D_o = 7,80$  m, Höhe  $H = 140,00$  m.

Dieser Mantel erhielt eine Auskleidung von Glaswolle, Kieselgur und Klinkersteinen.

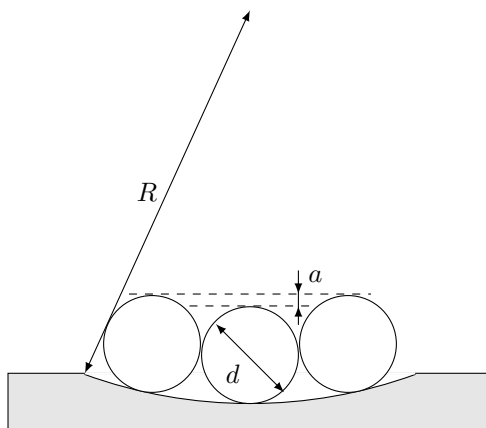
- a) Wieviel Kubikmeter Beton wurden für jeden der beiden Schornsteinmäntel benötigt?
- b) Wie groß ist das Gewicht  $G$  jedes der beiden Schornsteinmäntel? Die Wichte  $\gamma$  des verwendeten Betons werde mit  $\gamma = 2,4 \frac{Mp}{m^3}$  angenommen.
- c) Welchen Druck übt der Schornsteinmantel auf das Fundament aus?

**Aufgabe S 27**

Auf ihrem Flug um den Mond näherte sich die sowjetische Raumstation Lunik 3 dem Erdtrabanten bis auf etwa 7000 km. Für die folgenden Berechnungen werde der Mondradius  $r$  mit  $r \approx 1750$  km angenommen, der Flächeninhalt  $F$  einer Kugelkappe mit dem Kugelradius  $r$  und der Kappenhöhe  $h$  ist  $F = 2\pi rh$ , wobei  $\pi \approx \frac{22}{7}$  gesetzt werde.

- a) Wie groß ist das Gebiet des Mondes, das aus dieser Entfernung übersehen werden könnte?
- b) Wieviel Prozent der Mondoberfläche sind dies?
- c) Unter welchem Schwinkel  $\varphi$  wäre der Mond aus dieser Entfernung zu beobachten?
- d) Wie breit muss ein Gegenstand sein, der aus 100 m Entfernung unter demselben Schwinkel gesehen werden soll?



**Aufgabe S 28**

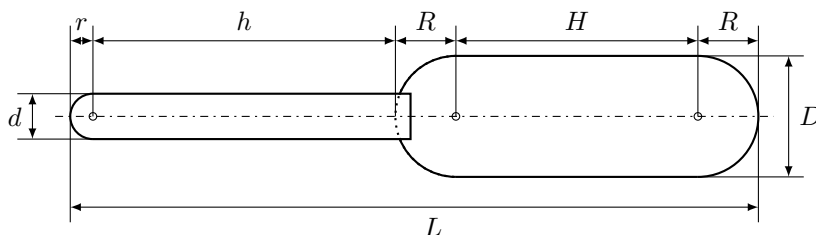
Der geometrische Mittelpunkt der kreiszylinderförmigen Ausfräsung (Abbildung) sei nicht bekannt. Zur Ermittlung des Durchmessers  $D = 2R$  werden in die Ausfräsung genau geschliffene Bolzen mit dem Durchmesser  $d = 2r = 30$  mm gelegt und  $a$  zu  $a = 12$  mm bestimmt. Welchen Durchmesser  $D$  hat die Ausfräsung?

**Aufgabe S 29**

Ein Lehrling soll in einer Kugellagerfabrik 1000 Kugeln mit einem Durchmesser von 1 cm abzählen. Um diese Arbeit zu beschleunigen, nimmt er ein Gefäß mit den Innenmaßen 10 cm x 10 cm x 10 cm; er legt die erste Schicht sauber ein und füllt dann weiter auf.

Zum Schluss stellt er fest, dass entgegen seinen Erwartungen der Innenraum des Gefäßes nicht völlig gefüllt wird. Er zählt deshalb die Kugeln ab. Überraschenderweise sind es mehr als tausend.

Wie viele waren es, und wieviel Zentimeter fehlten von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes?

**Aufgabe S 30**

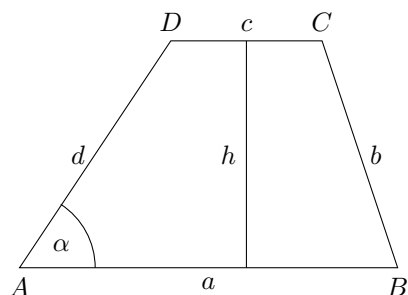
Es sind die Maße eines Aräometers zu bestimmen, an das folgende Forderungen gestellt werden:

1. Messbereich von  $\rho_1 = 1,00 \frac{g}{cm^3}$  bis  $\rho_2 = 2,00 \frac{g}{cm^3}$ ;
2.  $d = 2r = 1$  cm;
3.  $D = 2R = 2$  cm;
4. Die Skalenteilung soll so eingerichtet werden, dass im Mittel 2 mm Skalenlänge einer Differenz von  $0,01 \frac{g}{cm^3}$  entsprechen.

Wie sind die Werte für  $h, H, L$  und für die Masse  $m$  des Aräometers zu wählen?

**Aufgabe S 31**

Gegeben sind  $a$  und  $b$  mit  $a > b$ . Es ist  $\frac{ab}{a-b}$  zu konstruieren.

**Aufgabe S 32**

Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten  $a$  und  $c$ , der Höhe  $h$  und dem Winkel  $\alpha$  (Abbildung).  
 Gesucht ist die Parallele zu  $a$  und  $c$ , die die Fläche des Trapezes halbiert.

Lösung 1. durch Berechnung, 2. durch Konstruktion.

**Aufgabe S 33**

Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Endpunkte je auf einer der gegebenen Geraden liegen.

**Aufgabe S 34**

Konstruiere ein Dreieck aus  $s_a = 6$  cm,  $h_b = 5$  cm,  $h_c = 7$  cm!

**Aufgabe S 35**

Gegeben sind zwei Punkte  $A$  und  $B$ . Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels (also ohne Verwendung eines Lineals) ein Quadrat, in dem  $A$  und  $B$  benachbarte Eckpunkte sind.

**Aufgabe S 36**

Das Dreieck  $ABC$  sei bei  $C$  rechtwinklig. Es sei  $CD = h_c$  die Höhe der Hypotenuse; ferner seien  $\rho$  der Radius des Inkreises im Dreieck  $ABC$ ,  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die Radien der Inkreise in den Teildreiecken  $ADC$  und  $BDC$ .

Man beweise, dass die Summe  $\sigma$  der Inkreisradien  $\rho, \rho_1$  und  $\rho_2$  gleich der Höhe  $h_c$  ist!

**Aufgabe S 37**

Es sei  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Beweisen Sie, dass dann auch gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Voraussetzung:  $a, b, c, d > 0$ .

**Aufgabe S 38**

Es sei  $K_l$  ein Halbkreis mit dem Radius  $r_1$ ,  $K_2$  ein Kreis mit dem Radius  $r_2 = 0,5r_1$ , der den Durchmesser und die Peripherie von  $K_l$  berührt, und  $K_3$  ein Kreis mit dem Radius  $r_3$ , der sowohl den Durchmesser und die Peripherie von  $K_l$  als auch die Peripherie von  $K_2$  berührt.

Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen für  $r_3$  gilt  $4r_3 = r_1$ !

**Aufgabe S 39**

Gegeben ist eine Gerade  $g$  und auf ihr zwei Punkte  $A$  und  $B$ .

Man beweise: Die Länge  $CT$  einer Tangente von einem auf  $g$  liegenden Punkt  $C$  an einen durch  $A$  und  $B$  gehenden Kreis ( $T$  ist der Berührungspunkt) ist nur von der Lage von  $C$ , nicht aber vom Radius  $r$  des Kreises abhängig.

**Aufgabe S 40**

Warum kann eine Quadratzahl oberhalb von 9 niemals aus lauter ungeraden Ziffern bestehen?

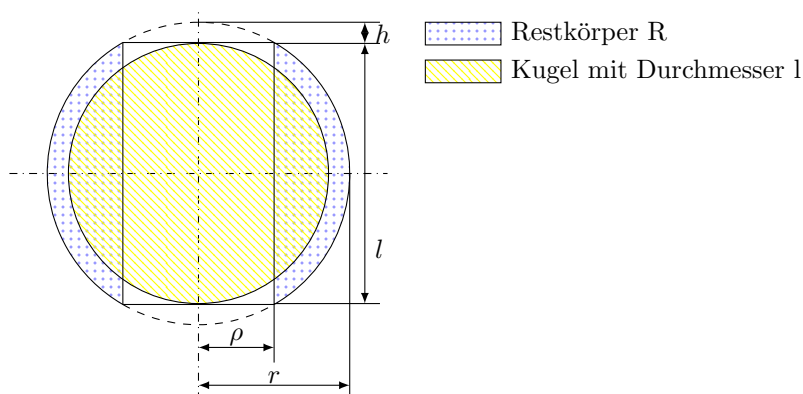
**Aufgabe S 41**

Zwei Primzahlen, deren Differenz dem absoluten Betrag nach gleich 2 ist, nennt man Primzahlzwillinge.

Man beweise, dass oberhalb von 3 die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist!

**Aufgabe S 42**

Welchen Rest lässt die Zahl  $2^n$  beim Teilen durch 3?

**Aufgabe S 43**

Bei zentrisch-zylindrischer Durchbohrung einer Kugel verbleibt ein ringförmiger Restkörper  $R$ . Es soll nachgewiesen werden, dass der Rauminhalt  $V_R$  dieses Restkörpers gleich dem Rauminhalt  $V_K$  einer Kugel mit dem Durchmesser  $l$  ist, wenn  $l$  die Länge der zylindrischen Bohrung ist (Abbildung).

**Aufgabe S 44**

Es ist  $a^2 \geq 0$ .

Beweis: Ist  $a = 0$ , so ist auch  $a^2 = 0$ , und die Behauptung richtig. Ist  $a \neq 0$ , so ist  $a^2$  das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen, also positiv, und die Behauptung ist ebenfalls richtig.

Dann ist auch  $a^2 - 2a + 1 \geq -2a + 1$ .

Beweis: Es wurde auf beiden Seiten der Ungleichung Gleiches subtrahiert beziehungsweise addiert. Durch Radizieren erhält man

$$a - 1 \geq \pm\sqrt{-2a + 1}$$

Setzt man nunmehr  $a = \frac{1}{2}$ , so ergibt sich

$$\frac{1}{2} - 1 \geq \pm\sqrt{-1 + 1} \rightarrow -\frac{1}{2} \geq 0$$

Das bedeutet, dass eine negative Zahl größer als oder gleich Null sein soll. Wo steckt der Fehler?

**Aufgabe S 45**

Beweis für die Behauptung, dass weniger mehr ist: Es ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Durch Logarithmieren ergibt sich daraus

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^n > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Nach einem Logarithmengesetz ist  $\lg a^m = m \cdot \lg a$ ; also folgt

$$n \cdot \lg \frac{1}{2} > (n+1) \cdot \lg \frac{1}{2}$$

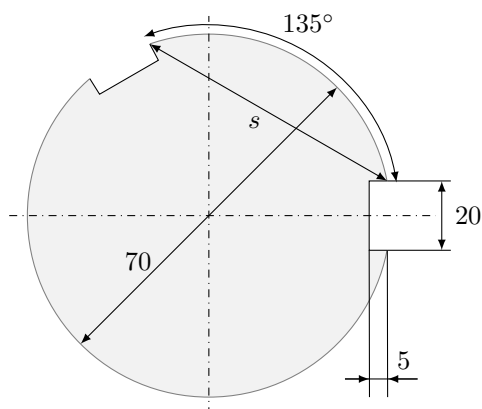
Dividiert man beide Seiten der Ungleichung durch  $\lg \frac{1}{2}$ , so erhält man  $n > n+1$ . Wo steckt der Fehler?

**Aufgabe S 46**

Gesucht sind die Ellipse und die Hyperbel mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die lineare Exzentrizität ist  $e = 20$ .
2. Die senkrecht aufeinanderstehenden Brennstrahlen  $l_1$  und  $l_2$  stehen zueinander im Verhältnis  $l_1 : l_2 = 4 : 3$ .

Es sind a) die Längen der Brennstrahlen  $l_1$  und  $l_2$  zu bestimmen und b) die Gleichungen der Kegelschnitte aufzustellen.

**Aufgabe S 47**

In eine Welle sollen zwei Längsnuten eingefräst werden (Querschnittszeichnung siehe Abbildung). Ein Verdrehen der Welle um  $135^\circ$  ist mit den vorhandenen technischen Mitteln nicht zu erreichen. Daher ist die Einstellung mittels eines Sehnemaßes erforderlich. Wie groß ist das Sehnemaß  $s$ ?

Die erforderlichen Maße sind der Abbildung zu entnehmen.

**Aufgabe S 48**

In einer Abteilung eines volkseigenen Betriebes sollen Massenbedarfsartikel hergestellt werden. Eine Vorkalkulation ergibt, dass die Produktion insgesamt  $b = 1650,00$  DM fixe Kosten im Monat (Pflege, Wartung und Amortisation der Produktionsanlagen, Verwaltungskosten usw.) und  $m_1 = 6,50$  DM variable Kosten (je gefertigtes Stück, Materialkosten, Arbeitslöhne usw.) verursacht.

Der Werkabgabepreis (zuzüglich Produktionsabgabe) beträgt auf Grund preisrechtlicher Bestimmungen  $m_2 = 11,50$  DM je Stück.

- Es sind die Gesamtkosten  $y_1$  der Produktion und der Gesamterlös  $y_2$  (unter der Voraussetzung, dass die Produktion restlos abgesetzt wird) in Abhängigkeit vom Produktionsausstoß  $x$  rechnerisch und graphisch darzustellen.
- Von welchem Produktionsausstoß  $x_r$  an wird die Produktion rentabel?
- Durch welche Maßnahmen kann die Rentabilität erhöht werden?
- Welche Schlußfolgerungen ergeben sich, wenn die variablen Kosten  $m_1$  den Werkabgabepreis  $m_2$  übersteigen?

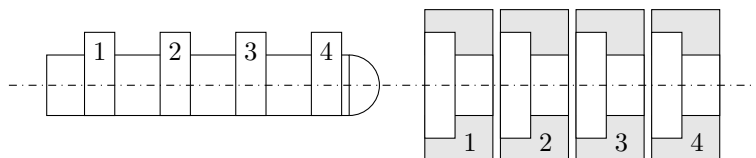
### Aufgabe S 49

In dem linearen Gleichungssystem

$$0,9x - 3,2y + 10,1 = 0 \quad , \quad 1,1x - 1,0y + 0,7 = 0$$

sind für die Koeffizienten der Unbekannten und für die absoluten Glieder Abweichungen von  $\pm 0,05$  zulässig. Man bestimme für die Lösungen  $x = 3$  und  $y = 4$  die größtmöglichen Abweichungen nach oben und nach unten!

### Aufgabe S 50



Bei einem schlüssellosen Vorhängeschloss wird der Riegelteil mit vier einseitig gelegenen, gleichen und gleichabständigen Zähnen in eine Hülse mit vier gleichen, unabhängig voneinander um die Riegelachse drehbaren Ringen eingeführt (Abbildung). Das ist aber nur bei einer bestimmten Stellung der Ringe möglich, ebenso das Öffnen des Schlosses.

Auf den Ringen sind je sechs Buchstaben eingepreßt; vier davon (je Ring einer) geben bei der Öffnungsstellung das dem Besitzer bekannte Schlüsselwort.

- Wieviele verschiedene Schlüsselwörter sind bei dieser Konstruktion an jedem Schloss möglich? Als "Schlüsselwort" gilt jede (auch sinnlose) Zusammenstellung von vier Buchstaben.
- Es ist die Sicherheit dieses Schlosses mit der eines nach demselben Prinzip gebauten zu vergleichen, das aber sechs Ringe mit je vier Buchstaben aufweist.
- Wieviele verschiedene Ringe mit je sechs verschiedenen aus den 26 Buchstaben des Alphabets kann der Herstellerbetrieb anfertigen?  
Dabei gelten Ringe dann als gleich, wenn sie - ohne Rücksicht auf die Reihenfolge - nur gleiche Buchstaben aufweisen und der Einschnitt unter demselben Buchstaben ist.
- Wieviele Schlösser mit verschiedenen Schlüsselwörtern kann man aus diesen Ringen herstellen?

## 2 Lösungen

### Lösung S 1

Es seien  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  die beiden gewählten Zeilen (bzw. Spalten). Dann gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = s = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

Weiterhin ist  $a_1 + b_n = t; a_2 + b_{n-1} = t; \dots; a_n + b_1 = t$  oder  $a_1 = t - b_n; a_2 = t - b_{n-1}; \dots; a_n = t - b_1$  (1). Addiert man die Gleichungen, so ergibt sich  $s + s = n \cdot t = 2s$  (2). Quadriert man die Gleichungen (1), so folgt

$$a_1^2 = (t - b_n)^2 = t^2 - 2tb_n + b_n^2; \dots; a_n^2 = (t - b_1)^2 = t^2 - 2tb_1 + b_1^2$$

und durch Addition erhält man daraus

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = nt^2 - 2t(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + b_1^2 + \dots + b_n^2 = t(nt - 2s) + b_1^2 + \dots + b_n^2$$

Wegen (2) ist aber  $nt - 2s = 0$  und damit ist die Behauptung bewiesen.

### Lösung S 2

Es wird zunächst untersucht, welche von den Zahlen 1, 2, ..., 30 für die Lösung in Frage kommen. Zu diesem Zweck wird das Produkt 270 in Primfaktoren zerlegt:  $270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ .

Die einzusetzenden Zahlen dürfen demnach nur die Faktoren 2, 3,  $3^2$ ,  $3^3$ , 5 enthalten. Das sind die 10 Zahlen 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27 und 30 und außerdem die Zahl 1. Von diesen 11 Zahlen müssen 2 ausgeschieden werden. Das Produkt aller 11 Zahlen ist  $2^5 \cdot 3^{11} \cdot 5^4$ , während das Produkt der 9 in das Quadrat einzusetzenden Zahlen  $270^3 = 2^3 \cdot 3^9 \cdot 5^3$  ergibt. Das Produkt aller 11 Zahlen enthält also gegenüber dem Produkt der 9 Zahlen im Quadrat den Faktor  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$  zu viel. Das Produkt der beiden auszuschließenden Zahlen ist demnach 180.

Es sind zwei Fälle möglich:  $180 = 6 \cdot 30 = 10 \cdot 18$ .

Nunmehr prüfen wir, welche Anordnungsmöglichkeiten für die Primfaktoren bestehen. Da jeder der Primfaktoren 2, 3 und 5 in jeder Zeile und in jeder Spalte in derselben Anzahl auftreten muss, wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein sollen, sind folgende Anordnungen möglich:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
x . .	x . .	. x .	. x .	. . x	. . x
. x .	. . x	x . .	. . x	x . .	. x .
. . x	. x .	. . x	x . .	. x .	x . .

Die einzelnen Anordnungen können ineinander übergeführt werden a) durch Vertauschung von Spalten b) durch Vertauschung von Zeilen

Wegen der Gleichwertigkeit dieser Anordnungen ist es gleichgültig, in welches Feld man die 1 einsetzt. Nimmt man das linke obere Feld, so entfallen für das Einsetzen der übrigen Faktoren die Schemata I und II.

Da für die Aufteilung der Primfaktoren 2, 3, 3, 3, 5 nur 4 Schemata (III bis VI) zur Verfügung stehen, fasst man 2 Faktoren zusammen:  $3 \cdot 3 = 9$ . Man verteilt also 2, 3, 5, 9.

Dabei muss man beachten, dass die Faktoren 5 und 9 so verteilt werden müssen, dass sie nicht in einem gemeinsamen Feld zusammentreffen; denn das Produkt  $5 \cdot 9 = 45$  liegt außerhalb der zugelassenen Zahlen. Also setzen wir die Zahlen 5 und 9 nach Schema III und VI (oder IV und V) als Teillösung (a) ein:

1	5	9
5	9	.
9	.	5

nunmehr sind nicht die Faktoren 2 und 3 nach Schema IV und V einzusetzen. Man erhält:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 \cdot 2 & 9 \cdot 3 \\ 5 \cdot 3 & 9 & . \\ 9 \cdot 2 & . & 5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 10 & 27 \\ 15 & 9 & 2 \\ 18 & 3 & 5 \end{array} \right|$$

Die Zahlen 6 und 30 kommen nicht vor. Die Zahlen 10 und 18 auszulassen ist nicht möglich. Versucht man nämlich in Teillösung (a) die 2 einzusetzen, so stößt sie auf jeden Fall an einer Stelle auf eine 5 oder 9, was 10 oder 18 ergeben würde, also gerade die Zahl, die man nicht in das Schema einordnen will.

Zum Schluss soll untersucht werden, wieviel verschiedene Anordnungen der Zahlen aus der oben gefundenen Lösung durch Vertauschung von Zeilen oder Spalten entstehen. Im folgenden Schema (b)

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}$$

bedeutet die erste Ziffer jeder Zahl die Zeilennummer und die zweite die Spaltennummer. 3 Elemente, hier die Zahlen 1, 2, 3 kann man in 6 verschiedene Anordnungen (Permutationen) niederschreiben. Die Vertauschungen kann man sowohl mit den Zeilennummern als auch mit den Spaltennummern durchführen. Man findet also 36 verschiedenen Umstellungen des Schemas (b).

Weitere 36 neue Anordnungen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen, erhält man, indem man in jeder der bisher gefundenen 36 Lösungen die Zeilen und die Spalten miteinander vertauscht. Es gibt demnach 72 verschiedene Anordnungen als Lösung der gestellten Aufgabe.

### Lösung S 3

Jede der anwesenden Personen stößt mit  $(n-1)$  anderen Personen an. Das wären  $n \cdot (n-1)$  "Anstöße"; dabei ist aber jedes Anstoßen doppelt gezählt. Die Gläser erklingen daher  $\frac{n}{2}(n-1)$  mal.

Die quadratische Gleichung  $\frac{n}{2}(n-1) = 120 \rightarrow n^2 - n - 240 = 0$  hat die Lösungen  $n_1 = 16$  und  $n_2 = -15$ . Die negative Lösung scheidet aus, so dass also 16 Personen anwesend waren.

Es seien nun  $d$  Damen und  $h$  Herren anwesend. Dann gilt, da jeder Herr mit jeder Dame tanzen soll, das Gleichungssystem  $s + h = 16$ ;  $d \cdot h = 60$  mit den Lösungen  $h_1 = 10, d_1 = 6$  und  $h_2 = 6, d_2 = 10$ . Da mehr Herren als Damen anwesend sind, sind also 10 Herren und 6 Damen bei der Feier.

### Lösung S 4

1) Die Winkel, die die Zeiger mit der Zeigerstellung um  $0^h$  bilden, sind Funktionen der Zeit. Wir bezeichnen mit  $\alpha_k$  den Winkel des kleinen Zeigers mit der  $0^h$ -Stellung,  $\alpha_g$  den Winkel des großen Zeigers mit der  $0^h$ -Stellung,  $\omega_k = \frac{360^\circ}{12h} = \frac{30^\circ}{h}$  die Winkelgeschwindigkeit des kleinen Zeigers,  $\omega_g = \frac{360^\circ}{1h} = \frac{360^\circ}{h}$  die Winkelgeschwindigkeit des großen Zeigers und  $t$  die Zeit (in h).

Dann gelten die Gleichungen  $\alpha_k = \omega_k \cdot t$  und  $\alpha_g = \omega_g \cdot t$ . Wenn beide Zeiger sich decken, ist  $\alpha_k = \alpha_g - n \cdot 360^\circ$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  (ganzzahlige Umläufe des großen Zeigers werden subtrahiert). Aus den Gleichungen ergibt sich

$$\omega_k \cdot t = \omega_g \cdot t - 360^\circ n \quad \text{oder} \quad t = \frac{360^\circ n}{\omega_g - \omega_k} = \frac{360^\circ n}{330^\circ/h} = \frac{12}{11} n \text{ h}$$

Setzt man dies in die 1. Gleichung ein, so erhält man für  $\alpha_k$  den Winkel  $\alpha_{kn}$ , bei dem sich die Zeiger decken:  $\alpha_{kn} = 30^\circ \cdot \frac{12}{11} n = \frac{360^\circ n}{11}$ .

2) Wir bezeichnen mit  $\Delta t$  die Zeitdifferenz zwischen dem Übrerrunden und der vorausgegangenen vollen Stunde, also  $\Delta t = t - n$ . Wegen 1) ergibt sich daraus

$$\Delta t = \left( \frac{12}{11} n - n \right) = \frac{1}{11} n \text{ h}$$

Mit  $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$  erhält man schließlich  $\Delta t = \frac{60n}{11} \text{ min}$ . Aus den Gleichungen von 1) und 2) kann man eine Tabelle für  $n = 0, 1, \dots, 11$ ,  $\alpha_{kn}$  und  $\Delta t$  zusammenstellen.

**Lösung S 5**

Es scheint sich um ein diophantisches Problem zu handeln. Die Lösungen sind aber im vorliegenden Fall durch eine einfache Überlegung zu finden:

Da die Mütter 11 mal so alt sind wie ihre jüngsten Kinder, kommen bei ganzzahligen Altersangaben nur durch 11 teilbare Zahlen für das Alter der Mütter in Frage, also die Zahlen 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99. Die Zahl 11 und die Zahlen 55; 66; 77; 66; 99 kann man sofort als unbrauchbar ausschließen. Da die drei Mütter unterschiedlich alt sind, kommt nur die Lösung

1. Mutter 22 Jahre alt, 2. Mutter 33 Jahre alt, 3. Mutter 44 Jahre alt

in Betracht. Man prüft leicht nach, dass diese Zahlen auch die übrigen Bedingungen erfüllen. Aus ihnen errechnet man das Alter der Kinder.

Alter der Mutter 22: älteres Kind 4, jüngeres Kind 2; Alter der Mutter 33: älteres Kind 6, jüngeres Kind 3; Alter der Mutter 44: älteres Kind 8, jüngeres Kind 4.

**Lösung S 6**

1. Ist  $a = 100x + 10y + z$  die beliebige dreistellige Zahl, so gilt nach der in der Aufgaben gestellten Bedingung  $x = z + 2$ , also

$$a = 100(z + 2) + 10y + z = 100z + 200 + 10y + z$$

Für die Zahl mit vertauschter Ziffernfolge gilt dann:  $b = 100z + 10y + x = 100z + y + z + 2$ . Subtrahiert man  $b$  von  $a$ , so folgt:  $a - b = 198$ . Man sieht, dass durch die Subtraktion die Ziffern der Zahl  $a$  sämtlich aus der Rechnung herausfallen und das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Zahl  $a$  den Wert 198 ergibt. Die weiteren Rechnungen dienen nur zur Verschleierung dieses Sachverhalts.

2. Allgemein gilt, wenn  $x = z + n$  mit  $n=1, 2, \dots, 9$  ist

$$a - b = 100z + 100n + 10y + z - (100z + 10y + z + n) = 100n - n = 99n$$

Das Ergebnis  $99n$  schließt natürlich den speziellen Fall 1 ( $n = 2, 99n = 198$ ) ein. Auf dieser Grundlage lässt sich ein mathematisches "Zauberkunststück" ohne große Gedächtnisleistung aufbauen.

**Lösung S 7**

1. Aus der Formel  $s = v \cdot t$  (in der mit  $s$  der Weg, mit  $v$  die Geschwindigkeit und mit  $t$  die Zeit bezeichnet wird) folgt  $t = \frac{s}{v}$ . In unserem Fall sind  $s = 22,5$  km und  $v = 18 \frac{km}{h}$ .

Also gilt  $t = \frac{22,5}{18}$  h = 1 h 15 min.

Der erste Wagenzug ist demnach  $9^h 15^{min}$  an der Endhaltestelle B. Wegen der vorgeschriebenen Pause verlässt er diese  $9^h 30^{min}$ . Da für die Rückfahrt gleiche Bedingungen gelten, tritt er von der Endhaltestelle A aus seine zweite Fahrt  $11^h 00^{min}$  an.

2. Der erste von A abfahrende Wagenzug beginnt die Rückfahrt von B aus 90 min nach seiner Abfahrt. In dieser Zeit sind sowohl von A aus als auch von B aus je neun Züge auf die Strecke gegangen, insgesamt also 18 Züge.

3. Die Zeitabstände betragen 5 min. Das Ergebnis kann man aus mehreren Überlegungen erhalten, z.B. aus folgender:

Wir betrachten die Begegnungen eines Wagenzuges  $a$ , der von A nach B fährt, mit zwei aufeinander folgenden Wagenzügen  $b_1$  und  $b_2$ , die von B nach A fahren. Im Zeitpunkt der Begegnung von  $a$  und  $b_1$  befindet sich  $b_2$  in einem Fahrabstand von 10 min vom Treffpunkt von  $a$  und  $b_1$ .

Da  $a$  und  $b_2$  die gleiche Geschwindigkeit haben, muss jeder dieser beiden Wagenzüge bis zu ihrem Treffpunkt die Hälfte der Strecke zurücklegen, die diesem Fahrabstand entspricht. Dazu sind aber 5 min erforderlich.



**Lösung S 8**

Es ist  $v_d = 90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s}$ ,  $v_s = 144 \frac{km}{h} = 40 \frac{m}{s}$ .

Man findet die Lösung durch die folgende Überlegung: Wenn der D-Zug sich nicht bewegte, der Triebwagen aber die Geschwindigkeit  $v_r = v_d + v_s$  hätte (oder umgekehrt), so wäre die Relativgeschwindigkeit von D-Zug und Schnelltriebwagen zueinander dieselbe. Es muss also, wenn mit  $t_d$  und  $t_s$  die entsprechenden Zeiten bezeichnet werden, gelten

$$(v_d + v_s)t_s = l_s \quad \text{und} \quad (v_d + v_s)t_d = l_d \quad \text{also}$$

$$t_s = \frac{l_s}{v_d + v_s} = \frac{6}{13} \approx 0,5 \text{ s}; \quad t_d = \frac{l_d}{v_d + v_s} = \frac{260}{65} = 4 \text{ s}$$

Die Zeit  $t_s$ , für die Vorbeifahrt des Schnelltriebwagens am Reisenden im D-Zug beträgt also  $t_s \approx 0,5$  s, und die Zeit  $t_d$  für die Vorbeifahrt des D-Zuges am Reisenden im Triebwagen ist  $t_d = 4$  s.

**Lösung S 9**

Wenn alle Personen die Strecke in der gleichen Zeit zurücklegen sollen, müssen sie die gleiche Durchschnittsgeschwindigkeit haben. Das wird dadurch erreicht, dass jeder von ihnen gleich weit zu Fuß geht und gleich weit fährt. Demnach muss die Taxe, um jede Person ein Stück des Weges zu befördern, vier Mal in Richtung des Ziels und dreimal zurückfahren.

Es sei  $x$  die Strecke, die jede Person in der Taxe zurücklegt, und  $y$  die Rückfahrstrecke. Dann gilt  $4x - 3y = 20$ . (1)

Während der Zeit, in der die Taxe einmal hin- und zurückfährt, legt ein Fußgänger die Strecke  $x - y$  zurück. In der gleichen Zeit zurückgelegte Wege verhalten sich aber wie die Geschwindigkeiten. Also gilt  $\frac{x+y}{x-y} = \frac{65}{5} = \frac{13}{1} = 13$ . (2)

Man hat damit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten gefunden; die Lösungen sind  $x = 14$  und  $y = 12$ . Das heißt, dass die Taxe 14 km in Richtung des Ziels fährt und 12 km zurück. Zu Fuß sind also 6 km zu gehen. Man rechnet ferner leicht aus, dass die Gesellschaft etwa 1 h 25 min benötigt, um an das Ziel zu gelangen.

**Lösung S 10**

- Wir bezeichnen mit  $v_a$  die Anfangsgeschwindigkeit, mit  $v_e$  die Endgeschwindigkeit und mit  $v_d$  die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeugs beim Rollen. Ferner sei  $l$  die Rollstrecke und  $t$  die benötigte Zeit. Es gilt  $\frac{v_a + v_e}{2} = v_d$ . Wegen  $v_a = 0 \frac{m}{s}$ ,  $v_e \approx 44,4 \frac{m}{s}$  ergibt sich  $v_d \approx 22,2 \frac{m}{s}$ .
- Für die Rollstrecke  $l$  gilt:  $l = v_d \cdot t \approx 666m \approx \frac{2}{3}km$ .
- Für die Beschleunigung  $a$  gilt:  $a = \frac{v_e - v_a}{t} \approx 1,48 \frac{m}{s^2}$ .
- Nachdem Grundgesetz der Dynamik berechnet sich die Kraft  $F$  mit  $F = m \cdot a$ . Für die Masse  $m$  gilt  $m = \frac{G}{g}$ , wenn  $G$  das Gewicht und  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  die Fallbeschleunigung ist. Dann wird  $F = \frac{G \cdot a}{g} \approx 2720 \text{ kp}$ .
- Arbeit  $W = F \cdot l \approx 1810000 \text{ kpm}$ .
- Leistung  $P = \frac{W}{t} \approx 60000 \frac{kpm}{s}$ . Dies entspricht 800 PS, so dass jeder Motor rund 400 PS Leistung aufbringen muss.

**Lösung S 11**

Die Aufgabe enthält vier unbekannte Zahlen, nämlich die vier Stellen der gesuchten vierstelligen Zahlen. Wie bezeichnen die erste Stelle mit  $x$ , die zweite mit  $y$ , die dritte mit  $z$  und die vierte mit  $u$ . Aus den drei Bedingungen lassen sich drei Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} (1) \quad x + y &= x^2 && \text{1. Bedingung} \\ (2) \quad y - z &= x && \text{2. Bedingung} \\ (3) \quad z + u &= y && \text{3. Bedingung} \end{aligned}$$

Da mehr Unbekannte auftreten als Gleichungen vorhanden sind, hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, deren Anzahl jedoch durch die Aufgabenstellung stark eingeschränkt wird: Die Lösungen  $x, y, z, u$  sind Stellen einer vierziffrigen Zahl, also müssen sie einer der ganzen Zahlen zwischen 0 und 9 (beide Werte einschließlich) sein. Es gilt also:  $0 \leq x, y, z, u \leq 9$ ,  $x, y, z, u$  ganzzahlig. Zur Lösung formen wir die Gleichung (1) um:  $y = x(x - 1)$  (1b). An der Gleichung erkennt man, dass für  $x$  nur die vier Werte  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$  in Frage kommen; denn für  $x = 4$  müsste das einstellige  $y$  schon 12 werden.

Damit ergeben sich auch die  $y$ -Werte:  $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 2, y_4 = 6$ . Mit der Gleichung (2) ergeben sich die  $z$ -Werte:  $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 0, z_4 = 3$ . Die Werte mit dem Index 2 scheiden aus, da  $z_2 < 0$  wäre. Mit der Gleichung (3) folgt  $u_1 = 0, u_3 = 2, u_4 = 3$ .

Damit hat man die vierziffrigen Zahlen 2202 und 3633 als Lösung gefunden. Das Ergebnis 0000 wird nicht als echte vierziffrige Zahl anerkannt.

Um diese Zahlen durch einen allgemeinen Ausdruck darzustellen, schreibt man sie in der Form  $1000x + 100y + 10z + u$ . Setzt man  $u = y - z$  und weitere Beziehungen von oben, so ergibt sich

$$1000x + 100y + 10z + u = 1000x + 101y + 9z = 991x + 110y = 881x + 110x^2$$

Dieser Ausdruck liefert für  $x = 2$  die Zahl 2002 und für  $x = 3$  die Zahl 3633, die die gestellten Bedingungen erfüllen. Dass es keine weiteren Zahlen mit den geforderten Eigenschaften geben kann, folgt aus dem Lösungsweg, bei dem alle Möglichkeiten ausgeschöpft wurden.

**Lösung S 12**

Bedingung für die Durchführbarkeit des Verfahrens ist, dass die letzte Stelle des Zählers mit der ersten Stelle des Nenners übereinstimmt. Man kann daher die Brüche allgemein in folgender Form schreiben:

$$\frac{10x + y}{10y + z}$$

Streicht man im Zähler die letzte und im Nenner die erste Stelle, so erhält man daraus den Bruch  $\frac{x}{z}$ . Beide Brüche sollen einander gleich sein:  $\frac{10x+y}{10y+z} = \frac{x}{z}$ .

Dies ist eine Gleichung in drei Unbekannten, für die nur ganzzahlige Lösungen zwischen 1 und 9 (beide Werte einschließlich) in Frage kommen. Es handelt sich also um ein diophantisches Problem. Zur Lösung geht man folgendermaßen vor: Man fasst die Gleichung als Proportion auf und formt sie zur Produktgleichung um:  $(10x + y)z = (10y + z)x \rightarrow 9xz = (10x - z)y$ .

Die linke Seite der Gleichung ist durch 9 teilbar, also muss auch die rechte Seite durch 9 teilbar sein. Das ist sicher dann der Fall, wenn entweder  $y$  oder  $10x - z$  durch 9 teilbar sind, ferner dann, wenn  $y$  und  $10x - z$  beide durch 3 teilbar sind. Damit kommen aber für  $y$  zunächst die Werte 3; 6; 9 in Frage: den Fall, dass  $10x - z$  durch 9 teilbar ist, behandeln wir anschließend.

Aus  $y = 3$  folgt  $9xz = 3(10x - z) \rightarrow z = \frac{10}{3 + \frac{1}{x}}$ . Die Gleichung liefert nur für  $x = 3$  ein ganzzahliges  $z = 3$ . Es wäre demnach  $\frac{33}{33}$  ein Bruch, der der gestellten Bedingung genügt.

Wir wollen aber Fälle mit  $x = y = z$  als trivial ansehen und nur solche Lösungen gelten lassen, für

die mindestens  $x \neq y$  oder  $y \neq z$  gilt.

Setzt man  $y = 6$ , so ergibt sich  $z = \frac{20}{3+\frac{2}{x}}$ .

Für  $x = 1$  erhält man daraus  $z = 4$ , für  $x = 2$  ergibt sich  $z = 5$ . Weitere ganzzahlige Lösungen hat diese Gleichung nicht. Damit sind zwei Lösungen ermittelt

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

Aus  $y = 9$  wird  $z = \frac{10}{1+\frac{1}{x}}$  mit den Lösungen  $x = 1, z = 5$  und  $x = 4, z = 8$  und

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$$

Es bleibt noch der Fall, dass  $10x - z$  durch 9 teilbar ist. Für  $10x - z$  kommen dann nur die Werte 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 in Frage; man sieht dass in jedem Fall  $x = z$  ist. Aus der Gleichung  $9xz = (10x - z)y$  folgt sofort  $x = y$  und somit nur triviale Lösungen.

Es gibt genau 4 Brüche der gesuchten Art:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$$

### Lösung S 13

Wir bezeichnen die unbekanntes Anzahlen folgendermaßen:  $x$  Anzahl der Fünzig-DM-Scheine,  $y$  Anzahl der Zwanzig-DM-Scheine,  $z$  Anzahl der Zehn-DM-Scheine,  $u$  Anzahl der Fünf-DM-Scheine,  $v$  Anzahl der Eine-DM-Scheine.

Dann gelten auf Grund der Angaben von Elli und Gerda folgende Gleichungen:

$$x + z + v = 13(1), x - 2v = 0(2), y + u + v = 26(3), y - 5v = 0(4)$$

Es handelt sich um ein Gleichungssystem von vier Gleichungen mit fünf Unbekannten; da die Lösungen Anzahlen darstellen, kommen für sie nur positive ganze Zahlen in Frage (diophantisches Problem). Aus der Gleichung (4) erkennt man, dass  $y$  durch 5 teilbar ist. Damit kommen vier Lösungen in Betracht:

$$y = 5 \text{ mit } v = 1, u = 20, x = 2, z = 10 \quad (1.)$$

$$y = 10 \text{ mit } v = 2, u = 14, x = 4, z = 7 \quad (2.)$$

$$y = 15 \text{ mit } v = 3, u = 8, x = 6, z = 4 \quad (3.)$$

$$y = 20 \text{ mit } v = 4, u = 2, x = 8, z = 1 \quad (4.)$$

Werte  $y \geq 25$  kommen nicht in Frage, da sonst andere der gesuchten Werte negativ werden. Damit ergeben sich zunächst folgende vier Möglichkeiten:

	Elli	Gerda
1.	$2 \cdot 50,00 \text{ DM} = 100,00 \text{ DM}$ $10 \cdot 10,00 \text{ DM} = 100,00 \text{ DM}$ $1 \cdot 1,00 \text{ DM} = 1,00 \text{ DM}$ Summe 201,00 DM	$5 \cdot 20,00 \text{ DM} = 100,00 \text{ DM}$ $20 \cdot 5,00 \text{ DM} = 100,00 \text{ DM}$ $1 \cdot 1,00 \text{ DM} = 1,00 \text{ DM}$ Summe 201,00 DM
2.	$4 \cdot 50,00 \text{ DM} = 200,00 \text{ DM}$ $7 \cdot 10,00 \text{ DM} = 70,00 \text{ DM}$ $2 \cdot 1,00 \text{ DM} = 2,00 \text{ DM}$ Summe 272,00 DM	$10 \cdot 20,00 \text{ DM} = 200,00 \text{ DM}$ $14 \cdot 5,00 \text{ DM} = 70,00 \text{ DM}$ $2 \cdot 1,00 \text{ DM} = 2,00 \text{ DM}$ Summe 272,00 DM
3.	$6 \cdot 50,00 \text{ DM} = 300,00 \text{ DM}$ $4 \cdot 10,00 \text{ DM} = 40,00 \text{ DM}$ $3 \cdot 1,00 \text{ DM} = 3,00 \text{ DM}$ Summe 343,00 DM	$15 \cdot 20,00 \text{ DM} = 300,00 \text{ DM}$ $8 \cdot 5,00 \text{ DM} = 40,00 \text{ DM}$ $3 \cdot 1,00 \text{ DM} = 3,00 \text{ DM}$ Summe 343,00 DM
4.	$8 \cdot 50,00 \text{ DM} = 400,00 \text{ DM}$ $1 \cdot 10,00 \text{ DM} = 10,00 \text{ DM}$ $4 \cdot 1,00 \text{ DM} = 4,00 \text{ DM}$ Summe 414,00 DM	$20 \cdot 20,00 \text{ DM} = 400,00 \text{ DM}$ $2 \cdot 5,00 \text{ DM} = 10,00 \text{ DM}$ $4 \cdot 1,00 \text{ DM} = 4,00 \text{ DM}$ Summe 414,00 DM

Aus den weiteren Angaben von Gerda und Elli lässt sich nun folgendes schließen:

- Mindestens die Lösung 1 scheidet aus, da Elli als Anfängerin (bei niedrigerem Gehalt als heute!) eine gleiche Verteilung der Scheine erhielt.
- Die Lösung 4 scheidet aus, da Gerda nicht über 400,00 DM verdient.
- Es verbleiben daher die Lösungen 2 und 3 als Möglichkeiten. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kann man aus Gerdas Bemerkung vermuten, dass sie bereits über 300,00 DM verdient (Lösung 3); jedoch ist dieser Schluss nicht zwingend. Die Aufgabe ist also nicht eindeutig lösbar.

### Lösung S 14

Bezeichnet man mit  $x$  die Anzahl der Bretter von 8 cm Breite, mit  $y$  die von 10 cm und mit  $z$  die von 12 cm Breite, so gilt  $8x + 10y + 12z = 90$  oder, wenn man beide Seiten der Gleichung durch 2 dividiert,  $4x + 5y + 6z = 45$ .

Es handelt sich um eine Gleichung mit drei Unbekannten. Eine solche Gleichung hat zunächst unendlich viele Lösungen. Die Anzahl der Lösungen wird aber durch die Bedingungen der Aufgabe stark eingeschränkt.

1. Es sind nur positive Lösungen möglich, da eine negative Anzahl von Brettern sinnlos ist. Das heißt, es muss gelten

$$0 \leq 4x \leq 45, 0 \leq 5y \leq 45, 0 \leq 6z \leq 45 \rightarrow 0 \leq x \leq 11, 0 \leq y \leq 9, 0 \leq z \leq 6\frac{1}{2}$$

2. Es sind nur ganzzahlige Lösungen möglich, da kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll. Man löst dieses diophantische Problem folgendermaßen:

Aus  $4x + 5y + 6z = 45$  folgt durch Subtraktion von  $5y$  auf beiden Seiten der Gleichung  $4x + 6z = 45 - 5y$ . Die linke Seite der Gleichung ist durch 2 teilbar, also muss auch die rechte Seite durch 2 teilbar sein. Da 45 eine ungerade Zahl ist, muss auch  $5y$  und damit auch  $y$  eine ungerade Zahl sein. Wegen der Bedingungen 1 ergeben sich damit fünf Möglichkeiten für  $y$ :  $y = 1, y = 3, y = 5, y = 7, y = 9$ .

Setzt man diese fünf Werte der Reihe nach in die Gleichung ein, so erhält man fünf Gleichungen, die jede nur noch zwei Unbekannte enthalten:

- $y = 1$ :  $4x + 6z = 45 - 5 \rightarrow 2x + 3z = 20$
- $y = 3$ :  $4x + 6z = 45 - 15 \rightarrow 2x + 3z = 15$
- $y = 5$ :  $4x + 6z = 45 - 25 \rightarrow 2x + 3z = 10$
- $y = 7$ :  $4x + 6z = 45 - 35 \rightarrow 2x + 3z = 5$
- $y = 9$ :  $4x + 6z = 45 - 45 \rightarrow 2x + 3z = 0$

Diese fünf Gleichungen behandelt man auf dieselbe Weise weiter. Dabei sieht man aber im Fall 5 ( $y = 9$ ) sofort, dass  $x = 0$  und  $z = 0$  folgt, d.h., eine Möglichkeit besteht darin, die Türöffnung mit neun Brettern der Breite 10 cm auszufüllen. Es ist also  $x_1 = 0, y_1 = 9, z_1 = 0$ .

Im Fall 1 ( $y = 1$ ) folgt aus  $2x + 3z = 20$ , dass  $2x = 20 - 3z$  ist. Da  $2x$  durch 2 teilbar ist, muss auch  $20 - 3z$  und damit auch  $z$  durch 2 teilbar sein. Mithin gelten für  $z$  folgende vier Möglichkeiten:  $z_2 = 0, z_3 = 2, z_4 = 4, z_5 = 6$ . (für  $z \geq 8$  würde folgen  $x < 0$  im Widerspruch zur Bedingung 1); für  $x$  erhält man daraus:  $x_2 = 10, x_3 = 7, x_4 = 4, x_5 = 1$ .

In den Fällen 2, 3 und 4 geht man entsprechend vor, mit den Ergebnissen

- $y = 3$ :  $z_6 = 1, z_7 = 3, z_8 = 5$  und  $x_6 = 6, x_7 = 3, x_8 = 0$
- $y = 5$ :  $z_9 = 0, z_{10} = 2$  und  $x_9 = 5, x_{10} = 2$
- $y = 7$ :  $z_{11} = 1$  und  $x_{11} = 1$

Damit hat man insgesamt elf Lösungen des Problems gefunden. Aus dem Lösungsweg geht hervor, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

**Lösung S 15**

Es sei  $x_n$  die Anzahl der Schrippen, die vorhanden sind, ehe die n-te Kundin gekauft hat. Die n-te Kundin erhält dann

$$y_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x_n + 1}{2}$$

Schrippen. Die Differenz  $x_n - y_n$  ist die Anzahl Schrippen, die nach dem Kauf der n-ten Kundin, also vor dem Kauf der (n + 1)ten Käuferin vorhanden sind:

$$x_{n+1} = x_n - y_n = x_n - \frac{x_n + 1}{2} = \frac{x_n - 1}{2}$$

Da nach der fünften Käuferin keine Schrippen mehr vorhanden sind, gilt  $x_6 = 0$ , also  $\frac{x_5 - 1}{2} = 0$ , mithin  $x_5 = 1$  und  $y_5 = 1$ . Rückwärts die Ergebnisse einsetzen, ergibt  $x_4 = 3; x_3 = 7; x_2 = 15; x_1 = 31$  und  $y_4 = 2; y_3 = 4; y_2 = 8; y_1 = 16$ .

Es waren also anfangs 31 Schrippen vorhanden. Die erste Kundin erhält 16, die zweite 8, die dritte 4, die vierte 2 und die fünfte 1 Schrippe. "Halbe" Schrippen tauchen im Ergebnis nicht auf!

**Lösung S 16**

a) Es ist  $a_1 = 6400 \text{ min}^{-1}$  (Direktgang) die erste Stufe (Bedingung 1).

Da  $75\% = 0,75 = \frac{3}{4}$  ist, ergeben sich die folgenden Stufen durch Multiplikation der jeweils vorhergehenden Stufe mit  $\frac{3}{4}$ :

$$a_2 = 4800 \text{ min}^{-1}; a_3 = 3600 \text{ min}^{-1}; a_4 = 2700 \text{ min}^{-1}; a_5 = 2025 \text{ min}^{-1}$$

Eine solche Folge, bei der jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit ein und demselben Faktor errechnet wird, heißt eine geometrische Folge.

b) Bei der Schaltstellung 2 sind die Räderpaare (1,2) und (5,6) in Eingriff. Wird mit  $a_v$  die Drehzahl der Vorgelegewelle bezeichnet, so gilt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_v} \cdot \frac{a_v}{a_2} = \frac{6400}{4800} = \frac{4}{3} = 4 : 3$$

Nun ist bei Schaltstellung 2:  $\frac{a_1}{a_v} = \ddot{U}(1,2) = \frac{1}{1} = 1$ , wenn mit  $\ddot{U}(1,2)$  das Übersetzungsverhältnis des Räderpaares (1,2) bezeichnet wird. Dann folgt  $\frac{a_v}{a_2} = \ddot{U}(5,6) = 4 : 3$ . Das Räderpaar (5,6) muss also im Verhältnis  $\ddot{U}(5,6) = 4:3$  übersetzen.

Bei der Schaltung 3 sind die Räderpaare (1,2) und (7,8) in Eingriff. Analog erhält man  $\frac{a_1}{a_3} = \frac{6400}{3600} = 16 : 9$ , also  $\ddot{U}(7,8) = 16:9$ .

Bei Schaltungsstellung 4 sind die Räderpaare (3,4) und (5,6) in Eingriff. Daher gilt  $\frac{a_1}{a_4} = \frac{6400}{2700} = 64 : 27$ . Nun ist  $\frac{a_v}{a_4} = 4 : 3$ , also gilt  $\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_v} \cdot \frac{a_v}{a_4} = \frac{64}{27}$ . Daraus ergibt sich  $\ddot{U}(3,4) = 16:9$ .

c) Die Umfänge eines Räderpaares stehen zueinander im umgekehrten Verhältnis der Übersetzung. Gilt beispielsweise für das Räderpaar (3,4) das Übersetzungsverhältnis  $\ddot{U}(3,4) = \frac{16}{9}$ , so gilt (mit  $U_k$  wird der Umfang, mit  $r_k$  der Radius des Rades k bezeichnet):

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{16}{9}, \quad \frac{2\pi r_4}{2\pi r_3} = \frac{16}{9}, \quad \frac{r_4}{r_3} = \frac{16}{9}$$

Ferner gilt  $r_3 + r_4 = 175 \text{ mm}$ . Es liegt also ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten vor. Als Lösung erhält man:  $r_3 = 63 \text{ mm}$ ,  $r_4 = 112 \text{ mm}$ . Analog ergibt sich  $r_1 = 87,5 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 87,5 \text{ mm}$ ,  $r_5 = 75 \text{ mm}$ ,  $r_6 = 100 \text{ mm}$ ,  $r_7 = 63 \text{ mm}$ ,  $r_8 = 112 \text{ mm}$ .

**Lösung S 17**

Die Nennerfolge  $(N_n) = 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; \dots$  geht aus der natürlichen Zahlenfolge  $(n) = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \dots$  hervor, wenn man zu dieser die Folge  $(a_n) = 1; 0; 1; 0; \dots$  gliedweise addiert und die Glieder der Summenfolge halbiert:

$$(N_n) = \left( \frac{1}{2} [n + a_n] \right)$$

Wie lautet aber das allgemeine Glied der Folge  $(a_n)$ ? Eine Folge, deren Glieder nur zwei Werte annehmen können, ist die Folge

$$(b_n) = ([-1]^{n-1}) = +1; -1; +1; -1; +1; \dots$$

zu ihr braucht man nur die Folge  $(c_n) = 1; 1; 1; \dots = (1)$  gliedweise zu addieren und die Summenfolge gliedweise zu halbieren. Es folgt dann

$$(a_n) = \left( \frac{1}{2} [b_n + c_n] \right) = \left( \frac{1}{2} ([-1]^{n-1} + 1) \right)$$

Damit wird das gesuchte allgemeine Glied der Nennerfolge

$$(N_n) = \left( \frac{1}{2} \left[ n + \frac{1}{2} ([-1]^{n-1} + 1) \right] \right)$$

In der Zählerfolge  $(Z_n)$  ist  $Z_n = 1$ , wenn  $n$  ungerade ist. Subtrahiert man 1 von jedem Glied dieser Folge, so geht sie in die Folge  $(Z_n|1) = 0; -1; 0; 0; 0; 1; 0; 2; 0; 3; \dots$  über. Wir fassen nun die Glieder dieser Folge als Produkte aus den Gliedern einer noch zu bestimmenden Folge  $(c_n)$  und den entsprechenden Gliedern der Folge  $(b_n) = 0; 1; 0; 1; 0; 1; \dots$  auf; für  $(b_n)$  gilt offenbar  $b_n = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n]$ . Dann ist  $(Z_n - 1) = (c_n b_n)$ .

Von der Folge  $(c_n)$  interessieren nur die Glieder mit geradem Index, da die übrigen Glieder durch die Multiplikation annulliert werden, falls sie endlich sind (was wir von den Gliedern der Folge  $(c_n)$  fordern müssen). Wegen  $b_n = 1$  für gerades  $n$  muss für  $n = 2; 4; 6; 8; 10; \dots$  gelten  $C_n = -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots$

Addiert man zu  $c_n$  jeweils 2, so erhält man  $\frac{n}{2}$ ; es ist also  $c_n = \frac{n}{2} - 2$ .

Man erkennt, dass  $c_n$  auch für ungerades  $n$  endlich bleibt. Damit wird

$$(Z_n - 1) = \left( \left[ \frac{n}{2} - 2 \right] \cdot \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \right) = \left( 1 + \frac{1}{4} [n - 4] [1 + (-1)^n] \right)$$

Aus  $Z_n$  und  $N_n$  erhält man schließlich

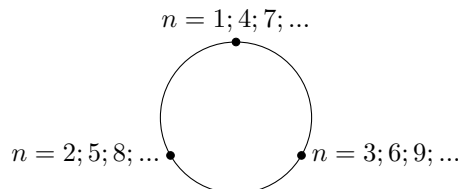
$$u_n = \frac{n + (n - 4)(-1)^n}{2n + 1 + (-1)^{n-1}}$$

### Lösung S 18

Vermindert man in der Folge  $(v_n)$  das 2., 5., 8., ... Glied um 1, so geht sie in die Folge  $(w_n) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  über. Deren Bildungsgesetz ist leicht erkennbar:  $w_n = n - 1$ .

Zur Folge  $(w_n)$  muss man die Folge  $(a_n) = 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$  gliedweise addieren, wenn man die Folge  $(v_n)$  erhalten will:  $(v_n) = (w_n + a_n)$ .

Das Bildungsgesetz für  $(a_n)$  muss für  $n = 1, 2, 3$  dieselben Werte ergeben wie für  $n = 4, 5, 6$  oder für  $n = 7, 8, 9$ , usw. Man kann eine solche Folge "zyklisch" oder "periodisch" nennen und sie entsprechend darstellen.



Es liegt nahe für das Bildungsgesetz von  $(a_n)$  trigonometrische Funktionen zu verwenden. In der Tat ist

$$(b_n) = \left( \cos \frac{2\pi n}{3} \right) = -0,5; -0,5; +1; -0,5; -0,5; +1; \dots$$

Ersetzt man darin  $n$  durch  $n+1$  und addiert 0,5, wird

$$(c_n + 0,5) = \left( \cos \frac{2\pi(n+1)}{3} + 0,5 \right) = 0; 1,5; 0; 0; 1,5; 0; 0; 1,5; \dots$$

Damit sind wir am Ziel:

$$(v_n) = (w_n + a_n) = \left(n - 1 + \frac{2}{3} \left[ (0,5 + \cos \frac{2\pi(n+1)}{3}) \right]\right) = n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos \frac{2\pi(n+1)}{3}$$

**Lösung S 19**

Für das Volumen R eines Kreiskegelstumpfs gilt

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2) \quad (I)$$

Als Nebenbedingungen treten im vorliegenden Fall auf:  $h = \text{konstant}$  (gleiche Höhen),  $\frac{R+r}{2} \cdot h = \text{konstant}$  (flächengleiche Achsschnitte). Aus der letzten Gleichung folgt  $R + r = \text{konstant} = a$  oder  $R = a - r = a - x$  (II) mit  $r = x$ . Setzt man (II) in (I) ein, so ergibt sich

$$V = \frac{\pi}{3}h(a^2 - 2ax + x^2 + ax - x^2 + x^2) = \frac{\pi}{3}h(x^2 - ax + a^2) \quad (III)$$

Lösung a: Man erhält die Extremwerte von V, indem man  $V' = 0$  setzt und  $V''$  auf seinen Wert hin überprüft:

$$V' = \frac{\pi}{3}h(2x - a) \quad V'' = \frac{2\pi}{3}h$$

Man erkennt, dass  $V'' > 0$  für jedes x gilt, das heißt, die Funktion V hat keine relativen Maxima im Innern des in Frage kommenden Intervalls. Wenn überhaupt Maxima existieren, müssen sie an den Intervallgrenzen liegen.

Wegen  $R \geq 0$  und  $r \geq 0$  folgt aus (II)  $0 \leq x \leq a$  und  $a \geq 0$ . Für  $x_1 = 0$  und für  $x_2 = a$  ergibt sich  $V = \frac{\pi}{3}ha^2$ . Für  $0 < x < a$  ist  $x^2 < ax$ , also  $x^2 - ax < 0$  und folglich  $a^2 - ax + a^2 < a^2$ , d.h., dass tatsächlich an den Intervallgrenzen maximale Werte liegen.

Lösung b: Aus (III) ergibt sich durch einfache Umformung

$$V = \frac{\pi}{3}hx^2 - \frac{\pi}{3}hax + \frac{\pi}{3}ha^2$$

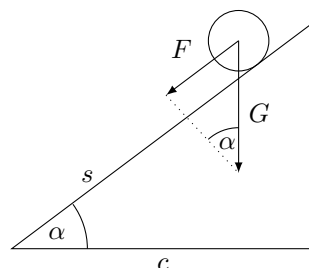
Man erkennt, dass es sich bei V um eine ganze rationale Funktion zweiten Grades handelt. Wegen des positiven Koeffizienten beim quadratischen Glied verläuft die die Funktion darstellende Parabel so, dass sie nach positiven V-Werten hin offen ist. Daher können Maximalwerte nur an den in Frage kommenden Intervallgrenzen auftreten.

Wegen  $R \geq 0$  und  $r \geq 0$  folgt aus (II)  $0 \leq x \leq a$ , so dass  $x_1 = 0$  und  $x_2 = a$  ein maximales Volumen ergeben:  $V_{max} = \frac{\pi}{3}ha^2$ .

Schlussfolgerung 1: Aus (II) folgt mit  $x_1 = 0, R = a$  und mit  $x_2 = a, R = 0$ . Das heißt, das Volumen ist dann ein Maximum, wenn der Kegelstumpf zum Kegel wird.

Schlussfolgerung 2: Nicht immer bietet bei Extremwertberechnungen die Differentialrechnung einen Lösungsweg.

**Lösung S 20**



Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein (siehe Abbildung): Länge der schiefen Ebene (Weg)  $s$ , Masse der Kugel  $m$ , Gewicht der Kugel  $G$ , Beschleunigung  $b$ , Kraft  $F$ , benötigte Zeit  $t$ , Fallbeschleunigung  $g$ .

Zweckmäßig stellt man die zum Herabrollen erforderliche Zeit als Funktion des Neigungswinkels dar. Es ist

$$s = \frac{b}{2}t^2, \quad s = \frac{c}{\cos \alpha}, \quad \text{also} \quad \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{b}{2}t^2 \quad \text{oder} \quad t = \sqrt{\frac{2c}{b \cos \alpha}}$$

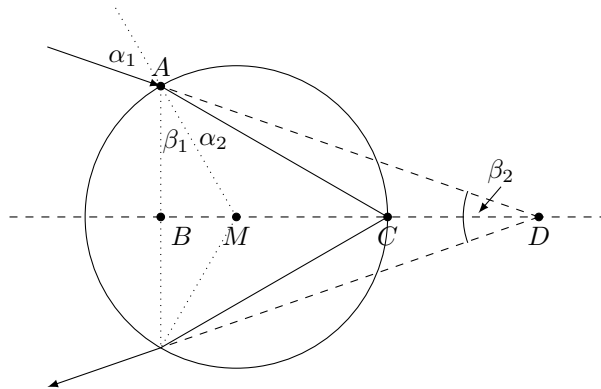
Aus der letzten Gleichung ist noch die Beschleunigung  $b$  zu eliminieren. Aus  $F = mb$  folgt  $b = \frac{F}{m}$  und wegen  $F = G \sin \alpha$  sowie  $G = g \cdot m$  ergibt sich  $b = g \cdot \sin \alpha$ . Demnach ist nach einem Additionstheorem

$$t = \sqrt{\frac{2c}{g \cdot \sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{4c}{g \cdot \sin(2\alpha)}}$$

Die Zeit  $t$  soll einen Minimalwert annehmen; das ist genau dann der Fall, wenn der Nenner des unter der Wurzel stehenden Bruchs einen Maximalwert annimmt, d.h. also, wenn  $\sin(2\alpha) = 1$  ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\alpha = 45^\circ; \quad t_{\min} = \sqrt{\frac{4c}{g}} = 2\sqrt{\frac{c}{g}}$$

### Lösung S 21



a) Aus der Abbildung geht hervor: Es ist  $\angle MCA = \alpha_2$  (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck MCA), also ist  $\beta_1 + 2\alpha_2 + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \beta_1 = 90^\circ - 2\alpha_2$ . Ferner ist  $\angle MAD = \alpha_1$  (Scheitelwinkel), also gilt  $\frac{\beta_2}{2} + \alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$ . Daraus folgt  $\beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$ .

Nun ist  $n_{LF} = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$ , d.h.  $\alpha_1 = \arcsin(n_{LF} \cdot \sin \alpha_2)$ . Demnach folgt

$$\beta_2 = 4\alpha_2 + 2 \arcsin(n_{LF} \cdot \sin \alpha_2)$$

Man hat damit  $\beta_2$  als Funktion von  $\alpha_2$  ausgedrückt. Setzt man  $\frac{d\beta_2}{d\alpha_2} = 0$ , so liefern die Lösungen dieser Gleichung die Extremwerte dieser Funktion (sofern an diesen Stellen  $\frac{d^2\beta_2}{d\alpha_2^2} \neq 0$  ist). Nun ist

$$\frac{d\beta_2}{d\alpha_2} = 4 - \frac{2}{\sqrt{1 - n_{LF}^2 \cdot \sin^2 \alpha_2}} \cdot n_{LF} \cdot \cos \alpha_2$$

Mit Nullsetzen folgt

$$\cos \alpha_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n_{LF}^2}}$$

Damit kann man auch  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$  und  $\beta_2$  bestimmen. Es wäre noch nachzuprüfen, ob  $\beta_2$  für das gefundene  $\alpha_2$  ein Maximum annimmt. Wir wollen hier auf die Prüfung verzichten, da sie recht umständlich ist. In der Tat nimmt  $\beta_2$  ein Maximum an.

Mit  $\alpha_1 = \arcsin(n_{LF} \cdot \sin \alpha_2)$  und  $\beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$  wird nun

$$\beta_2 = 4 \arccos\left(2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n_{LF}^2}}\right) - 2 \arcsin\left(n_{LF} \cdot \sin \arccos\left(2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n_{LF}^2}}\right)\right)$$

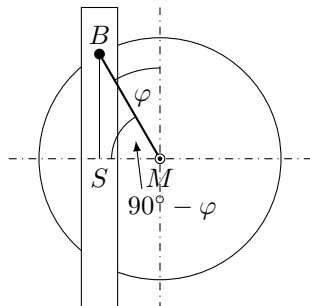


b) Für  $n_{LF} = \frac{4}{3}$  ist  $\alpha_2 = 40^\circ 10' \approx 40^\circ$ ;  $\alpha_2 \approx 59^\circ$  und  $\beta_2 \approx 42^\circ$ .

c) Der Winkel  $\beta_2$  ist der Sehwinkel, unter dem der Radius des Hauptregenbogens gesehen wird. Da der Mittelpunkt des Regenbogens der Sonne gerade gegenüberliegt, bedeutet das u.a., dass ein Regenbogen nur dann sichtbar ist, wenn die Sonne nicht höher als  $42^\circ$  über dem Horizont steht.

Bemerkung: Bei der Rechnung wurde von Dispersions- und Interferenzerscheinungen, die das wirkliche Bild des Regenbogens formen, abgesehen.

**Lösung S 22**

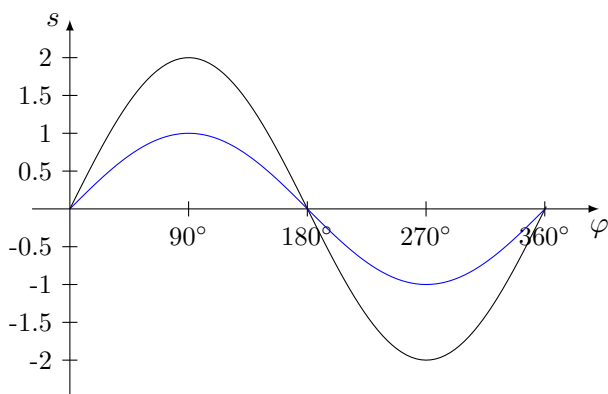


a) Kreuzschleife: Es ist (siehe Abbildung)  $s = MS$ . Bezeichnet man als Drehwinkel  $\varphi$  den Winkel, den die Kurbel  $MB = r$  bei Drehung im Uhrzeigersinn von  $MO$  aus überstreicht, so gilt

$$\frac{MS}{r} = \frac{s}{r} = \cos(90^\circ - \varphi)$$

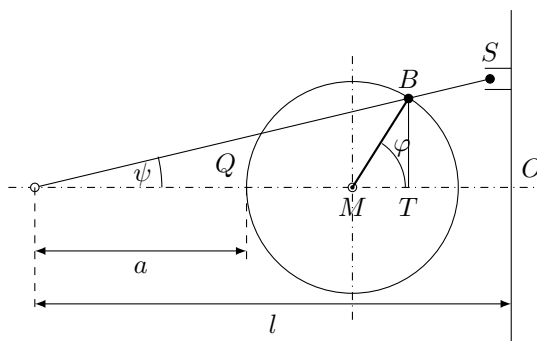
Wegen  $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$  ergibt sich daraus  $\frac{s}{r} = \sin \varphi$  und damit  $s = r \sin \varphi$ .

Grafische Darstellung für  $r = 2$  und  $r = 1$ :

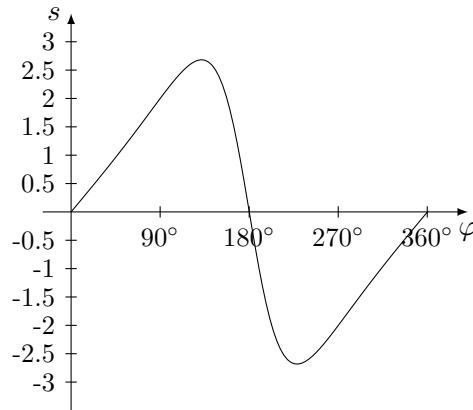


Schwingende Kurbelschleife: Bezeichnet man als Drehwinkel  $\varphi$  den Winkel, den die Kurbel  $MB = r$  bei Drehung im Uhrzeigersinn von  $MO$  aus überstreicht (Abbildung), und als Schwingungswinkel  $\psi$  den Winkel zwischen  $PS$  und  $PO$  (ebenfalls im Uhrzeigersinn gemessen), so ergibt sich  $\frac{OS}{PO} = \frac{s}{l} = \tan \psi$  also  $s = l \tan \psi$ . Nun gilt aber

$$\tan \psi = \frac{TB}{PT} = \frac{TB}{PQ + QM + MT} = \frac{TB}{a + r + MT}$$



Damit hat man die gesuchte Funktion gefunden:  $s = l \cdot \frac{\sin \varphi}{\frac{a}{r} + 1 + \cos \varphi}$



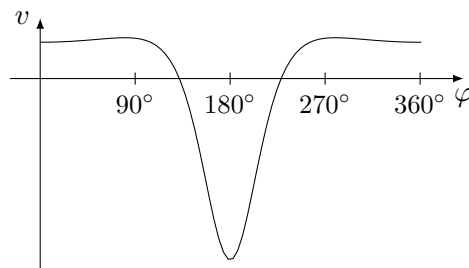
grafische Darstellung für  $r = 1, a = 0,5, l = 3$  Bei der Kreuzschleife schwingt der Maschinenteil harmonisch, bei der schwingenden Kurbelschleife dagegen nicht. Bei der Kreuzschleife dauern Vor- und Rücklauf gleich lang, bei der schwingenden Kurbelschleife geht der Vorlauf langsam, der Rücklauf dagegen schnell vor sich.

b) Die Geschwindigkeit  $v = v(t)$  erhält man durch Differentiation des Weges nach der Zeit:

$$v = v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(r \sin \varphi)}{dt} = \frac{d(r \sin(\omega t))}{dt}$$

Nach der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{d(r \sin(\omega t))}{dt} = \frac{d(r \sin \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega t}{dt} = \omega r \cos(\omega t) = \omega r \cos \varphi$$



Die Beschleunigung  $b = b(t)$  ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Ebenfalls nach der Kettenregel wird  $b = -\omega^2 r \sin(\omega t) = -\omega^2 r \sin \varphi$ .

c) Extremwerte von  $b = b(t)$  liegen an den Nullstellen der ersten Ableitung von b, an denen die zweite Ableitung von Null verschieden ist:  $\frac{db(t)}{dt} = -\omega^3 r \cos(\omega t) = -\omega^3 r \cos \varphi$ .

Aus  $-\omega^3 r \cos \varphi = 0$  folgt  $\cos \varphi = 0$ . Das ist für  $\varphi = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k = 0; 1; 2; 3; \dots$  der Fall.

Nun ist  $\frac{d^2 b(t)}{dt^2} = \omega^4 r \sin \varphi$ .

Für  $\varphi = 90^\circ + (2k + 1) \cdot 180^\circ, k = 0; 1; 2; 3; \dots$  ist  $\sin \varphi = -1$ , also liegen Maximalwerte vor. Für  $\varphi = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k = 0; 1; 2; 3; \dots$  sind es Minimalwerte. In jedem Fall folgt allerdings  $|b_{extrem}| = \omega^2 r$ .

Nun folgt aus dem Grundgesetz der Dynamik  $P = mb$  für die Extremwerte von b:  $|P_{extrem}| = m|b_{extrem}| = m\omega^2 r$ .

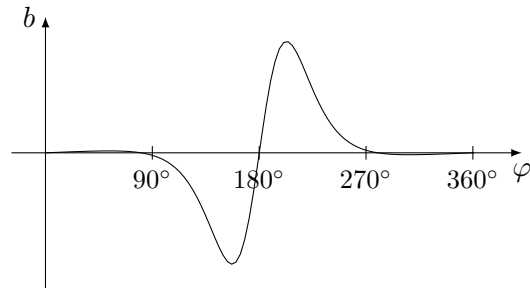
Weiter ist bei Bruch des Bolzens  $P = \tau F$ . Setzt man  $P > |P_{extrem}|$ , so folgt  $\tau F > m\omega^2 r$ , mithin wegen  $F = \frac{d^2}{4} \pi$  auch  $\frac{d^2}{4} \pi \tau > m\omega^2 r$ .

Daraus errechnet man schließlich den Durchmesser d zu

$$d \geq 2\omega \sqrt{\frac{mr}{\pi \tau}}$$

d) Im Bereich  $0^\circ \leq \varphi \leq 105^\circ$  steigt die Weg-Zeit-Funktion fast geradlinig an, die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ist daher in diesem Intervall annähernd konstant, größer als Null. Von  $\varphi \approx 105^\circ$  bis  $\varphi \approx 133^\circ$  geht die Geschwindigkeit auf Null zurück (Maximum des Weges), sie wird von  $\varphi \approx 133^\circ$  bis  $\varphi \approx 227^\circ$  negativ, wobei sie ihren kleinsten Wert offenbar zwischen  $\varphi \approx 165^\circ$  und  $\varphi \approx 195^\circ$  hat; in diesem Intervall ist sie konstant, ihr absoluter Betrag etwa das Fünffache des Wertes zwischen  $0^\circ$  und  $105^\circ$ .

Von  $\varphi \approx 227^\circ$  an wird die Geschwindigkeit wieder positiv, von  $\varphi \approx 255^\circ$  bleibt sie wieder annähernd konstant von gleicher Größe wie zwischen  $0^\circ$  und  $105^\circ$ . Der Kurvenverlauf der Geschwindigkeit  $v$  wird demnach ungefähr dem der vorhergehenden Abbildung entsprechen.



Der Kurvenverlauf der Beschleunigung ist in der oberen Abbildung zu sehen.

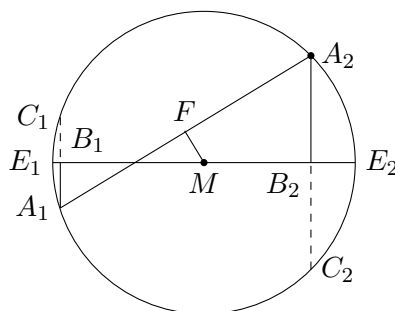
e) Kreuzschleifen wird man vorwiegend bei solchen Maschinen verwenden, bei denen sowohl der Vorhub als auch der Rückhub Arbeitshübe sind (z.B. Maschinenfeilen und Maschinensägen).

Schwingende Kurbelschleifen werden dagegen hauptsächlich in solchen Maschinen verwendet, die nur im Vorhub Arbeit vollbringen, im Rückhub aber leer laufen (z.B. Langhobelmaschinen). Durch den schnelleren Rückhub wird die Zeit des Leerlaufs verkürzt und dadurch die Maschine besser ausgenutzt. Außerdem ist die während des Arbeitshubes konstante Geschwindigkeit vorteilhaft.

### Lösung S 23

Da die Länge  $d$  des Durchmessers in der Aufgabe nicht angegeben ist, wird er willkürlich mit  $d = 2r = 2$  (Längeneinheiten) angenommen. Wenn  $a$  und  $b$  die beiden Teilstrecken des Durchmessers sind, gilt  $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$  und  $a + b = d = 2$ . Daraus folgt  $b = 3a = 1,5$  und  $a = 0,5$ .

Wir führen weitere Beziehungen entsprechend der Abbildung ein.



Dabei sei  $FM$  das Lot von  $M$  auf  $A_1A_2$ . Aus der Abbildung erkennt man:

1. Da der Winkel  $\angle MDF = 30^\circ$  beträgt, gilt für den Winkel  $\angle DMF$  wegen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks, dass  $\angle DMF = 60^\circ$  ist. Spiegelt man das Dreieck  $\triangle MDF$  an  $A_1A_2$ , so entsteht demnach ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle MDM'$ , in dem  $M'F = MF$  und  $M'D = DM = 0,5$  ist.

Damit ist  $MF = 0,5DM = 0,25$  der Abstand der Sehne  $A_1A_2$  vom Mittelpunkt  $M$  des Kreises.

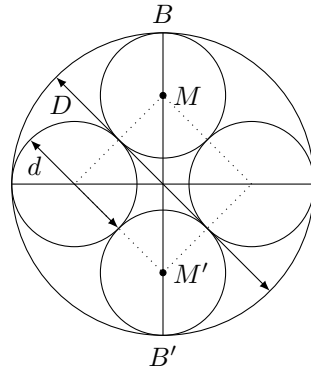
2. Aus der Rechtwinkligkeit des Dreiecks  $\triangle MFA_2$  folgt

$$FA_2^2 = MA_2^2 - MF^2 = r^2 - 0,25^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \rightarrow FA_2 = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$$

Dann ist aber  $A_1A_2 = 2FA_2 = \frac{1}{2}\sqrt{15} \approx 1,936$ .

**Lösung S 24**

a) Die Mittelpunkte der eingelagerten Kugeln müssen in den Endpunkten eines Oktaeders liegen, dessen Seitenlänge  $s = 2r = d$  ist. Der Oktaedermittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der Hohlkugel zusammen. Legt man durch vier (beliebige) Oktaederecken einen ebenen Schnitt, so erhält man die nachfolgende Abbildung.



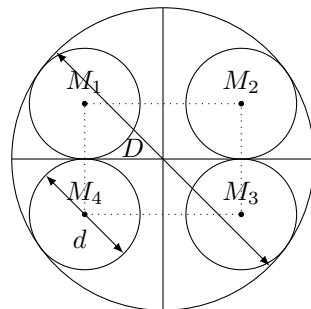
Der Durchmesser  $D$  setzt sich danach aus drei Teilstrecken zusammen:  $BB' = BM + MM' + M'B'$ . Nun ist  $MM'$  Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge  $s = d$ . Also ist

$$D = r + d\sqrt{2} + r = d + d\sqrt{2} = d(1 + \sqrt{2}) \rightarrow d = \frac{D}{\sqrt{2} + 1}$$

Man erweitert den rechts stehenden Bruch mit  $\sqrt{2} - 1$ , um den Nenner rational zu machen:

$$d = D(\sqrt{2} - 1) \approx 0,414D$$

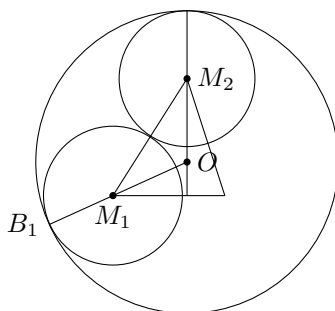
b) Die Mittelpunkte der eingelagerten Kugeln liegen in den Endpunkten eines Würfels, dessen Mittelpunkt mit dem der Hohlkugel zusammenfällt. Legt man durch den Würfel einen Diagonalschnitt, so erhält man die nachfolgende Abbildung als Schnittfigur.



Die Seiten des Rechtecks, das der Würfeldiagonalschnitt ergibt, sind  $d$  und  $d\sqrt{2}$ . Die Rechteckdiagonalen sind die Körperdiagonalen des Würfels und haben die Länge  $d\sqrt{3}$ . Es gilt hier für die Zusammensetzung des Durchmessers  $D$  der Hohlkugel:

$$D = r + d\sqrt{3} + r = d(1 + \sqrt{3}) \rightarrow d = \frac{D}{\sqrt{3} + 1} \approx 0,366D$$

c) Die Mittelpunkte der vier eingelagerten Kugeln bilden ein Tetraeder mit der Kantenlänge  $d$ . Der Schnittpunkt der vier Körperhöhen des Tetraeders fällt mit dem Mittelpunkt der Hohlkugel zusammen. Die Körperhöhe ist  $\frac{d\sqrt{6}}{3}$ . Die Höhen teilen einander im Verhältnis 3:1, von den Ecken aus gerechnet. Legt man einen Symmetrieschnitt durch Tetraeder und Hohlkugel, so erhält man die nachfolgende Abbildung:



Aus der Abbildung erkennt man, dass  $OB_1 = OM_1 + M_1B_1$  ist, also

$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{d\sqrt{6}}{3} = \frac{d}{4}(\sqrt{6} + 2) \rightarrow D = \frac{d}{2}(\sqrt{6} + 2) \rightarrow d = D(\sqrt{6} - 2) \approx 0,449D$$

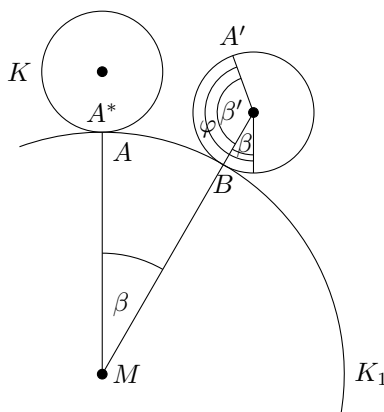
### Lösung S 25

Der feststehende Kreis  $K_1$  hat den Durchmesser  $d_1 = 2r_1$ . der Rollkreis K hat den Durchmesser  $d = 2r$ . Aus der Ausgangslage A (siehe Abbildung) rolle der Kreis K bis zum Umfangspunkt B. Der Berührungspunkt  $A^*$  des Umfangs von K in der Ausgangslage bewegt sich dabei in die Lage  $A'$ . Die beiden Kreisbögen  $AB$  und  $A'B$  haben wegen der Bedingung des Nichtgleitens die gleiche Länge. Die zu diesen Bögen gehörenden Mittelpunktswinkel bezeichnen wir mit  $\beta$  und  $\beta'$ . Dann ist die Gesamtdrehung  $\varphi$  des Rollkreises K:  $\varphi = \beta + \beta'$ .

Misst man die Winkel im Bogenmaß, so ist

$$\widehat{AB} = r_1 \widehat{\beta} \quad \text{und} \quad \widehat{A'B} = r \widehat{\beta'}$$

Aus  $\widehat{AB} = \widehat{A'B}$  folgt  $r_1 \widehat{\beta} = r \widehat{\beta'}$  oder  $\beta' = \frac{r_1 \widehat{\beta}}{r} = \frac{d_1 \widehat{\beta}}{d}$ .



Somit ist die resultierende Drehung

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\beta} + \widehat{\beta'} = \widehat{\beta} + \frac{d_1 \widehat{\beta}}{d} = \widehat{\beta} \left(1 + \frac{d_1}{d}\right)$$

Misst man aber die Winkel im Gradmaß, so gilt entsprechend  $\widehat{AB} = \frac{\pi d_1 \beta}{360^\circ}$  und  $\widehat{A'B} = \frac{\pi d \beta'}{360^\circ}$ . Wegen  $\widehat{AB} = \widehat{A'B}$  gilt  $d_1 \beta = d \beta'$ , also  $\beta' = \frac{d_1 \beta}{d}$ . Somit ist

$$\varphi = \beta + \beta' = \beta + \frac{d_1 \beta}{d} = \beta \left(1 + \frac{d_1}{d}\right)$$

In die allgemeine Form setzen wir ein:

Frage 1:  $d_1 = d$ ,  $\widehat{\beta} = 2\pi$  bzw.  $\beta = 360^\circ$ , ergibt  $\varphi = 4\pi = 720^\circ$ .

Frage 2:  $d_1 = 3d$ ,  $\widehat{\beta} = 2\pi = 360^\circ$ , ergibt  $\varphi = 8\pi = 1440^\circ$ .

Frage 2:  $d = 3d_1$ ,  $\widehat{\varphi} = 2\pi = 360^\circ$ , ergibt  $\widehat{\beta} = \frac{6\pi}{4} = 270^\circ$ .

Antwort: Im Fall a dreht sich der Rollkreis zweimal, im Fall b viermal um seinen Mittelpunkt, im Fall c muss er drei Viertel des Festkreises umlaufen.

**Lösung S 26**

a) Man erhält das Mauerwerksvolumen als Differenz aus dem Gesamtvolumen des Bauwerkes und dem umbauten Hohlraum. Beides sind im vorliegenden Fall Kegelstümpfe. Die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfs ist

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

wobei  $h$  die Höhe des Kegelstumpfs,  $r_1$  und  $r_2$  die Radien von Grund- und Deckkreis sind. Für das Mauerwerksvolumen ergibt sich damit

$$V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) - \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

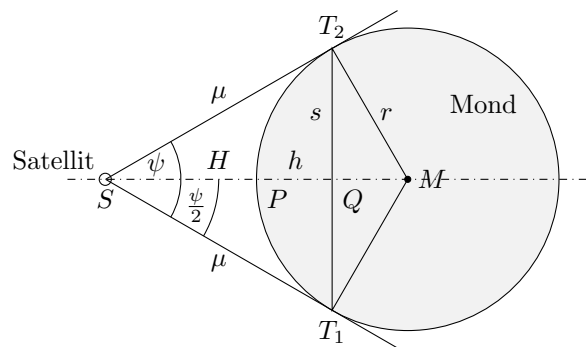
mit  $R_1 = \frac{D_u}{2} = 5,60$  m,  $R_2 = \frac{D_o}{2} = 3,90$  m,  $r_1 = \frac{d_u}{2} = 5,00$  m und  $r_2 = \frac{d_o}{2} = 3,75$  m. Daraus erhält man  $V \approx 1555$  m<sup>3</sup>.

b) Das Gewicht eines Körpers ergibt sich wegen  $G = V \cdot \gamma$  zu  $G \approx 3732$  Mp.

c) Den Druck  $p$  errechnet man als Quotient aus der wirksamen Kraft (in unserem Fall das Gewicht  $G$ ) und der Fläche, auf die die Kraft wirkt. Die Fläche  $F$  (der Grundriss des Schornsteinmantels) ist ein Kreisring mit dem äußeren Radius  $R_a = 5,60$  m und den inneren Radius  $R_i = 5,00$  m. Es wird  $F \approx 20$  m<sup>2</sup>, also für den Druck  $p \approx 18,66 \frac{kp}{cm^2}$ . Bei der Rechnung wird allerdings vorausgesetzt, dass sich die gesamte Last des Schornsteinmantels gleichmäßig auf den Querschnitt verteilt.

**Lösung S 27**

a) Das zu übersehende Mondgebiet ist die Fläche einer Kugelkappe (Abbildung). Der Radius  $r$  der Kugelkappe ist bekannt; er ist gleich dem Radius  $r$  des Mondes. Zur Berechnung des Flächeninhalts  $F$  wird daher nur noch die Höhe  $h$  der Kugelkappe benötigt. Man errechnet sie durch mehrmalige Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes oder mit Hilfe des Höhensatzes oder mit Hilfe des Satzes des Euklid.



1. Berechnung mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes: Die Dreiecke  $ST_1M$ ,  $T_1QM$  und  $SQT_1$  sind rechtwinklig. Also gilt  $u^2 + r^2 = (H + h)^2$  (1),  $s^2 + (r - h)^2 = r^2$  (2) und  $(H + h)^2 + s^2 = u^2$  (3).

Daraus folgt, wenn man (3) in (1) einsetzt und (2) nach  $s$  auflöst

$$(H + h)^2 + s^2 + r^2 = (H + r)^2 \quad \text{und} \quad s^2 = r^2 - (r - h)^2$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, so ergibt sich  $(H + h)^2 + r^2 - (r - h)^2 + r^2 = (H + r)^2$ . Diese Gleichung enthält als einzige Unbekannte die Höhe  $h$  der Kugelkappe. Man löst sie nach  $h$  auf:

$$h = \frac{Hr}{H + r}$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt  $F$  der Kugelkappe zu  $F = 2\pi r h = \frac{2\pi r^2 H}{H+r}$ . Da in unserem Fall  $H = 2r$  ist, wird die Berechnung numerisch besonders einfach:

$$F = \frac{2\pi r^2 H}{H+r} = \frac{4\pi r^2}{3}$$

Mit  $r = 1750$  km,  $\pi = \frac{22}{7}$  ergibt sich  $F \approx 13000000$  km<sup>2</sup>.

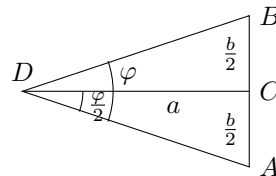
b) Man erhält den prozentualen Anteil  $p$  der zu überschauenden Mondoberfläche  $F$  an der gesamten Mondoberfläche  $O$ , indem man  $F$  durch  $O$  dividiert und mit 100% multipliziert:

$$p = \frac{2\pi r^2 H \cdot 100}{4\pi r^2 (r+H)} \% = \frac{100r}{3r} \% \approx 33,3\%$$

Man erkennt, dass der Prozentsatz  $p$  unabhängig ist vom Radius  $r$ , wenn die Höhe  $H$  des Beobachtungspunktes in Vielfachen von  $r$  ausgedrückt wird:  $H = kr$ . Dann kürzt sich nämlich die Größe  $r$  aus dem Bruch weg.

c) Es ist, wie man aus der Abbildung erkennt,  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{r+H}$ .

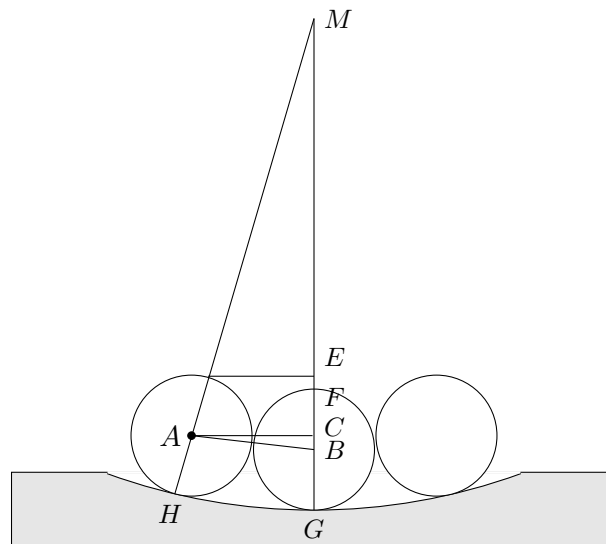
Wegen  $H = 2r$  folgt daraus  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$ , womit für den Winkel folgt  $\varphi \approx 39,94^\circ$ .



d) Ist  $b$  die Breite des Gegenstands,  $a$  der Abstand des Beobachters, (Abbildung) so muss gelten

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{b}{2a} = \tan \frac{\varphi}{2} \rightarrow b = 2a \tan \frac{\varphi}{2} \approx 70,70 \text{ m}$$

**Lösung S 28**



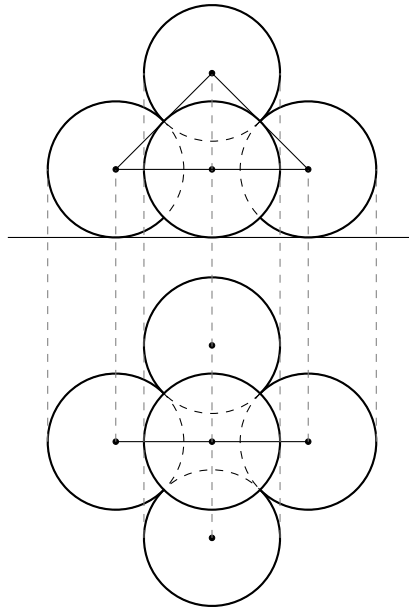
Es sei  $M$  der unbekannte Mittelpunkt. Dann gilt  $R = GM = HM = BM + r = AM + r$ . Ferner ist  $BC = EF = a$ ,  $AB = d$ , folglich  $(AC)^2 = d^2 - a^2$ .

Da  $\angle ACM = 90^\circ$  ist, folgt  $CM^2 + AC^2 = AM^2$  und wegen  $AM = BM$  und  $CM = BM - a$

$$(BM - a)^2 + d^2 - a^2 = BM^2 \rightarrow -2BM \cdot a + d^2 = 0 \rightarrow BM = \frac{d^2}{2a}$$

Damit erhält man  $R = \frac{d^2}{2a} + r$  bzw.  $D = \frac{d^2}{a} + d$ . Setzt man die gegebenen Werte ein, so ergibt sich  $D = 105$  mm.

**Lösung S 29**



Die 2., 4., 6., ... Kugelschicht besteht nur aus je 81 Kugeln, da sich jede Kugel dieser Schicht in die Vertiefung zwischen jeweils 4 Kugeln der vorhergehenden Schicht legt. Die 1., 3., 5., ... Schicht besteht dagegen — entsprechend den Innenmaßen des Gefäßes — aus 100 Kugeln.

Den Abstand zweier benachbarter Ebenen durch die Kugelmittelpunkte erhält man durch eine an Hand der Abbildung durchgeführte Überlegung zu  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  cm. Damit haben n Schichten die Gesamtdicke  $(1 + \frac{n-1}{2}\sqrt{2})$  cm.

Es ist nun die größte (natürliche) Zahl n zu finden, für die gilt

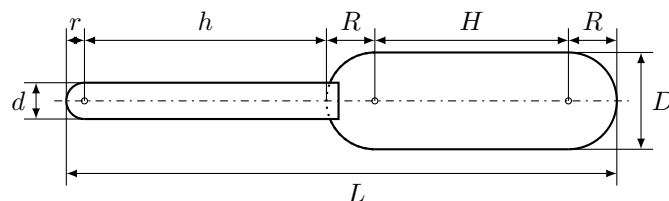
$$\left(1 + \frac{n-1}{2}\sqrt{2}\right) \leq 10$$

oder, was dasselbe besagt,  $n \leq 9\sqrt{2} + 1 \approx 13,73$ .

Das heißt also, es sind 13 Schichten im Gefäß, 7 zu je 100 und 6 zu je 81 Kugeln, insgesamt demnach 1186.

Die Gesamthöhe dieser 13 Schichten ist  $(1 + \frac{12}{2}\sqrt{2}) = (1 + 6\sqrt{2}) \approx 9,48$  cm. Von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes fehlen also noch ungefähr 0,52 cm.

**Lösung S 30**



Aus 1. und 4. folgt für die Skalenlänge s:

$$s = \frac{\rho_2 - \rho_1}{0,01 \text{ gcm}^{-3}} \cdot 2 \text{ mm} = 20 \text{ cm}$$

Offenbar ist  $h \geq s$ ; ein genauerer Wert wird später ermittelt. In eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho_1$  taucht das Aräometer bis zum obersten Skalenpunkt ein, das verdrängte Volumen  $V_1$  ist  $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$ .

In eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho_2$  taucht es bis zum untersten Skalenpunkt ein, das verdrängte Volumen  $V_2$  ist  $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$ . Es gilt

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\rho_2} : \frac{m}{\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}$$



also  $V_1 = 2V_2$ , mithin auch  $V_1 - V_2 = V_2$ .

Es ist aber  $V_1 - V_2$  gleich dem Volumen der Skalenröhre mit der Länge  $s$ , also  $V_1 - V_2 = V_2 = \frac{\pi}{4}d^2s$ , und  $V_2$  gleich dem Volumen des Tauchkörpers bis zum Skalenpunkt für  $\rho_2$ , also der Summe aus zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser  $D$ , dem Zylinder mit dem Durchmesser  $D$  und der Höhe  $H$  sowie dem Zylinder mit dem Durchmesser  $d$  und den Höhe  $x$  (Stück der Skalenröhre zwischen dem Ansatz am Tauchkörper und dem Skalenpunkt für  $\rho_2$ ); dabei kann, wie sich später zeigen wird, der Kugelabschnitt am Ansatz der Skalenröhre vernachlässigt werden. Es gilt also:

$$V_2 = \frac{\pi}{6}D^3 + \frac{\pi}{4}D^2H + \frac{\pi}{4}d^2x = \frac{\pi}{4}d^2s \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}D^3 + D^2H + d^2x = d^2s$$

oder  $H = \frac{d^2}{D^2}(s - x) - \frac{2}{3}D$ . Setzt man zunächst einmal  $x = 0$ , so ergibt sich  $H \approx 3,67$  cm. Man wird nun  $H$  mit  $H = 3,5$  cm ansetzen; dann ergibt sich  $x$  zu  $x \approx 0,7$  cm. Damit ergibt sich für  $h$ :  $h \geq s + x = 20 + 0,7 = 20,7$  cm.

Da die Skalenröhre auch beim Eintauchen bis zum obersten Skalenpunkt noch aus der Flüssigkeit herausragen muss, damit man sie anfassen kann, wird man  $h$  mit  $h \approx 22$  cm festsetzen.

(Bemerkung: In der Praxis wird man die genaue Stellung der Skala, also die Lage des unteren Skalenpunktes für  $\rho_2$ , durch Eintauchen in eine Probeflüssigkeit der Dichte  $\rho_2$  ermitteln. Dabei gleicht man gleichzeitig die kleine Ungenauigkeit aus, die sich durch die Vernachlässigung des Kugelabschnitts ergibt.)

Die Gesamtlänge  $L$  ergibt sich dann zu  $L = 2R + H + h + r \approx 28$  cm.

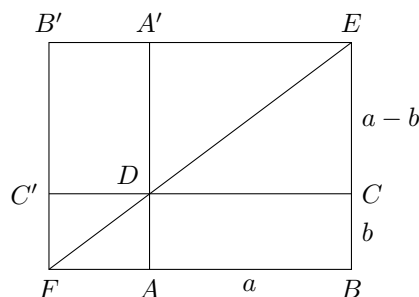
Die erforderliche Masse  $m$  erhält man aus folgender Rechnung:

$$m = \rho_1 V_1 = 2\rho_1 V_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \frac{\pi}{4}d^2h \approx 31,4 \text{ g}$$

### Lösung S 31

Das Produkt  $ab$  kann man als den Flächeninhalt  $F$  eines Rechtecks  $ABCD$  mit den Seiten  $a$  und  $b$  auffassen. Bezeichnet man die gesuchte Größe mit  $x$ , so gilt  $\frac{ab}{a-b} = x$  oder  $x(a-b) = ab$ .

Damit ergibt sich  $x$  als Seite eines Rechtecks  $A'B'C'D'$  mit dem Flächeninhalt  $F$  und den Seiten  $x$  und  $a-b$ . Das Problem stellt also konstruktiv eine Flächenverwandlung dar: Es ist das Rechteck  $ABCD$  mit den Seiten  $a$  und  $b$  in ein flächengleiches Rechteck  $A'B'C'D'$  mit den Seiten  $x$  und  $a-b$  zu verwandeln. Dazu bieten sich mehrere Konstruktionsmöglichkeiten an. Als einfachste erscheint die folgende (Abbildung):



1. Man konstruiert das Rechteck  $ABCD$  mit  $AB = a$  und  $BC = b$ .
2. Man verlängert  $BC$  über  $C$  hinaus um  $a-b$  bis  $E$ .
3. Man bringt die Geraden durch  $A$  und  $B$  sowie durch  $E$  und  $D$  zum Schnitt; dieser sei  $F$ .
4. Man errichtet in  $F$  auf  $AF$  und in  $E$  auf  $CE$  die Senkrechten; deren Schnitt sei  $B'$ .
5. Man verlängert  $AD$  bis zum Schnitt  $A'$  mit  $EB'$  und  $CD$  bis zum Schnitt  $C'$  mit  $FB'$ .

Das Rechteck  $A'B'C'D'$  ist das gesuchte.

Es ist zu beweisen: 1.  $ABCD = A'B'C'D'$ , 2.  $A'D = a - b$  oder  $C'D = a - b$ .

1.  $\triangle BEF \cong \triangle B'FE$  wegen  $EF = EF$ ,  $\angle BFE = \angle BE'F$ ,  $\angle BEF = \angle B'FE$  (beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)

$\triangle AFD \cong \triangle C'DF$  wegen  $DF = DF, \angle AFB = \angle C'DF, \angle ADF = \angle C'FD$  (beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)

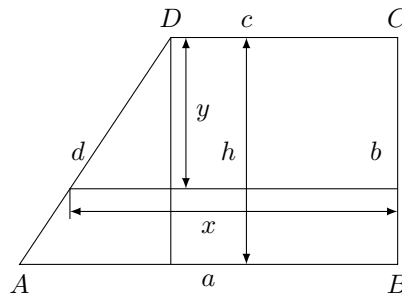
$\triangle CDE \cong \triangle A'ED$  wegen  $DE = DE, \angle CDE = \angle A'ED, \angle CED = \angle A'DE$  (beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)

Daraus folgt:

$$\square ABCD = \triangle BEF - \triangle AFD - \triangle CDE = \triangle B'FE - \triangle C'DF - \triangle A'ED = \square A'B'C'D'$$

2.  $A'D \parallel EC, A'E \parallel DC$ , daraus folgt  $A'D = EC = a - b$  (nach Konstruktion).

**Lösung S 32**



1. Berechnung: Da die Fläche eines Trapezes ausschließlich von der Länge der parallelen Seiten und der Höhe, nicht aber von den Winkeln abhängt, spielt der Winkel  $\alpha$  für das vorliegende Problem keine Rolle, und die Betrachtungen können ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit an einem rechtwinkligen Trapez durchgeführt werden (Abbildung).

Die teilende Parallele habe die Länge  $x$ , ihr Abstand von  $c$  sei  $y$ . Dann gilt

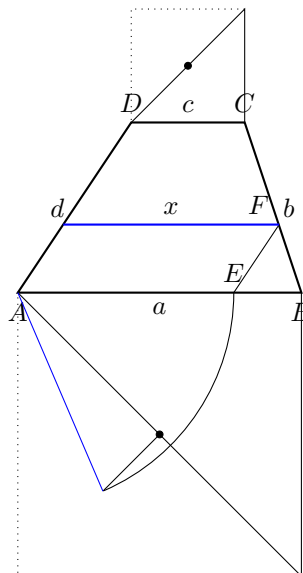
$$\frac{x+c}{2} \cdot y = \frac{a+c}{4} \cdot h$$

Nach dem Strahlensatz gilt  $\frac{y}{h} = \frac{x-c}{a-c}$ , also  $y = \frac{x-c}{a-c}h$ . Daraus folgt nach Umrechnung

$$x^2 - c^2 = \frac{a^2 - c^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

Man erkennt, dass die Länge der Parallelen unabhängig ist von der Höhe  $h$ . Ihr Abstand  $y$  von  $c$  ist dann

$$y = \frac{x-c}{a-c}h \rightarrow y = \frac{\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{2}} - c}{a-c} \cdot h$$



2. Konstruktion: Die Berechnung liefert den Schlüssel zur Konstruktion. Aus

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \quad \text{folgt} \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

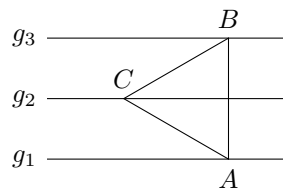
Das heißt aber, man erhält  $x$  als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten  $\frac{a}{2}\sqrt{2}$  und  $\frac{c}{2}\sqrt{2}$  sind. Diese Katheten sind aber die halben Diagonalen aus den Quadraten der beiden parallelen Trapezseiten.

Konstruktionsbeschreibung:

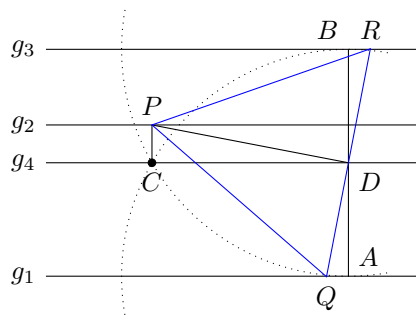
1. Man konstruiert die Quadrate über den parallelen Trapezseiten, zieht in ihnen je eine Diagonale und halbiert diese.
2. Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit den halbierten Diagonalen als Katheten. Die Hypotenuse hat die Länge  $x$  der gesuchten Parallelen.
3. Man trägt die Strecke  $x$  von  $A$  aus auf  $a = AB$  ab; der Endpunkt sei  $E$ . Dann zieht man durch  $E$  eine Parallele zu  $d = DA$ ; ihr Schnitt mit  $b = BC$  sei  $F$ . Die Parallele zu  $a = AB$  und  $c = CD$  durch  $F$  ist die gesuchte Parallele.

Determination: Sämtliche Konstruktionen sind stets ausführbar und eindeutig.

**Lösung S 33**



Analysis: Die allgemeine Lösung findet man, indem man von einem leicht lösbaren Spezialfall ausgeht: Es werde zunächst angenommen, der Abstand der gegebenen Parallelen  $g_1$  und  $g_2$  sei gleich dem Abstand der Parallelen  $g_2$  und  $g_3$ . Dann liegt das gesuchte Dreieck  $ABC$  symmetrisch zu  $g_2$  (erste Abbildung), die Länge der Dreieckseite  $AB = BC = CA$  ist gleich dem Abstand der Parallelen  $g_1$  und  $g_3$ , das Dreieck  $ABC$  ist ohne weiteres konstruierbar.



Betrachtet man nun die Analysisfigur der zweiten Abbildung, so erkennt man: Ist  $PD$  die Höhe im Dreieck  $PQR$ , so ist  $\angle PDC = \angle BDR$ , da die Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen. Da ferner  $\angle CDB = \angle PDR = 90^\circ$  ist, ist das Dreieck  $CDP$  ähnlich dem Dreieck  $BDR$ . Folglich gilt  $PD : RD = CD : BD$ . Wegen  $CD : BD = \sqrt{3} : 1$  gilt dann aber auch  $PD : RD = \sqrt{3} : 1$ .

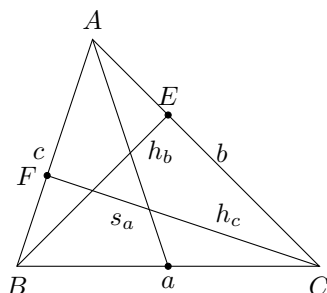
Konstruktionsbeschreibung: Man konstruiert die Mittelparallele  $g_4$  zu  $g_1$  und  $g_3$  und errichtet in einem beliebigen Punkt  $D$  von  $g_4$  die Senkrechte, die  $g_1$  im Punkt  $A$  und  $g_3$  im Punkt  $B$  schneidet. Sodann schlägt man um  $A$  und  $B$  zwei Kreisbögen mit  $AB$  als Radius, die sich in  $C$  auf  $g_4$  schneiden.

In  $C$  errichtet man die Senkrechte auf  $g_4$ , sie schneidet  $g_2$  in  $P$ . Man verbindet  $P$  mit  $D$  und errichtet in  $D$  auf  $PD$  die Senkrechte. Deren Schnitt mit  $g_1$  sei  $Q$ , mit  $g_3$  sei  $R$ . Das Dreieck  $PQR$  ist das gesuchte.

Determination: Da die Kreisbögen um  $A$  und  $B$  einander in zwei Punkten  $C$  und  $C'$  schneiden, ist das gesuchte Dreieck  $PQR$  nur bis auf Symmetrie bestimmt. Alle anderen Konstruktionen sind stets und eindeutig ausführbar.

**Lösung S 34**

Vorüberlegung: Die Analysisfigur (Abbildung) zeigt, dass kein Teilstück des Dreiecks ABC unmittelbar konstruierbar ist. Durch Festlegen jedes der drei gegebenen Stücke wird für einen weiteren Punkt des Dreiecks ABC höchstens ein geometrischer Ort bestimmt.

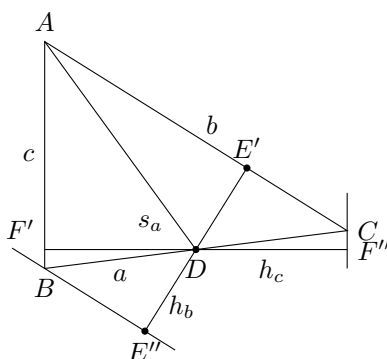


Die Situation ändert sich jedoch sofort, wenn man die Höhen  $h_b$  und  $h_c$  in Richtung  $b$  bzw.  $c$  parallel zu sich selbst verschiebt, so dass sie durch  $D$  verlaufen (Abbildung 2). Dann gilt  $\triangle DBF' \cong \triangle DCF''$  wegen  $DB = DC = \frac{a}{2}$ ,  $\angle BDF' = \angle CDF''$  (Scheitelwinkel),  $\angle DF'B = \angle DF''C$  (rechte Winkel nach Konstruktion).

Also ist  $DF' = DF'' = \frac{h_c}{2}$ . Entsprechend gilt  $\triangle DCE' \cong \triangle DBE''$  wegen  $DB = DC = \frac{a}{2}$ ,  $\angle E'DC = \angle E''DB$  (Scheitelwinkel),  $\angle CE'D = \angle BE''D$  (rechter Winkel nach Konstruktion). Damit ergibt sich die Möglichkeit,  $\triangle AF'D$  aus  $AD = s_a$ ,  $DF' = \frac{h_c}{2}$ ,  $\angle AF'D = 90^\circ$ , und  $\triangle AED$  aus  $AD = s_a$ ,  $DE' = \frac{h_b}{2}$ ,  $\angle AE'D = 90^\circ$  zu konstruieren.

Man erhält daraus  $B$  und  $C$  auf folgende Weise:  $B$  liegt 1. auf der Geraden durch  $A$  und  $F'$  und 2. auf der Parallelen zur Geraden durch  $A$  und  $E'$  im Abstand  $h_c$ , die in derselben Halbebene liegt wie  $D$ .  $C$  liegt 1. auf der Geraden durch  $A$  und  $E'$  und 2. auf der Parallelen zur Geraden durch  $A$  und  $F'$  im Abstand  $h_b$ , die in derselben Halbebene liegt wie  $D$ .

Abbildung 2



Nach Festlegung von  $B$  ( $C$ ) auf die beschriebene Weise ergeben sich für  $C$  ( $B$ ) auch folgende geometrische Örter:  $C$  ( $B$ ) liegt 1. auf der Geraden durch  $A$  und  $E'$  ( $F'$ ) und 2. auf der Verlängerung von  $BD$  ( $CD$ ) über  $D$  hinaus. Oder:  $C$  ( $B$ ) liegt auf der Verlängerung von  $BD$  ( $CD$ ) über  $D$  hinaus im Abstand  $BD$  ( $CD$ ) =  $\frac{a}{2}$  von  $D$ .

Konstruktionsbeschreibung:

Man legt  $AD = s_a = 6$  cm fest und schlägt über  $AD$  nach beiden Seiten den Thaleskreis. Um  $D$  schlägt man mit  $\frac{h_b}{2}$  in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, dessen Schnitt mit dem einen Thaleshalbkreis den Punkt  $E'$  liefert, und mit  $\frac{h_c}{2}$  in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, dessen Schnitt mit dem anderen Thaleshalbkreis den Punkt  $F'$  ergibt.

Sodann zieht man zu  $AE'$  die Parallele im Abstand  $h_b$  in der Halbebene, in der  $D$  liegt. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch  $A$  und  $F'$  ist  $B$ . Ferner zieht man zu  $AF'$  die Parallele im Abstand  $h_c$  in der Halbebene, in der  $D$  liegt. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch  $A$  und  $E'$  ist  $C$ .

Man kann  $C$  ( $B$ ) auch nach Konstruktion von  $B$  ( $C$ ) erhalten, indem man  $BD$  ( $CD$ ) über  $D$  hinaus bis

zum Schnitt mit der Geraden durch A und E' (F') bzw. um sich selbst verlängert.

Diskussion:

Die Aufgabe ist (bis auf Symmetrie) eindeutig lösbar, wenn  $\frac{h_c}{2} < s_a$  und  $\frac{h_b}{2} < s_a$  ist. In diesem Fall ergeben die Kreisbögen um D je genau einen Schnittpunkt mit einem Thaleshalbkreis. Die weitere Konstruktion ist eindeutig.

Wenn dagegen  $\frac{h_b}{2} \geq s_a$  oder  $\frac{h_c}{2} \geq s_a$  ist, so existiert kein entsprechender Schnittpunkt mit dem Thaleshalbkreis und die Aufgabe ist unlösbar.

Im vorliegenden Fall ist die Aufgabe wegen  $\frac{h_b}{2} = 2,5 < 6 = s_a$  und  $\frac{h_c}{2} = 3,5 < 6 = s_a$  eindeutig lösbar.

### Lösung S 35

Analysis (Abbildung): Der Punkt C liegt

1. auf dem Kreis um B mit  $AB = a$  als Radius,
2. auf dem Kreis um A mit  $AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$  als Radius.

Der Punkt D liegt 1. auf dem Kreis um A mit  $AB = a$  als Radius,

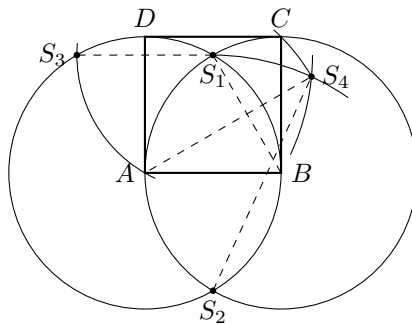
2. auf dem Kreis um B mit  $AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$  als Radius.

Es kommt also darauf an, die Strecke  $AC = BD = a\sqrt{2}$  zu konstruieren. Dazu verhilft die folgende Überlegung:

Die direkte Konstruktion als Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge  $a$  ist nicht möglich, da es nicht gelingt, nur mit dem Zirkel die Lage des dritten Eckpunktes unmittelbar zu finden.

Aus der Gleichung  $3a^2 - a^2 = 2a^2$  oder  $a\sqrt{2} = \sqrt{3a^2 - a^2}$  folgt aber, dass man  $a\sqrt{2}$  erhält, wenn es gelingt, ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $a\sqrt{3}$  und einer Kathete  $a$  zu konstruieren.

Die Hypotenuse  $a\sqrt{3}$  erhält man als doppelte Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $a$  bzw. (da der Fußpunkt der Höhe nicht ermittelt werden kann) als längere Diagonale eines Rhombus mit der Seitenlänge  $a$  und der kürzeren Diagonale  $a$ . Die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks erfolgt über die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis  $2a$  und den Schenkeln  $a\sqrt{3}$ .



Konstruktion:

Man schlägt um A und um B Kreise mit dem Radius  $a = AB$ . Ihre Schnittpunkte seien  $S_1$  und  $S_2$ . Weiter schlägt man um  $S_1$  einen Kreis mit dem Radius  $a$ , der den Kreis um A außer in B in  $S_3$  schneidet. Um  $S_2$  und  $S_3$  schlägt man Kreise mit dem Radius  $S_3B = S_1S_2$ , die sich in  $S_4$  schneiden (bzw. in  $S'_4$ ). Die Strecke  $AS_1 = AS'_4$  hat die Länge der Diagonalen  $AC = BD$  im Quadrat ABCD.

Der Kreis um A mit dem Radius  $AS_4$  schneidet den Kreis um B mit dem Radius  $AB$  in C, und der Kreis um B mit dem Radius  $AS_4$  schneidet den Kreis um A mit dem Radius  $AB$  in D.

Determination: Alle Konstruktionen sind (bis auf Symmetrie) stets eindeutig.

### Lösung S 36

Wendet man die bekannte Dreiecksformel

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s-c} = \frac{2\rho}{a+b+c} \quad \text{mit} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

auf ein rechtwinkliges Dreieck an ( $\gamma = 90^\circ$ ), so ergibt sich wegen  $\tan 45^\circ = 1$  der Satz:  
 Der Inkreisdurchmesser eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Katheten vermindert um die Hypotenuse. Daraus folgen für die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CAD und BCD die Gleichungen

$$2\rho = a + b - c; \quad 2\rho_1 = q + h_c - b; \quad 2\rho_2 = p + h_c - a$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich wegen  $p + q = c$ :

$$2(\rho + \rho_1 + \rho_2) = 2h_c \rightarrow \rho + \rho_1 + \rho_2 = h_c$$

**Lösung S 37**

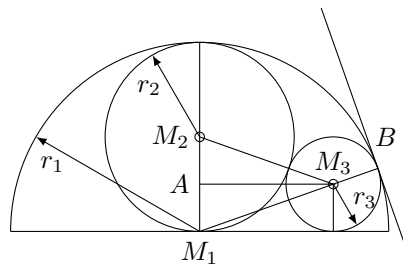
Die Ungleichung  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  ist gleichbedeutend mit der Ungleichung  $ad < bc$ . Addiert man auf beiden Seiten dieser Ungleichung die Größe  $ab$ , so folgt  $ab + ad < ab + bc$ .

Damit gilt auch  $a(b + d) < b(a + c)$ . Dividiert man beide Seiten durch  $b$  und durch  $(b + d)$ , so ergibt sich

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}$$

und der erste Teil der Behauptung ist bewiesen. Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung  $ad < bc$  dagegen die Größe  $cd$ , so folgt  $ad + cd < bc + cd$  oder  $(a + c)d < (b + d)c$ . Daraus ergibt sich durch Division mit  $(b + d)$  und  $d$  die rechte Seite der Ungleichung und der zweite Teil der Behauptung ist bewiesen.

**Lösung S 38**



Analysis (Abbildung): Wenn  $K_3$  die Peripherie von  $K_1$  im Punkt B berührt, ist die Tangente  $t$  in B an  $K_1$  gleichzeitig auch Tangente in B an  $K_3$ . Folglich bilden die Berührungsradien von  $K_1$  und  $K_3$  eine Gerade, und da  $M_1$  und  $M_3$  auf derselben Seite der Peripherie von  $K_1$  liegen, fällt  $M_3$  auf  $M_1B$ . Es ist aber  $M_1B = r_1 = 2r_2 = M_1M_3 + r_3$ , also  $M_1M_3 = 2r_2 - r_3$ .

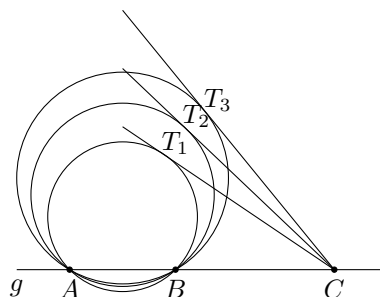
Ferner kann  $M_1M_3$  nach dem Lehrsatz des Pythagoras aus  $M_1A = r_3$  und  $AM_3$  berechnet werden;  $AM_3$  ist nach demselben Satz aus  $AM_2 = r_2 - r_3$  und  $M_2M_3 = r_2 + r_3$  darstellbar. Mithin kann eine Gleichung mit  $r_3$  als einziger Unbekannter aufgestellt werden.

Beweis:

$$M_1M_3^2 = (2r_2 - r_3)^2 = 4r_2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2 \quad \text{und} \quad M_1M_3^2 = r_3^2 + (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = r_3^2 + 4r_2r_3$$

$$\text{also } r_3^2 + 4r_2r_3 = 4r_2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2 \rightarrow 2r_3 = r_2. \text{ Wegen } 2r_2 = r_1 \text{ wird } 4r_3 = r_1.$$

**Lösung S 39**



Nach dem Sehnen tangensatz ist das Produkt der Streckenlängen  $CA \cdot CB$  gleich dem Quadrat  $CT^2$  des Tangentenabschnitts. Es gilt also für jeden durch A und B gehenden Kreis

$$CT^2 = CA \cdot CB \quad \text{oder} \quad CT = \sqrt{CA \cdot CB}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen; denn in dieser Gleichung tritt der Radius r nicht auf, sondern nur zwei Strecken, deren Länge von der Lage des Endpunktes C abhängt.

**Lösung S 40**

Es sei  $n = 10a + b$ , wobei a eine natürliche Zahl mit beliebig vielen Stellen und b eine einstellige natürliche Zahl sei. Dann gilt

$$n^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

Ist nun b gerade, so ist auch  $b^2$  gerade und mithin auch die Schlussziffer von  $n^2$ . Ist aber b ungerade, so sind die Fälle  $b = 1; b = 3; b = 5; b = 7; b = 9$  möglich. In diesen Fällen ergibt sich

$$\begin{array}{ll} n^2 = 100a^2 + 20a + 1 & n^2 = 100a^2 + 60a + 9 \\ n^2 = 100a^2 + 100a + 25 & n^2 = 100a^2 + 140a + 49 \\ & n^2 = 100a^2 + 180a + 81 \end{array}$$

Man sieht, dass in diesen Fällen die Zehnerziffer gerade ist. Also enthält jede Quadratzahl oberhalb von 9 mindestens eine gerade Ziffer.

**Lösung S 41**

Jede Primzahl oberhalb von 3 ist entweder in der Form  $6n - 1$  oder in der Form  $6n + 1$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  darstellbar.

Beweis: Jede natürliche Zahl lässt sich in einer der folgenden Formen darstellen:  $6n; 6n + 1; 6n + 2; 6n + 3; 6n + 4; 6n + 5$  mit  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . Von diesen Zahlen sind sicherlich die Zahlen  $6n; 6n + 2$  und  $6n + 4$  durch 2 und die Zahlen  $6n; 6n + 3$  durch 3 teilbar und mithin keine Primzahlen. Wenn also eine natürliche Zahl oberhalb 3 eine Primzahl ist, so ist sie entweder in der Form  $6n + 1$  oder in der Form  $6n + 5$  darstellbar. Für  $6n + 5$  kann man aber auch schreiben  $6n' - 1$  mit  $n' = n + 1$ .

Daraus folgt: Primzahlzwillinge  $p_1$  und  $p_2$  haben stets die Form  $p_1 = 6n - 1$  und  $p_2 = 6n + 1$  mit gleichem n.

Beweis: Angenommen, es sei  $p_1 = 6n \mp 1$  und  $p_2 = 6m \pm 1$  mit  $n \neq m$ , so wäre

$$|p_1 - p_2| = |(6n \mp 1) - (6m \pm 1)| \neq 2$$

Damit ist aber  $p_1 + p_2 = (6n - 1) + (6n + 1) = 12n$ , d.h., die Summe zweier Primzahlzwillinge oberhalb 3 ist durch 12 teilbar.

**Lösung S 42**

Die Zahl  $2^n$  ist nicht durch 3 teilbar, da sie nur den Primfaktor 2 enthält. Also kann  $2^n$  beim Teilen durch 3 nicht den Rest Null lassen. Es kommen nur die Reste 1 und 2 in Frage.

$$\begin{array}{l} n = 0 : 2^n = 3 = 2^0 : 3 = 1 : 3 = 0 \text{ Rest } 1 \\ n = 1 : 2^n = 3 = 2^1 : 3 = 2 : 3 = 0 \text{ Rest } 2 \\ n = 2 : 2^n = 3 = 2^2 : 3 = 4 : 3 = 1 \text{ Rest } 1 \\ n = 3 : 2^n = 3 = 2^3 : 3 = 8 : 3 = 2 \text{ Rest } 2 \\ n = 4 : 2^n = 3 = 2^4 : 3 = 16 : 3 = 5 \text{ Rest } 1 \end{array}$$

Es taucht die Vermutung auf, dass  $2^n$  beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt, wenn  $n$  gerade, und den Rest 2 lässt, wenn  $n$  ungerade ist. Zumindest gilt dies für  $n = 0$  bis  $n = 4$ .

Um einen allgemeinen Beweis zu führen, schließen wir folgendermaßen:

Wenn  $2^n$  beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt, so kann man schreiben  $2^n = 3k + 1$ . Dann gilt für  $2^{n+1}$ :  $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2(3k + 1) = 6k + 2$ .

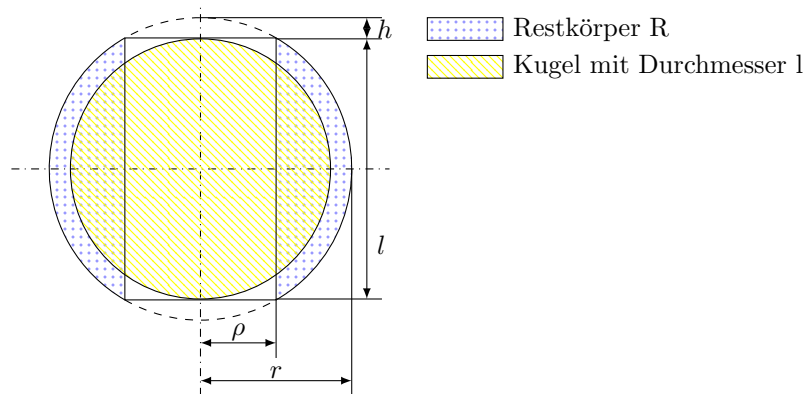
Man sieht, dass dann  $2^{n+1}$  beim Teilen durch 3 den Rest 2 lässt. Lässt dagegen  $2^n$  beim Teilen durch 3 den Rest 2, so kann man schreiben  $2^n = 3k + 2$ . Dann gilt entsprechend für  $2^{n+1}$ :  $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2(3k + 2) = 6k + 4 = 6k + 3 + 1$ .

Man sieht, dass in diesem Fall  $2^{n+1}$  beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt. Damit ist bewiesen, dass sich beim Teilen der Zahl  $2^n$  durch 3 die Reste 1 und 2 regelmäßig abwechseln, wenn  $n$  die Folge  $0; 1; 2; 3; 4; \dots$  durchläuft.

Es gilt also für jedes  $n$ : Die Zahl  $2^n$  lässt beim Teilen durch 3 den Rest 1, wenn  $n$  gerade, und den Rest 2, wenn  $n$  ungerade ist.

Mit Hilfe von Sätzen der Zahlentheorie bzw. der Gruppentheorie lässt sich diese Behauptung noch eleganter beweisen.

### Lösung S 43



Es sei  $r$  der Radius der durchbohrten Kugel,  $\rho$  der Radius und  $l$  die Länge der zylindrischen Bohrung, ferner sei  $h$  die Höhe der Kugelkappen, die durch die Bohrung erfasst werden.

Vom Volumen  $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$  der Kugel sind abziehen a) das Volumen  $V_Z = \pi \rho^2 l$  des Zylinders und b) zweimal das Volumen  $V_a = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$  des Kugelabschnitts (Abbildung). Es gilt also

$$V_R = V_K - V_Z - 2V_a = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi \rho^2 l - \frac{2\pi}{3}(3r - h) = \frac{\pi}{6}[8r^3 - 6\rho^2 l - 4h^2(3r - h)]$$

Nun ist aber nach dem Lehrsatz des Pythagoras  $\rho^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$ , ferner ist  $2h = 2r - l$ , also  $h = \frac{2r-l}{2}$ ,  $h^2 = r^2 - rl + \frac{l^2}{4}$ . Damit ergibt sich

$$V_R = \frac{\pi}{6} \left[ 8r^3 - 6\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)l - (4r - l - l) \frac{(4r - l)^2}{2} \right] = \frac{\pi}{6} l^3$$

Es ist aber  $V_K = \frac{\pi}{6} l^3$ .

### Lösung S 44

Sicherlich wird man zur Probe für  $a$  den Wert  $\frac{1}{2}$  gleich in die erste Ungleichung eingesetzt und folgendermaßen gerechnet haben:  $a = \frac{1}{2}; a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \geq 0$ .

Nun ist aber bekanntlich die Quadratwurzel doppeldeutig:  $x = \pm\sqrt{x^2}$ .

Beim Ausziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten der Ungleichung hätte man also schreiben müssen:  $\pm(a - 1)$  und  $\pm\sqrt{-2a + 1}$ . (absichtlich wurde hier das Zeichen  $\geq$  nicht gesetzt, da, wie sich anschließend zeigt, sonst ein weiterer Fehler entsteht).

Auf der rechten Seite der Ungleichung war die Doppeldeutigkeit zwar berücksichtigt, dort wirkt sie



sich aber nicht aus, da sich für  $a = \frac{1}{2}$  der Wert  $\pm 0$  ergibt.

Die linke Seite dagegen liefert für  $a = \frac{1}{2}$  gerade den negativen Wurzelwert, wenn die Doppeldeutigkeit nicht berücksichtigt wird. Das Entscheidende ist nun, dass aus

$$x^2 \geq y \quad \text{nicht etwa folgt} \quad \pm x \geq \pm \sqrt{y}$$

Das kann man sofort an Beispielen nachweisen: Aus  $4 \geq 1$  folgt nicht  $\pm 2 \geq \pm 1$ . Zwar ist die Beziehung  $+2 \geq +1$  richtig, aber die Beziehung  $-2 \geq -1$  ist falsch; es gilt vielmehr  $-2 \leq -1$ .

### Lösung S 45

Der Fehler ist im letzten Schritt enthalten, in der Division durch  $\lg \frac{1}{2}$ . Bekanntlich ist der Logarithmus einer Zahl, die kleiner ist als 1, eine negative Zahl. Man kann jedoch Ungleichungen nicht wie Gleichungen behandeln, sondern vor allem beim Rechnen mit negativen Zahlen ist bei Ungleichungen Vorsicht am Platz.

Multipliziert oder dividiert man beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, so muss man das Ungleichheitszeichen umkehren. Es folgt dann aus

$$n \cdot \lg \frac{1}{2} > (n+1) \cdot \lg \frac{1}{2}$$

durch die Division richtig  $n < n+1$ .

### Lösung S 46

a) Es seien  $P_1$  und  $P_2$  die Brennpunkte der beiden Kegelschnitte (wegen der Gleichheit der linearen Exzentrizität fallen bei Übereinstimmung der Achsen auch die Brennpunkte zusammen) und  $P_8$  einer der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen. Die Punkte  $P_1, P_2$  und  $P_8$  bilden ein rechtwinkliges Dreieck,  $P_8$  liegt daher auf dem Thaleskreis über  $P_1P_2$ . Man erkennt sofort, dass es (bis auf Symmetrie an den Kegelschnittachsen) genau einen Punkt  $P_8$  gibt, d.h., Ellipse und Hyperbel schneiden einander in  $P_8$ . Es gelten nun die folgenden Gleichungen:

$$l_1 : l_2 = 4 : 3 \quad (1) \quad \text{und} \quad P_1P_2^2 = 4e^2 = l_1^2 + l_2^2 \quad (2)$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) folgt  $4e^2 = \frac{25}{16}l_1$  und  $4e^2 = \frac{25}{9}l_2$ . Mit  $e = 20$  ergibt sich daraus  $l_1 = 32$  und  $l_2 = 24$ .

b) Die Ellipsengleichung kann man in der folgenden Form schreiben:  $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$  (4). Wir ersetzen  $b^2$  durch die Relation  $b^2 = a^2 - e^2$  und erhalten damit

$$x^2(a^2 - e^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad (4a)$$

Um  $a$  zu ermitteln, errechnen wir die Koordinaten von  $P_8$  und setzen diese nebst  $e = 20$  in (4a) ein. Durch  $y_8$  zerlegen wir das Dreieck  $P_1P_2P_8$  in zwei rechtwinklige Teildreiecke. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras  $l_1^2 = y_8^2 + (e + x_8)^2$  (5a) und  $l_2^2 = y_8^2 + (e - x_8)^2$  (5b).

Durch Subtraktion einer dieser beiden Gleichungen von der anderen und Auflösung nach  $x^2$  folgt daraus  $x_s = 5,6$  und damit  $y_s = \pm 1,2$ . Setzt man diese Werte in (4a) ein, so ergibt sich nach Auflösung der entstehenden biquadratischen Gleichung

$$a^4 - 800a^2 + 12544 = 0 \rightarrow a_1^2 = 784; a_1 = 28 \text{ und } a_2^2 = 16; a_2 = 4$$

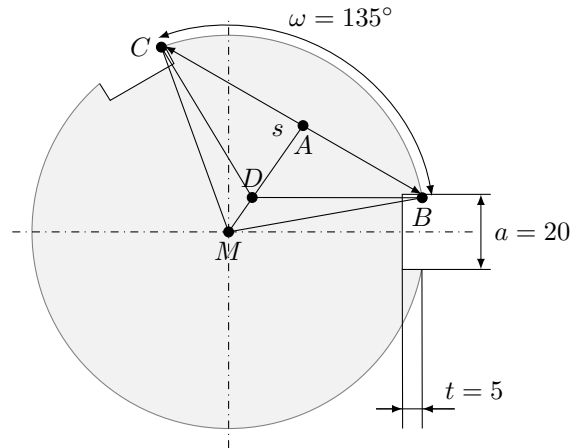
Aus  $b^2 = a^2 - e^2$  folgt weiter  $b_1^2 = 384$ , also  $b_1 \approx 19,6$  und  $b_2^2 = -384$ , also  $b_2 \approx 19,6i$ . Offenbar scheiden  $a_2$  und  $b_2$  als (im Reellen) unbrauchbar aus, so daß die Gleichung der Ellipse lautet

$$384x^2 + 784y^2 = 301056 \rightarrow \frac{x^2}{784} + \frac{y^2}{384} = 1$$

Analog erhält man aus der Hyperbelgleichung  $x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$  mit  $b^2 = e^2 - a^2$  die Werte  $a_1 = 28, a_2 = 4$  sowie  $b_1 \approx 19,6i, b_2 \approx 19,6$ . Man erkennt, dass in diesem Fall die Werte  $a_1$  und  $b_1$  als unbrauchbar ausgeschieden werden müssen. Die Hyperbelgleichung nimmt damit die Form an

$$384x^2 - 16y^2 = 6144 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{384} = 1$$

**Lösung S 47**



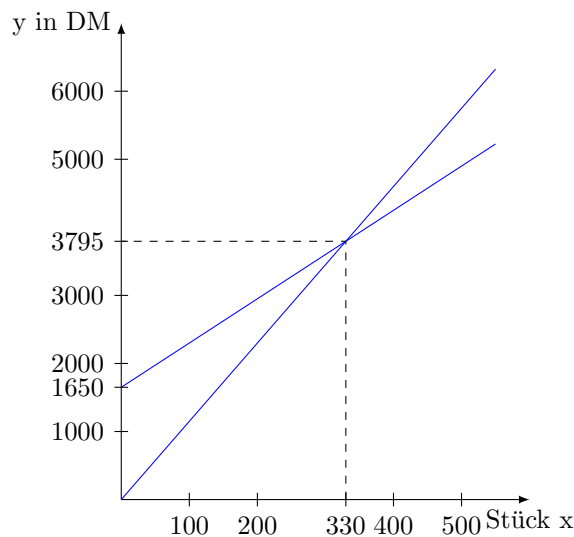
Bekannt sind:  $\omega = 135^\circ$ ,  $a = 20$  mm,  $t = 5$  mm,  $d = 70$  mm. Gesucht ist das Seitenmaß  $s$ . Weiterhin seien  $\angle BMD = \delta$ ;  $\angle ABM = \gamma$ ;  $\angle ABD = \beta$ ;  $\angle DBM = \alpha$  und Winkel von MB zur Horizontalen  $\alpha'$ . Im Dreieck ABM gilt  $\sin \delta = \frac{s}{2} : \frac{d}{2} = \frac{s}{d}$ , folglich ist  $s = d \sin \delta$ . Ferner gilt  $\delta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ . Nun ist  $\alpha = \alpha'$  (Winkel an geschnittenen Parallelen), und für  $\sin \alpha' = \sin \alpha$  gilt

$$\sin \alpha' = \sin \alpha = \frac{a}{2} : \frac{d}{2} = \frac{a}{d} = \frac{20}{70} = 0,286$$

also  $\alpha = 16^\circ 40'$ . Für  $\beta$  folgt aus dem Dreieck ABD:  $\beta = 90^\circ - \frac{\omega}{2} = 22^\circ 30'$ . Damit ergibt sich für  $\delta$  der Wert  $\delta = 50^\circ 50'$ . Es ist also

$$s = d \cdot \sin \delta = 70 \sin 50^\circ 50' \approx 54,2 \text{ mm}$$

**Lösung S 48**



a) Die Gesamtkosten  $y_1$  der Produktion stellen sich als die Summe aus den fixen Kosten  $b$  und den mit dem Produktionsausstoß  $x$  multiplizierten variablen Kosten  $m_1$  dar:  $y_1 = m_1x + b = 6,50x + 1650,00$ . Der Gesamterlös  $y_2$  ergibt sich als Produkt des Abgabepreises  $m_2$  mit dem Produktionsausstoß  $x$ :

$$y_2 = m_2x = 11,50x.$$

Gesamtkosten und Gesamterlös stellen demnach lineare Funktionen des Produktionsausstoßes  $x$  dar, die nur für nicht negative  $x$ -Werte definiert sind (ein negativer Produktionsausstoß ist bei der Fragestellung sinnlos).

b) Die Produktion wird rentabel, wenn der Gesamterlös  $y_2$  nicht kleiner als die Gesamtkosten  $y_1$  ist:  $y_2 \geq y_1 \rightarrow m_2x \geq m_1x + b$ . Daraus folgt:

$$m_2x - m_1x \geq b; \quad x \geq \frac{b}{m_2 - m_1}$$

(wenn  $m_2 + m_1 > 0$  oder, was dasselbe ist,  $m_2 > m_1$  ist). Also ist die Produktion rentabel für

$$x \geq x_r = \frac{b}{m_2 - m_1} = \frac{1650}{11,50 - 6,50} = 330$$

Dabei ist  $x_r$  die Abszisse des Schnittpunktes beider Geraden.

c) Es gibt vier Möglichkeiten, den Gewinn  $G = y_2 - y_1$  und damit die Rentabilität zu erhöhen; diese Möglichkeiten sind aus der graphischen Darstellung erkennbar:

1. Erhöhung des Werkabgabepreises  $m_2$ . Das bedeutet in der graphischen Darstellung eine Drehung der Geraden  $y_2$  um den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn. Diese Möglichkeit kommt aber aus preisrechtlichen Gründen nicht in Frage.
2. Erhöhung des Produktionsausstoßes  $x$ . Diese Möglichkeit findet eine obere Grenze bei vollständiger Deckung des Bedarfs und in der Produktionskapazität.
3. Senkung der fixen Kosten  $b$ . Das bedeutet graphisch eine Verschiebung der Geraden  $y_1$  parallel zu sich selbst in Richtung auf den Nullpunkt. Sie trägt verhältnismäßig viel zur Rentabilitätserhöhung bei, wenn  $m_1$  klein ist.
4. Senkung der variablen Kosten  $m_1$  - graphisch eine Drehung der Geraden  $y_1$  um den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse im Uhrzeigersinn.

d) Wenn die variablen Kosten  $m_1$  den Abgabepreis  $m_2$  übersteigen, wenn also  $m_1 > m_2$  ist, kann unter den gegebenen Bedingungen eine Rentabilität durch Erhöhung des Produktionsausstoßes nicht erreicht werden.

In der graphischen Darstellung laufen in diesem Fall die Geraden  $y_1$  und  $y_2$  auseinander und haben keinen Schnittpunkt, so dass es auch kein  $x$ , gibt, von dem an Rentabilität besteht. Rechnerisch erhält man aus  $x_r = \frac{b}{m_2 - m_1}$  wegen  $m_1 > m_2, b > 0$ , dass  $x_r < 0$  ist. (Das würde einen negativen Produktionsausstoß bedeuten und ist sinnlos.)

Auch durch Senkung der fixen Kosten  $b$  allein ist dieser Zustand nicht zu ändern. Einzige Möglichkeit bleibt demnach die Senkung der variablen Kosten  $m_1$ , d.h. Einsparung von Material, Ausmerzungen der Verlustzeiten, schonender Einsatz des Werkzeugs, Steigerung der Arbeitsproduktivität.

Die Bedeutung des Satzes "Spare mit jedem Gramm, mit jedem Millimeter, mit jeder Minute!" wird hieran deutlich.

### Lösung S 49

Ein Gleichungssystem der Form

$$ax - by + c = 0 \quad , \quad dx - ey + f = 0$$

hat die Lösungen

$$x = \frac{ec - bf}{bd - ae} \quad , \quad y = \frac{cd - af}{bd - ae}$$

Dabei sind die Vorzeichen so gewählt, dass Zähler und Nenner je positiv werden.

Die Werte  $x$  und  $y$  werden maximal, wenn die Zähler maximal und die Nenner minimal sind; sie werden minimal, wenn die Zähler minimal und die Nenner maximal sind. Demnach ist  $x$  maximal, wenn  $a$ ,  $e$  und  $c$  maximal,  $b$ ,  $d$  und  $f$  aber minimal sind:

$$x_{max} = \frac{1,05 \cdot 10,15 - 3,15 \cdot 0,65}{3,15 \cdot 1,05 - 0,95 \cdot 1,05} = 3,73$$

und minimal, wenn  $a$ ,  $e$  und  $c$  minimal,  $b$ ,  $d$  und  $f$  dagegen maximal sind:

$$x_{min} = \frac{0,95 \cdot 10,05 - 3,25 \cdot 0,75}{3,25 \cdot 1,15 - 0,85 \cdot 0,95} = 2,43$$

Bei  $y$  ist eine zusätzliche Überlegung notwendig, da die Zähler- und die Nennerbedingung nicht gleichzeitig erfüllbar sind: Wenn  $c$  und  $e$  maximal,  $b$  und  $f$  minimal sind, wird  $y$  maximal. Die Werte  $d$  und  $a$  beeinflussen Zähler und Nenner jeweils in gleicher Richtung;  $d$  beeinflusst den Nenner jedoch stärker als den Zähler, wird also minimal gewählt; auch  $a$  beeinflusst den Nenner stärker als den Zähler, wird also maximal gewählt:

$$y_{max} = \frac{10,15 \cdot 1,05 - 0,95 \cdot 0,65}{3,15 \cdot 1,05 - 0,95 \cdot 1,05} = 4,35$$

Analog schließt man:  $y$  ist minimal, wenn  $a$ ,  $e$  und  $c$  minimal,  $b$ ,  $d$  und  $f$  maximal sind.

$$y_{min} = \frac{10,15 \cdot 1,15 - 0,85 \cdot 0,75}{3,25 \cdot 1,15 - 0,85 \cdot 0,95} = 3,73$$

Ergebnis:  $2,43 \leq x \leq 3,73$ , maximale Abweichungen  $-0,57$  und  $+0,73$   
 $3,73 \leq y \leq 4,35$ , maximale Abweichungen  $-0,27$  und  $+0,35$ .

### Lösung S 50

a) Man kann zunächst den ersten Ring in sechs verschiedene Stellungen bringen. Dann sind bei jeder dieser Stellungen sechs Stellungen des zweiten Ringes möglich. Also ergeben sich für die Stellungen der ersten beiden Ringe bereits 36 verschiedene Möglichkeiten.

Bei jeder davon kann man wieder auf sechs verschiedene Weisen den dritten Ring einstellen, so dass sich damit 216 Stellungen ergeben.

Schließlich multipliziert sich diese Zahl wieder mit sechs, wenn man nun noch den letzten Ring einstellt, so dass sich insgesamt 1296 verschiedene Einstellmöglichkeiten ergeben.

Allgemein kann man zeigen, dass sich bei  $n$  Ringen mit je  $m$  Zahlen  $m^n$  verschiedene Schlüsselwörter bilden lassen.

b) Aus der Lösung von a) ergibt sich sofort:

1. Schloss mit vier Ringen zu je sechs Buchstaben enthält 1296 Schlüsselwörter,

2. Schloss mit sechs Ringen zu je vier Buchstaben enthält 4096 Schlüsselwörter.

Die Sicherheit des zweiten Schlosses verhält sich also zu der des ersten wie  $4096 : 1296 \approx 3 : 1$ , d.h., das zweite Schloss ist etwa dreimal so sicher wie das erste.

c) Es ist festzustellen, wieviel Möglichkeiten es gibt, aus  $n$  (in unserem Fall  $n = 26$ ) verschiedenen Elementen  $k$  (in unserem Fall  $k = 6$ ) verschiedene auszuwählen.

Zunächst kann man aus den 26 Buchstaben auf 26 verschiedene Weisen einen Buchstaben auswählen. Bei jeder dieser 26 Möglichkeiten gibt es jetzt 25 Möglichkeiten zur Wahl eines zweiten Buchstaben, im ganzen also  $26 \cdot 25$ .

Dabei überlegt man sich aber leicht, dass nun jede Buchstabenzusammenstellung doppelt vorkommt: einmal wurde z.B. zu  $c$  der Buchstabe  $d$  gewählt und einmal zu  $d$  der Buchstabe  $c$ . Demnach muss man das Produkt  $26 \cdot 25$  noch durch zwei teilen, um die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten zu erhalten.

Bei jeder dieser Möglichkeiten hat man wiederum 24 neue Auswahlmöglichkeiten für den dritten Buchstaben, wobei sich aber wieder jede Buchstabenkombination mehrfach ergibt: Einmal wird z.B. zu  $(ab)$

der Buchstabe c, ein andermal zu (bc) der Buchstabe a und zum dritten zu (ac) der Buchstabe b hinzugefügt. Andere Zusammenstellungen der drei Elemente a, b und c gibt es nicht. Also ist die Anzahl der  $26 \cdot 25 \cdot 24$  Kombinationen nunmehr auf  $\frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2600$  angewachsen.

Man erkennt, wie die Entwicklung weitergeht:

Allgemein gilt für die Anzahl der Kombinationen von  $k$  Elementen aus  $n$  Elementen

$$x = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

in unserem Fall also  $x = 230230$ .

Da aber jeder der Ringe den Einschnitt unter jedem Buchstaben haben kann, muss diese Anzahl noch mit sechs multipliziert werden:  $230230 \cdot 6 = 1381380$ . Es gibt also 1381380 verschiedene Ringe.

d) Da jeder der 26 Buchstaben auf jedem der vier Ringe eines Schlosses auftreten kann, läuft die Aufgabe darauf hinaus, festzustellen, wieviel verschiedene Zusammenstellungen von 4 aus 26 Buchstaben es gibt, wenn es dabei wohl auf die Reihenfolge ankommt, aber jeder Buchstabe sich bis zu viermal wiederholen kann.

Zunächst kann man 26 Buchstaben auswählen; bei jeder dieser 26 Möglichkeiten kann man wieder auf 26 verschiedene Weisen einen zweiten Buchstaben wählen, so dass man damit schon  $26 \cdot 26 = 26^2$  Möglichkeiten hat.

Man überlegt sich nun weiter, dass bei der Wahl des dritten Buchstabens sich diese Zahl wieder mit 26 multipliziert:  $26^3$ . Bei der Wahl des vierten ergeben sich dann  $26^4 = 456976$  verschiedene Möglichkeiten.

Offensichtlich gilt allgemein dieselbe Formel wie bei a).

### 3 Autoren der Aufgaben

- J. Berndt, Burkersdorf: S 35
- G. Caspar, Potsdam: S 38
- K. Göldner, Dresden: S 19
- G. Gruber, Gotha: S 23
- S. Hennig, Dahme: S 43
- G. Hesse, Radebeul: S 2, S 24, S 25, S 36, S 49
- P. Kanther, Schmalkalden: S 47
- T. Kasper, Meißen: S 17, S 18
- H. Keller, Schleiz: S 28
- W. Körper, Annaberg: S 29
- K. Müller, Arnstadt: S 3, S 5, S 13, S 20
- J. Noack, Dresden: S 6
- K.-J. Panzke, Dresden: S 4
- U. Richter, Löbau: S 31, S 37
- J. Riedel, Berlin: S 7, S 10, S 11, S 12, S 14, S 16, S 22, S 26, S 27, S 30, S 34, S 42, S 44, S 45, S 48
- W. Rulff, Coswig: S 8, S 32, S 33
- E. Schiffner, Roßleben: S 1, S 9, S 40, S 41
- R. Schminder, Collm: S 21
- D. Socher, Potsdam: S 15
- R. Thiele, Zielitz: S 46
- B. Vettters, Oebisfelde: S 50
- W. Ziegler, Leipzig: S 39