Diplomarbeit

Direkte Summen von Multioperatorringen

Steffen Polster
Technische Hochschule
Karl-Marx-Stadt
27. Februar 1981

Anmerkung:
Diese wissenschaftliche Arbeit wurde zum Abschluss des Diplomlehrerstudiums für Mathematik und Physik an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt von Oktober 1980 bis Februar 1981 erarbeitet und per Schreibmaschine in vierfacher Ausfertigung geschrieben.
Frau Dr. Renate Lanckau übernahm die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit.
Die schriftliche Arbeit und das mündliche Kollogium wurden abschließend mit dem Prädikat "Ausgezeichnet" bewertet.

Die Aufgabenstellung bestand aus zwei Teilen.
Da es nur fünf Veröffentlichungen zum Thema "Multioperatorringe" gab, sollten bekannte Sätze der Theorie der Ringe und Multioperatorgruppen auf die Multioperatorringe, soweit möglich, verallgemeinert werden. Insbesondere sollte die Auswirkung des nun vorhandenen Distributivgesetzes sowie der Kommutativität der Addition auf eine Multioperatorstruktur diskutiert werden.
Anschließend war eine umfassendere Untersuchung der Zerlegung von Multioperatorringen in direkte Summen durchzuführen.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift des Originaltextes.
Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Geändert sind korrigierte Rechtschreib- und Grammatikfehler, unklare Formulierungen sowie die Nummerierung der Gleichungen.
Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst. Zum Beispiel wird die Menge der ganzen Zahlen nicht mehr mit Γ, sondern nun mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.
Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.
Durch den LaTex-Satz sind die Seitenummerierungen verändert. Das Original bestand aus 3 Teilen mit insgesamt 341 Seiten.
Der fachwissenschaftliche Inhalt wurde nicht verändert bzw. gekürzt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der Multioperatorring

1.1 Definition und Beispiele

1.1.1 Einleitung

Mitte der sechziger Jahre dieses Jahrhunderts hatte die Theorie der Multioperatorgruppen einen Stand erreicht, der sie als selbstständiges Gebiet der modernen Algebra auswies. (Kuros [9] und Higgins [3]).
Bei Anwendung auf Ringe zeigte das Fehlen des Distributivgesetzes jedoch Wirkung.
Dieses Problem führte zur Herausbildung des Begriffes des Multioperatorrings durch Kuros [10].

Er erweiterte die Multioperatorgruppen durch die Kommutativität der Addition sowie durch das Distributivgesetz. Aus der Theorie der Multioperatorringe kann man sehr gute Aufschlüsse für nicht notwendig assoziative Ringe gewinnen.
Ebenso bildet jede abelsche Gruppe einen entarteten Multioperatorring.

Während heutzutage für die Gruppentheorie schon Anwendungen in anderen Zweigen der Mathematik bzw. in anderen Naturwissenschaften (zum Beispiel in der Quantentheorie) gefunden wurden, besteht die Bedeutung der Multioperatorringe der Zeit nur aus innermathematischen Anwendungen. Jedoch ist es durchaus möglich, dass einmal auch für Multioperatorringe eine weitergehende Anwendung gefunden wird.

1.1.2 Definition des Multioperatorrings

In der Arbeit "Multioperatorringe und Algebren" [10] schreibt Kuros:

Definition

Eine abelsche Gruppe $(G,+)$, auf der ein System Ω n-ärer algebraischer Operationen ω_n, $n \geq 2$, gegeben ist, heißt genau dann **Multioperatorring** oder **Ω-Ring**, wenn für alle ω_n, alle Elemente a_i, b, c aus G, $i = 1,...,n$, und alle i gilt:

$$a_1...a_{i-1}(b+c)a_{i+1}...a_n\omega_n = a_1...a_{i-1}ba_{i+1}...a_n\omega_n + a_1...a_{i-1}ca_{i+1}...a_n\omega_n \tag{1.1}$$

Jeder Multioperatorring ist Multioperatorgruppe. Setzen wir in (1.1) für alle j: $a_j = 0$ und $c = 0$, wird für beliebige Operationen $\omega_n \in \Omega$:

$$0...0b0...0\omega_n = 0...0(b+0)0...0\omega_n = 0...0b0...0\omega_n + 0...0\omega_n$$

Da $(G,+)$ Gruppe ist, erhält man:

$$0 = 0...0\omega_n$$

Für ein leeres Operationensystem wird G zu einem Modul. Enthält Ω nur eine algebraische binäre Multiplikation, bildet G ein ringartige Struktur, womit jeder assoziative oder nichtassoziative Ring Multioperatorring ist.
Für diese Strukturen wird (1.1) zum bekannten Distributivgesetz, so dass wir allgemein (1.1) als Distributivgesetz bezeichnen.
Ringartige Beispiele, insbesondere Ringe, wurden in Kuros [9], Lugowski-Weinert [14], Kertesz [6], Flachsmeyer-Prohaska [2], Redei [17] und van der Waerden [21] untersucht.
Wir betrachten einige Sonderfälle.

Die vom Nullelement eines Moduls additive erzeugte Untergruppe wird für ein beliebiges Operationensystem Ω n-ärer Operationen, $n \geq 2$, mit

$$0...0\omega_n = 0$$

zum **Ω-Nullring**.
Ist ein Modul G gegeben, auf dem ein Operationensystem Ω, $n \geq 2$, mit

$$a_1a_2...a_n\omega_n = 0$$

für alle a_i aus G, $i = 1,...,n$, eingeführt ist, so sprechen wir vom Ω-Nullring, wenn G nur aus Nullelement enthält. Im allgemeinen Fall nennen wir dann G **Ω-Zeroring**.

Einen weiteren Multioperatorring bildet der zweidimensionale reelle Punktraum $\mathbb{R}^2$ mit der Vektoraddition und dem vektoriellen Tripelprodukt, welches ternär ist. Diesen Ω-Ring, welcher nicht Ring ist, bezeichnen wir mit $(\mathbb{R}^2, +, o_3)$.
Es lässt sich auch ein Ω-Ring mit einem unendlichen Operationensystem konstruieren. Dazu wählen wir den Ring der ganzen Zahlen und führen für eine fest gewählte natürliche Zahl r und für jedes $n = 2,...,i,...$ eine n-äre Operation $\omega_n(r)$ mit

$$a_1...a_n\omega_n(r) = r(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)$$

für beliebige a_j aus den ganzen Zahlen, $j = 1,...,n$, ein.
Dabei stellt die rechte Seite der Definitionsgleichung die Vielfachbildung von $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ dar. Für

diese Operationen gilt das Distributivgesetz, womit $(Z,+,\Omega)$, mit $\Omega = \{\cdot,\omega(r)\}$ Multioperatorring wird.

Nicht jede algebraische Struktur ist Ω-Ring.
Führen wir zum Beispiel auf der abelschen Gruppe der ganzen Zahlen die Bildung des Maximums zweier Zahlen als binäre Operation ein ("Maximum" in Bezug auf die natürliche Wohlordnung der ganzen Zahlen), so erfüllt diese mit der Addition im Allgemeinen nicht das Distributivgesetz. Die konstruierte Struktur ist kein Multioperatorring.

Ein Multioperatorring heißt **assoziativ**, wenn für jedes Paar von Operationen ω_n, ω_k aus dem Operationensystem Ω für jedes $i = 1,...,k$

$$(x_1...x_n\omega_n)x_{n+1}...x_{n+k-1}\omega_k = x_1...x_{i-1}(x_i...x_{n+i-1}\omega_n)x_{n+1}...x_{n+k-1}\omega_k \tag{1.2}$$

für alle x_j aus G, $j = 1,...,n+k-1$, gilt.

Kommutativ nennen wir einen Multioperatorring, wenn für jede Operation ω_n aus Ω und jedes Paar (i,j), mit $i \neq j$ und $i,j = 1,...,h$, für jedes Element a_l auf G, $l = 1,...,n$,

$$a_1...a_i...a_j...a_n\omega_n = a_1...a_j...a_i...a_n\omega_n \tag{1.3}$$

gilt.
Ein Element 1 von G nennen wir **Einselement** des Multioperatorrings G, wenn für alle x aus G und jedes Operation ω_n aus Ω

$$1...1x1...1\omega_n = x \tag{1.4}$$

gilt.

Enthält das Operationensystem Ω nur ein Element, und zwar eine binäre Multiplikation, werden diese Definitionen zu den entsprechenden für ringartige Strukturen. Damit ist jeder Ring assoziativer Multioperatorring, jeder Integritätsbereich assoziativer und kommutativer Ω-Ring mit Einselement.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Ω-Zeroringe sind trivialerweise assoziativ und kommutativ, besitzen aber kein Einselement. Der Ω-Ring (Z,Ω) mit $\Omega = \{\cdot,\Omega(r)\}$, enthält als kommutativer und assoziativer Ω-Ring dann und nur dann ein Einselement, wenn r gleich der natürlichen Zahl 1 ist.
Der genannte Punktraum $\mathbb{R}^2$ ist dem angegebenen Operationensystem weder kommutativ noch assoziativ. Ebenso besitzt er kein Einselement.

Ein Element a eines Ω-Rings G nennen wir genau dann **Nullteiler** bezüglich einer Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω, wenn ein $(n-1)$-Tupel von Elementen in G existiert, so dass

$$b_1...b_{i-1}ab_{i+1}...b_n\omega_n = 0 \tag{1.5}$$

für ein beliebiges i gilt, wobei sowohl a als auch alle Elemente b_j, $j = 1,...,i-1,i+1,...,n$, des Tupels verschieden vom Nullelement sein müssen.
Jeder Ring mit Nullteilern ist damit auch als Ω-Ring Struktur mit Nullteilern.

Einen Multioperatorring, welcher bezüglich keiner Operation aus Ω Nullteiler besitzt, nennen wir **nullteilerfrei**.
Vertreter sind durch die üblichen Zahlenringe gegeben. Dagegen existieren im n-reihigen Matrizenring über den reellen Zahlen auch als Multioperatorring seine Nullteiler weiter.
In Ω-Zeroringen ist jedes Element trivialerweise Nullteiler (außer dem Nullelement natürlich). Umgekehrt muss ein Ω-Ring, in dem alle vom Nullelement verschiedenen Elemente Nullteiler sind, nicht notwendigerweise Ω-Zeroring sein.
Zum Beispiel ist im Multioperatorring $(\mathbb{R}^2, +, o_3)$ jedes Element $(a,b) \neq (0,0)$ zu sich selbst Nullteiler

$$((a,b) \times (a,b)) \times (a,b) = (0,0) \times (a,b) = (0,0)$$

jedoch ist der zweidimensionale reelle Punktraum mit der ternären Operation o_3 kein Ω-Zeroring.

1.1.3 Einfache Eigenschaften

Während für Multioperatorgruppen notwendig

$$0...0\omega_n = 0$$

für jede Operation ω_n des Operationensystems gefordert wird, gilt für jeden Ω-Ring auch

$$a_1...a_{i-1}0a_{i+1}...a_n\omega_n = 0 \tag{1.6}$$

für alle ω_n und alle Elemente a_j aus G, $j = 1,...,n$. Denn wir erhalten mit dem Distributivgesetz

$$a_1...a_n\omega_n = a_1...a_{i-1}(a_i + 0)a_{i+1}...a_n\omega_n = a_1...a_n\omega_n + a_1...a_{i-1}0a_{i+1}...a_n\omega_n$$

und mit den Gruppeneigenschaften von $(G,+)$ das Geforderte.
Für Ringe bedeutet dies für alle Elemente a:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Ebenso können wir auch **Vorzeichenregeln** nachweisen.
Es gilt für alle Operationen ω_n und alle $a_l \in G$, $l = 1,...,n$:

$$a_1...(-a_i)...a_n\omega_n = -(a_1...a_n\omega_n) \tag{1.7}$$

$$a_1...(-a_i)...(-a_j)...a_n\omega_n = a_1...a_n\omega_n \tag{1.8}$$

(1.8) erhalten wir durch zweimaliges Anwenden von (1.6). (1.7) folgt aus

$$a_1...a_n\omega_n + a_1...(-a_i)...a_n\omega_n = a_1...(a_i + (-a_i))...a_n\omega_n = a_1...(0)...a_n\omega_n = 0$$

und der Tatsache, dass in einer Gruppe die Entgegengesetzten eindeutig bestimmt sind.

Da Multioperatorringe eine additive Trägerstruktur besitzen, kann man die Vielfachbildung von Elementen einführen. Unter dem **n-fachen eines Elementes** a eines Ω-Ringes verstehen wir die n-malige Addition von a, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

$$na = \underbrace{a + a + ... + a}_{\text{n Summanden}}$$

Auf Grund der Kommutativität der Addition gelten dabei folgende Gesetze:

$$\begin{aligned} 1a &= a \\ 0a &= 0 \\ (-n)a = -(na) &= n(-a) \end{aligned}$$

und für beliebige ganze Zahlen m und n, sowie beliebige Elemente a und b aus G:

$$\begin{aligned} na + ma &= (n + m)a \\ m(na) &= (mn)a \\ n(a + b) &= na + nb \end{aligned}$$

Da die Beweise sich von denen aus der Ringtheorie nicht unterscheiden, werden sie hier nicht gebracht.

Besitzt ein Multioperatorring ein nichtleeres Operationensystem Ω. so kann der Begriff der **Potenz** definiert werden. Wir setzen:

Definition

Sei G ein Multioperatorring mit dem Operationensystem Ω. a sei ein beliebiges Element von G, n eine beliebige natürliche Zahl größer Null und ω_k eine beliebige k-äre Operation aus Ω. Dann versteht man unter der **n-ten Potenz** von a bezüglich ω_k das Element

$$a^{n(\omega_k)} = (...((\underbrace{a...a\omega_k}_{\text{k-mal}})\ \underbrace{a...a\omega_k}_{\text{(k-1)-mal}})...)\ \underbrace{a...a\omega_k}_{\text{(k-1)-mal}} \tag{1.9}$$

wobei die Operation ω_k genau $(n-1)$-mal angewendet wird.

Für eine binäre Operation wird diese Definition zu der geläufigen

$$a^n = (...((a \cdot a) \cdot a) \cdot ... \cdot a)$$

Ist die betrachtete Operation ω_k assoziativ, so können auch die Klammern weggelassen werden. Dann können wir, entsprechend der Potenzgesetze in Ringen, auch für Multioperatorringe gewisse Gesetzmäßigkeiten nachweisen:

Satz 1
Sei ω_k eine beliebige k-stellige Operation, $k \geq 2$, eines assoziativen Multioperatorrings G. Für die Potenzbildung gelten dann die Gesetzmäßigkeiten:

$$a^{n_1(\omega_k)}...a^{n_k(\omega_k)} = a^{(\sum\limits_i n_i + k + 2)(\omega_k)} \tag{1.10}$$

$$\left(a^{n(\omega_k)}\right)^{m(\omega_k)} = a^{(mn(k-1)-(m+n-1)(k-2))(\omega_k)} \tag{1.11}$$

Ist der Multioperatorring zusätzlich noch kommutativ, so gilt:

$$(a_1 a_2 ... a_k \omega_k)^{n(\omega_k)} = a_1^{n(\omega_k)} ... a_n^{n(\omega_k)} \omega_k \tag{1.12}$$

Da der Nachweis sehr großen Aufwand erfordert und dabei außer einfachen Rechenoperationen keine grundlegenden Erkenntnisse enthält, wird auf ihn verzichtet. Es sei nur erwähnt, dass man die Anzahl des Auftretens des Elements a vergleicht. Das Übrige ergibt sich aus dem Assoziativgesetz; bei (1.12) zusätzlich aus dem Kommutativgesetz.
Für binäre Operationen ($k = 2$) erhalten wir:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad ; \qquad (a^n)^m = a^{mn}$$

und ist die Operation noch kommutativ

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

d.h., die Potenzgesetze in Ringen bzw. Integritätsbereichen.

Assoziative Multioperatorringe besitzen nun eine weitere sehr schöne Eigenschaft, wenn sie ein Einselement enthalten:

Satz 2 (Kuros)
Sind ω_n und ω_k, $n = k$, zwei n-äre Operationen eines assoziativen Ω-Rings mit Einselement 1, so fallen beide zusammen.
Außerdem kann dann auf dem Modul (G,+) eine binäre Operation "$\bullet$" eingeführt werden, so dass der entstehende Multioperatorring assoziativ und mit dem selben Einselement ist, wobei für alle Operationen ω_n aus Ω und alle Elemente $a_i \in G$, $i = 1,...,n$

$$a_1a_2...a_n\omega_n = a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n \tag{1.13}$$

gilt.

Beweis: ω_k, ω_n seien zwei Operationen des assoziativen Ω-Rings G mit dem Einselement 1, wobei o.B.d.A. $n \geq k$ gelten soll. Für beliebige Elemente a_i, $i = 1,...,n$, aus G wird dann

$$a_1...a_k\omega_k = (a_1...a_k\omega_k)\ \underbrace{1......1}_{(n-1)mal}\ \omega_n$$

da G assoziativ ist

$$= a_1...a_{k-1}(a_k\ \underbrace{1......1}_{(k-1)mal}\ \omega_k)\ \underbrace{1......1}_{(n-k)mal}\ \omega_n$$

und mit (1.4), 1.1.2:

$$= a_1...a_{k-1}a_k\ \underbrace{1......1}_{(n-k)mal}\ \omega_n \tag{1.14}$$

Ist nun $n = k$, wird

$$a_1...a_k\omega_k = a_1...a_k\omega_n$$

und die beiden Operationen fallen zusammen; sie sind identisch.
Aus (1.14) folgt außerdem, dass für beliebige a_1, a_2 aus G das Element $a_1a_21...1\omega_n$ nicht von der Wahl der Operationen ω_n abhängt. wir setzen:

$$a_1a_11...1\omega_n = a_1 \bullet a_2$$

womit wir eine binäre algebraische Operation auf dem Modul (G,+) erhalten. Die Distributivität wird durch

$$(a+b) \bullet c = (a+b)c1...1\omega_n = ac1...1\omega_n + bc1...1\omega_n = a \bullet c + b \bullet c$$

abgesichert. $(G, +, \bullet)$ ist Multioperatorring. Die Assoziativität und das Einselement zeigt man analog.
Damit ist nur noch der Nachweis von (1.13) zu erbringen. Dies folgt für $l = n$ sofort aus

$$a_1...a_l1...1\omega_n = a_1 \bullet ... \bullet a_l \tag{1.15}$$

(1.15) erhalten wird aber durch vollständige Induktion. Für $l = 2$ wurde (1.15) schon oben gezeigt. Gilt die Gleichung (1.15) nun für ein beliebiges l, so erhalten wir für $l + 1$:

$$a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_l \bullet a_{l+1} = (a_1...a_l1...1\omega_n) \bullet a_{l+1} =$$

und mit der Gültigkeit für $l = 2$:

$$= (a_1...a_l\ \underbrace{1......1}_{(n-l)-mal}\ \omega_n)a_{l+1}\ \underbrace{1......1}_{(n-2)-mal}\ \omega_n =$$

$$= a_1...a_l(1...1a_{l+1}\ \underbrace{1......1}_{(l-1)-mal}\ \omega_n)\ \underbrace{1......1}_{(n-l-1)-mal}\ \omega_n = a_1...a_la_{l+1}1...1\omega_n$$

Damit erhalten wir (1.15), und der Beweis ist erbracht.

Als Folgerung aus diesem Satz können wir den Ω-Ring $(\mathbb{Z}, +, \Omega)$ mit $\Omega = \{\cdot, \Omega(1)\}$, reduzieren, wobei wir sehen, dass $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$ zum Ring der ganzen Zahlen wird.
Im Weiteren ist es deshalb möglich, an Stelle von $(\mathbb{Z}, +, \Omega)$ mit $\Omega = \{\cdot, \Omega(1)\}$ nur noch den Ring der ganzen Zahlen zu betrachten.

1.1.4 Regularität und Gleichungen

Wenden wir uns nochmals den nullteilerfreien Multioperatorringen zu. Analog zur Ringtheorie liegt es nahe zu vermuten, dass mit der Nullteilerfreiheit eine Kürzungsregel verbunden ist. Wir zeigen:

Satz 1
G sei ein beliebiger nullteilerfreier Ω-Ring, die Elemente $a_1,...,a_n,x,y$ seien beliebig aus G, sowie ω_n aus dem Operationensystem Ω.
Wenn für alle $i = 1,...,n$, $a_i \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$a_1a_2...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n\omega_n = a_1a_2...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n\omega_n \tag{1.16}$$

für beliebiges i: $x = y$.

Beweis: Die Elemente a_i, $i = 1,...,n$, x und y seien beliebig aus G. ω_n sei eine n-äre Operation aus Ω, für welche

$$a_1a_2...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n\omega_n = a_1a_2...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n\omega_n$$

gilt. Dann können wir umstellen und erhalten mit dem Distributivgesetz

$$a_1a_2...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n\omega_n - a_1a_2...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n\omega_n = 0$$

$$a_1a_2...a_{i-1}(x-y)a_{i+1}...a_n\omega_n = 0$$

Da der Ω-Ring G nullteilerfrei ist und die Elemente a_i nach Voraussetzung verschieden vom Nullelemente sind, muss

$$x - y = 0 \qquad \text{, d.h.} \qquad x = y$$

sein. Der Beweis ist erbracht.

Übertragen wir die eben bewiesene Eigenschaft auf den Spezialfall der Multioperatorringe, die assoziativen Ringe, erhalten wir:
In einem nullteilerfreien Ring R folgt für beliebige Elemente a, x und y aus R, mit a verschieden vom Nullelement, aus

$$a \cdot y = a \cdot y \qquad \text{bzw.} \qquad x \cdot a = y \cdot a$$

immer $x = y$.
Dabei ist aber zu beachten, dass hier mit ”nullteilerfrei”, sowohl linksnullteilerfrei, rechtsnullteilerfrei als auch beides gemeint ist.
Diese Kürzungsregel wird in der Ringtheorie als **Regularität** bezeichnet. Wir übernehmen diesen Begriff:

Definition

Eine n-äre Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω eines Ω-Ringes G heißt genau dann regulär, wenn für beliebige Elemente $a_1,...,a_n,x,y$ aus G, mit $a_1,...,a_n \neq 0$, für jedes $j = 1,...,n$, aus

$$a_1...a_{j-1}xa_{j+1}...a_n\omega_n = a_1...a_{j-1}ya_{j+1}...a_n\omega_n \tag{1.17}$$

immer

$$x = y$$

folgt. Ein Multioperatorring G heißt dann und nur dann regulär, wenn jede seiner n-ären Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω regulär ist.

Aus Satz 1 erhalten wir folglich:

Satz 2
Jeder nullteilerfreie Multioperatorring ist regulär.

Wir können auch die Umkehrung zeigen:

Satz 3
Jeder reguläre Multioperatorring ist nullteilerfrei.

Beweis: G sei ein regulärer Multioperatorring. Angenommen G wäre nicht nullteilerfrei. Dann existiert ein von Null verschiedenes Element a in G, welches bezüglich einer Operation $\omega_n \in \Omega$ Nullteiler ist, d.h., es existiert ein $(n-1)$-Tupel von Null verschiedener Elemente

$$(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n) \qquad \text{mit} \qquad a_1a_2...a_{i-1}aa_{i+1}...a_n\omega_n = 0$$

Nach (1.6), 1.1.3, gilt aber auch

$$a_1a_2...a_{i-1}0a_{i+1}...a_n\omega_n = 0$$

Da aber der Ω-Ring regulär ist, erhalten wir

$$a_1a_2...a_{i-1}0a_{i+1}...a_n\omega_n = a_1a_2...a_{i-1}aa_{i+1}...a_n\omega_n \to a = 0$$

Damit liegt ein Widerspruch zur Annahme vor. Der Multioperatorring ist nullteilerfrei. Der Satz ist bewiesen.

In der Ringtheorie werden Gleichungen auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht. Dies ist auch für Multioperatorringe möglich. Unmittelbar mit der Regularität ist dabei die Eindeutigkeit der Lösungen verbunden:

Satz 4
Sei G ein Multioperatorring mit dem Operationensystem Ω. Die Elemente $a_1,...,a_n$ und b seien beliebig aus G gewählt. Besitzt die Gleichung

$$a_1...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n\omega_n = b \tag{1.18}$$

wobei die a_i, $i = 1,...,n$, verschieden von Null sind, für die Operation $\omega_n \in \Omega$ eine Lösung x in G, so ist diese Lösung eindeutig, wenn der Multioperatorring G regulär ist.

Beweis: Angenommen x_1 und x_2 seien zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (1.18). Dann gilt

$$a_1...a_{i-1}x_1a_{i+1}...a_n\omega_n = b = a_1...a_{i-1}x_2a_{i+1}...a_n\omega_n$$

Da G regulär ist, wird dann aber $x_1 = x_2$, womit ein Widerspruch zur Annahme vorliegt. Die Lösung muss, vorausgesetzt sie existiert, eindeutig sein. Der Satz ist bewiesen.

Enthält das Operationensystem Ω des Ω-Ringes G mehrere Operationen von denen für einige Nullteiler existieren, andere Operationen dagegen regulär sind, so kann aus Satz 4 keine Aussage für die regulären Operationen getroffen werden. Deshalb verallgemeinern wir Satz 4:

Satz 5
Sei G ein Multioperatorring mit dem Operationensystem Ω. ω_n sei eine beliebige n-äre algebraische Operation aus Ω. Die Elemente $a_1,...,a_n$ und b seien ebenfalls beliebig aus G gewählt, wobei für alle a_i, $i = 1,...,n$, $a_i \neq 0$ gelten soll.
Eine Gleichung der Form

$$a_1...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n\omega_n = b \tag{1.19}$$

hat dann und nur dann eine, falls existente, eindeutige Lösung x in G, wenn die Operation ω_n regulär ist.

Beweis: Sei zuerst die Lösung x für jede der Gleichungen (1.19) eindeutig. Voraussetzung ist, dass diese Lösungen überhaupt existieren.
Angenommen die Operation ω_n wäre nicht regulär, so müssen zwei Elemente x_1 und x_2 existieren, so dass für mindestens eine Gleichung (1.19) aus

$$a_1...a_{i-1}x_1a_{i+1}...a_n\omega_n = b = a_1...a_{i-1}x_2a_{i+1}...a_n\omega_n \rightarrow x_1 \neq x_2$$

folgt. Damit besitzt aber diese Gleichung (1.19) zwei verschiedene Lösungen, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Die Operation ω_n muss regulär sein.
Umgekehrt sein nun die Operation ω_n regulär. Angenommen die Gleichung (1.19) werden von zwei verschiedenen Elementen x_1 und x_2 aus G erfüllt.
Dann erhalten wir, auf Grund der Regularität, aus

$$a_1...a_{i-1}x_1a_{i+1}...a_n\omega_n = b = a_1...a_{i-1}x_2a_{i+1}...a_n\omega_n \rightarrow x_1 = x_2$$

und somit wieder einen Widerspruch. Die Lösung muss eindeutig sein. Der Beweise ist erbracht.

Beziehen wir die gezeigten Sätze 2 bis 5 auf die Struktur des Ringes, ergeben sich aus der Ringtheorie wohlbekannte Aussagen:

Satz 6
Jeder nullteilerfreie Ring ist regulär und umgekehrt.
In einem regulären Ring R hat jede Gleichung

$$a \cdot x = b \qquad \text{bzw.} \qquad x \cdot a = b$$

mit $a \neq 0$, falls überhaupt, eine eindeutige Lösung.

Um die Bedeutung der Einschränkung "falls überhaupt"zu verdeutlichen, betrachten wir nur den Ring der ganzen Zahlen. Dieser ist bekanntlich nullteilerfrei und damit nach Satz 4 regulär. Jede Gleichung

$$a \cdot x = b \qquad \text{, mit} \quad a \neq 0$$

besitzt daher in den ganzen Zahlen eine eindeutige Lösung, wenn diese überhaupt existiert. Denn offenbar erhalten wir für die Gleichung $3 \cdot x = 21$ die Lösung $x = 7$, welche nach Satz 4 eindeutig ist. Dagegen besitzt die Gleichung $4 \cdot x = 21$ in den ganzen Zahlen keine Lösung. Von Eindeutigkeit zu sprechen ist daher nicht sinnvoll.

1.1.5 Existenz von Lösungen, Multioperatorkörper

Wir haben nun Bedingungen für die Eindeutigkeit von Lösungen gewisser Gleichungen in Multioperatorringen zusammengestellt, jedoch bleibt die Lösbarkeit selbst noch unklar. In der Ringtheorie schafft der Begriff des Inversen Abhilfe. Wir definieren:

Definition

Ein Element a eines Ω-Ringes M mit Einselement 1 heißt **inverses Element** zu einem $(n-1)$-Tupel $a_1,a_2,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_n$ von Elementen aus M bezüglich einer Operation ω_n des Operationensystems Ω genau dann, wenn für alle $j = 1,...,n$

$$a_1...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n = 1 \tag{1.20}$$

gilt. Linksinvers nennen wir a, wenn nur für $j = 1$

$$aa_1...a_{j-1}a_{j+1}...a_n\omega_n = 1 \tag{1.21}$$

gilt. Rechtsinvers heißt a, wenn

$$a_1...a_{j-1}a_{j+1}...a_na\omega_n = 1 \tag{1.22}$$

gilt.

Für Ringe bedeutet dies: Ein Element a^{-1} eines Ringes R mit Einselement e heißt inverses Element zu a aus R, wenn

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$$

gilt. Linksinvers nennen wir a^{-1}, wenn $a^{-1} \cdot a = e$ gilt; rechtsinvers für $a \cdot a^{-1} = e$.

Besitzt nun ein assoziativer und kommutativer Multioperatorring mit Einselement für jedes $(n-1)$-Tupel bezüglich jeder Operation ω_n ein inverses Element, so können wir zeigen:

Satz 1
Sei G ein kommutativer und assoziativer Multioperatorring mit Einselement 1. ω_n sei eine beliebige Operation aus dem Operationensystem Ω. Jede Gleichung der Form

$$a_1...a_{j-1}xa_{j+1}...a_n\omega_n = b \tag{1.23}$$

hat eine Lösung x in G, wenn bezüglich aller $(n-1)$-Tupel von Elementen $a_1,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_n$ aus G, welche alle verschieden vom Nullelement sind, und bezüglich jeder Operation ω_n aus Ω inverse Elemente existieren.

Beweis: Es seien die $a_i \neq 0$ $(i = 1,...,j-1,j+1,...,n)$ und b beliebig aus G gewählt. a sei das inverse Element des Tupels bezüglich der Operation $\omega_n \in \Omega$. Dann gilt nach (1.20)

$$a_1...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n = 1$$

Wenden wir von links die Operation ω_n mit den Elementen $1,1,...,1,b$ an, erhalten wir:

$$\underbrace{1......1}_{(n-2)-mal}\ b(a_1...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n)\omega_n = 1...1b1\omega_n$$

Da 1 das Einselement darstellt:

$$1...1b(a_1...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n)\omega_n = b$$

auf Grund der Assoziativität kann umgeklammert werden

$$(1...1ba_1\omega_n)a_2...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

mit der Kommutativität

$$(a_1 1...1 b\omega_n)a_2...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

erneut mit der Kommutativität

$$a_2...a_{j-1}(a_1 1...1 b\omega_n)aa_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

klammern wir um

$$a_2...a_{j-1}a_1(1...1ba\omega_n)a_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

und zum letzten Mal die Kommutativität

$$a_1a_2...a_{j-1}(1...1ba\omega_n)a_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

D.h. nun aber, dass das Element

$$x = 1...1ba\omega_n = ab1...1\omega_n$$

die Gleichung (1.23) erfüllt. Der Satz ist bewiesen.

Ist der betrachtete Multioperatorring nicht kommutativ, so können wir über allgemeine Gleichungen keine Aussage treffen. Da wir aber die Begriffe "Linksinverses" und "Rechtinverses" besitzen, zeigen wir:

Satz 2
Besitzt ein assoziativer Multioperatorring mit Einselement 1 für jedes $(n-1)$-Tupel von Null verschiedener Elemente bezüglich jeder n-ären Operation ω_n ein Links- und ein Rechtsinverses, so ist jede Gleichung der Form

$$xa_1...a_{n-1}\omega_n = b \qquad \text{bzw.} \tag{1.24}$$

$$a_1...a_{n-1}x\omega_n = b \tag{1.25}$$

mit $a_j \neq 0$, $j = 1,...,n-1$, lösbar.

Beweis: Sei G ein assoziativer Ω-Ring mit Einselement 1. Die Elemente $a_j \neq 0$, $j = 1,...,n-1$, und b seien beliebig aus G, sowie ω_n n-äre Operation aus Ω. a_l sei das Linksinverse des Tupels der a_j bezüglich ω_n. a_r sei das entsprechende Rechtinverse.
Dann gilt nach (1.21) und (1.22):

$$a_la_1...a_{n-1}\omega_n = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1...a_{n-1}a_r\omega_n = 1$$

Verfahren wir mit der Operation ω_n wie im Beweis zu Satz 1 zum einen von links und zum anderen von rechts, erhalten wir:

$$1...1b(a_la_1...a_{n-1}\omega_n)\omega_n = 1 = 1...1b1\omega_n = b \quad \text{und}$$

$$(a_1...a_{n-1}a_r\omega_n)b1...1\omega_n = 1...1b1\omega_n = b$$

Klammern wir auf Grund des Assoziativgesetzes einmal um

$$(1...1ba_l\omega_n)a_1...a_{n-1}\omega_n = b \qquad \text{und} \qquad a_1...a_{n-1}(a_rb1...1\omega_n)\omega_n = b$$

Damit haben wir aber für Gleichung (1.24) die Lösung

$$x = 1...1ba_l\omega_n$$

für Gleichung (1.25)

$$x = a_rb1...1\omega_n$$

womit der Satz bewiesen ist.

Die Bedeutung dieses Satzes erkennt man bei Anwendung auf Multioperatorringe, welche in ihrem Operationensystem nur eine binäre Operation enthalten, insbesondere also für Ringe. Während wir allgemein sagen müssen:

Satz 3
In einem assoziativen, kommutativen und regulären Multioperatorring G mit Einselement 1, in dem alle inversen Elemente existieren, sind Gleichungen

$$a_1...a_{j-1}xa_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

für alle Elemente $a_i \neq 0$, $i = 1,...,j-1,j+1,...n$, und b aus G stets eindeutig lösbar.

Der Nachweis ergibt sich als Folgerung aus den Sätzen 1 und 4, 1.1.4, so benötigen wir für Ringe die Kommutativität nicht. Wenden wir Satz 4, 1.1.4, und Satz 2 an, erhalten wir:

Satz 4
In einem nicht notwendigerweise kommutativen regulären Ring R mit Einselement e, in dem für jedes von Null verschiedene Element a das Linksinverse a_l und das Rechtsinverse a_r existieren, ist jede Gleichung bei beliebigen b aus G der Form

$$a \cdot x = b \qquad \text{bzw.} \qquad x \cdot a = b$$

eindeutig lösbar.

Damit ist es aber möglich in der Ringtheorie den Begriff des nichtkommutativen Körpers (man spricht von einem Schiefkörper) einzuführen, während wir uns dem allgemeinen Fall auf kommutative Ω-Körper beschränken. Wir definieren:

Definition

Ein kommutativer, assoziativer Ω-Ring mit Einselement heißt genau dann **Ω-Körper**, wenn in ihm jede Gleichung der Form

$$a_1...a_{j-1}xa_{j+1}...a_n\omega_n = b$$

für beliebige Elemente $a_i \neq 0$, $i = 1,...,j-1,j+1,...,n$, und b eindeutig lösbar ist.

Da die Regularität für die Eindeutigkeit der Lösungen von Gleichungen in Multioperatorringen notwendiges und hinreichendes Kriterium ist, muss jeder Ω-Körper selbst regulär sein. Ebenso müssen in ihm alle möglichen Inversen existieren. Wir können zeigen:

Satz 5
In einem Ω-Körper sind die inversen Elemente und das Einselement eindeutig bestimmt.

Beweis: Angenommen x_1 und x_2 seien zwei verschiedene inverse Elemente eines $(n-1)$-Tupels $a_1; ...; a_{j-1}; a_{j+1}; ...; a_n$, wobei die a_j, $i = 1,...,n$, sämtlich verschieden vom Nullelement sind, bezüglich einer Operation ω_n aus dem Operationensystem. Dann gilt:

$$a_1...a_{j-1}x_1a_{j+1}...a_n\omega_n = 1 = a_1...a_{j-1}x_2a_{j+1}...a_n\omega_n$$

Da G als Ω-Körper regulär ist, erhält man $x_1 = x_2$ und damit einen Widerspruch zur Annahme. Die inversen Elemente müssen in einem Ω-Körper eindeutig bestimmt sein.
Seien 1 und $1'$ zwei verschiedene Einselemente von G. Dann gilt auf Grund von (1.4), 1.1.2:

$$1...11'1...1\omega_n = 1' \qquad \text{und} \qquad 1'...1'11'...1'\omega_n = 1$$

für alle Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω des Ω-Körpers G. Da die Anwendung von Einselementen in (1.4) aus 1.1.2 in jedem Fall kommutativ ist, können diese Gleichungen umgestellt werden:

$$1...11'1\omega_n = 1' \qquad \text{und} \qquad 11'...1'\omega_n)1$$

Setzen wir die erste Gleichung in die zweite für das von links erste $1'$ ein, wird

$$1 = 1(1...11'\omega_n)1'...1'\omega_n =$$

mit dem Assoziativgesetz und (1.4) aus 1.1.2

$$1 = 1...1(1'...1'\omega_n) = 1 = 1...11'\omega_n = 1'$$

und damit ein Widerspruch zur Annahme. Auch das Einselement ist eindeutig bestimmt. Der Beweis ist erbracht.

Da für den Beweis nur einige Körpereigenschaften benötigt wurden, gilt:

Satz 6
In jedem regulären Ω-Ring sind die eventuell existierenden Inversen eindeutig bestimmt.
In jedem assoziativen Ω-Ring ist ein existierendes Einselement eindeutig bestimmt.

Zum Abschluss von 1.1.5 wenden wir uns noch einem Schiefkörper zu, dem Quaternionenkörper $\mathbb{Q}$, welcher in unserem Sinne kein Ω-Körper ist. Jedoch können wir ihn auch **Ω-Schiefkörper** nennen.

Wir betrachten eine Menge $\mathbb{Q}$ von Paaren komplexer Zahlen, d.h. die Menge

$$\mathbb{Q} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

Auf dieser Menge definieren wir folgende Gleichheitsrelation

$$(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow a = c \quad \text{und} \quad b = d$$

wobei die Paare (a,b) und (c,d) aus $\mathbb{Q}$, d.h. a, b, c und d komplexe Zahlen sind. Außerdem führen wir eine Addition und eine Multiplikation ein:

$$(a,b) + (c,d) := (a + c, b + d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd', ad + bc')$$

wobei d' und c' die konjugiert komplexen Zahlen von d und c sind.
Dass die Menge $\mathbb{Q}$ mit der Addition Modul ist, folgt sofort aus den gleichen Eigenschaften der komplexen Zahlen. Das Operationensystem des entsprechenden Multioperatorrings $\mathbb{Q}$ enthält dann die definierte Multiplikation. Dazu zeigen wir das Distributivgesetz.
Es ist für alle Elemente (a_1, a_2), (b_1, b_2) und (c_1, c_2) aus $\mathbb{Q}$ zum einen

$$(a_1,a_2) \cdot ((b_1,b_2) + (c_1,c_2)) = (a_1,a_2) \cdot (b_1,b_2) + (a_1,a_2) \cdot (c_1,c_2)$$

und zum anderen

$$((a_1,a_2) + ((b_1,b_2)) \cdot (c_1,c_2) = (a_1,a_2) \cdot (c_1,c_2) + (b_1,b_2) \cdot (c_1,c_2)$$

nachzuweisen. Wir zeigen nur die erste den beiden Gleichungen, da der Nachweis der zweiten analog verläuft.
Mit den Definitionen der Addition und der Multiplikation erhalten wir:

$$(a_1,a_2) \cdot ((b_1,b_2) + (c_1,c_2)) = (a_1,a_2) \cdot (b_1 + c_1,b_2 + c_2) =$$
$$= (a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2)', a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)') =$$

und da für die konjugiert Komplexen allgemein $(x + y)' = x' + y'$ sowie im Bereich der komplexen Zahlen die Distributivgesetze gelten

$$= (a_1b_1 + a_1c_1 - a_2b_2' - a_2c_2', a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1' + a_2c_1') = L$$

Formen wir die rechte Seite um, ergibt sich

$$(a_1,a_2) \cdot (b_1,b_2) + (a_1,a_2) \cdot (c_1,c_2) = (a_1b_1 - a_2b_2', a_1b_2 + a_2b_1') + (a_1c_1 - a_2c_2',a_1c_2 + a_2c_1') =$$

und auf Grund der Kommutativität der Addition der komplexen Zahlen

$$= (a_1b_1 + a_1c_1 - a_2b_2' - a_2c_2', a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1' + a_2c_1') = R$$

Beide Seiten L und R der Gleichung sind identisch. Damit gelten im Multioperatorring $\mathbb{Q}$ die Distributivgesetze. Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass die Multiplikation assoziativ ist.
Das Einselement wird durch das Paar komplexer Zahlen (1,0) gestellt.
Dass das Kommutativgesetz nicht gilt, kann man durch eine Belegung mit Paaren feststellen. Ist i die imaginäre Einheit, so gilt:

$$(i,0) \cdot (0,i) = (0, -1)$$

und andererseits

$$(0,i) \cdot (i,0) = (0,1)$$

Q ist also nicht kommutativ.
Um nun die Regularität von $\mathbb{Q}$ nachzuweisen, zeigen wir, dass in $\mathbb{Q}$ keine Nullteiler existieren. Nach Satz 4, 1.1.4, ist dies ausreichend.
Angenommen (a,b) wäre Nullteiler im Ω-Ring $\mathbb{Q}$. Dann müsste auf Grund der Definition des Nullteilers ein Element (c,d) in $\mathbb{Q}$ existieren, so dass

$$(a,b) \cdot (c,d) = (0,0)$$

gilt, wobei mindestens eine Komponente von (c,d) verschieden von Null sein muss, d.h.

$$c^{2^2} + d^{2^2} \neq 0$$

Löst man die linke Seite auf, so erhält man

$$(ac - bd', ad + bc') = (0,0)$$

und damit zwei Gleichungen zur Berechnung der Komponenten

$$ac - bd' = 0$$
$$ad + bc' = 0$$

Diese komponentenweise Bestimmung von a und b ist durch die definierte Gleichheitsrelation in $\mathbb{Q}$ möglich.
Zuerst setzen wir c als verschieden von Null voraus. Dann können wir die erste Gleichung nach a umstellen und in die andere einsetzen:

$$a = \frac{bd'}{c} \to \frac{bd'}{c}d + bc' = 0 \tag{1.26}$$

Klammern wir aus:

$$b(dd' + cc') = 0$$

Dieses Produkt kann nur Null werden, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist, da die Struktur der komplexen Zahlen nullteilerfrei ist.

1. Fall: $b = 0$, dann muss a aber nach (1.26) auch gleich Null werden. Damit wäre aber $(a,b) = (0,0)$. Da das Nullelement aber kein Nullteiler sein kann, liegt ein Widerspruch zur Annahme vor.

2. Fall: $dd' + cc' = 0$, da aber für jede komplexe Zahl $x + yi$ ihr Produkt mit der zugehörigen konjugiert komplexen Zahl $x - yi$ immer reell und vor allem nicht kleiner Null wird.

   $$(x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = 0$$

   erhalten wir für $d \cdot d' = 0$ und $c \cdot c = 0$. Deren Summe kann damit nur gleich Null werden, wenn c und d selbst die komplexe Zahl 0 sind. Nach Voraussetzung ist aber c verschieden von Null, so dass ein Widerspruch vorliegt.

Folglich verbleibt nur die Möglichkeit, dass $c = 0$ und d verschieden von Null ist.
Setzen wir dies in unsere zwei Ausgangsgleichungen ein, so wird:

$$-b \cdot d' = 0 \qquad \text{und} \qquad a \cdot d = 0$$

Dies heißt aber auf Grund der Nullteilerfreiheit der komplexen Zahlen, dass entweder

1. $b = a = 0$ ist; die ist aber nicht möglich, da das Nullelement $(a,b) = (0,0)$ nicht Nullteiler sein kann; oder

2. $b = d = 0$ bzw. $d' = a = 0$ bzw. $d' = d = 0$ sind; in allen drei Fällen ist dann aber $d = 0$ und $(c,d) = (0,0)$, was wieder ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Damit erhalten wir mit dieser Annahme immer einen Widerspruch, so dass wir die Annahme fallen lassen müssen. Der Multioperatorring $\mathbb{Q}$ der Quaternionen ist nullteilerfrei und nach Satz 4, 1.1.4, auch regulär.
Mit Satz 6, 1.1.4, sind damit Gleichungen in $\mathbb{Q}$, wenn überhaupt, so eindeutig lösbar.

Können wir nun noch die Existenz von Links- und Rechtsinversen zeigen, so wäre $\mathbb{Q}$ Schiefkörper im eigentlichen Sinne, da dann im nichtkommutativen $\mathbb{Q}$ jede Gleichung eindeutig lösbar ist. Wenden wir uns den Rechtsinversen zu:

Sei (a,b) ein vom Nullelement verschiedenes Element des Multioperatorrings $\mathbb{Q}$. Gesucht ist das rechtsinverse Element bei der Multiplikation

$$(a,b) \cdot (c,d) = (1,0)$$

Auflösen führt zu den Gleichungen

$$ac - bd' = 1 \qquad \text{und} \qquad ad + bc' = 0$$

Aus beiden Gleichungen erhalten wir, wenn a verschieden von Null ist

$$d = -\frac{bc'}{a} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{1 + bd'}{a}$$

Ist a gleich dem Nullelement, so muss nach Voraussetzung b verschieden von Null sein, und wir erhalten

$$c' = -\frac{ad}{b} \qquad \text{und} \qquad d' = \frac{ac - 1}{b}$$

Aus beiden Möglichkeiten ergibt sich

$$c = \frac{a}{aa' + bb'} \qquad ; \qquad d = -\frac{b}{aa' + bb'}$$

(c,d) bildet das Rechtsinverse des Elements (a,b), wobei (c,d) immer existiert, da $aa' + bb' \neq 0$ sein muss.
Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass in $\mathbb{Q}$ Links- und Rechtsinverse identisch sind, womit wir unsere Untersuchungen des Schiefkörpers der Quaternionen vorerst beenden.

1.1.6 Der Multioperatorring im System der Strukturen

Menge
Zusammenfassung wohlunterschiedener Elemente unserer Anschauung und unseres Denkens

$\downarrow$

Universelle Algebra
Trägermenge M, auf welcher ein System Ω von n-ären Operationen definiert ist.
$\Rightarrow$ **n-äre Operation**: Eindeutige Abbildung von M^n in M

$\downarrow$

Multioperatorgruppe
Gruppe $(G,+)$ als Trägerstruktur, auf der ein System Ω mit $0...0\omega_n = 0$ eingeführt ist.

$\downarrow$

Multioperatorring
Modul $(G,+)$ mit System Ω und $\forall \omega_n \in \Omega$ und $\forall a_1,...,a_n,b,c \in G$:

$$a_1...a_{i-1}(b+c)a_{i+1}...a_n\omega_n = a_1...a_{i-1}ba_{i+1}...a_n\omega_n + a_1...a_{i-1}ca_{i+1}...a_n\omega_n$$

Beziehung Multioperatorring - Ring

Multioperatorring $\Longrightarrow$ Nicht notwendigerweise assoziativer Ring (z.B. liesche Ringe)
$\downarrow$
Assoziativer Ω-Ring (1.1.2) $\Longrightarrow$ Ring (z.B. Zahlenringe, Polynomringe)
$\downarrow$
Ω-Ring mit Einselement (1.1.2) $\Longrightarrow$ Ring mit e (z.B. Zahlenringe, Restklassenringe)
$\downarrow$
Kommutativer Ω-Ring (1.1.2) $\Longrightarrow$ Integritätsbereich (z.B. Zahlenringe)
$\downarrow$
Ω-Körper (1.1.5) $\Longrightarrow$ Körper (z.B. rationale, reelle Zahlen)
$\downarrow$
Ω-Schiefkörper (1.1.5) $\Longrightarrow$ Schiefkörper (z.B. Quaternionenkörper)

1.2 Der Multioperatorring als universelle Algebra

1.2.1 Unterstrukturen

Wie es bei jeder algebraischen Struktur der Fall ist, so können wir auch für Ω-Ringe Unterstrukturen untersuchen.

Definition

Eine nichtleere Teilmenge U eines Ω-Ringes G heißt genau dann **Ω-Unterring** von G, wenn $(U,+)$ Untergruppe des Moduls $(G,+)$ und bezüglich des Operationensystems Ω von G selbst Multioperatorring ist.

Da die Kommutativität der Addition und die Distributivität der Operationen aus Ω identische Relationen sind, können wir ein Unterstrukturkriterium formulieren.

Ω-Unterringkriterium
Eine Untergruppe $(U,+)$ des Moduls eines Multioperatorrings G ist genau dann Ω-Unterring von G, wenn U bezüglich aller Operationen ω_n aus Ω abgeschlossen ist, d.h., aus $a_1,...,a_n \in U$ folgt für jede Operation ω_n von Ω:

$$a_1...a_n\omega_n \in U \tag{1.27}$$

Wird das Operationensystem Ω leer; der Ω-Ring ist dann abelsche Gruppe; ist der Ω-Unterring natürlich Untergruppe. Für Ringe (das Operationensystem enthält dann nur eine binäre Multiplikation) erhalten wir das bekannte Unterringkriterium, wobei (1.27) durch

$$a_1 \cdot a_2 \in U$$

ersetzt wird. Jeder Unterring eines Rings ist damit auch Ω-Unterring des entsprechenden Multioperatorrings, und nur diese.
Für den Ring (Multioperatorring) der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind gerade alle $n\mathbb{Z}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, die Ω-Unterringe. Nach 1.1.3 sind dies auch die Ω-Unterringe des Multioperatorrings $(\mathbb{Z}, +, \Omega)$, mit $\Omega = \{\cdot, \Omega(1)\}$.
Die Unterstrukturen der Restklassenringe modulo n, $\mathbb{Z}/n$ bzw. $\mathbb{Z}_n$, sind die durch die Restklassen $[a]_n$ erzeugten Ringe, wobei a Teiler von n ist. Der Einfachheit halber vereinbaren wir hier, in Zukunft die Restklassenringe nur durch deren Erzeugenden darzustellen.
Auch in Matrizenringen existieren Ω-Unterringe. Zum Beispiel bilden im 2-reihigen Matrizenring über dem Körper der reellen Zahlen die Menge M_1 aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei a die Menge aller reellen Zahlen durchläuft, und die Menge M_2 aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

mit a und b als beliebige reelle Zahlen, Ω-Unterringe.
Der schon erwähnte zweidimensionale Punktraum über den reellen Zahlen mit dem vektoriellen Tripelprodukt als ternäre Operation, der $(\mathbb{R}^2, +, o_3)$, besitzt ebenfalls Ω-Unterringe. Da auf Grund der Entwicklungssatzes des vektoriellen Tripelprodukts

$$((a,0) \times (b,0)) \times (c,0) = (ac) \cdot (b,0) - (bc) \cdot (a,0) = (acb,0) - (bca,0) = (0,0)$$

gilt, ist die Menge aller Paare $(a,0)$, wobei a alle reellen Zahlen annimmt, offenbar Ω-Unterring von $(\mathbb{R}^2, +, o_3)$. Weitere Ω-Unterringe dieser Struktur werden von den Mengen

a) $P^2 = \{(a,b)|\ a,b$ beliebige rationale Zahlen $\}$

b) $P^1 = \{(a,0)|\ a$ beliebige rationale Zahl $\}$

c) $G^2 = \{(a,b)|\ a,b$ beliebige ganze Zahlen $\}$

gebildet.
Der im letzten Abschnitt betrachtete Schiefkörper der Quaternionen kann, da ein Quaternion ein Paar komplexer Zahlen ist und jede komplexe Zahl wiederum Paar reeller Zahlen ist, auch als Menge von Quadrupeln reeller Zahlen dargestellt werden. Die Operationen Addition und Multiplikation nehmen dann die Form an:

$$(a,b,c,d) + (e,f,g,h) = (a+e, b+f, c+g, d+h)$$

$$(a,b,c,d)\cdot(e,f,g,h) = (ae - bf - cg - dh, af + be + ch - dg, ag - bh + ce + bf, ah + bg - cf + de)$$

Vereinfachen wir nun und setzen

$$1 = (1,0,0,0) \quad ; \quad i = (0,1,0,0) \quad ; \quad j = (0,0,1,0) \quad ; \quad k = (0,0,0,1)$$

so können wir jedes Quaternion eindeutig durch

$$(a,b,c,d) = a + bi + cj + dk$$

darstellen und erhalten für die Multiplikation im Multioperatorring der Quaternionen die einfache Tafel:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Aus dieser Tafel erkennt man, dass die Mengen aller Quaternionen Q_0 der Form

$$Q_0 = \{(a,b,0,0)|a,b \in \mathbb{R}\}$$

einen Ω-Unterring der Quaternionen darstellt.

Es ist nun müßig zu zeigen, dass der Durchschnitt eines Systems von Ω-Unterringen eines Multioperatorrings wieder Ω-Unterring ist. Der Beweis verläuft nach dem üblichen Verfahren. Damit können wir aber definieren:

Definition

Der von zwei Ω-Unterringen U_1 und U_2 eines Multioperatorrings G erzeugte Ω-Unterring U sei der Durchschnitt aller Ω-Unterringe A_i, $i \in I$, aus G, welche die Menge $U_1 \cup U_2$ echt enthalten. d.h.

$$U = \{\bigcap_{i\in I} A_i/(U_1 \cup U_2) \subseteq A_i, \forall i \in I\} = \{U_1, U_2\} \tag{1.28}$$

An dieser Stelle sei nur darauf hingewiesen, dass die Menge aller Ω-Unterringe eines Ω-Rings mit den binären Operationen "Durchschnitt" und "Erzeugung" einen modularen vollständigen Verband mit Null- und Einselement darstellt.
Zur Theorie der Verbände vergleiche man mit Kuros [9], Szasz [20] und Redei [17].

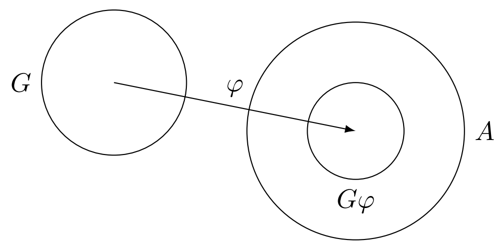
Abschließend sei noch bemerkt, dass jeder Multioperatorring zwei triviale Ω-Unterringe besitzt, und zwar sich selbst und den zugehörigen Ω-Nullring. Weitere Ω-Unterringe können, wie gezeigt, müssen aber nicht existieren.
Zum Beispiel besitzt der Restklassenring modulo 3 keine nichttrivialen Ω-Unterringe. Derartige Multioperatorringe nennen wir **streng einfach**.

1.2.2 Operationstreue Abbildungen

Ausgehend von der Theorie der universellen Algebra führen wir für Multioperatorringe operationstreue Abbildungen ein:

Definition

Eine eindeutige Abbildung φ eines Multioperatorrings G in eine gleichartige universelle Algebra A heißt genau dann **Homomorphismus** von G in A



wenn für alle Elemente a_i aus G, $i = 1,...,n$, und jede Operation ω_n aus Ω sowie für die Addition

$$(a_1 + a_2)\varphi = a_1\varphi + a_2\varphi \qquad \text{und} \tag{1.29}$$

$$(a_1...a_n\omega_n)\varphi = (a_1\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n \tag{1.30}$$

gilt.

(1.29) und (1.30) nennen wir **Homomorphiebedingungen**. Die Menge aller Bilder $G\varphi$ heißt homomorphes Bild von G bezüglich des Homomorphismus φ.
Ist das Operationensystem Ω des Ω-Ringes leer, fällt (1.30) weg und wir erhalten die Homomorphiebedingung für Gruppen. Enthält Ω eine binäre Multiplikation, so ergibt sich die Definition der Homomorphie für ringartige Strukturen.

Satz 1
Das homomorphe Bild $G\varphi$ eines Ω-Ringes G bezüglich eines Homomorphismus φ ist selbst Multioperatorring.

Beweis: Da $G\varphi$ auch homomorphes Bild des Moduls von G ist, und das homomorphe Bild eines Moduls wieder Modul ist, muss $G\varphi$ als Trägerstruktur einen Modul besitzen.
Weiterhin ist für beliebige Elemente a_i von G, mit $i = 1,...,n$, und jede Operation ω_n aus Ω:

$$(a_1\varphi)...(a_{i-1}\varphi)((b\varphi) + (c\varphi))(a_{i+1}\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n =$$

mit (1.29) und (1.30)

$$= (a_1\varphi)...(a_{i-1}\varphi)((b + c)\varphi)(a_{i+1}\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n = (a_1...a_{i-1}(b + c)a_{i+1}...a_n\omega_n)\varphi =$$

$$= (a_1...a_{i-1}ba_{i+1}...a_n\omega_n)\varphi + (a_1...a_{i-1}ca_{i+1}...a_n\omega_n)\varphi =$$

$$= (a_1\varphi)...(a_{i-1}\varphi)(b\varphi)(a_{i+1}\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n + (a_1\varphi)...(a_{i-1}\varphi)(c\varphi)(a_{i+1}\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n$$

womit das Distributivgesetz für alle Elemente des homomorphen Bildes $G\varphi$ erfüllt ist. $G\varphi$ ist Multioperatorring und der Beweis erbracht.

Es sei nur erwähnt, dass die Nacheinanderausführung von zwei Homomorphismen wieder Homomorphismus ist. Außerdem sind die Eigenschaften Kommutativität, Assoziativität und Existenz eines Einselements invariant gegenüber diesen Homomorphismen. Nullteilerfreiheit bzw. Regularität sind nicht invariant.

Beispiele für Homomorphismen bei Ringen als speziellen Multioperatorringen sind in der angegeben Literatur zahlreich zu finden.
Hier betrachten wir den Quaternionenring $\mathbb{Q}$ und einen Ω-Unterring M^+ des 2-reihigen Matrizenrings M_2 über dem Körper der komplexen Zahlen, welcher alle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{pmatrix}$$

enthält, wobei die Komponenten a und b komplexe Zahlen sind und a' wieder das konjugiert Komplexe von a ist. Ist (a,b) ein beliebiges Quaternion aus $\mathbb{Q}$, so betrachten wird die Abbildung φ, welche durch

$$(a,b)\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{pmatrix}$$

definiert wird. Die Eindeutigkeit dieser Abbildung ergibt sich sofort aus deren Definition; ebenso die Tatsache, dass φ eine Abbildung von $\mathbb{Q}$ auf M^+ ist. Wir weisen deshalb nur noch die Homomorphiebedingung der Multiplikation nach, da der Nachweis für die Addition analog verläuft.
Es seien dazu (a,b) und (c,d) beliebige Quaternionen aus $\mathbb{Q}$. Dann wird

$$((a,b) \cdot (c,d))\varphi =$$

mit der Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$ (1.1.5)

$$= (ac - bd', ad + bc')\varphi =$$

und mit der Definition der Abbildung und den Gesetzmäßigkeiten für konjugiert Komplexe

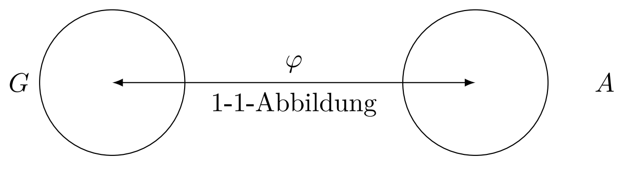
$$= \begin{pmatrix} ac - bd' & ad + bc' \\ -(ad + bc')' & (ac - bd')' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd' & ad + bc' \\ -a'd' - b'c & a'c' - b'd \end{pmatrix} = X$$

Andererseits erhalten wir

$$(a,b)\varphi \cdot (c,d)\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd' & ad + bc' \\ -a'd' - b'c & a'c' - b'd \end{pmatrix} = Y$$

Da $X = Y$ gilt, ist die Homomorphiebedingung gezeigt. Der Schiefkörper der Quaternionen ist damit homomorph zum dem Ω-Ring M^+.
Ohne Beweis sei nur erwähnt, dass, konstruieren wir einen Polynomring $P[x]$ über einen Integritätsbereich P, so existiert ein Homomorphismus von $P[x]$ auf P.

Einen eineindeutigen Homomorphismus nennen wir wieder **Isomorphismus**. Bei diesem ist auch die Regularität bzw. Nullteilerfreiheit invariant.



Um ein Beispiel zu demonstrieren, benutzen wir den Körper der komplexen Zahlen und den Ω-Unterring Q_0 des Quaternionenkörpers. Der zugehörige Isomorphismus wird durch die Abbildung φ mit

$$\varphi: \quad (a,b)\varphi = (a,b,0,0)$$

wobei die a und b beliebige reelle Zahlen sind, gestellt. Wir erhalten mit der Definition der Multiplikation im Bereich der komplexen Zahlen:

$$((a,b)\cdot(c,d))\varphi = (ac-bd,ad+bc)\varphi = (ac-bd,ad+bc,0,0) =$$

und mit der Definition der Multiplikation im Bereich der Quaternionen

$$= (a,b,0,0)\cdot(c,d,0,0) = (a,b)\varphi\cdot(c,d)\varphi$$

Für die Addition ergibt sich dies analog. D.h. also, der Körper der komplexen Zahlen ist isomorph zum dem Ω-Unterring Q_0 der Quaternionen.
Zu dem oben genannten Beispiel für einen Homomorphismus bemerkt Lugowski-Weigert in [14], dass der Quaternionenkörper $\mathbb{Q}$ und M^+ sogar isomorph zueinander sind.

Nun können auch operationstreue Abbildungen eines Multioperatorrings in sich selbst untersucht werden.
Einen Isomorphismus eines Multioperatorrings auf sich selbst bezeichnen wir als **Automorphismus** des Ω-Rings. Jeder Multioperatorring besitzt mindestens einen Automorphismus, und zwar den identischen, welcher jedes Element auf sich selbst abbildet.

Homomorphismen eines Multioperatorrings in sich erhalten den Namen **Endomorphismus**. Offenbar gehören zu den Endomorphismen eines Multioperatorrings alle Automorphismen, alle Isomorphismen in sich sowie alle Homomorphismen in bzw. auf den Ω-Ring.
In jedem Multioperatorring existieren damit zwei triviale Endomorphismen, der identische Automorphismus und der Nullendomorphismus, welcher jedes Element auf das Nullelement des Ω-Rings abbildet. Nichttrivialer Endomorphismus ist zum Beispiel die Abbildung

$$\varphi: \quad a\varphi = 3a$$

im Restklassenring modulo 6.
Da die Endomorphismen für unsere Untersuchungen zentrale Bedeutung besitzen, werden wir uns in Abschnitt 1.5 noch weiter mit diesen Abbildungen beschäftigen.

1.2.3 Kongruenzen und Homomorphiesatz

Da Multioperatorringe eine Trägermenge G besitzen, kann auf dieser eine Äquivalenzrelation untersucht werden, welche mit allen Operationen ω_n des Operationensystems Ω verträglich ist.

Definition

Eine Äquivalenzrelation π eines Multioperatorrings G heißt dann **Kongruenz** oder **Kongruenzrelation** von G, wenn für alle a_i, b_i aus G und jede Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω sowie für die Addition aus

$$a_i \quad \pi \quad b_i$$

für alle i mit $i = 1,...,n$

$$(a_1 + a_2) \quad \pi \quad (b_1 + b_2) \qquad \text{und} \tag{1.31}$$

$$(a_1 ... a_n \omega_n) \quad \pi \quad (b_1 ... b_n \omega_n) \tag{1.32}$$

folgt.

(1.31) und (1.32) nennen wir Kombatibilitätsbedingungen. Betrachten wir wieder Ringe, womit das Operationensystem wieder nur eine binäre Multiplikation enthält, so wird die Kompatibilitätsbedingung (1.32) zu

$$(a_1 \cdot a_2) \quad \pi \quad (b_1 \cdot b_2)$$

Liegt nun in einem Multioperatorring G eine Kongruenz π vor, können wir zum Rechnen mit Klassen übergehen. Dabei wird

$$A_1 + A_2 = B \Leftrightarrow a_1 + a_2 = b \qquad \text{und} \tag{1.33}$$

$$A_1 ... A_n \omega_n = B \Leftrightarrow a_1 ... a_n \omega_n = b \tag{1.34}$$

gilt, wobei die a_i den Klassen A_i, $i = 1,...,n$, und b der Klasse N angehört.
Die **Faktormenge** G/π wird folglich mit einem Operationensystem $\Omega' = \{+,\Omega\}$, wobei Ω das Operationensystem von G ist, zu einer universellen Algebra. Diese Faktoralgebra ist nun selbst Ω-Ring.

Satz 1
Die Faktoralgebra G/π eines Ω-Ringes G bezüglich einer Kongruenzrelation π ist selbst Multioperatorring.

Beweis: Dass G/π mit der Addition Modul ist, folgt aus der Tatsache, dass die Faktorstruktur eines Moduls wieder Modul ist. Dabei tritt ein Homomorphismus φ auf, welcher jedes Element in seine Klasse abbildet.
φ erfüllt nun auch die Homomorphiebedingungen für alle Operationen aus dem Operationensystem:

$$(a_1 ... a_n \omega_n)\varphi = [a_1 ... a_n \omega_n] =$$

mit Relation (1.34)

$$= [a_1]...[a_n]\omega_n = (a_1\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n$$

womit G/π nach Satz 1 aus 1.2.2 Multioperatorring ist. Der Beweis ist erbracht.

Den dabei auftretenden Homomorphismus φ nennt man den **natürlichen Homomorphismus** ψ von G auf G/π. Auf Grund dieses Homomorphismus übertragen sich die Eigenschaften, wie Kommutativität, Assoziativität und Existenz von einem Einselement, auf die Faktoralgebra G/π, welche wir nun auch **Ω-Faktorring** des Multioperatorrings G nach einer Kongruenz π nennen.

Jeder Multioperatorring besitzt zwei triviale Kongruenzrelationen. Zum einen die identische Kongruenz:

$$a \quad \pi \quad b \Leftrightarrow a = b$$

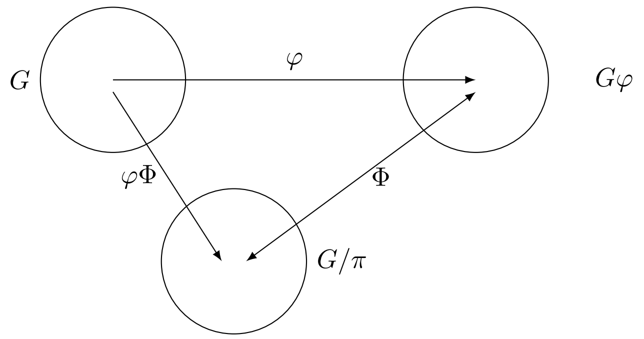
für beliebige a und b aus G, wobei dann der zugehörige Ω-Faktorring isomorph zum dem Ausgangsmultioperatorring wird.
Zum anderen existiert die Nullkongruenz:

$$a \quad \pi \quad b \Leftrightarrow \forall a, b \in G$$

wobei hier der Ω-Faktorring isomorph zum Ω-Nullring wird.
Für Ringe entspricht der Ω-Faktorring gerade dem bekannten Begriff des Faktorrings. Beispiele findet man wieder in der angegebenen Literatur.

Es ist nun möglich, die Zusammenhänge zwischen Kongruenzen und Homomorphismen eines Multioperatorrings in einem Homomorphiesatz zu fassen:

Homomorphiesatz
Ist ein Multioperatorring $G\varphi$ homomorphes Bild eines Multioperatorrings G bezüglich eines Homomorphismus φ, so existiert in G eine Kongruenz π, so dass die Klasse $[0]$, in welcher das Nullelement von G liegt, auf das Nullelement $0'$ von $G\varphi$ abgebildet wird.
Der durch die Kongruenz π erzeugte Ω-Faktorring G/π ist dann isomorph zu $g\varphi$ bezüglich eines Isomorphismus Φ, für den $\varphi\Phi$ mit dem natürlichen Homomorphismus ψ von G auf G/π zusammenfällt.
Umgekehrt erzeugt jede Kongruenz π des Multioperatorrings ein homomorphes Bild, welches isomorph zu dem Ω-Faktorring G/π ist.



Beweis: Legt man in eine Klasse von G alle Elemente, deren Bilder bezüglich des Homomorphismus φ übereinstimmen, erhält man paarweise disjunkte Klassen. Die entstehende Äquivalenzrelation π ist dann sogar Kongruenz. Aus

$$a_i\varphi = b_i\varphi$$

$i = 1,...,n$, für beliebige Elemente aus G, erhalten wir für jede n-äre Operation ω_n des Operationensystems und für die Addition aus den Relationen (1.29) und (1.30), 1.2.2:

$$(a_1...a_n\omega_n)\varphi = (a_1\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n = (b_1\varphi)...(b_n\varphi)\omega_n = (b_1...b_n\omega_n)\varphi$$

und für die Addition

$$(a_1 + a_2)\varphi = (a_1\varphi) + (a_2\varphi) = (b_1\varphi) + (b_2\varphi) = (b_1 + b_2)\varphi$$

Weiterhin ist bei jedem Homomorphismus $0\varphi = 0'$, so dass wir erhalten $[0]\varphi = 0'$, womit der Ω-Faktorring existiert.

Ordnet man nun jedem Element a' aus dem Ω-Ring $G\varphi$ diejenige Klasse $[a]$ aus dem Ω-Faktorring G/π zu, in der bei dem Homomorphismus φ alle Urbilder von a' liegen, entsteht eine eineindeutige Abbildung Φ von $G\varphi$ auf den Ω-Faktorring G/π.
Φ ist sogar Isomorphismus, denn:

Sei ω_n beliebige Operation aus dem Operationensystem und die Elemente $a'_1,...,a'_n$ ebenfalls beliebig aus $G\varphi$. Setzt man

$$a'_i\Phi = [a_i]$$

für alle $i = 1,...,n$, und wählt zu den a'_i Urbilder $a_1,...,a_n$ aus dem Multioperatorring G bezüglich des Homomorphismus φ, so wird mit den Relationen (1.29) und (1.30) aus 1.2.2:

$$(a_1...a_n\omega_n)\varphi = a'_1...a'_n\omega_n \qquad \text{und} \qquad (a_1 + a_2)\varphi = a'_1 + a'_2$$

Aus (1.33) und (1.34) dieses Abschnittes wird außerdem

$$(a_1...a_n\omega_n) \in [a_1]...[a_n]\omega_n \qquad \text{und} \qquad (a_1 + a_2) \in [a_1] + [a_2]$$

Zusammenfassend:

$$(a'_1 ... a'_n \omega_n)\varphi = [a_1]...[a_n]\omega_n = (a'_1\Phi)...(a'_n\Phi)\omega_n$$

und für die Addition

$$(a'_1 + a'_2)\Phi = [a_1] + [a_2] = (a'_1\Phi) + (a'_2\Phi)$$

womit Φ Isomorphismus vom Multioperatorring $G\varphi$ auf den Ω-Faktorring G/π ist.
Wählt man a beliebig aus G mit $a\varphi = a'$ und $a'\Phi = [a]$, so wird, da a in der Klasse $[a]$ enthalten ist

$$a(\varphi\Phi) = (a\varphi)\Phi = a'\Phi = [a]$$

$\varphi\Phi$ fällt folglich mit dem natürlichen Homomorphismus ψ von G auf seinen Ω-Faktorring nach der Kongruenz π zusammen. Der Beweis ist erbracht.

Wir können zwei Folgerungen ableiten.

Satz 1
Ein Homomorphismus φ eines Multioperatorrings G auf einen weiteren Ω-Ring G' ist dann und nur dann Isomorphismus, wenn das Nullelement von G' genau ein Urbild, d.h. also 0, besitzt.
Das homomorphe Bild eines Multioperatorrings bezüglich der Nullkongruenz ist der Ω-Nullring.

Die zweite Aussage wurde schon genannt. Zur ersten überlege man sich, dass dann jedes Element selbst eine Klasse bildet, womit der natürliche Homomorphismus zum Isomorphismus wird. Nach dem Homomorphiesatz ist dann G zu G' isomorph.

1.2.4 Multioperatorringerweiterung

In 1.2.2 sahen wir, dass der Multioperatorring der Quaternionen $\mathbb{Q}$ isomorph zu $M^+_{(2,2)}$ über den komplexen Zahlen ist. $M^+_{(2,2)}$ ist Ω-Unterring des 2-reihigen Matrizenrings über den komplexen Zahlen, so dass der volle Matrizenring eine Oberstruktur von $M^+_{(2,2)}$ darstellt. Die Frage nach einer entsprechenden Oberstruktur für den Quaternionenkörper soll hier beantwortet werden.

Erweiterungssatz
Seien G_1 und H_2 zwei Multioperatorringe, deren Trägermengen disjunkt sind. G_1 besitze einen zu H_2 isomorphen Ω-Unterring H_1, d.h.

$$H_1\varphi = H_2$$

Dann existiert ein H_2 umfassender Multioperatorring G_2 und ein Isomorphismus ψ von G_1 auf G_2, der auf dem Ω-Unterring H_1 mit dem Isomorphismus φ identisch ist.
Der Multioperatorring G_2 wird durch die Menge

$$G_2 = (G_1\ H_1) \cup H_2 \tag{1.35}$$

und die Operationen

$$a_1\psi + b_1\psi = (a_1 + b_1)\psi \qquad \text{und} \tag{1.36}$$

$$(a_1\psi)...(a_n\psi)\omega_n = (a_1...a_n\omega_n)\psi \tag{1.37}$$

für alle Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω von G_1, gebildet.

Beweis: Dass G_2 mit der Addition (1.36) und den Operationen von (1.37) Multioperatorring ist, ergibt sich ohne Probleme sofort gerade aus (1.36) und (1.37). Denn, wie man sieht, liegen mit (1.36) und (1.37) die Homomorphiebedingungen vor, womit ψ auch Isomorphismus wird. Es bleibt nur zu zeigen, dass φ mit ψ auf H_1 identisch ist.

Dazu seien a_1,...,a_n beliebige Elemente von H_2. Die Urbilder a'_1,...,a'_n bezüglich ψ und φ liegen dann in H_1, so dass auf Grund der Homomorphiebedingung für φ und ψ gilt:

$$a_1 + a_2 = a'_1\varphi + a'_2\varphi = (a'_1 + a'_2)\varphi = (a'_1 + a'_2)\psi = a'_1\psi + a'_2\psi = a_1 + a_2$$

und für ein beliebiges ω_n aus dem Operationensystem:

$$a_1...a_n\omega_n = (a'_1...a'_n\omega_n)\phi = (a'_1...a'_n\omega_n)\psi = a_1...a_n\omega_n$$

Die Operationstreue ist gewährleistet, so dass der Satz gezeigt ist.

Für übliche Ringe nimmt dieser Satz die Form des Erzeugungsverfahrens an, siehe Lugowski-Weinert [14], Seite 40. Es sei nur erwähnt, dass dieser Satz Grundlage für die Zahlenbereichserweiterung ist.

Es ist nun möglich einen Erweiterungs-Ω-Ring für die Quaternionen zu bilden, welcher isomorph zum 2-reihigen Matrizenring über den komplexen Zahlen ist. Schreiben wir die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

wobei a, b, c und d beliebige komplexe Zahlen sind, als Quadrupel (a,b,c,d) um, bildet dann die Menge aller dieser Quadrupel über den über den komplexen Zahlen mit den Operationen

$$(a,b,c,d) + (e,f,g,h) = (a + e,b + f,c + g,d + h)$$

$$(a,b,c,d) \cdot (e,f,g,h) = (ae + bg,af + bh,ce + dg,cf + dh)$$

gerade den entsprechen Ober-Ω-Ring der Quaternionen.
Dabei ersetzen wir alle Quadrupel vom komplexen Zahlen, für welche $a' = d$ und $-b' = c$ gilt, durch die zugehörigen Quaternionen. a' und b' sind dabei die konjugiert komplexen Zahlen zu a und b.

1.3 Das Ideal

1.3.1 Definition des Ideals

In der Ringtheorie wird der Zusammenhang zwischen Homomorphismus und Kongruenzrelation durch den Begriff des Ideals ergänzt. Für Multioperatorringe wird ein analoger Begriff eingeführt, wobei wir vorerst die von P.J.Higgins in "Groups with multiple operators" [3] gegebene Definition benutzen:

Definition

Eine nichtleere Teilmenge A eines Multioperatorrings G heißt genau dann **Ideal** von G, wenn $(A,+)$ Normalteiler der additiven abelschen Trägerstruktur $(G,+)$ des Ω-Ringes G ist und für alle Operationen ω_n des Operationensystems Ω, für jedes Element a von A und beliebige x_i aus G, $i = 1,...,n$, sowie für jedes i

$$-(x_1...x_n\omega_n) + x_1...x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1}...x_n\omega_n \tag{1.38}$$

Element von A ist.

Ist das Operationensystem Ω des Ω-Rings leer, erhält man die gewöhnliche Beziehung Gruppe-Normalteiler. Für Ringe (Ω enthält eine binäre Multiplikation) wird das Element (1.38) zu:

$$i = 1: \qquad -x_1x_2 + (a + x_1)x_2 = -x_1x_2 + x_1x_2 + ax_2 = ax_2 \in A$$

$$i = 2: \qquad -x_1x_2 + x_1(a + x_2) = -x_1x_2 + x_1a + x_1x_2 = x_1a \in A$$

d.h., der übliche Idealbegriff für Ringe entspricht dem neu definierten.
Die Forderungen der Definition können etwas abgeschwächt werden. Da die additive Gruppe eines Multioperatorrings G Modul ist, wird jede Untergruppe auch Normalteiler. Weiterhin können wir (1.38) mit Hilfe des Distributivgesetzes umformen:

$$-(x_1...x_n\omega_n) + x_1...x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1}...x_n\omega_n = -(x_1...x_n\omega_n) + x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n + x_1...x_n\omega_n =$$

da die Addition kommutativ ist

$$-(x_1...x_n\omega_n) + x_1...x_n\omega_n + x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n$$

Damit ergibt sich aber

Satz 1
Eine nichtleere Teilmenge A eines Multioperatorrings G ist genau dann Ideal von G, wenn $(A,+)$ Untergruppe des Moduls $(G,+)$ ist und für alle Elemente a aus A und x_i, $i = 1,...,n$, aus G, für alle Operationen ω_n des Operationensystems Ω sowie für alle i, das Element

$$x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n \tag{1.39}$$

in A enthalten ist.

Aus der Analogie von (1.39) mit der Relation (1.27) aus Abschnitt 1.2.1, erkennt man, dass jedes Ideal auch Ω-Unterring des Ω-Ringes ist, wobei die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.
Es ist offensichtlich, dass jeder Multioperatorring mindestens zwei Ideale besitzt, und zwar zwei triviale. Zum einen ist der Ω-Ring selbst, zum anderen der Ω-Nullring, welchen wir nun auch Ω-Nullideal oder einfach Nullideal nennen, Ideal in dem Multioperatorring.

Aus der Ringtheorie wissen wir, dass es Ringe gibt, welche keine weiteren Ideale besitzen. Einen Multioperatorring nennen wir genau dann **einfach**, wenn er nur die beiden trivialen Ideale und sonst keine weiteren enthält. Beispiele dafür sind alle einfachen Ringe und Körper. Wir zeigen:

> **Satz 2**
> Jeder Ω-Körper ist einfacher Multioperatorring.

Beweis: Sei K ein beliebiger Ω-Körper und 1 dessen Einselement. Können wir zeigen, dass jeder von einem beliebigen Element a des Ω-Ringes erzeugte Ω-Unterring das Einselement enthält, so muss auf Grund von

$$1...1x1...1\omega_n = x$$

jeder dieser Ω-Unterringe gleich dem ganzen Multioperatorring sein. Damit wäre der Ω-Körper dann einfach.
Sei a ein beliebiges Element aus K, welches den Ω-Unterring A erzeugt. Damit A Ideal ist, muss das Element

$$a...axa...a\omega_n$$

für jedes beliebige x aus dem Ω-Körper K auch in A liegen. Da aber in einem Ω-Körper zu jedem $(n-1)$-Tupel von Elementen bezüglich jeder Operation ω_n aus dem Operationensystem ein inverses Element existiert, muss, wenn a^{-1} das inverse Element des Tupels $(a,a,...,a)$ bei der Operation ω_n ist, das Element

$$a...aa^{-1}a...a\omega_n = 1$$

in A liegen, womit der Beweis erbracht ist.

Es ist auch möglich nichtringartige Multioperatorringe anzugeben, welche einfach sind. Dazu betrachten wir den schon erwähnten 2-dimensionalen Punktraum $\mathbb{R}^2$ der reellen Zahlen mit der Vektoraddition und dem vektoriellen Tripelprodukt o_3. Dieser Multioperatorring ist einfach.
Dazu genügt es zu zeigen, dass jedes von einem Element a erzeugte Ideal (die exakte Begründung des "Erzeugens" von Idealen wird noch gegeben) sowohl das Element (1,0) als auch das Element (0,1) enthalten muss, da dann jedes weitere Element durch Linearkombination erzeugbar ist, womit kein echtes Ideal in $\mathbb{R}^2$ existieren kann.

Sei nun (a,b) ein beliebiges Element des 2-reihigen reellen Punktraums. Damit der von (a,b) erzeugte Ω-Unterring Ideal wird, muss das Element

$$((a,b) \times (0,\frac{1}{a})) \times (0,-1) = (1,0) \qquad \text{bzw.}$$

$$((a,b) \times (0,\frac{1}{a})) \times (-1,0) = (0,1)$$

in diesem Ω-Unterring liegen. Voraussetzung dafür ist, dass die Komponente a verschieden von Null ist. Ist $a = 0$, so muss zumindest b verschieden vom Nullelement sein, da ansonsten $(a,b) = (0,0)$ ist und das Nullideal erzeugt wird. In diesem Fall sind die Elemente

$$((a,b) \times (-\frac{1}{b}),0) \times (0,-1) = (1,0) \qquad \text{bzw.}$$

$$((a,b) \times (-\frac{1}{b}),0) \times (-1,0) = (0,1)$$

aber in dem erzeugten Ω-Unterring enthalten, womit der betrachtete Multioperatorring einfach sein muss. Der Beweis ist erbracht.

Wenden wir uns einigen echten Idealen zu. Für den Ring der ganzen Zahlen bilden alle $n\mathbb{Z}$, wobei

n beliebige natürliche Zahl ist, Ω-Unterringe. Diese und nur diese sind auch die Ideale des Ringes der ganzen Zahlen. Außerdem lassen sich diese Ideale jeweils von einem Element erzeugen.
Der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ besitzt ebenfalls unendlich viele nichttriviale Ideale. Betrachten wir z.B. die Menge aller Polynome M_0 aus $\mathbb{Z}[x]$, deren Absolutglied gleich Null ist. Ein beliebiges dieser Polynome lässt sich dann in der Form

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

wobei die a_i, $i = 1,...,n$, beliebige Koeffizienten aus dem Bereich der ganzen Zahlen sind, darstellen. Ohne Beweis sei erwähnt, dass die Menge aller dieser Polynome einen Ω-Unterring des ganzen Polynomrings bildet.
Diese Menge ist sogar Ideal. Zum Nachweis wählen wir noch ein beliebiges Polynom $Q(x)$ des Polynomrings mit der Darstellung

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i x^i$$

wobei die b_i, $i = 1,...,n$, wieder beliebige ganze Zahlen sind. Bilden wir deren Produkt

$$P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i x^i = a_n b_m x^{n+m} + ... + (a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + a_1 b_0 x$$

Damit entsteht ein Polynom, welches in der Menge aller Polynome $P(x)$ enthalten ist, womit diese Menge ein Ideal bildet.
Ebenso stellen auch die Mengen

$$M_1 = \{\sum_{i=z}^{n} a_i x^i | a_i \in \mathbb{Z}; z = 2,3,...\}$$

$$M_2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x^i + a_0 | a_i \in \mathbb{Z}; a_0 \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}\}$$

Ideale im Polynomring über den ganzen Zahlen dar.

Im Ring der Ganzen Gaußschen Zahlen wird durch jede natürliche Zahl n eindeutig ein Ideal den Form

$$nG = \{na + nb\sqrt{-1} | a,b \in \mathbb{Z}\}$$

bestimmt. In den Restklassenringen $\mathbb{Z}_n$ bestimmt jeder Teiler der Ordnung n des additiven Moduls ein Ideal. Zum Beispiel existieren im Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$ die Ideale

$$(0), (6), (4), (3), (2) \text{ und } \mathbb{Z}_{12}$$

wobei wir unter (a) das von der Restklasse $[a]_{12}$ erzeugt Ideal verstehen. In einem Restklassenring modulo einer Primzahl p können damit nur die trivialen Ideale existieren. Ein derartiger Restklassenkörper ist Körper und damit auch Ω-Körper.

Wie bei den Ω-Unterringen ist auch für Ideale der mengentheoretische Durchschnitt eines Systems von Idealen eines Multioperatorrings wieder Ideal. Zum Beweise verfährt man wieder nach der üblichen Methode. Wir definieren wieder:

Definition

Der Durchschnitt aller Ideale B_j, $j \in J$, welche jedes Ideal A_i, $i \in I$, eines Systems von Idealen eines Multioperatorrings G enthalten, heißt das von diesem System von Idealen A_I, $i \in I$, in G **erzeugte Ideal**.

Für Untersuchungen ist diese Definition aber schlecht geeignet. Wir können jedoch zeigen:

Satz 3 (Kuros)
Das durch ein System von Idealen erzeugte Ideal eines Multioperatorrings fällt mit den von diesem System erzeugten Untergruppe des Moduls des Multioperatorrings zusammen.

Beweis: Sei A_i, $i \in I$, das System von Idealen und B die erzeugte Untergruppe. Jede von einem System von Normalteilern erzeugte Untergruppe (es handelt sich für Normalteiler eines Moduls um die Komplexsumme) ist selbst Normalteiler, womit

$$B = \sum_{i \in I} A_i$$

Normalteiler ist, da nach Definition jedes der Ideale einen Normalteiler des Moduls als Trägerstruktur enthält. Damit lässt sich jedes Element von B in der Form

$$b = a_1 + a_2 + ... + a_k \tag{1.40}$$

mit a_j aus A_j für alle $j = 1,...,k$ darstellen.
Sei nun ω_n eine beliebige Operation des Operationensystems Ω und die Elemente $x_1,...,x_n$ aus G. Dann gilt, da die A_i Ideale sind nach (1.40) für alle i und alle $l = 1,...,k$:

$$x_1...x_{i-1}(b - (a_1 + ... + a_{l-1} + a_{l+1} + ... + a_k))x_{i+1}...x_n\omega_n \tag{1.41}$$

ist Element von A_l.
Addieren wir (1.41) für $l = 1$ und $l = 2$, so erhalten wir auf Grund des Distributivgesetzes:

$$x_1...x_{i-1}(b - (a_2 + ... + a_k))x_{i+1}...x_n\omega_n + x_1...x_{i-1}(b - (a_1 + a_3... + a_k))x_{i+1}...x_n\omega_n =$$

$$= x_1...x_{i-1}(b - (a_2 + ... + a_k) + b - (a_1 + a_3... + a_k))x_{i+1}...x_n\omega_n =$$

$$= x_1...x_{i-1}(2b - a_1 - a_2 - (2a_3... + 2a_k))x_{i+1}...x_n\omega_n =$$

und mit (1.40)

$$= x_1...x_{i-1}(b - (a_3... + a_k))x_{i+1}...x_n\omega_n = y \in A_1 + A_2$$

Addiert man (1.41) für alle l, ergibt sich

$$x_1...x_{i-1}bx_{i+1}...x_n\omega_n \in \sum_{i=1}^{k} A_i \subseteq B$$

womit B die Idealbedingung erfüllt. Der Satz ist bewiesen.

Das so erzeugte Ideal nennt man auf Grund der auftretenden Komplexsumme die **Summe der Ideale** A_i.

Betrachten wir als Beispiel den Ring der ganzen Zahlen und dort die Ideale $12\mathbb{Z}$ und $15\mathbb{Z}$. Deren Durchschnitt enthält offenbar alle ganzen Zahlen, welche zugleich Vielfaches von 12 und Vielfaches von 15 sind, d.h., wir erhalten, da das kleinste gemeinsame Vielfache von 12 und 15 die ganze Zahl 60 ist:

$$12\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$$

Allgemein gilt für den Ring der ganzen Zahlen:

$$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{kgV}(n,m)\mathbb{Z}$$

Um nun die Summe beider Ideale zu bestimmen, benutzen wir einen Hilfssatz, welcher aus Lugowski-Weinert [14] ohne Beweis entnommen wird:

Hilfssatz
In jedem Hauptidealring gilt für die Summe zweier Ideale

$$(a) + (b) = (\text{ggt}(a,b)) \tag{1.42}$$

Da aus der Ringtheorie bekannt ist, dass der Ring der ganzen Zahlen (wir werden nochmals darauf zu sprechen kommen) Hauptidealring ist, können wir den Hilfssatz anwenden, so dass wir erhalten:

$$12\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$$

Im Abschnitt 2.1.3 werden wir diesen Satz nochmals für die Restklassenringe benötigen, die ebenfalls Hauptidealringe sind.

1.3.2 Faktorzerlegung nach Idealen

Um den Begriff des Ideals eine Veranschaulichung zu geben, treffen wir folgende Feststellung:

Definition

Die Zerlegung des Moduls $(G,+)$ eines Multioperatorrings G nach einer beliebigen Untergruppe A heißt **Zerlegung des Multioperatorrings** G nach dem entsprechenden Ideal A.

Damit können wir einen Zusammenhang zwischen den Kongruenzrelationen und Idealen eines Ω-Rings nachweisen.

Satz 1 (Kuros)
Alle Kongruenzrelationen π eines Multioperatorrings G werden durch dessen Zerlegungen nach den verschiedenen Idealen erfasst und umgekehrt.

Beweis: Ist A beliebiges Ideal des Multioperatorrings G, so gilt (1.38) aus 1.3.1:

$$x_1 ... x_{i-1}(a_1 + x_i)x_{i+1} ... x_n\omega_n \in (x_1 ... x_n\omega_n) + A \tag{1.43}$$

für alle Elemente $x_1,...,x_n$ aus G und a_1 aus A. Da auch $a_1 + x_i$ Element von G ist, gilt für ein weiteres Element a_2 aus A:

$$-x_1 ... x_{i-1}(a_1 + x_i)x_{i+1} ... x_n\omega_n + x_1 ... x_{i-2}(a_2 + x_{i-1})(a_1 + x_i)x_{i+1} ... x_n\omega_n \in (x_1 ... x_n\omega_n) + A$$

Setzen wir fort und nummerieren um, ergibt sich

$$(a_1 + x_1)(a_2 + x_2) ... (a_n + x_n)\omega_n \in (x_1 ... x_n\omega_n) + A \tag{1.44}$$

womit mit (1.43) die ersten Summanden jeweils verschwinden.
Seien nun x_1 und x_2 beliebig aus G, womit

$$x_1 \in x_1 + A \qquad \text{und} \qquad x_2 \in x_2 + A$$

gilt, so dass wir erhalten

$$(x_1 + a_1) + (x_2 + a_2) = (x_1 + x_2) + (a_1 + a_2) \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 \in (x_1 + x_2) + A$$

Bezüglich der Addition erzeugt das Ideal also eine kompatible Klasseneinteilung, da Reflexivität, Symmetrie und Transitivität aus der Definition folgt.
Aus Relation (1.44) ergibt sich dann auch die Kompatibilität der Klasseneinteilung für alle Operation ω_n des Operationensystems Ω, d.h., ein Ideal A eines Multioperatorrings G erzeugt in G eine Kongruenz.

Sei π jetzt eine beliebige Kongruenzrelation des Multioperatorrings G. Diejenige Klasse der Klasseneinteilung, welches das Nullelement von G enthält, werde mit A bezeichnet. Für alle Elemente a von A gilt dann

$$a \quad \pi \quad 0$$

A wird offensichtlich mit der Addition Modul und Normalteiler von $(G,+)$. Sie die Elemente a_i, $i = 1,...,n$, dann beliebig aus A, erhalten wir aus $a_i \; \pi \; 0$ für alle i, dass auch das Element $a_1...a_n\omega_n$ in Relation zum Nullelement steht, womit auch A Ω-Unterring das Ω-Rings G ist.

Für beliebige Elemente x_i von G, $i = 1,...,n$, und jedes mögliche a von A folgt aus

$$x_i \quad \pi \quad x_i \quad (\forall i) \qquad \text{und} \qquad a \quad \pi \quad 0 \qquad \text{sofort}$$

$$(x_1...x_{j-1}ax_{j+1}...x_n\omega_n) \quad \pi \quad (x_1...x_{j-1}0x_{j+1}...x_N\omega_n) = 0$$

womit A Ideal von G ist.
Zuletzt sei eine beliebige Klasse B bei der Einteilung von G nach π gegeben. Ist b Element von B und a Element von A, so wird:

$$(b + a) \quad \pi \quad (b + 0) \qquad \text{und} \qquad (b + a) \quad \pi b$$

Das heißt aber:

$$b + A \in B \tag{1.45}$$

Für ein weiteres Element b' aus der Klasse B erhalten wir dann

$$(-b + b') \quad \pi \quad 0$$

d.h. $b' \in b + A$ und mit (1.45)

$$B = b + A$$

Der Beweis ist erbracht.

Auf Grund der Gültigkeit des Gezeigten können wir anstatt des Ω-Faktorrings G/π auch von dem Ω-Faktorring G/A des Multioperatorrings G nach seinem Ideal A sprechen.
Liegt ein Ring R vor, so erzeugen damit alle Zerlegungen des Rings nach seinen Ringidealen die in R möglichen Kongruenzrelationen und umgekehrt. Als Folgerung für einfache Ω-Ringe und Ω-Körper erhalten wir:

Satz 2
Ein einfacher Ω-Ring, insbesondere Ω-Körper, besitzt nur die trivialen Kongruenzen.

1.3.3 Spezielle Ideale in Multioperatorringen

Das in 1.3.1 betrachtete Ideal $M_0\{P(x)\}$ des Polynomrings über den ganzen Zahlen lässt sich durch das Polynom $P(x) = x$ erzeugen.
Ebenso können alle Ideale des Rings der ganzen Zahlen jeweils von einem Element erzeugt werden. Wir sagen:

Definition

Ein Ideal eines Multioperatorrings heißt genau dann **Hauptideal**, wenn es sich von einem Element erzeugen lässt.

Das Ideal (x) des Polynomrings über den ganzen Zahlen ist dann gerade das oben betrachtete. Die in Multioperatorringen existierenden Ideale müssen aber nicht Hauptideal sein. Zum Beispiel ist das in 1.3.1 mit M_2 bezeichnete Ideal für $a_0 \in 2\mathbb{Z}$ kein Hauptideal. Dessen "kleinstes" Erzeugendensystem ist $\{2,x\}$. Dagegen ist das in 1.3.1 gekennzeichnete Ideal M_1 im Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ Hauptideal.
Für die z-Werte $z = 2,3,...$ sind die Polynome $x^2, x^3, x^4, ...$ die jeweiligen Erzeugenden.

Einen Multioperatorring, dessen sämtliche Ideale Hauptideale sind, nennen wir **Hauptideal-Ω-Ring**. Der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ ist kein derartiger Multioperatorring, da M_2 für $a_0 \in 2\mathbb{Z}$ kein Hauptideal ist. Dafür sind der Ring der ganzen Zahlen sowie seine homomorphen Bilder, die Restklassenringe, Hauptideal-Ω-Ringe. Der Nachweis für die ganzen Zahlen ist in van der Waerden [21], Seite 65, enthalten.
Für die Restklassenringe folgt dieses aus der Tatsache, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau für jeden Teiler von n ein Ideal besitzt und keine weiteren.

Betrachten wir nochmals den Ring der ganzen Zahlen und dort das Ideal $2\mathbb{Z}$. Für dieses Ideal existiert kein weiteres nichttriviales Ideal im Ring der ganzen Zahlen, welches $2Z$ echt umfasst, d.h., das echte Ideal $2\mathbb{Z}$ ist in dieser Hinsicht im Ring der ganzen Zahlen "maximal". Wir setzen:

Definition

Ein nichttriviales Ideal A eines Multioperatorrings G heißt genau dann **minimales** (maximales) **Ideal** von G, wenn kein Ideal B in G existiert, für welches

$$(0) \subset B \subset A \qquad (A \subset B \subset G)$$

gilt. Dabei stellt (0) das Nullideal dar.

Ein Multioperatorring muss keine minimalen und maximalen Ideale besitzen, da z.B. in einfachen Ω-Ringen keine nichttrivialen Ideale existieren. Der Ring der ganzen Zahlen dagegen enthält außer dem Ideal $2\mathbb{Z}$ noch unendlich viele maximale Ideale, aber kein minimales Ideal. Dabei sind alle $p\mathbb{Z}$, mit p als beliebiger Primzahl, die maximalen Ideale. Für endliche Multioperatorringe zeigen wir:

Satz 1
Jeder endliche nichteinfache Multioperatorring besitzt mindestens ein minimales und ein maximales Ideal.

Beweis: Ist ein Multioperatorring G endlich, so kann er nur endliche viele Ideale besitzen. Angenommen es gebe kein minimales Ideal in G, so müsste man immer wieder unendlich oft zwischen einem nichttrivialen Ideal, und dieses existiert, de G nichteinfach ist, und dem Ω-Nullideal ein weiteres echtes Ideal finden können, welches echt im ersteren enthalten sein muss.
Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass G nur endlich viele Ideale enthalten kann, womit ein minimales Ideal existieren muss.
Analog zeigt man, dass auch mindestens ein maximales Ideal vorhanden ist, d.h., der Beweis ist erbracht.

Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, besitzen damit immer minimale und maximale Ideale. Man kann sogar sagen:

Satz 2
Sei G ein Restklassenring modulo n, $n \geq 2$. Besitzt n genau k verschiedene Primzahlen als Teiler, so existieren in G genau k minimale und k maximale Ideale.

Zum Beweis überlege man sich, dass dann jeder der k Primzahlen p_i, $i = 1,...,k$, ein maximales erzeugt, während die Komplementärteiler der p_i bezüglich n die minimalen Ideale erzeugen.
Für Restklassenringe modulo Primzahlpotenz fallen das maximale Ideal mit dem Ω-Ring selbst zusammen, so dass keine derartigen Ideale mehr vorliegen. Für Restklassenringe modulo Primzahlquadrat existiert nur ein nichttriviales Ideal, welches dann zu gleich maximal und minimal ist.
Für minimale Ideale kann man zeigen:

Satz 3
Zwei verschiedene minimale Ideale eines Multioperatorrings sind bis auf das Nullelement zueinander disjunkt.

Beweis: Angenommen zwei verschiedene minimale Ideale A und B eines Multioperatorrings G hätten ein von Null verschiedenes Element x gemeinsam. Dann erzeugt x ein Ideal X von G, welches sowohl in A als auch in B echt enthalten ist. Damit wären aber beide Ideale A und B nicht mehr minimal. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, d.h., die Ideale A und B können nur das Nullelement gemeinsam enthalten. Der Satz ist bewiesen.

Auf Grund des Beweises gilt:

Satz 4
Ist A ein minimales Ideal eines Multioperatorrings G und B ein weiteres beliebiges Ideal von G, so gilt entweder

$$A \cap B = (0) \qquad \text{oder} \qquad A \subseteq B$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie bei Satz 3.

1.3.4 Kommutant und Zentrum eines Multioperatorrings

Jeder Multioperatorring besitzt eine abelsche additive Trägerstruktur, während seine Operationen aus dem Operationensystem Ω nicht einmal das Assoziativgesetz erfüllen müssen. Um ein Maß für die Kommutativität zu erhalten, führen wir den Begriff des Kommutanten ein:

Definition

Sind A und B Ω-Unterringe eines Multioperatorrings G, so heißt das Ideal $[A,B]$, welches vom Nullelement und allen Elementen der Form

$$-a_1...a_n\omega_n - b_1...b_n\omega_n + (a_1 + b_1)...(a_n + b_n)\omega_n \tag{1.46}$$

für beliebige Elemente a_i aus A und b_i von B, $i = 1,...,n$, erzeugt wird, **gegenseitiger Kommutant** der Ideale A und B.

Den gegenseitigen Kommutant des Multioperatorrings G mit sich selbst

$$[G,G] = G'$$

nennen wir den **Kommutanten** des Multioperatorrings G.

Für Ringe beschränkt sich (1.46) auf Elemente der Form $a_1b_2+a_2b_1$, da sich die restlichen Summanden gegenseitig aufheben. In Ω-Zeroringen wird jeder gegenseitige Kommutant zum Nullideal.
Im Ring der ganzen Zahlen wird der Kommutant der Ω-Unterringe $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ von Elementen erzeugt, welche sich in der Form

$$2x_1 3x_2 + 2y_1 3y_2 = 6(x_1x_2 + y_1y_2)$$

schreiben lassen, wobei die x_i und y_i, $i = 1,2$, beliebige ganze Zahlen sind. Dieser gegenseitige Kommutant wird damit zum Ideal $6\mathbb{Z}$. Der Kommutant G' des Rings der ganzen Zahlen ist gleich dem ganzen Ring.

Wird der Kommutant eines Multioperatorrings G mit sich selbst zum Nullideal, d.h.

$$[G,G] = G' = (0)$$

so nennen wird diesen Multioperatorring **abelsch**.

Satz 1
Ist der Kommutant G' eines Multioperatorrings G gleich dem Ω-Nullideal, so ist G entweder Modul (wenn das Operationensystem Ω leer ist) oder Ω-Zeroring, und umgekehrt.

Beweis: Ist das Operationensystem Ω leer, existieren Elemente der Form (1.46) nicht. G' wird nur vom Nullelement erzeugt. Die Umkehrung ist trivial.
Es sei nun das Operationensystem nicht leer und ω_n eine der enthaltenen Operationen. Für eine Belegung

$$b_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad b_2 = -a_2$$

der Elemente in (1.46), wobei alle anderen Elemente beliebig aus G bleiben, erhalten wir mit $G' = (0)$:

$$-a_1...a_n\omega_n - 0b_2...b_n\omega_n + a_1(a_2 + (-a_2))(a_3 + b_3)...(a_nb_n)\omega_n =$$

$$= -a_1...a_n\omega_n - 0 + a_1 0(a_3 + b_3)...(a_nb_n)\omega_n = -a_1...a_n\omega_n + 0 = -a_1...a_n\omega_n = 0$$

für alle $a_1,...,a_n$ aus dem Multioperatorring G, womit dieser Ω-Ring zu einem Ω-Zeroring wird. Da auch diese Umkehrung offensichtlich ist, ist der Beweis erbracht.

Während in der Gruppentheorie die Begriffe "kommutativ" und "abelsch" die gleiche Eigenschaft charakterisieren, so ist dies für Multioperatorringe nicht mehr gegeben. Offenbar ist jeder abelsche Multioperatorring auch kommutativ. Für Module ist dies offensichtlich, Ω-Zeroringe sind trivialerweise kommutativ. Dagegen ist der Ring der ganzen Zahlen kommutativer Multioperatorring aber kein abelscher Ω-Ring, d.h.:

Satz 2
Jeder abelsche Multioperatorring ist kommutativ. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Es ist möglich zu zeigen, dass das Abelschsein invariant bezüglich Homomorphismen ist. Wir verschärfen die Aussage:

Satz 3 (Higgins)
Der Ω-Faktorring G/A eines Multioperatorrings G nach einem Ideal A ist genau dann abelsch, wenn das Ideal A den Kommutanten G' enthält.

Beweis: Ist der Ω-Faktorring G/A abelsch, so gilt für alle Restklassen

$$-(x_1+A)...(x_n+A)\omega_n-(y_1+A)...(y_n+A)\omega_n+(x_1+y_1+A)...(x_n+y_n+A)\omega_n=A \tag{1.47}$$

D.h., dass der von den Elementen x_i und y_i, $i=1,...,n$, erzeugte Kommutator

$$-x_1...x_n\omega_n-y_1...y_n\omega_n+(x_1+y_1)...(x_n+y_n)\omega_n \tag{1.48}$$

Element des Ideals A ist.
Da die Elemente x_i und y_i, $i=1,...,n$, in (1.47) alle möglichen Elemente von G durchlaufen, erhalten wir

$$G'\subseteq A$$

Sei umgekehrt A ein Ideal des Ω-Ringes G, welches den Kommutanten G' enthält. D.h., dass (1.48) Element des Ideals A ist, was sofort die Gültigkeit von (1.47) nach sich zieht. Der Beweis ist erbracht.

Insbesondere ergibt sich, dass der Ω-Faktorring eines Multioperatorrings G nach seinem Kommutanten G' immer Ω-Zeroring (das Operationensystem Ω setzen wir als nichtleer voraus) ist. Eine weitere sehr schöne Aussage erhalten wir für Ideale.

Satz 4
Ein Ω-Unterring A eines Multioperatorrings G ist genau dann Ideal von G, wenn der Kommutant $[A,G]$ in A enthalten ist.

Beweis: Zuerst sei A Ideal des Multioperatorrings G. Nach Relation (1.44), 1.3.2, gehört das Element

$$-x_1...x_n\omega_n+(a_1+x_1)...(a_n+x_n)\omega_n$$

für alle Elemente x_i aus G und a_i aus A, $i=1,...,n$, zu dem Ideal A. Da jedes Ideal auch Ω-Unterring ist, gehört das Element

$$-a_1...a_n\omega_n$$

ebenfalls zu A. Zusammenfassend ist also

$$-x_1...x_n\omega_n-a_1...a_n\omega_n+(a_1+x_1)...(a_n+x_n)\omega_n$$

für alle möglichen x_i und a_i, im Ideal A enthalten. Da dies aber gerade die Kommutatoren von A und G sind, gilt

$$[A,G]\subseteq A$$

Ist umgekehrt der gegenseitige Kommutant $[A,G]$ in dem Ω-Unterring A enthalten, so erhalten wir aus (1.46) für eine Belegung des Elemente $x_k=0$, $a_i=0$, für alle $i\neq k$, wobei k beliebig aus der Indexmenge $I=\{1,...,n\}$ gewählt ist:

$$-x_1...x_{k-1}0x_{k+1}...x_n\omega_n-0...0a_k0...0\omega_n+x_1...x_{k-1}a_kx_{k+1}...x_n\omega_n=$$

$$=x_1...x_{k-1}a_kx_{k+1}...x_n\omega_n\in A$$

für alle x_i aus G, $i=1,...,k-1,k+1,...,n$, und beliebiges a_k aus A, womit A Ideal wird. Der Beweis ist erbracht.

Da in einem Ω-Zeroring der Kommutant G' gleich dem Nullideal ist, d.h. für jeden Ω-Unterring A

$$[A,G] \subseteq [G,G] = G' = (0) \subseteq A$$

gilt, ist in einem Ω-Zeroring jeder Ω-Unterring auch Ideal. Im allgemeinen Fall muss dies nicht gelten. Betrachten wir den Ω-Zeroring $(Z, +, \circ)$, welcher die unendliche zyklische Gruppe der ganzen Zahlen als Trägerstruktur und im Operationensystem nur die Nullmultiplikation besitzt. Auf Grund des eben Gezeigten, ist dann jede Untergruppe der additiven Struktur sowohl Ω-Unterring als auch Ideal.

Für spätere Untersuchungen ist ein weiteres Ideal eines Multioperatorrings interessant.

Definition

Die Menge Z aller Elemente z eines Multioperatorrings G heißt **Zentrum** des Ω-Rings G, wenn der Kommutant von Z und G zum Ω-Nullideal wird, d.h., für alle Elemente a_i aus G und z_i aus Z, $i = 1,...,n$, gilt

$$-z_1...z_n\omega_n - a_1...a_n\omega_n + (z_1 + a_1)...(z_n a_n)\omega_n = 0 \tag{1.49}$$

für alle Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω.

Damit ist das Zentrum eines Multioperatorrings im Sinne des mengentheoretischen Enthaltenseins das "größte" Ideal, welches Ω-Zeroring ist. Ideal ist das Zentrum auf Grund von Satz 4, da

$$[Z,Z] \subseteq [Z,G] = (0)$$

gilt. Wir können sagen:

Satz 5
Ein Multioperatorring kann nur dann ein vom Ω-Nullideal verschiedenes Zentrum besitzen, wenn er einen Ω-Unterring besitzt, welcher selbst Ω-Zeroring ist.

Um ein einfache Bestimmung der Elemente eines Zentrums zu ermöglichen, belegen wir die Elemente in Relation (1.49) und setzen:

$$a_k = 0 \qquad ; \qquad z_i = 0 \quad (\forall i \neq k)$$

wobei k beliebig aus der Indexmenge $I = \{1,...,n\}$ gewählt ist und erhalten

$$-0...0z_k0...0\omega_n - a_1...a_{k-1}0a_{k+1}...a_n\omega_n + a_1...a_{k-1}z_k a_{k+1}...a_n\omega_n = a_1...a_{k-1}z_k a_{k+1}...a_n\omega_n = 0$$

Das bedeutet

Satz 6
Das Zentrum Z eines Multioperatorrings G besteht aus allen Elementen z von G, welche mit allen weiteren Elementen $a_1,...,a_n$ von G bezüglich jeder Operation ω_n das Nullelement ergibt:

$$a_1...a_{i-1}za_{i+1}...a_n\omega_n = 0 \tag{1.50}$$

Nullteilerfreie Multioperatorringe können somit nur das triviale Zentrum besitzen, vorausgesetzt das Operationensystem Ω ist nicht leer. In diesem Fall wird der Ω-Ring Modul und stimmt mit seinem Zentrum überein.
Einen Ω-Ring mit einem trivialen Zentrum nennen wir **zentrumslos**. Zentrumslose Ω-Ringe sind außer den nullteilerfreien Multioperatorringen zum Beispiel auch die Restklassen- und Matrizenringe über Integritätsbereichen.

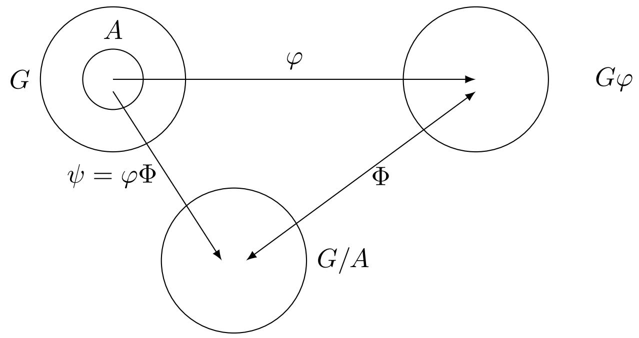
1.3.5 Homomorphiesatz, Isomorphiesätze

Bezüglich der Ideale und homomorphen Bilder eines Multioperatorrings lassen sich Zusammenhänge aufstellen.
Dabei nennen wir die Menge aller Urbilder des Nullelements eines Multioperatorrings $G\varphi$ bei einem Homomorphismus φ **Kern des Homomorphismus**. Diese Menge bezeichnen wir mit $\ker\varphi$. Sie existiert immer, da $0\varphi = o'$ gilt.
Mit Satz 1, 1.3.2, und dem Homomorphiesatz wird folglich:

Satz 1
Die Kerne der Homomorphismen eines Multioperatorrings sind dessen Ideale und nur diese.
Das homomorphe Bild eines Multioperatorrings ist bis aus Isomorphie durch den zugehörigen Kern eindeutig bestimmt.

Damit können wir den Homomorphiesatz neu fassen:

Homomorphiesatz, 2.Fassung
Sei G ein Multioperatorring und $G\varphi$ dessen homomorphes Bild bezüglich eines Homomorphismus φ. Dann existiert in G ein Ideal A, mit $\ker\varphi = A$, bei dem $G\varphi$ isomorph, vermöge eines Isomorphismus Φ, zum dem Ω-Faktorring G/A wird.
Dabei ist $\varphi\Phi$ mit dem natürlichen Homomorphismus ψ von G auf G/A identisch.
Umgekehrt induziert jedes Ideal einen Homomorphismus und ein zugehöriges bis auf Isomorphie bestimmtes Bild.



Weiterhin werden wir die Isomorphiesätze benötigen:

1. Isomorphiesatz
Sind A und B Ideale eines Multioperatorrings G, so ist $A \cap B$ Ideal des Ω-Rings B und es gilt:

$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B) \tag{1.51}$$

d.h., $(A + B)/A$ ist isomorph zu $B/(A \cap B)$.

Beweis: Dass $A \cap B$ ein Ideal des Ω-Rings B ist, folgt aus der Tatsache, dass $A \cap B$ in B enthalten ist.
Sei nun ein Multioperatorring G' das homomorphe Bild von G mit $\ker\varphi = A$. Zu B existiert dann in G' ein Ideal B' als homomorphes Bild von B. Das vollständige Urbild des Ideals B' ist aber nicht nur B, sondern alle Elemente des Ω-Rings G, welche mit Elementen von B in einer gleichen Nebenklasse bezüglich A liegen, also $A + B$. D.h. aber, es besteht eine Isomorphie zwischen $(A + B)/A$ und dem Ideal B'

$$(A + B)/A \cong B'$$

Mit dem Homomorphiesatz ist B' homomorphes Bild bezüglich aller Elemente von A, welche zugleich in B liegen, so dass sich auch eine Isomorphie zwischen $B/(A \cap B$ und B' ergibt

$$B/(A \cap B) \cong B'$$

woraus insgesamt die Behauptung folgt. Der Beweis ist erbracht.

2. Isomorphiesatz
Ist ein Multioperatorring G' isomorph zu einem Ω-Faktorring G/A und ist B' ein Ideal in G', so ist das zugehörige Urbild B in G ein Ideal und es gilt

$$G/B \cong (G/A)/(B/A) \tag{1.52}$$

Beweis: Da G homomorph zu G' und G' homomorph zu dem Ω-Faktorring G'/B' ist, wird nach 1.2.2 auch der Ω-Ring G homomorph zu dem Ω-Faktorring G'/B'. Damit ist G'/B' isomorph zu einem Ω-Faktorring von G nach einem gewissen Ideal. Dieses Ideal enthält alle Elemente, welche bei

$$G \to G'/B'$$

auf das Nullelement abgebildet werden. Diese Elemente werden aber bei der homomorphen Abbildung $G \to G'$ auf das Ideal B' abgebildet, stellen also das Urbild von B' und damit B dar, wobei B' isomorph zu dem Ω-Faktorring B/A ist. Der Beweis ist erbracht.

Da das homomorphe Bild eines Ideals wieder Ideal ist, erhalten wir als Folgerung:

Satz 2
Sind A und B_i, $i = 1,...,n$, Ideale eines Multioperatorrings G mit

$$A \subset B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_{n-1} \subset B_n \subset G$$

so existieren im Ω-Faktorring G/A Ideale B_i', $i = 1,...,n$, welche bezüglich des natürlichen Homomorphismus von G auf G/A homomorphe Bilder der B_i sind, wobei

$$(0) \subset B_1' \subset B_2' \subset ... \subset B_{n-1}' \subset B_n' \subset G/A$$

gilt. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Bilden wir den Ω-Faktorring eines Multioperatorrings nach einem seiner maximalen Ideal, so wird:

Satz 3
Der Ω-Faktorring G/A eines Multioperatorrings G nach einem seiner maximalen Ideale A ist ein einfacher Ω-Ring.

Zum Beweis überlege man sich, dass für ein maximales Ideal A kein Ideal der Form B_i aus Satz 2 existiert, womit in dem Ω-Faktorring G/A auch kein echtes Ideal B_i' vorhanden ist.

Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns noch dem Lemma von Zassenhaus zu:

Lemma von Zassenhaus
Sind in einem Multioperatorring G die Ω-Unterringe A, A', B und B' gegeben und sind A' und B' Ideale von A bzw. B, so stellen $A' + (A \cap B')$ und $B' + (B \cap A')$ Ideale der Ω-Ringe $A' + (A \cap B)$ bzw. $B' + (A \cap B)$ dar.
Außerdem besteht folgende Isomorphie:

$$(A' + (A \cap B))/(A' + (A \cap B')) \cong (B' + (A \cap B))/(B' + (B \cap A')) \tag{1.53}$$

Beweis: Zuerst setzen wir $C = A \cap B$. Weiterhin soll B' ein Ideal von B sein, so dass mit $C \subseteq B$ nach dem Isomorphiesatz

$$C \cap B' = A \cap B \cap B' = A \cap B'$$

ein Ideal von C ist. Gleiches gilt für den Durchschnitt $B \cap A'$ und die Summe

$$C' = (A \cap B') + (B \cap A') \tag{1.54}$$

der beiden Ideale. Nun setzen wir $D = C/C'$.
Da A' Ideal des Ω-Rings A ist, erhalten wir für die Summe von A' und $A \cap B$:

$$A' + (A \cap B) = A' + C$$

Jedes Element dieser Summe besitzt dann eine Darstellung der Form

$$a' + c$$

wobei a' Element von A und c von C ist. Diesem Element ordnen wir die Nebenklasse $C' + c$ aus D zu. Ist es möglich, das Element $a' + c$ noch auf eine andere Weise darzustellen, erhalten wir

$$a' + c = a_1' + c_1 \quad (a_1' \in A'; c_1 \in C) \qquad \text{bzw.} \qquad -a_1' + a' = c_1 - c \in A' \cap C \subseteq A' \cap B \subseteq C'$$

und folglich

$$c_1 = (-a_1' + a') + c \in C' + c$$

Man erhält eine eindeutige Abbildung des Multioperatorrings $A' + C$ in den Multioperatorring D. Diese Abbildung ist sogar auf ganz D, da jedes Element c aus C, das dann auch in $A' + C$ liegt, in seine zugehörige Klasse $C' + c$ abgebildet wird. Weiterhin ist diese Abbildung auch Homomorphismus. Da A' ein Ideal von $A' + C$ ist, wird

$$(a_1' + c_1)...(a_n' + c_n)\omega_n = a_0' + c_1...c_n\omega_n \qquad \text{und}$$
$$(a_1' + c_1) + (a_2' + c_2) = a_3' + (c_1 + c_2)$$

wobei die $a_0',a_1',...,'a_n$ aus A' und die $c_1,...,c_n$ sowie $c_1...c_n\omega_n$ aus C sind.

Den Kern dieses Homomorphismus bildet $A' + (A \cap B')$. Einmal folgt aus $A \cap B' \subseteq C'$, dass das Ideal $A' + (A \cap B')$ im Kern enthalten ist, Wird weiterhin ein Element $a' + c$ aus $A' + C$ in C' abgebildet, so ist c in C' enthalten und mit (1.54)

$$c = u + v$$

wobei u in $B \cap A'$ bzw. v in $A \cap B'$ enthalten sind. Damit wird

$$a' + c = (a' + u) + v \in A' + (A \cap B')$$

womit das betrachtete Ideal tatsächlich den Kern bildet.
Folglich ist $A' + (A \cap B')$ Ideal im Ω-Ring $A' + C = A' + (A \cap B)$, und es gilt

$$(A' + (A \cap B))/(A' + (A \cap B')) \cong D$$

Aus Analogiegründen muss dann auch gelten

$$(B' + (B \cap A))/(B' + (B \cap A')) \cong D$$

womit die Behauptung gezeigt ist. Der Beweis ist erbracht.

1.3.6 Der Verband der Ideale

Im Folgenden soll kurz eine sehr schöne Eigenschaft der Ideal eines Multioperatorrings gezeigt werden.

Satz 1
Die Menge aller Ideal eines Multioperatorrings bildet mit dem mengentheoretischen Durchschnitt und der Summe von Idealen einen Verband.

Zum Begriff des Verbands siehe Szasz [20] und Kuros [9].
Beweis: Für den Nachweis benutzen wir die strukturtheoretische Definition eines Verbands. Dazu zeigen wir, dass

$$A \cap A = A \quad ; \quad A + A = A \tag{1.55}$$
$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A + B = B + A \tag{1.56}$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad ; \quad (A + B) + C = A + (B + C) \tag{1.57}$$
$$A \cap (A + B) = A \quad ; \quad A + (A \cap B) = A \tag{1.58}$$

gilt.
Die Idempotenzgesetze (1.55), die Kommutativgesetze (1.56) und die Assoziativgesetze (1.57) sind offenbar für alle Ideale A, B und C eines Multioperatorrings G gültig.
Für den Durchschnitt ist dies aus der Mengentheorie bekannt. Für die Summe der Ideale ergeben sich diese Gesetze aus der Tatsache, dass die Summe in einem Multioperatorring kommutativ und assoziativ ist. Die Idempotenz für die Summe der Ideale ist durch die Komplexsumme abgesichert.

Es sind nur noch die Verschmelzungsgesetze (1.58) zu zeigen. Da aber ein beliebiges Ideal A in einer Summe $A + B$ mit einem weiteren beliebigen Ideal enthalten ist, gilt

$$A \cap (A + B) = A$$

Da andererseits der Durchschnitt von A mit einem Ideal B in A enthalten ist, gilt auch

$$A + (A \cap B) = A$$

womit die Menge aller Ideale eines Multioperatorrings mit den genannten zwei binären Operationen einen Verband bildet. Der Satz ist bewiesen.

Die zu diesem Verband gehörige Halbordnungsrelation ist durch das mengentheoretische Enthaltensein der Ideale gegeben.

Da der Durchschnitt als auch die Summe von Idealen für unendlich viele Ideale ebenfalls erklärt ist, ist der Verband der Ideale eines Multioperatorrings vollständig. Außerdem besitzt dieser Verband ein größtes Element, den Multioperatorring G selbst als Ideal, und ein kleinstes Ideal, das Nullideal. Wir können weiter zeigen:

Satz 2
Für alle Ideale A, B und C eines Multioperatorrings, wobei B in A enthalten ist, gilt

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C) \tag{1.59}$$

d.h., der Verband der Ideale ist modular und dedekindsch.

Beweis: Seien A, B und C beliebige Ideale eines Multioperatorrings G, wobei B in A enthalten sein soll. Da B auch in $B+C$ enthalten ist, umfasst die linke Seite von (1.59) das Ideal B. Ebenso wir aber auch $A \cap C$ umfasst, da $A \cap C$ sowohl in C als auch in $B+C$ enthalten sein muss. Damit wird

$$B + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C) \tag{1.60}$$

Andererseits besitzt jedes Element des Ideals $A \cap (B+C)$ eine Darstellung

$$a = b + c$$

mit a aus A, b aus B und c aus C. Damit ist aber, da B in A enthalten ist

$$c = -b + a \in A \qquad \text{d.h.} \qquad c \in (A \cap C)$$

Damit ist jedes Element a in der rechten Seite von (1.59) enthalten. Mit (1.60) ergibt sich das Gesuchte. Der Beweis ist erbracht.

Damit beenden wir die Untersuchung des Verbands der Ideale eines Ω-Rings. Für die weiteren Betrachtungen werden wir nur Satz 2 benötigen, welcher aber, wie gesehen, losgelöst von der Verbandstheorie betrachtet werden kann.

1.4 Normalreihen, Hauptreihen

1.4.1 Normalreihen und Satz von Schreier

Wir wir beim Verband der Ideale gesehen haben, besteht zwischen den Idealen eines Multioperatorrings die Halbordnung des mengentheoretischen Enthaltenseins. Wir setzen:

Definition

Ein endliches System von echt ineinander enthaltenen Idealen A_i, $i = 1,...,n$, eines Multioperatorrings G, das bei G beginnt und bei dem Ω-Nullideal (0) endet

$$G = A_n \supset A_{n-1} \supset ... \supset A_1 \supset A_0 = (0) \tag{1.61}$$

heißt **Normalreihe** des Ω-Rings G. Die Zahl n nennen wir die **Länge der Normalreihe**. Die Ω-Faktorringe

$$G/A_{n-1}, ..., A_2/A_1, A_1/A_0 = (0) \tag{1.62}$$

heißen die **Faktoren der Normalreihe** (1.61) in G.

Damit besitzt jeder Multioperatorring, verschieden vom Ω-Nullring, mindestens eine Normalreihe der Länge 1, und zwar

$$G \supset (0)$$

Der einzige auftretende Koeffizient (Faktor) ist dabei der Ω-Ring selbst. In einfachen Multioperatorringen sowie in Ω-Körpern ist dies die einzige mögliche Normalreihe, da ja kein nichttriviales Ideal existiert.
Im Ω-Ring der ganzen Zahlen bestehen unendlich viele Normalreihen, z.B.

$$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset ... \supset 2^n\mathbb{Z} \supset (0)$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.
In einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, n keine Primzahl, existieren immer endlich viele Normalreihen. Betrachten wir den Restklassenring $\mathbb{Z}_{15}$. In ihm können wir folgende Normalreihen finden:

$$G \supset (5) \supset (0); \qquad G \supset (3) \supset (0); \qquad G \supset (0)$$

Liegt nun in einem Multioperatorring eine Normalreihe (1.61) vor, so sagen wor, dass eine weitere Normalreihe

$$G = B_k \supset B_{k-1} \supset ... \supset B_1 \supset B_0 = (0)$$

eine Verfeinerung von (1.61) darstellt, wenn jedes Ideal A_i, $i = 1,...,n$, mit einem Ideal B_j übereinstimmt. D.h., es muss dann $k \geq n$ gelten.
Weiterhin sagen wir, dass zwei Normalreihen eines Multioperatorrings isomorph zueinander sind, wenn zum einen ihre Längen gleich sind und zum anderen zwischen den Faktoren beider Reihen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung besteht, so dass zugeordnete Faktoren zueinander isomorph sind.

Zum Beispiel sind im Ring der ganzen Zahlen die Normalreihen

$$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 6\mathbb{Z} \supset (0) \qquad ; \qquad \mathbb{Z} \supset 3\mathbb{Z} \supset 6\mathbb{Z} \supset (0)$$

zueinander isomorph. Die Längen beider Reihen beträgt 3 und ihre Faktoren sind isomorph.
Es gilt nun der Satz von Schreier:

Satz von Schreier
Je zwei Normalreihen eines Multioperatorrings G besitzen isomorphe Verfeinerungen.

Beweis: Seien in G zwei Normalreihen

$$G = A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_{k-1} \supset A_k = (0) \tag{1.63}$$

$$G = B_0 \supset B_1 \supset ... \supset B_{l-1} \supset A_l = (0) \tag{1.64}$$

gegeben. Dann setzen wir

$$A_{ij} = A_i + (A_{i-1} \cap B_j); \qquad i = 1,....,k; \quad j = 0,...,l$$

$$B_{ji} = B_j + (B_{j-1} \cap A_i); \qquad j = 1,....,l; \quad i = 0,...,k$$

Damit gelten für $i = 1,...,k$ und $j = 1,...,l$:

$$A_{i-1} = A_{i0} \supset A_{ij-1} \supset A_{ij} \supset A_{il} = A_i \quad \text{und}$$

$$B_{j-1} = B_{j0} \supset B_{ji-1} \supset B_{ji} \supset B_{jk} = B_j$$

Nach dem Lemma von Zassenhaus sind dann die A_{ij} und B_{ji} Ideale im Multioperatorring G und die zugehörigen Ω-Faktorringe zueinander isomorph.

$$A_{ij-1}/A_{ij} \cong B_{ji-1}/B_{ji}$$

Fügen in in der Normalreihe (1.63) zwischen allen Idealen A_{i-1} und A_i sämtliche Ideale A_{ij}, $i = 1,...,l-1$, ein, erhalten wir eine Verfeinerung der Reihe (1.63). Dabei können jedoch Wiederholungen auftreten, d.h., es kann auch der Fall

$$A_{ij-1} = A_{ij}$$

eintreten. Setzt man in der Normalreihe (1.64) die B_{ji} ein, erhält man ebenfalls eine derartig verfeinerte Normalreihe.
Nach (1.65) sind dann beide isomorph zueinander. Um nun das Geforderte zu erreichen, müssen wir noch alle möglichen Wiederholungen ausschließen.
Wählen wir dazu eine beliebige Wiederholung

$$A_{ij-1} = A_{ij}$$

aus, so ist nach der Isomorphiebeziehung (1.65)

$$A_{ij-1}/A_{ij} \cong (0) \cong B_{ji-1}/B_{ji}$$

womit auch in der Normalreihe (1.64) an dieser Stelle eine Wiederholung

$$B_{ji-1} = B_{ji}$$

auftritt. Damit können wir aber alle Wiederholungen streichen. Der Beweis ist erbracht.

Die rechnerische Bestimmung der Verfeinerungen ist mit etwas Aufwand verbunden. Betrachten wir dazu die Normalreihen

$$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset (0) \qquad ; \qquad \mathbb{Z} \supset 3\mathbb{Z} \supset 15\mathbb{Z} \supset (0)$$

im Ring der ganzen Zahlen. Wir erhalten folgende A_{ij}

$$\begin{aligned} A_{10} &= 2\mathbb{Z} + (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \\ A_{11} &= 2\mathbb{Z} + (\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \\ A_{12} &= 2\mathbb{Z} + (\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \\ A_{13} &= 2\mathbb{Z} + (\mathbb{Z} \cap (0)) = 2\mathbb{Z} + (0) = 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

und weiter:

$$A_{20} = 2\mathbb{Z}; A_{21} = 2\mathbb{Z}; A_{22} = 2\mathbb{Z}; A_{23} = 4\mathbb{Z}; A_{30} = 4\mathbb{Z}; A_{31} = 12\mathbb{Z}; A_{32} = 60\mathbb{Z}; A_{33} = (0)$$

und für die Werte der Ideale B_{ji}:

$$B_{10} = \mathbb{Z}; B_{11} = \mathbb{Z}; B_{12} = \mathbb{Z}; B_{13} = 3\mathbb{Z}; B_{20} = 3\mathbb{Z}; B_{21} = 3\mathbb{Z}; B_{22} = 3\mathbb{Z}; B_{23} = 15\mathbb{Z};$$

$$B_{30} = 15\mathbb{Z}; B_{31} = 30\mathbb{Z}; B_{32} = 60\mathbb{Z}; B_{33} = (0)$$

Die verfeinerten Normalreihen haben dann (nach Streichung der Wiederholungen) das Aussehen:

$$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 12\mathbb{Z} \supset 60\mathbb{Z} \supset (0) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z} \supset 3\mathbb{Z} \supset 15\mathbb{Z} \supset 30\mathbb{Z} \supset 60\mathbb{Z} \supset (0)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese zwei Normalreihen zueinander isomorph sind. Abschließend sei nur erwähnt, dass ein weiteres Verfahren der eben gewonnenen Normalreihen nur insofern möglich ist, dass beide unverändert bleiben, da sie schon isomorph zu einander sind.

1.4.2 Hauptreihen und der Satz von Jordan-Hölder

Eine Normalreihe eines Multioperatorrings, welche außer sich selbst keine weitere Verfeinerung besitzt, nennen wir **Hauptreihen**.
Zum Beispiel ist die Normalreihe $\mathbb{Z}_6 \supset (3) \supset (0)$ im Restklassenring Z_6 eine Hauptreihe.

Offenbar ist eine Normalreihe dann und nur dann Hauptreihe, wenn alle ihre Faktoren einfache Multioperatorringe sind. Lässt sich nämlich zwischen zwei Idealen einer Normalreihe kein weiteres echt einfügbares Ideal finden, so kann die zugehörige Ω-Faktorring als Faktor nach Satz 2, 1.3.5, auch kein echtes Ideal besitzen und umgekehrt.
Damit erhalten wir aus dem Satz von Schreier:

Satz von Jordan-Hölder
Besitzt ein Multioperatorring G eine Hauptreihe, so sind je zwei seiner Hauptreihen zueinander isomorph.

Wenden wir den Satz von Schreier auf eine beliebige Normalreihe und eine Hauptreihe eines Multioperatorrings an, so wird:

Satz 1
Besitzt ein Multioperatorring Hauptreihen, so lässt sich jede Normalreihe zu einer Hauptreihe verfeinern, welche isomorph zu allen anderen Hauptreihen dieses Multioperatorrings ist.

Insbesondere bedeutet dies, dass in einem Ω-Ring mit Hauptreihen je zweo auch die gleiche Länge besitzen.
Im Restklassenring $\mathbb{Z}_6$ haben damit alle Hauptreihen die Länge 2; oben wurde eine dieser Hauptreihen angegeben. Tatsächlich besitzt die einzige, weitere existierende Hauptreihe $\mathbb{Z}_6 \supset (2) \supset (0)$ ebenfalls die Länge 2.

Da Multioperatorringe mit Hauptreihen eine große Bedeutung für das Studium von direkten Zerlegungen besitzen, suchen wir nach Kriterien für die Existenz.

Satz 2
Ein Multioperatorring mit einer endlichen Anzahl von Idealen besitzt immer eine Hauptreihe.

Zum Nachweis überlege man sich, dass keine unendlich lange Normalreihe existieren kann. In Restklassenringen $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, gibt es damit Hauptreihen; ebenso in Matrizenringen über endlichen Integritätsbereichen.

Da in einfachen Multioperatorringen nur die trivialen Ideale existieren, besitzen derartige Ω-Ringe genau eine Hauptreihe der Länge 1

$$G \supset (0)$$

Wir können auch die Umkehrung zeigen:

Satz 3
Besitzt ein Multioperatorring eine Hauptreihe der Länge 1, so ist er einfacher Ω-Ring.

Beweis: Eine Hauptreihe der Länge 1 muss, da Nullideal und Ω-Ring selbst auftreten müssen, die Form

$$G \supset (0)$$

besitzen. Auf Grund von Satz 1 lässt sich dann jede Normalreihe zu einer Hauptreihe verfeinern, welche dann aber auch die Länge 1 haben muss. Damit kann es aber außer der angegebenen Normalreihe keine weitere geben. Dieser Multioperatorring ist einfach und der Beweis ist erbracht.
Um ein weiteres Kriterium zu erhalten, definieren wir:

Definition

Ein Multioperatorring G erfüllt genau dann die **Minimalbedingung für Ideale**, wenn jede absteigende Kette von echt ineinander enthaltenen Idealen

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_{l-1} \supset A_l = A_{l+1} = ... \tag{1.65}$$

nach endlich vielen Schritten abbricht, d.h., es existiert eine natürliche Zahl l, so dass A_l einfacher Multioperatorring ist.

Ohne Beweis sei nur erwähnt, dass nachfolgende Kriterien äquivalent zur eben definierten Minimalbedingung für Ideale sind:

1. Jedes System von Idealen besitzt mindestens ein im Sinne des mengentheoretischen Enthaltenseins "minimales" Ideal.

2. Jede absteigende Kette von echt ineinander enthaltenen Idealen

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_{l-1} \supset A_l \supset (0)$$

bricht nach endlich vielen Schritten bei dem Nullideal ab.

Analoge definieren wir die **Maximalbedingung für Ideale**, bei der jede aufsteigende Kette von Idealen nach endlich vielen Schritten bei dem Multioperatorring G selbst abbrechen muss.

Der Ring der ganzen Zahlen erfüllt offenbar die Maximalbedingung, aber nicht die Minimalbedingung. Dagegen gilt in endlichen Multioperatorringen sowohl Minimal- als auch Maximalbedingung.

Satz 4 (Kuros)
Ein Multioperatorring besitzt genau dann Hauptreihen, wenn er der Minimal- und Maximalbedingung für Ideale genügt.

Beweis: Besitzt ein Multioperatorring Hauptreihen der Länge k, so können wir jede Kette, ob ab- oder aufsteigend, durch Hinzufügen des Nullideals und der Ideals G in eine Normalreihe verwandeln. Nach Satz 1 kann diese Normalreihe zu einer Hauptreihe verfeinert werden, welche aber ebenfalls die Länge k besitzt. Damit kann es aber keine unendlich langen Ketten von Idealen geben. Der Multioperatorring erfüllt beide Bedingungen.

Umgekehrt gelte in G die Minimal- und Maximalbedingung für Ideale. Wie erwähnt, ist die Forderung, dass in jedem System von Idealen minimale Elemente existieren, äquivalent zur Minimalbedingung.
Wählen wir nun ein von G verschiedenes Ideal A. Die Menge alle Ideale B_i, $i \in I$, welche das Ideal A echt enthalten, besitzt dann minimale Elemente, von denen B_1 eines sei. Die Menge aller Ideale B_j, $j \in J$, welche B_1 echt enthalten, besitzt dann unter anderem des minimale Element B_2.
Führen wir so weiter fort, erhalten wir ein aufsteigende Kette von Idealen, welche, wenn wir $A = (0)$ setzen, bei dem Nullideal beginnt, und auf Grund der Maximalbedingung nach endlich vielen Schritten abbricht:

$$A = (0) \subset B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_{l-1} \subset B_l = G$$

Diese Kette stellt dann aber eine Hauptreihe in G dar. Der Beweis ist erbracht.

Da der Ring der ganzen Zahlen die Minimalbedingung für Ideale nicht erfüllt, kann er auch keine Hauptreihe besitzen.
Wenden wir uns noch den Längen der Hauptreihen zu.

Satz 5
Ist G ein Multioperatorring mit Hauptreihen der Länge l und A eines seiner Ideale, so besitzt A als Ω-Ring Hauptreihen mit einer Länge $a \leq l$.

Zum Beweis überlege man sich, dass die Normalreihen in denen A auftritt, also auch

$$(0) \subset A \subset G$$

zu einer Hauptreihe verfeinert werden kann, womit auch A Hauptreihen besitzt.

Satz 6
Ist ein Multioperatorring G mit Hauptreihen der Länge k und A eines seiner Ideale mit Hauptreihen der Länge a gegeben, so besitzt der Ω-Faktorring G/A ebenfalls Hauptreihen und zwar mit der Länge $l - a$.

Beweis: Es sei

$$G \supset B_{l-1} \supset B_{l-2} \supset ... \supset B_{a+1} \supset A \supset B_{a-1} \supset ... \supset B_1 \supset B_0 = (0) \tag{1.66}$$

eine Hauptreihe, in der A auftritt. Diese existiert, da die Normalreihe $G \supset A \supset (0)$ verfeinert werden kann.
Nach Satz 2, 1.3.5, existiert dann in dem Ω-Faktorring G/A eine Normalreihe

$$G/A \subset B'_{l-1} \supset B'_{l-2} \supset ... \supset B'_{a+2} \supset B'_{a+1} \supset B'_a = (0)$$

wobei die B'_i homomorphe Bilder der B_i, $i = a,...,l-1$, bezüglich des natürlichen Homomorphismus von G auf G/A sind.

Da die Umkehrung von Satz 2, 1.3.5, gilt, ist diese Normalreihe sogar Hauptreihe im Ω-Faktorring G/A. Andernfalls könnte (1.66) keine Hauptreihe im Multioperatorring G darstellen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre. Der Ω-Faktorring G/A besitzt damit Hauptreihen und offenbar mit der Länge $l - a$. Der Beweis ist erbracht.

Diesen gezeigten Satz können wir auch zur Bestimmung der Länge der Hauptreihen im Ausgangsmultioperatorring benutzen.

Betrachten wir den Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$. Dieser besitzt, da er ein zum Restklassenkörper $\mathbb{Z}_2$ isomorphes Ideal enthält, den Restklassenring $\mathbb{Z}_6$ als homomorphes Bild. Wir wir sahen, haben in diesem wiederum die Hauptreihen die Länge 2. D.h., es ist $l - a = 2$.
Da nun das betrachtete Ideal Ω-Körper ist und damit nur die triviale Hauptreihe der Länge 1 besitzt, d.h. $a = 1$, erhalten wir für l den Wert 3.
Tatsächlich ist die Länge der Hauptreihen im Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$ gleich 3. Zum Beispiel existiert die Hauptreihe

$$\mathbb{Z}_{12} \supset (2) \supset (4) \supset (0)$$

Aus Satz 5 können wir weitere Folgerungen ableiten. Mit dem Homomorphiesatz gilt dann:

Satz 7
Ist G ein Multioperatorring mit Hauptreihen der Länge l, so besitzt jedes homomorphe Bild $G\varphi$ Hauptreihen mit einer Länge $a \leq l$.

Wählen wir in einem Ω-Ring mit Hauptreihen der Länge l ein maximales A aus, do besitzt dieses ebenfalls Hauptreihen und offensichtlich mit der Länge $l-1$. Der zugehörige Ω-Faktorring G/A muss dann Hauptreihen der Länge 1 besitzen. Nach Satz 3 ist G/A einfacher Multioperatorring. Wir erhalten:

Satz 8
Der Ω-Faktorring G/A eines Multioperatorrings G nach einem maximalen Ideal A ist einfach.

Die gleiche Aussage erhielten wir schon mit Satz 3 im Abschnitt 1.3.5 ohne Verwendung von Hauptreihen.
Von Bedeutung wird noch eine Aussage über die Länge der Hauptreihen in einer Summe zweier Ideale. Wir zeigen:

Satz 9
Seien A und B zwei beliebige Ideale eines Multioperatorrings G mit Hauptreihen. $l(A)$ sei die Länge der Hauptreihen im Ideal A, $l(B)$ im Ideal B, $l(A+B)$ im Ideal $A+B$ und $l(A \cap B)$ im Durchschnitt der Ideale A und B. Dann gilt:

$$l(A+B) = l(A) + l(B) - l(A \cap B) \tag{1.67}$$

Beweis: Auf Grund des ersten Isomorphiesatzes ist

$$(A+B)/A \cong B/(A \cap B)$$

womit die Hauptreihen beider Ω-Faktorringe die gleiche Länge besitzen. Nach Satz 6 hat eine Hauptreihe im Ω-Faktorring $(A+B)/A$ die Länge $l(A+B) - l(A)$ und in $B/(A \cap B)$ die Länge $l(B) - l(A \cap B)$, womit wir durch Gleichsetzen das Gesuchte erhalten. Der Satz ist bewiesen.

Schließen wir vorerst die Untersuchung von Multioperatorringen mit Hauptreihen ab. In der Theorie der direkten Summen von Multioperatorringen werden sie uns wieder begegnen, und dort neben den Endomorphismen einen zentralen Platz einnehmen.

1.5 Endomorphismen

1.5.1 Endomorphismenstruktur eines Multioperatorrings

Endomorphismen besitzen in der Theorie der Multioperatorringe und deren direkten Zerlegung zentrale Bedeutung. Wir werden später sehen, dass jede direkte Summe unmittelbar mit Endomorphismen verbunden ist.

Betrachten wir zuerst die Menge E aller endomorphen Abbildungen eines beliebigen Multioperatorrings G. Da Endomorphismen eindeutige Abbildungen sind, können wir als binäre algebraische Operation die **Nacheinanderausführung** "$\circ$" auf der Menge E einführen:

Für zwei beliebige Endomorphismen α und β aus der Menge E und jedes Element a des Multioperatorrings G setzen wir

$$a(\alpha \circ \beta) := (a\alpha)\beta$$

Dabei schreiben wir an Stelle von $a(\alpha \circ \beta)$ nur noch $a\alpha\beta$.
Da die Nacheinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist und jedes Multioperatorring den identischen Automorphismus besitzt, stellt die Menge E der Endomorphismen eines Multioperatorrings mit der Operation "$\circ$" eine Halbgruppe mit Einselement (identischer Automorphismus) dar.
Da diese Halbgruppe im allgemeinen nicht regulär ist, kann sie auch keine Gruppe darstellen, d.h., es existieren allgemein keine "inversen" Endomorphismen.
Zum Nachweis der Nichtregularität brauchen wir nur zu zeigen, dass in der Halbgruppe $(E,\circ)$ Nullteiler existieren können. (zum Verhältnis Regularität - Nullteiler in Halbgruppen siehe Lugowski-Weinert [14], Seite 4 ff.)

Dazu betrachten wir den Restklassenring modulo 6. Während in der Restklassengruppe modulo 6 sechs verschiedene Endomorphismen existieren, finden wir in dem Restklassenring nur noch 4, welche in der Tabelle zusammengefasst sind. Dabei sind in der Eingangszeile die Endomorphismen, in der Eingangsspalte die Elemente des Rings aufgeführt.

	0	i	α_2	α_3
0	0	0	0	0
1	0	1	3	4
2	0	2	0	2
3	0	3	3	0
4	0	4	0	4
5	0	5	3	2

Durch Nacheinanderausführung der Endomorphismen α_2 und α_3 erhalten wir als deren Produkt den Nullendomorphismus 0 und folglich die gesuchten Nullteiler.
Es kann Endomorphismenhalbgruppen von Multioperatorringen geben, bei denen keine Nullteiler auftreten (z.B. bei dem Ring der ganzen Zahlen), jedoch ist dies nicht der Normalfall.

Aus der Gruppentheorie ist bekannt, dass durch Einführen einer Addition von Endomorphismen, einer besser auswertbare Endomorphismenstruktur erhalten werden kann. Für abelsche Gruppen erhält man z.B. Endomorphismenringe.
Auch für Multioperatorringe wird eine **Addition von Endomorphismen** eingeführt:

Für zwei beliebige Endomorphismen α und β von E und jedes Element a des Multioperatorrings G setzen wir

$$a(\alpha + \beta) = (a\alpha) + (a\beta)$$

Obwohl jeder Multioperatorring eine Trägerstruktur besitzt, welche abelsche Gruppe ist, ist der Schluss, dass $(E,+)$ für Ω-Ringe Gruppe ist, fehlerhaft. Die Ursache dafür liegt in der Tatsache,

dass nicht jeder Endomorphismus von $(G,+)$ auch Endomorphismus des ganzen Multioperatorrings ist.
Zum Beispiel wird in einer Restklassengruppe modulo n, $n \geq 2$, durch jede natürliche Zahl k, $0 \leq k \leq n$, ein Endomorphismus durch

$$\alpha_k : \qquad a\alpha_k = ka = \underbrace{a + a + ... + a}_{k-mal}$$

bestimmt. Damit diese Endomorphismen auch in dem zugehörigen Restklassenring existieren, müssen sie die Homomorphiebedingung der Multiplikation erfüllen, d.h., es muss gelten:

$$k(a \cdot b) = ka \cdot kb = k^2(a \cdot b)$$

für beliebige a und b aus dem Ring. Da zwei Elemente genau dann gleich sind, wenn sie bezüglich n den gleichen Rest lassen, bedeutet dies

$$k \equiv k^2 \pmod{n}$$

Lösen wir diese Kongruenz, erhalten wir

$$k = \frac{1 + \sqrt{4nz + 1}}{2}$$

wobei z die Menge aller natürlichen Zahlen durchläuft. Es gilt also:

Satz 1
In einem Restklassenring modulo n, $n \geq 2$, existiert ein Endomorphismus

$$\alpha_k : \qquad a\alpha_k = ka \tag{1.68}$$

mit $0 \leq k \leq n$, genau dann, wenn eine natürliche Zahl z existiert, so dass k ganzzahlige Lösung von

$$k = \frac{1 + \sqrt{4nz + 1}}{2} \tag{1.69}$$

ist.

Für den Restklassenring modulo 6 ergibt sich:

z	0	1	2	3	4	5	6	7
k	1	3	4	-	-	0	-	1

womit wir genau die Endomorphismen erhalten, welche in der vorhergehenden Tabelle aufgeführt sind. Offenbar verschwinden zwei Endomorphismen, welche noch in der Restklassengruppe existieren, und zwar die für $k = 2$ und 5.
Damit ist die Menge E bezüglich der definierten Addition nicht mehr abgeschlossen. Die identische Automorphismus i ist mit sich selbst nicht addierbar, da $i + i = \alpha_2$ gilt.

Die Menge E aller Endomorphismen eines Multioperatorrings bildet mit der Addition von Endomorphismen im allgemeinen keine Gruppe. Damit stellt sich aber die Frage, wann Endomorphismen eines Multioperatorrings addierbar sind. Dazu zeigen wir:

Satz 2
Zwei Endomorphismen α und β eines Ω-Rings G sind addierbar, wenn der gegenseitige Kommutant der Bilder $[G\alpha,G\beta]$ gleich dem Nullideal ist.

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass der Endomorphismus $\alpha + \beta$ existiert. Dass $(\alpha + \beta)$ eindeutige Abbildung von G in G ist, folgt aus den gleichen Eigenschaften der Endomorphismen α und β sowie aus der Eindeutigkeit der Summenbildung in G. Es bleiben nur noch die Homomorphiebedingungen zu zeigen.

Für die Addition in G können wir auf den Nachweis verzichten, da in einer abelschen Gruppe zwei Endomorphismen immer addierbar sind. (vergleiche Kuros [5], Seite 102). Wenden wir uns der Homomorphiebedingung für beliebige Operationen ω_n zu.

Seien a_1,...,a_n beliebige Elemente des Ω-Rings G und ω_n aus dem Operationensystem Ω. Dann gilt:

$$(a_1...a_n\omega_n)(\alpha + \beta) =$$

nach Definition der Addition von Endomorphismen

$$= ((a_1...a_n\omega_n)\alpha) + ((a_1...a_n\omega_n)\beta) =$$

und da α und β Endomorphismen sind

$$= ((a_1\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n) + ((a_1\beta)...(a_n\beta)\omega_n) = (*)$$

Da der Kommutant $[G\alpha, G\beta] = (0)$ ist, ist jedes Element in dem sowohl aus $G\alpha$ als auch aus $G\beta$ mindestens ein Element auftritt, gleich Null. Damit können wir aber die Elemente

$$(a_1\alpha)(a_2\beta)...(a_n\beta)\omega_n \qquad \text{und} \qquad (a_1\beta)(a_2\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n$$

da beide Null sind, addieren. Wir erhalten

$$(*) = (a_1\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n + (a_1\beta)...(a_n\beta)\omega_n + (a_1\alpha)(a_2\beta)...(a_n\beta)\omega_n + (a_1\beta)(a_2\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n =$$

und da die Addition kommutativ ist, sowie mit dem Distributivgesetz

$$= (a_1\alpha + a_1\beta)(a_2\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n + (a_1\alpha + a_1\beta)(a_2\beta)...(a_n\beta)\omega_n = (**)$$

Da auch die Elemente

$$(a_1\alpha)(a_2\beta)(a_3\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n \qquad \text{und} \qquad (a_1\beta)(a_2\alpha)(a_3\beta)...(a_n\beta)\omega_n$$

auf Grund von $[G\alpha, G\beta] = (0)$ gleich dem Nullelement sind, ergibt sich bei der Addition mit dem Distributivgesetz

$$(**) = (a_1\alpha + a_1\beta)(a_2\alpha + a_2\beta)(a_3\alpha)...(a_n\alpha)\omega_n + (a_1\alpha + a_1\beta)(a_2\alpha + a_2\beta)(a_3\beta)...(a_n\beta)\omega_n =$$

Setzen wir so fort, wird

$$= (a_1\alpha + a_1\beta)...(a_{n-1}\alpha + a_{n-1}\beta)(a_n\alpha)\omega_n + (a_1\alpha + a_1\beta)...(a_{n-1}\alpha + a_{n-1}\beta)(a_n\beta)\omega_n =$$

durch die Distributivität

$$= (a_1\alpha + a_1\beta)...(a_{n-1}\alpha + a_{n-1}\beta)(a_n\alpha + a_n\beta)\omega_n =$$

und mit der Definition der Addition von Endomorphismen

$$= (a_1(\alpha + \beta))...(a_n(\alpha + \beta))\omega_n$$

womit die zwei Endomorphismen addierbar sind. Der Beweis ist erbracht.

Offenbar sind damit in Ω-Zeroringen alle Endomorphismen addierbar. Da die Addition in einem Ω-Ring kommutativ ist, gilt immer (vorausgesetzt die Endomorphismen sind addierbar):

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Außerdem gelten offensichtlich die Distributivgesetze

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \qquad \text{und} \qquad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Da nun in Ω-Zeroringen alle Endomorphismen der additiven Trägerstruktur weiterbestehen, bildet die Menge E aller Endomorphismen eines Ω-Zerorings mit den Operationen "+" und "∘" einen Ring.

Um alle Multioperatorringe zu charakterisieren, in denen alle Endomorphismen untereinander addierbar sind, zeigen wir einige Kriterien, wobei eine vollständige Systematisierung noch nicht gelungen ist.

Zuerst betrachten wir den Sonderfall der Multioperatorringe, die nicht notwendigerweise assoziativen Ringe. Für diese Strukturen gilt:

Satz 3
In einem Ring R ist der identische Automorphismus i mit sich selbst addierbar, wenn jedes Ringelement zu sich selbst entgegengesetzt ist, d.h., es gilt für alle a aus R

$$a = -a \tag{1.70}$$

Beweis: In R sei der identische Automorphismus i mit sich selbst addierbar, d.h., $(i + i)$ ist Endomorphismus in dem Ring R. Dann gilt auf Grund der Homomorphiebedingung der Multiplikation für alle Elemente a und b aus R

$$(a \cdot b)(i + i) = (a \cdot b) + (a \cdot b) = 2(a \cdot b)$$

und andererseits

$$a(i + i) \cdot b(i + i) = (a + a) \cdot (b + b) = 4(a \cdot b)$$

und zusammenfassend

$$a \cdot b + a \cdot b = a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b$$

Da nun $(R,+)$ Modul ist, können wir mit dem Entgegengesetzten von $(a \cdot b)$ addieren, und erhalten:

$$0 = a \cdot b + a \cdot b$$

Das bedeutet aber

$$a \cdot b = -(a \cdot b) \tag{1.71}$$

Da alle Umformungen äquivalent waren, ist i also genau dann mit sich selbst addierbar, wenn in dem Ring R die Gleichung (1.71) von allen Ringelementen a und b erfüllt wird. Gilt nun in R (1.70), so erhalten wir auf Grund der Vorzeichenregeln sofort (1.71) und damit das Behauptete. Der Satz ist bewiesen.

Offenbar gilt Relation (1.70) in jedem Zeroring. Allerdings existieren auch Ringe, welche nicht Zeroring sind, aber dennoch (1.70) erfüllen. Beispiel dafür ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_2$.

Satz 3 können wir erweitern. Dazu betrachten wir die n-fach-Bildung des identischen Automorphismus

$$ni = \underbrace{i + i + ... + i}_{n-mal}$$

Damit ni Endomorphismus eines Rings R ist, muss auf Grund der Homomorphiebedingung für alle Elemente a und b aus R

$$(a \cdot b)i = n(a \cdot b) = n^2(a \cdot b) = ani \cdot bni$$

gelten, d.h. also

$$0 = (n^2 - n)(a \cdot b) \tag{1.72}$$

Da nun nach (1.71) in diesen Ringen $0 = 2(a \cdot b)$ gilt, und $n^2 - n$ immer eine gerade Zahl ist, kann (1.72) durch eine Summe aus lauter Summanden der Form $2(a \cdot b)$ dargestellt werden, womit wir erhalten:

Satz 4
In einem Ring R, in dem jedes Element zu sich selbst entgegengesetzt ist, kann der identische Automorphismus beliebig oft mit sich selbst addiert werden.

Die dabei entstehende zyklische Gruppe mit dem identischen Automorphismus als Erzeugenden ist jedoch auf Grund der Forderung (1.70) immer isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung 2, da $i + i = o$ gilt, wobei o der Nullendomorphismus ist.

Wenden wir uns beliebigen Multioperatorringen zu. Wir erwähnt sind in einem Ω-Zeroring alle Endomorphismen untereinander addierbar. Dagegen muss ein Multioperatorring, in dem alle Endomorphismen addierbar sind, nicht notwendigerweise Ω-Zeroring sein.
Zum Beispiel besitzt der Restklassenring $\mathbb{Z}_2$ nur die trivialen Endomorphismen, welche addierbar sind:

$$o + i = i \qquad ; \qquad i + i = o$$

Deshalb zeigen wir nur zwei spezielle Aussagen:

Satz 5
Ein Endomorphismus α eines Multioperatorrings G, dessen endomorphes Bild im Zentrum Z von G liegt, ist mit jedem anderen Endomorphismus addierbar.

Beweis: Da dann das endomorphe Bild $G\alpha$ im Zentrum liegt und somit der gegenseitige Kommutant $[G\alpha, G]$ gleich dem Nullideal wird, gilt für jeden weiteren Endomorphismus β

$$[G\alpha, G\beta] = (0)$$

Nach Satz 2 sind dann beide addierbar. Der Satz ist bewiesen.

Insbesondere ist folglich der Nullendomorphismus mit jedem Endomorphismus addierbar.
Nennen wir endomorphe Abbildungen eines Multioperatorrings G, deren Kern maximales Ideal von G ist, **maximale Endomorphismen**, so zeigen wir:

Satz 6
Zwei verschiedenen maximale Endomorphismen α und β eines Ω-Rings G sind immer addierbar.

Beweis: Es sei M_α der Kern des Endomorphismus α und M_β Kern von β. Nach Definition sind dann M_α und M_β maximale Ideale in G. Auf Grund von Satz 2, 1.3.5, sind dann die zugehörigen Bilder $B\alpha$ und $B\beta$ minimale Ideale in G.
Nach Satz 3, 1.3.3, sind $B\alpha$ und $B\beta$ dann bis auf das Nullelement zueinander disjunkt. Da somit aber jedes n-äre Produkt mit Elementen sowohl aus $B\alpha$ und $B\beta$ immer zum Nullelement wird, andernfalls wäre $B\alpha$ und $B\beta$ nicht bis aus Null disjunkt, muss deren gegenseitiger Kommutant zum Nullideal werden.
Mit Satz 2 sind beide Endomorphismen addierbar. Der Beweis ist erbracht.

Damit brechen wir die Untersuchung der Addierbarkeit von Endomorphismen ab. In Abschnitt 1.5.3 werde wir mit Hilfe des Begriffs des normalen Endomorphismus weitere Aussagen treffen können.

1.5.2 Der Multioperatorring der Quasiendomorphismen

Bevor speziell Endomorphismen untersucht werden, diskutieren wir ein anderes Problem.
Wie wir wissen, bilden die Endomorphismen eines Multioperatorrings im Allgemeinen mit den Operationen der Nacheinanderausführung bzw. Addition keinen Ring. Damit existiert ein "Endomorphismen-Ω-Ring" nicht, da die Menge E bezüglich der Addition nicht abgeschlossen sein muss.
Es erhebt sich die Frage, ob es nicht dich möglich ist (durch entsprechende Konzessionen) eine untersuchbare Endomorphismenstruktur zu konstruieren.

Zur Lösung der Frage betrachten wir die Menge $S(G)$ aller Abbildungen eines Multioperatorrings G in sich selbst.
Offenbar gehören alle Endomorphismen zu der Menge $S(G)$, jedoch auch alle anderen Abbildungen, welcher keinerlei Bedingung (wie z.B. der Homomorphiebedingung) genügen müssen.

Zwei Abbildungen α und β aus $S(G)$ seien dann und nur dann gleich, wenn ihre Bilder für alle Elemente des Multioperatorrings gleich sind, d.h.

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow x\alpha = x\beta; \forall x \in G$$

Auf dieser Menge $S(G)$ führen wir jetzt folgende Operationen ein:
1. eine binäre Addition

$$x(\alpha + \beta) = (x\alpha) + (x\beta) \tag{1.73}$$

Offenbar stimmt diese Addition mit der der Endomorphismen überein.
2. eine unäre Bildung der Entgegengesetzten

$$x(-\alpha) = -(x\alpha) \tag{1.74}$$

3. eine nulläre Festlegung des Nullelements, d.h., in unserem Fall des Nullendomorphismus o

$$xo = 0 \tag{1.75}$$

und 4. für jede Operation ω_n des Operationensystems des Multioperatorrings G eine Operation ω'_n der Form

$$x(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\omega'_n) = (x\alpha_1)(x\alpha_2)...(x\alpha_n)\omega_n \tag{1.76}$$

Da die Menge $S(G)$ alle möglichen Abbildungen des Multioperatorrings in sich selbst enthält, und die definierten Operationen bei Anwendung wieder nur Abbildungen erbringen, ist $S(G)$ bezüglich dieser Operationen abgeschlossen und damit universelle Algebra.
Das zugehörige Operationensystem enthält eine Addition, eine unäre Operation, eine nulläre Operation, und eine Menge von n-ären Operationen, $n \geq 2$, welche gleichartig zum Operationensystem des Multioperatorrings G ist.
Wir können zeigen, dass $S(G)$ mit den in (1.73) bis (1.75) definierten Operationen zu einer abelschen Gruppe wird.

Satz 1
Die Menge $S(G)$ aller Abbildungen eines Multioperatorrings G bildet mit den Operationen (1.73) bis (1.75) eine abelsche Gruppe.

Beweis: Da die Abgeschlossenheit von $S(G)$ für diese Operationen schon geklärt ist, genügt es, wenn wir die für eine abelsche Gruppe identischen Relationen nachweisen.
Da die Addition im Multioperatorring G assoziativ und kommutativ ist, folgt sofort aus der Definition der Addition in $S(G)$, dass diese ebenfalls assoziativ und kommutativ ist. Weiterhin gilt:

$$x(\alpha + o) = x\alpha + xo = x\alpha + o = x\alpha$$

so dass der Nullendomorphismus tatsächlich Nullelement in $(S(G),+)$ ist.
Da wir auch für die Entgegengesetzten

$$x(\alpha + (-\alpha)) = x\alpha + x(-\alpha) = x\alpha - x\alpha = 0$$

erhalten, ist $(S(G),+)$ abelsche Gruppe. Der Beweis ist erbracht.

Es ist zu vermuten, dass die Operation ω'_n mit der Addition auch das Distributivgesetz erfüllen.

$$x(\alpha_1...\alpha_{i-1}(\alpha + \beta)\alpha_{i+1}...\alpha_n\omega'_n) =$$

nach Relation (1.76)

$$= (x\alpha_1)...(x\alpha_{i-1})(x(\alpha + \beta))(x\alpha_{i+1})...(x\alpha_n)\omega_n =$$

und mit der Definition der Addition in $S(G)$

$$= (x\alpha_1)...(x\alpha_{i-1})(x\alpha + x\beta)(x\alpha_{i+1})...(x\alpha_n)\omega_n =$$

da das Distributivgesetz im Multioperatorring gilt

$$= (x\alpha_1)...(x\alpha_{i-1})(x\alpha)(x\alpha_{i+1})...(x\alpha_n)\omega_n + (x\alpha_1)...(x\alpha_{i-1})(x\beta)(x\alpha_{i+1})...(x\alpha_n)\omega_n =$$

wenden wir Definition (1.76) nochmals an, ergibt sich

$$= x(\alpha_1...\alpha_{i-1}\alpha\alpha_{i+1}...\alpha_n\omega'_n) + x(\alpha_1...\alpha_{i-1}\beta\alpha_{i+1}...x\alpha_n\omega'_n) =$$

und nochmals mit der Definition der Addition zweier Abbildungen in $S(G)$

$$= x(\alpha_1...\alpha_{i-1}\alpha\alpha_{i+1}...\alpha_n\omega'_n + \alpha_1...\alpha_{i-1}\beta\alpha_{i+1}...x\alpha_n\omega'_n) =$$

Zusammenfassend können wir also sagen

Satz 2
Die Menge $S(G)$ aller Abbildungen eines Multioperatorrings G bildet mit den Operationen (1.73) bis (1.76) einen Multioperatorring.

$S(G)$ nennen wir dem **symmetrischen Multioperatorring** eines Ω-Rings G.

Nun wenden wir uns den Endomorphismen eines Multioperatorrings zu. Auf Grund der Definition der Menge $S(G)$ sind sicher alle Endomorphismen in $S(G)$ enthalten, d.h.

$$E \subseteq S(G)$$

Wie wir schon wissen, sind die Endomorphismen bezüglich der Addition nicht abgeschlossen, so dass E in $S(G)$ keinen Ω-Unterring bildet.
Betrachten wir aber den aus der Menge E erzeugten Ω-Unterring Q in $S(G)$, und nennen wir die Elemente von Q **Quasiendomorphismen**, so können wir sagen:

Satz 3
Die Menge aller Quasiendomorphismen Q eines Multioperatorrings G bildet mit den Operationen (1.73) bis (1.76) einen Ω-Unterring des symmetrischen Multioperatorrings $S(G)$, und ist damit selbst Multioperatorring.

Zu den Quasiendomorphismen gehören offenbar alle Endomorphismen von G. Da $(G,+)$ einen Endormorphismenring besitzt und alle Endomorphismen von G auch Endomorphismen von $(G,+)$ sind (umgekehrt aber nicht), gehören alle Endomorphismen von $(G,+)$ zu den Quasiendomorphismen von G.
Weiterhin können aber auch andere Abbildungen Element von Q sein. Jedoch fallen die Mengen $S(G)$ und Q nicht notwendigerweise zusammen.

Zum Beispiel besitzt der symmetrische Multioperatorring des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$ die Ordnung 24. Dagegen gehören zu Q nur 16 Abbildungen, welche in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind:

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	1	2	3	0	1	2	3	0	2	3	0	1
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
3	0	3	2	1	1	0	3	2	3	2	1	0	0	3	2	1

Von diesen 16 Quasiendomorphismen sind nur der Nullendomorphismus und der identische Automorphismus Endomorphismen. α_1 und α_2 sind in der zyklischen Gruppe der Ordnung 4 Endomorphismen. Die Operationstafel der Multiplikation ist nachfolgend zu sehen.
Man erkennt, dass sich die Kommutativität der Multiplikation auf den Ω-Ring der Quasiendomorphismen überträgt.

Multiplikationstafel des Quasiendomorphismenrings des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
i	o	α_3	α_1	α_5	α_7	α_{11}	α_9	α_{13}	α_3	α_1	α_5	o	α_{11}	α_9	α_{13}	α_7
α_1	o	α_1	o	α_1	α_1	o	α_1	o	α_1	o	α_1	o	o	α_1	o	α_1
α_2	o	α_5	α_1	α_3	α_9	α_{11}	α_7	α_{13}	α_5	α_1	α_3	o	α_{11}	α_7	α_{13}	α_9
α_3	o	α_7	α_1	α_9	α_3	α_{11}	α_5	α_{13}	α_7	α_1	α_9	o	α_{11}	α_5	α_{13}	α_3
α_4	o	α_{11}	o	α_{11}	α_{11}	o	α_{11}	o	α_{11}	o	α_{11}	o	o	α_{11}	o	α_{11}
α_5	o	α_9	α_1	α_7	α_5	α_{11}	α_3	α_{13}	α_9	α_1	α_7	o	α_{11}	α_3	α_{13}	α_5
α_6	o	α_{13}	o	α_{13}	α_{13}	o	α_{13}	o	α_{13}	o	α_{13}	o	o	α_{13}	o	α_{13}
α_7	o	α_3	α_1	α_5	α_7	α_{11}	α_9	α_{13}	α_3	α_1	α_5	o	α_{11}	α_9	α_{13}	α_7
α_8	o	α_1	o	α_1	α_1	o	α_1	o	α_1	o	α_1	o	o	α_1	o	α_1
α_9	o	α_5	α_1	α_3	α_9	α_{11}	α_7	α_{13}	α_5	α_1	α_3	o	α_{11}	α_7	α_{13}	α_9
α_{10}	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
α_{11}	o	α_{11}	o	α_{11}	α_{11}	o	α_{11}	o	α_{11}	o	α_{11}	o	o	α_{11}	o	α_{11}
α_{12}	o	α_9	α_1	α_7	α_5	α_{11}	α_3	α_{13}	α_9	α_1	α_7	o	α_{11}	α_3	α_{13}	α_5
α_{13}	o	α_{13}	o	α_{13}	α_{13}	o	α_{13}	o	α_{13}	o	α_{13}	o	o	α_{13}	o	α_{13}
α_{14}	o	α_7	α_1	α_9	α_3	α_{11}	α_5	α_{13}	α_7	α_1	α_9	o	α_{11}	α_5	α_{13}	α_3

Anmerkung: Der vorliegende Quasiendomorphismen-Ω-Ring ist für eine Vielzahl von Untersuchungen gut geeignet, da er sich gegenüber bisher betrachteter Multioperatorringe durch zwei besondere Eigenschaften auszeichnet; er besitzt ein Zentrum bzw. einen Kommutanten, welche nichttriviale Ideale sind.
Das Zentrum wird dabei von dem Ideal (α_{10}) gebildet, welches außer α_{10} nur noch das Nullelement o enthält.
Der Kommutant G' besitzt die Elemente $0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}$ und α_{13}. Weiter kann man zeigen, dass

$$Q/G' = (\alpha_{10}) \qquad \text{und} \qquad Q/(\alpha_{10}) = G'$$

gilt.

Es erhebt sich nun die Frage, wann der Quasiendomorphismenring nur Endomorphismen enthält. Dazu benutzen wir ein Lemma von Plotkin (aus Hion [4], Seite 9).

Lemma von Plotkin
Ist ein Multioperatorring abelsch, so ist $Q = E$ und E ist abelscher Ω-Ring.

Beweis: Auf Grund von Satz 2, 1.5.1, und dessen Folgerungen ist nur noch nachzuweisen, dass

$$\alpha_1 ... \alpha_n \omega'_n$$

wobei $\alpha_1, ..., \alpha_n$ beliebige Endomorphismen sind, immer Endomorphismus ist.
Dazu seien die x_1,...,x_n beliebige Elemente des abelschen Multioperatorrings G und ω_k eine Operation des Operationensystems Ω. Dann gilt:

$$(x_1 ... x_k \omega_k)(\alpha_1 ... \alpha_n \omega'_n) =$$

auf Grund der Definition (1.76)

$$= ((x_1 ... x_k \omega_k)\alpha_1)...((x_1 ... x_k \omega_k)\alpha_n)\omega_n =$$

und da die α_1 bis α_n Endomorphismen sind

$$= ((x_1\alpha_1)...(x_k\alpha_1)\omega_k)...((x_1\alpha_n)...(x_k\alpha_n)\omega_k)\omega_n =$$

da nun der Multioperatorring als abelscher Ω-Ring Ω-Zeroring ist, ist das Ergebnis gleich Null und wir können setzen

$$= ((x_1\alpha_1)...(x_k\alpha_n)\omega_n)...((x_k\alpha_1)...(x_k\alpha_n)\omega_n)\omega_k =$$

mit Relation (1.76)

$$= (x_1(\alpha_1 ... \alpha_n \omega'_n))...(x_k(\alpha_1 ... \alpha_n \omega'_n))\omega_k$$

womit $\alpha_1 ... \alpha_n \omega'_n$ Endomorphismus ist. Der Satz ist bewiesen.

1.5.3 Normale Endomorphismen

Um weitere Aussagen über Endomorphismen zu gewinnen, betrachten wir spezielle Endomorphismen eines Multioperatorrings G.

Definition

Ein Endomorphismus α eines Multioperatorrings G heißt genau dann **normal**, wenn für alle Elemente $h, g_1, ..., g_n$ aus G bei jeder Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω

$$(g_1 ... g_{i-1} h g_{i+1} ... g_n \omega_n)\alpha = g_1 ... g_{i-1}(h\alpha) g_{i+1} ... g_n \omega_n \tag{1.77}$$

für alle i gilt.

Aus der Gruppentheorie ist bekannt, dass in jeder abelschen Gruppe alle Endomorphismen normal sin, womit eine Forderung für die Addition entfällt. Außerdem können wir nicht sagen, dass auch in einem Multioperatorring jeder Endomorphismus normal ist.
In Ω-Zeroringen ist allerdings, da jedes n-äre Produkt gleich Null ist, auch jeder Endomorphismus normal.

Im Ring der ganzen Zahlen gibt es außer den in jedem Multioperatorring existierenden trivialen normalen Endomorphismen, dem Nullendomorphismus und dem identischen Automorphismus, keinen weiteren normalen Endomorphismus. Dagegen ist im Restklassenring $\mathbb{Z}_6$ jeder Endomorphismus normal. Auf Grund der Gültigkeit von

$$k(a \cdot b) = ka \cdot b = a \cdot kb$$

mit k beliebige natürliche Zahl kleiner n und a, b beliebige Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$, sind in einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ offenbar alle Endomorphismen der Form (vorausgesetzt sie existieren, siehe Satz 1, 1.5.1)

$$\alpha_k : \qquad a\alpha_k = ka = \underbrace{a + a + ... + a}_{k-mal}$$

normal.
Damit ein Endomorphismus in einem Ring normal ist, muss im allgemeinen also

$$(a \cdot b)\alpha = (a\alpha) \cdot b = a \cdot (b\alpha) = (a\alpha) \cdot (b\alpha)$$

für alle Elemente a und b gelten.

Dass die Nacheinanderausführung bzw. Summe zweier normaler Endomorphismen wieder normale Endomorphismen liefert (vorausgesetzt die Summe ergibt einen Endomorphismus), kann man wieder leicht zeigen.

Satz 1
Sind α und β normale Endomorphismen eines Multioperatorrings G, so ist

1. $\alpha\beta$ normaler Endomorphismus von G und
2. wenn außerdem $[G\alpha, G\beta] = (0)$ gilt, auch $\alpha + \beta$ normaler Endomorphismus von G.

Übernehmen wir nun aus 1.5.2 die unäre Bestimmung des entgegengesetzten Endomorphismus

$$x(-\alpha) = -(x\alpha)$$

für jedes Element x aus G und jeden Endomorphismus α, so muss auch $-\alpha$ nicht immer tatsächlich Endomorphismus sein. Jedoch können wir nun den wichtigen Begriff des **komplementären Endomorphismus** definieren.

Definition

Sei α ein beliebiger normaler Endomorphismus eines Multioperatorrings G. Ist i der identische Automorphismus in G, so nennen wir die Abbildung

$$\beta = i + (-\alpha) = i - \alpha \tag{1.78}$$

die **komplementäre Abbildung** von α.

Wie erwähnt, soll diese komplementäre Abbildung Endomorphismus sein:

Satz 2
Die komplementäre Abbildung $\beta = i - \alpha$ eines Endomorphismus α in einem Ω-Ring ist selbst Endomorphismus.

Beweis: Dass die komplementäre Abbildung β eine Abbildung von G in G und außerdem eindeutig ist, ergibt sich aus der Definition. Ebenso ist β in der additiven Gruppe auch Endomorphismus, da die Endomorphismenstruktur von G,+) ein Ring ist.

Damit ist es nur noch notwendig zu zeigen, dass $\beta = i - \alpha$ die Homomorphiebedingung für jede Operation ω_n des Operationensystems von G erfüllt. Dazu seien die Elemente x_1,...,x_n beliebig aus dem Multioperatorring G und ω_n eine beliebige Operation aus dessen Operationensystem Ω. Dann gilt:

$$(x_1(i-\alpha))...(x_n(i-\alpha))\omega_n =$$

mit der Definition der Addition von Endomorphismen

$$= (x_1 - x_1\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n =$$

mit dem Distributivgesetz

$$= x_1(x_2 - x_2\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n - (x_1\alpha)(x_2 - x_2\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n =$$

und nochmals

$$= x_1x_2(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n + x_1(-x_2\alpha)(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n -$$

$$-(x_1\alpha)x_2(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n - (x_1\alpha)(-x_2\alpha)(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n =$$

mit den Vorzeichenregeln (1.7) und (1.8) aus 1.1.3

$$= x_1x_2(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n - x_1(x_2\alpha)(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n -$$

$$-(x_1\alpha)x_2(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n + (x_1\alpha)(x_2\alpha)(x_3 - x_3\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n = (*)$$

Nach zweimaligen Anwenden des Distributivgesetzes liegen somit 4 Summanden vor, von denen zwei negatives Vorzeichen besitzen. Bei erneuter Benutzung der Distributivität ergibt sich insgesamt:

$$(*) = x_1x_2x_3(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n - x_1x_2(x_3\alpha)(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n$$

$$-x_1(x_2\alpha)x_3(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n + x_1(x_2\alpha)(x_3\alpha)(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n$$

$$-(x_1\alpha)x_2x_3(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n + (x_1\alpha)x_2(x_3\alpha)(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n$$

$$+(x_1\alpha)(x_2\alpha)x_3(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n - (x_1\alpha)(x_2\alpha)(x_3\alpha)(x_4 - x_4\alpha)...(x_n - x_n\alpha)\omega_n =$$

Wir erhalten acht Summanden, von den 4 negatives Vorzeichen besitzen. Wenden wir das Distributivgesetz immer wieder an, ergibt sich am Ende eine Darstellung der Form:

$$= x_1x_2...x_n\omega_n - x_1x_2...x_{n-1}(x_n\alpha)\omega_n - x_1x_2...x_{n-2}(x_{n-1}\alpha)x_n\omega_n - ...$$

$$... \pm (x_1\alpha)(x_2\alpha)...(x_n\alpha)\omega_n = (**)$$

wobei für ein geradzahliges n der letzte Summand positives Vorzeichen besitzt.
Insgesamt ergeben sich 2^n Summanden, von denen genau die Hälfte positives Vorzeichen besitzen. Außer im ersten Summanden treten in jedem endomorphe Bilder der Elemente x_1,...,x_n auf.

Da α normaler Endomorphismus ist, können wir ihn ausheben und bekommen

$$(**) = x_1x_2...x_n\omega_n - (x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha + (x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha - ... \pm (x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha =$$

fassen wir die Summanden mit gleichem Vorzeichen zusammen

$$= x_1x_2...x_n\omega_n - (2^{n-1}-1)(x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha + (2^{n-1}-1)(x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha \pm (x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha =$$

wobei der letzte Summand jetzt immer mit negativem Vorzeichen auftritt (die Anzahl der Summanden mit positivem bzw. negativem Vorzeichen ist gleich), so dass

$$= x_1x_2...x_n\omega_n - (x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha - (2^{n-1} - 1)(x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha + (2^{n-1} - 1)(x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha =$$

und damit

$$= x_1x_2...x_n\omega_n - (x_1x_2...x_n\omega_n)\alpha =$$

mit der Definition der Addition von Endomorphismen

$$= (x_1x_2...x_n\omega_n)(i - \alpha)$$

Folglich ist das Komplement von α Endomorphismus in G. Der Beweis ist erbracht.

Damit ist die komplementäre Abbildung eines normalen Endomorphismus selbst Endomorphismus. Wir können sogar zeigen:

Satz 3 (Higgins)
Der komplementäre Endomorphismus eines normalen Endomorphismus ist selbst normal.

Beweis: Es sei G ein Multioperatorring, α einer seiner normalen Endomorphismen, i die identische Abbildung und $\beta = i - \alpha$ der komplementäre Endomorphismus von α. Da ein Ω-Ring einen Modul als Trägerstruktur besitzt, können wir β in der Form $\beta = i - \alpha$ schreiben.
Dann gilt für jede Operation ω_n des Operationensystems Ω und beliebige b,g_1,...,g_n aus G:

$$g_1...g_{i-1}(h\beta)g_{i+1}...g_n\omega_n = g_1...g_{i-1}(hi + (-h\alpha)g_{i+1}...g_n\omega_n = g_1...g_{i-1}(h - h\alpha)g_{i+1}...g_n\omega_n =$$

$$= g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n - g_1...g_{i-1}(h\alpha)g_{i+1}...g_n\omega_n =$$

und da α normaler Endomorphismus ist

$$= (g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n)i - (g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n)\alpha =$$

$$= (g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n)(i - \alpha) - (g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n)\beta$$

womit auch der komplementäre Endomorphismus β die geforderten Bedingungen erfüllt. β ist normaler Endomorphismus. Der Satz ist bewiesen.

Liegt nun ein normaler Endomorphismus α und dessen Komplement β vor, so ist deren Summe der identische Automorphismus i. Obwohl Satz 2, 1.5.1, im allgemeinen nicht umkehrbar ist, können wir für komplementäre normale Endomorphismen zeigen:

Satz 4 (Higgins)
Ist α ein normaler Endomorphismus eines Multioperatorrings und β das zugehörige Komplement, so gilt

$$[G\alpha, G\beta] = (0)$$

d.h. also

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha = i \qquad \text{und} \qquad \beta = i - \alpha = -\alpha + i$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für beliebige h,g_1,...g_n aus G immer

$$(g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)(h\beta)(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n$$

gleich dem Nullelement ist. Dafür gilt

$$(g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)(h\beta)(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n =$$

da β normaler Endomorphismus ist

$$= ((g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)h(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n)\beta =$$

und mit $\beta = i - \alpha$

$$= ((g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)h(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n)i - ((g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)h(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n)\alpha =$$

und da auch α normaler Endomorphismus ist

$$= (g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n)\alpha - (g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)(h\alpha)(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n\alpha =$$

und mit der Homomorphiebedingung

$$= 0$$

Der Satz ist bewiesen.

Betrachten wir als Beispiel die Endomorphismen des Restklassenrings $\mathbb{Z}_6$, welche auf Seite 64 in einer Tabelle zusammengefasst sind. Auf Grund der Bemerkungen zu Beginn dieses Abschnitts wissen wir, dass diese vier Endomorphismen normal sind.
Dabei ist α_2 komplementärer Endomorphismus von α_3 und umgekehrt. Der komplementäre Endomorphismus des identischen Automorphismus ist offenbar der Nullendomorphismus und wieder umgekehrt.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Endomorphismen ist die Idempotenz. Einen Endomorphismus nennen wir genau dann **idempotent**, wenn für alle Elemente a des Multioperatorrings G

$$a\alpha^2 = a\alpha$$

gilt. Sowohl der Nullendomorphismus als auch der identische Automorphismus sind idempotent. Es gilt:

Satz 5
Die Nacheinanderausführung zweier komplementärer idempotenter Endomorphismen fällt mit dem Nullendomorphismus zusammen.

Beweis: Sei a ein beliebiges Element eines Multioperatorrings G und α, β ein Paar komplementärer idempotenter Endomorphismen. Dann wird

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta = (a\alpha)(i - \alpha) = a(\alpha(i - \alpha)) = a(\alpha - \alpha^2) =$$

und da α idempotent ist

$$= ao = o$$

wobei also jedes Element auf das Nullelement abgebildet wird. Der Beweis ist erbracht.

Abschließend bemerken wir noch, dass wir sehen werden, dass jede direkte Summe von Multioperatorringen unmittelbar mit einem Paar komplementärer idempotenter und normaler Endomorphismen verbunden ist.

1.5.4 Zentrale Endomorphismen

Einen Endomorphismus eines Multioperatorrings nennen wir **zentral**, wenn er den Ω-Ring in sein Zentrum abbildet.
Damit ist der Nullendomorphismus selbst bei zentrumslosen Multioperatorringen zentraler Endomorphismus.
Automorphismen können dann und nur dann zentral sein, wenn der ganze Multioperatorring Zentrum ist, d.h., der betrachtete Ω-Ring muss abelsch sein.

Ein nichttriviales Beispiel ist der Quasiendomorphismen-Ω-Ring des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$. Wie bemerkt, existiert in ihm ein nichttriviales Ideal (a_{10}), welches Zentrum ist. Außerdem ist der Kommutant G' echtes Ideal und es gilt:

$$Q/G' \cong (a_{10})$$

Damit gibt es in Q einen Endomorphismus a_z, welcher Q auf sein Zentrum abbildet. Dieser Endomorphismus ist nach Definition zentral.

Liegt ein zentraler Endomorphismus $a\alpha$ in einem Multioperatorring G vor, so muss das endomorphe Bild $G\alpha$ Ω-Unterring (nach Satz 4, 1.3.4, auch Ideal) des Zentrums sein. Da das Zentrum abelsch ist, muss es damit auch $G\alpha$ sein.
Setzen wir vorerst ein nichtleeres Operationensystem Ω des Multioperatorrings G voraus, bildet $G\alpha$ einen Ω-Zeroring.
Ist der Multioperatorring G selbst abelsch, d.h. entweder Modul oder Ω-Zerroring (Satz 1, 1.3.4). so sind folglich alle seine Endomorphismen zentral.
Weiterhin erhalten wir mit dem Homomorphiesatz:

Satz 1
Ein Multioperatorring kann dann und nur dann vom Nullendomorphismus verschiedene zentrale Endomorphismen besitzen, wenn er selbst oder einer seiner nichttrivialen Ω-Faktorringe abelsch ist.
Ist das Operationensystem Ω nicht leer, so muss der Ω-Ring selbst oder einer seiner Ω-Faktorringe einen Ω-Zeroring darstellen.

Es ist aber zu beachten, dass Satz 1 kein hinreichendes und notwendiges Kriterium ist, da nur davon gesprochen wird, dass dann zentrale Endomorphismen existieren können, aber nicht müssen.
Zentrale Endomorphismen sind mit normalen Endomorphismen verbunden.

Satz 2 (Higgins)
Jeder zentrale Endomorphismus eines Multioperatorrings ist normal.

Beweis: Seien die Element h, g_i, $i = 1,...,n$, beliebig aus dem Multioperatorring G, ω_n eine beliebige Operation des Operationensystems und α der betrachtete zentrale Endomorphismus. Dann gilt:

$$(g_1...g_{i-1}hg_{i+1}...g_n\omega_n)\alpha = (_g1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)(h\alpha)(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n = 0$$

da alle $g_i\alpha$ sowie das Element $h\alpha$ Element des Zentrums sind und dieses Ω-Zeroring ist. Andererseits erhalten wir auch

$$g_1...g_{i-1}(h\alpha)g_{i+1}...g_n\omega_n = 0$$

da $h\alpha$ im Zentrum liegt und nach Satz 6, 1.3.4, jedes n-äre Produkt eines Elementes des Zentrums mit anderen Elementen des Ω-Rings gleich Null ist. Der Beweis ist erbracht.

Eine Umkehrung des Satzes ist nicht möglich, da z.B. der Restklassenring Z_6 nichttriviale normale Endomorphismen, aber nur den Nullendomorphismus als zentralen Endomorphismus besitzt. Ohne weiter darauf einzugehen, sei erwähnt, dass P.J. Higgins in [3] zeigt:

Satz 3
Ein normaler Endomorphismus α eines Multioperatorrings G ist dann und nur dann zentral, wenn

$$[G\alpha, G] = (0)$$

gilt.

Für uns ist ein Zusammenhang zwischen komplementären normalen Endomorphismen und zentralen interessant.

Satz 4 (Higgins)
Sind α, β komplementäre normale Endomorphismen eines Multioperatorrings, so ist deren Nacheinanderausführung

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

zentral.

Beweis: Offenbar wird

$$\alpha\beta = \alpha(i - \alpha) = \alpha - \alpha^2 = (i - \alpha)\alpha = \beta\alpha$$

womit die Nacheinanderausführung beider komplementärer Endomorphismen kommutativ ist. Für die zweite Aussage verwenden wir Satz 4, 1.5.3. Nach ihm gilt

$$[G\alpha, G\beta] = (0)$$

Da wir aber auf Grund der Tatsache, dass α und β normale Endomorphismen sind

$$[G\alpha\beta, G] = [G\alpha, G]\beta = [G\alpha, G\beta] = (0)$$

erhalten, ist die Nacheinanderausführung nach Satz 3 zentraler Endomorphismus. Der Beweis ist erbracht.

Für den Restklassenring $\mathbb{Z}_6$ erkennen wir, dass die Nacheinanderausführung der komplementären Endomorphismen α_2 und α_3 gleich dem Nullendomorphismus ist. Die Ursache liegt in der Idempotenz beider Endomorphismen und dem Satz 5, 1.5.3.

1.5.5 Das Radikal eines Endomorphismus

Liegt ein beliebiger Multioperatorring G und einer seiner Endomorphismen α vor, so ist die Menge aller Elemente dieses Ω-Rings, welcher bei wiederholter Anwendung des Endomorphismus α einmal auf das Nullelement abgebildet werden, charakteristisch für den Endomorphismus α. Wir sagen:

Definition

Die Menge R aller Elemente g einer Multioperatorrings G, für welche eine natürliche Zahl $n(g)$ mit

$$g\alpha^{n(g)} = 0 \tag{1.79}$$

existiert, heißt das **Radikal des Endomorphismus** α von G.

Das Radikal R ist immer Ideal des Multioperatorrings G, da für alle Elemente $g_i \in G$ und $r \in R$ mit $r\alpha^k = 0$, für alle $i = 1,...,n$, und Operationen ω_n des Operationensystems Ω, dann

$$(g_1...g_{i-1}rg_{i+1}...g_n\omega_n)\alpha^k = (g_1\alpha^k)...(g_{i-1}\alpha^k)(r\alpha^k)(g_{i+1}\alpha^k)...(g_n\alpha^k)\omega_n =$$

$$= (g_1\alpha^k)...(g_{i-1}\alpha^k)0(g_{i+1}\alpha^k)...(g_n\alpha^k)\omega_n = 0$$

gilt.
Ist der Endomorphismus α sogar Isomorphismus, so ist sein Radikal R gleich dem Nullideal. Das Radikal des Nullendomorphismus ist der ganze Multioperatorring. Für idempotente Endomorphismen gilt:

Satz 1
Für einen idempotenten Endomorphismus eines Multioperatorrings fallen Radikal und Kern zusammen.

Zum Beweis überlege man sich, dass ein idempotenter Endomorphismus α für sein endomorphes Bild $G\alpha$ identischer Automorphismus ist.

Da das Radikal selbst Multioperatorring ist, kann es auch Ideale besitzen. Deshalb nennen wir ein Ideal eines Multioperatorrings G genau dann **R-Ideal** bezüglich eines Endomorphismus α von G, wenn für alle Elemente a dieses Ideals A eine natürliche Zahln $n(a)$ existiert, so dass

$$a\alpha^{n(a)} = 0$$

gilt. Offenbar ist das Radikal R gerade das mengentheoretisch "größte" R-Ideal eines Multioperatorrings G.
Außerdem ist dann jedes homomorphe Bild eines Multioperatorrings, welcher selbst R-Ideal ist, auch R-Ideal. Ist z.B. der Ω-Faktorring G/A homomorphes Bild des R-Ideals G, so werden die Klassen aus G/A durch Elemente von G repräsentiert, welche bei Anwendung des zugehörigen Endomorphismus einmal auf das Nullelement abgebildet werden.
Damit muss aber jede Klasse aus G/A bei wiederholter Anwendung des Endomorphismus einmal auf die durch das Nullelement bestimmte Klasse abgebildet werden. G/A ist als Ω-Ring selbst R-Ideal.

In jedem Multioperatorring G existieren zumindest die trivialen Radikale für den Nullendomorphismus, $R_0 = G$, und für den identischen Automorphismus, $R_i = (0)$. Weiterhin ist das Radikal bezüglich von G/R das Nullideal, so dass wir eine Radikaleigenschaft im Sinne von Amitsur-Kuros vorliegen haben.
Dieser Begriff wird für die Struktur der Ringe in [19] Szasz, F., Seite 16, eingeführt. Das für uns notwendige Übertragen auf Multioperatorgruppen bzw. ringe geschah durch Raduchin in [22].
Damit können wir aus [19] ohne Beweise einige Eigenschaften übernehmen:

Satz 2
In einem Multioperatorring G gilt für das Radikal bzw. die R-Ideale eines Endomorphismus:

1. Das Radikal ist invariant für jeden weiteren Endomorphismus β von G, d.h.

$$R\beta \subseteq R \tag{1.80}$$

2. Die Vereinigung einer aufsteigenden Kette von R-Idealen bezüglich des Endomorphismus α ist selbst R-Ideal.

3. Die Summe zweier R-Ideale ist R-Ideal bezüglich α.

4. Sind A, B und C Ideale eines Multioperatorrings und das Radikal R für den Ω-Faktorring A/B gleich dem Nullideal, so ist das Radikal R des betrachteten Endomorphismus γ in $(A \cap C)/(B \cap C)$ ebenfalls das Nullideal.

Für einen idempotenten Endomorphismus erhalten wir damit:

Satz 3
Ist α ein idempotenter Endomorphismus eines Multioperatorrings G und K der zugehörige Kern, so ist α für G/K Isomorphismus.

Beweis: Nach Satz 1 fallen für den Endomorphismus α der Kern und sein Radikal zusammen. da die betrachtete Eigenschaft eine Radikaleigenschaft im Sinne von Amitsur-Kuros ist, muss das Radikal von α im Ω-Faktorring $G/R = G/K$ das Nullideal sein. α ist damit Isomorphismus für G/K. Der Beweis ist erbracht.

Bilden wir das Radikal bezüglich eines zentralen Endomorphismus γ eines Ω-Rings G, so erhalten wir:
Ist Z das Zentrum von G und R das Radikal von γ, so ist γ dann für G/R Isomorphismus. Mit der 4.Aussage von Satz 2 ist der Endomorphismus γ aber auch Isomorphismus für die Ω-Faktorringe

$$Z/(R \cap Z); \qquad G\gamma/(R \cap G\gamma); \quad \text{usw.}$$

Weiterhin bilden die $G\gamma^i$, $i = 1,...$, eine absteigende Kette von Ω-Unterringen, ja sogar Idealen; da jeder Ω-Unterring eines Zentrums Ideal ist; in dem Multioperatorring G, d.h.

$$G = G_0 \supset Z \supset G\gamma \supset G\gamma^2 \supset ... \supset G\gamma^i \supset ...$$

Die entsprechenden Kerne bezüglich der Endomorphismen γ^i

$$K\gamma^i := K_i$$

bilden dann ein aufsteigende Kette von Idealen

$$(0) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_i \subset ...$$

Die Vereinigung dieser Kerne ergibt dann das Radikal des Endomorphismus γ. Es gilt:

Satz 4
Ist R das Radikal eines zentralen Endomorphismus γ eines Multioperatorrings G, so ist

$$R\gamma = G\gamma \cap R \subseteq R \tag{1.81}$$

Beweis: Da das Radikal R in dem Multioperatorring G enthalten ist und nach 1. von Satz 2 auch $R\gamma \subseteq R$ gilt, wird

$$R\gamma \subseteq G\gamma \cap R$$

Umgekehrt sei $g\gamma$ ein beliebiges Element des Durchschnitts $G\gamma \cap R$. Dann existiert eine natürliche Zahl n mit

$$(g\gamma)\gamma^n = 0 \qquad \text{d.h, also} \qquad g\gamma^{n+1} = 0$$

womit das Element g auch im Radikal liegt. Damit muss das endomorphe Bild $g\gamma$ in $R\gamma$ enthalten sein, d.h.

$$G\gamma \cap R \subseteq R\gamma$$

und mit oben das Geforderte. Der Satz ist bewiesen.

Allgemein folgt durch vollständige Induktion

$$G\gamma^i \cap R = R\gamma^i \tag{1.82}$$

für alle $i = 1$,.... Liegt nun ein Endomorphismus γ in einem Multioperatorring G vor, so folgt aus dem Letzten:

Satz 5
Existiert in einem Multioperatorring G ein Ideal A, welches zu dem Radikal R eines zentralen Endomorphismus γ bis auf das Nullelement disjunkt ist, so ist der Endomorphismus γ für A Isomorphismus.

Zum Nachweis überlege man sich, dass der Kern von γ im Radikal enthalten ist.
Für komplementäre normale Endomorphismen kann eine besondere Aussage getroffen werden:

Satz 6
Sind α und β komplementäre normale Endomorphismen eines Multioperatorrings G und der Endomorphismus $\gamma = \alpha\beta$ deren Nacheinanderausführung, wobei R_α, R_β und R_γ die Radikale der Endomorphismen α, β und γ sind, so ist R_γ die Summe der Radikale R_α und R_β.
Die Radikale R_α und R_β sind bis auf das Nullelement disjunkt und α ist Automorphismus von R_β, β von R_α.

Beweis: Sei b ein beliebiges Element des Radikals R_β. Dann existiert auf Grund der Definition des Radikals eine natürliche Zahl n mit

$$b\beta^n = 0$$

Da nach Satz 4, 1.5.4, die Nacheinanderausführung der beiden komplementären Endomorphismen α und β kommutativ ist, wird für jedes Element $b\alpha$:

$$(b\alpha)\beta^n = (b\beta^n)\alpha = 0\alpha = 0$$

womit auch $b\alpha$ im Radikal R_β enthalten ist. Wird nun $b\alpha$ zum Nullelement, so muss gelten:

$$0 = b\beta^n = b\beta^{n-1} = ... = b\beta^2 = b\beta = b$$

Der Kern des Endomorphismus α ist in dem Radikal R_β damit das Nullideal. α bildet des Radikal R_β folglich isomorph in sich selbst ab. Damit nun α sogar Automorphismus ist, muss für jedes Element b aus R_β, mit

$$b\beta^n = 0$$

ein Urbild b' bezüglich des Isomorphismus α in R_β existieren. Der Nachweis erfolgt mittels Induktion nach n.

Ist $b\beta = 0$ und somit $b = b\alpha$, setzen wir $b = b'$. Angenommen für $n-1$, $n > 1$, wäre die Behauptung schon gezeigt, dann wird für n:

$$(b\beta)\beta^{n-1} = 0 \qquad \text{und damit} \qquad b\beta \in R$$

Nach Voraussetzung gibt es dann in R_β ein Element b'', welches bezüglich α ein Urbild von $b\beta$ ist, d.h.

$$b\beta = b''\alpha$$

Setzen wir für das Gesuchte $b' = b + b''$, so ist b' in dem Radikal R_β enthalten und es wird

$$b'\alpha = (b + b'')\alpha = b\alpha + b''\alpha = b\alpha + b\beta = b(\alpha + \beta) = bi = b$$

womit b' das gesuchte Element ist und α einen Automorphismus des Radikals R_β darstellt. Ebenso zeigt man, dass β Automorphismus des Radikals R_α ist.

Wenden wir uns der Summe zu. Ein Element a aus dem Radikal R_α ist sicher auch in R_γ enthalten, da aus $a\alpha^n = 0$ auch

$$a\gamma^n = a\alpha^n\beta^n = 0$$

folgt. D.h., es ist das Radikal R_α in dem Radikal R_γ enthalten. Analog zeigt man dies für das Radikal R_β, so dass insgesamt gilt

$$R_\alpha + R_\beta \subseteq R_\gamma$$

Umgekehrt sei c ein Element von R_γ und beliebig. Damit existiert wieder eine natürliche Zahl n, so dass

$$c\gamma^n = c\alpha^n\beta^n = 0$$

gilt. Damm ist $c\alpha^n$ im Radikal R_β und $c\beta^n$ in R_α enthalten. Da, wie gezeigt, α^n Automorphismus von R_β ist, existiert im Radikal von β ein Element b mit $c\alpha^n = b\alpha^n$. Damit wird

$$(c - b)\alpha^n = 0$$

womit $(c - b)$ Element von R_α ist. D.h., ist ein Element der Radikalsumme $R_\alpha + R_\beta$,

$$R_\gamma \subseteq R_\alpha + R_\beta$$

Damit gilt das Gesuchte. Da nun α^n Automorphismus von R_β für alle natürlichen Zahlen ist, können die Radikale R_α und R_β nur das Nullelement gemeinsam haben. Der Satz ist bewiesen.

Wie wir später noch sehen werden, wurde damit gezeigt, dass das Radikal R_γ gerade die direkte Summe der Radikale R_α und R_β ist.

1.5.6 Anwendungen und Beispiele

In diesem Abschnitt soll das bisher Gezeigte auf die besonderen Strukturen der Quasiendomorphismen-Ω-Ringe angewendet werden.
Wie in 1.5.2 gezeigt, können in diesen Multioperatorringen nichttriviale Zentren auftreten, was diese Strukturen für Untersuchungen anbietet.

Wenden wir uns dem Quasiendomorphismenring des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$ zu. Dessen multiplikative Strukturtafel ist auf Seite 64 enthalten, die additive Strukturtafel im folgenden:

Additionstafel des Quasiendomorphismenrings des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
o	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
i	i	α_1	α_2	o	α_4	α_5	α_6	α_3	α_8	α_9	α_{10}	α_7	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{11}
α_1	α_1	α_2	o	i	α_5	α_6	α_3	α_4	α_9	α_{10}	α_7	α_8	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_{12}
α_2	α_2	o	i	α_1	α_6	α_3	α_4	α_5	α_{10}	α_7	α_8	α_9	α_{14}	α_{11}	α_{12}	α_{13}
α_3	α_3	α_4	α_5	α_6	α_1	α_2	o	i	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_9	α_{10}	α_7	α_8
α_4	α_4	α_5	α_6	α_3	α_2	o	i	α_1	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_{10}	α_7	α_8	α_9
α_5	α_5	α_6	α_3	α_4	o	i	α_1	α_2	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_{12}	α_7	α_8	α_9	α_{10}
α_6	α_6	α_3	α_4	α_5	i	α_1	α_2	o	α_{14}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_8	α_9	α_{10}	α_7
α_7	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_1	α_2	o	i	α_5	α_6	α_3	α_4
α_8	α_8	α_9	α_{10}	α_7	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_2	o	i	α_1	α_6	α_3	α_4	α_5
α_9	α_9	α_{10}	α_7	α_8	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_{12}	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_{10}	α_{10}	α_7	α_8	α_9	α_{14}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	i	α_1	α_2	o	α_4	α_5	α_6	α_3
α_{11}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_9	α_{10}	α_7	α_8	α_5	α_6	α_3	α_4	o	i	α_1	α_2
α_{12}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_{10}	α_7	α_8	α_9	α_6	α_3	α_4	α_5	i	α_1	α_2	o
α_{13}	α_{13}	α_{14}	α_{11}	α_{12}	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_3	α_4	α_5	α_6	α_1	α_2	o	i
α_{14}	α_{14}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_8	α_9	α_{10}	α_7	α_4	α_5	α_6	α_3	α_2	o	i	α_1

Anmerkung: Die Menge aller Quasiendomorphismen von Q_4 bildet mit der Addition eine abelsche Gruppe der Ordnung 16. Damit ist $(Q,+)$ eine p-Gruppe und damit als direkte Summe zuyklischer Gruppen darstellbar.
Da $(Q,+)$ selbst nicht zyklisch ist, wird diese Darstellung echt. Es gilt

$$(Q,+) = (i)_+ \oplus (a_4)_+ \oplus (a_8)_+$$

Dabei stellt $(i)_+$ die Endomorphismengruppe der zyklischen Gruppe der Ordnung 4 dar.

Wie schon erwähnt, erzeugt der Quasiendomorphismus α_{10} in Q_4 (in Zukunft bezeichnen wir mit Q_n den Quasiendomorphismenring des Restklassenrings Z_n) ein echtes Ideal, das Zentrum von Q_4. Dieses Zentrum enthält außer α_{10} nur noch den Nullendomorphismus und in Übereinstimmung mit Satz 6, 1.3.4, gilt für jeden weiteren Quasiendomorphismus α_i aus Q_4

$$\alpha_{10} \cdot \alpha_i = \alpha_i \cdot \alpha_{10} = o$$

Um nun alle Ideale von Q_4 zu bestimmen, betrachten wir zuerst alle von einem Element erzeugten Ideale, die Hauptideale.

Das von dem Nullendomorphismus erzeugte Ideal ist natürlich das Nullideal von Q_4. Der identische Automorphismus, als einziger vom Nullendomorphismus verschiedener Endomorphismus (nicht Quasiendomorphismus) von Q_4 stellt das erzeugende Element von ganz Q_4 dar, d.h.

$$(i) = Q_4$$

Der Quasiendomorphismus α_1 ist zu sich selbst entgegengesetzt, so dass $(\alpha_1)_+$ Normalteiler der additiven Gruppe von Q_4 ist. Da nun die Multiplikation von α_1 mit irgendeinem anderen Element nur α_1 oder o ergibt, besitzt das von α_1 erzeugte Ideal nur zwei Elemente α_1 und o. (α_1) ist echtes Ideal von Q_4.
Ebenfalls Ideale mit nur zwei Elementen werden von den Quasiendomorphismen α_{11} und α_{13} erzeugt. Dreielementige Ideale werden von α_8, α_4, α_6 gebildet.
Die Quasiendomorphismen α_3, α_5, α_7 und α_9 erzeugen jeweils ein echtes Ideal, welches mit dem Kommutanten G' von Q_4 zusammenfällt. Die noch verbleibenden Elemente α_2, α_{12} und α_{14} sind erzeugende Elemente von ganz Q_r.

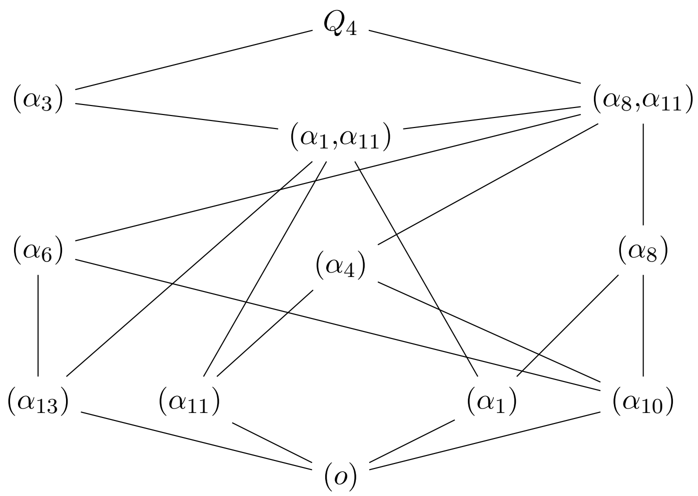
Damit und mit den Summen der Ideale sind alle möglichen Ideale beschrieben:

$$Q_4 = (i) = (\alpha_2) = (\alpha_{12}) = (\alpha_{14}) = \{o,i,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\ldots,\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14}\}$$
$$(\alpha_3) = (\alpha_5) = (\alpha_7) = (\alpha_9) = \{o,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_7,\alpha_9,\alpha_{11},\alpha_{13}\}$$
$$(\alpha_8) = \{o,\alpha_1,\alpha_8,\alpha_{10}\}; \qquad (\alpha_4) = \{o,\alpha_4,\alpha_{10},\alpha_{11}\}; \qquad (\alpha_6) = \{o,\alpha_6,\alpha_{10},\alpha_{13}\}$$
$$(\alpha_1) = \{o,\alpha_1\}; \qquad (\alpha_{11}) = \{o,\alpha_{11}\}; \qquad (\alpha_{13}) = \{o,\alpha_{13}\}; \qquad (\alpha_{10}) = \{o,\alpha_{10}\}$$
$$(o) = \{o\}$$

und deren Summen

$$(\alpha_3) + (\alpha_{10}) = Q_4$$
$$(\alpha_8) + (\alpha_{11}) = (\alpha_4) + (\alpha_{13}) = (\alpha_5) + (\alpha_{11}) = \{o,\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_8,\alpha_{10},\alpha_{11},\alpha_{13}\}$$
$$(\alpha_1) + (\alpha_{11}) = (\alpha_1, \alpha_1 1) = \{o,\alpha_1,\alpha_{11},\alpha_{13}\}$$

womit insgesamt 10 echte Ideale in Q_4 existieren. Die übrigen Summen wurden nicht notiert, da sie nichts wesentlich Neues bringen.
Zeichnet man ein Idealdiagramm des mengentheoretischen Enthaltenseins, so nimmt es folgende Form an:



Später werden wir aus derartigen Diagrammen Schlüsse auf existierende direkte Summen ziehen.
Für uns ist vorerst interessant, dass offenbar

$$Q_4 = (\alpha_3) + (\alpha_{10}) \qquad \text{und} \qquad (\alpha_3) \cap (\alpha_{10}) = (0)$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$Q_4/(\alpha_3) = Q_4/G' = (\alpha_{10}) = Z \qquad \text{bzw.} \qquad Q_4/(\alpha_{10}) = Q_4/Z = (\alpha_3) = G'$$

Folglich existiert in dem Quasiendomorphismenring Q_4 ein nichttrivialer zentraler Endomorphismus, welcher als Kern den Kommutanten $G' = (\alpha_3)$ besitzt. Diesen Endomorphismus bezeichneb wir mit β_1.
Nach Satz 2, 1.5.4, ist dieser Endomorphismus normal und besitzt nach Satz 3, 1.5.3, einen komplementären normalen Endomorphismus β_2. Dieser ist hier durch den Kern $K = Z$ gekennzeichnet. Sein endomorphes Bild ist nach oben also der Kommutant. Sowohl β_1 als auch β_2 sind idempotent. Damit sind deren Radikale gerade durch die Kerne gegeben.

Wie man sieht ist (α_{10}) als Zentrum Ω-Zeroring. Wie schon erwähnt, kann ein Multioperatorring dann und nur dann ein Zentrum verschieden vom Nullideal besitzen, wenn er selbst oder einer seiner nichttrivialen Ω-Faktorringe Ω-Zeroring ist. Außerdem kann ein Multioperatorring nur ein echtes

Zentrum besitzen, wenn mindestens einer seiner Ω-Unterringe Ω-Zeroring ist. Diese Kriterium ist aber nicht in der Hinsicht gültig, dass wenn ein Zentrum verschieden vom Nullideal existiert, dieses das mengentheoretische größte Ideal sein muss, welches in dem Multioperatorring Ω-Zeroring ist.
Denn betrachten wir das Ideal (α_8, α_{11}) in Q_4, so ist dies selbst Ω-Zeroring, aber nicht das Zentrum von Q_4, d.h. also:

Satz 1
Besitzt ein Multioperatorring G ein Zentrum Z und ein echtes Ideal A, welches das Zentrum umfasst, so muss das Zentrum Z_a des Ω-Rings A nicht mit Z übereinstimmen.

Desweiteren existieren in dem Quasienodmorphismenring Q_4 Ω-Unterringe, welche kein Ideal sind. Beispiele sind dafür die Ω-Unterringe

$$(\alpha_8) = \{o,\alpha_8\} \qquad \text{und} \qquad (\alpha_4) = \{o,\alpha_4\}$$

Beide Ω-Unterring sind in dem Ideal (α_8,α_{11}) enthalten, und damit auch dort Unterstruktur. Da (α_8,α_{11}) aber Ω-Zeroring ist, sind beide Ω-Unterringe Ideal, so dass wir sagen können:

Satz 2
Ist A ein Ideal eines Multioperatorrings G und B ein Ω-Unterring von G, welcher in A Ideal ist, so muss B nicht notwendig Ideal in G sein.

Nachdem wir die direkten Summen eingeführt haben, werden wir auch ein Kriterium formulieren können, wann B dann Ideal von G ist.

Die sich noch erhebende Frage nach der Anzahl der Elemente eines Quasiendomorphismenrings ist mit der Frage nach dem Zusammenhang zwischen Ausgangsmultioperatorring und zugehörigen Quasiendomorphismen-Ω-Ring verbunden. Diese Frage konnte aber bisher noch nicht gelöst werden.
Ebenso ist das Problem offen, wann ein Quasiendomorphismen-Ω-Ring ein echtes Zentrum besitzt.
Für die Restklassenringe konnte nur eine Vermutung gewonnen werden, welche bis $n = 49$ überprüft wurde:

Vermutung
Ein Quasiendomorphismenring Q_n eines Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$ besitzt dann und nur dann ein echtes Zentrum, wenn n Primzahlpotenz p^i, $i \geq 2$, ist.
Ist $i = 2$, so besitzt das Zentrum die Ordnung p^{p-1}.

Der Quasiendomorphismenring des Restklassenrings $\mathbb{Z}_{25}$ würde damit ein Zentrum der Ordnung 625 besitzen.

Zum Abschluss des Abschnitts betrachten wir noch Quasiendomorphismenring des Restklassenrings Z_0, also den Ring der ganzen Zahlen.
Im Ring der ganzen Zahlen existieren nur die beiden trivialen Endomorphismen, der Nullendomorphismus und der identische Automorphismus. Erzeugen wir mit diesen Endomorphismen additiv Quasiendomporphismen, so erhalten wir:

	o	i	$2i$	$3i$	$4i$	$5i$	$6i$	$7i$	$8i$	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	
⋮										

D.h., wir erhalten alle Endomorphismen der additiven Struktur der ganzen Zahlen. Erzeugen wir Quasiendomorphismen multiplikativ, ergeben sich

	i	i^2	i^3	i^4	i^5	...
0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	
2	2	4	8	16	32	
3	3	9	27	81	243	
$\vdots$						

Fassen wir beides zusammen, lässt sich jeder Quasiendomorphismus in der Form

$$\alpha = a_i i^n + a_{n-1} i^{n-1} + ... + a_2 i^2 + a_1 i$$

darstellen, wobei die a_i, $i = 1,...,n$ alle ganzen Zahlen sind. Da offenbar jedes Tupel $(a_1,a_2,...,a_n)$ eindeutig einen Quasiendomorphismus bestimmt, gilt:

Satz 3
Der Quasiendomorphismenring des Ringes der ganzen Zahlen ist isomorph zu dem Polynomring aller Polynome über den ganzen Zahlen, deren Absolutglied gleich Null ist.

Mit dieser Aussage schließen wir das Kapitel der Endomorphismen ab und wenden uns wieder allgemein Multioperatorringen zu.

1.6 Die primitive Klasse der Multioperatorringe

1.6.1 Klassifizierung der Multioperatorringe

Es sei eine gewisse nichtleere Menge X, welche wir **Alphabet** nennen, gegeben. Das Alphabet X enthalte abzählbar viele Elemente x_1,x_2,..., welche wir **freie Elemente** nennen. Weiterhin nehmen wir in X noch ein Zeichen 0 auf, welches wir **nulläres Operationssymbol** nennen.
Nun sei ein Operationensystem Ω der folgenden Form gegeben:

1. Ω enthalte eine binäre Operation "+".

2. Ω enthalte eine unäre Operation "-".

3. Ω enthalte eine nulläre Operation "ω_0".

4. Ω enthalte ein fest(!) gewähltes, aber hier nicht explizit angegebenes, System Ω_n n-ärer algebraischer Operation ω_n, $n \geq 2$. (Später beschreiben wir dieses System genauer)

Mit diesem Operationensystem definieren wir nun den Begriff des **Wortes**.
Jedes freie Element sowie das Operationssymbol 0 seien Wörter. Sind w_1 und w_2 schon bestimmte Wörter, so seien

$$w_1 + w_2 \qquad \text{und} \qquad - w_1 \quad ; \quad -w_2$$

Wörter. Unter der Anwendung der nullären Operation "ω_0" auf ein beliebiges Wort w_1 verstehe man die Bestimmung des nullären Operationssymbols 0, d.h., es ist

$$w_1\omega_0 = 0$$

für jedes Wort w_1.
Ist nun ω_n eine n-äre Operation aus dem unter 4. bestimmten System Ω_n von Operationen und sind die w_1,...,w_n schon bestimmte Wörter, so sei auch

$$w_1w_2...w_n\omega_n$$

ein Wort. Zeichenketten aus Elemente des Alphabets und den Operationen, welche nicht auf diese Weise erhalten werden können, seien keine Wörter. Damit ist zum Beispiel

$$(w_1 + w_2)w_3w_2\omega_3 0 w_6\omega_3$$

für eine ternäre Operation ω_3 ein Wort über dem Alphabet X.
Weiterhin nennen wir jedes Wort w_1, welches in einem anderen Wort w_1' auftritt **Unterwort** von w_1'. Jedes Wort sei von sich selbst Unterwort. Außerdem sei die Relation "Unterwort sein" transitiv.

Nun sei die universelle Algebra G gegeben, deren Operationensystem Ω genau aus den in den Punkten 1. bis 4. erklärten Operationen und sonst keinen weiteren besteht. Bekanntlich sagen wir dann, dass in G die identische Relation

$$w_1 = w_2 \tag{1.83}$$

gilt, wenn bei der Ersetzung der freien Elemente x_1,x_2,... in den Wörtern w_1 und w_2 durch beliebige (nicht notwendig verschiedene) Elemente aus G Relation (1.83) zu einer Gleichung in G wird. Dabei wird das nulläre Operationssymbol 0 durch das von der Operation ω_0 bestimmte Element (es wird das Nullelement sein) zu ersetzen.

Wir führen folgende identische Relationen ein:

$$\begin{array}{ll} \text{R 1:} & (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \\ \text{R 2:} & x_1 + 0 = 0 + x_1 \\ & x_1 + 0 = x_1 \\ \text{R 3:} & (-x_1) + x_1 = x_1 + (-x_1) \\ & (-x_1) + x_1 = 0 \end{array}$$

Die Gesamtheit aller universellen Algebren mit dem oben angegebenen Operationensystem Ω, in denen diese drei identischen Relationen voll erfüllt sind, bildet damit eine primitive Klasse von Algebren.
Diese primitive Klasse Λ ist durch das Operationensystem Ω und die Tatsache, dass die Trägermenge G mit den Operationen "+", "-" und "ω_0" eine Gruppe bildet, gekennzeichnet.
Wir erhalten also für jedes mögliche System von Operationen aus Ω_n eine primitive Klasse, welche die Relationen R 1 bis B 3 erfüllt.

Wählen wir für das System aus Ω_n die leere Menge von Operationen (dieses nachträgliche Erklären der Operationen von Ω_n verändert auch die Menge aller Wörter!), so ist die Gesamtheit aller universellen Algebren mit dem reduzierten Operationensystem $\Omega = \{+, - ,\omega_0\}$, in der die identischen Relationen R 1 bis R 3 erfüllt sind, eine primitive Klasse von Algebren, und offenbar die der Gruppen.

Sei nun das System Ω_n wieder beliebig, aber fest gewählt. Wir erweitern die Menge Λ der identischen Relationen:

R 4: für jede Operation ω_n aus Ω_n gelte $0...0\omega_n = 0$

Offenbar stellt dann R 4 nicht nur eine identische Relation, sondern eine Menge von Relationen dar, welche zu der Menge Ω_n gleichmächtig ist.
Alle universellen Algebren mit dem Operationensystem Ω, welche die Relationen R 1 bis R 4 erfüllen, bilden dann die primitive Klasse aller Multioperatorgruppen mit dem Operationensystem Ω.
Fügen wir noch eine identische Relation hinzu:

R 5: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

und ein System von Relationen

R 6: für jede Operation ω_n aus Ω_n gelte
$x_1...x_{i-1}(x_i + x_{i+1})x_{i+2}...x_{n+1}\omega_n =$
$x_1...x_{i-1}x_ix_{i+2}...x_{n+1}\omega_n + x_1...x_{i-1}x_{i+1}x_{i+2}...x_{n+1}\omega_n$

so ist die primitive Klasse aller Multioperatorgruppen mit dem Operationensystem Ω, für welche noch Relationen 5 und 6 erfüllt sind, die primitive Klasse aller Multioperatorringe mit dem Operationensystem Ω.
Da aus R 6 und R 1 bis R 3 die identische Relation R 4 ableitbar ist (jeder Multioperatorring ist Multioperatorgruppe), können wir die Relation 4 übergehen. D.h., die primitive Klasse aller Multioperatorringe mit dem Operationensystem Ω (es ist zu beachten, dass dieses Operationensytem auch "+", "-" und "ω_0" enthält) zeichnet sich durch die identischen Relationen R 1 bis R 3 und R 5 und R 6 aus.

Legen wir nun das System Ω_n konkret fest.
Im ersten Fall enthalte es keine Operationen, d.h. Ω_n sei die leere Menge von Operationen. Dann können wir dem Alphabet X nur noch Wörter mit den Operationen 1. bis 3. bilden, womit auch Relation R 6 keine Bedeutung mehr besitzt. Die primitive Klasse aller Multioperatorringe mit einem leeren System von Operationen Ω_n fällt folglich mit der primitiven Klasse aller abelschen Gruppen zusammen. In dieser Klasse gelten dann die Relationen R 1 bis R 3 und R 5.

Enthält das System Ω_n nur eine binäre Operation, eine Multiplikation, so gilt:
Die primitive Klasse aller nicht notwendigerweise assoziativen Ringe, die primitive Klasse aller Multioperatorringe mit einem System Ω_n, welches nur eine Multiplikation enthält und die primitive Klasse

aller universellen Algebren mit einem Operationensystem $\Omega = \{+, - ,\omega_0, \cdot\}$ und den identischen Relationen R 1 bis R 3 sowie

R 6': $$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$ $$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$$

und R 5 sind dann identische Klassen.

Es ist nun möglich, die primitiven Klassen von Multioperatorringen mit einem festen Operationensystem zu präzisieren. Führen wir das Assoziativgesetz für die Operationen ω_n des Operationensystem Ω_n als identische Relation:

R 7: für jedes Paar von Operationen ω_k und ω_n aus Ω_n gelte und jedes $i = 1,...,k$ gelte
$$(x_1...x_n\omega_n)x_{n+1}...x_{n+k-1}\omega_k = x_1...x_{i-1}(x_i...x_{n+i-1}\omega_n)x_{n+i}...x_{n+k-1}\omega_k$$

ein, so bildet die Gesamtheit aller Multioperatorringe mit dem Operationensystem Ω, welche die Relationen R 1 bis R 7 erfüllen, eine primitive Klasse aller assoziativen Multioperatorringe über diesem System Ω.

Ebenso stellt die Kommutativität und die Existenz eines Einselements (bei Aufnahme einer nullären Operation in Ω_n zur Bestimmung von 1) eine identische Relation dar.
Entfernen wir aus Ω_n wieder alle Operationen bis auf eine binäre Multiplikation, ergeben sich zugehörig die primitiven Klassen der assoziativen, der assoziativ-kommutativen und assoziativ-kommutativen Ringe mit Einselement.
Die Nullteilerfreiheit stellt keine identische Relation dar, so dass wir auch nicht von der primitiven Klasse aller Ω-Körper mit einem Operationensystem Ω sprechen können. Es ist aber:

Satz 1
Jede primitive Klasse von Multioperatorringen enthält mit einem Multioperatorring alle seine Ω-Unterringe und alle seine homomorphen Bilder.

Die Beweise ergeben sich aus den Abschnitten 1.2.1 und 1.2.2.

1.6.2 Der freie Multioperatorring

Da die Gesamtheit aller Multioperatorringe mit einem festen Operationensystem Ω eine primitive Klasse von universellen Algebren bildet, können wir zu den zu dieser Klasse gehörenden freien Strukturen übergehen.

Sei Λ eine primitive Klasse von Multioperatorringen, welche des Operationensystem Ω besitzen. X sei eine nichtleere beliebige Elemente enthaltende Menge. Diese Elemente x_1,x_2,... seien freie Elemente. Außerdem sei 0 ein nulläres Operationssymbol.
Damit können wir, wie im Abschnitt 1.6.1, den Begriff des Wortes definieren und die Gesamtheit aller möglichen Wörter über der Menge $X \cup \{0\}$ bezüglich der Operationen "+", "-", "ω_0" und ω_n aus Ω bilden.

Offenbar können wir dann die Menge S aller Wörter über der Menge von freien Elemente X mit dem Operationensystem $\Omega' = \{+, - ,\omega_0,\Omega\}$ als universelle Algebra auffassen. Unter der Anwendung der nullären Operation ω_0 verstehen wir dann die Bestimmung des nullären Operationssymbols 0. Die entstandene universelle Algebra (S,X) aller Wörter über der Menge X bezüglich des Operationensystems Ω' nennen wir **Wörteralgebra**.

Offenbar sind zwei Elemente (Wörter) in (S,X) dann und nur dann gleich, wenn sie die gleichen freien Elemente bzw. das Operationensymbol 0 an den gleichen Stellen besitzen und diese von den gleichen Operationen aus Ω' gebunden sind. Zum Beispiel sind die Wörter

$$w_1 = x_1 + x_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = x_2 + x_1$$

in (S,X) nicht gleich, da keinerlei identische Relation in dieser Wörteralgebra erfüllt ist. Deshalb nennt man (S,X) auch anarchisch frei.
Weiterhin bemerken wir, dass die Menge X der freien Elemente ein Erzeugendensystem von (S,X) darstellt.

Um den gesuchten freien Multioperatorring zu konstruieren, betrachten wir die Menge Λ von identischen Relationen, welche die primitive Klasse der Multioperatorringe mit dem Operationensystem Ω charakterisiert.

Zwei Wörter v_1 und v_2 aus der Wörteralgebra (S,X) nennen wir bezüglich des Systems:

R 1:	$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$
R 2:	$x_1 + 0 = 0 + x_1$
	$x_1 + 0 = x_1$
R 3:	$(-x_1) + x_1 = x_1 + (-x_1)$
	$(-x_1) + x_1 = 0$
R 5:	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
R 6:	für jede Operation ω_n aus Ω_n gelte
	$x_1 ... x_{i-1}(x_i + x_{i+1})x_{i+2} ... x_{n+1}\omega_n =$
	$x_1 ... x_{i-1}x_i x_{i+2} ... x_{n+1}\omega_n + x_1 ... x_{i-1}x_{i+1}x_{i+2} ... x_{n+1}\omega_n$

äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge von Umformungen folgender Art auseinander hervorgehen:

- Ist in dem System Λ die identische Relation

  $$w_1 = w_2$$

  enthalten, so ersetzen wir darin alle auftretenden freien Elemente $x_1,x_2,...,x_k$ durch entsprechende Wörter, wonach die linke Seite in ein Wort w_1', die rechte Seite in w_2' übergeht.
  Ist dann w_1' ein Unterwort von v_1, so ersetzen wir in v_2 dieses durch w_2'. Ist w_2' Unterwort von v_1, so wird in v_2 dieses durch w_1' ersetzt.

D.h., kann man von einem Wort v_1 bezüglich einer relation aus Λ durch derartige Umformungen zu einem Wort v_2 gelangen, so sind beide bezüglich Λ äquivalent.

Für die primitive Klasse der Multioperatorringe mit dem Operationensystem Ω sind dann zum Beispiel die Wörter

$$v_1 = x_1(x_2x_3 ... x_{n+1}\omega_n + x_{n+2})x_{n+3} ... x_{2n}\omega_n$$

$$v_2 = x_1(x_2x_3 ... x_{n+1}\omega_n)x_{n+3} ... x_{2n}\omega_n + x_1(x_2x_3 ... x_{n+1}\omega_n + (-x_{n+2}))x_{n+3} ... x_{2n}\omega_n +$$

$$+ x_1(x_{n+2} + x_{n+2} + (-x_2x_3 ... x_{n+1}\omega_n))x_{n+3} ... x_{2n}\omega_n$$

äquivalent, da sie aus den Relationen R 3, R 5 und R 6 gewonnen werden können.

Diese Relation "Äquivalenz" ist offenbar symmetrisch, reflexiv und transitiv (folgt aus den gleichen Eigenschaften des Gleichheitszeichens) und bildet somit eine Äquivalenzrelation auf der Wörteralgebra (S,X). Diese Relation ist sogar operationstreu, d.h. sie ist Kongruenz in (S,X).
Sind nämlich die Wörter w_i und w_i', $i = 1,...,n$, paarweise äquivalent, so kann durch eine endliche Anzahl von Operationen auch die Äquivalenz von

$$w_1w_2 ... w_n\omega_n \qquad \text{und} \qquad w_1'w_2' ... w_n'\omega_n$$

nachgewiesen werden; ebenso für die Addition. D.h. also, wir haben auf der Wörteralgebra (S,X) eine Kongruenzrelation gegeben, welche von den identischen Relationen Λ der betrachteten primitiven Klasse von Multioperatorringen abhängig ist.

Nach Abschnitt 1.2.3 ist es möglich, die Faktorstruktur der Algebra (S,X) nach dieser Kongruenz zu bilden. Die entstehende Faktoralgebra bezeichnen wir mit (S,X,Λ). Aus der Definition dieser Algebra ergibt sich, dass in ihr alle identischen Relationen R 1 bis R 6 des Systems Λ gelten, womit diese Algebra der betrachteten primitiven Klasse von Multioperatorringen mit dem festgewählten Operationensystem Ω angehört. (S,X,Λ) ist also selbst Multioperatorring.

Definition

Die so definierte Faktoralgebra (S,X,Λ) heißt **freier Multioperatorring** der primitiven Klasse Λ von Multioperatorringen mit einem Operationensystem Ω.
Die Menge X nennen wir **System freier Erzeugender** von (S,X,Λ).

Offenbar sind die freien Elemente aus X nicht die eigentlichen Erzeugenden von (S,X,Λ), sondern deren Äquivalenzklassen. Diese bezeichnen wir aber ebenfalls mit X.

Jeden zu (S,X,Λ) isomorphen Multioperatorring nennen wir dann ebenfalls frei. Weiterhin können wir feststellen, dass der freie Multioperatorring nicht von der Art sondern nur von der Mächtigkeit des Systems X freier Erzeugender abhängt. Damit können in einer primitiven Klasse von Multioperatorringen untereinander nicht isomorphe freie Multioperatorringe existieren.

Betrachten wir die primitive Klasse aller Multioperatorringe mit einem leeren Operationensystem Ω, so stimmt diese mit der primitiven Klasse der abelschen Moduln überein. Damit ist ein freier Multioperatorring (S,X,Λ) dieser Klasse mit einem System X freier Erzeugender immer ein freier Modul. Enthält des System X freier Erzeugender nur ein Element x, so ist der zugehörige freie Multioperatorring (freier Modul) dieser primitiven Klasse isomorph zur unendlichen zyklischen Gruppe, d.h., zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen.

Betrachten wir die primitive Klasse von assoziativen Multioperatorringen mit einem Operationensystem, welches nur eine binäre Multiplikation enthält, so sind deren freie Multioperatorringe durchweg freie Ringe.
Der freie Multioperatorring (S,X,Λ) mit einem freien erzeugenden Element bezüglich der primitiven Klasse der Multioperatorringe, mit nur einer binären Multiplikation in Ω, ist isomorph zum Quasiendomorphismenring über den ganzen Zahlen, wenn in der Klasse die identischen Relationen Assoziativität und Kommutativität für die Multiplikation gelten.

1.6.3 Einfache Sätze

Gegeben sei ein freier Multioperatorring (S,X,Λ) einer primitiven Klasse Λ von Multioperatorringen mit einem Operationensystem Ω. Weiterhin sei G ein beliebiger Multioperatorring dieser primitiven Klasse Λ. M sei ein Erzeugendensystem von G. Dann gilt:

Satz 1
Der Multioperatorring G ist genau dann freier Multioperatorring in der Klasse Λ mit dem freien Erzeugendensystem M, wenn bei einem beliebigen Ω-Ring H aus Λ und einer beliebigen Abbildung φ von M in H stets eindeutig eine homomorphe Abbildung von G in H existiert, die auf M mit φ übereinstimmt.

Beweis: Zuerst sei G ein freier Multioperatorring und dessen Erzeugendensystem M. Außerdem sei φ von M in H schon gegeben. Dann definieren wir eine Abbildung ψ von $G = (S,X,\Lambda)$ in H wie folgt:

Auf M falle ψ mit φ zusammen und sind damit die Wörter $w_1,w_2,...,w_n$ bei ψ bereits auf $(w_1\psi)$, $(w_2\psi)$, ..., $(w_n\psi)$ eindeutig abgebildet wird, so wird:

$$(w_1 w_2 ... w_n \omega_n)\psi = (w_1\psi)(w_2\psi)...(w_n\psi)\omega_n \tag{1.84}$$

$$(w_1 + w_2)\psi = (w_1\psi) + (w_2\psi) \tag{1.85}$$

Wenden wir für ein Element aus (S,X,Λ) diese Abbildung ψ an, wobei das Element gleich $w_1...w_n\omega_n$ im ursprünglichen Sinne ist, erhalten wir sicherlich wieder

$$(w_1\psi)(w_2\psi)...(w_n\psi)\omega_n$$

da auch in H alle identischen Relationen der primitiven Klasse Λ gelten. Damit ist ψ auf ganz (S,X,Λ) definiert (für die Additon erhalten wir Analoges) und mit (1.84) und (1.85) Homomorphismus.

Sei nun ein Multioperatorring G mit dem Erzeugendensystem M gegeben, welcher die Voraussetzungen erfüllt. Als Multioperatorring H wählen wir gerade den freien Multioperatorring (S,X,Λ), für den X zu M gleichmächtig ist. Dann existiert eine umkehrbare eindeutige Abbildung von M auf X. Nach Voraussetzung existiert auch ein Homomorphismus ψ von G auf (S,X,Λ), welcher mit φ auf M zusammenfällt.
Nach dem oben Bewiesenen existiert dann aber auch ein Homomorphismus χ von (S,X,Λ) auf G, welcher auf X mit φ^{-1} übereinstimmt.
$\chi\psi$ ist dann Endomorphismus auf (S,X,Λ), und auf X gleich dem identischen Automorphismus. $\psi\chi$ ist auf G Endomorphismus und auf M identisch. Da für G die Abbildung $\chi\psi$ eindeutig ist und für (S,X,Λ) die Eindeutigkeit von χ oben bewiesen wurde, muss sowohl $\chi\psi$ als auch $\psi\chi$ identischer Automorphismus sein, womit ψ und χ Isomorphismen sind.

Als isomorphes Bild von (S,X,Λ) ist der Multioperatorring G selbst freier Multioperatorring mit dem Erzeugendensystem M in der betrachteten primitiven Klasse. Der Satz ist bewiesen.

Aus diesem Satz ergibt sich sofort:

Satz 2
Jeder Multioperatorring G mit dem Operationensystem Ω aus einer primitiven Klasse Λ ist das homomorphe Bild eines gewissen freien Multioperatorrings (S,X,Λ) aus dieser Klasse Λ.

Beweis: Bestimmen wir von G ein beliebiges Erzeugendensystem M und wählen wir einen freien Multioperatorring (S,X,Λ) derart, dass eine Abbildung φ von X auf M existiert, so können wir nach Satz 1 φ zu einem Homomorphismus ψ von (S,X,Λ) auf ganz G erweitern, da dann M in $(S,X,\Lambda)\psi$ enthalten ist. Der Beweis ist erbracht.

Damit schließen wir diesen Abschnitt ab. Weitere Sätze können in Kuros [9], Seite 118ff., nachgelesen werden.

1.6.4 Definierende Relationen

Wir werden nun versuchen, jeden Multioperatorring G durch ein Erzeugendensystem M und ein gewisses System von Ausdrücken zu charakterisieren.

Sei Λ eine beliebige primitive Klasse von Multioperatorringen mit einem Operationensystem Ω. Nach Satz 2, 1.6.3, ist dann ein beliebiger Multioperatorring G aus Λ das homomorphe Bild eines freien Multioperatorrings (S,X,Λ) aus dieser primitiven Klasse.

Auf Grund des Homomorphiesatzes, 1.3.5, ist dann G isomorph zu einem Ω-Faktorring von (S,X,Λ) nach einem gewissen Ideal A von (S,X,Λ).
Die Elemente w_i, $i \in I$, seien gerade die Elemente des freien Multioperatorrings (S,X,Λ), welche das Ideal A erzeugen. Da alle diese Elemente auf das Nullelement von G abgebildet werden, gilt das Gleichungssystem:

$$w_i = 0 \qquad ,\forall i \in I \tag{1.86}$$

Drücken wir diese Elemente w_i durch freie Erzeugende aus X aus, so bestimmt dieses Gleichungssystem (genauer gesagt: die Wörter w_i) dann eindeutig das Ideal A in (S,X,Λ) und damit auch den Ω-Faktorring $(S,X,\Lambda)/A$. Folglich wird bis auf Isomorphie auch der Multioperatorring G bestimmt.

Definition

Das Gleichungssystem (1.86) heißt ein **System von definierenden Relationen** für den Multioperatorring G in dieser primitiven Klasse Λ.

Da Satz 2, 1.6.3, für alle Multioperatorringe einer primitiven Klassen von Multioperatorringen gilt, können wir jeden Ω-Ring G durch ein gewisses System definierender Relationen über einem Erzeugendensystem M darstellen. Es muss jedoch beachtet werden, dass dieses System von Relationen nicht notwendig eindeutig ist.

Betrachten wir zuerst die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_2$ der Ordnung 2. Jede zyklische Gruppe ist homomorphes Bild der unendlichen zyklischen Gruppe. Damit ist Satz, 1.6.3, erfüllt, da der freie Multioperatorring, wie schon erwähnt, mit einem freien erzeugenden Element in der primitiven Klasse aller Multioperatorringe mit einem leeren Operationensystem Ω (primitive Klasse der abelschen Gruppen) isomorph zur unendlichen zyklischen Gruppe ist. Das Erzeugendensystem der $\mathbb{Z}_2$ enthält nur ein Element

$$M = \{a\}$$

Da nun offenbar als einzige definierende Relation

$$a + a = 0$$

existiert, gilt

$$\mathbb{Z}_2 \cong \{a|a + a = 0\}$$

Die additive Gruppe der rationalen Zahlen kann durch eine unendliche Menge $(a_1,a_2,...,a_n,...)$ von rationalen Zahlen erzeugt werden. Die zugehörigen definierenden Relationen sind durch

$$a_1 = a_2^2; \quad a_2 = a_3^3; \quad a_3 = a_4^4; \quad ...; \quad a_n = a_{n+1}^{n+1}; \quad ...$$

gegeben. (siehe Kuros [9], Seite 77f.)

Während die unendliche zyklische Gruppe freier Multioperatorring der entsprechenden primitiven Klasse ist, ist der Ring der ganzen Zahlen nicht frei. Sein Erzeugendensystem besteht nur aus einem Element; der ganzen Zahl 1. Um die Existenz des Einselements abzusichern, muss als definierende Relation

$$a \cdot a = a \tag{1.87}$$

auftreten. Weitere definierende Relationen benötigen wir zur Charakterisierung des Rings der ganzen Zahlen nicht.
Interessant sind die homomorphen Bilder dieses Rings.
Ein Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ wird ebenfalls durch ein Element; die Restklasse, in der sich die 1 befindet; erzeugt. Als definierende Relationen ergeben sich:

$$a \cdot a = a \qquad \text{und} \qquad na = 0$$

Vergleicht man mit dem Ring der ganzen Zahlen, so erkennt man, dass nur eine zusätzliche Relation aufgenommen wurde. Die Erklärung gibt die Anwendung des Satzes von Dyck auf Multioperatorringe.

> **Satz von Dyck**
> Ein Multioperatorring G sei durch ein System definierender Relationen und einem gewissen Erzeugendensystem bestimmt. Ein weitere Multioperatorring G' der selben primitiven Klasse sei bezüglich der gleichen Erzeugenden durch diesselben Relationen und noch durch gewisse andere bestimmt.
> Dann ist G' zu einem Ω-Faktorring von G isomorph, d.h. der Multioperatorring G' ist homomorphes Bild des Ω-Rings G.

Beweis: Wir wählen einen entsprechenden freien Multioperatorring (S,X,Λ), für den

$$(S,X,\Lambda)/A \cong G \qquad \text{und} \qquad (S,X,\Lambda)/A' \cong G'$$

gilt. Dabei sind A und A' Ideale in (S,X,Λ). Da gerade diese durch die Systeme von definierenden Relationen charakterisiert sind, gilt außerdem $A \subseteq A'$.
Nach dem 2.Isomorphiesatz wird dann

$$G' \cong (S,X,\Lambda)/A' \cong ((S,X,\Lambda)/A)/(A'/A) \cong G/(A'/A)$$

wobei A'/A ideal von G ist. Der Beweis ist erbracht.

Abschließend betrachten wir den Ring der Quaternionen über den ganzen Zahlen. Wir behaupten, dass dieser Multioperatorring isomorph zu dem von freien Erzeugenden a,b,c und d mit den definierenden Relationen

$$a \cdot b = b \cdot a = b \qquad ; \qquad a \cdot c = c \cdot a = c \qquad ; \qquad a \cdot d = d \cdot a = d$$

$$b^2 = c^2 = d^2 = -a \qquad ; \qquad a^2 = a$$

$$b \cdot c + c \cdot b = b \cdot d + d \cdot b = c \cdot d + d \cdot c = 0 \qquad ; \qquad b \cdot d \cdot c = c \cdot b \cdot d = a$$

gebildeten Multioperatorrings ist.
Für den Nachweis genügt es, dass wir die multiplikative Strukturtabelle für die vier erzeugenden Elemente aufstellen:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	$-a$	d	$-c$
c	c	$-d$	$-a$	b
d	d	c	$-b$	$-a$

Aus den ersten drei Relationen und der fünften folgt sofort, dass a Einselement wird. Aus den restlichen definierenden Relationen für die Multiplikation erhalten wir die abgebildete Strukturtafel. Die Antikommutativität ergibt sich dabei zum Beispiel aus

$$b^2 = -a \qquad \text{und} \qquad b \cdot d \cdot c = a$$

Daraus ergibt sich $d \cdot c = -b$ und $c \cdot d = b$.
Zum Abschluss können wir noch ohne Beweis sagen:

> **Satz 2**
> Ein endlicher Multioperatorring ist stets durch eine endliche Anzahl von Erzeugenden und definierenden Relationen darstellbar.

1.6.5 Freie Summen in Multioperatorringen

Auf Grund der in den Abschnitten 1.6.3 und 1.6.4 gezeigten Gesetzmäßigkeiten, können wir den Begriff der freien Summe von Multioperatorringen einführen.

Definition

Seien die A_i, $i \in I$, ein System von Multioperatorringen einer primitiven Klasse Λ von Ω-Ringen. Dann heißt ein Multioperatorring G aus der Klasse Λ die freie Summe des Systems der A_i, $i \in I$, wenn für alle $i \in I$

$$A_i \subseteq G \tag{1.88}$$

gilt und wenn für einen beliebigen Ω-Ring H aus Λ und ein beliebiges System von Homomorphismen φ_i von den A_i in H, $i \in I$, eindeutig ein Homomorphismus φ von G in bestimmt wird, welcher auf den Ω-Unterringen A_i mit dem φ_i für alle $i \in I$ übereinstimmt.

Die Berechtigung dieser Definition ergibt sich aus Satz 1, 1.6.3. Die so definierte freie Summe ist bis aus Isomorphie eindeutig:

Satz 1
Sind die Multioperatorringe G und G' je eine freie Summe der Multioperatorringe A_i, $i \in I$, so existiert zwischen G und G' ein Isomorphismus, welcher einer Fortsetzung der identischen Automorphismen auf den Ω-Ringen, $i \in I$, darstellt.

Beweis: Diese identischen Automorphismen stellen dann Homomorphismen φ_i der Ω-Unterringe A_i von G, $i \in I$, in den Multioperatorring G' dar. Ebenso bilden diese Automorphismen Homomorphismen ψ_i der Ω-Unterringe A_i von G', $i \in I$, in G. Nach der Definition der freien Summe werden damit zwei homomorphe Abbildungen induziert:

$$\varphi \quad \text{von} \quad G \text{ in } G' \qquad \text{und} \qquad \psi \quad \text{von} \quad G' \text{ in } G$$

Das Produkt $\varphi\psi$ ist dann Endomorphismus in dem Multioperatorring G. Dieser ist, da alle A_i, $i \in I$, isomorphe Unterstrukturen in G besitzen, eindeutig bestimmt und gleich dem identischen Automorphismus. Ebenso ist $\psi\varphi$ identischer Automorphismus im Multioperatorring G'.
Damit sind aber sowohl φ als auch ψ Isomorphismen. Die freie Summe der A_i, $i \in I$, ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Der Beweis ist erbracht.

Eine weitere interessante Eigenschaft kann man in Bezug auf das Erzeugen von Ω-Unterringen nachweisen.

Satz 2
Die freie Summe der Multioperatorringe A_i, $i \in I$, stimmt mit der von allen A_i in G erzeugten Unteralgebra (Ω-Unterring) überein.

Beweis: Sei G_0 der von den Ω-Unterringen A_i von G, $i \in I$, erzeugte Ω-Unterring. G sei die freie Summe der A_i.
Ist ein beliebiger Multioperatorring H aus der gleichen primitiven Klasse Λ wie G gegeben, und außerdem die Homomorphismen φ_i von den A_i auf H, $i \in I$, so erzeugt der dabei nach Definition gebildete Homomorphismus φ von G in H einen Homomorphismus φ_0 von G_0 in H, der mit den φ_i auf den Ω-Unterringen A_i zusammenfällt.

Da G_0 als Ω-Unterring von G nur aus allen Elementen besteht, welches sich irgendwie aus den Elementen der A_i durch endlich oftes Anwenden von Operationen ω_n des Operationensystems Ω bzw. der Addition erzeugen lassen, können die Homomorphismen φ nur genau einen Homomorphismus von G_0 in H erzeugen. Damit entspricht G_0 gerade der Definition der freien Summe aller A_i. Folglich existiert nach Satz 1 ein Isomorphismus zwischen G_0 und G, welcher die identischen Automorphismen auf den A_i, $i \in I$, fortsetzt.
Diese können aber, wie bei Satz 1 gezeigt, nur den identischen Automorphismus erzeugen, womit

$$G_0 = G$$

gilt. Der Beweis ist erbracht.

Die bisherige Definition der freien Summe basiert darauf, dass Multioperatorring universelle Algebren sind. Nun ist es aber auch möglich, eine speziellere Definition zu geben.

Es sei eine Familie von Multioperatorringen G_i, $i \in I$, gegeben, welche der gleichen primitiven Klasse von Multioperatorringen Λ angehören. In dieses Multioperatorringen G_i bestimmen wir ein Erzeugendensystem M_i, $i \in I$. Alle Elemente dieser Erzeugendensysteme bezeichnen wir mit Wort.
Ebenso sollen alle Symbole $v_1...v_n\omega_n$, wobei ω_n eine beliebige n-äre Operation aus dem Operationensystem der G_i ist, Wort heißen, wenn die $v_1,v_2,...,v_n$ Wörter aus den Erzeugendensystemen sind, wobei alle v_j, $j = 1,...,n$, nicht gleichzeitig einen einzigen System M_l, $l \in I$ angehören dürfen.

Unter der freien Summe G der Multioperatorringe G_i, $i \in I$, verstehen wir dann den Multioperatorring, dessen additive Gruppe als Erzeugendensystem die Menge aller oben beschriebenen Wörter besitzt und die Operationen ω_n des Operationensystems Ω wie folgt angewendet werden:

Sind die $v_1,...,v_n$ nicht alle gleichzeitig Elemente ein und desselben Systems M_i, so sei $v_1...v_n\omega_n$ das oben bestimmte Wort.
Sind alle v_j, $j = 1,...,n$, aus einem System M_i, dann sei $v_1...v_n\omega_n$ das in dem entsprechenden Ω-Ring G_i bestimmte Element. Wir bezeichnen G mit

$$G = \sum_{i \in I}^{*} A_i \tag{1.89}$$

und wenn die Indexmenge I endlich ist

$$G = A_1 * A_2 * ... * A_n$$

Auch mit dieser Definition sind die A_i bzw. G_i, $i \in I$, Ω-Unterringe von G. Sind nun Homomorphismen φ_i, $i \in I$, von den Multioperatorringen G_i auf einen beliebigen Multioperatorring H gegeben, so induziert diese Menge von Homomorphismen ebenfalls einen Homomorphismus φ von G in H eindeutig, welcher dann die $\varphi : i$ auf den G_i fortsetzt. Dieser Homomorphismus ist dann, wie folgt, definiert:

Ist a ein Element von G, welches in einem der Ω-Unterringe A_i liegt, so wird es auf das Bild bezüglich φ_i abgebildet. Ist a in keinem der A_i enthalten, so treten in a bei der Niederschrift mit Wörtern aus dem Erzeugendensystem Elemente aus den A_i auf. D.h., jedes Element a kann in der Form

$$a = v_1 v_2 ... v_n \omega_n \qquad \text{bzw.} \qquad a = v_1 + v_2$$

dargestellt werden, wobei die v_i Wörter sind, deren Bilder bei φ schon eindeutig bestimmt sind. Setzen wir dann

$$(v_1 v_2 ... v_n \omega_n)\varphi = (v_1\varphi)(v_2\varphi)...(v_n\varphi)\omega_n \qquad \text{und} \qquad (v_1 + v_2)\varphi = (v_1\varphi) + (v_2\varphi)$$

so erhalten wir den gesuchten Homomorphismus. Folglich entspricht die neue Definition der freien Summe der schon gegebenen.

Da, wie schon in den vorherigen Abschnitten gezeigt, jeder Endomorphismus auf G, welcher auf den A_i, $i \in I$, identischer Automorphismus ist, selbst identischer Automorphismus ist, ergibt sich, dass die Wahl der Erzeugendensysteme M_i in den A_i, $i \in I$, nicht die freie Summe G beeinflusst.
Damit können wir einige Eigenschaften der freien Summen von Multioperatorringen feststellen:

Satz 3
Ist ein Multioperatorring G die freie Summe von Multioperatorringen A_i, $i \in I$, und sind die A_i selbst wieder freie Summen, d.h., es existieren Ω-Ringe B_{ij} mit

$$A_i = \sum_{j \in J_i}^{*} B_{ij} \tag{1.90}$$

für alle $i \in I$, so ist die freie Summe aller dieser B_{ij} gleich dem Multioperatorring G, d.h., es gilt

$$G = \sum_{i \in I; j \in J_i}^{*} B_{ij} \tag{1.91}$$

Zum Beweis überlege man sich, dass die Nacheinanderausführung zweier Homomorphismen wieder ein Homomorphismus ist. Dabei nennt man (1.19) die **Fortsetzung der freien Summe** von G. Weiterhin gilt:

Satz 4
Sei G die freie Summe einer Familie von Multioperatorringen A_i, $i \in I$, und I_s s Untermengen von I sowie s Element einer Indexmenge S, so ist

$$G = \sum_{s \in S}^{*} C_s \tag{1.92}$$

wobei die C_s freie Summen der A_i sind, d.h.

$$C_s = \sum_{i \in I_s}^{*} A_i \tag{1.93}$$

wenn alle I_s ganz I ergeben und paarweise disjunkt sind.

Satz 5
Sei G die freie Summe zweier Multioperatorringe A und B und ist A' das Ideal in G, welches vom Ω-Unterring A erzeugt wird, so ist der Ω-Faktorring G/A' isomorph zum Multioperatorring B.

Der Nachweis ergibt sich sofort aus dem 1.Isomorphiesatz.
Besonders wichtig ist der Satz über die freien Summen von freien Multioperatorringen, welcher sich aus der zweiten Definition der freien Summe ergibt.

Satz 6
Jeder freie Multioperatorring (S,X,Λ) einer primitiven Klasse Λ von Multioperatorringen ist freie Summe von freien Multioperatorringen (S,X_i,Λ) der gleichen primitiven Klasse Λ, wobei der Erzeugendensysteme X_i jeweils nur ein Element besitzen und ganz X durchlaufen.

Ohne, dass auf den zugehörigen Beweis eingegangen wird; dieser ist nur mit umfassenden Kenntnissen über freie Summen führbar; geben wir zum Anschluss ein Theorem von Kuros an.

Theorem (Kuros)
Ist ein Multioperatorring G die freie Summe von Ω-Ringen A_i, $i \in I$, und eines freien Multioperatorrings (S,X,Λ), so ist jeder Ω-Unterring U von G freie Summe der Multioperatorringe

$$B_i = U \cap A_i \quad ; \quad i \in I$$

und eines gewissen freien Ω-Unterrings.

Der sehr umfangreiche und komplizierte Beweis ist für Multioperatorgruppen in Kuros [34], Seite 190, für die modifizierte Art von Multioperatorringen, die linearen Ω-Algebren (siehe Abschnitt 1.7.2) in Kuros [33], Seite 65, zu finden.
Wir begnügen uns mit einer ableitbaren Folgerung:

Satz 7
Jeder Ω-Unterring eines freien Multioperatorrings ist selbst frei.

1.7 Ausblick auf weitere Probleme

Unter dem Punkt 1.7 sollen kurz ein paar Problemkreis angeschnitten werden. Dabei werden wir nur Einführungen vornehmen.

1.7.1 Teilbarkeit in Multioperatorringen

Jeder assoziative oder nichtassoziative Ring ist auch Multioperatorring. Für die Integritätsbereiche ist es möglich eine Teilbarkeitstheorie aufzubauen. Es liegt deshalb nahe zu vermuten, dass dies nur nullteilerfreie, assoziative und kommutative Multioperatorringe mit dem Einselement 1 ebenfalls möglich ist.

Aus diesem Grund führen wir eine Teilbarkeitsrelation für Multioperatorringen ein. Dazu vereinbaren wir, dass im Abschnitt 1.7.1 im Folgenden unter einem Multioperatorring G nur noch ein nullteilerfreier, assoziativer und kommutativer Ω-Ring mit Einselement verstanden wird!

Definition

Sind a und b Elemente eines Multioperatorrings G, so heißt a Teiler von b bezüglich der n-ären Operation ω_n des Operationensystems Ω, wenn ein (n-1)-Tupel von Elementen $(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ in G mit

$$x_1x_2...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = b \tag{1.94}$$

existiert.

Offenbar gelten dann folgende Gesetzmäßigkeiten:

Satz 1
In einem Multioperatorring G gilt für alle Elemente a, b, c und d sowie für jede n-äre Operation ω_n des Operationensystems:

1. a teilt a: $a|a$,
2. das Einselement 1 teilt a: $1|a$,
3. a teilt das Nullelement; $a|0$,
4. 0 teilt a genau dann, wenn $a = 0$ ist: $0|a \leftrightarrow a = 0$,
5. sind x_1,...,x_n beliebig aus G und teilt b das Element a, so teilt b auch $x_1x_2...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n$:
$$b|a \leftrightarrow b|(x_1x_2...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n)$$
6. sind x_1,...,x_n beliebig aus G und teilt b das Element a, so teilt $x_1x_2...x_{i-1}bx_{i+1}...x_n\omega_n$ auch $x_1x_2...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n$.
7. sind die x_i, $i = 1,...,n$, verschieden vom Nullelement, so gilt in 6. auch die Umkehrung,
8. teilt $a|b$ und $c|d$, so teilt auch $a|c$,
9. teilt $a|b$ und $c|d$ und sind die x_1,...x_n beliebig aus G, dann teilt $acx_1x_2...x_{n-2}\omega_n$ aus $bdx_1x_2...x_{n-2}\omega_n$.

Für den Nachweis gehen wir schrittweise vor.
zu 1.: Nach der Definition der Teilbarkeitsbeziehung muss es ein (n-1)-Tupel geben, für welche dann

$$x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = a$$

gilt. Da wir aber einen Multioperatorring mit dem Einselement 1 vorliegen haben, können wir jedem x_j das Einselement zuweisen und erhalten:

$$1...1a1...1\omega_n = a$$

d.h., für jedes a aus G gilt: $a|a$.
zu 2.: Weisen wir x_1 das jeweilige Element a und allen anderen x_j, $j = 2,...,n$, das Einselement zu, wird

$$a1...1\omega_n = a$$

d.h., für jedes a aus G gilt: $1|a$.
zu 3.: Für ein (n-1)-Tupel der Form (0,...,0) ergibt sich

$$0...0a0...0\omega_n = 0$$

d.h., für jedes a aus G gilt: $a|0$.
zu 4.: Da nach Abschnitt 1.1.3 für alle a_j, $j = 1,...,n$,

$$a_1...a_{i-1}0a_{i+1}...a_n\omega_n = 0$$

gilt, kann das Nullelement nur sich selbst teilen, d.h., es gilt: $0|a$ genau dann, wenn $a = 0$.
zu 5.: Sei b ein Teiler des Elementes a. Nach Definition existiert dann ein (n-1)-Tupel von Elementen $(y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)$ aus G, so dass

$$y_1...y_{i-1}by_{i+1}...y_n\omega_n = a$$

gilt. Bilden wir von rechts das n-äre Produkt mit den Elementen $x_1,...,x_{n-1}$ ergibt sich

$$(y_1...y_{i-1}by_{i+1}...y_n\omega_n)x_1...x_{n-1}\omega_n = ax_1...x_{n-1}\omega_n$$

auf Grund des Assoziativgesetzes erhalten wir

$$ax_1...x_{n-1}\omega_n = y_1...y_{i-1}by_{i+1}...y_{n-1}(y_nx_1...x_{n-1}\omega_n)\omega_n =$$

mit dem Kommutativgesetz

$$= y_1...y_{i-1}(bx_1...x_{n-1}\omega_n)y_ny_{i+1}...y_{n-1}\omega_n = y_1...y_{i-1}(x_1...x_{j-1}bx_{j+1}...x_{n-1}\omega_n)y_ny_{i+1}...y_{n-1}\omega_n$$

Da wir mit dem Kommutativgesetz auch die linke Seite umformen können, ergibt sich

$$ax_1...x_{n-1}\omega_n = x_1...x_{j-1}ax_{j+1}...x_{n-1}\omega_n$$

durch Gleichsetzen erhalten wir das Gesuchte.
zu 6.: Es sei wieder b ein Teiler von a, d.h.

$$y_1...y_{i-1}by_{i+1}...y_n\omega_n = a$$

Multiplizieren wir wieder von rechts mit dem Tupel $x_1,...,x_{n-1}$, so wird

$$ax_1...x_{n-1}\omega_n = (y_1...y_{i-1}by_{i+1}...y_n\omega_n)x_1...x_{n-1}\omega_n$$

Damit erhalten wir die Ausgangsstellung von 5. Die weiteren Umformungen werden analog durchgeführt, so dass sich 6. ergibt.

zu 7.: Für die Umkehrung ist es nur notwendig sich zu überlegen, dass in dem nullteilerfreien Multioperatorrung auch die Regularität gilt. Satz 2, 1.1.4, bringt dies zum Ausdruck. Damit können wir aber kürzen, so dass der Beweis in umgekehrter Richtung von 6. verläuft.
zu 8.: Es sei a ein Teiler von b und b ein Teiler von c. Dann existieren nach Voraussetzung zwei (n-1)-Tupel von Elementen aus dem Multioperatorring G mit

$$x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = b \qquad \text{und} \qquad y_1...y_{i-1}by_{i+1}...y_n\omega_n = c$$

Setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein:

$$y_1...y_{i-1}(x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n)y_{i+1}...y_n\omega_n = c$$

mit der Kommutativität erhalten wir

$$y_1...y_{i-1}(x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_na\omega_n)y_{i+1}...y_n\omega_n = c$$

und mit der Assoziativität

$$y_1...y_{i-2}(y_{i-1}x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_n\omega_n)ay_{i+1}...y_n\omega_n = c$$

womit a Teiler von c ist.
zu 9.: Sei a Teiler von b und c Teiler von d. Dann gilt für gewisse x_j, y_j, $j = 1,...,i-1,i+1,...,n$:

$$x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = b \qquad \text{und} \qquad y_1...y_{i-1}cy_{i+1}...y_n\omega_n = d$$

Sind die $z_1,...,z_{n-2}$ beliebige Elemente des Multioperatorrings G, so erhalten wir

$$bdz_1...z_{n-2}\omega_n = (x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n)(y_1...y_{i-1}cy_{i+1}...y_n\omega_n)z_1...z_{n-2}\omega_n =$$

mit dem Kommutativgesetz

$$= (x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_na\omega_n)(y_1...y_{i-1}y_{i+1}...y_nc\omega_n)z_1...z_{n-2}\omega_n =$$

mit der Assoziativität und Kommutativität

$$= (x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_na\omega_n)y_1...y_{i-1}y_{i+1}...y_{n-1}(y_ncz_1...z_{n-2}\omega_n)\omega_n =$$
$$= x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_{n-1}(x_nay_1...y_{i-1}y_{i+1}...y_{n-1}\omega_n)(y_ncz_1...z_{n-2}\omega_n)\omega_n =$$
$$= x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_{n-1}(x_ny_1...y_{i-1}y_{i+1}...y_{n-1}a\omega_n)(y_ncz_1...z_{n-2}\omega_n)\omega_n =$$
$$= (x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_{n-1}x_ny_1\omega_n)y_2...y_{i-1}y_{i+1}...y_{n-1}a(y_ncz_1...z_{n-2}\omega_n)\omega_n =$$
$$= (x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_{n-1}x_ny_1\omega_n)y_2...y_{i-1}y_{i+1}...y_{n-1}(ay_ncz_1...z_{n-3}\omega_n)z_{n-2}\omega_n =$$
$$= (x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_{n-1}x_ny_1\omega_n)y_2...y_{i-1}y_{i+1}...y_{n-1}(y_nacz_1...z_{n-3}\omega_n)z_{n-2}\omega_n =$$
$$= (x_1...x_{i-1}x_{i+1}...x_{n-1}x_ny_1\omega_n)y_2...y_{i-1}y_{i+1}...y_n(acz_1...z_{n-2}\omega_n)\omega_n$$

womit das Gesuchte gezeigt ist. Der Beweis ist erbracht.

Wie man am Nachweis von 9. erkennt, erfordern schon einfache Zusammenhänge einen großen Beweisaufwand. Es ist daher z.B. nicht einfach nachzuweisen, dass alle Einheiten (Teiler des Einselements 1) eine n-äre Gruppe bilden.
Nutzen wir den Satz 2 aus Abschnitt 1.1.3, so können wir sagen:

Satz 2
Sei G ein assoziativer, nullteilerfreier und kommutativer Multioperatorring mit dem Einselement 1 und $(G, +, \bullet)$ der ihm durch Satz 2, 1.1.3, zugewiesene Integritätsbereich, so bleiben die Teilbarkeitsbeziehungen bei einem Übergang von G zu $(G, +, \bullet)$, und umgekehrt, erhalten.

Beweis: Zuerst seien zwei beliebige Elemente a und b aus G gegeben, wobei a Teiler von b ist. Nach Definition existieren dann x_j, $j = 1,...,i-1,i+1,...,n$, mit

$$x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = b$$

Auf Grund von (1.13), 1.1.3, gilt dann in dem Integritätsbereich $(G, +, \bullet)$:

$$b = x_1...x_{i-1}ax_{i+1}...x_n\omega_n = x_1 \bullet x_2 \bullet ... \bullet x_{i-1} \bullet a \bullet x_{i+1} \bullet ... \bullet x_n =$$

Da die Operation "$\bullet$" kommutativ ist, wird

$$= x_1 \bullet x_2 \bullet ... \bullet x_{i-1} \bullet x_{i+1} \bullet ... \bullet x_n \bullet a = x' \bullet a$$

womit a Teiler von b auch in $(G, +, \bullet)$ ist.
Ist umgekehrt in $(G, +, \bullet)$ eine Teilbarkeitsbeziehung gegeben, so lässt sich diese mit dem Einselement auf G übertragen.
Ist a ein Teiler von b in dem Integritätsbereich $(G, +, \bullet)$, so existiert ein c mit

$$a \bullet c = b$$

Auf Grund der Relation (1.15), 1.1.3, erhalten wir dann

$$ac1...1\omega_n = b$$

so dass a auch in G ein Teiler von b ist. Der Beweis ist erbracht.

Folglich ist es nun nicht mehr nötig, die Teilerbeziehungen im Multioperatorring G selbst zu betrachten. Wir können ohne Einschränkung für die Untersuchungen den reduzierten Ring $(G, +, \bullet)$ benutzen.
Zum Beispiel gilt also in einem Multioperatorring G genau dann der Teilerkettensatz, wenn dieser in $(G, +, \bullet)$ gilt.

1.7.2 Sigma-Multioperatorringe und lineare Multioperatorringe

Jede abelsche Gruppe G besitzt einen Endomorphismenring R. Außerdem kann jeder Endomorphismus einer Struktur als unäre algebraische Operation aufgefasst werden. Dabei ordnet jede unäre Operation "Endomorphismus" jedem Element das endomorphe Bild zu. Bezieht man diese unäre Operationen auf die gegebene abelsche Gruppe, so spricht man von einer abelschen Gruppe G mit dem Ring R von Operatoren oder nur von einem R-Modul.

Folgende Relationen müssen dabei erfüllt sein. Für alle Elemente a und b aus G und beliebige α und β aus R gilt:

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha \tag{1.95}$$

$$a(\alpha+\beta)a\alpha + a\beta \tag{1.96}$$

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta \tag{1.97}$$

Gleichung (1.95) sichert dabei den Endomorphismencharakter der Operatoren. Da aus (1.96) die Addierbarkeit dieser Endomorphismen folgt, können wir für beliebige Multioperatorringe keinen "R-Ω-Ring" konstruieren. Die Endomorphismen eines Multioperatorrings müssen ja im Allgemeinfall nicht addierbar sein.

Jedoch sahen wir, dass in der Menge E aller Endomorphismen eines Multioperatorrings die normalen Endomorphismen ausgezeichnet sind. Deshalb definieren wir:

Definition

Sei G ein beliebiger Multioperatorring und Σ eine Menge von Operatoren. G heißt genau dann **Σ-Multioperatorring** oder Sigma-Multioperatorring, wenn für alle a und b, sowie a_1,...,a_n aus G und jeden Operator α aus Σ

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha \tag{1.98}$$

$$(a_1 a_2 ... a_n \omega_n)\alpha = a_1 a_2 ... a_{i-1}(a_i\alpha)a_{i+1} ... a_n\omega_n \tag{1.99}$$

gilt.

Damit bildet ein Multioperatorring G mit der Menge E seiner normalen Endomorphismen einen Σ-Multioperatorring.
Für Multioperatorringe, welche nur eine binäre Multiplikation in ihrem Operationensystem enthalten, ergibt sich die Definition des Σ-Operatorrings.
Fasst man die betrachteten Operatoren als unäre Operationen auf, so bildet jede Σ-Operatorgruppe und jeder Σ-Operatorring eine Multioperatorgruppe. Einen Multioperatorring erhalten wir nur, wenn wir in dessen Operationensystem Ω auch unäre Operationen zulassen.

Es ist möglich, für diese neuen Strukturen operationstreue Abbildungen, Kongruenzen usw. zu untersuchen. Es interessiert hier nur, dass bei Homomorphismen und Isomorphismen eine zusätzliche Homomorphiebedingung erfüllt sein muss. Für jeden Operator α aus Σ und jedes Element a von G muss die Relation

$$(a\alpha)\varphi = (a\varphi)\alpha \tag{1.100}$$

gültig sein. In diesem Fall sprechen wir von **Σ-Operatorhomomorphismen**. Weiterhin zeichnen sich einige Ω-Unterringe eines Σ-Multioperatorrings gegenüber anderen dadurch aus, dass sei Σ-zulässig sind, d.h. für jeden Operator α aus Σ und dem entsprechenden Ω-Unterring A gilt:

$$A\alpha \subseteq A \tag{1.101}$$

Von größerer Bedeutung als die eben untersuchten Σ-Multioperatorringe sind deren Spezialfall, die linearen Ω-Algebren über einem Körper P. Wir definieren:

Definition

Eine abelsche Gruppe $(G,+)$ heißt **lineare Ω-Algebra** über einem Körper P, wenn auf G ein System Ω n-ärer algebraischer Operationen ω_n, $n \geq 2$, definiert ist, dieser mit der Addition das Distributivgesetz erfüllen und des weiteren folgende Gleichungen erfüllt sind:
Für alle a aus G und α, β aus P

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta \tag{1.102}$$

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta \tag{1.103}$$

für alle a_1,...,a_n aus G und α aus P

$$(a_1+a_2)\alpha = a_1\alpha + a_2\alpha \tag{1.104}$$

$$(a_1 ... a_n\omega_n)\alpha = a_1 ... a_{i-1}(a_i\alpha)a_{i+1} ... a_n\omega_n \tag{1.105}$$

Fassen wir die Gleichungen (1.102) bis (1.105) zusammen, können wir auch sagen:
Eine lineare Ω-Algebra über einem Körper P ist ein Σ-Multioperatorring, dessen Operatorenbereich

P ist und die additive Gruppe einen linearen Vektorraum über P darstellt.

Ist das Operationensystem Ω der linearen Ω-Algebra die leere Menge von Operationen, so erhalten wir gerade die linearen Vektorräume. Enthält das Operationensystem nur eine binäre Multiplikation, so entsteht eine lineare Algebra im üblichen Sinne.
Mit der Struktur der linearen Ω-Algebra hat sich vor allem Kuros beschäftigt. An Literatur ist vor allem Kuros [10], [12] und [33] zu nennen.

1.7.3 Auflösbare und nilpotente Multioperatorringe

Unmittelbar mit der Theorie der Normalreihen und Hauptreihen von Multioperatorringen (Abschnitte 1.4.1 und 1.4.2) sind die Begriffe der nilpotenten und auflösbaren Multioperatorringe verbunden.

Definition

Eine Normalreihe eines Ω-Rings G heißt **Zentralreihe**

$$G = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_k = (0) \tag{1.106}$$

wenn für alle $i = 0,1,2,...,k-1$

$$[A_i,G] \subseteq A_{i+1}$$

gilt. Ein Multioperatorring G, welcher mindestens eine Zentralreihe besitzt, heißt **nilpotent**.

Jeder abelsche Multioperatorring (Ω-Zeroring) ist nilpotent, da dort $G \supset (0)$ eine Zentralreihe ist. Multioperatorringe, welche verschiedenen vom Ω-Nullring sind, und deren Kommutant G' gleich dem ganzen Multioperatorring ist, können folglich nicht nilpotent sein.

Unter einer **unteren Zentralkette** eines Multioperatorrings verstehen wir weiter eine absteigende Kette von Idealen

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_i \supset ... \tag{1.107}$$

wobei hier für alle $i = 0,1,2,...$

$$G_{i+1} = [G_i,G]$$

gilt. Man kann nun zeigen:

Satz 1
Ein Multioperatorring G ist dann und nur dann nilpotent, wenn eine untere Zentralkette nach endlich vielen Schritten bei dem Nullideal abbricht.

Beweis: Bricht die untere Zentralkette (1.107) nach endlich vielen Schritten ab, d.h., es existiert ein k mit $G_k = (0)$, so liegt offenbar eine Zentralreihe vor. G ist nilpotent.
Liegt umgekehrt eine Zentralreihe (1.106) in G vor, so setzen wir

$$G = G_0 = A_0$$

Ist nun schon gezeigt, dass G_i in dem Ideal A_i enthalten ist, so ergibt sich

$$G_{i+1} = [G_i,G] \subseteq [A_i,G] \subseteq A_{i+1}$$

Folglich ist auch G_k in dem Ideal $A_k = (0)$ enthalten, d.h., die Zentralkette bricht nach endlich vielen Schritten ab. Der Satz ist bewiesen.

Weiterhin können wir sagen:

Satz 2
Jeder Ω-Unterring und jedes homomorphe Bild eines nilpotenten Multioperatorrings ist nilpotent.

Beweis: Sei A ein Ω-Unterring eines nilpotenten Multioperatorrings G. Dann betrachten wir folgende untere Zentralkette

$$A = A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_i \supset ...$$

Dabei gilt $A_0 = A \subseteq G = G_0$. Haben wir nun schon gezeigt, dass dann auch das Ideal A_i und G_i enthalten sind, so ergibt sich für A_{i+1}:

$$A_{i+1} = [A_i,A] \subseteq [G_i,G] = G_{i+1}$$

Damit ist A_k aber in $G_k = (0)$ enthalten, womit die untere Zentralkette abbricht. Nach Satz 1 ist A dann ebenfalls nilpotent.
Der Beweis für die homomorphen Bilder ist langwierig und in Kuros [9] ab Seite 110 nachzulesen.

Kommen wir zu den auflösbaren Multioperatorringen.
Eine Normalreihe

$$G = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_k = (0)$$

eines Multioperatorrings G heißt genau dann **auflösbar**, wenn alle ihre Faktoren $(i = 0,1,...k-1)$

$$A_i/A_{i+1}$$

abelsche Multioperatorringe darstellen.
Ist das Operationensystem Ω nichtleer, müssen die Faktoren also Ω-Zeroringe sein. Nach Satz 3, 1.3.4, gilt folglich für alle $i = 0,1,...,k-1$:

$$[A_i,A_i] \subseteq A_[i+1]$$

Einen Multioperatorring nennen wir dann auflösbar, wenn er mindestens eine auflösbare Normalreihe besitzt. Zwischen nilpotenten und auflösbaren Ω-Ringen besteht der Zusammenhang:

Satz 3
Jeder nilpotente Multioperatorring ist auflösbar.

Beweis: Ist G nilpotenter Multioperatorring, so existiert in ihm eine Zentralreihe der Form (1.106). Dann gilt

$$[A_i,A_i] \subseteq [A_i,G] \subseteq A_{i+1}$$

Nach Satz 3, 1.3.4, sind die Faktoren abelsch. Der Beweis ist erbracht.

Führen wir noch den Begriff der Kommutantenkette ein.
Ist ein beliebiger Multioperatorring G gegeben, so nennen wir eine absteigende Kette von Ω-Unterringen

$$G = G^{(0)} \supset G' \supset G'' \supset ... \supset G^{(i)} \supset ... \quad (1.108)$$

$$\text{mit} \qquad G^{(i+1)} = [G^{(i)},G^{(i)}] \quad (1.109)$$

für alle $i = 0,1,2,...$, **Kommutantenkette** von G.
Dann können wir sagen:

Satz 4
Ein Multioperatorring G ist genau dann auflösbar, wenn G eine Kommutantenkette besitzt in der das Nullideal vorkommt.

Beweis: Zuerst sei G ein Multioperatorring in dem eine Kommutantenkette der Form (1.108) existiert und für ein k

$$G^{(k)} = (0)$$

gilt. Damit wird (1.108) aber zu einer endlichen und auflösbaren Normalreihe, da der Ω-Unterring eines Ω-Rings nach seinem Kommutanten immer abelsch ist.
Umgekehrt besitze G eine auflösbare Normalreihe

$$G = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_k = (0)$$

so setzen wir $G^{(0)} = G = A_0$. Ist nun schon gezeigt, dass der Kommutant $G^{(i)}$ in dem Ideal A_i enthalten ist, so erhalten wir

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)},G^{(i)}] \subseteq [A_i,A_i] = A_{i+1}$$

und folglich

$$G^{(k)} \subseteq A_k = (0)$$

womit der Beweis erbracht ist.

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass man für ein leeres Operationensystem des Multioperatorrings offenbar gleichlautende Sätze aus der Gruppentheorie erhält.

Kapitel 2

Direkte Summen von Multioperatorringen

2.1 Definition und Beispiele

2.1.1 Definition der direkten Summe

Bei der Untersuchung jeder Art von Strukturen besitzt der Begriff der direkten Vereinigung große Bedeutung.
Im Hauptsatz über abelsche Gruppen zum Beispiel wird mit den direkten Vereinigungen die Untersuchung zyklischer Gruppen zurückgeführt.
Um nun allgemein über Multioperatorringe Aussagen über direkte Zerlegungen zu treffen, werden wir nun die direkten Summen einführen und anschließend von verschiedenen Seiten aus untersuchen.

Entsprechend zur Definition der direkten Vereinigung von Multioperatorgruppen (Higgins [3], Seite 396) definieren wir hier:

Definition

Ein Ideal A eines Multipperatorrings G heißt dann und nur dann **direkte Summe** der Ideale $B_1, B_2, ..., B_n$ von G, wenn A die Summe der Ideale B_i, $i = 1,...,n$, ist, d.h.

$$A = B_1 + B_2 + ...B_n = \sum_{i=1}^{n} B_i \tag{2.1}$$

und wenn für alle $j = 1,...,n$,

$$(B_1 + ... + B_{j-1} + B_{j+1} + ... + B_n) \cap B_j = (0) \tag{2.2}$$

gilt.

Als Bezeichnung verwenden wir für "A ist direkte Summe der Ideale B_i, $i = 1,...,n$":

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n = \oplus \sum_{i=1}^{n} B_i \tag{2.3}$$

Ebenso sprechen wir von der **direkten Zerlegung** von A, bzw. von der **direkten Vereinigung** der B_i, $i = 1,...,n$. Die Ideale $B_1,...,B_n$ nennen wir **direkte Summanden** des Ideals A.

Spezialisieren wir diese Definition für Ringe erhalten wir:

Definition

Ein Ringideal A eines nicht notwendigerweise assoziativen Rings R heißt genau dann die direkte Summe der Ringideale B_1,...,B_n von R, wenn A die Summe der Ideale B_1,...,B_n ist und wenn für alle $j = 1$,...,n

$$\left(\sum_{i=1;j\neq i}^{n} B_i\right) \cap B_j = (0)$$

gilt.

Für abelsche Gruppen als entartete Multioperatorringe erhält man entsprechend die dort übliche Definition.

Zu der Definition der direkten Summe in Multioperatorringen macht sich eine Bemerkung notwendig. Relation (2.2) ist bei der Bestimmung von direkten Summen schwer zu handhaben. Deshalb vereinfachen wir:

Satz 1 (Kuros)
Zu Relation (2.2) ist folgende Relation äquivalent: Für alle $j = 1$,...,n gilt:

$$(B_1 + ... + B_{j-1}) \cap B_j = (0) \tag{2.4}$$

Beweis: Aus Relation (2.2) folgt sofort Relation (2.4). Die Umkehrung zeigen wir mit vollständiger Induktion. Für $j = 2$ wird Gleichung (2.4) zu:

$$B_1 \cap B_2 = (0)$$

was für $j = 2$ schon mit Relation (2.2) übereinstimmt. Für $j = l-1$ sei die Äquivalent schon bewiesen. (2.4) wird dann für $j = l$ zu:

$$(B_1 + ... + B_{l-1}) \cap B_l = (0)$$

Für ein beliebiges natürliches $i < l$ erhalten wir außerdem

$$B_i \cap (B_1 + ... + B_{l-1}) = (0) \tag{2.5}$$

so dass sich ergibt

$$(B_1 + ... + B_{i-1} + B_{i+1} + ... + B_l) \cap B_i =$$

$$= (B_1 + ... + B_{i-1} + B_{i+1} + ... + B_l) \cap B_i \cap (B_1 + ... + B_{l-1}) =$$

$$= ((B_1 + ... + B_{i-1} + B_{i+1} + ... + B_{l-1}) + B_l) \cap B_i \cap (B_1 + ... + B_{l-1}) =$$

und mit Satz 2, 1.3.6, wird

$$= (((B_1 + ... + B_{i-1} + B_{i+1} + ... + B_{l-1}) + B_l) \cap (B_1 + ... + B_{l-1})) + (B_l \cap (B_1 + ... + B_{l-1})) \cap B_i =$$

und nach Induktionsvoraussetzung

$$= ((B_1 + ... + B_{i-1} + B_{i+1} + ... + B_{l-1}) \cap (B_1 + ... + B_{l-1})) \cap B_i =$$

und mit Relation (2.5)

$$= (B_1 + ... + B_{i-1} + B_{i+1} + ... + B_{l-1}) \cap B_i = (0)$$

womit der Beweis erbracht ist.

Obwohl dieses Kriterium (2.4) schon einfacher zu benutzen ist als (2.2), erweist sich für die Diskussion von direkten Summen ein notwendiges Kriterium für die Existenz von direkten Zerlegungen als äußerst wichtig.
Schreiben wir (2.4) für $i = 2$ und $i = 3$ explizit aus, erhalten wir

$$i = 2: \qquad B_1 \cap B_2 = (0) \qquad ; \qquad i = 3: \qquad (B_1 + B_2) \cap B_3 = (0) \tag{2.6}$$

Damit dies gilt, müssen die B_i offenbar auch paarweise disjunkt bis auf Null disjunkt sein. Es gilt folglich:

Satz 2 (notwendiges Kriterium für die Existenz von direkten Summen)
Ein Ideal A kann dann und nur dann direkte Summe eine Systems von Idealen B_i, $i = 1,...,n$ sein, wenn für alle $j,k = 1,...,n$, $j \neq k$

$$B_j \cap B_k = (0) \tag{2.7}$$

gilt.

Wenn ein Ideal A eines Multioperatorrings G direkte Summe der Ideale $B_1,...,B_n$ ist und ein weiteres Ideal C in dem Multioperatorring G existiert, für welches

$$C = B_1 + B_2 + ... + B_l$$

mit $l < n$, gilt, so ist A auch direkte Summe von

$$A = C \oplus B_{l+1} \oplus ... \oplus B_n$$

was sofort aus Satz 1 und der Definition folgt.
Ist B_1 andererseits selbst direkte Summe von Idealen $C_1,...,C_l$, so ergibt sich

$$A = C_1 \oplus ... \oplus C_l \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n$$

Da der Reihenfolge der Summanden nach Definition keine Bedeutung zukommt, sagen wird:

Ist ein Ideal A eines Multioperatorrings G direkte Summe von Idealen B_i, $i = 1,...,n$, und sind einige der B_i (möglicherweise auch alle) selbst direkte Summe von Idealen C_{ij}, $j = 1,...,l_i$, dann heißt die direkte Zerlegung von A, in der alle diese C_{ij} und die nicht zerlegbaren B_i vorkommen, eine Fortsetzung von (2.3).

Aus allen diesen Folgerungen erkennt man, dass, ist ein Ideal A als direkte Summe von n Idealen darstellbar, so existieren auch zwei Ideale B_1 und B_2, deren Summe A ist. D.h. also, ist ein Ideal direkt zerlegbar, dann ist es auch in zwei Ideale zerlegbar und umgekehrt.

Aus der Definition der direkten Summe in Multioperatorringen folgt auch, dass jedes Ideal von sich selbst direkter Summand ist, d.h., es gilt für jedes Ideal A

$$A = A \oplus (0)$$

Direkte Zerlegungen dieser Form sind aber trivial, so dass wir diese in Zukunft nicht mehr angeben. Wir werden uns auf direkte Zerlegungen beschränken, welche nichttrivial sind.

2.1.2 Beispiele für direkte Summen

Wenden wir uns nun einigen Beispielen zu.
Der Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$ besitzt genau sechs Ideale:

$$\mathbb{Z}_{12}; \quad (2); \quad (3); \quad (4); \quad (6); \quad (0)$$

Mit diesen können folgende Paare bis auf Null disjunkter Ideale gebildet werden:

$$(0)\ ,\ (0);\quad (0)\ ,\ (6);\quad (0)\ ,\ (4);\quad (0)\ ,\ (3);\quad (0)\ ,\ (2);\quad (0)\ ,\ \mathbb{Z}_{12};\quad (4)\ ,\ (6);\quad (4)\ ,\ (3)$$

Diesen Paare entsprechen dann die trivialen direkten Summen:

$$(0) = (0) \oplus (0);\quad (6) = (6) \oplus (0);\quad (5) = (4) \oplus (0)$$

$$(3) = (3) \oplus (0);\quad (2) = (2) \oplus (0);\quad \mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_{12} \oplus (0)$$

und außerdem nichttriviale direkte Summen:

$$(2) = (4) \oplus (6);\quad \mathbb{Z}_{12} = (3) \oplus (4)$$

Es treten sechs triviale und zwei nichttriviale direkte Zerlegungen auf. Da der Restklassenring selbst als direkte nichttriviale Summe auftritt, werden wir später zeigen, dass dieser Restklassenring direkt zerlegbar ist.

Als nächstes Beispiel betrachten wir den Multioperatorring $(\mathbb{R}^2, +, \circ)$, welcher Paare von reellen Zahlen enthält und die Operationen komponentenweise ausgeführt werden. Dieses Multioperatorring besitzt genau vier Ideale, die trivialen und die Ideale

$$A_1 = \{(a,0) | a \in \mathbb{R}\} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \{(0,a) | a \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_1 \arrow[dr, dash] & & A_2 \arrow[dl, dash] \\
& (0) &
\end{tikzcd}$$

Zeichnen wir das Diagramm des mengentheoretischen Enthaltenseins für die Ideale, hat dieses obiges Aussehen.
Die Ideale A_1 und A_2 sind verschiedene minimale Ideale des Multioperatorrings $\mathbb{R}^2$ und folglich nach Satz 3, 1.3.3, bis aus das Nullelement zueinander disjunkt. Deren Summe $A_1 + A_2$ ist folglich direkt. Wir erhalten

$$\mathbb{R}^2 = A_1 \oplus A_2$$

Gehen wir zu dem Multioperatorring $(\mathbb{R}^3, +, \circ)$ über, wird das Diagramm der Ideale

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^3 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_{12} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & A_{13} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & A_{23} \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
A_1 \arrow[dr, dash] & A_2 \arrow[d, dash] & A_3 \arrow[dl, dash] \\
& (0) &
\end{tikzcd}$$

wobei die $A_i = \{(\delta_{1i}a, \delta_{2i}a, \delta_{3i}a) | a \in \mathbb{R})\}$, $i = 1,2,3$ und

$$A_{12} = A_1 + A_2 \qquad A_{23} = A_2 + A_3 \qquad A_{13} = A_1 + A_3$$

die nichttrivialen Ideale von $\mathbb{R}^3$ sind. δ_{ij} ist dabei das Kronecker-Symbol.
Da die A_i, $i = 1,2,3$, minimale Ideale sind, müssen sie auch direkte Summanden sein. Wir erhalten als direkte Vereinigungen

$$A_{12} = A_1 \oplus A_2 \qquad A_{23} = A_2 \oplus A_3 \qquad A_{13} = A_1 \oplus A_3$$

Da nun auch

$$(A_1 + A_2) \cap A_3 = (0)$$

gilt, existiert auch die direkte Summe der drei minimalen Ideale und es gilt:

$$\mathbb{R}^3 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$$

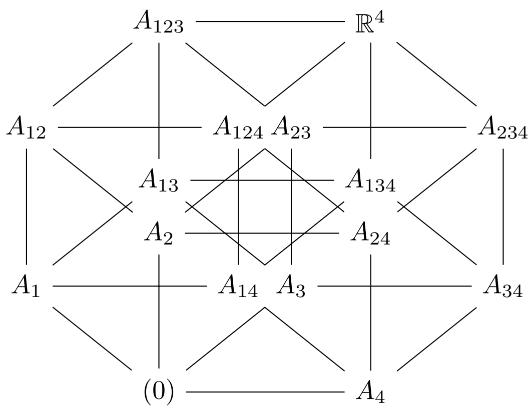
In 2.3 werden wir Kriterien finden, welche uns erlauben, sofort aus dem Idealdiagramm direkte Zerlegungen abzulesen.
Verallgemeinern wir dies eben Gezeigte auf n-Tupel von reellen Zahlen, so erhalten wir (ohne Beweis):

Satz 1
Im Multioperatorring $(\mathbb{R}^n,+,\circ)$, wobei n eine natürliche Zahl größer Null ist, ist $\mathbb{R}^n$ direkte Summe

$$\mathbb{R}^n = \oplus \sum_{i=1}^{n} (\delta_{i1}a,\delta_{i2}a,...,\delta_{in}a) \tag{2.8}$$

wobei δ_{ik} das Kronecker-Symbol ist und die $(\delta_{i1}a,\delta_{i2}a,...,\delta_{in}a)$ die minimalen Ideale von $\mathbb{R}^n$ sind, deren Elemente jeweils nur eine von Null verschiedene Komponente besitzen.

Es sei noch bemerkt, dass für $\mathbb{R}^4$ das Idealdiagramm die i.A. übliche auf eine Ebene projizierte Darstellung eines 4-dimensionalen Würfels annimmt.



Im Kapitel 1 begegneten uns, ohne dass wir dies feststellten, schon wiederholt direkte Summen.
In Satz 6, 1.3.5, zeigten wir, dass für zwei komplementäre normale Endomorphismen α und β deren Radikale R_α und R_β bis auf Null disjunkt sind und deren Summe das Radikal R_γ der Nacheinanderausführung $\gamma = \alpha\beta$ ergab. Mit der Definition der direkten Summe wird:

Satz 6 (1.5.5, zweite Fassung)
Sind α und β komplementäre normale Endomorphismen eines Multioperatorrings G und der Endomorphismus $\gamma = \alpha\beta$ deren Nacheinanderausführung, wobei R_α, R_β und R_γ die Radikale der Endomorphismen α, β und γ sind, so ist R_γ die direkte Summe der Radikale R_α und R_β

$$R_\gamma = R_\alpha \oplus R_\beta$$

Weitere Beispiele begegneten uns bei der Untersuchung des Quasiendomorphismenrings des Restklassenrings Z_4. Betrachten wir die auf Seite 72 zusammengestellten Ideale von Q_4, so können wir eine Vielzahl Paare von Idealen feststellen, welches bis auf das Nullelement disjunkt sind. Ohne dass wir jede direkte Summe besprechen, seine einige angegeben:

$$Q_4 = (\alpha_3) \oplus (\alpha_{10})$$

d.h., der ganze Quasiendomorphismenring Q_4 ist die direkte Summe seines Kommutanten G' und seines Zentrums. Es sei bemerkt, dass sich Kommutant und Zentrum von Q_4 nur auf triviale Weise als direkte Summen darstellen lassen. Weitere direkte Summen:

$$(\alpha_8,\alpha_{11}) = (\alpha_8) \oplus (\alpha_{11}) = (\alpha_6) \oplus (\alpha_{11}) = (\alpha_4) \oplus (\alpha_{13}) = (\alpha_{11}) \oplus (\alpha_{13}) \oplus (\alpha_{10})$$

$$(\alpha_1,\alpha_{11}) = (\alpha_1) \oplus (\alpha_{11}) = (\alpha_{11}) \oplus (\alpha_{13}) = (\alpha_1) \oplus (\alpha_{13})$$

$$(\alpha_6) = (\alpha_{10}) \oplus (\alpha_{13})$$

$$(\alpha_8) = (\alpha_{10}) \oplus (\alpha_1)$$

$$(\alpha_4) = (\alpha_{10}) \oplus (\alpha_{11})$$

2.1.3 Direkt unzerlegbare Multioperatorringe

Suchen wir im Restklassenring $\mathbb{Z}_7$ nach direkten Summen. Wie wir wissen, ist dieser Multioperatorring Ω-Körper und besitzt damit nur die trivialen Ideale. Folglich kann es auch keine nichttrivialen direkten Summen geben.
Einen Multioperatorring, in dem keine echten direkten Summen existieren, nenne wir **direkt unzerlegbar**. Ebenso heißt ein Ideal eines Multioperatorrings direkt unzerlegbar, wenn es sich nur auf triviale Weise als direkte Summe darstellen lässt.
Direkt unzerlegbar sind sicher alle einfachen Multioperatorringe, d.h. auch alle Ω-Körper. Jedoch kann es auch andere geben.

Betrachten wir den Restklassenring $\mathbb{Z}_8$, so besitzt dieser 2 nichttriviale Ideale (2) und (4). Das Idealdiagramm hat die Form

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_8 \\ | \\ (2) \\ | \\ (4) \\ | \\ (0) \end{array}$$

Damit existiert aber kein Paar bis auf Null disjunkter echte Ideale. Nach Satz 2, 2.1.1, kann es folglich keine echten direkten Zerlegungen in diesem Ω-Ring geben. Er ist direkt unzerlegbar.

Während der Restklassenring $\mathbb{Z}_8$ endliche viele Ideale besitzt, können auch Multioperatorringe mit unendlich vielen Idealen direkt unzerlegbar sein. Ein Vertreter ist der Ring der ganzen Zahlen.

Satz 1
Die Ring der ganzen Zahlen ist direkt unzerlegbar.

Beweis: Damit in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ideal direkt zerlegbar wäre, müsste es nach Satz 2, 2.2.1, mindestens ein Paar bis auf Null disjunkter Ideale geben.
Angenommen $a\mathbb{Z}$ und $b\mathbb{Z}$ wären zwei nichttriviale derartige Ideale. Da der Ring der ganzen Zahlen nur Hauptideale der Form $n\mathbb{Z}$, mit n als beliebige natürliche Zahl, besitzt, ist die Annahme gerechtfertigt. Da $a\mathbb{Z}$ als Hauptideal von dem Element a erzeugt wird, ist

$$\underbrace{a + a + ... + a}_{b-mal} = ba$$

Element des Ideals $a\mathbb{Z}$. Betrachtet man das Element

$$\underbrace{b+b+...+b}_{a-mal} = ab$$

so erkennt man, dass diese Element ebenfalls in $a\mathbb{Z}$ enthalten sein muss, da die Vielfachbildung im Ring der ganzen Zahlen mit der Multiplikation zusammenfällt und diese kommutativ ist.
Da aber das Element $ab = b+b+...+b$ auch in dem Ideal $b\mathbb{Z}$ enthalten ist, können die betrachteten beiden Ideale nicht bis auf das Nullelement disjunkt sein. Es liegt ein Widerspruch zur Annahme vor. Der Ring der ganzen Zahlen ist direkt unzerlegbar. Der Beweis ist erbracht.

Später werden wir noch weitere Sätze finden, aus denen diese Aussage ebenso schnell folgt.
Ohne Beweis sei nur erwähnt, dass Polynomringe über Integritätsbereichen ebenfalls direkt unzerlegbar sind. Der Quasiendomorphismenring über den ganzen Zahlen ist als freier Multioperatorring gleichfalls direkt unzerlegbar.
Dies folgt aus der Isomorphie zum dem Polynomring (Absolutglieder gleich Null) über den ganzen Zahlen.

2.1.4 Direkte Zerlegungen in Restklassenringen

Da sich vor allem die Restklassenringe sehr gut zur Untersuchung von direkten Summen eignen, z.B. besitzen sie Hauptreihen, was sich als wichtig erweisen wird, soll speziell für diese Strukturen ein Satz über die Existenz von direkten Zerlegungen angegeben werden.

Satz 1
Sei $\mathbb{Z}_n$ ein beliebiger Restklassenring modulo n, $n \geq 2$, wobei die Primfaktorzerlegung von n

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_k^{e_k} \tag{2.9}$$

gegeben sei. Dabei ist k eine natürliche Zahl größer Null und alle Exponenten $e_i \geq 1$, $i = 1,...,k$ sind. Dann gilt

1. Für jedes $i = 1,...,k$ bilden die von $\frac{n}{p_i^{e_i}}$ erzeugten Ω-Unterringe Ideale

$$\left(\frac{n}{p_i^{e_i}}\right) \tag{2.10}$$

in dem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$.

2. Der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ ist selbst direkte Summe alle Ideale der Form (2.10)

$$\mathbb{Z}_n = (1) = \oplus \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n}{p_i^{e_i}}\right) \tag{2.11}$$

3. Der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ besitzt genau

$$s = 1 + e_1 + ... + e_k$$

direkt unzerlegbare Ideale, und zwar das Nullideal (0) und alle Ideale der Form

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right) \tag{2.12}$$

für alle t_i mit $1 \leq t_i \leq e_i$ und alle p_i mit $1 \leq i \leq k$.

4. Jedes andere Ideal (a) lässt sich als direkte Summe darstellen, wobei gilt: Da a Teiler von n ist, besitzt $\frac{n}{a}$ die Primfaktorzerlegung

$$\frac{n}{a} = q_1^{f_1} \cdot q_2^{f_2} \cdot ...q_l^{f_l} \tag{2.13}$$

mit q_i als Primzahlen und alle $f_i \geq 1$, $i = 1,...,l$, und es gilt

$$(a) = \oplus \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{n}{q_j^{f_j}} \right) \tag{2.14}$$

5. Jede dieser direkten Summen ist bis auf Reihenfolge der Summanden eindeutig. Die Summanden sind direkt unzerlegbar.

Beweis: zu 1: In Abschnitt 1.3.1 wurde erwähnt, dass jeder Teiler von n im Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ als Vertreter einer Restklasse ein Ideal, ein Hauptideal, erzeugt. Hier soll dies kurz gezeigt werden:
Sei t ein Teiler von n. Dann erzeugt die Klasse $[t]$ additiv eine endliche Gruppe, da, wenn $x + 1$ der zugehörige Komplementärteiler ist

$$(x + 1)[t] = [0]$$

wird. Diese abelsche Gruppe besitzt damit $x + 1$ Elemente und ist Untergruppe des Moduls von $\mathbb{Z}_n$. Für zwei beliebige Restklassen $[xt]$ und $[yt]$ aus dieser Untergruppe wird dann

$$[xt] \cdot [yt] = [(xyt)t] \in (t)$$

womit (t) Ω-Unterring des Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$ wird. Für eine beliebige Klasse $[a]$ aus $\mathbb{Z}_n$ erhalten wir außerdem

$$[a] \cdot [xt] = [(ax)t] \in (t)$$

so dass tatsächlich für jeden Teiler t von n ein Ideal vorliegt. Damit sind die

$$\left(\frac{n}{p_i^{e_i}} \right)$$

auch Ideale aus dem Restklassenring und 1. ist gezeigt.

zu 2.: Zuerst soll gezeigt werden, dass die Summe aller Ideale

$$\left(\frac{n}{p_i^{e_i}} \right)$$

den ganzen Multioperatorring $\mathbb{Z}_n$ ergibt. Nach dem Hilfssatz von Lugowski-Weinert [14] aus 1.3.1: In jedem Hauptidealring gilt für die Summe zweier Ideale $(a) + (b) = (\mathrm{ggt}(a,b))$.
ist

$$\left(\frac{n}{p_1^{e_1}} \right) + \left(\frac{n}{p_2^{e_2}} \right) = \left(ggt \left(\frac{n}{p_1^{e_1}}, \frac{n}{p_2^{e_2}} \right) \right)$$

Da nun

$$\frac{n}{p_1^{e_1}} = \prod_{j=2}^{k} p_j^{e_j} \qquad \text{und} \qquad \frac{n}{p_2^{e_2}} = \prod_{j=1, j \neq 2}^{k} p_j^{e_j}$$

ist, wird

$$ggt \left(\frac{n}{p_1^{e_1}}, \frac{n}{p_2^{e_2}} \right) = p_3^{e_3} \cdot ... \cdot p_k^{e_k} = \frac{n}{(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2})}$$

also

$$\left(\frac{n}{p_1^{e_1}}\right) + \left(\frac{n}{p_2^{e_2}}\right) = \left(\frac{n}{p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2}}\right)$$

für $l < k$ also

$$\sum_{j=1}^{l} \left(\frac{n}{p_j^{e_j}}\right) = \left(\frac{n}{\prod\limits_{j=1}^{l} p_j^{e_j}}\right)$$

und für $l = k$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{n}{p_j^{e_j}}\right) = \left(\frac{n}{\prod\limits_{j=1}^{k} p_j^{e_j}}\right) = \mathbb{Z}_n$$

womit die Summe aller Ideale der Form (2.10) tatsächlich den ganzen Restklassenring ergibt.
Weisen wir nun (2.4), 2.1.1, nach. Für ein beliebiges i, $i = 1,...,k$, wird dann mit den gleichen Überlegungen

$$\sum_{j=1, i\neq j}^{k} \left(\frac{n}{p_j^{e_j}}\right) = \left(\frac{n}{p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_{j-1}^{e_{j-1}} \cdot p_{j+1}^{e_{j+1}} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}}\right) = (p_i^{e_i})$$

Das Ideal $(p_i^{e_i})$ enthält aber gerade alle Vielfachen von $p_i^{e_i}$, während $\left(\frac{n}{p_i^{e_i}}\right)$ alle Elemente enthält, welche eben nicht durch $p_i^{e_i}$ teilbar sind, womit für alle i

$$(p_i^{e_i}) \cap \left(\frac{n}{p_i^{e_i}}\right) = (0)$$

gilt. Damit ist aber 2. gezeigt.

zu 3.: Dass das Nullideal (0) direkt unzerlegbar ist, folgt aus der Definition der direkten Unzerlegbarkeit. Wählen wir ein beliebiges Ideal

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right)$$

Auf Grund der Nebenbedingungen ist dann

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right) = \left(p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_{i-1}^{e_{i-1}} \cdot p_i^{e_i - t_i} \cdot p_{i+1}^{e_{i+1}} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}\right)$$

Angenommen dieses Ideal wäre direkt zerlegbar, so muss es zwei echte Ideale im Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ geben, welche in diesem Ideal echt enthalten sind und nur das Nullelement gemeinsam haben.
Da in einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ ein Ideal (y) genau dann in einem Ideal (x) enthalten ist, wenn ein a, mit a als Teiler von n, existiert, so dass

$$x \cdot a = y$$

gilt, müssen wir für

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right)$$

zwei Ideale finden, deren Erzeugende echte Vielfache von $\frac{n}{p_i^{t_i}}$ sind.
Da alle in $\mathbb{Z}_n$ möglichen Faktoren durch die Primzahlen $p_1,...,p_k$ gebildet werden und die bis auf p_i schon vollständig aufgebraucht sind, kann nur gelten:

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right) \supset \left(\frac{n}{p_i^{t_i - 1}}\right) = \left(p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_i^{e_i - t_i + 1} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}\right)$$

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right) \supset \left(\frac{n}{p_i^{t_i-2}}\right) = \left(p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{e_i-t_i+2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}\right)$$

...

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right) \supset \left(\frac{n}{p_i}\right) = \left(p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{e_i-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}\right)$$

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i}}\right) \supset (n) = (0)$$

Andere Ideale können nicht echt enthalten sein. Betrachtet man diese Ideale, ergibt sich:

$$\left(\frac{n}{p_i^{t_i-1}}\right) \supset \left(\frac{n}{p_i^{t_i-2}}\right) \supset \ldots \supset \left(\frac{n}{p_i}\right) \supset (0)$$

Damit können die interessierenden Ideale; (0) würde nur eine triviale direkte Summe ergeben; untereinander nicht paarweise bis auf das Nullelement disjunkt sein, womit keine zwei der geforderten Ideale existieren. Ideale der Form (2.12) sind direkt unzerlegbar. Dass dies insgesamt s sind, folgt aus den Nebenbedingungen, wobei das Nullideal nicht vergessen werden darf.

Zeigen wir nun, dass jedes andere Ideal des Restklassenrings direkte Summe ist. Da offenbar alle Ideale der Form

$$\left(\frac{n}{x}\right)$$

bei denen x die Potenz genau eines Primfaktors p_i von n ist, direkt unzerlegbar sind, muss jedes andere Ideal (z) die Form

$$(z) = \left(\frac{n}{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k}}\right) \tag{2.15}$$

besitzen, wobei für alle i, $0 \leq h_i \leq e_i$ ist, und mindestens zwei der h_i größer Null sein müssen.

Angenommen dies wären h_i und h_j, womit dann das Ideal (z) die Ideale

$$\left(p_i \frac{n}{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k}}\right) \qquad \text{und} \qquad \left(p_j \frac{n}{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k}}\right)$$

echt umfasst. Da h_i und h_j verschieden Null sind, existieren diese Ideale in dem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ tatsächlich. Ebenso sind sie damit verschieden vom Nullideal.
Lassen sich beide in der Form (2.12), so sind sie, wie oben gezeigt, bis auf Null zueinander disjunkt und ihre Summe wird ganz (z). Das Ideal (z) ist damit echt direkt zerlegbar.
Für den Fall, dass eines oder beide Ideale sich nicht in der Form (2.12) darstellen lassen, müssen Fallunterscheidungen durchgeführt werden:

Fall A: In der Darstellung (1.15) sind genau zwei der h_i verschieden von Null. O.B.d.A. seien dies h_1 und h_2, da die Reihenfolge der Primfaktoren keinen Einfluss hat.

(z) hat dann die Form:

$$(z) = \left(\frac{n}{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2}}\right)$$

Die Möglichkeit $h_1 = h_2 = 1$ wurde oben schon gezeigt. Für die anderen möglichen Werte konstruieren wir die Ideale

$$A_1 = \left(p_1^{h_1} \cdot z\right) = \left(\frac{n}{p_2^{h_2}}\right) \qquad \text{und} \qquad A_2 = \left(p_2^{h_2} \cdot z\right) = \left(\frac{n}{p_1^{h_1}}\right)$$

Dass beide Ideale A_1 und A_2 echt in (z) enthalten sind, folgt aus der Konstruktion. Es gilt aber auch:

$$A_1 \cap A_2 = (0)$$

A_1 enthält nur Elemente, welche durch $p_1^{h_1}$ teilbar sind. Dagegen gehören zu A_2 nur die Klassen aus $\mathbb{Z}_n$, welche gerade keine Vielfache von $p_1^{h_1}$ sind.
Können wir noch zeigen, dass $A_1 + A_2 = (z)$ ist, so wird das Ideal (z) direkte Summe der beiden Ideale, also echt direkt zerlegbar. Mit dem Hilfssatz ist aber:

$$A_1 + A_2 = \left(\frac{n}{p_2^{h_2}}\right) + \left(\frac{n}{p_1^{h_1}}\right) = \left(\frac{n}{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2}}\right) = (z)$$

Fall B: In der Darstellung (1.15) von (z) sind mehr als zwei der h_i verschieden von Null. Auf Grund der Möglichkeit des Umnummerierens sollen es die h_1,...,h_i, $3 \leq i \leq k$ sein.

Hier konstruieren wir folgende Ideale:

$$A_1 = \left(p_1^{h_1} \cdot \frac{n}{p_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k}}\right) = \left(p_1^{h_1} \cdot z\right)$$

$$A_2 = \left(p_2^{h_2} \cdot p_3^{h_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{h_i} \cdot \frac{n}{p_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k}}\right) = \left(\prod_{j=2}^{i} p_j^{h_j} \cdot z\right)$$

Da alle h_j mit $j > i$ nach Voraussetzung gleich Null sind, erhalten wir einfacher:

$$A_1 = \left(\frac{n}{p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{h_i}}\right) \qquad \text{und} \qquad A_2 = \left(\frac{n}{p_1^{h_1}}\right)$$

Dass (z) die beiden Ideale A_1 und A_2 echt umfasst, ergibt sich erneute aus der Konstruktion der beiden Ideale. Dass beide Ideal bis auf das Nullelement zueinander disjunkt sind, erhalten wir aus der Tatsache, dass A_i gerade alle Vielfachen von $p_1^{h_1}$ enthält, A_2 aber alle Elemente, welche zu $p_1^{h_1}$ relativ prim sind. Weiterhin gilt:

$$A_1 + A_2 = \left(\frac{n}{p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{h_i}}\right) + \left(\frac{n}{p_1^{h_1}}\right) = \left(\frac{n}{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{h_i}}\right) = (z)$$

womit das Ideal (z) auch im Fall B direkt zerlegbar ist. Alle Ideale des Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$, welche nicht eine Darstellung (1.12) besitzen, sind damit echt direkt zerlegbar. 3. ist gezeigt.

zu 4.: Die erste Aussage wurde eben nachgewiesen. Ebenso, bei 1., dass a Teiler von n ist. Die Summe aller Ideale

$$\left(\frac{n}{q_j^{f_j}}\right)$$

wird dann mit den gleichen Überlegungen wie bei 2. zu:

$$\sum_{j=1}^{l} \left(\frac{n}{q_j^{f_j}}\right) = \left(\frac{n}{q_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{f_l}}\right) = (a)$$

Außerdem wird

$$\left(\sum_{j=1, i\neq j}^{l} \left(\frac{n}{q_j^{f_j}}\right)\right) \cap \left(\frac{n}{q_i^{f_i}}\right) = \left(\frac{n}{\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{l} q_j^{h_j}}\right) \cap \left(\frac{n}{q_i^{f_i}}\right) = (0)$$

für alle $i = 1$,...,l, womit auch 4. gezeigt ist.

zu 5.: Die Unzerlegbarkeit der Summanden ergibt sich aus 3. und 4. Die Eindeutigkeit der Zerlegungen kann dagegen im Moment noch nicht gezeigt werden.

Es sei an dieser Stelle nur darauf verwiesen, dass die Eindeutigkeit sich aus der Existenz der Hauptreihen ableiten lässt.
Deshalb soll noch die Existenz von Hauptreihen in den Restklassenringen nachgewiesen werden.

Da die Restklassenringe endlich viele Elemente besitzen, folgt aus Satz 4, 1.4.2, sofort das Gesuchte. Wir geben eine dieser Hauptreihen explizit an.
Betrachten wir wieder die Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}$$

und folgende Ideale

$$\mathbb{Z}_n = (1) \quad ; \quad (p_1) \quad ; \quad (p_1^2) \quad ; \quad ... \quad ; \quad (p_1^{e_1}) \quad ; \quad (p_1^{e_1} \cdot p_2) \quad ; \quad ... \quad ; \quad (p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2}) \quad ;$$
$$... \quad ; \quad (p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{e_{k-1}} \cdot p_k) \quad ; ... \quad ; (\frac{n}{p_k}) \quad ; \quad (0)$$

Diese Ideale bilden eine Kette und damit eine Normalreihe. Dass keine weiteren Verfeinerungen möglich sind, folgt daraus, dass jedes nachfolgende Ideal durch Multiplikation mit einer Primzahl entstand, d.h.

$$\mathbb{Z}_n = (1) \supset (p_1) \supset ... \supset (p_1^{e_1}) \supset (p_1^{e_1} \cdot p_2) \supset ... \supset (p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2}) \supset ... \supset (p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{e_{k-1}} \cdot p_k) \supset ... \supset (\frac{n}{p_k}) \supset (0)$$

ist Hauptreihe im Restklassenring $\mathbb{Z}_n$. Ihre Länge ist gleich

$$l = \sum_{j=1}^{k} e_j$$

Der Beweis ist, bis aus die Einschränkung, erbracht.

2.1.5 Folgerungen und Beispiele

Aus dem eben gezeigten Satz können einige Folgerungen gezogen werden.
Aus der Darstellung (2.11), 2.1.4, folgt sofort, dass der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ die direkte Summe von genau k unzerlegbaren Summanden ist, wobei k die Anzahl paarweise verschiedener Primfaktoren von n darstellt.

Im Beweis von 3. Satz 1, 2.1.4, wurde gezeigt, dass jedes Ideal, welches nicht Form (2.12), 2.1.4, besitzt, als direkte Summe zweier Summanden darstellbar ist. Wird $k \neq 2$, muss diese Darstellung aber nicht eindeutig sein, wie anschließendes Beispiel zeigen wird. Gleiches gilt für ein Ideal (a) des Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$. Aus dem Beweis kann man sogar eine gewisse Anzahl von direkten Zerlegungen ablesen. Stellen wir (a) durch

$$(a) = \left(\frac{n}{p_1^{h_1} \cdot ... \cdot p_k^{h_k}} \right) \tag{2.16}$$

mit $0 < h_i < e_i$, dar, so sind eine gewisse Anzahl der h_i verschieden von Null. O.B.d.A. seien dies $h_1, h_2, ..., h_l$. Damit ergeben die Paare von Idealen

$$A_1 = \left(\frac{n}{p_i^{h_i}} \right) \qquad \text{und} \qquad A_2 = \left(\frac{n}{\prod\limits_{j=1, i \neq j}^{l} p_j^{h_j}} \right)$$

mit $i = 1,...,l$ gerade direkte Summanden von A. Für $l = 3$ sind diese Paare die einzigen direkten Summen mit zwei Summanden für (a). Für $l > 3$ existieren im Allgemeinen noch mehr. So ergeben sich (ohne Beweis) für

$$\begin{array}{rc} l = 4: & 7 \text{ Paare} \\ l = 5: & 15 \text{ Paare} \\ l = 6: & 31 \text{ Paare} \\ \text{und im allgemeinen:} & 2^{l-1} - 1 \text{ Paare} \end{array}$$

Dass diese direkten Summen nicht eindeutig sind, ist offensichtlich.
Aus dem Satz 1, 2.1.3, können wir auch auf Restklassenringe mit Primzahlpotenzordnung schließen:

Satz 1
Ein Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, wobei n Primzahlpotenz ist, ist direkt unzerlegbar.

Beweis: Nach Satz 1, 2.1.4, gilt dann

$$\mathbb{Z}_n = (1) = \oplus \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n}{p_i^{e_i}} \right)$$

Da nur ein Primfaktor existiert, wird also

$$(1) = \left(\frac{n}{p_i^{e_i}} \right)$$

womit der Restklassenring nur trivial direkt zerlegbar ist. Für ein Ideal schließt man analog. Der Beweis ist erbracht.

Selbstverständlich sind mit diesem Satz auch alle Restklassenringe modulo Primzahl diskutiert, da sie ja auch modulo Primzahlpotenz $p = p^1$ sind.
Wenden wir das Gefundene auf ein Beispiel an.
Wir benutzen den Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$. Dessen Primfaktorzerlegung ist

$$5040 = n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

wobei k gleich 4 ist. Damit besteht die direkte Zerlegung von $\mathbb{Z}_{5040}$ aus vier unzerlegbaren Summanden:

$$\mathbb{Z}_{5040} = (1) = (315) \oplus (560) \oplus (1008) \oplus (720)$$

Die Anzahl der direkt unzerlegbaren Ideale wird hier $s = 9$. Nach (2.12), 2.1.4, sind dies:

$$(0) \quad ; \quad (2520) \quad ; \quad (1260) \quad ; \quad (630) \quad ; \quad (3159 \quad ; \quad (1680) \quad ; \quad (560) \quad ; \quad (1008) \quad ; \quad (720)$$

Für das Ideal (120) zum Beispiel erhalten wir eine direkte Summe, da $\frac{n}{a} = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $l = 3$, ist:

$$(120) = (2520) \oplus (1680) \oplus (720)$$

Diese Darstellung ist, wie die obige, eindeutig. Dagegen können wir aus den vorher angestellten Überlegungen drei Zerlegungen mit zwei direkten Summanden gewinnen, wobei jeweils eines dieser Ideale selbst direkt zerlegbar ist.
Das Ideal (120) ist folglich als direkte Summe zweier Ideale nicht eindeutig bestimmt. Außerdem existieren ja noch die trivialen Zerlegungen:

$$(120) = (2520) \oplus (240) = (1680) \oplus (360) = (720) \oplus (840)$$

Übertragen wir die angegebene Hauptreihe auf unser Beispiel, erhalten wir für den Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$ die Hauptreihe:

$$\mathbb{Z}_{5040} = (1) \supset (2) \supset (4) \supset (8) \supset (16) \supset (48) \supset (144) \supset (720) \supset (0)$$

Eine Auswahl von direkten Summen im Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$

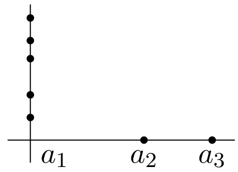
- $(840) = (2520) \oplus (1680)$
- $(504) = (2520) \oplus (1008)$
- $(360) = (2520) \oplus (720)$
- $(240) = (1680) \oplus (1680)$
- $(168) = (2520) \oplus (336) = (1680) \oplus (504) = (1008) \oplus (840) = (2520) \oplus (1680) \oplus (1008)$
- $(126) = (1008) \oplus (630)$
- $(105) = (1680) \oplus (315)$
- $(80) = (720) \oplus (560)$
- $(60) = (1680) \oplus (180) = (1260) \oplus (240) = (720) \oplus (420) = (1680) \oplus (1260) \oplus (720)$
- $(42) = (1680) \oplus (126) = (1008) \oplus (210) = (630) \oplus (336) = (1680) \oplus (1008) \oplus (630)$
- $(30) = (1680) \oplus (90) = (720) \oplus (210) = (630) \oplus (240) = (1680) \oplus (720) \oplus (630)$
- $(24) = (2520) \oplus (48) = (1680) \oplus (72) = (1008) \oplus (120) = (844) \oplus (144) = (720) \oplus (168) = (504) \oplus (240) = (360) \oplus (336) = (2520) \oplus (1680) \oplus (144) = (2520) \oplus (1008) \oplus (240) = (2520) \oplus (720) \oplus (336) = (1680) \oplus (1008) \oplus (360) = (1680) \oplus (720) \oplus (504) = (1008) \oplus (840) \oplus (720) = (2520) \oplus (1680) \oplus (1008) \oplus (720)$
- $(14) = (1008) \oplus (70) = (630) \oplus (112) = (560) \oplus (126) = (1008) \oplus (630) \oplus (560)$
- $(3) = (1680) \oplus (9) = (336) \oplus (45) = (315) \oplus (48) = (240) \oplus (63) = (144) \oplus (105) = (1008) \oplus (15) = (720) \oplus (21)$

2.2 Unendliche und vollständige direkte Summen

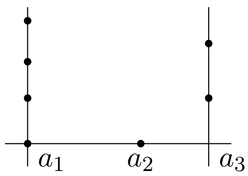
2.2.1 Unendliche direkte Summen

Betrachten wir nochmals den Multioperatorring $\mathbb{R}^n$ aus Abschnitt 2.1.2. Dieser Ring lässt sich auch auf eine andere Weise darstellen. Wählen wir die Menge aller reellwertigen Funktionen $F(M)$ über einem endlichen Definitionsbereich M.
Die Kardinalzahl von M sei n, mit n als natürlicher Zahl größer Null.
Mit den üblichen Operationen für Funktionen (Addition und Multiplikation) wird dann $F(M)$ zu einem Multioperatorring, welcher isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Im Fall $n = 3$, $M_3 = \{a_1,a_2,a_3\}$, muss dann der Ω-Ring $F(M)$ Ideale besitzen, welche zu den Idealen von $\mathbb{R}^n$ isomorph sind. Für A_1 (siehe 2.1.2) ist dies die Menge aller Funktionen von $F(M)$, welche auf a_2 und a_3 eine Ordinate gleich Null besitzen.



Dieses Ideal werde mit (a_1) bezeichnet. Damit verstehen wir unter dem Ideal (a_1,a_3) die Menge aller Funktionen von $F(M)$, welche auf a_2 nur Null als Ordinaten besitzen.



Auf Grund der Isomorphie der beiden Multioperatorringe $\mathbb{R}^n$ und $F(M)$ erhalten wir dann mit dem entsprechenden Idealen (a_1), (a_2) und (a_3):

$$F(M) = (a_1) \oplus (a_2) \oplus (a_3)$$

Und für einen Multioperatorring M mit einer Kardinalzahl gleich n:

$$F(M) = \oplus \sum_{i=1}^{n} (a_i)$$

Es ist nun aber auch möglich, dass der Definitionsbereich der Funktionen $F(M)$ unendlich wird. Für jedes Element a von M existiert dann aber auch ein Ideal und nur die Summe aller dieser Ideale kann ganz $F(M)$ ergeben. Damit kann der Multioperatorring $F(M)$ aber nicht mehr als direkte Summe von endlich vielen Idealen dargestellt werden. Wir definieren:

Definition
Ein Ideal A eines Multioperatorrings G heißt unendliche direkte Summe eines Systems von Idealen B_i, wobei i eine gewisse unendliche Indexmenge I durchläuft, wenn A die Summe der Ideale B_i ist

$$A = \sum_{i \in I} B_i \tag{2.17}$$

und wenn für jedes i aus der Indexmenge I gilt:

$$\left(\sum_{j \in I, i \neq j} B_j \right) \cap B_i = (0) \tag{2.18}$$

Übertragen wird diese Definition auf unser Beispiel, so erhalten wir

$$F(M) = \oplus \sum_{a_i \in M} (a_i)$$

Mit diesem Beispiel soll aber die Betrachtung unendlicher direkter Summen schon abgeschlossen werden. Im Weiteren werden wir nur noch direkte Summen mit endlich vielen Summanden untersuchen.

2.2.2 Vollständige direkte Summen

In einer Vielzahl von Literaturquellen wird die in 2.1.1 gegebene Defintion der direkten Summe als Sonderfall angesehen und eine Definition von "außen" bevorzugt. Diese Definition geben wir nun und zeigen deren Verwandheit mit der bisherigen. Wir setzen:

Definition

Es sei ein System von Multioperatorringen $G_1, G_2, ..., G_i, ...,\ i \in I$, gegeben, welche alle der gleichen primitiven Klasse von Multioperatorringen angehören und deren Operationensysteme identisch sind.
Die Menge S von unendlichen Tupeln (ist die Indexmenge I endlich, so enthält S endliche Tupel)

$$(a_1, a_2, ..., a_i, ...)$$

mit a_j auf G_j für alle $j \in I$, und dem Operationensystem Ω, wobei alle Operationen ω_n aus Ω komponentenweise auf den Tupeln ausgeführt werden, sowie der komponentenweisen Addition heißt dann **vollständige direkte Summe** der Multioperatorringe G_i, $i \in I$, und wird mit

$$S = G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_i \otimes ... = \bigotimes_{i \in I} G_i$$

bezeichnet.

Zur Erläuterung betrachten wir den Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und die Menge aller Paare (a,b) von reellen Zahlen. D.h., die Menge S ist durch

$$S = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}\}$$

und den Operationen

$$(a_1,b_1) + (a_2,b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad ; \qquad (a_1,b_1) \cdot (a_2,b_2) := (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$

definiert. Damit wird aber die vollständige direkte Summe von $\mathbb{R}$ mit sich selbst, also $S = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$. Diese vollständige direkte Summe S wird isomorph zu dem in 2.1.2 schon genannten Multioperatorring $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. In diesem Fall ist die vollständige direkte Summe also selbst Multioperatorring.

Satz 1
Die vollständige direkte Summe S eines Systems von Multioperatorringen G_i, $i \in I$, ist selbst Multioperatorring.

Beweis: Die vollständige direkte Summe S ist sicher nichtleer. Selbst wenn alle Multioperatorringe G_i isomorph zum Ω-Nullring sind, enthält S noch ein Element, das Tupel

$$(0,0,0,...,0,...)$$

Auf Grund der komponentenweise Verknüpfung der Addition und aller Operationen ω_n auf S ist die Abgeschlossenheit, die Assoziativität, die Kommutativität der Addition sowie das Distributivgesetz gesichert. Das Tupel (0,...,0,...) bildet das Nullelement bezüglich der Addition in S. Da in allen Multioperatorringen G_j, $j \in I$, zu den Komponenten a_j die entgegengesetzten Elemente $-a_j$ existieren ist

$$(-a_1, -a_2, ..., -a_i, ...)$$

das entgegengesetzte Element von $(a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ in der vollständigen direkten Summe S. Damit ist diese Struktur selbst Multioperatorring. Der Beweis ist erbracht.

Ist S eine vollständige direkte Summe eines Systems von Multioperatorringen G_i, $i \in I$, und ist wenigstens einer dieser Multioperatorringe G_i verschieden vom Ω-Nullring, so besitzt S Nullteiler. Die zwei Elemente

$$(a_1,0,0,...,0,...) \qquad \text{und} \qquad (0,a_2,0,0,...,0,...)$$

mit $a_1, a_2 \neq 0$, aus S sind sicher verschieden vom Nullelement. Für eine beliebige Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω von S wird dann aber:

$$(a_1,0,...)_1...(a_1,0,...)_{i-1}(0,a_2,0,...)_i(a_1,0,...)_{i+1}...(a_1,0,...)_n\omega_n =$$

da komponentenweise verknüpft wird

$$(a_1a_1...a_10a_1...a_1\omega_n,0...0a_20...0\omega_n,0...0\omega_n,...) = (a_1a_1...a_10a_1...a_1\omega_n,0...0a_20...0\omega_n,0,0,...) =$$

$$= (0,0,...,0,...)$$

womit die angegebenen Elemente Nullteiler in S darstellen. Wir können auch sofort eine Aussage über ein eventuelles nichttriviales Zentrum in einer vollständigen direkten Summe S treffen:

Satz 2
Die vollständige direkte Summe S eines Ω-Zerorings Z und eines zentrumslosen Multioperatorrings G besitzt ein zu Z isomorphes Zentrum Z_s, welches echtes Ideal von S ist.

Beweis: Die vollständige direkte Summe S besitzt dann Paare der Form

$$(z,g)$$

mit z aus Z und g aus G als Elemente. Da die Operationen ω_n aus dem Operationensystem sowie die Addition komponentenweise ausgeführt werden, ist die Menge aller Paare

$$(z,0)$$

wobei z beliebig aus Z ist und 0 das Nullelement des Multioperatorrings G darstellt, bezüglich der genannten Operationen abgeschlossen und damit Ω-Unterring von S. Diese Menge Z_s aller dieser Paare ist auf Grund der Nullmultiplikation in Z offenbar Ω-Zeroring. Da nun noch für ein beliebiges Element (a,b) aus S:

$$(z,0) \cdot (a,b) = (z \cdot a, 0 \cdot b) = (0,0)$$

für eine binäre Multiplikation, bzw.

$$(a_1,b_1)...(a_{i-1},b_{i-1})(z,0)(a_{i+1},b_{i+1})...(a_n,b_n)\omega_n = (a_1...a_{i-1}za_{i+1}...a_n\omega_n, b_1...b_{i-1}0b_{i+1}...b_n\omega_n) =$$

$$= (a_1...a_{i-1}za_{i+1}...a_n\omega_n, 0) = (0,0)$$

da die Elemente a_i, $i = 1,...,i-1,i+1,...,n$, aus dem Ω-Zeroring Z genommen sind, so dass Z_s echtes Zentrum der vollständigen direkten Summe ist.

Wenden wir uns der Beziehung zwischen vollständiger direkter Summe und der direkten Summe im bisherigen Sinne zu. Im Allgemeinen ist es so, dass jede vollständige direkte Summe sich auch immer als direkte Summe darstellen lässt.

Satz 3
Sei S vollständig direkte Summe der Multioperatorringe G_i, $i \in I$. Dann besitzt der Multioperatorring S Ideale A_i, $i \in I$, so dass zwischen diesen Idealen und den Ω-Ringen G_i eine umkehrbar eindeutige Abbildung existiert, so dass zugeordnete Multioperatorringe zueinander isomorph sind. Weiterhin ist dann S die direkte Summe dieser Ideale A_i, $i \in I$

$$S = \oplus \sum_{i \in I} A_i$$

Ist die Indexmenge I unendlich, so erhalten wir die in Abschnitt 2.2.1 definierte unendliche direkte Summe. Ist I endlich, so ist die vollständige direkte Summe S direkte Summe im Sinne von 2.1.1.

Beweis zu Satz 3: Sei S beliebige vollständige direkte Summe von Multioperatorringen G_i, $i \in I$:

$$S = \bigotimes_{i \in I} G_i$$

Die i.te Komponente a_i der Elemente

$$(a_1,...,a_i,...)$$

von S sei aus Multioperatorring G_i genommen. Wir gehen davon aus, dass die Indexmenge I abzählbar ist. Betrachten wir nun alle Elemente von S der Art

$$(0,0,...,0,a_i,0,...)$$

wobei a_i alle Elemente von G_i durchläuft. Die Menge dieser Elemente bezeichnen wir mit A_i. Bezüglich der Operationen ω_n aus dem Operationensystem und der Addition ist dann A_i isomorph zu dem Multioperatorring G_i. Zum Nachweis wählen wir die Abbildung φ:

$$a_i\varphi := (0,...,0,a_i,0,...)$$

für alle a_i aus G_i.
Wie man sofort sieht, ist φ umkehrbar eindeutige Abbildung von G_i auf A_i. Außerdem werden die Operationen ω_n aus Ω und die Addition in A_i komponentenweise ausgeführt, womit die Homomorphiebedingungen trivialerweise gelten. Damit sind die A_i aber auch zumindest Ω-Unterring der vollständigen direkten Summe S.
Weisen wir nun nach, dass die A_i auch Ideale der Summe S sind. Dazu seien die

$$(b_1^{(j)},b_2^{(j)},...,b_i^{(j)},...)$$

mit $j = 1,2,...,k-1,k+1,...,n$, beliebige Elemente des Multioperatorrings S. ω_n sei eine beliebige Operation aus dem Operationensystem Ω von S und

$$(0,...0,a_i,0,...)$$

beliebig aus A_i gewählt. Dann wird:

$$(b_1^{(1)},...,b_i^{(1)},...)...(b_1^{(k-1)},...,b_i^{(k-1)},...)(0,...,0,a_i,0...)(b_1^{(k+1)},...,b_i^{(k+1)},...)...(b_1^{(n)},...,b_i^{(n)},...)\omega_n =$$

mit der komponentenweisen Ausführung der Operation

$$(b_1^{(1)}...b_1^{(k-1)}0b_1^{(k+1)}...b_1^n\omega_n, ..., b_{i-1}^{(1)}...b_{i-1}^{(k-1)}0b_{i-1}^{(k+1)}...b_{i-1}^n\omega_n, b_i^{(1)}...b_i^{(k-1)}a_ib_i^{(k+1)}...b_i^n\omega_n,$$

$$b_{i+1}^{(1)}...b_{i+1}^{(k-1)}0b_{i+1}^{(k+1)}...b_{i+1}^n\omega_n,...) =$$

$$= (0,...0,b_i^{(1)}...b_i^{(k-1)}a_ib_i^{(k+1)}...b_i^n\omega_n,0,...)$$

und da A_i Multioperatorring ist, liegt dieses Element in diesem Ω-Ring A_i.
Die isomorphen Bilder der Multioperatorringe G_i, $i \in I$, sind damit Ideale in der vollständigen direkten Summe S. Auf Grund der Isomorphie und der Konstruktion der Ideale A_i ergibt sich dann auch:

$$S = \oplus \sum_{i \in I} A_i$$

Der Satz ist bewiesen.

Wir bemerken nochmals, dass wir damit auch die unendlichen vollständige direkte Summe beschrieben haben. Wird die Indexmenge unendlich, so muss S dann unendliche direkte Summe sein.

Wissen wir nun, dass ein Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ideale $A_1,...,A_n$ ist, dann existieren auch zu den Idealen A_i isomorphe Multioperatorringe G_i, $i = 1,...,n$, für welche G wiederum isomorph zu deren vollständigen direkten Summe ist.
Deshalb vereinbaren wir, dass im Weiteren nur wenn ausdrücklich betont ein Unterschied zwischen beiden Arten der direkten Vereinigung gemacht werden soll. Wir werden also zum einen von der "direkten Summe der Ideale" und zum anderen auch von der "direkten Summe der Multioperatorringe" sprechen, ohne einen Unterschied zu machen.

2.2.3 Anwendung und Beispiele

Auf Grund der Definition der vollständigen direkten Summe können wir nun neue Multioperatorringe konstruieren:

Beispiel 1: Sind G_1 und G_2 Restklassenringe $\mathbb{Z}_2$, so wird deren vollständige direkte Summe; deren direkte Summe; S zu einem Multioperatorring mit vier Elementen

$$S = G_1 \oplus G_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

Dabei zeigt sich, dass die additive Gruppe von S isomorph zur Kleinschen Vierergruppe wird. In Abschnitt 2.5.3 wird uns dieser Multioperatorring ausführlich begegnen.

Beispiel 2: Ebenso können wir die direkte Summe

$$S = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

und allgemein

$$S = \oplus \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2^{(i)}$$

bilden. Es liegt nahe zu vermuten, dass die direkte Summe S dann isomorph zu dem Restklassenring modulo 2^n ist. Dies kann aber nicht der Fall sein, da alle Restklassenringe modulo Primzahlpotenz direkt unzerlegbar sind. Wir zeigen:

Satz 1
Die (vollständige) direkte Summe S mit

$$S = (\mathbb{Z}_{p_1}^{(i_1)}, \mathbb{Z}_{p_2}^{(i_2)}, ..., \mathbb{Z}_{p_k}^{(i_k)})$$

wobei der Restklassenring $\mathbb{Z}_{p_j}$ für alle $j = 1,...,k$, genau i_j mal als direkter Summand auftritt und die p_j sämtlich verschiedene Primzahlen sind, ist isomorph zu dem Restklassenring modulo

$$\prod_{j=1}^{k} p_j$$

wenn für alle i_j: $i_j = 1$ gilt.

Beweis: Im Fall von $i_j = 1$ für alle $j = 1,...,k$, erhält die direkte Summe das Aussehen

$$S = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_k}$$

wobei alle Primzahlen paarweise voneinander verschieden sind, d.h., für $i \neq j$ ist $p_I \neq p_j$. Betrachten wir den Restklassenring modulo

$$\prod_{j=1}^{k} p_j = m$$

Dieser Restklassenring besitzt nach Abschnitt 2.1.4 die direkte Zerlegung

$$\mathbb{Z}_m = \left(\frac{m}{p_1}\right) \oplus \left(\frac{m}{p_2}\right) \oplus ... \oplus \left(\frac{m}{p_k}\right)$$

Da aber die Ideale $\left(\frac{m}{p_i}\right)$, $i = 1,...,k$, zu den Restklassenringen $\mathbb{Z}_{p_i}$ isomorph sind, gilt auch

$$S \cong \mathbb{Z}/\left(\prod_{j=1}^{k} p_j\right)\mathbb{Z}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 3: Die Summanden einer direkten Summe müssen nicht alle gleich sein. Betrachten wir zum Beispiel die Multioperatorringe $(\mathbb{R}^2, + ,o_3)$ und $(\mathbb{R}^3, + ,o_3)$, wobei o_3 das vektorielle Tripelprodukt darstellen soll, so ist

$$S = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^3$$

auch Multioperatorring. Die direkte Summe S besitzt dabei Elemente der Form

$$((a,b),(c,d,e))$$

wobei die a, b, c, d, e beliebige reelle Zahlen sind. Die additive Gruppe von S ist dann isomorph zur additiven Gruppe des 5-dimensionalen Vektorraums über den reellen Zahlen. Das Produkt ist dann wie folgt definiert:

$$((a_1,b_1),(c_1,d_1,e_1))((a_2,b_2),(c_2,d_2,e_2))((a_3,b_3),(c_3,d_3,e_3))o_3 =$$

$$= (((a_1a_3 + b_1b_3)a_2 - (a_2a_3 + b_2b_3)a_1, (a_1a_3 + b_1b_3)b_2 - (a_2a_3 + b_2b_3)b_1),$$
$$((c_1c_3 + d_1d_3 + e_1e_3)c_2 - (c_2c_3 + d_2d_3 + e_2e_3)c_1, (c_1c_3 + d_1d_3 + e_1e_3)d_2 - (c_2c_3 + d_2d_3 + e_2e_3)d_1,$$
$$(c_1c_3 + d_1d_3 + e_1e_3)e_2 - (c_2c_3 + d_2d_3 + e_2e_3)e_1))$$

Den entstehenden Multioperatorring bezeichnen wir mit $(\mathbb{R}^5, + ,o_3)$. Während wir zeigten, dass die direkten Summanden $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ einfache Multioperatorringe sind (siehe Abschnitt 1.3.1), ist der Ω-Ring $\mathbb{R}^5$ nicht einfach, da er ja mindestens die Ideale $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ besitzt. Weitere echte Ideale besitzt $\mathbb{R}^5$ aber nicht.

Wie wir wissen, ist die direkte Summe kommutativ. Gleiches können wir von der vollständigen direkten Summe sagen. Eigentlich erübrigt sich der Beweis, da zu jeder direkten Summe eine vollständige direkte Summe gehört und umgekehrt. Jedoch verzichten wir nicht, da der Beweis interessant ist.

Satz 2
Sei G_i, $i = 1,...,n$, ein System von Multioperatorringen der gleichen primitiven Klasse Λ von Multioperatorringen, deren vollständige direkte Summe S sei:

$$S = \bigotimes_{i=1}^{n} G_i$$

Durch das Permutieren der Indizes der Multioperatorringe $G_1,...,G_n$ ergeben sich $n!$ Tupel der n Indizes und damit $n!$ vollständige direkte Summen S_l der Ω-Ringe G_i:

$$S_l = G_{r_1} \otimes G_{r_2} \otimes ... \otimes G_{r_n} \tag{2.19}$$

wobei $(r_1,r_2,...,r_n)$ eine dieser Permutationen von $(1,2,...,n)$ ist.
Dann sind alle diese S_l isomorph zur vollständigen direkten Summe S, womit auch die vollständige direkte Summenbildung kommutativ ist.

Beweis: Dass alle vollständigen direkten Summen der Form (2.19) existieren, ist offensichtlich.
Sei $(r_1,r_2,...,r_n)$ eine beliebige Permutation der n Indizes $(1,2,...,n)$ der Multioperatorringe G_i. Wir betrachten dann die Abbildung φ von

$$S = G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_n \qquad \text{auf} \qquad S_l = G_{r_1} \otimes G_{r_2} \otimes ... \otimes G_{r_n}$$

$$\text{mit} \qquad \varphi : \quad (a_1,...,a_n)\varphi = (a_{r_1},...,a_{r_n})$$

wobei jedes Element a_j auch als a_{r_l} auftreten muss, mit

$$a_j = a_{r_l}$$

und $j = r_l$. Wie man sieht, ist diese Abbildung umkehrbar eindeutig von S auf die Summe S_l. Es ist also nur noch notwendig die Homomorphiebedingungen für die Addition und die Operationen ω_n aus dem Operationensystem nachzuweisen.
Dazu seien die Elemente

$$(a_1^{(1)},a_2^{(1)},...,a_n^{(1)}), (a_1^{(2)},a_2^{(2)},...,a_n^{(2)}), ..., (a_1^{(m)},a_2^{(m)},...,a_n^{(m)})$$

beliebig aus der vollständigen direkten Summe S gewählt und die Operation ω_n beliebig aus Ω. Dann gilt:

$$((a_1^{(1)},a_2^{(1)},...,a_n^{(1)})...(a_1^{(m)},a_2^{(m)},...,a_n^{(m)})\omega_m)\varphi =$$

auf Grund des komponentenweisen Rechnens

$$= (a_1^{(1)}a_1^{(2)}...a_1^{(m)}\omega_m,..., a_n^{(1)}a_n^{(2)}...a_n^{(m)}\omega_m)\varphi =$$

durch die Abbildung φ werden die Komponenten nur umgeordnet und derart, dass die Indizes $(1,2,...,n)$ die Reihenfolge $(r_1,r_2,...,r : n)$ annehmen:

$$= (a_{r_1}^{(1)}a_{r_1}^{(2)}...a_{r_1}^{(m)}\omega_m,..., a_{r_n}^{(1)}a_{r_n}^{(2)}...a_{r_n}^{(m)}\omega_m) =$$

mit dem komponentenweisen Rechnen können wir rückwärts auflösen

$$= (a_{r_1}^{(1)},...,a_{r_n}^{(1)})...(a_{r_1}^{(m)},...,a_{r_n}^{(m)})\omega_m =$$

benutzen wir nun die inverse Abbildung φ^{-1} (inverse Permutation) erhalten wir

$$= ((a_1^{(1)},...,a_n^{(1)})\varphi)...((a_1^{(m)},...,a_n^{(m)})\varphi)\omega_m$$

womit die Homomorphiebedingung für die Operationen ω_m des Operationensystems erfüllt ist. Für die Addition zeigt man dies analog, so dass der Beweis erbracht ist.

Ohne dass hier darauf eingegangen wird, ist die vollständige direkte Summe auch für eine unendliche Anzahl von direkten Summanden kommutativ ist. Ebenso sei der folgende Satz nur erwähnt:

Satz 3
Die vollständige direkte Summe S eines Systems von Multioperatorringen G_i, $i \in I$, welche aus einer primitiven Klasse Λ von Multioperatorringen entnommen wurden, ist ebenfalls in dieser primitiven Klasse enthalten.

D.h., also, sind zwei Multioperatorringe assoziativ, so ist deren vollständige direkte Summe ebenfalls assoziativ.
Daraus ergibt sich auch, dass dir direkte Summe zweier assoziativer Ringe (primitive Klasse von assoziativen Multioperatorringen mit einem Operationensystem Ω, welches nur eine binäre Multiplikation enthält) niemals ein nichtassoziativer Ring sein kann.
Ebenso ist dann die direkte Summe von Moduln wieder Modul.

2.3 Strukturtheoretische Kriterien

2.3.1 Das k-Ziel-Ideal

Unser Ziel ist es nun in diesem Abschnitt, aus dem Idealdiagramm Aussagen über die Existenz von direkten Summen zu ziehen. Dabei betrachten wir bis auf Widerruf nur noch Multioperatorringe mit einer endlichen Anzahl von Idealen (Multioperatorringe mit einem endlichen Idealverband). Dabei machen sich aber Begriffsbildungen notwendig. Wir definieren:

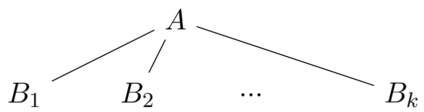
Definition

Ein Ideal A eines Multioperatorrings G heißt genau dann **k-Ziel-Ideal**, wenn es genau k Ideale B_1,...,B_k in G gibt, welche in dem Ideal A echt enthalten sind und für die es keine Ideale C_1,...,C_k in G gibt, so dass auch nur für ein i, $i = 1$,...,k

$$A \supset C_i \supset B_i$$

gilt.

Im Idealdiagramm (siehe Skizze) bedeutet dies, dass A genau k untere "Nachbarn" besitzt.



Einen Spezialfall stellt das Nullideal dar, welches keinen unteren "Nachbar" besitzt. Das Nullideal nennen wir deshalb der Vollständigkeit halber 0-Ziel-Ideal.
Für 1-Ziel-Ideale, welche also nur ein Ideal der Art B_i besitzen, können wir zeigen:

Satz 1
Jedes 1-Ziel-Ideal A eines Multioperatorrings G ist direkt unzerlegbar.

Beweis: Betrachten wir ein Ideal A eines Multioperatorrings G, welches direkte Summe zweier Ideale A_1 und A_2 ist. A ist dann und nur dann echte direkte Summe dieser beiden Ideale, wenn

$$(0) \subset A_1 \subset A \qquad \text{und} \qquad (0) \subset A_2 \subset A$$

gilt. Da die beiden Ideale A_1 und A_2 bis auf Null disjunkt sind, gilt weder

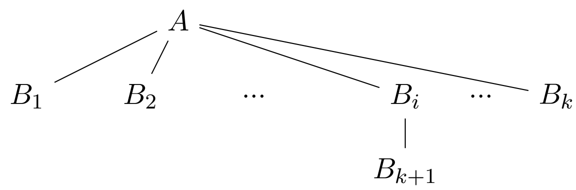
$$A_1 \subseteq A_2 \qquad \text{noch} \qquad A_2 \subseteq A_1$$

Liegt nun ein Ideal vor, welches 1-Ziel-Ideal ist, so kann nur ein Ideal der Art von A_1 oder A_2 existieren. Sei dies A_1. Jedes andere Ideal A_2, welches in A enthalten ist, muss dann auch in dem Ideal A_1 enthalten sein. Damit können aber keine zwei echte Ideale in G existieren, welche als Summe A besitzen und außerdem bis auf das Nullelement disjunkt sind. A ist direkt unzerlegbar. Der Beweis ist erbracht.

Dabei wurde hier die Folgerung aus 2.1.1 verwendet, dass jedes Ideal, welches echt direkt zerlegbar ist, sich auch als direkte Summe von zwei echten Summanden darstellen lässt.
Als Folgerung erhalten wir, dass jeder Multioperatorring, welcher nur 1-Ziel-Ideale besitzt, direkt unzerlegbar ist. Damit ist auch jeder Multioperatorring mit nur einem nichttrivialen Ideal unzerlegbar. Dies entspricht z.B. allen Restklassenringen modulo Primzahlquadrat.
Es liegt nun nahe, aus der Anzahl der unteren "Nachbarn" auf die Anzahl der direkten Summanden zu schließen.

Satz 2
Ein k-Ziel-Ideal, $k \geq 2$, eines Multioperatorrings kann, wenn überhaupt, als direkte Summe von maximal k Idealen aufgeschrieben werden, wobei die Darstellung nicht unbedingt k Summanden aufweisen muss.

Beweis: Auf Grund von Satz 2, 2.1.1, genügt es zu zeigen, dass keine $(k + 1)$ Ideale echt existieren, welche in dem k-Ziel-Ideal A echt enthalten sind und paarweise untereinander bis aus das Nullelement disjunkt sind, existieren.
Dazu überlegen wir uns, dass es nach Voraussetzung genau k untere "Nachbarn" B_i, $i = 1,...,k$, von A gibt. Zwischen dem Ideal A und den Idealen B_i existieren dann nach Definition keine Ideale C_i, $i = 1,...,k$, welche auch nur für ein i echt in A enthalten sind und jeweils ihr B_i echt umfassen. (siehe Skizze)



Damit sind aber zwei Möglichkeiten gegeben. Entweder das Ideal A besitzt kein weiteres nichttriviales echt enthaltenes Ideal, dann gilt die Behauptung oder jedes weiter Ideal B_{k+1} muss in einem der Ideale B_i enthalten sein. Dies bedeutet aber

$$B_i \cap B_{k+1} = B_{k+1} \neq (0)$$

womit A, wenn überhaupt nur direkte Summe von maximal k Idealen sein kann. Der Satz ist bewiesen.

Ohne Beweis können wir für die Restklassenringe sagen, dass dort ein k-Ziel-Ideal direkte Summe von k Idealen ist.

Offenbar sind alle Ideale eines Multioperatorrings, welche das Ω-Nullideal (0) als unteren "Nachbarn" besitzen, minimale Ideale und außerdem 1-Ziel-Ideale und damit nach Satz 1 direkt unzerlegbar. Allgemein gilt (auch für Multioperatorringe mit unendlich vielen Idealen):

Satz 3
Besitzt ein Multioperatorring genau ein minimales Ideal, so ist er direkt unzerlegbar.

Zum Beweis überlege man sich, dass dieses minimale Ideal als einziges minimales Ideal in jedem weiteren nichttrivialen Ideal enthalten sein muss, womit kein Paar bis auf Null disjunkter echter Ideale in diesem Multioperatorring existieren kann.

Satz 4
Besitzt ein Multioperatorring genau k minimale Ideale, $k \geq 2$, so existieren mindestens

$$q = \frac{k(k-1)}{2} \tag{2.20}$$

direkte Summendarstellungen.

Beweis: Betrachten wir zuerst den Fall $k = 2$, D.h., es existieren zwei minimale Ideale A_1 und A_2.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& S \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_1 \arrow[dr, dash] & & A_2 \arrow[dl, dash] \\
& (0) &
\end{tikzcd}$$

Diese sind nach Satz 3, 1.3.3, bis auf das Nullelement disjunkt zueinander, so dass deren Summe direkt ist, d.h., es gilt

$$S = A_1 \oplus A_2$$

Für den Fall $k = 3$ sind ebenfalls nach Satz 3, 1.3.3, die Ideale A_1, A_2 und A_3, welche minimal sein sollen, paarweise bis auf Null disjunkt. Zu jedem Paar existiert dann eine Darstellung als direkte Summe. $q = 3$.
Im allgemeinen Fall mit k minimalen Idealen können mit

$$\begin{array}{cc}
A_1 & \text{(k-1) direkte Summen} \\
A_2 & \text{(k-2) direkte Summen} \\
\dots & \\
A_{k-2} & \text{2 direkte Summen} \\
A_{k-1} & \text{1 direkte Summe}
\end{array}$$

dargestellt werden, ohne, dass sich eine Darstellung wiederholt. Für das Ideal A_k sind alle Möglichkeiten aufgebraucht. Die arithmetische Reihe ergibt dann als Summe

$$q = \frac{k(k-1)}{2}$$

direkte Summendarstellungen. Der Beweis ist erbracht.

Zu diesem Satz ist zu bemerken, dass von direkten Summendarstellungen und nicht von direkten Summen schlechthin gesprochen wird, da der Fall eintreten kann, dass einige der beschriebenen Darstellungen das gleiche Ideal erzeugen können.
Ein Beispiel dafür ist der von der Kleinschen Vierergruppe erzeugt Ω-Zeroring. Sein Idealdiagramme hat das Aussehen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& K_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(a) \arrow[dr, dash] & (b) \arrow[d, dash] & (c) \arrow[dl, dash] \\
& (0) &
\end{tikzcd}$$

Es treten 3 minimale ideale auf und nach dem eben bewiesenen Satz drei Darstellungen von direkten Summen, welche aber alle den ganzen Multioperatorring als Ergebnis besitzen.
Auch über maximale Ideale lassen sich Aussagen treffen:

Satz 5
Besitzt ein Multioperatorring genau ein maximales Ideal, so ist der Multioperatorring selbst als Ideal direkt unzerlegbar.

Zum Beweis überlege man sich, dass der Multioperatorring als Ideal 1-Ziel-Ideal ist. Weiterhin gilt:

Satz 6
Besitzt ein Multioperatorring G ein Ideal A, welches zugleich minimales als auch maximales Ideal ist, so ist der Ω-Ring G die direkte Summe von A und jedem anderen echten Ideal A_i, d.h.

$$G = A \oplus A_i$$

wobei A_i die Menge I aller anderen echten Ideale durchläuft und I nichtleer ist.

Beweis: Da das Ideal A minimal und maximal ist, bildet

$$(0) \subset A \subset\subset G$$

eine Hauptreihe im Multioperatorring G. Nach Satz 1, 1.4.2, besitzt dann jede noch existierende Hauptreihe ebenfalls die Länge 2. Damit muss jedes andere echte Ideal auch minimal und maximal sein. Damit ist aber für alle i:

$$A \cap A_i = (0)$$

womit wir A und jedes andere echte Ideal zur direkten Summenbildung heranziehen können. Da diese Ideal aber alle maximal sind, folgt sofort das Behauptete. Der Satz ist bewiesen.

In dem ausgeschlossenen Fall, dass nur ein Ideal existiert, welches zugleich minimal und maximal ist, ist der Multioperatorring 1-Ziel-Ideal und nach Satz 1 direkt unzerlegbar. Voraussetzung bleibt weiterhin, dass wir nur Multioperatorringe mit endliche vielen Idealen betrachten.

2.3.2 Hauptgraphen und Hauptreihen

Bei der Untersuchung von Idealdiagrammen der Multioperatorringe zeigt sich, dass auch andere Eigenschaften charakteristisch sind. Vor allem den Hauptreihen kommt große Bedeutung zu.
Wie man sich einfach überzeugen kann, entspricht jeder möglichen Hauptreihe (Multioperatorringe mit endlich vielen Idealen besitzen immer Hauptreihen) im Idealdiagramm ein Graph, welcher vom Nullideal zum Multioperatorring selbst führt.
Einen derartigen Graph nennen wir **Hauptgraph** des Ω-Rings G. Unter einem **vollen Graph** eines beliebigen Ideals A von G verstehen wir den Teil eines Hauptgraphen, der von (0) aus bei A abbricht.

Zum Beispiel hat das Ideal (140) des Restklassenrings $\mathbb{Z}_{5040}$ genau sechs volle Graphen (siehe Seite 107/108):

$$\begin{array}{cc}
(0) - (2520) - (1260) - (420) - (140) & (0) - (2520) - (840) - (280) - (140) \\
(0) - (2520) - (840) - (420) - (140) & (0) - (1680) - (840) - (280) - (140) \\
(0) - (1680) - (840) - (420) - (140) & (0) - (1680) - (560) - (280) - (140)
\end{array}$$

Hauptgraphen existieren insgesamt 840.
Weiterhin bezeichnen wir jedes echte Ideal A, welches in jedem vollen Graphen eines anderen(!) Ideal B enthalten ist, als **Pflichtideal** des Ideals B. Ein Pflichtideal des Multioperatorrings G ist damit ein echtes Ideal von G, welches in jeder Hauptreihe und jedem Hauptgraphen vertreten ist. Wir zeigen:

Satz 1
Besitzt ein Ideal A ein Pflichtideal B, so ist A direkt unzerlegbar.

Beweis: Ist B Pflichtideal von A, so ist B in dem Ideal A echt enthalten. Jedes Ideal C mit

$$B \subset C \subset A$$

enthält dann ebenfalls B und kann damit mit jedem anderen Ideal D, welches in A enthalten ist, nicht zur direkten Summenbildung herangezogen werden, da D dann entweder auch B enthält oder in B enthalten ist. Ideale, welche nun in B enthalten sind, können maximal B erzeugen, womit A direkt unzerlegbar ist. Der Satz ist bewiesen.

> **Satz 2**
> Besitzt ein Multioperatorring G nur einen Hauptgraphen, d.h. nur eine Hauptreihe, so ist er direkt unzerlegbar.

Da dann jedes Ideal verschieden vom Nullideal 1-Ziel-Ideal ist, erhalten wir das Geforderte sofort aus Satz 1, 2.3.1. Ebenso ist dann jedes echte Ideal auch Pflichtideal des Multioperatorrings, so das wir aus Satz 1 ebenso dieses Ergebnis erhalten.
Beispiel dafür sind alle Restklassenringe modulo Primzahlpotenz.

> **Satz 3**
> Besitzt ein Multioperatorring G genau zwei Hauptreihen und kein Pflichtideal für G, dann ist G direkte Summe, während alle anderen Ideal direkt unzerlegbar sind.

Beweis: Die Skizze verdeutlicht den Zusammenhang:

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_n \arrow[d, dash] & & B_n \arrow[d, dash] \\
A_{n-1} \arrow[d, dash] & & B_{n-1} \arrow[d, dash] \\
\vdots \arrow[d, dash] & & \vdots \arrow[d, dash] \\
A_1 \arrow[dr, dash] & & (B_1) \arrow[dl, dash] \\
& (0) &
\end{tikzcd}$$

Jedes Paar von Idealen (A_i,A_j) und (B_i,B_j) mit beliebigem i und j aus $i,j = 1,...,n$, ist dann niemals nur bis auf des Nullelement disjunkt. Da die A_l und B_l linear geordnet sind, ist immer eines von beiden Idealen, A_i oder A_j, in dem anderen echt enthalten, während für alle A_i, B_j stets

$$A_i \cap B_j = (0)$$

für alle $i,j = 1,...,n$ gilt. Da aber $G = A_i + B_j$ für jedes dieser Ideale sein muss, gilt

$$G = A_i \oplus B_j$$

für alle möglichen $i,j = 1,...,n$. Die Ideale A_i und B_j sind als 1-Ziel-Ideale direkt unzerlegbar. Der Beweis ist erbracht.

Auf den ersten Blick scheint die Forderung "kein Pflichtideal" unwichtig, jedoch sind auch:

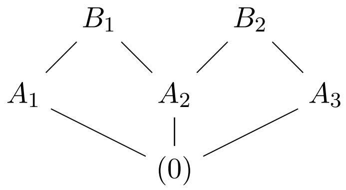
$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
B_1 \arrow[dr, dash] & & B_2 \arrow[dl, dash] \\
& A \arrow[d, dash] & \\
& (0) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, dash] & \\
& B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
A_1 \arrow[dr, dash] & & A_2 \arrow[dl, dash] \\
& (0) &
\end{tikzcd}$$

Idealdiagramme mit zwei Hauptgraphen, bei denen beide G direkt unzerlegbar sind.

2.3.3 Disjunkte volle Graphen

Um unseren Ziel, dem Ablesen von direkten Summen aus Idealdiagrammen näherzukommen, ist es notwendig, Beziehungen zwischen vollen Graphen zu diskutieren.

Zwei beliebige **volle Graphen** (verschiedener Ideale) eines Idealdiagramms eines Multioperatorrings nenne wir genau dann **zueinander disjunkt**, wenn sie beide kein echtes Ideal gemeinsam enthalten. Die Forderung kein "echtes Ideal" ist notwendig, da zwei volle Graphen immer mindestens ein Ideal und zwar das triviale Nullideal gemeinsam besitzen.



In der Skizze sind damit die vollen Graphen

$$Q_1: \quad (0) - A_1 - B_1 \qquad \text{und} \qquad Q_2: \quad (0) - A_2 - B_2$$

zueinander disjunkt, während es

$$Q_3: \quad (0) - A_2 - B_1 \qquad \text{und} \qquad Q_2: \quad (0) - A_2 - B_2$$

nicht sind. Disjunkte volle Graphen besitzen eine wichtige Eigenschaft:

Satz 1
Seien A und B zwei beliebige Ideale eines Multioperatorrings G. Besitzen A und B nur zueinander disjunkte volle Graphen, so sind die Ideale A und B bis auf das Nullelement zueinander disjunkt.

Beweis: Angenommen die beiden Ideale A und B wären nicht bis auf das Nullelement zueinander disjunkt, d.h.

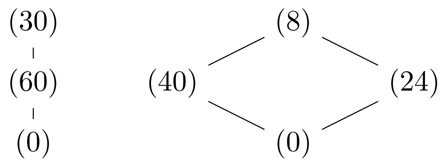
$$A \cap B \neq (0)$$

Dann besitzen A und B mindestens ein gemeinsames Element a, welches verschieden vom Nullelement ist. Damit erhalten wir aber

$$(0) \subset A \cap B \subset A \qquad \text{und} \qquad (0) \subset A \cap B \subset B$$

womit sowohl für das Ideal A aus auch für das Ideal B jeweils ein voller Graph existiert, welcher das Ideal $A \cap B$ enthält. Das widerspricht aber der Voraussetzung. Die betrachteten Ideale A und B sind bis auf das Nullelement zueinander disjunkt. Der Beweis ist erbracht.

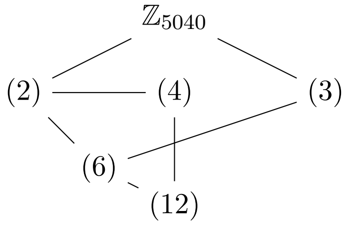
Die Tragweite des Satzes besteht darin, dass, wenn es zwei verschiedene Ideale mit nur zueinander disjunkten vollen Graphen in einem Multioperatorring gibt, diese eine direkte Summe bilden.
Betrachten wir z.B. den Restklassenring $\mathbb{Z}_{120}$. Die Menge aller vollen Graphen des Ideals (30) hat dann das Aussehen im linken Teil der Darstellung, für das Ideal (8) im rechten Teil:



Man erkennt, dass beide Ideale nur volle Graphen besitzen, welche paarweise zueinander disjunkt sind, womit beide Ideale bis auf das Nullelement zueinander disjunkt sind. Wir können also (30) und (8) zu direkten Summenbildung heranziehen. Tatsächlich gilt: $(2) = (30) \oplus (8)$.

Es soll nun das Ideal bestimmt werden, welches die direkte Summe zweier Ideale darstellt. Dazu sprechen wir vom **Obergerüst** eines Ideals, und verstehen darunter alle Ideale des entsprechenden Multioperatorrings, welche im Idealdiagramm "oberhalb" dieses Ideale liegen, d.h. also, alle Ideale, welche dieses Ideal echt enthalten.

Für den Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$ hat zum Beispiel das Obergerüst des Ideals (12) das Aussehen:



Es gilt nun folgender Satz:

Satz 2
Seien A und B zwei beliebige verschiedene Ideale eines Multioperatorrings G. Q_A und Q_B seien die Obergerüste der Ideale A und B. Q sei die Menge aller Ideale, welche sowohl zu Q_A als auch zu Q_B gehören.
Dann ist Q das Obergerüst eines Ideals C des Multioperatorrings G, für welches

$$C = A + B$$

gilt.

Beweis: Für ein Ideal C von G mit $C = A + B$ gilt sicher, dass es im Sinne des mengentheoretischen Enthaltenseins des kleinste Ideal in dem Ω-Ring G ist, welches A und B enthält.
Damit gehört es sowohl zum Obergerüst des Ideals A als auch zum Obergerüst von B. Folglich ist dieses Ideal C auch in der Menge Q enthalten. Für alle weiteren Ideale D von Q gilt aber

$$D \supset A \qquad \text{und} \qquad D \supset B$$

Da aber C das kleinste derartige Ideal ist, muss C auch in jedem Ideal D enthalten sein. Dass Q nun tatsächlich das Obergerüst von C ist, folgt daraus, dass jedes Ideal $E \supset C$ auch A und B umfasst.
Der Beweis ist erbracht.

Fassen wir Satz 1 und 2 zusammen, so erhalten wir ein einfaches Verfahren zur Bestimmung von direkten Summen aus Idealdiagrammen von Multioperatorringen mit endlich vielen Idealen, womit die theoretische Untersuchung von diesen Diagrammen abgeschlossen werden soll.

2.3.4 Einfache Typen von Idealdiagrammen

Mit dem gefundenen Verfahren zur Bestimmung von direkten Summen aus Idealdiagrammen, können wir nun einfache Idealdiagramme untersuchen. Dabei stellt sich heraus, dass sich diese Diagramme bei unterschiedlichen Multioperatorringen ähneln bzw. völlig identisch sind.

Da wir verbandstheoretische Betrachtungen nicht durchführen, sei nur darauf hingewiesen, dass die Ursache dieser identischen Diagramme in isomorphen Idealverbänden zu suchen ist. Ohne, dass wir die Struktur dieser Verbände betrachten, geben wir nur einige Diagramme mit ausgewählten direkten Zerlegungen an.

Das einfachste Idealdiagramm ist das von einfachen Multioperatorringen und damit auch das von Ω-Körpern:

$$\begin{array}{c} G \\ | \\ (0) \end{array}$$

Da diese Multioperatorringen keine nichttrivialen Ideale besitzen, sind sie direkt unzerlegbar. Beispiele dafür sind Restklassenringe modulo Primzahl, die Körper der rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen, der Quaternionenkörper sowie die Multioperatorringe $(\mathbb{R}^2, +, o_3)$ und $(\mathbb{R}^3, +, o_3)$, bei denen o_3 das vektorielle Tripelprodukt darstellt.

Multioperatorringe mit genau einem nichttrivialen Ideal besitzen ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{c} G \\ | \\ A \\ | \\ (0) \end{array}$$

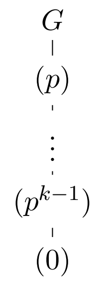
Offenbar sind gerade die Restklassenringe modulo Primzahlquadrat dafür Beispiele. Nach Abschnitt 2.1.4 sind diese Strukturen direkt unzerlegbar.
Um nun auch Aussagen über andere Multioperatorringe mit dem gleichen Idealdiagramme zu treffen, benutzen wir einen Satz, dessen Beweis uns hier nicht möglich ist:

Satz 1 (Kuros)
Seien G_1 und G_2 zwei beliebige Multioperatorringe und D_1 und D_2 deren Idealdiagramme.
Besteht zwischen diesen Idealdiagrammen eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ, welche jedem Ideal aus D_1 ein Ideal D_2 zuordnet und dabei die Ordnungsrelation des mengentheoretischen Enthaltenseins bei der Abbildung erhalten bleibt, so sind Aussagen über direkte Zerlegbarkeit, welche für G_1 gefunden worden auch für G_2 gültig, wenn man die entsprechenden Bilder benutzt.

Die Bedeutung des Satzes ist, dass Multioperatorringe mit identischen Idealdiagrammen gleiche direkte Summen besitzen, vorausgesetzt man ersetzt die zugehörigen Stücke. D.h., jeder Ω-Ring, welcher ebenfalls ein Idealdiagramm analog zum dem des Restklassenrings modulo Primzahlquadrat besitzt, ist selbst direkt unzerlegbar.

Den Beweis dieses Satzes können wir nicht führen, da er verbandstheoretische Kenntnisse erfordert. Es sei nur die Beweisidee erwähnt.
Es ist möglich alle direkten Zerlegungen von Strukturen auf direkte Zerlegungen von modularen Verbänden zurückzuführen. (siehe dazu Kuros [9], Seite 149). Damit sind aber nur die Ideal- bzw. Normalteilerverbände für die existierenden direkten Zerlegungen verantwortlich. Sind zwei derartige Verbände zueinander isomorph (und das fordern wir als Voraussetzung im Satz 1), so müssen sie auch die gleichen direkten Zerlegungen erzeugen.

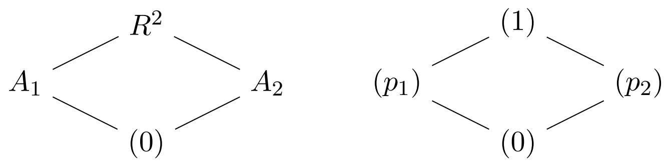
Einen weiteren besonderen Typ stellen die Diagramme von Restklassenringen modulo Primzahlpotenz p^n, $n > 2$, dar:



Das zugehörige Idealdiagramm gibt eine lineare Ordnung der Ideale wieder. Nach Abschnitt 2.1.4 sind derartige Multioperatorringen direkt unzerlegbar. Wir können dies sogar auf den allgemeinen Fall erweitern:

Satz 2
Jeder Multioperatorring, dessen Ideale durch die Halbordnung des mengentheoretischen Enthaltenseins linear geordnet sind, ist direkt unzerlegbar.

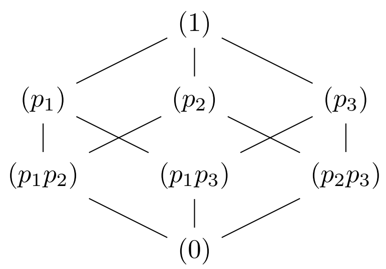
Zum Beweis überlege man sich, dass in diesem Fall kein Paar bis auf Null disjunkter Ideale existieren kann und auch nicht im Fall unendlich vieler Ideale.



Diese zwei Idealdiagramme sind identisch. Das erste Diagramm begegnete uns im Abschnitt 2.1.2 als Diagramm des Multioperatorrings $\mathbb{R}^2$, dessen Elemente aus Paaren von reellen Zahlen bestehen und die Operationen komponentenweise angewendet werden. Das zweite Diagramm entstammt einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, wobei n das Produkt zweier verschiedener Primzahlen ist: $n = p_1 \cdot p_2$. Nach Abschnitt 2.1.4 gilt dann für beide Strukturen

$$\mathbb{R}^2 = A_1 \oplus A_2 \qquad \text{bzw.} \qquad (1) = (p_1) \oplus (p_2)$$

Weitere direkte Summen existieren nicht.
Für Tripel von reellen Zahlen mit den obigen Operationen, d.h., für $\mathbb{R}^3$ findet man auch Restklassenringe, welche isomorphe Diagramme besitzen:



Es handelt sich dabei um Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$, wobei n das Produkt freier verschiedener Primzahlen $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ ist. Folgende direkte Summen treten auf:

$$(p_1) = (p_1p_3) \oplus (p_1p_2) \quad ; \quad (p_2) = (p_1p_2) \oplus (p_2p_3) \quad ; \quad (p_3) = (p_1p_3) \oplus (p_2p_3)$$

$$(1) = (p_1) \oplus (p_2p_3) = (p_2) \oplus (p_1p_3) = (p_3) \oplus (p_1p_2) = (p_1p_3) \oplus (p_1p_2) \oplus (p_2p_3)$$

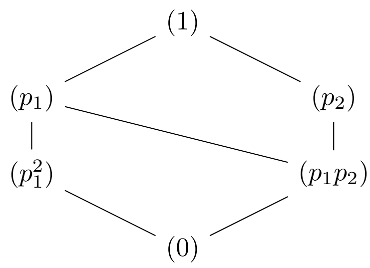
Das Idealdiagramm eines Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$, wobei n das Produkt von vier verschiedenen Primzahlen

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot 4$$

ist, ähnelt dem des Rings $(\mathbb{R}^4, +, \circ)$ von Seite 99.

Für weitere Restklassenringe geben wir nun noch die Idealdiagramme mit einigen ausgewählten direkten Zerlegungen an:

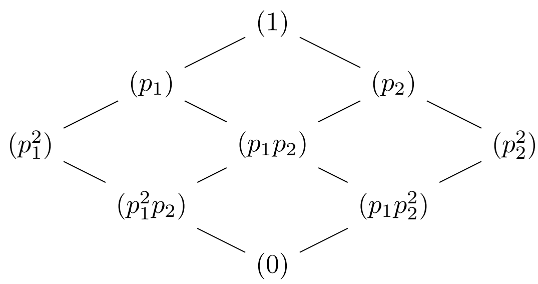
⊛ Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, wobei $n = p_1^2 \cdot p_2$ ist und die Primzahlen p_1 und p_2 verschieden sind:



Es existieren folgende Zerlegungen:

$$(p_1) = (p_1^2) \oplus (p_1p_2) \qquad ; \qquad (1) = (p_1^2) \oplus (p_2)$$

⊛ Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$, wobei $n = p_1^2 \cdot p_2^2$ und für die Primzahlen p_1 und p_2: $p_1 \neq p2$ gilt



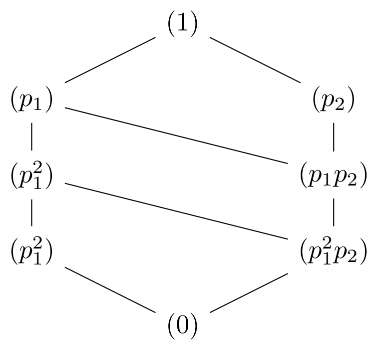
Es existieren die direkten Zerlegungen:

$$(p_1p_2) = (p_1^2p_2) \oplus (p_1p_2^2) \qquad ; \qquad (p_1) = (p_1^2) \oplus (p_1p_2^2) \qquad ; \qquad (p_2) = (p_2^2) \oplus (p_1^2p_2)$$

und als Zerlegung des Restklassenring selbst:

$$\mathbb{Z}_n = (1) = (p_1^2) \oplus (p_2^2)$$

⊛ Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n = p_1^3 \cdot p_2$, $p_1 \neq p_2$, p_1 und p_2 sind Primzahlen



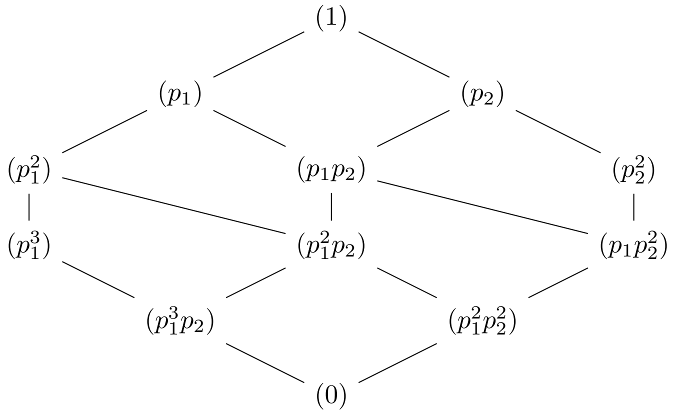
Es existieren die direkten Zerlegungen

$$(p_1^2) = (p_1^3) \oplus (p_1^2p_2) \qquad ; \qquad (p_1) = (p_1^3) \oplus (p1p2) \qquad ; \qquad (1) = (p_1^3) \oplus (p_2)$$

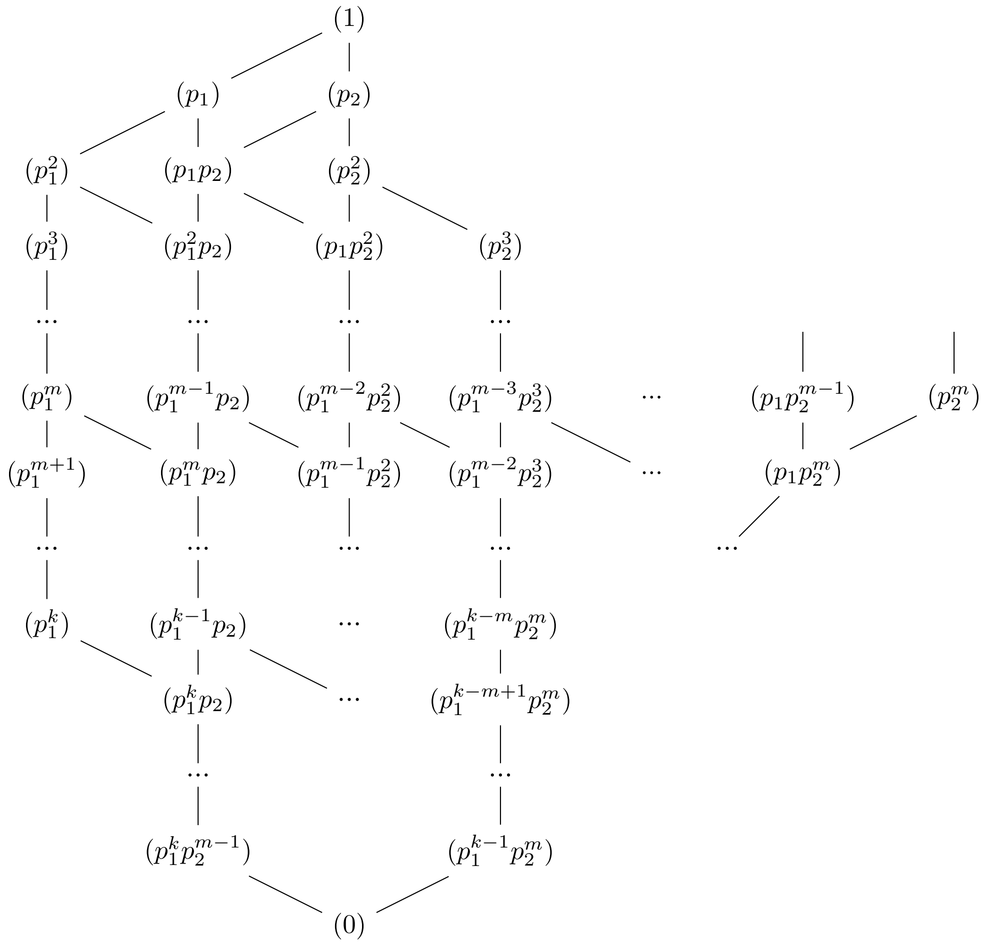
⊛ Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n = p_1^3 \cdot p_2^2$, $p_1 \neq p_2$, p_1 und p_2 sind Primzahlen (Abbildung nächste Seite) mit den direkten Summen

$$(p_1^2p_2) = (p_1^3p_2) \oplus (p_1^2p_2^2) \qquad ; \qquad (p_1p_2) = (p_1^3p_2) \oplus (p_1p_2^2) \qquad ; \qquad (p_1^2) = (p_1^2p_2^2) \oplus (p_1^3)$$

$$(p_1) = (p_1p_2^2) \oplus (p_1^3) \qquad ; \qquad (p_2) = (p_1^3p_2) \oplus (p_2^2) \qquad ; \qquad (1) = (p_1^3) \oplus (p_2^2)$$



⊛ Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n = p_1^k \cdot p_2^m$, $p_1 \neq p_2$, p_1 und p_2 sind Primzahlen sowie m und n beliebige natürliche Zahlen größer Null.
Voraussetzung für dieses Diagramm ist, dass $k \leq m$ ist, was o.B.d.A. angenommen werden kann.



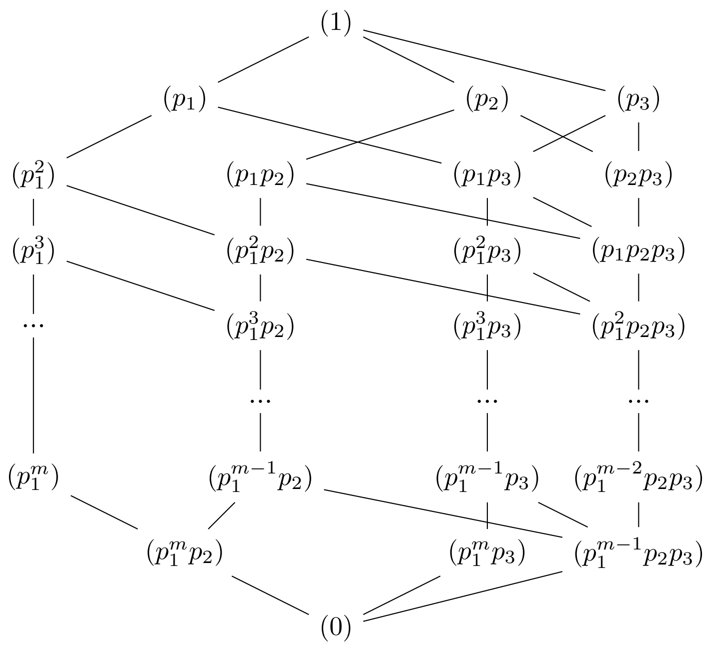
Das Aufzählen aller direkten Zerlegungen ist auf Grund der Unbestimmtheit der Exponenten k und m nicht möglich. Für den Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ gilt aber:

$$\mathbb{Z}_n = (1) = (p_1^k) \oplus (p_2^m)$$

Einige direkte Zerlegungen können aber dennoch in allgemeiner Form angegeben werden:

$$(p_1^j p_2^i) = (p_1^k p_2^i) \oplus (p_1^j p_2^m) \qquad \forall i = 0,1,...,m-1; \forall j = 0,1,...,k-1$$
$$(p_1^i) = (p_1^i p_2^m) \oplus (p_1^k) \qquad \forall i = 0,1,...,k$$
$$(p_2^i) = (p_1^k p_2^i) \oplus (p_2^m) \qquad \forall i = 0,1,...,m$$

⊛ Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n = p_1^n \cdot p_2 \cdot p_3$, $p_1 \neq p_2 \neq p_3$, p_1, p_2 und p_3 sind Primzahlen sowie m eine beliebige natürliche Zahl größer Null.

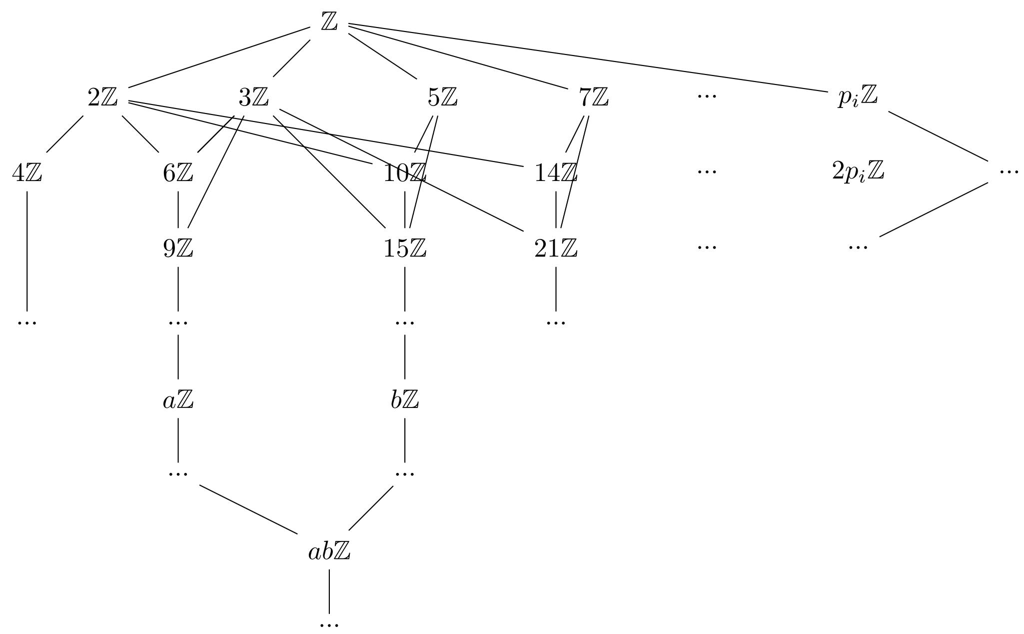


Mit der Zerlegung des Restklassenrings

$$\mathbb{Z}_n = (1) = (p_2p_3) \oplus (p_2p_1^m) \oplus (p_3p_1^m)$$

Selbstverständlich können wir auch Idealdiagramme von beliebigen Multioperatorringen mit endlich vielen Idealen untersuchen. Auf Seite 72 ist zum Beispiel des Idealdiagramm des Quasiendomorphismenrings Q_4 abgebildet. Dort gaben wir auch schon die direkten Summen an.

Abschließend sei erwähnt, dass auch für Multioperatorringe mit einer unendlichen Anzahl von Idealen unter Umständen ein Diagramm gezeichnet werden kann. Für den Ring der ganzen Zahlen würde man



erhalten. Da zu jedem Paar von Idealen $a\mathbb{Z}$ und $b\mathbb{Z}$ immer ein Ideal $ab\mathbb{Z}$ existiert, ist der Ring der ganzen Zahlen, wie schon gezeigt, direkt unzerlegbar.

2.3.5 Nullteilerfreie Multioperatorringe

Nun untersuchen wir wieder völlig beliebige Multioperatorringe. Betrachtet man die bisherigen Beispiele für Multioperatorringe, in denen echte direkte Zerlegungen existieren, so stellt man fest, dass sich kein nullteilerfreier Ω-Ring darunter befindet.
Das Ziel ist es, eine Aussage über die Beziehungen zwischen Nullteilerfreiheit und echten direkten Summe zu finden. Es gilt:

> **Satz 1**
> Ist G ein beliebiger Multioperatorring und A eines seiner Ideale, welches echte direkte Summe zweier nichttrivialer Ideale B und C ist, so besitzt der Ω-Ring Nullteiler.

Beweis: Da das Ideal A echte direkte Summe zweier nichttrivialer Ideale B und C sein soll, gilt

$$B \neq (0) \qquad ; \qquad C \neq (0) \qquad \text{und} \qquad B \cap C = (0)$$

Damit existiert in dem Ideal B wenigstens ein von Null verschiedenes Element und entsprechend in C wenigstens ein C mit $c \neq 0$. Da B Ideal ist, gilt für alle Operationen ω_n des Operationensystems Ω:

$$a = c...cbc...c\omega_n \in B$$

Da aber auch C Ideal in G ist und das Element aus diesem Ideal entnommen wurde, liegt a auch in C:

$$a = c...cbc...c\omega_n \in C$$

Nach Voraussetzung sind aber beide Ideale B und C bis auf das Nullelement disjunkt, womit a nur gleich dem Nullelement sein kann. Es gilt also für die beiden von Null verschiedenen Elemente b und c:

$$a = c...cbc...c\omega_n = 0$$

womit b und c Nullteiler in dem Multioperatorring G sind. Der Satz ist bewiesen.

Die Bedeutung dieses Satz erkennt man aus seiner Kontraposition:

> **Satz 2** (Kontraposition zu Satz 1)
> Ein nullteilerfreier Multioperatorring besitzt keine echten direkten Summe, d.h., er ist direkt unzerlegbar.

Damit sind alle Zahlenbereichsringe direkt unzerlegbar, wozu auch der Ring das ganzen Zahlen gehört. Körper und Ω-Körper können folglich auch keine direkten Summe, welche nichttrivial sind, besitzen. Ebenso können wir sagen:

> **Satz 3**
> Jeder reguläre Multioperatorring ist direkt unzerlegbar.

Dies folgt aus der Tatsache, des nullteilerfrei und regulär äquivalente Eigenschaften eines Multioperatorrings sind. (siehe Abschnitt 1.1.4)
Auch über die Struktur nullteilerfreier Multioperatorringe können wir eine Aussage treffen:

> **Satz 4**
> Besitzt ein nullteilerfreier Multioperatorring ein minimales Ideal, so ist die eindeutig bestimmt.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, d.h., würde ein derartiger Ω-Ring zwei verschiedene minimale Ideale besitzen, so müsste er nach Satz 4, 2.3.1, mindestens eine echte direkte Summe enthalten.

Zum Abschluss wenden wir uns noch einmal den vollständigen direkten Summen zu.
Da zwischen diesen direkten Vereinigungen und den direkten Summen eine umkehrbar eindeutige Beziehung besteht, muss folglich jede vollständige direkte Summe auch Nullteiler besitzen. Dies ist aber, wie wir schon in 2.2.2 sahen der Fall, so dass kein Widerspruch vorliegt.

2.3.6 Direkte Summen (2.Beschreibungsart)

Vergleicht man die bisherigen Untersuchungen mit denen in der Gruppen- und Ringtheorie, so stellt man fest, dass dort nicht von einer Definition der direkten Summe über die Normalteiler bzw. Ideal ausgegangen wird, sondern, dass man die direkte Summe mittels der Unterstrukturen definiert.
Damit liegt nun scheinbar eine Einschränkung bei den bisherigen Untersuchungen vor.

Um diesen scheinbaren Verlust zu beseitigen, geben wir nun die Definition der direkten Summe von Multioperatorringen mittels des Begriffs des Ω-Unterrings. Dabei werden wir nachweisen, dass diese neue Definition äquivalent zur bis jetzt benutzten ist und wir folglich keine Einschränkung bei der Definition über den Idealbegriff vornahmen.

Definition

Sei G ein Multioperatorring und $A_1,...,A_k$ ein System von Ω-Unterringen von G. Mit $\overline{A_i}$ werde der Ω-Unterring von G bezeichnet, welcher von allen Ω-Unterringen A_j, $j = 1,...,i-1,i+1,...,k$, mit Ausnahme des A_i erzeugt wird.
Der Multioperatorring G heißt dann und nur dann direkte Summe seiner Ω-Unterringe A_i, $i = 1,...,k$, wenn

1. Der Kommutant jedes Ω-Unterrings A_i mit $\overline{A_i}$ gleich dem Nullideal ist
$$[A_i, \overline{A_i}] = (0) \tag{2.21}$$
für alle $i = 1,...,k$ und wenn
2. sich jedes Element $a \neq 0$ aus G eindeutig als Summe von Null verschiedener Elemente darstellen lässt, wobei jeder Summand einem anderen Ω-Unterring A_i entnommen wurde, d.h.
$$a = a_1 + ... + a_l \tag{2.22}$$
mit a_l aus A_{i_l}, $l \leq k$ und $i_p \neq i_q$ für $p \neq q$.

Es soll nun die Gleichwertigkeit dieser Definition mit der von Abschnitt 2.1.1 nachgewiesen werden.
Zuerst sei der Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ideale A_i, $i = 1,...,k$, im Sinne von Definition 2.1.1.
Dann ist der Ω-Unterring $\overline{A_i}$ nach Satz 3, 1.3.1, ebenfalls Ideal und wir erhalten nach Abschnitt 1.3.4
$$[A_i, \overline{A_i}] \subseteq [A_i,G] \subseteq A_i \qquad \text{und} \qquad [A_i, \overline{A_i}] \subseteq [G,\overline{A_i}] \subseteq \overline{A_i}$$
Da der Durchschnitt des Ideals A_i mit $\overline{A_i}$ gleich dem Nullideal ist, muss auch der Kommutant beider Ideale gleich dem Nullideal sein, womit 1. gezeigt ist.

Auf Grund von (1.40), 1.3.1, und der Definition aus Abschnitt 2.1.1 existiert mindestens eine Darstellung der Form (2.22)
$$a = a_1 + ... + a_l$$

Angenommen, es gebe nun zwei derartige Darstellungen

$$a = a_1 + ... + a_l \qquad \text{und} \qquad a = a'_1 + ... + a'_l$$

wobei einige Summanden auch gleich dem Nullelement sein können; jedoch nicht alle. Dabei seien die Elemente a_i und a'_1 aus dem gleichen Ideal A_i, mit $i = 1,...,k$. Sind diese Darstellungen nicht identisch, so muss es mindestens ein Element a_i geben, welches von a'_1 verschieden ist.
O.B.d.A. sei dies a_1. Diese bedeutet aber:

$$a_1 \neq a'_1 \qquad \text{und} \qquad a_1 - a'_1 \neq 0$$

Da aber

$$a_1 = a - \sum_{i=2}^{k} a_i \qquad \text{und} \qquad a'_1 = a - \sum_{i=2}^{k} a'_i$$

gilt, erhalten wir

$$-a'_1 + a_1 = \sum_{i=2}^{k} a'_i - \sum_{i=2}^{k} a_i \in A_{i_1} \cap \overline{A_{i_1}}$$

da sowohl

$$a'_1 \in A_{i_1}; a'_1 \in \overline{A_{i_1}} \qquad \text{als auch} \qquad a_1 \in A_{i_1}; a_1 \in \overline{A_{i_1}} \qquad \text{als auch}$$

gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zu Relation (2.2) aus Abschnitt 2.1.1. Die Darstellung (2.22) von a muss eindeutig sein. Damit umfasst die Definition aus 2.1.1 auch die neu gegebene.

Umgekehrt sei der Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ω-Unterringe $A_1,...,A_k$ in Sinne der in diesem Abschnitt gegebenen Definition.
Dann sind die Ω-Unterringe A_i, $i = 1,...,k$, sogar Ideale. Zum Nachweis betrachten wir ein Element b aus G. Auf Grund der Relation (2.22) kann b auch in der Form

$$b = a_i + \overline{a_i}$$

mit a_i aus einem beliebigen A_i und $\overline{a_i}$ aus dem zugehörigen Ω-Unterring $\overline{A_i}$, dargestellt werden, was wir noch benötigen.

Sei nun a ein beliebiges Element aus A_i, i beliebig aus der Indexmenge $\{1,2,...,k\}$ und die Elemente $b_1,...,b_k$ aus dem Ω-Ring G. Ist die Operation ω_n beliebig aus dem Operationensystem Ω von G, so gilt dann:

$$b_1...b_{j-1}ab_{j+1}...b_n\omega_n =$$

und mit der obigen Definition von Elemente aus G

$$(a_1 + \overline{a_1})...(a_{j-1} + \overline{a_{j-1}})(a + 0)(a_{j+1} + \overline{a_{j+1}})...(a_n + \overline{a_n})\omega_n =$$

wobei alle Elemente a_l aus A_i bzw. $\overline{a_l}$ aus $\overline{A_i}$ sind, $l = 1,...,j-1,j+1,...n$. Da der Kommutant der Ideale A_i und $\overline{A_i}$ gleich dem Nullideal ist, können wir mit dem Distributivgesetz auflöse, so dass wir nur noch

$$a_1...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n + \overline{a_1}...\overline{a_{j-1}}0\overline{a_{j+1}}...\overline{a_n}\omega_n == a_1...a_{j-1}aa_{j+1}...a_n\omega_n = 0$$

erhalten. Da dieses Element aber in A_i enthalten sein muss, das nach Voraussetzung A_i Ω-Unterring ist, sind alle Ω-Unterringe A_i, $i = 1,...,k$, Ideal in dem Multioperatorring G.
Aus (2.22) ergibt sich dann, dass die Summe aller dieser Ideale A_i den ganzen Multioperatorring ergibt.

Nehmen wir nun an, dass ein Ω-Unterring A_i unter diesen existiertm für welchen

$$A_i \cap \overline{A_i} \neq (0)$$

gilt. Dann muss ein von Null verschiedenes Element a sowohl in $\overline{A_i}$ als auch im Ω-Unterring A_i enthalten sein. Dieses Element muss damit aber die Darstellungen

$$a = 0 + ... + 0 + a + 0 + ... + 0 \qquad \text{und} \qquad a = a_1 + ... + a_{j-1} + a_{j+1} + ... + a_k$$

besitzen, was aber ein Widerspruch zur Definition ist. Damit sind beide Definitionen äquivalent.

Es ist folglich keine Einschränkung, wenn die direkte Summe über Ideale definiert wird. Im Weiteren werden wir auch bei dieser Definition bleiben, da diese einfacher zu verwenden ist. Jedoch wird auch die zweite Definition und dabei vor allem die Aussage über den Kommutanten von Bedeutung sein.

Betrachten wir den entarteten Fall von Multioperatorringen mit leerem Operationensystem Ω, die abelsche Gruppen. Beziehen wir die gegebene Definition auf diese Strukturen, so erhalten wir:

Definition

Eine abelsche Gruppe heißt dann und nur dann direkte Summe ihrer Untergruppen $U - i$, $i = 1,...,k$, wenn jedes Element g aus G eine eindeutige Darstellung der Form

$$g = u_1 + ... + u_k$$

besitzt, wobei jedes u_i, $i = 1,...,k$, aus einer anderen Untergruppe U_i entnommen wurde.

Relation (2.21) entfällt, das der Kommutant zweier Untergruppen bei abelschen Gruppen immer gleich der Nulluntergruppe ist. Ebenso ist diese Definition gegenüber der üblichen für Gruppen nicht unvollständig, da die Addition kommutativ ist.
Für Ringe können wir (2.21) durch

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$$

ersetzen. Da dies für alle möglichen Elemente a_1, a_2 und b_1, b_2 gelten soll, erhalten wir für $a_2 = 0$ als hinreichenden und notwendigen Ersatz für (2.21)

$$a_1 b_2 = 0$$

für alle Elemente aus den direkten Summanden. Damit ist:

Definition

Ein Ring R heißt genau dann direkte Summe seiner Unterringe $U_1,...,U_k$, wenn jedes Element r aus R eine eindeutige Darstellung der Form

$$r = u_1 + ... + u_k$$

besitzt, wobei jedes Element u_i, $i = 1,...,k$, aus einer anderen Unterring U_i entnommen wurde und wenn für jedes Paar von Elementen u_i undu_j, mit $u_i \in U_i; u_j \in U_j$, $i \neq j$ und $i,j = 1,...,k$

$$u_i \cdot u_j = 0$$

gilt.

Da die zweite Forderung auf Nullmultiplikation in einem Zeroring immer erfüllt ist, können wir für Ω-Zeroringe sagen:

Satz 1
Ein Ω-Zeroring ist genau dann direkt zerlegbar, wenn sein Modul direkt zerlegbar ist.

Zum Abschluss des Abschnittes zeigen wir noch einen Satz, welchen wir für spätere Untersuchungen noch benötigen werden. Dies wird erst jetzt möglich, da die Aussage über den Kommutanten zweier direkter Summanden für den Beweis wichtig ist.

Satz 2
Sei G ein Multioperatorring und direkte Summe seiner Ideale A und B. Z sei das Zentrum von G sowie Z_a und Z_b die Zentren der Ideale A und B. Dann gilt:

$$Z = Z_a \oplus Z_b \tag{2.23}$$

Beweis: Sei G ein Multioperatorring, für welchen

$$G = A \oplus B$$

gilt. Z sei das Zentrum von G und Z_a bzw. Z_b die Zentren der Ideale A und B. Zuerst zeigen wir, dass die Summe der Zentren Z_a und Z_b gleich dem Zentrum Z von G ist. Dazu sei z beliebiges Element aus Z. Da nach Definition des Zentrums

$$[Z,G] = (0)$$

gilt, ist für das Element a

$$[z,G] = (0)$$

wobei wir unter $[x,Y]$ alle möglichen Kommutatoren von x mit beliebigen Elementen aus der Menge Y verstehen. Da die Ideale A und B in G enthalten sind, erhalten wir

$$[z,A] = (0) \qquad \text{und} \qquad [z,B] = (0)$$

womit z auch in Zentren Z_a und Z_b enthalten ist, d.h. es gilt

$$Z \subseteq Z_a + Z_b$$

Umgekehrt sei a ein beliebiges Elemente des Zentrums Z_a. Damit a auch in dem Zentrum Z von G enthalten ist, muss nach Satz 6, 1.3.4, für alle Elemente $g_1,...,g_n$ aus G bei jeder Operation ω_n des Operationensystems Ω:

$$g_1...g_{i-1}ag_{i+1}...g_n\omega_n = 0$$

gelten. Nun gilt aber

$$g_1...g_{i-1}ag_{i+1}...g_n\omega_n =$$

da G die direkte Summe der Ideale A und B ist, kann jedes Element g aus G nach (2.22) eindeutig in der Form

$$g = a + b$$

mit a auch A und b aus B dargestellt werden, so dass wir erhalten

$$= (a_1 + b_1)...(a_{i-1}b_{i-1})a(a_{i+1}b_{i+1})...(a_n + b_n)\omega_n =$$

mit dem Distributivgesetz

$$= a_1(a_2 + b_2)...(a_{i-1}b_{i-1})a(a_{i+1}b_{i+1})...(a_n + b_n)\omega_n + b_1(a_2 + b_2)...(a_{i-1}b_{i-1})a(a_{i+1}b_{i+1})...(a_n + b_n)\omega_n =$$

da aber der Kommutant von A und B nach (2.21) gleich dem Nullideal ist, fällte der zweite Summand weg. Setzen wir so fort, ergibt sich

$$= a_1 a_2 ... a_{i-1} a a_{i+1} ... a_n \omega_n = 0$$

da die verbleibenden Elemente a_l alle aus dem Ideal A sind und a sogar aus dessen Zentrum stammt. Damit liegt a auch im Zentrum Z von G. Analog zeigt man dies für ein beliebiges Element b aus Z_b, so dass mit dem obigen

$$Z = Z_a + Z_b$$

gilt. Da wir nun noch aus $Z_a \subseteq A$ und $Z_b \subseteq B$

$$Z_a \cap Z_b = (0)$$

erhalten, ist die Behauptung gezeigt. Der Satz ist bewiesen.

Damit erhalten wir einige Folgerungen

Satz 3
Die vollständige direkte Summe zweier zentrumsloser Multioperatorringe ist selbst zentrumslos.

Zum Beweis überlege man sich, dass die direkte Summe von zwei Ω-Nullringen wieder Ω-Nullring ist.

Satz 4
Die vollständige direkte Summe zweier Ω-Zeroringe ist Ω-Zeroring.

Da die Zentren bei Ω-Zeroringen mit dem ganzen Multioperatorring übereinstimmen ist dies trivial.

Satz 5
Jeder Ω-Zeroring lässt sich isomorph in einen gewissen Multioperatorring einbetten.

Zum Nachweis wählen wir zu dem gegebenen Ω-Zeroring einen beliebigen zentrumslosen Multioperatorring G. Dessen direkte Summe mit dem Ω-Zeroring Z sei der Multioperatorring H. Nach Satz 2 gilt dann für das Zentrum Z_h von H

$$Z_h = Z \oplus (0) = Z$$

so dass der Ω-Zeroring Z tatsächlich in H isomorph eingebettet ist. Selbstverständlich ist diese Einbettung nicht eindeutig.

2.4 Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale

2.4.1 Hauptreihen bei direkten Summen

Auf Seite 100, Abschnitt 2.1.2, sahen wir, dass das Ideal (a_1,a_{11}) des Quasiendomorphismen-Ω-Rings Q_4 zwar direkte Summe ist, jedoch die direkten Summanden nicht eindeutig bestimmt sind, da

$$(a_1,a_{11}) = (a_1) \oplus (a_{11}) = (a_{11}) \oplus (a_{13}) = (a_1) \oplus (a_{13})$$

gilt. Es erhebt sich die Frage, ob man gewisse Aussagen über die Zusammenhänge dieser Summanden treffen kann.
Zur Beantwortung dieser Frage wird der Satz von Schmidt-Ore helfen, welcher jetzt vorbereitet wird. Dabei wird vor allem die Existenz von Hauptreihen eine fundamentale Rolle spielen. Zuerst einige vorbereitende Sätze:

Satz 1 (Kuros)
Sei ein Ideal A eines Multioperatorrings G die direkte Summe von Idealen B_i, $i = 1,...,k$. Wählt man gewisse Ideale B'_i mit

$$(0) \subseteq B'_i \subseteq B_i \tag{2.24}$$

für alle $i = 1,...,k$, und setzt man

$$A' = B'_1 + ... + B'_k \tag{2.25}$$

so gilt:

1. A' ist direkte Summe der Ideale B'_i und
2. ist wenigstens ein B'_i echt in dem B_i enthalten, so ist auch A' echt in dem Ideal A enthalten.

Beweis: Da die Ideale B'_i in den Idealen B_i, $i = 1,...,k$, enthalten sind, wird

$$(B'_1 + ...B'_{j-1} + B'_{j+1} + ... + B'_k) \cap B'_j \subseteq (B_1 + ...B_{j-1} + B_{j+1} + ... + B_k) \cap B_j = (0)$$

für alle $j = 1,...,k$, so dass auch A' direkte Summe der B'_j wird. Damit gilt auch:

$$(B'_1 + ...B'_{j-1} + B'_{j+1} + ... + B'_k) \cap B'_j = (0) \tag{2.26}$$

Sei nun $A = A'$ und damit auch $B_i \subseteq A'$ für alle möglichen $i = 1,...,k$, d.h. es gilt:

$$B_i = B_i \cap A = B_i \cap A' = B_i \cap (B'_1 + ... + B'_k) =$$

und da die Ideale B'_i für alle i in den Idealen B_i enthalten sind, wird mit dem Satz 2, 1.3.6:

$$= B'_i + (B_i \cap (B'_1 + ... + B'_{i-1} + B'_{i+1} + ... + B'_k)) =$$

und mit (2.26)

$$= B'_i + (0) = B'_i$$

womit im Fall $A = A'$ für alle $i = 1,...,k$, $B_i = B'_i$ gilt.
Ist also ein Ideal B'_i echt in seinem zugehörigen Ideal B_i enthalten, so muss auch A' echt in A enthalten sein. Der Beweis ist erbracht.

Ein weiterer als Hilfssatz benötigter Zusammenhang ist:

Satz 2 (Kuros)
Ist ein Ideal A direkte Summe zweier Ideale B und C und existiert ein Ideal A' mit

$$B \subseteq A' \subseteq A$$

so gilt

$$A' = B \oplus (A' \cap C)$$

Beweis: Aus $A = B \oplus C$ wird

$$A = B + C \qquad \text{und} \qquad C \cap B = (0)$$

Aus $B \subseteq A' \subseteq A$ wird dann aber

$$A' \cap A = A'$$

Damit gilt

$$A' = A' \cap A = A' \cap (B + C) = B + (A' \cap C)$$

nach Satz 2, 1.3.6. Weiterhin ist:

$$B \cap (A' \cap C) \subseteq B \cap C = (0)$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Zur Demonstration betrachten wir den Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$. Dessen Ideal (12) ist direkte Summe der Ideale (1680) und (36). Das Ideal (120) liegt zwischen (12) und (1680); im Sinne des mengentheoretischen Enthaltenseins

$$(1680) \subseteq (120) \subseteq (12)$$

Damit erhalten wir mit dem gezeigten Satz

$$(120) = (1680) \oplus ((120) \cap (36))$$

Da nun der Durchschnitt der Ideale (120) und (36) gleich dem Ideal (360) ist, also

$$(120) = (1680) \oplus (360)$$

Für weitere Untersuchungen macht sich eine Begriffserklärung notwendig:

Definition

Ein Multioperatorring G sei die direkte Summe seiner Ideale A_1,...,A_k. Weiterhin sei

$$\overline{A_i} = \sum_{j=1; i \neq j}^{k} A_j$$

und nach Abschnitt 2.1.1 dann

$$G = A_i \oplus \overline{A_i}$$

Unter der zu A_i gehörigen **Komponente eines Ideals** B von G versteht man dann das Ideal

$$B^{(i)} = A_i \cap (B + \overline{A_i})$$

Die Zerlegung des Restklassenrings $\mathbb{Z}_{5040}$ ist (vergleiche 2.1.5)

$$\mathbb{Z}_n = (1) = (1008) \oplus (720) \oplus (560) \oplus (315)$$

Sei $A_i = (560)$ und damit $\overline{A_i} = (9)$. Wir bilden die Komponente bezüglich der Ideals (15):

$$B^{(i)} = (560) \cap ((15) + (9)) = (1680)$$

Die Komponente eines Ideals kann natürlich auch gleich dem Nullideal werden, wie es zum Beispiel für $A_i = (1008)$ und $B = (15)$ in $\mathbb{Z}_{5040}$ der Fall ist.

Satz 3 (Kuros)
Ein Ideal B eines Multioperatorrings G ist in der Vereinigung aller seiner Komponenten einer Zerlegung des ganzen Multioperatorrings enthalten. d.h.

$$B \subseteq B^{(1)} + B^{(2)} + ... + B^{(k)}$$

Beweis: Betrachten wir die Summe

$$B^{(1)} + B^{(2)} + ... + B^{(k)} =$$

mit der Definition der Komponenten

$$= (A_1 \cap (B + \overline{A_1})) + ... + (A_k \cap (B + \overline{A_k})) =$$

mit Satz 2, 1.3.6:

$$= (A_1 + (A_2 \cap (B + \overline{A_2})) + ... + (A_k \cap (B + \overline{A_k}))) \cap (B + \overline{A_1}) = (*)$$

Dies ist aber nur möglich, da

$$A_i \cap (B + \overline{A_i}) \subseteq A_i \subseteq B + \overline{A_i}$$

gilt. Wenden wir dies fortlaufend an, erhalten wir

$$(*) = (A_1 + ... + A_k) \cap (B + \overline{A_1}) \cap ... \cap (B + \overline{A_k}) =$$

Da die Summe der Ideale A_i gleich dem ganzen Multioperatorring G ist und für alle Ideale C: $G \cap C = C$ gilt:

$$= (B + \overline{A_1}) \cap ... \cap (B + \overline{A_k}) \supseteq B$$

Der Beweis ist erbracht.

Oben wurde die Komponenten $B^{(3)} = (1680)$ des Ideals (15) im Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$ bestimmt. Die übrigen Komponenten sind

$$B^{(1)} = (0) \qquad ; \qquad B^{(2)} = (720 \qquad ; \qquad B^{(4)} = (315)$$

Damit gilt aber

$$(15) \subseteq (1680) + (0) + (720) + (315)$$

Die Summe ergibt gerade das Ideal (15).
Weiter definieren wir:

Definition

Zwei Ideale A und B nennen wir genau dann **direkt ähnlich**, wenn in dem Multioperatorring G ein Ideal C existiert, so dass

$$G = A \oplus C = B \oplus C$$

gilt.

Offenbar sind dann die Ideale (a_1), (a_{11}) und (a_{13}) im Quasiendomorphismenring Q_4 direkt ähnlich. Hier sei nur bemerkt, dass es in Restklassenringen keine direkt ähnlichen Ideal geben kann.

Mit dieser Definition ist es nun möglich, zwei direkte Zerlegungen zu vergleichen. Wir sagen, dass zwei direkte Zerlegungen eines Multioperatorrings G genau dann **direkt ähnlich** sind, wenn beide direkten Zerlegungen die gleiche Anzahl von Summanden besitzen und wenn zwischen den Summanden eine umkehrbar eindeutige Abbildung von einer Zerlegung auf die andere existiert, so dass einander zugeordnete Ideale direkt ähnlich sind.
Auf Grund der geforderten 1-1-Abbildung spricht man auch von der **Isomorphie dieser direkten Zerlegungen**, denn wir können zeigen:

Satz 4
Ist ein Multioperatorring G die direkte Summe zweier Ideale A und B, so ist der Ω-Faktorring G/A isomorph zu dem Ideal B und der Ω-Faktorring G/B isomorph zu dem Ideal A.

Beweis: Zum Nachweis verwenden wir den erstem Isomorphiesatz aus Abschnitt 1.3.5. Aus der Isomorphie

$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B)$$

wird, da die Summe beider Ideale den ganzen Multioperatorring G ergibt und die Ideale A und B außerdem bis auf das Nullelement zueinander disjunkt sind

$$G/A \cong B/(0) \cong B$$

Da die direkte Summe kommutativ ist, folgt die Behauptung für das Ideal A analog. Der Beweis ist erbracht.

Für zwei direkt ähnliche Ideale A und B eines Multioperatorrings G erhalten wir aus

$$G = A \oplus C = B \oplus C$$

sofort die Isomorphie

$$A \cong A/(0) \cong G/C \cong B/(0) \cong B$$

womit direkt ähnliche Ideale immer zueinander isomorph sein müssen. Daher ist die Bezeichnung "isomorphe Zerlegungen" gerechtfertigt.

Liegt nun in einem beliebigen Multioperatorring G die direkte Zerlegung

$$G = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k = \oplus \sum_{i=1}^{k} A_i$$

vor und setzen wir

$$C_1 = A_1 \quad ; \qquad C_2 = A_1 + A_2 \quad ; \qquad ... \quad ; \qquad C_l = A_1 + ... + A_l$$

mit den Indizes $l \leq k$, so erhalten wir, da für ein Paar von Indizes (i,j) mit $i,j = 1,...,k$ und $i < j$

$$C_i \subseteq C_j$$

gilt, mit

$$(0) = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_k = G$$

eine Normalreihe im Multioperatorring G. Finden wir nun in dem Multioperatorring G eine Hauptreihe der Länge n, so können wir nach Satz 1, 1.4.2, diese Normalreihe zu einer Hauptreihe mit der gleichen Länge n verfeinern. Damit gilt:

Satz 5 (Kuros)
Besitzt ein Multioperatorring G Hauptreihen der Länge n, so kann eine direkte Zerlegung des Ω-Rings G maximal n Summanden besitzen, d.h., jede direkte Zerlegung von G kann zu einer direkten Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale verfeinert werden.

Als Folgerung erhalten wir:

Satz 6
Ein Multioperatorring G, welcher unendliche direkte Summe ist, besitzt keine Hauptreihen, d.h., er kann nicht gleichzeitig der Minimal- und Maximalbedingung für Ideale genügen.

Der Beweis ergibt sich aus Satz 5 und Satz 4, 1.4.2.

2.4.2 Der Satz von Schmidt-Ore

Wir wisse, dass in einem Multioperatorring mit Hauptreihen jede direkte Zerlegung zu einer in direkt unzerlegbare Ideale verfeinert werden kann.
Es entsteht nun die Frage, ob zwei derartige Zerlegungen in direkt unzerlegbare Ideale direkt ähnlich sind. Diese Frage beantwortet der Satz von Schmidt-Ore.
Zuvor zeigen wir folgenden Hilfssatz:

Satz 1 (Kuros)
Sei G ein Multioperatorring und

$$G = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k \tag{2.27}$$

$$G = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_l \tag{2.28}$$

zwei direkte Zerlegungen von G, wobei die A_i und B_j, $i = 1,...,k$, $j = 1,...,l$, direkt unzerlegbare Ideale des Multioperatorrings sind.
Besitzt G Hauptreihen, so kann jeder Summand aus einer der beiden Zerlegungen durch einen bestimmten Summanden der anderen Zerlegung ersetzt werden, wobei unter dem Ersetzen von A_1 durch ein Ideal B_j die Gültigkeit der Gleichung

$$G = B_j \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k$$

verstanden wird.

Dabei ergibt sich auch sofort $B = B_j \oplus \overline{A_1}$.
Beweis: Das Nachweis soll mit vollständiger Induktion nach der Länge n der Hauptreihen geführt werden.

zu $n = 1$: Hauptreihen der Länge 1 gibt es nur in einfachen Multioperatorringen. In diesen existieren nur die trivialen direkten Zerlegungen

$$G = G \oplus (0) \qquad \text{und} \qquad (0) = (0) \oplus (0)$$

womit der Satz für $n = 1$ gilt.
Sei der Satz nun für ein beliebiges n schon bewiesen, dann zeigen wir jetzt, dass das Ideal A_1 aus der Zerlegung (2.27) durch ein Ideal aus Zerlegung (2.28) ersetzt werden kann.
B_1 sei o.B.d.A. das ersetzende Ideal. Auf Grund der Möglichkeit des Umnummerierens von direkten Summanden ist diese Annahme ohne Beschränkung der Allgemeinheit.
Wir konstruieren nun alle Komponenten des Ideals A_1 bezüglich der Ideale B_j, $j = 1,...,l$, der direkten Zerlegung (2.28) und fordern vorerst, dass wenigstens eine der Komponenten $A_1^{(i)}$ von dem zugehörigen Ideal B_i verschieden ist. Weiterhin setzten wir:

$$G^+ = A_1^{(1)} + ... + A_1^{(l)}$$

Da jede Komponente in dem entsprechenden B_i enthalten ist und für ein i, $i = 1,...,l$, sogar

$$A_1^{(i)} \subset B_i$$

gilt, wird nach Satz 1, 2.4.1:

$$G \supset G^+ = \oplus \sum_{i=1}^{l} A_1^{(i)} \tag{2.29}$$

Damit sind die Hauptreihen in dem Multioperatorring G^+ echt kürzer als in G, so dass nach Induktionsvoraussetzung der Satz für den Ω-Ring G^+ gültig ist. Nach Satz 3, 2.4.1, gilt dann auch $A_1 \subseteq G^+$. Benutzen wir Satz 2, 2.4.1, erhalten wir aus

$$G = (A_1 \oplus (\oplus \sum_{i=2}^{k} A_i)) \qquad \text{und} \qquad A_1 \subseteq G^+ \subset G:$$

$$G^+ = A_1 \oplus (G^+ \cap (A_2 \oplus ... \oplus A_k))$$

Setzen wir

$$D = G^+ \cap (A_2 \oplus ... \oplus A_k)$$

wir also

$$G^+ = A_1 \oplus D \tag{2.30}$$

Da der zu beweisene Satz für den Ω-Ring G^+ gilt, können wir (2.29) und (2.30) zu direkten Summen direkt unzerlegbarer Ideale verfeinern (A_1 ist nach Voraussetzung direkt unzerlegbares Ideal):

$$G^+ = A_1 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus ... \oplus D_p \tag{2.31}$$

$$G^+ = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus ... \oplus C_q \tag{2.32}$$

und außerdem das Ideal A_1 durch ein Ideal C_i, welches wir o.B.d.A. C_1 nennen, ersetzen:

$$G^+ = C_1 \oplus D \tag{2.33}$$

O.B.d.A. setzen wir weiter $C_1 \subseteq A_1^{(1)}$, was wiederum auf Grund der Möglichkeit des Umnummerierens möglich ist, so dass wir aus Relation (2.33)

$$(0) = C_1 \cap D = C_1 \cap (G^+ \cap (A_2 \oplus ... \oplus A_k)) =$$

und mit $C_1 \subseteq G^+$

$$= C_1 \cap (A_2 \oplus ... \oplus A_k)$$

erhalten. Die Summe

$$H = C_1 + (A_2 \oplus ... \oplus A_k)$$

ist damit sogar direkt

$$H = C_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k \tag{2.34}$$

Nach Satz 9, 1.4.2, wird für ein Ideal $X = Y \oplus Z$:

$$l(X) = l(Y) + l(Z) \tag{2.35}$$

wobei $l(X)$ die Länge der Hauptreihen in X ist. Da C_1 und A_1 direkt ähnliche Ideale des Multioperatorrings G sind, müssen deren Hauptreihen die gleiche Länge besitzen:

$$l(A_1) = l(C_1)$$

Da man Relation (2.35) für eine Zerlegung $Z = Z_1 \oplus ... \oplus Z_s$ auf

$$l(Z) = L(Z_1) + ... + l(Z_s) \qquad \text{, d.h.}$$

$$l(X) = l(Y) + l(Z_1) + ... + l(Z_s)$$

erweitern kann, muss $l(H) = l(G)$ sein, womit die beiden Multioperatorringe identisch sein müssen, $H = G$ und damit

$$G = C_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k \tag{2.36}$$

Da das Ideal C_1 in der Komponente $A_1^{(1)}$ enthalten ist und diese Komponente wiederum in B_1 enthalten ist und das Ideal B_1 nach Voraussetzung direkt unzerlegbar ist, muss

$$C_1 = A_1^{(1)} = B_1$$

sein, d.h. es gilt

$$G = B_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k$$

Das Ideal A_1 ist damit ersetzbar. Analog folgt dies für die anderen Ideale der direkten Zerlegung (2.27).

Wenden wir uns der Umkehrung zu. Auf Grund von Relation (2.36) ist das Ideal B_1 gleich der Komponente $A_1^{(i)}$ und außerdem

$$B_1 = B_1 \cap (A_1 + \overline{B_1})$$

nach der Definition der Komponenten eines Ideals. Damit gilt aber auch

$$B_1 \subseteq (A_1 + \overline{B_1}) \qquad \text{und} \qquad A_1 + \overline{B_1} = G$$

Da die Länge der Hauptreihen in den Idealen A_1 und B_1, die beiden Ideale sind nach dem oben gezeigten direkt ähnlich, gleich sind, wird mit (2.35)

$$l(G) = l(B_1) + l(\overline{B_1}) = l(A_1) + l(\overline{B_1}) \qquad \text{und damit} \qquad A_1 \cap \overline{B_1} = (0)$$

Damit ist der Multioperatorring G aber auch direkte Summe von A_1 und allen Idealen B_i mit $i = 2,...,l$:

$$G = A_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_l$$

Auch das Ideal B_1 ist durch das Ideal A_1 ersetzbar.

Bis jetzt war vorausgesetzt, dass wenigstens eine Komponente $A_1^{(i)}$ von dem zugehörigen Ideal B_i verschieden ist. Nun fordern wir, dass die Komponenten von A_1 bezüglich der Ideale B_j, $j = 1,...,l$, mit diesem selbst übereinstimmen und zusätzlich wenigstens die Komponente von zum Beispiel B_1

bezüglich des Ideals A_1 mit A_1 zusammenfällt.
Dann ist aber, wie schon gezeigt:

$$G = A_1 + \overline{B_1} \qquad \text{und} \qquad G = B_1 + \overline{A_1} \tag{2.37}$$

Aus (2.27) und (2.35) wird

$$l(G) = l(A_1) + l(\overline{A_1})$$

Aus (2.28) und (2.35) wird

$$l(G) = l(B_1) + l(\overline{B_1})$$

Aus (2.37) wird, da nur die Summe gesichert ist

$$l(G) \leq l(A_1) + l(\overline{B_1}) \qquad \text{und} \qquad l(G) \leq l(B_1) + l(\overline{A_1})$$

Lösen wir dieses System von Gleichungen und Ungleichungen auf, erhalten wir:

$$l(A_1) = l(B_1) \qquad \text{und} \qquad l(\overline{A_1}) = l(\overline{B_1})$$

womit also auch

$$A_1 \cap \overline{B_1} = B_1 \cap \overline{A_1} = (0 =$$

gilt. Die direkten Summen

$$G = A_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_l = B_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_k$$

existieren.
Es verbleibt also noch die Möglichkeit, dass die Komponenten von A_1 bezüglich der Ideale B_i mit den B_i übereinstimmen, während umgekehrt alle Komponenten B_i bezüglich A_1 von dem Ideal A_1 verschieden sind.
Dann besitzen alle B_i die Eingenschaft von A_1 aus dem ersten Teil des Beweises und können damit durch gewisse A_j ersetzt werden. Damit gibt es auch ein Ideal B_j, welches durch das Ideal A_1 ersetzt wird. Folglich muss aber die Komponente von B_j mit dem Ideal A_1 zusammenfallen. Es liegt also ein Widerspruch zur Voraussetzung vor. Diese Möglichkeit existiert nicht, womit der Beweis dieses Hilfssatzes erbracht ist.

Als Folgerung ergibt sich der Satz von Schmidt-Ore:

Satz von Schmidt-Ore
Ist G ein Multioperatorring mit Hauptreihen, so sind je zwei direkte Zerlegungen von G in direkt unzerlegbare Ideale direkt ähnlich.

Beweise: Es seien

$$G = A_1 \oplus ... \oplus A_k = B_1 \oplus ... \oplus B_l$$

zwei direkte Zerlegungen von G, wobei die A_i, B_j, $i = 1,...,k$, $j = 1,...,l$, direkt unzerlegbare Ideale sind.
Ersetzen wir das Ideal A_1 durch ein Ideal B_j, so sind beide Ideale direkt ähnlich. Liegt nun eine direkte Summe vor, bei der schon einige Ideale A_i durch Ideale $B_{i,j}$ ersetzt sind

$$G = B_{1,j} \oplus ... \oplus B_{m,j} \oplus A_{m+1} \oplus ... \oplus A_k \tag{2.38}$$

mit $1 \leq m \leq k$, wobei die $B_{i,j}$ paarweise verschieden sind, so sind die Ideale A_i und $B_{i,j}$ direkt ähnlich. Wenden wir Satz 1 auf die Zerlegungen (2.28) und (2.38) an, lässt sich das Ideal A_{m+1} durch ein gewisses Ideal $B_{m+1,j}$ aus der Zerlegung (2.28) ersetzen, wobei A_{m+1} und $B_{m+1,j}$ direkt ähnlich sind, sowie das Ideal $B_{m+1,j}$ von allen Idealen $B_{i,j}$, $i = 1,...,m$, verschieden ist, denn aus (2.38) folgt

$$B_{i,j} \cap B_{m+1,j} = (0)$$

für alle i mit $i = 1,...,m$. Wird diese Ersetzung fortgesetzt, erhalten wir am Ende

$$G = B_{1,j} \oplus ... \oplus B_{k,j}$$

wobei $k \leq l$ gilt. Mit Relation (2.28) erhalten wir dann aber sogar $k = l$. Folglich sind beide direkten Zerlegungen direkt ähnlich. Der Satz ist bewiesen.

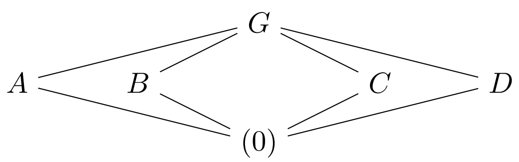
2.4.3 Anwendung und Beispiele

In Abschnitt 2.1.4, bei der Zerlegung von Restklassenringen, ergab sich, dass die auftretenden direkten Zerlegungen bis auf Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt sind. Damals konnten wir den Beweis noch nicht führen.
Da Restklassenringe Hauptreihen besitzen, folgt nun aus dem Satz von Schmidt-Ore:

Satz 1
Direkte Zerlegungen eines Restklassenrings in direkt unzerlegbare Ideale sind untereinander direkt ähnlich.

Direkt ähnlich bedeutet aber, dass die Summanden bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Da aber in einem Restklassenring zu einem Ideal A kein weiteres von A verschiedenes Ideal B existiert, welches zu A isomorph ist, d.h., es gibt nur die triviale direkte Ähnlichkeit zu sich selbst, folgt daraus, dass die direkten Zerlegungen in direkt unzerlegbare Ideale sogar bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt ist.

Dies muss nicht in jedem Multioperatorring mit Hauptreihen der Fall sein.



Betrachten wir einen Multioperatorring mit dem oben abgebildeten Idealdiagramm, so ist dieser Ω-Ring direkt zerlegbar und zwar:

$$G = A \oplus B = A \oplus C = A \oplus D = B \oplus C = B \oplus D = C \oplus D$$

Damit ist jedes echte Ideal zu jedem anderen echten Ideal direkt ähnlich. Die Ideale A, B, C und D müssen folglich zueinander isomorph sein. Da die vier nichttrivialen Ideale minimal und damit direkt unzerlegbar sind, sind die direkten Zerlegungen des Ω-Rings direkt ähnlich.

Als endlicher Multioperatorring besitzt der Quasiendomorphismenring Q_4 Hauptreihen. Dessen Zerlegung in Ideale lässt sich folglich zu einer Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale verfeinern. Vergleichen wir mit Seite 100, so erkennen wir, dass die direkte Zerlegung

$$Q_4 = (a_3) \oplus (a_{10})$$

eine derartige Zerlegung ist. Wir können sogar sagen, dass hier die direkte Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt ist.
Der Schluss, dass nun auch jedes Ideal des Multioperatorrings Q_4 derartig in direkt unzerlegbare Ideale zerlegt werden kann, dass diese direkte Summe bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt ist, ist nicht möglich. Für das Ideal (a_8,a_{11}) existieren die direkten Summen

$$(a_8,a_{11}) = (a_8) \oplus (a_{11}) = (a_6) \oplus (a_{11}) = (a_4) \oplus (a_{13})$$

Diese Zerlegungen sind aber nicht die gesuchten, da jeweils ein Summand weiter direkt zerlegbar ist. Die Darstellung des Ideals (a_8,a_{11}) als direkte Summe von unzerlegbaren Idealen hat die Form

$$(a_8,a_{11}) = (a_{10}) \oplus (a_{11}) \oplus (a_{13})$$

und ist die einzige dieser Form. Die Summanden sind damit auch hier bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.
Betrachten wir aber das Ideal (a_1,a_{11}), so sind deren Zerlegungen in direkt unzerlegbare Ideal die folgenden:

$$(a_1,a_{11}) = (a_1) \oplus (a_{11}) = (a_{11}) \oplus (a_{13}) = (a_1) \oplus (a_{13})$$

Dieses Ideal kann nicht eindeutig bis auf die Reihenfolge der Summanden in direkt unzerlegbare Ideale aufgespalten werden. Wir schon in Abschnitt 2.4.2 erwähnt, sind die Ideale (a_1), (a_{11}) und (a_{13}) direkt ähnlich, d.h. zueinander isomorph.

Weiterhin untersuchten wir die Multioperatorringe $\mathbb{R}^n$, welche aus n-Tupeln, $n \geq 2$, reeller Zahlen bestehen und die Operationen "Addition" und "Multiplikation" komponentenweise ausführen.
In Satz 1, 2.1.2, gaben wir deren Zerlegung an. Jetzt, nachdem der Begriff der vollständigen direkten Summe zur Verfügung steht, können wir sage, dass der Multioperatorring $(\mathbb{R}^n,+,\circ)$ die direkte Summe von n Körpern der reellen Zahlen ist:

$$(\mathbb{R}^n, + ,\circ) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus ... \oplus \mathbb{R}}_{nSummanden}$$

Da die Summanden alle Körper sind, sind sie selbst direkt unzerlegbar, so dass wir eine Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale vorliegen haben.
Da nun der Multioperatorring $\mathbb{R}^n$, trotz seiner Unendlichkeit, endlich viele Ideale und damit Hauptreihen besitzt, ist diese Zerlegung bis auf Isomorphie (sogar bis auf die Reihenfolge der Summanden) der Summanden eindeutig bestimmt.
In Abschnitt 2.5.3 wird und noch ein weiterer Multioperatorring mit direkt ähnlichen Idealen begegnen.

2.5 Direkte Summen in endlichen Multioperatorringen

2.5.1 Erster Hauptsatz

In der Gruppentheorie wird durch den Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen die Struktur für diese Gruppen aufgeklärt. Auf Grund dieses Satzes kann von jeder endlichen abelschen Gruppe deren direkte Zerlegung bestimmt werden.
Da zyklische Gruppen direkt unzerlegbar sind, liegen somit immer zugleich direkte Zerlegungen in direkt unzerlegbare Gruppen vor.

Da die abelschen Gruppe entartete Multioperatorringe (leere Operationensystem) sind, ist dieser Satz auch für uns von Bedeutung:

Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen
Jede endliche abelsche Gruppe ist die direkte Summe endlich vieler zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

Da wir aber Multioperatorringe in ihrer allgemeinen Form untersuchen, erhebt sich die Frage, ob man diesen Satz auf Multioperatorringe übertragen kann, da jeder Multioperatorring eine abelsche Gruppe als Trägerstruktur besitzt. Diese Frage soll jetzt beantwortet werden.

Wir suchen nach einem hinreichenden und notwendigen Kriterium für die Existenz von direkten Zerlegungen von endlichen Multioperatorringen. Dazu teilen wir die Multioperatorringe in vier Fälle ein:

A) Multioperatorringe, deren additive Gruppe eine Ordnung n mit

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

hat, wobei die p_i, $i = 1,...k$, verschiedene Primzahlen, $k \geq 2$, und für alle i: $e_i \geq 1$ sind.

B) Multioperatorringe, deren additive Gruppe von Primzahlordnung ist.

C) Multioperatorringe, deren additive Gruppe von Primzahlpotenzordnung p_i, $i \geq 2$, und zyklisch ist.

D) Multioperatorringe, deren additive Gruppe von Primzahlpotenzordnung p_i, $i \geq 2$, und nicht zyklisch ist.

Die ersten drei genannten Fälle behandeln wir in diesem Abschnitt, während wir Fall D bis zum nächsten Abschnitt verschieben.

Offenbar können wir feststellen, dass ein Multioperatorring nur dann echt direkt zerlegbar sein kann, wenn es auch dessen additiven Trägerstruktur ist, d.h., besitzt ein Multioperatorring einen direkt unzerlegbaren Modul als Trägerstruktur, so ist er selbst direkt unzerlegbar. Die Ursache liegt in dem Satz von Kuros über die Summe von Idealen (Satz 3, 1.3.1). Damit können wir sagen:

1. Hauptsatz über endliche Multioperatorringe
Sei G ein beliebiger endlicher Multioperatorring. n sei die Ordnung der additiven Trägerstruktur $(G,+)$ von G.

1. Ist n zusammengesetzte Zahl, d.h. es existiert eine Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \tag{2.39}$$

wobei die p_i Primzahlen sind, $i = 1,...,k$, $k \geq 2$, $e_i > 0$ für alle i, so ist der Multioperatorring G echt direkt zerlegbar.

2. Ist n Primzahl, so ist G direkt unzerlegbar.
3. Ist n Primzahlpotenz, d.h. $n = p^i$, $i \geq 2$, und die additive Gruppe $(G,+)$ von G zyklisch, so ist G ebenfalls direkt unzerlegbar.

Beweis zu Behauptung 1:
Da die Gruppenordnung n die Darstellung (2.39) besitzt, konstruieren wir für jede der Primzahlen p_i, $i = 1,...,k$, eine Untergruppe des Moduls $(G,+)$, von denen wir anschließend die Idealeigenschaft nachweisen.

Für jede der Primzahlen p_i werde mit P_i die Untergruppe von $(G,+)$ der Form

$$P_i = \{a | a \in G \text{ und } \exists j \in \mathbb{N} \text{ mit } p_i^j a = \underbrace{a + a + ... + a}_{p_i^j Summanden} = 0\} \tag{2.40}$$

bezeichnet. Dabei ist

$$p_i^j a = \underbrace{a + a + ... + a}_{p_i^j Summanden}$$

die p_i^j-te Vielfachbildung. Wie man sieht, haben wir damit gerade die p-Sylow-Gruppen der abelschen Gruppe $(G,+)$ des Multioperatorrings G konstruiert. womit der Untergruppennachweis hinfällig ist. Ebenso erübrigt sich der Nachweis, dass zwei verschiedene p-Sylow-Gruppen P_i und P_j paarweise, bis auf das Nullelement, disjunkt sind.
Die P_i sind aber mit den Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω des Multioperatorrings G auch Ideal in G. Dazu seien die Elemente $b_1,...,b_n$ beliebig aus G und a beliebig aus einer Untergruppe P_i.
Für eine beliebige n-äre Operation ω_n aus Ω muss dann das Element

$$b_1...b_{i-1}ab_{i+1}...b_n\omega_n$$

als Element von P_i nachgewiesen werden. Dazu suchen wir eine natürliche Zahl j größer Null, für welche die p_i^j-te Vielfachbildung zum Nullelement wird. Da das Element a aus P_i ist, existiert für a eine derartige natürliche Zahl j^+ mit:

$$p_i^{j^+} a = 0 \tag{2.41}$$

Betrachten wir nun

$$p_i^{j^+}(b_1...b_{l-1}ab_{l+1}...b_n\omega_n) = \underbrace{b_1...b_{l-1}ab_{l+1}...b_n\omega_n + ... + b_1...b_{l-1}ab_{l+1}...b_n\omega_n}_{p_i^{j^+} Summanden} =$$

Wenden wir das Distributivgesetz $(p_i^{j^+} - 1)$ mal an, ergibt sich insgesamt

$$= b_1...b_{l-1}(p_i^{j^+} a)b_{l+1}...b_n\omega_n =$$

und mit Gleichung (2.41)

$$= b_1...b_{l-1}0b_{l+1}...b_n\omega_n = 0$$

womit die Untergruppen P_i mit den Operationen des Operationensystems Ω von G Ideale in dem Multioperatorring sind.
Dass nun der Ω-Ring G die Summe dieser Ideale P_i ist, $i = 1,...,k$, folgt aus der Tatsache, dass die additiven Anteile der P_i die p-Sylow-Gruppen des Moduls von G sind. (siehe dazu Flachsmeyer-Prohaska [2], Seite 186)
Damit gilt:

$$G = \oplus \sum_{i=1}^{k} P_i$$

Da nun mindestens zwei Primzahlen in der Zerlegung (2.39) auftreten, ist diese direkte Summe auch echte direkte Summe. Behauptung 1 ist bewiesen.

zu Behauptung 2: Wenn die Gruppenordnung n Primzahl ist, so ist die additive Gruppe $(G,+)$ von G zyklisch. Damit ist nach dem Satz von Lagrange keine echt Untergruppe möglich. Es kann also auch kein nichttriviales Ideal im Multioperatorring G geben. G ist direkt unzerlegbar.

zu Behauptung 3: Ist $n = p^i$, $i \geq 2$, und der Modul $(G,+)$ von G zyklisch, so existiert für jeden echten Teiler t der Gruppenordnung eine nichttriviale Untergruppe der Ordnung t und nur diese, d.h., Untergruppen der Ordnung:

$$1 = p^0; p; p^2; ...; p^{i-1}; p^i = n$$

Als Unterstrukturen der zyklischen Gruppe $(G,+)$ sind diese Untergruppen selbst zyklisch, so dass für die Untergruppe der Ordnung p^{i-1} alle anderen Untergruppen mit den Ordnungen 1 bis p^{i-2} wieder Untergruppen sind. Damit gilt:

$$(0) \subset U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_{i-1} \subset U_i = G$$

wobei U_j die Untergruppe ist, welche die Ordnung p^j besitzt. Selbst wenn einige dieser Untergruppen kein Ideal im Multioperatorring G darstellten, besitzt G dann genau eine Hauptreihe und ist nach Satz 2, 2.3.2, direkt unzerlegbar.
Der 1.Hauptsatz ist bewiesen.

2.5.2 Zweiter Hauptsatz

Bisher wurden endliche Multioperatorringe mit nichtzyklischem Modul von Primzahlpotenzordnung nicht betrachtet.
Die Ursache ist, dass hier nicht einfach aus der Gruppentheorie auf die Multioperatorringe verallgemeinert werden kann. Im Fall D der endlichen Multioperatorringe besitzen die Operationen des Operationensystems großen Einfluss.

Betrachten wir einen beliebigen endlichen Multioperatorring G mit einem nichtzyklischen Modul $(G,+)$ von Primzahlpotenzordnung.
Aus der Gruppentheorie ist bekannt, dass sich die additive Gruppe $(G,+)$ in eine direkte Summe von zyklischen Untergruppen Z_j zerlegen lässt. Da die abelsche Gruppe $(G,+)$ selbst nicht zyklisch ist, wird diese direkte Zerlegung nicht trivial:

$$(G,+) = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_j$$

mit $j \geq 2$. Da G endlich ist, besitzt der Multioperatorring G nach Satz 2, 1.4.2, Hauptreihen. Auf Grund des Satzes von Schmidt-Ore ist diese Zerlegung dann zu jeder anderen isomorph, da die Z_j als zyklische Gruppen direkt unzerlegbar sind.
Die additive Gruppe der Multioperatorrings G ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte echte direkte Summe von zyklischen Gruppen. Erweisen sich diese zyklischen Gruppen als Ideale von G, so wäre dann auch G echt direkt zerlegbar. Damit gilt:

Satz 1
Ein Multioperatorring G, dessen Modul nicht zyklisch und von Primzahlpotenzordnung p_i, $i \geq 2$, ist und damit eine direkte Zerlegung

$$(G,+) = Z_1 \oplus ... \oplus Z_j$$

mit $j \geq 2$, existiert, ist echte direkte Summe, wenn für alle erzeugenden Elemente a_i der zyklischen Gruppen Z_i, $i = 1,...,j$, und jede Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω

$$a_i...a_i\omega_n \in Z_i \qquad \text{und} \qquad a_i...a_ia_ka_i...a_i\omega_n = 0 \tag{2.42}$$

wobei $i \neq k$ und jedes mögliche Paar (i,k) mit $i,k = 1,...,j$ durchlaufen wird, gilt.

Beweis: Die additive Gruppe ist nach Voraussetzung in die zyklischen Gruppen $Z_1,...,Z_j$ echt direkt zerlegbar. Diese sind damit bis auf das Nullelement zueinander disjunkt.
Können wir nachweisen, dass alle zyklischen Gruppen Z_j Ideale in dem Multioperatorring G bilden, so lege dann die gesuchte direkte Zerlegung des Ω-Rings G vor.

Sei Z_i eine beliebige dieser zyklischen Gruppen. a_i sei eines deren erzeugenden Elemente. Wir betrachten nun drei Arten von Elementen des Multioperatorrings G:

1. Elemente aus der zyklischen Gruppe Z_i
2. Element aus der mengentheoretischen Vereinigung aller zyklischen Gruppen Z_k, $k = 1,...,j$
3. Elemente aus der Differenz von G mit der Menge aller Elemente der 2.Art.

zu 1.) Seien die $a_1,...,a_n$ beliebige Elemente aus Z_i und ω_n eine Operation aus dem Operationensystem Ω von G. Dann erhalten wir

$$a_1...a_n\omega_n =$$

da jedes Element a_k aus Z_i durch das erzeugende Element mit

$$a_k = a_i^{f_k}$$

darstellbar ist

$$= a_i^{f_1}a_i^{f_2}...a_i^{f_n}\omega_n = \underbrace{(a_i + ... + a_i)}_{f_1\text{-mal}}a_i^{f_2}...a_i^{f_n}\omega_n =$$

und mit wiederholtem Anwenden des Distributivgesetzes

$$= \underbrace{a_ia_i^{f_2}...a_i^{f_n}\omega_n + ... + a_ia_i^{f_2}...a_i^{f_n}\omega_n}_{f_1 \text{ Summanden}} = f_1(a_ia_i^{f_2}...a_i^{f_n}\omega_n) =$$

wenden wir nochmals diese Schrittfolge an, ergibt sich

$$= f_1f_2(a_ia_ia_i^{f_3}...a_i^{f_n}\omega_n) =$$

und lösen wir vollständig auf

$$= \sum_{i=1}^{n} f_l(a_i...a_i\omega_n)$$

Da dieses Element nach Voraussetzung (2.42) in der zyklischen Gruppe Z_i enthalten ist, ist Z_i mit den Operationen aus dem Operationensystem zumindest Ω-Unterring des Multioperatorrings G.

zu 2.) Sei a ein beliebiges Element aus dem Ω-Unterring Z_i des Multioperatorrings G. Die Elemente $a_1,...,a_n$ seien beliebig aus allen Ω-Unterringen Z_k, $k = 1,...,j$, gewählt. Dabei können auch einige Elemente aus Z_i sein, was aber nicht verlangt wird. Dann ist:

$$a_1...a_{k-1}aa_{k+1}...a_n\omega_n =$$

da a als Element von Z_i die Darstellung

$$a = a_i^{i^+}$$

mit a_i als erzeugendem Element von Z_i, besitzt und durch anschließendes Anwenden des Distributivgesetzes

$$= i^+(a_1...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n) = (*)$$

Sei o.B.d.A. das Element a_1 aus dem Ω-Unterring Z_{s_1} mit s_1 fest aus $1 \leq s_1 \leq j$ und $s_1 \neq i$. Nach Voraussetzung existiert mindestens ein derartiges Element. Das erzeugende Element der zyklischen Gruppe des Ω-Unterrings Z_{s_1} sei das Element $a^+_{s_1}$. Folglich lässt sich a_1 durch

$$a_1 = (a^+_{s_1})^{i_1}$$

darstellen, so dass wir wieder mit dem Distributivgesetz

$$(*) = i_1 i^+(a^+_{s_1}a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n) = (**)$$

erhalten. Da alle anderen n-ären Faktoren a_t, $t = 2,...,k-1,k+1,...,n$, in irgendeiner der zyklischen Gruppen enthalten sind, können diese Elemente a_t durch bestimmte Vielfache von Erzeugenden ersetzt werden. Man erhält:

$$(**) = C^+(a^+_{s_1}a^+_{s_2}...a^+_{s_{k-1}}a_ia^+_{s_{k+1}}...a^+_{s_n}\omega_n) = (***)$$

wobei C^+ eine bestimmte ganze Zahl ist, welche die Vielfachbildung festlegt. Da mindestens zwei Erzeugende aus verschiedenen Ω-Unterringen Z_k sind, erhalten wir mit der zweiten Voraussetzung des Satzes

$$(***) = C^+0 = 0 \subseteq Z_i$$

womit Z_i für alle Elemente aus der mengentheoretischen Vereinigung aller Ω-Unterringe Z_k, $k = 1,...,j$, die Idealeigenschaft erfüllt.

zu 3.) Sei a ein beliebiges Element aus dem Ω-Unterring Z_i, mit der Darstellung

$$a = a_i^{i^+}$$

Die Elemente $a_1,...,a_n$ seien völlig beliebig aus dem Multioperatorring G. Dabei treten wieder diese drei Möglichkeiten auf:

A) Einige Elemente a_k sind aus dem Ω-Unterring Z_i, wodurch wie diese Elemente als Vielfache des erzeugenden Elementes a_i darstellen können.

B) Einige der Elemente a_k sind in den anderen Ω-Unterringen mit den zyklischen Gruppen als Trägerstruktur enthalten, wodurch wir diese Elemente durch die Vielfachbildung der entsprechenden Erzeugenden darstellen.

C) Einige Elemente sind in keiner der zyklischen Gruppen enthalten und können daher als Summe von Elementen der zyklischen Gruppen eindeutig dargestellt werden:

$$a_k = a_1 + ... + a_j$$

Diese Darstellung ist auf Grund von Abschnitt 2.3.6 möglich.

Benutzen wir diese Aussagen, erhalten wir für jede Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω:

$$a_1...a_{k-1}aa_{k+1}...a_n\omega_n =$$

mit den Aussagen von A) und den Überlegungen zu 1. und 2.

$$= C(a^*_1...a^*_{k-1}aa^*_{k+1}...a^*_n\omega_n) =$$

mit C als gewisser ganzer Zahlen, wobei einige Elemente a^*_t, $t = 1,...,k-1,k+1,...n$ evtl. durch ihre Erzeugenden ersetzt sind. Zu Bewahrung der Übersicht und Vereinfachung der Darstellung schreiben wir in der weiteren Darstellung wieder $a^*_t = a_t$.

Weiterhin können wir das Element a durch das Erzeugende a_i ersetzen, so dass mit dem Distributivgesetz

$$= C^+(a_1...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n) = (*)$$

wird. O.B.d.A. nehmen wir an, dass das Element a_1 ein Element der Art C) sein. a_1 besitzt dann die Darstellung

$$a_1 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n}$$

Setzen wir ein und benutzen das Distributivgesetz

$$= C^+(a_{11}a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n + a_{12}a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n + ... + a_{1n}a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n) =$$

Die Elemente a_{1j}, $j = 1,...,n$, können als Elemente der zyklischen Gruppen durch Erzeugende ausgedrückt werden:

$$= C^+(i_{11}(a_{11}^+a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n) + i_{12}(a_{12}^+a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n) + ...+$$

$$i_{1n}(a_{1n}^+a_2...a_{k-1}a_ia_{k+1}...a_n\omega_n)) =$$

Führt man dieses Verfahren für alle noch nicht ersetzten Elemente durch, so erhält man am Ende eine Darstellung der Form

$$= \sum_J C_i^+(a_{j1}^+a_{j2}^+...a_i...a_{jn}^+\omega_n)$$

wobei die Komponenten C_i^+ gewisse ganze Zahlen sind und die Summenbildung über einen wohlbestimmten Indexbereich durchgeführt wird. Dabei sind alle Komponenten der n-ären Produkte erzeugende Elemente aus verschiedenen (möglicherweise auch aus genau einer) zyklischen Gruppe. Nach den Voraussetzungen des Satzes erhalten wir dann:

$$a_{j1}^+a_{j2}^+...a_i...a_{jn}^+\omega_n = \begin{cases} Z_i, & \text{wenn alle } a_{jl}^+ = a_i \text{ sind} \\ 0, & \text{wenn ein } a_{jl}^+ \neq a_i \text{ ist} \end{cases}$$

In beiden Fällen muss dann die Summe über dem Indexbereich J Element des Ω-Unterrings Z_i sein. Damit sind diese Ω-Unterringe Z_i mit dem Operationensystem Ω des Multioperatorrings G Ideale und es gilt:

$$G = \oplus \sum_{i=1}^{j} Z_i$$

Der Satz ist bewiesen.

Wenden wir uns der Umkehrung zu. Angenommen Voraussetzung (2.42) wäre für eine der zyklischen Gruppen Z_i nicht erfüllt, d.h., es existiert eine Operation ω_n des Operationensystems Ω von G mit

$$a_1...a_l...a_n\omega_n \notin Z_l$$

so ist zwar Z_l mit den Operationen aus Ω kein Ω-Unterring des Multioperatorrings G, es bedeutet aber nicht, dass das Ideal G direkt unzerlegbar ist.
Es könnte der Fall eintreten, dass $Z_l + Z_k$, wobei Z_k wieder eine zyklische Gruppe der direkten Zerlegung des Moduls von G ist, ein Ideal in G bildet. Sind die restlichen zyklischen Gruppen Z_j mit den Operationen aus Ω Ideale, so wäre dann

$$G = Z_1 \oplus ... \oplus Z_{l-1} \oplus Z_{l+1} \oplus ... \oplus Z_{k-1} \oplus Z_{k+1} \oplus ... \oplus Z_n \oplus (Z_l + Z_k)$$

eine echte direkte Zerlegung des Multioperatorrings G. Satz 1 ist daher zwar hinreichend aber noch nicht notwendig. Zur Konstruktion eines weiteren Kriteriums überlegen wir:

Haben wir einen Multioperatorring G, dessen Modul $(G,+)$ nicht zyklisch und von Primzahlpotenzordnung p^i, $i \geq 2$, ist, so existiert eine Zerlegung des Moduls

$$(G,+) = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_n$$

Damit der Multioperatorring G direkt zerlegbar ist, müssen mindestens zwei Ideale existieren, welche nichttrivial und bis auf Null disjunkt sind. Dazu überlegen wir uns, dass die Erzeugenden der zyklischen Gruppen (deren Wahl ist beliebig) gerade die Erzeugenden von ganz G sind.
Der Multioperatorring besitzt also ein Erzeugendensystem

$$(a_1,a_2,...,a_n) \tag{2.43}$$

welches nicht notwendig minimal sein muss und die Elemente a_i die Erzeugenden der zyklischen Gruppen Z_i sind.
Auf Grund der Definition aus 1.3.2 und Satz 1, 1.3.2, ist dann das Erzeugendensystem eines jeden Ideals (das Nullideal ausgenommen) des Multioperatorrings G in dem System (2.43) enthalten, wobei gewisse Bedingungen zur Absicherung der Idealeigenschaften sowie der direkten Summierbarkeit erfüllt sein müssen, so können wir allgemein in diesem Multioperatorring direkte Summe angeben:

2. Hauptsatz
Sei G ein Multioperatorring, dessen Modul $(G,+)$ nicht zyklisch und von Primzahlpotenzordnung p^i, $i \geq 2$, ist.
$(a_1,a_2,...,a_n)$ sei ein n-Tupel von Erzeugenden, welches durch die direkte Zerlegung

$$(G,+) = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_n$$

bestimmt ist. G ist dann echte direkte Summe von q Idealen, wenn das System (2.43) in q Teilsysteme

$$(a_{11},...,a_{1s_1}), (a_{21},...,a_{2s_2}), ..., (a_{q1},...,a_{qs_q})$$

mit $1 \leq a \leq n$ und $1 \leq s_i < n$ für alle i, zerlegt werden kann, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes Element a_i aus dem System (2.43) tritt in genau einem Teilsystem auf, d.h., die Teilsysteme sind paarweise disjunkt:

$$(a_{i1},...,a_{is_i}) \cap (a_{j1},...,a_{js_j}) = (0) \tag{2.44}$$

für $i \neq j$, und die Vereinigung aller System ergibt ganz (2.43):

$$\bigcup_{i=1}^{q} (a_{i1},...,a_{is_i}) = (a_1,...,a_n) \tag{2.45}$$

2. Jedes Teilsystem ist in sich bezüglich der Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω des Ω-Rings G abgeschlossen, d.h. für alle i: $1 \leq i \leq q$ gilt:
Für jedes n-Tupel $b_1,...,b_n$ aus der von dem System $(a_{i1},...,a_{is_i})$ erzeugten additiven Gruppe ist:

$$b_1..b_n\omega_n \in (a_{i1},...,a_{is_i})_+ \tag{2.46}$$

wobei $(a_{i1},...,a_{is_i})_+$ diese additiv erzeugte Gruppe ist.

3. Jedes n-äre Produkt von Elementen a_j, $j = 1,...,n$, aus dem System (2.43), wobei einige Elemente mehrmals oder auch gar nicht auftreten können, aber mindestens zwei Erzeugende aus verschiedenen Teilsystemen genommen sind, ist gleich dem Nullelement, d.h., für alle Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω von G und beliebige Elemente $b_1,...,b_n$ aus (2.43) und zwei a_1 und a_2 aus verschiedenen Teilsystemen ist:

$$b_1...b_{p-1}a_1b_{p+1}...b_{q-1}a_2b_{q+1}...b_n\omega_n = 0 \tag{2.47}$$

wobei p und q beliebig sind.

Beweis: Der Nachweis teilt sich in drei Abschnitte.

A) Der Nachweis, dass jede von einem Teilsystem erzeugte additive Untergruppe von $(G,+)$ ein Ideal im Multioperatorring G bildet.

B) Der Nachweis, dass die Summe dieser Ideale ganz G ergibt:

$$G = \sum_{i=1}^{q} (a_{i1},...,a_{is_i})_\Omega$$

C) Der Nachweis, dass diese Ideal Relation (2.2) aus 2.1.1 erfüllen.

zu A): Dazu zeigen wir die Forderung aus Satz 1, 1.3.1:
Sei $(a_{i1},...,a_{is_i})$ ein beliebiges dieser Teilsysteme von (2.43). Dieses System erzeugt additiv eine Gruppe $(a_{i1},...,a_{is_i})_+$, welche abelsch ist. Auf Grund der Forderung $q > 1$ und $a_i < n$ ist diese Gruppe Untergruppe des Moduls $(G,+)$ des Multioperatorrings G. Um nun die Idealeigenschaft nachzuweisen, wählen wir ein beliebiges Element a aus dieser Untergruppe, welche wir mit $(a_{i1},...,a_{is_i})_+$ bezeichnen. Dieses Element a lässt sich dann in der Form

$$a = \sum_J a_{ij} \tag{2.48}$$

darstellen, wobei J eine gewisse Indexmenge ist. Die Elemente a_{ij} sind dabei aus dem Teilsystem $(a_{i1},...,a_{is_i})$, wobei nicht alle aus dem Teilsystem auftreten müssen, bzw. auch mehrfach Summand sein können. Weiterhin wählen wir beliebige Elemente aus G und zwar $b_1,...,b_n$, wobei wieder drei Möglichkeiten auftreten:

1. einige b_l sind Element der betrachteten additiven Gruppe $(a_{i1},...,a_{is_i})_+$. Diese können dann in der Form (2.48) dargestellt werden

   $$b_l = \sum_{J_1} a'_{ij}$$

   wobei die dort verwendeten Elemente a'_{ij} nicht mit den obigen a_{ij} übereinstimmen müssen.

2. einige b_l sind Element einer Untergruppe, welche von einem anderen Teilsystem von (2.43) erzeugt wird. Ist b_l Element von $(a_{r1},...,a_{rs_r})_+$, dann gilt in Analogie zu 1.:

   $$b_l = \sum_{J_2} a_{rj}$$

3. einige b_l sind in keiner der von den Teilsystemen erzeugten Untergruppe enthalten. Dann besitzt b_l aber, da die direkte Zerlegung

   $$(G,+) = Z_1 \oplus ... \oplus Z_n$$

   besteht, eine eindeutige Darstellung

   $$b_l = a_1^+ + a_2^+ + ... + a_n^+$$

   wobei die a_j^+ bestimmte Elemente aus den zyklischen Gruppen und damit auch aus den erzeugten Untergruppen sind.

Wir betrachten für eine beliebige Operation ω_n aus dem Operationensystem Ω des Element:

$$b_1...b_{i-1}ab_{i+1}...b_n\omega_n =$$

mit Relation (2.48)

$$= b_1...b_{i-1}\left(\sum_J a_{ij}\right) b_{i+1}...b_n\omega_n =$$

auf Grund der Distributivität

$$= \sum_J (b_1 ... b_{i-1} a_{ij} b_{i+1} ... b_n \omega_n) =$$

Ersetzen wir nun die Elemente 1. und 2.Art, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass von jeder Sorte nur eines existiert, erhalten wir:

$$= \sum_J (b_1 ... \left(\sum_{J_1} a'_{ij} \right) ... \left(\sum_{J_2} a_{rj} \right) ... b_{i-1} a_{ij} b_{i+1} ... b_n \omega_n) =$$

und wieder mit dem Distributivgesetz

$$= \sum_J \left(\sum_{J_1} \sum_{J_2} (b_1 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... b_{i-1} a_{ij} b_{i+1} ... b_n \omega_n) \right) =$$

Ersetzen wir ein Element der 3.Art. O.B.d.A. sei dies wieder der Zweckmäßigkeit halber b_1. Dann wird:

$$= \sum_J \left(\sum_{J_1} \sum_{J_2} ((a^+_{11} a^+_{12} ... + a^+_{1n}) b_2 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... b_{i-1} a_{ij} b_{i+1} ... b_n \omega_n) \right) =$$

Dabei sind die a^+_{lj} erzeugende Elemente aus (2.43). Wenden wir wieder das Distributivgesetz an, erhalten wir:

$$= \sum_J \left(\sum_{J_1} \sum_{J_2} \left(\sum_{J'_1} (a^+_{1j} b_2 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \sum_{J'_2} (a^+_{2j} b_2 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + ... + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{J'_n} (a^+_{nj} b_2 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) \right) \right) =$$

Ersetzen wir nun das nächste Element der 3.Art, welches o.B.d.A. b_2 sei, wird

$$= \sum_J \left(\sum_{J_1} \sum_{J_2} \left(\sum_{J'_1} \left(\sum_{J''_1} (a^+_{1j} a^+_{1j} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \sum_{J''_2} (a^+_{1j} a^+_{2j} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + ... + \sum_{J''_n} (a^+_{1j} a^+_{nj} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) \right) +$$

$$+ \sum_{J'_2} \left(\sum_{J''_1} (a^+_{2j} a^+_{1j} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \sum_{J''_2} (a^+_{2j} a^+_{2j} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \right.$$

$$\left. + ... + \sum_{J''_n} (a^+_{2j} a^+_{nj} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) \right) + ...$$

$$+ \sum_{J'_n} \left(\sum_{J''_1} (a^+_{nj} a^+_{1j} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \sum_{J''_2} (a^+_{nj} a^+_{2j} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) + \right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + ... + \sum_{J''_n} (a^+_{nj} a^+_{nj} b_3 ... a'_{ij} ... a_{rj} ... a_{ij} ... b_n \omega_n) \right) \right) \right) \right) =$$

Werden nun alle weiteren noch nicht ersetzen Elemente derartig entwickelt, erhält man am Ende:

$$= \sum_J (a^+_1 ... a^+_n \omega_n)$$

d.h., eine Summe über eine wohlbestimmte Indexmenge, wobei alle Elemente a_s^+, $s(J) = 1,...,n$, jeweils erzeugende Elemente aus dem System (2.43) sind.
Auf Grund der Voraussetzungen (2.46) und (2.47) treten dann zwei Möglichkeiten für die n-ären Produkte $a_1^+...a_n^+\omega_n$ ein:

$$a_1^+...a_n^+\omega_n \begin{cases} \in (a_{i1},...,a_{is_i})_+, & \text{wenn alle } a_s^+ \text{ aus dem System } (a_{i1},...,a_{is_i}) \text{ sind} \\ = 0, & \text{wenn zwei der } a_s^+ \text{ aus verschiedenen Teilsystemen sind} \end{cases}$$

Damit ist aber in jedem Fall:

$$b_1...b_{i-1}ab_{i+1}...b_n\omega_n = \sum_J (a_1^+...a_n^+\omega_n) \in (a_{i1},...,a_{is_i})_+$$

womit die von den Teilsystemen erzeugten Untergruppen mir den Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω tatsächlich Ideale im Multioperatorring G bilden.

zu B): Es ist zu zeigen, dass die Komplexsumme

$$H = \sum_{i=1}^{q} (a_{i-1},...,a_{is_i})_\Omega$$

den ganzen Multioperatorring G ergibt. Nach Voraussetzung ist die additive Gruppe $(G,+)$ in die Summe zyklischer Gruppen direkt zerlegbar, d.h.:

$$(G,+) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

D.h., jedes Element g der Multioperatorrings G besitzt dann eine eindeutige Darstellung

$$g = z_1 + z_2 + ... + z_n$$

wobei die Elemente z_i aus den zugehörigen Z_i entnommen wurden. Betrachten wir eines der Ideale $(a_{i1},...,a_{is_i})$, so enthält dessen Erzeugendensystem die erzeugenden Elemente der zyklischen Gruppen $Z_j, ..., Z_{j+s_1-1}$, wobei wir auf Grund der Möglichkeit des Umnummerierens die zyklischen Gruppen entsprechend anordnen können. Damit können die Elemente $s_j,...,s_{j+s_1-1}$ durch Elemente aus dem Ideal $(a_{i1},...,a_{is_i})$ ersetzt werden.
Da jedes z_i, $i = 1,...,n$, in einem dieser Ideale auftritt, können alle durch Elemente aus den Idealen ersetzt werden. Damit ist:

$$G = \sum_{i=1}^{q} (a_{i1},...,a_{is_i})_\Omega$$

zu C): Diese Forderung ergibt sich daraus, dass aus

$$(G,+) = \oplus \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

für alle i

$$Z_i \cap \overline{Z_i} = (0) \qquad \text{mit} \qquad \overline{Z_i} = \sum_{j=1, i\neq j}^{n} Z_j$$

folgt. Sei $(a_{i1},...,a_{is_i})_\Omega$ eines dieser Ideale. Das Erzeugendensystem enthalte die erzeugenden Elemente der zyklischen Gruppen $Z_j,...,Z_{j+s_i-1}$, womit gilt:

$$(a_{i1},...,a_{is_i})_+ = Z_j + ... + Z_{j+s_i-1}$$

Für Z_j erhalten wir aber

$$\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{n} Z_i \right) \cap Z_j = (0)$$

ausführlich

$$\left(\sum_{i=1,i\neq j,...,j+s_i-1}^{n} Z_i + Z_{j+1} + ... + Z_{j+s_i-1}\right) \cap Z_j = (0)$$

entsprechend für das Ideal Z_{j+1}:

$$\left(\sum_{i=1,i\neq j,...,j+s_i-1}^{n} Z_i + Z_j + Z_{j+2} + ... + Z_{j+s_i-1}\right) \cap Z_{j+1} = (0)$$

und allgemein für jedes k mit $j \leq k \leq j + s_i - 1$:

$$\left(\sum_{i=1,i\neq j,...,j+s_i-1}^{n} Z_i + Z_j + ... + Z_{k-1} + Z_{k+1} + ... + Z_{j+s_i-1}\right) \cap Z_k = (0)$$

Damit muss auch für jedes k, $j \leq k \leq j + s_i - 1$, gelten:

$$\left(\sum_{i=1,i\neq j,...,j+s_i-1}^{n} Z_i\right) \cap Z_k = (0)$$

$$\left(\sum_{i=1,i\neq j,...,j+s_i-1}^{n} Z_i\right) \cap (Z_j + ... + Z_{j+s_i-1}) = (0)$$

so dass man erhält

$$\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{q} (a_{i1},...,a_{is_i})_\Omega\right) \cap (a_{j1},...,a_{js_j})_\Omega = (0)$$

für alle j von 1 bis q. Damit ist C) sowie der ganze Satz bewiesen.

Dieser Satz ist hinreichende Bedingung. Interessant ist, ob die Aussage nicht sogar notwendig ist. Liegt ein Multioperatorring G vor, welcher einen nichtzyklischen Modul von Primzahlpotenzordnung p^i, $i \geq 2$, besitzt, so ist die additive Gruppe echte, da $i \geq 2$, direkte Summe zyklischer Gruppen:

$$(G,+) = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_n \qquad ; \quad n \geq 2$$

Diese zyklischen Gruppen besitzen die erzeugenden Elemente $a_1,...,a_n$, womit für den Multioperatorring G ein Erzeugendensystem M existiert:

$$M = (a_1,...,a_n)$$

Da dieses System mindestens zwei Elemente besitzt, kann eine Aufteilung in Teilsysteme, welche die Relationen (2.44) und (2.45) erfüllen, vorgenommen werden.
Angenommen ein derartiger Multioperatorring G wäre echt direkt zerlegbar, aber die Relationen (2.44) bis (2.47) wären nicht vollständig erfüllt. Dann liegt eine Zerlegung

$$G = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_l$$

mit $l \geq 2$ vor. Für die additive Gruppe bedeutet dies aber, dass sie direkte Summe der additiven Anteile der Ideale J_j ist:

$$(G,+) = (J_1,+) \oplus ... \oplus (J_l,+) \tag{2.49}$$

Auf Grund der Vorbetrachtungen zu Satz 1 wissen wir aber, dass die direkte Zerlegung des Moduls $(G,+)$ in zyklische Gruppen bis auf Isomorphie der Summanden eindeutig ist. D.h., in den direkten Summen

$$(G,+) = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_n \tag{2.50}$$

und (2.49) lassen sich entweder alle direkten Summanden aus (2.49) durch isomorphe aus der Zerlegung (2.50) ersetzen, in diesem Fall ist $l = n$, oder nach dem Satz von Schmidt-Ore ist l kleiner als n und jedes Ideal J_j, $j = 1,...,l$, ist die Summe gewisser Z_i, $i = 1,...,n$, d.h.

$$J_j = \sum_{I_j} Z_i$$

für alle $j = 1,...l$. Dabei ist I_j eine durch das Ideal J_j bestimmte Indexmenge.
In beiden Fällen ist das Erzeugendensystem des Multioperatorrings G aber auf die oben beschriebene Art und Weise in Teilsysteme zerlegt. Es genügt also, wenn wir noch zeigen, dass auch die Relationen (2.46) und (2.47) bei direkter Zerlegbarkeit von derartigen Multioperatorringen erfüllt sein müssen.

zu Relation (2.46): Angenommen eines der entstandenen Teilsysteme wäre bezüglich der Operationen ω_n des Operationensystems Ω von G nicht in sich abgeschlossen.
Dann würde es ein n-Tupel von Elementen aus der Untergruppe $(a_{i1},...,a_{is_i})_+$ geben, für welches bei einer Operation ω_n aus Ω:

$$a_1^+...a_n^+\omega_n \notin (a_{i1},...,a_{is_i})_+$$

ist. Damit wäre die Untergruppe, welche durch das Teilsystem gebildet wird, mit den Operationen aus Ω nicht einmal Ω-Unterring des Multioperatorrings G. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass jedes Ideal (und diese Untergruppe muss ein Ideal bilden, da sie als direkter Summand auftritt) auch Ω-Unterring des Multioperatorrings ist. Folglich muss Bedingung (2.46) voll erfüllt sein.

zu Relation (2.47): Nehmen wir an, für ein beliebiges n-Tupel von Elementen $(a_1^+,...,a_n^+)$ aus dem Erzeugendensystem (2.43), wobei zwei der erzeugenden Elemente a_i und a_j aus verschiedenen Teilsystemen genommen sind, gilt bezüglich einer beliebigen Operation ω_n aus Ω des Multioperatorrings:

$$a_1^+...a_i...a_j...a_n^+\omega_n \neq 0$$

Setzen wir

$$a_1^+...a_i...a_j...a_n^+\omega_n = b$$

Da die beiden Teilsysteme, in denen einmal a_i und zum anderen das Elemente a_j liegt, Ideale erzeugen, muss das Element b sowohl in dem ersten als auch in dem zweiten Ideal vorhanden sein. Nach Voraussetzung ist aber b verschieden vom Nullelement. Beide Ideale sind jedoch bis auf Null zueinander disjunkt und können also b nicht gleichzeitig enthalten.
Es liegt damit ein Widerspruch vor. Auch die Relation (2.47) muss erfüllt sein. Damit gilt:

Satz 2
Der 2.Hauptsatz ist sowohl hinreichendes als auch notwendiges Kriterium.

Womit wir nun jede endlichen Multioperatorring auf direkte Summen untersuchen können. Die theoretische Diskussion derartiger Multioperatorringe schließen wir damit ab.

2.5.3 Folgerungen und Beispiele

Beziehen wir die eben gefundenen Sätze auf besondere Multioperatorringe, so ergibt sich für abelsche Gruppen deren Hauptsatz über endlich abelsche Gruppen (siehe Seite 145).
Enthält dieser Satz eine Aussage über echte direkte Zerlegungen, so wird:

Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen
Eine endliche abelsche Gruppe $(G,+)$ der Ordnung n ist dann und nur dann echt in die Summe endlicher vieler zyklischer Gruppen direkt zerlegbar, wenn n zusammengesetzte Zahl (nicht Primzahlpotenz) ist oder $(G,+)$ nicht zyklisch ist.

Diese Formulierung erhalten wir, wenn wir uns überlegen, dass eine nichtzyklische Gruppe nie Primzahlordnung besitzen kann. Dagegen ist die Forderung "nicht zyklisch" zwar hinreichend aber nicht notwendig.
Zum Beispiel ist die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_6$ der Ordnung 6 echt direkt zerlegbar. Ist a deren erzeugendes Element, so werden die direkten Summanden durch die Normalteiler

$$\langle a^2 \rangle_+ \qquad \text{und} \qquad \langle a^3 \rangle_+$$

gestellt. Zyklische Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind jedoch immer direkt unzerlegbar.

Beziehen wir beide Hauptsätze auf den anderen Spezialfall der Multioperatorringe, die Ringe (die Assoziativität ist hier uninteressant), erhalten wir:

Hauptsatz über endliche nichtnotwendig assoziative Ringe
Ein endlicher Ring R ist in genau zwei Fällen echt direkt zerlegbar.

1. Die Ordnung n seines additiven Moduls $(R,+)$ ist zusammengesetzte Zahl der Art

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}$$

wobei p_i Primzahlen, $k \geq 2$, und $e_>0$ für alle i sind.

2. Der Trägermodul ist nicht zyklisch und von Primzahlpotenzordnung p^i, $i \geq 2$, und es muss gelten:
Das durch die direkte Zerlegung

$$(R,+) = Z_1 \oplus Z_2 \oplus ... \oplus Z_n$$

bestimmte Erzeugendensystem $(a_1,...,a_n)$ des Rings R lässt sich in q Teilsysteme

$$(a_{i1},...,a_{is_i})$$

mit $1 < j \leq n$ und $1 \leq s_i < q$ für alle i, zerlegen, welche die Relationen (2.44) und (2.45) aus Abschnitt 2.5.2 erfüllen. Für diese Teilsysteme muss gelten
A) Jedes Teilsystem ist in sich abgeschlossen, d.h., für jedes Paar von Erzeugenden a_{ik} und a_{il} aus einem Teilsystem $(a_{i1},...,a_{is_i})$ gilt

$$a_{ik} \cdot a_{il} \in (a_{i1},...,a_{is_i})_+ \qquad \text{und} \tag{2.51}$$

$$a_{il} \cdot a_{ik} \in (a_{i1},...,a_{is_i})_+$$

wobei $(a_{i1},...,a_{is_i})_+$ die von dem Teilsystem erzeuge additive Gruppe ist.
B) Das Produkt zweier Erzeugender a_{ik}, a_{il} aus verschiedenen Teilsystemen ist immer gleich dem Nullelement

$$a_{ik} \cdot a_{il} = a_{il} \cdot a_{ik} = 0 \tag{2.52}$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort aus den Beweisen der beiden Hauptsätze aus den Abschnitten 2.5.1 und 2.5.2.

Man sieht, dass alle Zeroringe mit nichtzyklischem Trägermodul echt direkt zerlegbar sind. (2.51) und (2.52) gelten dann trivialerweise.
Betrachten wir dazu den von der Kleinschen Vierergruppe K_4 erzeugten Zeroring, mit der additiven Strukturtafel:

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Da die Kleinsche Vierergruppe K_4 nichtzyklisch ist und die Ordnung 4 besitzt, müssen wir für den zugehörigen Zeroring $(K_4, +, \circ)$ den 2.Hauptsatz anwenden. Die direkte Zerlegung der additiven Trägerstruktur ist dabei

$$(K_4,+) = (a)_+ \oplus (b)_+ = (a)_+ \oplus (c)_+ = (b)_+ \oplus (c)_+$$

wobei nach dem Satz von Schmidt-Ore diese Summanden alle isomorph zueinander sind. Der Zeroring K_4 besitzt damit (unter anderem) drei verschiedene Erzeugendensysteme

$$(a,b) \qquad ; \qquad (b,c) \qquad \text{und} \qquad (a,c)$$

welche wir jeweils nur auf eine Art in Teilsysteme zerlegen können, indem man die von einem Element erzeugten Ideale betrachtet. Der Zeroring K_4 ist dann direkte Summe seiner Ideale (a), (b) und (c):

$$(K_4, +, \circ) = (a) \oplus (b) = (a) \oplus (c) = (b) \oplus (c)$$

Es sei noch bemerkt, dass hier direkt ähnliche Ideale vorliegen.
Im folgenden Abschnitt werden wir uns weiter mit Multioperatorringen, welche die Kleinsche Vierergruppe als Trägerstruktur besitzen, befassen.

2.5.4 Multioperatorringe mit Kleinscher Vierergruppe als Trägerstruktur

Nachfolgend werden wir Multioperatorringe (Ringe) untersuchen, deren additive, abelsche Trägerstruktur die Kleinsche Vierergruppe ist. Dabei werden wir Hauptsatz 2 anwenden, da die Kleinsche Vierergruppe K_4 nichtzyklisch und von Primzahlpotenzordnung ist.

Zuerst betrachten wir den entsprechenden Zeroring und untersuchen diesen auf Quasiendomorphismen. Wie wir im Abschnitt 1.5.2 mit dem Lemma von Plotkin nachwiesen, sind alle Quasiendomorphismen des Zerorings $(K_4, +, \circ)$ sogar Endomorphismen, so dass $(K_4, +, \circ)$ einen Endomorphismenring besitzt, welcher isomorph zu dem Endomorphismenring der Kleinschen Vierergruppe ist.
Diese enthält die trivialen Endomorphismen, den Nullendomorphismus und den identischen Automorphismus. Des weiteren gehören durch die direkte Zerlegung von $(K_4,+)$ Endomorphismen dazu, welche in der Tabelle genannt werden:

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a	0	b	c	0	a	c	b	c	b	b	c
b	0	b	0	b	a	c	b	0	a	c	b	0	c	a	c	a
c	0	c	a	b	0	c	0	c	a	b	a	b	0	c	a	b

Offenbar besitzt der Quasiendomorphismenring des Zerorings K_4 die Ordnung 16. Da in dem Zeroring über K_4 jedes Produkt gleich Null ist, muss auch der zugehörige Endomorphismenring Zeroring sein. Man kann allgemein, ohne Beweis, sagen:

Satz 1
Der Endomorphismen-Multioperatorring eines Ω-Zerorings ist selbst Ω-Zeroring.

Stellen wir nun die Ideale des eben konstruierten Quasiendomorphismenrings $Q(K_4, +, \circ)$ auf. Dazu bilden wir alle Hauptideale:

$$(o) = \{o\} \quad ; \quad (i) = \{o,i\} \quad ; \quad (\alpha_1) = \{o,\alpha_1\} \quad ; \quad (\alpha_2) = \{o, \alpha_2\} \quad \text{usw.}$$

Offenbar bildet jedes Element ein Ideal, welches nur noch den Nullendomorphimsus enthält. Ursache ist die Nullmultiplikation und die Tatsache, dass in der Kleinschen Vierergruppe jedes Element zu sich selbst entgegengesetzt ist. Ideale, welche von zwei Endomorphismen gebildet werden, sind:

$$\begin{array}{ll} (i,\alpha_1) = (i,\alpha_2) = (\alpha_1,\alpha_2) = \{o,i,\alpha_1,\alpha_2\} & (i,\alpha_3) = (i,\alpha_4) = (\alpha_3,\alpha_4) = \{o,i,\alpha_3,\alpha_4\} \\ (i,\alpha_5) = (i,\alpha_6) = (\alpha_5,\alpha_6) = \{o,i,\alpha_5,\alpha_6\} & (i,\alpha_7) = (i,\alpha_8) = (\alpha_7,\alpha_8) = \{o,i,\alpha_7,\alpha_8\} \\ & ... \end{array}$$

$$(\alpha_1,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_7) = (\alpha_3,\alpha_7) = \{o,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_7\} \qquad (\alpha_1,\alpha_4) = (\alpha_1,\alpha_8) = (\alpha_4,\alpha_8) = \{o,\alpha_1,\alpha_4,\alpha_8\}...$$

und allgemein

$$(i, x) = (i,y) = (x,y) = \{o,i,x,y\}$$
$$(x, y) = (x,x + y) = (y,x + y) = \{o,x,y,x + y\}$$

Für Ideale, welche von drei Quasiendomorphismen erzeugt werden, ergibt sich allgemein

$$(x,y,z) = \{o,i,x,y,z,x + y,x + z,y + z,x + y + z\}$$

usw. usf. Man erkennt, dass ein scheinbar "kleiner" Multioperatorring schon viele verschiedene Ideale besitzen kann. Das Verfahren "Aufstellen aller Ideale und anschließender Vergleich" zum Bestimmen der direkten Zerlegungen des Quasiendomorphismenrings führt nicht schnell zum Erfolg. Deshalb benutzen wir Hauptsatz 2.

Um die gesuchte Zerlegung zu finden, benötigen wir die direkte Zerlegung der additiven Gruppe dieses Multioperatorrings. Diese besitzt die Ordnung 16 und ist nichtzyklisch. Folglich kann sie (nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen) bis auf Isomorphie eindeutig als direkte Summe endlich vieler zyklischer Gruppen dargestellt werden. Diese müssen Primzahlpotenzordnung besitzen. Drei zyklische Gruppen der Ordnung 2 erzeugen jedoch nicht ganz Q. Damit kann die gesuchte direkte Summe mit unzerlegbaren zyklische Gruppen nur genau vier zur $\mathbb{Z}_2$ isomorphe Gruppen als Summanden enthalten. Es wird:

$$(Q,+) = (i)_+ \oplus (a_1)_+ \oplus (a_3)_+ \oplus (a_5)_+$$

Da der Quasiendomorphismenring Q über dem Zeroring der Kleinschen Vierergruppe selbst Zeroring ist, sind alle diese zyklischen Gruppen auch Ideale, womit wir die direkte Zerlegung gefunden haben.

Nun ersetzen wir im Ring über der Kleinschen Vierergruppe die Nullmultiplikation durch folgende:

$\circ$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

$(K_4, +, \circ)$ wird dabei assoziativer Ring und damit Multioperatorring. Die Erzeugendensysteme (vergleiche 2.5.3) bleiben dabei erhalten. Dies gilt, da wir bezüglich der Addition erzeugen.
Jedoch gilt zum Beispiel für das System (a,c) mit der Zerlegung in die Teilsysteme $T_1 = (a)$ und $T_2 = (c)$

$$c \circ a = a \neq c$$

womit die Voraussetzungen für Hauptsatz 2 nicht erfüllt sind. Ebenso wird die Relation für das System (b,c) nicht erfüllt, ist jedoch für (a,b) gültig, so dass wir erhalten

$$(K_4, + ,\circ) = (a) \oplus (b)$$

Bei dieser direkten Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale sind beide Ideale isomorph zum Restklassenring $\mathbb{Z}_2$. Mit der Definition der vollständigen direkten summe können wir damit sagen, dass der untersuchte Ring über K_4 die direkte Summe des Restklassenrings $\mathbb{Z}_2$ mit sich selbst ist.

Zu den Quasiendomorphismen dieses Ringes gehören alle der Kleinschen Vierergruppe, also die auf Seite 158 genannten. Da nun aber zum Beispiel

	$\alpha_{15} = i \circ \alpha_3$	$\alpha_{16} = \alpha_{15} + i$	$\alpha_{17} = \alpha_1 \circ \alpha_{15}$
0	0	0	0
a	a	0	0
b	0	b	0
c	0	c	a

und noch eine Vielzahl weiterer Quasiendomorphismen durch die Multiplikation erzeugt werden, geben wir die Menge aller Quasiendomorphismen nicht mehr an.
Dagegen untersuchen wir (auch in den folgenden Beispielen) den vom identischen Automorphismus erzeugten Ω-Unterring des vollen Quasiendomorphismenrings.
In unserem Beispiel besteht dieser Ring nur aus den zwei trivialen Endomorphismen, ist isomorph zum Restklassenring $\mathbb{Z}_2$ und folglich direkt unzerlegbar.

Ändern wir die Multiplikation ab:

$\circ$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	c	a
c	0	c	a	b

so wird der über K_4 erzeugte Ring $(K_4, + ,\circ)$ sogar Körper und damit Ω-Körper, womit er direkt unzerlegbar ist. Interessant ist aber der zugehörige, vom identischen Automorphismus i erzeugt Ω-Unterring des Quasiendomorhismenrings. Diese Struktur (i) hat die Ordnung 8:

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a	0	0	a
b	0	b	c	a	a	c	b	0
c	0	c	a	a	a	b	c	0

Die multiplikative Strukturtafel ist

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
o	o	o	o	o	o	o	o	o
i	o	α_1	α_3	α_5	i	α_2	α_4	α_6
α_1	o	α_3	i	α_4	α_1	α_5	α_2	α_6
α_2	o	α_5	α_4	α_2	α_2	α_4	α_5	o
α_3	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
α_4	o	α_2	α_5	α_4	α_4	α_5	α_4	o
α_5	o	α_4	α_2	α_5	α_5	α_4	α_4	o
α_6	o	α_6	α_6	o	α_6	o	o	α_6

Das Aufstellen dieser Tafel und die Untersuchung von (i) kann man sich erleichtern, wenn man diese Quasiendomorphismen durch den identischen Auotmorphismus darstellt. Wir erhalten:

$$o = 2i \quad ; \quad \alpha_1 = i^2 \quad ; \quad \alpha_2 = i^2 + i \quad ; \quad \alpha_3 = i^3$$
$$\alpha_4 = i^3 + i \quad ; \quad \alpha_5 = i^3 + i^2 \quad ; \quad \alpha_6 = i^3 + i^2 + i$$

Da nun noch die Relationen

$$i^4 = i \qquad \text{und} \qquad 2i = o$$

gelten, kann der Ring (i) nach Abschnitt 1.6.4 durch das Erzeugendensystem $M = \{i\}$ und die genannten definierenden Relationen erklärt werden. Damit ist das Aufstellen der multiplikativen Strukturtafel nicht schwer.

Wir erhalten drei verschiedene Ideale:

$$\begin{aligned} (i) = (i^2) = (i^3) &= \{o, i, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \\ (i^2 + i) = (i^3 + i) = (i^3 + i^2) &= \{o, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\} \\ (i^3 + i^2 + i) &= \{o, \alpha_6\} \end{aligned}$$

und das triviale Nullideal $(o) = \{o\}$. Dabei werden die Ideale (α_6) und (α_2) direkt unzerlegbar und disjunkt bis auf das Nullelement. Wir erhalten insgesamt:

$$(i) = (\alpha_6) \oplus (\alpha_2)$$

Überraschend ist jedoch, dass das Ideal (α_6) isomorph zum Restklassenring $\mathbb{Z}_2$ und das Ideal (α_2) isomorph zum Ausgangskörper über K_4 wird. Für den Körper $(K_4, +, \circ)$ ist damit der von dem identischen Automorphismus erzeugte Ring isomorph zu der vollständigen direkten Summe des Körpers mit dem Restklassenring $\mathbb{Z}_2$.

Verändern wir erneut die Multiplikation auf der Kleinschen Vierergruppe:

$\circ$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	0	b
c	0	c	b	a

Mit dieser binären Multiplikation wird die Gruppe K_4 ebenfalls Ring. Dieser Ring besitzt selbst nur ein Ideal und ist direkt unzerlegbar. Der Ring ist zentrumslos.
Der von i erzeugte Ring besitzt wieder 8 Elemente:

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	0	0	0	a
b	0	b	0	0	b	b	0	b
c	0	c	a	c	b	0	b	a

und die Strukturtafel

	o	i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
o	o	o	o	o	o	o	o	o
i	o	α_1	α_2	α_1	α_5	o	α_5	α_2
α_1	o	α_2	α_1	α_2	α_5	o	α_5	α_1
α_2	o	α_1	α_2	α_1	α_5	o	α_5	α_2
α_3	o	α_5	α_5	α_5	o	o	o	α_5
α_4	o	o	o	o	o	o	o	o
α_5	o	α_5	α_5	α_5	o	o	o	α_5
α_6	o	α_2	α_1	α_2	α_5	o	α_5	α_2

Wir erhalten vier verschiedene nichttriviale Ideale:

$$(\alpha_5) = \{o,\alpha_5\} \quad ; \quad (\alpha_4) = \{o,\alpha_4\} \quad ; \quad (\alpha_3) = \{o,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\} \quad ; \quad (\alpha_1) = \{o,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5\}$$

mit dem Idealdiagramm

$$\begin{tikzcd}
 & (i) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\alpha_1) \arrow[d, dash] & & (\alpha_3) \arrow[d, dash] \arrow[dll, dash] \\
(\alpha_5) \arrow[dr, dash] & & (\alpha_4) \arrow[dl, dash] \\
 & (0) &
\end{tikzcd}$$

Aus dem Diagramm können wir sofort alle existierenden direkten Summen ablesen:

$$(i) = (\alpha_1) \oplus (\alpha_4) \qquad \text{und} \qquad (\alpha_3) = (\alpha_5) \oplus (\alpha_6)$$

Weitere direkte Zerlegungen existieren nicht. Durch Vergleich mit der Multiplikationstafel erkennt man, dass (α_4) nichttriviales Zentrum und (α_1) nichttrivialer Kommutant von (i) ist. Der Kommutant ist daber wieder isomorph zu dem Ausgangsring über der Kleinschen Vierergruppe.

2.5.5 Matrizenringe

Wenden wir uns einer weiteren Art von Multioperatorringen zu und zwar Matrizenringen über Restklassenringen.
Betrachten wir zuerst den Matrizenring $\mathcal{M}_2^2$ der 2-reihigen Matrizen über dem Restklassenring $\mathbb{Z}_2$, mir der Ordnung 16.
Die additive Gruppe von $\mathcal{M}_2^2$ lässt sich dabei bis Isomorphie eindeutig direkt zerlegen:

$$(\mathcal{M}_2^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_+ \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_+ \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_+ \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_+$$

Im Weiteren schreiben wir der Einfachheit halber an Stelle von

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

nur das Quadrupel $(abcd)$. Ein Erzeugendensystem dieses Matrizenrings ist demnach:

$$M = \{(0001), (0010), (0100), (1000)\}$$

Ohne Beweis sei mitgeteilt, dass genau 14 Zerlegungen in Teilsysteme möglich sind, jedoch keiner dieser Zerlegungen die im zweiten Hauptsatz geforderten Relationen erfüllt. Dies folgt sofort aus den Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccc}
(0001)\cdot(0010) = (0010) & ; & (0010)\cdot(0001) = (0001) & ; & (0100)\cdot(1000) = (0000) \\
(0010)\cdot(0100) = (0000) & ; & (0100)\cdot(0010) = (1000) & ; & (1000)\cdot(0100) = (0100)
\end{array}$$

Folglich ist der Ring $\mathcal{M}_2^2$ direkt unzerlegbar. Man kann feststellen, dass auch der 2-reihige Matrizenring über dem Restklassenring $\mathbb{Z}_3$ direkt unzerlegbar ist. Allgemein gilt:

Satz 1
Jeder 2-reihige Matrizenring $\mathcal{M}_n^2$ über einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, ist genau dann direkt unzerlegbar, wenn n keine zusammengesetzte Zahl ist.

Beweis: Offenbar besitzt ein 2-reihiger Matrizenring $\mathcal{M}_n^2$ genau n^4 Elemente. Dies ergibt sich daraus, dass eine 2-reihige Matrix 4 Elemente besitzt und alle Variationen mit Wiederholung von n Elementen zu bilden sind.
Damit ist der Matrizenring $\mathcal{M}_n^2$ für jedes $n \geq 2$ endlich. Folglich wäre eine direkte Zerlegung in direkt unzerlegbare Ideale des Multioperatorrings bis auf Isomorphie unter bestimmten Bedingungen möglich.

Sei n, $n \geq 2$, nun beliebig. Dann lässt sich der Modul $\mathcal{M}_n^2$ sich in

$$(\mathcal{M}_b^2,+) = (1000)_+ \oplus (0100)_+ \oplus (0010)_+ \oplus (0001)_+$$

direkt zerlegen. Die Summanden sind zyklisch und damit direkt unzerlegbar. Nach oben ist dies gerade die Zerlegung in unzerlegbare bis auf Isomorphie eindeutige Summanden.
Damit können auch nur die von diesen Untergruppen gebildeten Ideale den Multioperatorring erzeugen.
Wenden wir den 1.Hauptsatz an:
Ist n zusammengesetzte Zahl, d.h. es ist

$$n = p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}$$

mit $k \geq 2$ und $e_i > 0$ für alle i, so ist auch

$$\left|\mathcal{M}_n^2\right| = p_1^{4e_1} \cdot ... \cdot p_k^{4e_k}$$

zusammengesetzte Zahl, womit der Matrizenring echt direkt zerlegbar ist.
Ist n Primzahl, so ist die Ordnung des Matrizenrings Primzahlpotenz. Ist n Primzahlpotenz p^i, $i \geq 2$, so muss auch die Ordnung von $\mathcal{M}_n^2$ Primzahlpotenz sein. Da nun die additive Gruppe nichtzyklisch ist, müssen wir den zweiten Hauptsatz anwenden.
Nach den obigen Überlegungen ist das Erzeugendensystem

$$M = \{(0001), (0010), (0100), (1000)\}$$

Da die Gleichung

$$(0001) \cdot (0010) = (0010)$$

gilt, müssen nach Relation (2.47), 2.5.2, die Erzeugenden (0001) und (0010) dem gleichen Teilsystem angehören, damit der Ring echt direkt zerlegbar wäre. Aus der Gleichung

$$(0010) \cdot (0100) = (0001)$$

folgt, dass auch (0100) zu diesem Teilsystem gehören muss. Da nun noch

$$(0010) \cdot (1000) = (0010)$$

gilt, kann es keine Zerlegung des Erzeugendensystems in Teilsysteme geben, welche den Anforderungen entsprechen. Auf Grund der Umkehrbarkeit des zweiten Hauptsatzes ist dann der Matrizenring $\mathcal{M}_n^2$ direkt unzerlegbar. Der Beweis ist erbracht.

Verallgemeinern wir auf k-reihige Matrizen:

Satz 2
Jeder k-reihige Matrizenring $\mathcal{M}_n^k$, $k \geq 2$, über einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, ist genau dann direkt zerlegbar, wenn n zusammengesetzte Zahl ist, d.h., eine Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{e_1} \cdot ... \cdot p_l^{e_l}$$

mit $l \geq 2$ und $e_i > 0$ für alle i existiert.

Beweis: Da die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen von n Elementen zur k^2-ten Klasse gleich

$$V_k^n = n^{k^2}$$

ist, besitzt der additive Modul des Matrizenrings $\mathcal{M}_n^k$ die Ordnung V_k^n. Der Matrizenring ist damit für alle möglichen k und n endlich. Ist n wieder zusammengesetzt, wird der Matrizenring nach dem ersten Hauptsatz echt direkt zerlegbar.
Zur entgegengesetzten Richtung: Dazu zeigen wir, dass für ein n, welches Primzahl oder Primzahlpotenz ist, keine echte direkte Zerlegung des Rings existiert. Die Ordnung des Moduls ist dabei

$$\left|\mathcal{M}_n^k\right| = p^{i^{(k^2)}}$$

d.h., also eine Primzahlpotenz. Der Modul ist nicht zyklisch und es gilt:

$$(\mathcal{M}_n^k, +) = \oplus \sum_{i=1}^{k^2} \begin{pmatrix} \delta_{1,i} & \dots & \delta_{k,i} \\ \delta_{k+1,i} & \dots & \delta_{2k,i} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{(k-1)k+1,i} & \dots & \delta_{k^2,i} \end{pmatrix}_+ \tag{2.53}$$

wobei die Summanden die zyklischen Gruppen sind, welche jeweils von der dargestellten Matrix erzeugt werden. $\delta_{j,i}$ ist das Kroneckersymbol.

Wir müssen nun nachweisen, dass keine der geforderten Systemzerlegungen, M ist die Menge aller Matrizen aus (2.53), existiert. Wir benutzen vollständige Induktion nach k, wobei wir die Unmöglichkeit der Existenz dieser Systeme auch für zusammengesetzte n nachweisen. Dies ist aber kein Widerspruch zu der Tatsache, dass dann die Matrizenring direkt zerlegbar ist, da ja weiterhin der 1.Hauptsatz gilt.

Der Induktionsanfang für $k = 2$ ist schon mit Satz 1 gesichert. Angenommen der Satz wäre für $k = q$ schon bewiesen. Da aus

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sofort auch

$$\begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' & 0 \\ c'' & d'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt, können wir aus den Voraussetzungen schließen, dass auch die Elemente, $i = 1,\dots,q^2$,

$$\begin{pmatrix} \delta_{1,i} & \dots & \delta_{q,i} & 0 \\ \delta_{q+1,i} & \dots & \delta_{2q,i} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \delta_{(q-1)q+1,i} & \dots & \delta_{q^2,i} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in dem Matrizenring $\mathcal{M}_n^{q+1}$ zu einem Teilsystem gehören müssen. Es genügt also noch nachzuweisen, dass auch alle anderen Matrizen aus (2.53) zu diesem Teilsystem gehören. Dann wäre das Erzeugendensystem nicht wie gefordert zerlegbar und der Ring direkt unzerlegbar. Für zusammengesetzte n gilt dies nicht.
Dazu betrachten wir das Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

womit auch der zweite Faktor zu diesem Teilsystem gehören muss. Allgemein gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1_i \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1_i & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1_i & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

für alle i von 1 bis $q+1$, womit alle geforderten Elemente in diesem Teilsystem liegen müssen. D.h., es existiert keine der gesuchten Zerlegungen.
Der Matrizenring $\mathcal{M}_n^{q+1}$ erfüllt für nicht echt zusammengesetzte n die Relationen (2.44) bis (2.47) aus 2.5.2 nicht. Für nicht echt zusammengesetzte n ist der Ring direkt unzerlegbar. Der Satz ist bewiesen.

Damit ist der im Sinne der Ordnung von n "kleinste" Matrizenring $\mathcal{M}_n^k$, welcher direkt zerlegbar ist, der über dem Restklassenring $\mathbb{Z}_6$ gebildete. Entsprechend den Überlegungen zum 1.Hauptsatz, ist er in die von den p-Sylow-Gruppen des Moduls gebildeten Ideale zerlegbar. Konkret für $k=2$ gilt:

$$\mathcal{M}_6^2 = ((2000),(0200),(0020),(0002))_\Omega \oplus ((3000),(0300),(0030),(0003))_\Omega$$

Bevor wir in 2.5.6 nochmals die Matrizenringe und ihre direkten Zerlegungen betrachten, sei noch eine direkte Summe angegeben, welche weder endlich noch endlich erzeugbar ist.

Der Quaternionenkörper $\mathbb{Q}$ ist als Körper direkt unzerlegbar. Wie erwähnt, sind aber die Quaternionen bezüglich der Multiplikation nicht kommutativ. Damit wird aber der zugehörige Liesche Ring über dem Quaternionenkörper $\mathbb{Q}$ nichttrivial. (zum Begriff des Lieschen Rings siehe zum Beispiel Kuros [9], Seite 23, Faith [47], Seite 155).
Die neue Multiplikation $\circ$ ist dann definiert durch

$$(a,b,c,d) \circ (e,f,g,h) := (0,2ch-2dg,2df-2bh,2bg-2cf)$$

Daraus erhält man, dass sowohl die Menge

$$A = \{(a,0,0,0) | a \in \mathbb{R}\}$$

als auch die Menge

$$B = \{(0,b,c,d) | b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

mit den Operationen aus Ω und der Addition Ideale im lieschen Quaternionenring sind. Aus der Konstruktion beider Ideale erhält man:

$$A \cap B = (0) \qquad \text{und} \qquad Q_L = A + B$$

womit der liesche Quaternionenring $\mathbb{Q}_L$ in seine Ideale A und B echt direkt zerlegbar ist.

2.5.6 Linksseitige und rechtsseitige direkte Summen

Betrachten wir die Strukturtafel der Multiplikation im 2-reihigen Matrizenring über dem Restklassenring $\mathbb{Z}_2$:

	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0001	0000	0001	0010	0011	0000	0001	0010	0011
0010	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0001
0011	0000	0001	0010	0011	0001	0000	0011	0010
0100	0000	0100	1000	1100	0000	0100	1000	1100
0101	0000	0101	1010	1111	0000	0101	1010	1111
0110	0000	0100	1000	1100	0001	0101	1001	1101
0111	0000	0101	1010	1111	0001	0100	1011	1110
1000	0000	0000	0000	0000	0100	0100	0100	0100
1001	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
1010	0000	0000	0000	0000	0101	0101	0101	0101
1011	0000	0001	0010	0011	0101	0100	0111	0110
1100	0000	0100	1000	1100	0100	0000	1100	1000
1101	0000	0101	1010	1111	0100	0001	1110	1011
1110	0000	0100	1000	1100	0101	0001	1101	1010
1111	0000	0101	1010	1111	0101	0000	1111	1010

	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0001	0000	0001	0010	0011	0000	0001	0010	0011
0010	0010	0010	0010	0010	0011	0011	0011	0011
0011	0010	0011	0000	0001	0011	0010	0001	0000
0100	0000	0100	1000	1100	0000	0100	1000	1100
0101	0000	0101	1010	1111	0000	0101	1010	1111
0110	0010	0110	1010	1110	0011	0111	1011	1111
0111	0010	0111	1000	1101	0011	0110	1001	1100
1000	1000	1000	1000	1000	1100	1100	1100	1100
1001	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
1010	1010	1010	1010	1010	1111	1111	1111	1111
1011	1010	1011	1000	1001	1111	1110	1101	1100
1100	1000	1100	0000	0100	1100	1000	0100	0000
1101	1000	1101	0010	0111	1100	1001	0110	0011
1110	1010	1110	0010	0110	1111	1011	0111	0011
1111	1010	1111	0000	0101	1111	1010	0101	0000

Wie gezeigt, erfüllen die Elemente des Erzeugendensystems von $\mathcal{M}_2^2$:

$$M = \{(00001), (0010), (0100), (1000)\}$$

die Bedingungen (2.44) bis (2.47) des zweiten Hauptsatzes aus Abschnitt 2.5.2 nicht. Betrachten wir nun aber die zwei Teilsysteme:

$$T_1 = \{(0001),(0100)\} \qquad \text{und} \qquad T_2 = \{(1000),(0010)\}$$

Beide erzeugen die additiven Untergruppen

$$(A_1,+) = \{(0001),(0100),(0101),(0000)\} \qquad \text{und} \qquad (A_2,+) = \{(1000),(0010),(1010),(0000)\}$$

des Moduls $\mathcal{M}_2^2$. Sowohl A_1 als auch A_2 sind aber bezüglich der Matrizenmultiplikation keine Ideale. Übernehmen wir aber aus der Ringtheorie die Definition der Links- und Rechtsideale:

Definition

Eine nichtleere Teilmenge A eines Rings R heißt **Linksideal**, wenn $(A,+)$ Untergruppe des additiven Moduls $(R,+)$ ist und für alle Elemente a aus A

$$r \cdot a \in A$$

gilt.

(ein **Rechtsideal** wird entsprechend definiert), so zeigt sich, dass A_1 und A_2 in dem Matrizenring Linksideale sind. Außerdem gilt auch

$$A_1 + A_2 = \mathcal{M}_2^2 \qquad \text{und} \qquad A_1 \cap A_2 = (0)$$

womit wir zweckmäßigerweise definieren:

Definition

Ein Ring R heißt linksseitige direkte Summe seiner Linksideale A und B genau dann, wenn

$$A + B = R \qquad \text{und} \qquad A \cap B = (0)$$

gilt.

Wir schreiben dann: $R = A \oplus_l B$.
Analog definieren wir die rechtsseitige direkte Summe.
Eine Übertragung auf allgemeine Multioperatorringe ist auf Grund der Existenz von n-ären algebraischen Operationen nicht durchführbar. Hier sei nur folgender Zusammenhang gezeigt:

Satz 1
Jeder Matrizenring $\mathcal{M}_n^k$, $k \geq 2$, über einem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, lässt sich sowohl als linksseitige als auch als rechtsseitige direkte Summe darstellen.

Beweis: Sicherlich besitzt jeder dieser 2-reihigen Matrizenringe $\mathcal{M}_n^2$ die Linksideale

$$A_1 = ((0100),(0001)) \qquad \text{und} \qquad A_2 = ((0010),(1000))$$

und die Rechtsideale

$$B_1 = ((0001),(0010)) \qquad \text{und} \qquad B_2 = ((0100),(1000))$$

Der Nachweis ist einfach. Ebenso erkennt man, dass

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 = \mathcal{M}_n^2 \qquad \text{sowie}$$

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = (0)$$

gilt. Für $k = 2$ ist der Satz also gültig.
Sei k nun beliebige natürliche Zahl größer 2. Dann existieren k Linksideale:

$$A_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1}a_1 & \dots & \delta_{i,k}a_1 \\ \delta_{i,1}a_2 & \dots & \delta_{i,k}a_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i,1}a_k & \dots & \delta_{i,k}a_k \end{pmatrix}_\Omega$$

mit $i = 1,...,k$, wobei die $a_1,...,a_l$ alle möglichen Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$ durchlaufen.

Dass dies Linksideale sind, ergibt sich durch Multiplikation mit einer beliebigen Matrix aus dem Ring $\mathcal{M}_n^k$. Die Disjunktheit bis auf das Nullelement, sowie die Tatsache, dass die Summe aller dieser Linksideale ganz $\mathcal{M}_n^k$ ergibt, folgt aus der Konstruktion der Linksideale A_i. Damit ist aber

$$\mathcal{M}_n^k = \oplus_l \sum_{i=1}^{k} A_i$$

Für die Rechtsideale konstruieren wir

$$A_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1}a_1 & ... & \delta_{i,1}a_k \\ \delta_{i,2}a_1 & ... & \delta_{i,2}a_k \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i,k}a_1 & ... & \delta_{i,k}a_k \end{pmatrix}_\Omega$$

womit der übrige Nachweise analog verläuft. Der Beweis ist erbracht.

2.6 Zerlegung von Multioperatorringen über Endomorphismen

2.6.1 Zerlegungsendomorphismen

In Kapitel 1 wurde darauf hingewiesen, dass operationstreue Abbildungen und unter diesen besonders Endomorphismen von Multioperatorringen in der Theorie der direkten Zerlegungen von Multioperatorringen zentrale Bedeutung besitzen.
An dieser Stelle benutzen wir nun Endomorphismen zu einer weiteren Beschreibung von direkten Zerlegungen von Ω-Ringen. Unser Ziel ist es, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die direkte Zerlegbarkeit von Multioperatorringen aufzustellen.

Sei ein Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ideale A und B. Nach Abschnitt 2.3.6 besitzt dann jedes Element g von G eine eindeutige Darstellung der Form

$$g = a + b$$

wobei das Element a aus dem Ideal A und b aus dem Ideal B entnommen wurde. Wir definieren folgende zwei Abbildungen:

$$\alpha : \quad g\alpha = a \qquad \text{und} \qquad \beta : \quad g\beta = b$$

Auf Grund der eindeutigen Summendarstellung sind diese Abbildungen sicher eindeutig. Es gilt sogar:

Satz 1
Die Abbildungen α und β sind Endomorphismen des Multioperatorrings G.

Beweis: Aus $G = A \oplus b$ folgt, dass sowohl die Abbildung α als auch β eindeutige Abbildungen in G sind. Da jedes Element als Summe von Elementen aus A und B dargestellt werden kann, sind dies sogar Abbildungen von G in G.

Zur Homomorphiebedingung der Addition:
Seien g_1 und g_2 beliebige Elemente aus dem Multioperatorring G. Es sei $g = g_1 + g_2$. Beide Elemente besitzen nun eine eindeutige Darstellung

$$g_1 = a_1 + b_1 \qquad \text{und} \qquad g_2 = a_2 + b_2$$

wobei die Elemente a_i aus A und b_i aus B, $i = 1{,}2$, sind. Benutzen wir die beiden Abbildungen, so erhalten wir

$$g_1 = g_1\alpha + g_1\beta \qquad \text{und} \qquad g_2 = g_2\alpha + g_2\beta$$

und damit

$$g = g_1 + g_2 = (g_1\alpha + g_1\beta) + (g_2\alpha + g_2\beta) = (g_1\alpha + g_2\alpha) + (g_1\beta + g_2\beta)$$

Der erste Summand ist sicher in dem Ideal A enthalten, der zweite in B. Da das Element g selbst aber eine Darstellung der Form

$$g = g\alpha + a\beta$$

besitzt und diese eindeutig ist, gilt:

$$g\alpha = g_1\alpha + g_2\alpha \qquad \text{und} \qquad g\beta = g_1\beta + g_2\beta$$

womit die Homomorphiebedingung für die Addition gezeigt ist.
Sei ω_n eine beliebige n-äre Operation aus dem Operationensystem Ω von G. Seien die Elemente $g_1,...,g_n$ beliebig aus G mit den eindeutigen Darstellungen

$$g_1 = a_1 + b_1 \qquad ; \qquad ... \qquad g_i = a_i + b_i \qquad ...$$

für alle $i = 1,...,n$, wobei die a_i aus dem Ideal A und b_i aus B entnommen sind. Dann wird:

$$g = g_1...g_n\omega_n = (a_1 + b_1)...(a_n + b_n)\omega_n =$$

mittels Distributivgesetz

$$= a_1(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)\omega_n + b_1(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)\omega_n =$$

$$= a_1a_2(a_3 + b_3)...(a_n + b_n)\omega_n + a_1b_2(a_3 + b_3)...(a_n + b_n)\omega_n +$$

$$+ b_1a_2(a_3 + b_3)...(a_n + b_n)\omega_n + b_1b_2(a_3 + b_3)...(a_n + b_n)\omega_n =$$

Auf Grund des Abschnittes 2.3.6 ist der gegenseitige Kommutant der Ideale A und B gleich dem Ω-Nullideal, womit der zweite und dritte Summand gleich Null wird und folglich wegfällt. Bei weiterer Auflösung erhalten wir

$$= a_1a_2...a_n\omega_n + b_1b_2...b_n\omega_n =$$

setzen wir die Abbildungen α und β ein:

$$= (g_1\alpha)(g_2\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n + (g_1\beta)(g_2\beta)...(g_n\beta)\omega_n$$

wobei das Element $(g_1\alpha)(g_2\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n$ in A und das Element $(g_1\beta)(g_2\beta)...(g_n\beta)\omega_n$ in B enthalten sind. Auf Grund der obigen Überlegungen wird dann aber

$$g\alpha = (g_1\alpha)(g_2\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n \qquad \text{und} \qquad g\beta = (g_1\beta)(g_2\beta)...(g_n\beta)\omega_n$$

womit α und β Endomorphismen im Multioperatorring G sind. Der Beweis ist erbracht.

Wir sagen nun: Die durch eine direkte Zerlegung eines Multioperatorrings G in zwei Ideale A und B erzeugten Abbildungen heißen **Zerlegungsendomorphismen** von G bezüglich A und B.
Damit besitzt jeder echt direkt zerlegbare Multioperatorring zwei nichttriviale Endomorphismen. Zerlegungsendomorphismen besitzen interessante Eigenschaften.

Sei ein Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ideale A und B. Die zugehörigen Zerlegungsendomorphismen seien α und β. Bekanntlich ist dann

$$G\alpha = A \qquad \text{und} \qquad G\beta = B$$

Aus $g = g\alpha + g\beta$, für alle Elemente g aus G, ergibt sich für das Element a aus A:

$$a = a\alpha + a\beta$$

Da außerdem $a = a + 0$ und $a\alpha = a$ ist, wird

$$A\alpha = A \qquad \text{und} \qquad A\beta = (0) \qquad \text{sowie} \qquad B\beta = B \qquad \text{und} \qquad B\alpha = (0)$$

d.h., das Ideal A bildet den Kern des Endomorphismus β, B den Kern von α.
Bekanntlich ist, wenn A Ω-Unterring eines Multioperatorrings G ist, auch jeder Ω-Unterring von A Unterstruktur von G. Bei Idealen gilt dies im Allgemeinen nicht. Wir zeigen:

Satz 2 (Higgins)
Ist ein Ideal A direkter Summand eines Multioperatorrings G, so ist jedes Ideal von A auch Ideal von G.

Beweis: Ist das Ideal A direkter Summand des Multioperatorrings G, so existiert ein Ideal B in G mit $G = A \oplus B$.
Die zugehörigen Zerlegungsendomorphismen seine α und β. J sei ein beliebiges Ideal von A, das Element a beliebig aus J und die g_u, $i = 1,...,n$, aus G. Dann wird für alle Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω:

$$g_1...g_{i-1}ag_{i+1}...g_n\omega_n =$$

da jedes Element g aus G die Darstellung $g = g\alpha + g\beta$ besitzt

$$= (g_1\alpha + g_1\beta)...(g_{i-1}\alpha + g_{i-1}\beta)(a\alpha + a\beta)(g_{i+1}\alpha + g_{i+1}\beta)...(g_n\alpha + g_n\beta)\omega_n =$$

da der Kommutant von A und B gleich dem Nullideal ist, erhalten wir mit dem Distributivgesetz

$$= (g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)(a\alpha)(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n + (g_1\beta)...(g_{i-1}\beta)(a\beta)(g_{i+1}\beta)...(g_n\beta)\omega_n =$$

und da $a\alpha = a$ und $a\beta = 0$ ist

$$= (g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)a(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n + (g_1\beta)...(g_{i-1}\beta)0(g_{i+1}\beta)...(g_n\beta)\omega_n =$$

$$= (g_1\alpha)...(g_{i-1}\alpha)a(g_{i+1}\alpha)...(g_n\alpha)\omega_n \in J$$

da die $g_i\alpha \in A$ sind. Damit ist aber J ein Ideal des Multioperatorrings G. Der Beweis ist erbracht.

Spezialisieren wir dies für Ringe, erhalten wir:

Satz 3
Ist ein Ringideal A direkter Summand eines Rings R, so ist jedes Ideal von A auch Ideal von R.

Eine Umkehrung ist nicht möglich. Im Ring der ganzen Zahlen sind alle Ideale irgendeines Ideals auch im ganzen Ring Ideal, jedoch ist der Ring der ganzen Zahlen direkt unzerlegbar. Analog zu Satz 2, 2.4.1, zeigen wir:

Satz 4 (Higgins)
Ist ein Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ideale A und B und enthält ein Ω-Unterring C von G das Ideal A, so gilt:

$$C = A \oplus (B \cap C)$$

Beweis: Da A in C enthalten ist, ist A auch Ideal von C. Ebenso ist $B \cap C$ Ideal von C. Da aber auch $B \cap C$ in B enthalten ist, erhalten wir

$$A + (B \cap C) \subseteq A \cap B = (0)$$

mit dem Satz 2, 1.3.6, ergibt sich

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C) = C \cap C = C$$

und somit

$$C = A \oplus (B \cap C)$$

Der Beweis ist erbracht.

Satz 5 (Higgins)
Ist ein Multioperatorring G direkte Summe seiner Ideale A und B und α, β die zugehörigen Zerlegungsendomorphismen und C ein Ideal in G mit $C \cap B = (0)$, so gilt

$$C \oplus B = (C\alpha) \oplus B$$

Beweis: Da $C \cap B = (0)$ ist, wird das Ideal $C + B$ direkte Summe der Ideale C und B. Da $C\alpha \subseteq A$ ist, wird

$$C\alpha \cap B \subseteq A \cap B = (0)$$

womit auch $C\alpha + B$ direkte Summe ist. Das Ideal lässt sich auch mittels der Endomorphismen α und β darstellen:

$$C \subseteq C\alpha + C\beta \subseteq C\alpha + B \qquad \text{und damit} \qquad B + C \subseteq C\alpha + B$$

Umgekehrt sei c beliebig aus C mit $c = c\alpha + c\beta$. Und damit

$$c\alpha = c - c\beta \in C + B$$

womit auch $C\alpha$ in der Summe $C + B$ enthalten ist. Damit ergibt sich aber das Geforderte. Der Beweis ist erbracht.

2.6.2 Hauptsatz über Endomorphismen

Nun sind wir in der Lage eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von direkten Summen in beliebigen Multioperatorringen mit Hilfe von normalen Zerlegungsendomorphismen anzugeben.
Wie schon erwähnt, existieren in einem echt direkt zerlegbaren Multioperatorring mindestens zwei nichttriviale Endomorphismen. Wir erweitern dies und zeigen:

Hauptsatz über Endomorphismen
Ein Multioperatorring G ist dann und nur dann echt direkt zerlegbar, wenn mindestens ein nichttrivialer normaler idempotenter Endomorphismus in G existiert.

Beweis: Zuerst sei der Multioperatorring G echt direkt zerlegbar in seine Ideale A und B, welche folglich verschieden vom Nullideal sind. Diese Zerlegung erzeugt den Endomorphismus α mit $G\alpha = A$. Da B als Kern dieses Zerlegungsendomorphismus nichttrivial ist, ist es auch dieser Endomorphismus nicht. Außerdem gilt dann auch

$$a\alpha = a \qquad \forall a \in A \tag{2.54}$$

Damit ist der Endomorphismus α auch idempotent. Denn aus $G\alpha = A$ erhält man

$$G\alpha^2 = A\alpha = A$$

Da A Ideal ist, gilt für alle Operationen ω_n aus dem Operationensystem Ω des Multioperatorrings G, für beliebige Elemente g_j, $j = 1,...,n$, aus G und ein a aus A:

$$g_1...g_{i-1}ag_{i+1}...g_n\omega_n \in A$$

mit (2.54) also

$$(g_1...g_{i-1}ag_{i+1}...g_n\omega_n)\alpha = g_1...g_{i-1}ag_{i+1}...g_n\omega_n = g_1...g_{i-1}(a\alpha)g_{i+1}...g_n\omega_n$$

womit wir für ein beliebiges n-Tupel von Elementen in dem mindestens ein Element aus A auftritt, die Eigenschaft "normal" für den Endomorphismus nachgewiesen haben.
Da α für das Ideal offensichtlich Automorphismus (sogar identischer Automorphismus) ist, finden wir für jedes Elemente $(g\alpha)$ in dem Ideal A ein Element a mit

$$(g\alpha) = a = a\alpha$$

Damit erhalten wir

$$(g_1 ... g_{i-1} g g_{i+1} ... g_n \omega_n)\alpha = (g_1 ... g_{i-1} a g_{i+1} ... g_n \omega_n)\alpha =$$
$$= g_1 ... g_{i-1}(a\alpha) g_{i+1} ... g_n \omega_n = g_1 ... g_{i-1}(g\alpha) g_{i+1} ... g_n \omega_n$$

womit α normaler idempotenter Endomorphismus des Multioperatorrings ist. D.h., es existiert mindestens ein normaler und idempotenter Endomorphismus in G.

Umgekehrt sei nun in G ein derartiger Endomorphismus gegeben. A sei die Menge aller Elemente a aus dem Ω-Ring G, für welche $a\alpha = a$ gilt.
B sei die Menge aller Elemente aus G, welche auf das Nullelement abgebildet werden; B ist damit der Kern von α. Da der Endomorphismus α nichttrivial ist, sind sowohl A als auch B verschieden vom Nullideal bzw. dem Multioperatorring G. Außerdem kann nur das Nullelement gleichzeitig in A und B enthalten sein, d.h.

$$A \cap B = (0) \tag{2.55}$$

A und B sind Ideale in G. Für B ist dies offensichtlich, da der Kern einer operationstreuen Abbildung bei Multioperatorringen immer Ideal ist. Für A zeigen wir, dass A Untergruppe des additiven Moduls des Multioperatorrings G ist.

Seien a_1 und a_2 beliebig aus A, d.h., $a_1\alpha = a_1$ und $a_2\alpha = a_2$. Dann ist

$$(a_1 + a_2)\alpha = a_1\alpha + a_2\alpha = a_1 + a_2 \in A$$

Ebenso folgt aus

$$(0 - a)\alpha = 0\alpha - a\alpha = 0 - a = -a$$

dass das Element $-a$ auch in A enthalten ist, womit A Untergruppe der abelschen Gruppe $(G,+)$ ist.
Nun zeigen wir, dass A Ideal ist. Sei ω_n eine beliebige Operation aus dem Operationensystem des Multioperatorrings. Die Elemente $g_1,...,g_n$ seien aus G und a aus A. Wir erhalten

$$g_1 ... g_{i-1} a g_{i+1} ... g_n \omega_n)\alpha =$$

da α normaler Endomorphismus ist

$$= g_1 ... g_{i-1}(a\alpha) g_{i+1} ... g_n \omega_n) =$$

da $a\alpha = a$ gilt

$$= g_1 ... g_{i-1} a g_{i+1} ... g_n \omega_n)$$

womit A Ideal des Multioperatorrings G wird.
Sei nun g ein beliebiges Element von G. Dann gilt

$$g = (g\alpha - g\alpha) + g = g\alpha + (g - g\alpha) \tag{2.56}$$

Diese Darstellung ist eindeutig. Da nun der Endomorphismus α nach Voraussetzung idempotent ist, wird $G\alpha^2 = A\alpha = A$ und damit $g\alpha \in A$. Weiterhin ist

$$(g - g\alpha)\alpha = g\alpha - g\alpha^2 = g\alpha - g\alpha = 0$$

womit das Element $g - g\alpha$ im Ideal B liegt. Damit ist aber $G = A + b$ und mit Relation (2.55)

$$G = A \oplus B$$

Der Beweis ist erbracht.

Beziehen wir den eben gezeigten Hauptsatz auf abelsche Gruppen, in denen jeder Endomorphismus normal ist, ergibt sich:

Satz 1 (Specht, Kuros)
Eine abelsche Gruppe ist genau dann echt direkt zerlegbar, wenn mindestens ein nichttrivialer idempotenter Endomorphismus existiert.

Der erhaltene Satz entspricht dem aus Kuros [9], Seite 151. Da wir wissen, dass die unendliche zyklische Gruppe direkt unzerlegbar ist, können wir schlussfolgern, dass in ihr keine nichttrivialen idempotenten Endomorphismen existieren, obwohl für jede ganze Zahl ein bestimmter Endomorphismus vorhanden ist.

Für den Ring der ganzen Zahlen können wir ebenfalls aus seiner direkten Unzerlegbarkeit folgern, dass hier keine nichttrivialen idempotenten und normalen Endomorphismen zu finden sind. Allgemein gilt für nicht notwendig assoziative Ringe:

Satz 2
Ein Ring ist genau dann echt direkt zerlegbar, wenn mindestens ein nichttrivialer idempotenter normaler Endomorphismus in ihm existiert.

Es sei bemerkt, dass einfache Ringe und Körper keine derartigen Endomorphismen besitzen können.

2.6.3 Zentrale Endomorphismen und direkte Summen

Nachdem der Hauptsatz über Endomorphismen gezeigt wurde und dort normale nichttriviale und idempotente Endomorphismen mit direkten Zerlegungen in Verbindung gebracht werden, erhebt sich nun die Frage:

"Ist es möglich einzig aus der Existenz von zentralen Endomorphismen auf die Existenz, Eindeutigkeit und Vollständigkeit von direkten Summen in Multioperatorringen zu schließen?"

Ein sofortiges Verneinen ist nicht möglich, da, wie im Abschnitt 1.5.4 gezeigt, jeder zentrale Endomorphismus normal ist, so dass nur noch die Idempotenz zur Anwendung des Hauptsatzes fehlt. Zu diesem Problem stellte P.J. Higgins in seiner Arbeit [3] "Groups with multible operators" vier Hypothesen zu Multioperatorgruppen auf:

Hypothese A
Ist γ ein zentraler Endomorphismus einer Multioperatorgruppe G, so erfüllt $G\gamma^m$ für alle natürlichen Zahlen m die Minimal- und Maximalbedingung für Ideale.

Hypothese B
Ist γ ein zentraler Endomorphismus einer Multioperatorgruppe G und R das Radikal dieses Endomorphismus, so existiert ein eindeutig bestimmtes Ideal U in der Ω-Gruppe G, so dass dieser Endomorphismus für U Automorphismus ist, d.h.

$$U\gamma = U$$

und die Ω-Gruppe G direkte Summe von R und dem Ideal U ist:

$$G = R \oplus U$$

Hypothese C
Sind α und β komplementäre normale Endomorphismen einer Multioperatorgruppe G, so existiert in G eine direkte Summe
$$G = A \oplus B$$
so dass α für das Ideal A und β für das Ideal B Automorphismus ist.

Hypothese A'
Ist γ ein zentraler Endomorphismus einer Multioperatorgruppe G, so existiert eine ganze Zahl m, so dass der Endomorphismus γ für $G\gamma^m$ Automorphismus ist.

Da jeder Multioperatorring auch Multioperatorgruppe ist, haben wir die Hypothesen in der ursprünglichen Form aufgenommen.
Gelten diese Hypothesen allgemein, so können interessante Eigenschaften von direkten Summen nachgewiesen werden. Gelten sie nicht immer für Multioperatorgruppen, so könnte es sein, dass die Distributivität und die Kommutativität der Addition Einfluss haben.

P.J. Higgins zeigt die Implikationen $A \to B$, $B \to C$ und erwähnt, dass aus A' ebenfalls B folgt.
Beim Versuch eines Beweises der Hypothesen für die speziellen Multioperatorgruppen, die Multioperatorringe, wurde jedoch ein Gegenbeispiel für Hypothese C gefunden.
Auf Grund der Gültigkeit der Implikationen, können damit aber auch die übrigen Hypothesen nicht im Allgemeinen für Multioperatorgruppen und damit auch nicht für Multioperatorringe gültig sein.

Nachdem wir uns mit dem Gegenbeispiel beschäftigt haben, werden wir eine Lösung dieses Problems suchen. Dabei wird es zweckmäßig sein, einen neuen Begriff einzuführen, welcher zumindest eine der Hypothesen erfüllt.

Als Gegenbeispiel betrachten wir die Multioperatorgruppe $(\mathbb{Z}, +, \circ)$, welche also die additive Gruppe der ganzen Zahlen als Trägerstruktur und die Zeromultiplikation als einzige Operation der Operationensystems Ω besitzt.
Diese Ω-Gruppe ist offensichtlich auch Multioperatorring. Auf Grund der Zeromultiplikation ist $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ Ω-Zeroring und stimmt folglich mit seinem Zentrum überein. Die Abbildung
$$\alpha : \quad a\alpha := 3a$$
für alle ganzen a, ist dann zentraler und folglich auch normaler Endomorphismus von $(\mathbb{Z}, +, \circ)$. Das Komplement dieses Endomorphismus ist der ebenfalls normale Endomorphismus
$$\beta : \quad a\beta := -2a$$
für alle ganzen a. α und β bilden also eines der in der Hypothese C geforderten Endomorphismenpaare.
Wie schon gezeigt, ist die additive Gruppe der ganzen Zahlen und damit auch der zugehörige Zeroring direkt unzerlegbar, d.h., es existiert nur die direkte Zerlegung
$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus (0)$$
Damit sind aber nur zwei Fälle möglich:

1. α ist Automorphismus von $\mathbb{Z}$ und β Automorphismus des Nullideals (0). Dies ist aber nicht möglich, da $\mathbb{Z}\alpha = 3\mathbb{Z}$ ist.

2. β ist Automorphismus von $\mathbb{Z}$ und α Automorphismus des Nullideals (0). Dies ist aber ebenso unmöglich, da $\mathbb{Z}\beta = 2\mathbb{Z}$ ist.

Wir haben folglich ein Endomorphismenpaar in einer Multioperatorgruppe gefunden, welches Hypothese C nicht erfüllt.
Wie schon erwähnt, sind damit alle vier von Higgins genannten Hypothesen nur für einige und nicht für alle Multioperatorgruppen gültig.

2.6.4 Higginsche Multioperatorringe

In diesem Abschnitt werden wir eine mögliche Variante zur Lösung dieser vier Hypothesen angeben. Wie wir eben sahen, sind die Hypothesen nicht allgemeingültig. D.h., es gibt wahrscheinlich Multioperatorringe (wir betrachten nun wieder Ω-Ringe und nicht die allgemeineren Multioperatorgruppen), welche diese Hypothesen dennoch nicht erfüllen.
Um diese zu charakterisieren, besteht die Möglichkeit einen neuen Begriff zu definieren. Dabei werden wir eine der Hypothesen zur Definition benutzen. Um die Definition so allgemein wie möglich zu machen, können wir zwischen Hypothese A und A' wählen, da die anderen beiden aus diesen ableitbar sind.
An dieser Stelle ist es noch nicht möglich, warum die Hypothese A' gewählt wird. Nachdem wir den Satz von Higgins als Folgerung gezeigt haben, wird eine Begründung möglich sein. Wir definieren:

Definition

Ein Multioperatorring G heiße genau dann **higginsch**, wenn für jeden zentralen Endomorphismus γ von G eine natürliche Zahl $n \geq 1$ existiert, so dass der Endomorphismus γ für $G\gamma^n$ Automorphismus ist.

Damit erfüllt jeder higginsche Multioperatorring Hypothese A'. Später zeigen wir das Erfüllen der Hypothesen B und C.
Es stellt sich nun die Frage, welche Multioperatorringe higginsch sind. Wir geben nun einige Kriterien für die Eigenschaft "higginsch" an. Sicher gilt:

Satz 1
Jeder zentrumslose Multioperatorring ist higginsch.

Beweis: Man überlege sich, dass in einem zentrumslosen Multioperatorring G nur der Nullendomorphismus o zentraler Endomorphismus ist. Dessen endomorphes Bild ist aber der Ω-Nullring (0), für welchen jeder Endomorphismus Automorphismus ist. D.h., die gesuchte natürliche Zahl n ist gleich 1. Der Multioperatorring ist higginsch.

Da jeder nullteilerfreie Multioperatorring zentrumslos ist, haben wir schon viele Beispiele für higginsche Multioperatorringe. Für Ringe bedeutet dies, dass jeder nicht notwendig assoziative Ring ohne Annulator (das Zentrum eines Rings) higginsch ist. Außer den nullteilerfreien Ringen gehören sicher auch Matrizenringe über Integritätsbereichen dazu.
Nach Satz 1, 1.5.4, gilt außerdem:

Satz 2
Jeder Multioperatorring G mit nichtleerem Operationensystem, welcher nicht Ω-Zeroring ist und keinen Ω-Faktorring besitzt, welcher Ω-Zeroring aber nicht Ω-Nullring ist, ist higginsch.

Wie im Satz 1, 1.5.4, gezeigt wurde, besitzt der Multioperatorring G dann nur denn trivialen zentralen Endomorphismus, den Nullendomorphismus. Mit dem Beweis von Satz 1 ist der Multioperatorring dann higginsch.

Aus diesem Satz folgt, dass jeder einfache Nicht-Ω-Zeroring higginsch ist. Liegt ein Nicht-Ω-Zeroring G vor, so können gewisse seiner Ω-Faktorringe G/H abelsch werden. Bei einem nichtleeren Operationensystem also Ω-Zerorring. Nach Satz 3, 1.3.4, ist dies aber dann und nur dann der Fall, wenn der Kommutant $[G,G] = G'$ im Ideal H enthalten ist.

Betrachten wir nur nichttriviale Ω-Faktorringe G/H, d.h. $G \supset H$, so kann folglich kein Ω-Faktorring G/H, welcher abelsch ist, vorliegen, wenn der Kommutant G' mit dem ganzen Multioperatorring G zusammenfällt. Nach Satz 2 ist also

Satz 3
Ein Nicht-Ω-Zeroring, dessen Kommutant G' mit dem ganzen Multioperatorring zusammenfällt, ist higginsch.

Zu diesen Multioperatorringen gehören aber alle Ω-Ringe mit Einselement 1.

Satz 4
Jeder Multioperatorring G mit Einselement 1 ist higginsch.

Beweis: Zum Nachweis bilden wir den Kommutanten G'. Dieser wird von allen Elementen der Form:

$$-g_1...g_n\omega_n - h_1...h_n\omega_n + (g_1+h_1)...(g_n+h_n)\omega_n \tag{2.57}$$

mit beliebigen Elementem g_i, h_i, $i = 1,...,n$, aus dem Multioperatorring G erzeugt. Da die Elemente g_i und h_i alle möglichen Elemente von G durchlaufen, wird G' auch von allen Elementen der Form (2.57) bei einer Belegung

$$h_1 = 0 \quad ; \quad h_i = 1 \quad ; \quad \forall i = 2,...,n \qquad \text{und} \qquad g_i = 0 \quad ; \quad \forall i = 2,...,n$$

mit g_1 beliebig aus dem Ω-Ring G erzeugt. (2.57) nimmt dann die Form an:

$$-g_1 0...0\omega_n - 01...1\omega_n + g_1 1...1\omega_n =$$

und da die ersten beiden Summanden zum Nullelement werden und wegfallen

$$= g_1 1...1\omega_n = g_1 \in [G,G] = G'$$

für alle Elemente g_1 aus G. Damit ist aber der Multioperatorring G in seinem Kommutanten G' enthalten, d.h., beide fallen zusammen. Nach Satz 3 ist der Multioperatorring G dann higginsch.

Ein entsprechendes Beispiel bilden die Matrizenringe über Ringen mit Einselement. Dieser Satz ist nur hinreichend. Ein Zeroring über einem endlichen Modul besitzt kein Einselement, ist aber, wie wir gleich zeigen werden, auch higginsch.

Satz 5
Jeder endliche Multioperatorring ist higginsch.

Beweis: Offenbar gilt für alle natürlichen Zahlen i und für jeden zentralen Endomorphismus γ eines Multioperatorrings G

$$G\gamma^{i+1} \subseteq G\gamma^i$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass jeder Ω-Unterring eines Ω-Zerorings (und das Zentrum ist Ω-Zeroring) Ideal ist. Damit existiert aber die absteigende Kette von Idealen

$$G \supseteq G\gamma \supseteq G\gamma^2 \supseteq ... \supseteq G\gamma^i \supseteq ... \tag{2.58}$$

Als endlicher Multioperatorring erfüllt G die Minimalbedingung. D.h., die absteigende Kette (2.58) bricht nach endlich vielen Schritten für ein natürliches n ab. Es gilt dann

$$G\gamma^n = G\gamma^{n+1} = ...$$

womit der Endomorphismus γ für ein natürliches n zu einem Automorphismus $G\gamma^n$ wird. Der Satz ist bewiesen.

Wie man im Beweis sieht, ist das Erfülltsein der Minimalbedingung für Ideale im Multioperatorring G für die Eigenschaft "higginsch" hinreichend. Da $G\gamma$ im Zentrum Z enthalten ist, genügt sogar die Minimalbedingung für Ideale im Zentrum Z:

Satz 6
Ein Multioperatorring G ist higginsch, wenn er selbst oder sein Zentrum die Minimalbedingung für Ideale erfüllt.

Damit können wir auch sagen, dass jeder Multioperatorring mit Hauptreihen higginsch ist. Da für Hauptreihen auch die Maximalbedingung notwendig ist, erhebt sich die Frage, ob die Maximalbedingung für Ideale die Eigenschaft "higginsch" absichert.
Da der Ω-Zeroring $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ als Gegenbeispiel zu den Hypothesen nicht higginsch ist, aber der Maximalbedingung für Ideale genügt, müssen wir die Frage verneinen.

Wir können aber für die Forderung "Auotmorphismus" in der Definition der higginschen Multioperatorringe die Forderung "Isomorphismus in sich" setzen, und würden damit "**fasthigginsche**" **Multioperatorringe** erhalten, für welche gilt:

Satz 7
Jeder Multioperatorring G mit Maximalbedingung für seine Ideale ist "fasthigginsch".

Beweis: Sei γ ein zentraler Endomorphismus des Multioperatorrings G, R das Radikal dieses Endomorphismus und K_i die Kerne von γ bezüglich seiner endomorphen Bilder $G\gamma^i$.
Diese Kerne bilden dann eine aufsteigende Kette von Idealen im Multioperatorring G, welche auf Grund der Maximalbedingung abbricht, d.h., es gibt eine natürliche Zahl n mit $K_n = K_{n+1} = ...$
Da das Radikal aber die Vereinigung aller dieser Kerne ist (siehe 1.5.5), gilt

$$R = K_n$$

und damit

$$R\gamma^n = (0)$$

Mit Satz 1, 1.5.5, bedeutet dies

$$G\gamma^n \cap R = (0)$$

und mit Satz 2, 1.5.3, ist der Endomorphismus γ damit Isomorphismus des Bildes $G\gamma^n$ in $G\gamma^n$, womit G "fasthigginsch" wird. Der Beweis ist erbracht.

Im Weiteren werden wir auf "fasthigginsche" Multioperatorringe nicht weiter eingehen. Es sei noch erwähnt, dass unser Gegenbeispiel für Hypothese C der Ω-Ring $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ "fasthigginsch" ist und noch kein Multioperatorring gefunden wurde, welcher nicht "fasthigginsch" ist. Es liegt nahe, folgende Aussage zu treffen:

Vermutung
Jeder Multioperatorring ist fasthigginsch, d.h. für jeden zentralen Endomorphismus γ des Multioperatorrings G existiert eine natürliche Zahl n, so dass der Endomorphismus γ für $G\gamma^n$ Isomorphismus ist.

2.6.5 Spezielle Eigenschaften higginscher Multioperatorringe

Die Definition der higginschen Multioperatorringe erweist sich nur dann als zweckmäßig, wenn wir zeigen können, dass jeder dieser Multioperatorringe die Hypothesen B und C erfüllt.

Satz 1
Jeder higginsche Multioperatorring G erfüllt Hypothese B, d.h., für jeden zentralen Endomorphismus γ von G existiert ein eindeutig bestimmtes Ideal U, so dass G die direkte Summe von U und dem Radikal R des Endomorphismus γ ist und der Endomorphismus γ für das Ideal Automorphismus ist.

Beweis: Sei γ ein zentraler Endomorphismus des Multioperatorrings G. G sei higginsch und m die natürliche Zahl, $m \geq 1$, für welche der Endomorphismus γ Automorphismus für $G\gamma^m$ ist. Da dann $G\gamma^m = G\gamma^{m+1}$ gilt, setzen wir

$$U = G\gamma^m$$

womit der Endomorphismus γ für das Ideal U schon Automorphismus ist. Dass U Ideal ist, folgt aus der Tatsache, dass $G\gamma^m$ als Ω-Zeroring ebenfalls Ideal ist.
Angenommen die Summe $R + u$ wäre nicht direkt, d.h.

$$R \cap U \neq (0)$$

so existiert in U ein von dem Nullelement verschiedenes Element a, welches auch im Radikal R liegt und für welches eine natürliche Zahl n existiert, so dass

$$a\gamma^n = 0$$

wird. Damit muss irgendwann, da n größer als m sein muss

$$U\gamma^{n-m} \neq U\gamma^{n-m+1}$$

sein, da dann der Kern des Endomorphismus nicht nur das Nullelement sondern auch a enthält. Dieses ist aber nicht möglich, da der Endomorphismus γ für das Ideal U Automorphismus ist. Es ist

$$R \cap U = (0)$$

Weiterhin gilt auch $R+U = G$. Denn, sei g ein beliebiges Element von G, dann ist nach Definition des Ideals U das Element $g\gamma^m$ in U enthalten. Da γ für U Automorphismus ist, gibt es dann ein Element a aus U mit

$$g\gamma^m = u\gamma^m$$

Daraus wird aber

$$g\gamma^m - u\gamma^m = 0 = (g-u)\gamma^m \qquad \text{d.h.} \qquad g - u \in R \qquad \text{und} \qquad g \in R + U$$

womit also

$$G = R \oplus U$$

folgt. Angenommen es gebe ein weiteres Ideal U' mit

$$G = R \oplus U' \qquad \text{und} \qquad U'\gamma = U'$$

Dann ist sicher

$$U' = U'\gamma^m \subseteq G\gamma^m = U$$

Auf der anderen Seite kann jedes Element g von G in der Form

$$g = u' + r$$

dargestellt werden, wobei u' aus dem Ideal U' und r aus dem Radikal des Endomorphismus γ entnommen werden. Damit erhalten wir:

$$g\gamma^m = u'\gamma^m + r\gamma^m$$

und da

$$r\gamma^m \in G\gamma^m \cap R = (0)$$

ist, $r\gamma^m = 0$ und folglich

$$g\gamma^m = u'\gamma^m \in U'$$

Damit müssen aber die beiden Ideale U und U' zusammenfallen, d.h., das Ideal U ist eindeutig bestimmt. Der Beweis ist erbracht.

Auch die Hypothese C weisen wir als Eigenschaft der higginschen Multioperatorringe nach.

Satz 2 (Higgins)
Jeder higginsche Multioperatorring G erfüllt die Hypothese C, d.h., sind α und β zwei komplementäre normale Endomorphismen von G, so existiert eine direkte Zerlegung des Ω-Rings G, d.h.

$$G = A \oplus B$$

wobei α Automorphismus des Ideals A und β Automorphismus des Ideals B ist.

Beweis: Seien α und β zwei normale und komplementäre Endomorphismen des higgischen Multioperatorrings G. Dann ist nach Satz 4, 1.5.4, $\gamma = \alpha\beta = \beta\alpha$ zentraler Endomorphismus des Ω-Rings G. Nach Satz 1 existiert dann ein eindeutig bestimmtes Ideal U mit

$$G = R_\gamma \oplus U \qquad \text{und} \qquad U\gamma = U$$

Wir setzen

$$A = R_\beta \qquad \text{und} B = R_\alpha \oplus U$$

Mit Satz 6, 1.5.5, ist dann folglich

$$G = A \oplus B$$

Der Endomorphismus α ist dann Automorphismus des Ideals A, β Automorphismus des Radikals R_α. Wir zeigen nun, dass β auch Automorphismus des Ideals U und damit von ganz B ist. Dazu betrachten wir das Ideal $U\beta$ des Multioperatorrings G. Sicher ist

$$U\beta \cap R_\gamma = (0)$$

denn ist für ein Element u aus U das Element $u\beta$ im Radikal R_γ enthalten, so wird für eine natürliche Zahl n:

$$(u\beta)\gamma^n = 0 \qquad \text{, also} \qquad u\gamma^{n+1} = 0$$

D.h. aber, dass u in dem Durchschnitt von U und R_γ enthalten ist. Dieser ist aber gleich dem Ω-Nullideal, so dass $u = 0$ wird. Außerdem ist auch

$$R_\gamma + U\beta = G$$

Denn es ist

$$U = U\gamma = U\alpha\beta \subseteq G\beta = (R_\gamma + U)_\beta \subseteq R_\gamma + U\beta$$

d.h. also

$$G = R_\gamma + U \subseteq R_\gamma + U\beta$$

Damit ist die Summe $R_\gamma + U\beta$ direkt, mit

$$G = R_\gamma + U\beta$$

Nach Satz 1 ist das Ideal U aber eindeutig bestimmt, womit β für das Ideal U Automorphismus sein muss, da aus $A \cap B = (0)$ auch $U \cap R_\beta = (0)$ folgt. Folglich ist der Endomorphismus β auch für ganz B Automorphismus. Der Satz ist bewiesen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel, und zwar den zentrumslosen und damit higginschen Restklassenring $\mathbb{Z}_6$. Dieser Ring besitzt genau 4 Endomorphismen (siehe Seite 53) von denen zwei nichttrivial normal und komplementär sind:

$$\alpha: \quad a\alpha = 4a \qquad \text{und} \qquad \beta: \quad a\beta = 3a$$

für alle Elemente a aus dem Restklassenring. Die Nacheinanderausführung beider Endomorphismen ist, da sie idempotent sind, der Nullendomorphismus

$$R_\gamma = \mathbb{Z}_6 \qquad \text{und} \qquad U = (0)$$

Für die Zerlegung von $\mathbb{Z}_6$ erhalten wir dann:

$$A = R_\beta = (2) \qquad \text{und} \qquad B = R_\alpha \oplus U = (3) \oplus (0) = (3)$$

und tatsächlich auch

$$\mathbb{Z}_6 = (2) \oplus (3)$$

α ist dann Automorphismus von (2), β von (3).

2.6.6 Folgerungen und Sätze

Bevor wir uns weiter mit higginschen Multioperatorringen befassen, zeigen wir noch einen Hilfssatz, welcher zum einen für alle Multioperatorringe gilt und zum anderen für spätere Beweise benötigt wird.

Satz 1 (Higgins)
Seien

$$G = A_1 \oplus A_2 = B_1 \oplus B_2$$

zwei direkte Zerlegungen eines Multioperatorrings G und φ_1 Homomorphismus von A_1 in B_1, φ_2 Homomorphismus von A_2 in B_2.
Sind die Homomorphismen φ_1 und φ_2 in dem Ω-Ring G normal, so existiert ein eindeutig bestimmter normaler Endomorphismus φ in G mit

$$g\varphi = g\varphi_1 \quad \forall g \in A_1 \qquad \text{und} \qquad g\varphi = g\varphi_2 \quad \forall g \in A_2$$

Außerdem ist dann φ dann und nur dann Automorphismus des Multioperatorrings G, wenn φ_1 und φ_2 Isomorphismus von den A_1, A_2 auf B_1, B_2 sind.

Beweis: Seien α_1 und α_2 die Zerlegungsendomorphismen bezüglich der direkten Summe $G = A_1 \oplus A_2$. Dann sind $\alpha_1\varphi_1$ und $\alpha_2\varphi_2$ nach dem Hauptsatz über Endomorphismen sowie nach Satz 1, 1.5.3, normale Endomorphismen von G. Da

$$[G\alpha_1\varphi_1, G\alpha_2\varphi_2] = [A_1\varphi_1, A_2\varphi_2] \subseteq [B_1, B_2] = (0)$$

ist, wird ebenfalls nach Satz 1, 1.5.3, auch die Summe der Endomorphismen

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$$

normaler Endomorphismus von G, welcher dann auf A_1 mit φ_1 und auf A_2 mit φ_2 zusammenfällt. Damit ist φ aber nur Isomorphismus, wenn es auch φ_1 und φ_2 sind und umgekehrt. Ebenso kann φ dann und nur dann auf ganz G abbilden, wenn φ_1 auf B_1 und φ_2 auf B_2 abbildet.
Angenommen es lege noch ein weiterer normaler Endomorphismus ψ vor, welcher mit dem Homomorphismus φ_1 und φ_2 auf den A_i, $i = 1{,}2$, übereinstimmt, so wird aus

$$\alpha_1\varphi_1 = \alpha_1\psi \qquad \text{und} \qquad \alpha_2\varphi_2 = \alpha_2\psi \qquad \text{sofort}$$

$$\psi = (\alpha_1 + \alpha_2)\psi = \alpha_1\psi + \alpha_2\psi = \varphi$$

womit der Endomorphismus φ eindeutig bestimmt ist. Der Beweis ist erbracht.

Wenden wir uns wieder den higginschen Multioperatorringen zu. Wir wir zeigten, erfüllt jeder higginsche Multioperatorring Hypothese C. Wir können sogar zeigen:

Satz 2 (Higgins)
Jeder direkte Summand eines higginschen Multioperatorrings G erfüllt Hypothese C.

Beweis: Sei $G = A \oplus B$ eine direkte Zerlegung eines Multioperatorrings G in seine Ideale A und B, α und β die zugehörigen Zerlegungsendomorphismen. Weiterhin seien φ_1 und φ_2 komplementäre normale Endomorphismen von A.
Da φ_1 und φ_2 dann auch normal in G sind, werden auch

$$\psi_1 = \alpha\varphi_1 \qquad \text{und} \qquad \psi_2 = \alpha\varphi_2 + \beta$$

normale Endomorphismen, welche nach Satz 1 φ_1 und φ_2 auf dem Ideal A fortsetzen. Außerdem gilt:

$$\psi_1 + \psi_2 = \alpha\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \beta = \alpha(\varphi_1 + \varphi_2) + \beta = \alpha + \beta = i$$

mit i als identischem Automorphismus. D.h., ψ_1 und ψ_2 sind komplementäre normale Endomorphismen von G. Da die Hypothese C für den ganzen Multioperatorring gilt, existiert eine Zerlegung von G

$$G = G_1 \oplus G_2$$

wobei die ψ_i, $i = 1{,}2$, Automorphismen der Ideale G_i sind. Da

$$G_1 = G_1\psi_1 = G_1\alpha\varphi_1 \subseteq A\varphi_1 \subseteq A$$

ist, wird nach Satz 4, 2.6.1:

$$A = G_1 \oplus (G_2 \cap A)$$

Da ψ_1 den Endomorphismus φ_1 auf A fortsetzt und G_1 in A enthalten ist, wird φ_1 Automorphismus auf G_1. Können wir nun noch zeigen, dass ψ_2 Automorphismus für $G_2 \cap A$ ist, wäre der Satz bewiesen.

Da ψ_2 den Endomorphismus φ_2 auf A fortsetzt, ist φ_2 für $G_2 \cap A$ sicher Isomorphismus. Weiterhin ist für jedes Element a aus $G_2 \cap A$:

$$a\varphi_2 = a\psi_2 \in G_2 \cap A$$

da ja $(G_2 \cap A)\psi_2 = G_2 \cap A$ gilt. Damit wird aber

$$(G_2 \cap A)\varphi_2 \subseteq G_2 \cap A \tag{2.59}$$

Andererseits wird aus $G_2\psi_2 = G_2$, dass für jedes Element a aus $G_2 \cap A$ in G_2 ein Element g existiert, für welches

$$a = g\psi_2$$

gilt. D.h. aber

$$a = g\psi_2 = g(\alpha\varphi_2 + \beta) = g\alpha\varphi_2 + g\beta$$

Da a in A und $g\alpha\varphi_2$ ebenfalls in A und $g\beta$ in B enthalten sind, muss das Element $g\beta$ gleich dem Nullelement werden. Nach Voraussetzung sind A und B bis auf das Nullelement zueinander disjunkt. D.h. aber

$$g = g\alpha \in A \qquad \text{also} \qquad g \in G_2 \cap A \qquad \text{und} \qquad a = g\varphi_2$$

womit

$$G_2 \cap A \subseteq (G_2 \cap A)\varphi_2$$

wird. Mit (2.59) ist dann aber φ_2 Automorphismus auf $G_2 \cap A$. Der Beweis ist erbracht.

Eine Frage ist, warum nicht gezeigt wurde, dass ein direkter Summand eines higginschen Multioperatorrings selbst higginsch ist. Dies ist aber ebenfalls möglich:

Satz 3
Jeder direkte Summand eines higginschen Multioperatorrings ist selbst higginsch.

Beweis: Sei G ein beliebiger higginscher Multioperatorring und A einer seiner direkten Summanden, womit ein Ideal B in G mit

$$G = A \oplus B$$

existiert. γ sei ein beliebiger zentraler Endomorphismus des Ideals A. Zu diesem Endomorphismus konstruieren wir folgende Abbildung γ' auf dem ganzen Multioperatorring G.
Sei g ein beliebiges Element aus G. Da G die direkte Summe der Ideale A und B ist, existiert für dieses Element eine eindeutige Darstellung

$$g = a + b$$

wobei a aus A und b aus B ist. Für diese Abbildung γ' setzen wir nun

$$\gamma' : \quad g\gamma' = a\gamma$$

wobei a das durch die Summendarstellung von bestimmte Element aus dem Ideal A ist. Jedes Element aus dem Ideal B und nur diese werden also auf das Nullelement abgebildet.
Wie man einfach nachprüfen kann, ist γ' damit für den Multioperatorring G Endomorphismus. Mit der Definition von γ' liegt das endomorphe Bild von G bezüglich des Endomorphismus γ' in A, ja sogar in dem Zentrum von A, da γ' zentraler Endomorphismus des Ideals A ist. Nach Satz 2, 2.3.6, ist das Zentrum von A aber in dem Zentrum des Multioperatorrings G enthalten.
Da G higginsch ist, muss für den zentralen Endomorphismus γ' eine natürliche Zahl n mit: γ' ist Automorphismus für $G\gamma'^n$ existieren. Da

$$(G\gamma')\gamma'^{n-1} = A\gamma'^{n-1}$$

ist und der Endomorphismus γ' auf dem Ideal A den Endomorphismus γ fortsetzt, muss der zentrale Endomorphismus γ für $A\gamma'^{n-1}$ Automorphismus sein. Damit ist das Ideal A higginsch und der Beweis ist erbracht.

Mit diesem Satz 3 erübrigt sich der Satz 2, da wir mit diesem Satz und dem Satz 2, 2.6.5, als Folgerung erhalten:

Satz 4
Jeder direkte Summand eines higginschen Multioperatorrings ist selbst higginsch und erfüllt damit die Hypothesen B und C.

Als weitere Folgerung ergibt sich

Satz 5
Ist ein Multioperatorring G die direkte Summe von Multioperatorringen G_i, $i \in I$, und ist auch nur einer der Ω-Ringe G_i nicht higginsch, so kann es auch G nicht sein, d.h., G ist nicht higginsch.

Damit ist es möglich, aus dem bisher einzigen Beispiel eines nicht higginschen Multioperatorrings $(\mathbb{Z}, + ,\circ)$ unendliche viele weitere nicht higginsche Ω-Ringe zu konstruieren.
Es sei angemerkt, dass wir ebenso zeigen können, dass jeder direkter Summand eines fasthigginschen Multioperatorrings wieder fasthigginsch ist.

Die nun zu untersuchende Umkehrung, ob die direkte Summe von higginschen Multioperatorringen wieder higginsch ist, ist nicht einfach zu lösen. Wir zeigen nur einige besondere Aussagen. Dazu macht sich eine weitere Begriffsbildung notwendig.

Definition

Ein Ω-Unterring eines Multioperatorrings G heißt genau dann **vollinvariant**, wenn dieser Ω-Unterring A bei jedem Endomorphismus von G in sich selbst abgebildet wird, d.h., für jeden Endomorphismus α gilt

$$A\alpha \subseteq A$$

Vollinvariant sind zum Beispiel alle Ideale des Rings der ganzen Zahlen. Damit zeigen wir:

Satz 6
Ist ein Multioperatorring G direkte Summe zweier vollinvarianter Ideale A und B, welche higginsch sind, so ist auch G higginsch.

Beweis: Der Multioperatorring G sei die direkte Summe seiner Ideale A und B, welche higginsch sind

$$G = A \oplus B$$

γ sei ein beliebiger zentraler Endomorphismus von G. Da nach Satz 2, 2.3.6, das Zentrum Z von G die direkte Summe der Zentren Z_a von A und Z_b von B ist und die Ideale A und B nach Voraussetzung vollinvariant sind, werden die beiden Ideale A und B bezüglich des Endomorphismus γ in sich selbst und sogar in ihre jeweiligen Zentren abgebildet. Damit erhalten wir

$$G\gamma = A\gamma \oplus B\gamma$$

und allgemein

$$G\gamma^i = A\gamma^i \oplus B\gamma^i \tag{2.60}$$

Da nun γ sowohl für A als auch für B zentraler Endomorphismus ist und diese higginsch sind, existieren zwei natürliche n und m, so dass γ für $A\gamma^n$ bzw. $B\gamma^m$ Automorphismus ist. Wählen wir als k das Maximum der beiden natürlichen Zahlen n und m, wird folglich mit Relation (2.60) der Endomorphismus γ für $k = \max(n,m)$ für den Ω-Ring $G\gamma^k$ zu einem Automorphismus. Damit ist der Multioperatorring G aber higginsch. Der Beweis ist erbracht.

Wir sehen, dass die Eigenschaft "Vollinvarianz" zum Nachweis notwendig ist. Betrachten wir aber die direkte Summe eines higginschen Multioperatorrings A mit einem zentrumslosen und damit auch higginschen Multioperatorring B, so kann man verallgemeinern:

Satz 7
Ist ein Multioperatorring G die direkte Summe eines higginschen Multioperatorrings A und eines zentrumslosen (higginschen) Multioperatorrings B, so ist G ebenfalls higginsch.

Beweis: Zum Nachweis brauchen wir nur zu zeigen, dass die Ideale für alle zentralen Endomorphismen von G vollinvariant sind, d.h. also, für jeden Endomorphismus γ, welcher zentral ist, muss das Bild von A im Zentrum von A und das Bild von B im Zentrum von B liegen.

Für das Ideal B ist dies offensichtlich, da B zentrumslos ist und das Zentrum von G die direkte Summe der Zentren von A und B ist. Damit muss aber das Zentrum Z_a von A mit dem Zentrum Z von G identisch sein, so dass auch $A\gamma$ für jeden zentralen Endomorphismus γ von G in Z_a liegt.
Da wir im Beweis nur die Vollinvarianz der direkten Summanden bezüglich der zentralen Endomorphismen benötigen, muss G higginsch sein. Der Satz ist bewiesen.

Im Folgenden wenden wir uns der Untersuchung von direkten Zerlegungen in higginschen Multioperatorringen zu.

Satz 8
Ist ein higginscher Multioperatorring G direkte Summe seiner Ideale A_1, A_2 und B_1, B_2:

$$G = A_1 \oplus A_2 = B_1 \oplus B_2$$

so existieren direkte Zerlegungen

$$A_i = A_{1,i} \oplus A_{2,i} \qquad \text{und} \qquad B_j = B_{1,j} \oplus B_{2,j}$$

und ein normaler Endomorphismus α mit

$$B_{i,j}\alpha = A_{j,i} \qquad i,j = 1,2$$

wobei α für G Automorphismus ist.

Beweis: Zuerst weisen wir die Existenz der direkten Zerlegungen nach. Seien α_1, α_2 die Zerlegungsendomorphismen von $G = A_1 \oplus A_2$, β_1, β_2 die Zerlegungsendomorphismen von $G = B_1 \oplus B_2$.
Die Abbildungen $\beta_1\alpha_1$ und $\beta_2\alpha_1$ sind dann normale Endomorphismen von G, da die Nacheinanderausführung zweier normaler Endomorphismen wieder normal ist.
Da $G\alpha_1 = A_1$ ist, bilden die Endomorphismen $\beta_1\alpha_1$ und $\beta_2\alpha_1$ A_1 in sich selbst ab. Die Summe von $\beta_1\alpha_1$ und $\beta_2\alpha_1$ ist α_1, so dass beide Endomorphismen normal und komplementär auf dem Ideal sind, da α_1 die identische Abbildung des Ideals A_1 ist. Nach Satz 2 und Satz 2, 2.6.5, existiert dann eine Zerlegung

$$A_1 = A_{1,1} \oplus A_{2,1}$$

so dass $\beta_1\alpha_1$ Automorphismus auf $A_{1,1}$ und $\beta_2\alpha_1$ Automorphismus auf $A_{2,1}$ ist. Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} B_{1,1} &= A_{1,1}\beta_1 \qquad ; \qquad & B_{1,2} &= A_{2,1}\beta_2 \\ B_{2,1} = B_1 \cap (A_{2,1} \oplus A_2) \qquad ; \qquad & & B_{2,2} &= B_2 \cap (A_{1,1} \oplus A_2) \\ A_{1,2} &= B_{2,1}\alpha_2 \qquad ; \qquad & A_{2,2} &= B_{2,2}\alpha_2 \end{aligned}$$

Damit sind die $A_{i,j}, B_{i,j}$ Ideale in G. Für diese zeigen wir das Geforderte. Da $\beta_1\alpha_1$ Automorphismus von $A_{1,1}$ ist, bildet α_1

$$B_{1,1} = A_{1,1}\beta_1$$

isomorph auf $A_{1,1}$ ab. Da dann

$$A_{1,1} \cap A_2 = B_{1,1} \cap A_2 = (0)$$

ist, wird nach Satz 5, 2.6.1, also

$$A_{1,1} \oplus B_2 = B_{1,1} \oplus A_2$$

Daraus folgt, dass

$$G = B_{1,1} \oplus A_{2,1} \oplus A_2$$

ist. Da das Ideal B_1 das Ideal $B_{1,1}$ umfasst, wird nach Satz 4, 2.6.1:

$$B_1 = B_{1,1} \oplus (B_1 \cap (A_{2,1} \oplus A_2)) = B_{1,1} \oplus B_{2,1}$$

Analog zeigt man

$$B_{1,2} \cap A_2 = (0) \qquad \text{und} \qquad A_{2,1} \oplus A_2 = B_{1,2} \oplus A_2 \qquad \to \qquad G = B_{1,2} \oplus A_{1,1} \oplus A_2$$

und damit

$$B_2 = B_{1,2} \oplus B_{2,2}$$

Andererseits bildet der Endomorphismus β_1 das Ideal $A_{1,1}$ isomorph auf $B_{1,1}$ und β_2 das Ideal $A_{2,1}$ auf $B_{1,2}$ ab. Damit wird auch

$$A_{1,1} \cap B_2 = (0) \qquad \text{und} \qquad A_{2,1} \cap B_1 = (0)$$

Nach Satz 5, 2.6.1, also

$$A_{1,1} \oplus B_2 = B_{1,1} \oplus B_2 \tag{2.61}$$

$$A_{2,1} \oplus B_1 = B_{1,2} \oplus B_1 \tag{2.62}$$

Ist nun a ein Element von $A_{2,1}$, so wird

$$a = a\alpha_1 = a\beta_1\alpha_1 + a\beta_2\alpha_1$$

und da $a\beta_2\alpha_1$ im Ideal $A_{2,1}$ enthalten ist

$$a\beta_1\alpha_1 \in A_{2,1}$$

Damit erhalten wir

$$a\beta_1 = a\beta_1\alpha_1 + a\beta_1\alpha_2 \in A_{2,1} \oplus A_2$$

Da das Element $a\beta_1$ auch im Ideal B_1 liegt, ergibt sich

$$a\beta_1 \in B_1 \cap (A_{2,1} \oplus A_2) = B_{2,1}$$

Aus $B_{1,2} = A_{2,1}\beta_2$ folgt dann $a\beta_2 \in B_{1,2}$ und $a = a\beta_1 + a\beta_2$ wird Element von $B_{2,1} \oplus B_{1,2}$, d.h.

$$A_{2,1} \subseteq B_{2,1} \oplus B_{1,2}$$

Nach Relation (2.62) ist aber auch

$$B_{2,1} \oplus B_{1,2} \subseteq A_{2,1} \oplus B_1$$

Wenden wir erneut Satz 4, 2.6.1, an, so ergibt sich

$$B_{2,1} \oplus B_{1,2} = A_{2,1} \oplus (B_1 \cap (B_{2,1} \oplus B_{1,2})) \qquad \text{bzw.}$$

$$B_{2,1} \oplus B_{1,2} = A_{2,1} \oplus (B_1 \cap B_{2,1}) \oplus (B_1 \cap B_{1,2}) = A_{2,1} \oplus B_{2,1} \oplus (0) = A_{2,1} \oplus B_{2,1} \tag{2.63}$$

mit (2.61) folgt dann

$$G = A_{1,1} \oplus B_{2,1} \oplus B_2 = A_{1,1} \oplus B_{2,1} \oplus B_{1,2} \oplus B_{2,2}$$

und mit Relation (2.63)

$$G = A_{1,1} \oplus A_{2,1} \oplus B_{2,1} \oplus B_{2,2} = A_1 \oplus B_{2,1} \oplus B_{2,2}$$

Da aber auch $G = A_1 \oplus A_2$ ist, bildet α_2 das Ideal $B_{2,1} \oplus B_{2,2}$ isomorph auf $A_{1,2} \oplus A_{2,2}$ ab.

$$(B_{2,1} \oplus B_{2,2})\alpha_2 = B_{2,1}\alpha_2 \oplus B_{2,2}\alpha_2 = A_{1,2} \oplus A_{2,2}$$

Mit Satz 5, 2.6.1, wird dann weiter

$$G = A_1 \oplus (B_{2,1} \oplus B_{2,2})\alpha_2 = A_1 \oplus A_{1,2} \oplus A_{2,2}$$

Da $G = A_1 + A_2$ und $A_{1,2} \oplus A_{2,2}$ Teilmenge des Ideals A_2 ist, erhalten als letzte gesuchte direkte Zerlegung

$$A_2 = A_{1,2} \oplus A_{2,2}$$

Zusammenfassend wurden ausgehen von $A_1 = A_{1,1} \oplus A_{2,1}$ die anderen drei direkten Zerlegungen so konstruiert, dass die α_i die Ideale $B_{i,j}$ isomorph auf die Ideale $A_{j,i}$, $i = 1{,}2$, abbilden. Außerdem wissen wir, dass α_1 und α_2 die Ideale $B_{1,1} \oplus B_{1,2}$ bzw. $B_{2,1} \oplus B_{2,2}$ isomorph auf A_1 und A_2 abbilden.
Auf Grund von Satz 1 existiert dann in G ein normaler Endomorphismus α, welcher α_1 und α_2 auf $B_{1,1} \oplus B_{1,2}$ bzw. $B_{2,1} \oplus B_{2,2}$ fortsetzt. Damit haben wir aber

$$B_{i,j}\alpha = A_{j,i}$$

für alle $i,j = 1{,}2$, womit der Beweis vollständig erbracht ist.

Diesen Satz können wir noch verallgemeinern:

Satz 9 (Higgins)
Ist ein higginscher Multioperatorring G die direkte Summe seiner Ideale $A_1,...,A_n$ bzw. $B_1,...,B_m$, d.h.

$$G = A_1 \oplus ... \oplus A_n = B_1 \oplus ... \oplus B_m$$

dann existieren direkte Zerlegungen

$$A_i = A_{1,i} \oplus ... \oplus A_{m,i} \qquad \text{und} \qquad B_j = B_{1,j} \oplus ... \oplus B_{n,j}$$

und ein normaler Automorphismus α von G mit

$$B_{i,j}\alpha = A_{j,i} \qquad (i = 1,...,n; j = 1,...m)$$

Der Beweis wird mit vollständiger Induktion nach $m + n$ geführt und ist in Higgins [39, Seite 401, für Multioperatorgruppen enthalten. Wir verzichten hier auf diesen Beweis, da er wie der Beweis von Satz 8 abläuft.

Als Beispiel betrachten wir wieder den Restklassenring $\mathbb{Z}_{5040}$ und dort die direkte Zerlegung

$$\mathbb{Z}_{5040} = (144) \oplus (35) = (112) \oplus (45)$$

Dabei treten die Zerlegungsendomorphismen

$$\text{für } A_1 = (144) \quad \alpha_1 : \quad a\alpha_1 = 144a \quad ; \quad \text{für } A_2 = (35) \quad \alpha_2 : \quad a\alpha_2 = 35a$$

$$\text{für } B_1 = (112) \quad \beta_1 : \quad a\beta_1 = 112a \quad ; \quad \text{für } B_2 = (45) \quad \beta_2 : \quad a\beta_2 = 45a$$

auf. Die normalen Endomorphismen von G $\beta_1\alpha_1$ und $\beta_2\alpha_1$ sind dann durch

$$\beta_1\alpha_1 : \quad a\beta_1\alpha_1 = 1008a \quad ; \quad \beta_2\alpha_1 : \quad a\beta_2\alpha_1 = 720a$$

gegeben, womit

$$A_1 = (144) = A_{1,1} \oplus A_{2,1} = (1008) \oplus (720)$$

wird. Wenden wie die Definitionen und den Nachweis an, so erhalten wir

$$B_{1,1} = (1008)\beta_1 = (1008) \quad ; \quad B_{1,2} = (720)\beta_2 = (720)$$
$$B_{2,1} = (112) \cap ((720) \oplus (35)) = (112) \cap (5) = (560)$$
$$B_{2,2} = (45) \cap ((1008) \oplus (35)) = (45) \cap (5) = (315)$$
$$A_{1,2} = (560)\alpha_2 = (560) \quad ; \quad A_{2,2} = (315)\alpha_2 = (315)$$

Die gesuchten Zerlegungen sind dann

$$A_2 = (560) \oplus (315) \quad ; \quad B_1 = (1008) \oplus (560) \quad ; \quad B_2 = (720) \oplus (315)$$

Übrigens ist dann

$$A_{1,1} \oplus A_{1,2} \oplus A_{2,1} \oplus A_{2,2} = B_{1,1} \oplus B_{1,2} \oplus B_{2,1} \oplus B_{2,2}$$

gleich dem ganzen Restklassenring.

2.6.7 Vollständige Zerlegungen

In diesem Abschnitt sollen direkte Zerlegungen in direkt unzerlegbare Ideal in higginschen Multioperatorringen diskutiert werden. Derartige Zerlegungen werden wir **vollständige Zerlegungen** nennen.

Liegt in einem higginschen Multioperatorring G eine vollständige direkte Zerlegung vor:

$$G = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n$$

und haben wir zusätzlich noch eine beliebige direkte Zerlegung des ganzen Multioperatorrings

$$G = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_m$$

so können wir Satz 9, 2.6.6, anwenden. Da die B_j direkt unzerlegbar sind, setzen wir $B_j = B_{1,j}$ und $B_{i,j} = (0)$ für alle $i = 2,...,n$ und $j = 1,...,n$. Damit werden genau n der Ideale $A_{j,i}$ verschieden vom Ω-Nullideal, und zwar alle $A_{j,1}$ mit $j = 1,...,n$. Da

$$G = \oplus \sum_{\forall i,j} A_{j,i}$$

ist, wird

$$G = A_{1,1} \oplus A_{2,1} \oplus ... \oplus A_{n,1}$$

wobei die Ideale $A_{j,1}$ als isomorphe Bilder der B_j direkt unzerlegbar sind. Wir haben damit

Satz von Higgins
Besitzt ein higginscher Multioperatorring G eine vollständige Zerlegung in n Summanden, so lässt sich jede andere direkte Zerlegung von G zu einer vollständigen Zerlegung mit genau n Summanden verfeinern.
Zwei vollständige direkte Zerlegungen haben dann paarweise normal isomorphe Summanden.

Wie man sieht, ist dieser Satz ein allgemeinere Form des Satzes von Schmidt-Ore. Während der Satz von Schmidt-Ore für Multioperatorringe mit Hauptreihen gilt und immer eine direkte Zerlegung in direkt unzerlegbare Summanden absichert, gilt der Satz von Higgins für die allgemeinere, und die Multioperatorringe mit Hauptreihen umfassenderere, Klasse der higginschen Multioperatorringe und gewährleistet nur eine vollständige direkte Zerlegung, wenn schon mindestens eine bekannt ist.

Die wichtigste Aussage des Satzes von Higgins besteht aber darin, dass er die Isomorphie zweier vollständiger Zerlegungen in higginschen Multioperatorringen absichert.
D.h., während für den Satz von Schmidt-Ore Multioperatorringe mit Hauptreihen, d.h. Multioperatorringen, welche sowohl der Minimal- als auch der Maximalbedingung für Ideale genügen, benötigt werden, sind für den Satz von Higgins Multioperatorringen mit Minimalbedingung völlig ausreichend.
Wir können damit sagen:

Die Isomorphie zweier direkter Zerlegungen in direkt unzerlegbare Ideale ist für Multioperatorringe mit Minimalbedingung abgesichert.

Das Erfüllen der Minimal- und Maximalbedingung für Ideale ist hinreichend aber nicht notwendig für die betrachtete Isomorphie. Ebenso ist das Erfüllen der Minimalbedingung allein nur hinreichend, da es auch Multioperatorringe gibt, welche higginsch sind aber nicht der Minimalbedingung genügen. Dazu gehören zum Beispiel alle zentrumslosen Multioperatorringe.

Da für die Eigenschaft "higginscher Multioperatorring" zwar hinreichende Kriterien aber kein hinreichendes und notwendiges Kriterium gefunden wurde, ist es für weitere Untersuchungen wichtig, eine andersartige Beschreibung der higginschen Multioperatorringe zu geben. Bisher gelang dies nicht, so dass wir und mit den bisherigen Aussagen begnügen müssen.

Wenden wir uns noch der direkten Ähnlichkeit zu, welche auch für higginsche Multioperatorringe eine Bedeutung besitzt.

Satz 1 (Kuros)
Sind A und A' zueinander normal isomorphe Summanden eines higginschen Multioperatorrings G, so existieren direkte Zerlegungen

$$A = A_1 \oplus A_2 \qquad \text{und} A' = A'_1 \oplus A'_2$$

wobei A_1 und A'_1 direkt ähnliche Ideale und A_2 und A'_2 abelsch sind.

Beweis: Sei $G = A \oplus B$ higginscher Multioperatorring und die α, β die zu der direkten Zerlegung gehörenden Zerlegungsendomorphismen. Ist φ der normale Endomorphismus von A und A', so ist auch $\varphi\alpha$ normaler Endomorphismus von A. Da G higginsch ist, folgt aus Satz 2, 2.6.6, dass eine Zerlegung

$$A = A_1 \oplus A_2$$

existiert, so dass $\varphi\alpha$ Automorphismus von A_1 und $(i - \varphi\alpha)$ Automorphismus von A_2 ist. Setzen wir $A'_1 = A_1\varphi$ und $A'_2 = A_2\varphi$, wird

$$A' = A'_1 \oplus A'_2$$

Da $\varphi\alpha$ sogar Automorphismus von A_1 ist, bildet α das Ideal A'_1 isomorph auf A_1 ab, Da $A'_1 \cap B = (0)$ ist, erhalten wir nach Satz 5, 2.6.1,

$$A'_1 \oplus B = A_1 \oplus B$$

Damit ergibt sich aber

$$A'_1 \oplus (B \oplus A_2) = A_1 \oplus (B \oplus A_2) = G$$

womit A_1 und A'_1 direkt ähnlich sind.
Weiterhin ist nach Satz 4, 1.5.4, $(i - \varphi\alpha)\varphi\alpha$ zentraler Endomorphismus von A. Da $A_2(i - \varphi\alpha) = A_2$ ist, wird

$$A_2\varphi\alpha = A_2(i - \varphi\alpha)\varphi\alpha$$

womit $A_2\varphi\alpha$ im Zentrum von A liegt. Damit wird für $A_2\varphi\alpha$ und $G\alpha = A$ der Kommutant

$$[A_2\varphi\alpha, G\alpha] = (0)$$

Da dann der Kommutator (wir benutzen die einfachere Schreibweise):

$$[a_1,...,a_n; g_1,...,g_n; \omega_n] := -a_1...a_n\omega_n - g_1...g_n\omega_n + (a_1 + g_1)...(a_n + g_n)\omega_n$$

Element von A_2 ist, $a_i \in A$, $g_i in G$, $i = 1,...,n$ (A_2 ist ja Ideal) und da sowohl φ als auch α normal sind, wird:

$$[a_1,...,a_n; g_1,...,g_n; \omega_n]\varphi = [a_1,...,a_n; g_1,...,g_n; \omega_n]\alpha\varphi = [a_1,...,a_n; (g_1\alpha),...,(g_n\alpha); \omega_n]\varphi =$$

$$= [(a_1\varphi),...,(a_n\varphi); (g_1\alpha),...,(g_n\alpha); \omega_n] = [(a_1\varphi),...,(a_n\varphi); g_1,...,g_n; \omega_n]\alpha =$$

$$= [(a_1\varphi\alpha),...,(a_n\varphi\alpha); g_1,...,g_n; \omega_n] \in [A_2\varphi\alpha, G\alpha] = (0)$$

Da φ aus A_2 Isomorphismus ist, muss der Kommutator gleich Null werden. A_2 liegt damit im Zentrum von G und ist folglich abelsch. Als isomorphes Bild ist dann das Ideal A_2' ebenfalls abelsch. Der Satz ist bewiesen.

Als Folgerung erhalten wir:

Satz 2
Sind A und A' direkt unzerlegbare, normal isomorphe Summanden eines higginschen Multioperatorrings G, so sind beide entweder direkt ähnlich oder beide abelsch, d.h., für ein nichtleeres Operationensystem Ω, Ω-Zeroringe.

Zum Abschluss wenden wir uns noch einmal der Auswahl der Hypothese A' zur Definition der higginschen Multioperatorringe zu.
Obwohl man schnell sieht, dass jeder Multioperatorring, welcher Hypothese A erfüllt auch die Hypothese A' erfüllt, also higginsch ist, erscheint die Wahl von A' zweckmäßiger.

Die Ursache besteht darin, dass bei Hypothese A' keine Forderung bezüglich des Erfülltseins von Minimal- bzw. Maximalbedingung gestellt wird. D.h., ein higginscher Multioperatorring muss kein Ideal besitzen, welches gleichzeitig Minimal- und Maximalbedingung für seine eigenen Ideale erfüllt.
Beispiel dafür ist der Ring der ganzen Zahlen, welcher zentrumslos und damit higginsch ist.

Hätten wir Hypothese A als Definition benutzt, wäre in die Definition das Erfülltsein der Minimal- und Maximalbedingung zumindest für Ideale des Zentrums gefordert worden.
Derartige Forderungen sollten aber nicht auftreten, da wir gerade herausarbeiten wollten, dass der Satz von Higgins auch für andere Multioperatorringen erfüllt ist.

Mit dieser Bemerkung schließen wir nun die Untersuchung higginscher Multioperatorringe ab.

2.7 Vollständige reduzible Multioperatorringe

2.7.1 Definition und Theorem von Lu

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit wenden wir uns einem weiteren Spezialfall von Multioperatorringen, den vollständig reduziblen Ω-Ringen zu.

Definition

Ein Multioperatorring G heißt vollständig reduzibel genau dann, wenn für jedes Ideal A von G ein Ideal B in existiert, so dass

$$G = A \oplus B$$

wird.

Damit ist ein Multioperatorring vollständig reduzibel, wenn jedes seiner Ideale direkter Summand des Multioperatorrings ist. Dabei müssen wir beachten, dass der Begriff "vollständig reduzibel" in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit dem Begriff "vollständige Zerlegung" aus Abschnitt 2.6.7 steht.

Beispiele sind sofort alle einfachen Multioperatorringe, für welche

$$G = G \oplus (0)$$

gilt. Nichttriviales Beispiel ist der Ω-Zeroring über der Kleinschen Vierergruppe, da dort

$$K_4 = K_4 \oplus (0) = (a) \oplus (b) = (a) \oplus (c) = (b) \oplus (c)$$

gilt. Dabei lässt sich über die Ideale eines vollständig reduziblen Multioperatorrings (wir benutzen in Zukunft "v.r." als Abkürzung für "vollständig reduzibel") eine Aussage treffen:

Satz 1 (Kuros)
Jedes Ideal eines v.r.Multioperatorrings ist selbst vollständig reduzibel.

Beweis: Sei A ein beliebiges Ideal eines v.r. Multioperatorrings G und H ein beliebiges Ideal von A. Da A selbst direkter Summand von G ist, ist nach Satz 2, 2.6.1, auch H Ideal von G. Da G vollständig reduzibel ist, existiert ein Ideal H' in G mit

$$G = H \oplus H'$$

Da nun H in A enthalten ist, wird mit Satz 4, 2.6.1:

$$A = H \oplus (A \cap H')$$

womit für jedes Ideal H von A ein Ideal $H'' = A \cap H'$ existiert, so dass

$$A = H \oplus H''$$

gilt. A ist vollständig reduzibel. Der Beweis ist erbracht.

Wir können damit sagen, dass auch jeder direkte Summand eines v.r. Multioperatorrings wieder vollständig reduzibel ist. Auch die Umkehrung gilt:

Satz 2 (Higgins)
Die (vollständige) direkte Summe G von v.r. Multioperatorringen G_1 und G_2 ist selbst wieder vollständig reduzibel.

Beweis: Sei G die direkte Summe von G_1 und G_2:

$$G = G_1 \oplus G_2$$

Sei nun A ein beliebiges Ideal von G. Dann ist $A \cap G_1$ Ideal von G_1 und es existiert ein Ideal H_1 mit

$$G_1 = (A \cap G_1) \oplus H_1$$

Da dann H_1 auch Ideal von G ist und

$$A \cap H_1 = A \cap H_1 \cap G = (0)$$

ist, muss die Summe $A + H_1$ direkt sein. Damit wird aber

$$A \oplus H_1 = A + (A \cap G_1) + H_1 = A + G_1$$

Mit Satz 4, 2.6.1, wird dann auch

$$A + G_1 = G_1 \oplus ((A + G_1) \cap G_2)$$

Damit ist aber $(A + G_1) \cap G_2$ Ideal von G_2. Da auch G_2 vollständig reduzibel ist, existiert ein Ideal H_2 von G_2 mit

$$G_2 = ((A + G_1) \cap G_2) \oplus H_2$$

und folglich

$$G = G_1 \oplus G_2 = G_1 \oplus ((A + G_1) \cap G_2) \oplus H_2 = ((G_1 \oplus (A + G_1)) \cap (G_1 \oplus G_2)) \oplus H_2 =$$

$$= (A + G_1) \oplus H_2 = A \oplus H_1 \oplus H_2$$

d.h., zu jedem Ideal A von G existiert ein Ideal $B = H_1 \oplus H_2$ mit $G = A \oplus B$, womit G vollständig reduzibel ist. Der Satz ist bewiesen.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, einen Multioperatorring G als vollständig reduzibel nachzuweisen. Jedoch fand der chinesische Mathematiker Lu ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für v.r. Multioperatorgruppen, welches zum einen sehr einfach zu handhaben ist und zum anderen einen schönen Beweis besitzt. Wir übertragen den Satz auf Multioperatorringe.

Theorem von Lu
Ein Multioperatorring G ist genau dann vollständig reduzibel, wenn G die direkte Summe einfacher Multioperatorringe G_i, $i \in I$, ist.

Beweis: Sei G zuerst die direkte Summe einfacher Multioperatorringe G_i, $i \in I$. A sei ein beliebiges Ideal von G. Da

$$G = \oplus \sum_{i \in I} G_i$$

ist, gilt auch

$$G = A + (\oplus \sum_{i \in I} G_i)$$

Nun wählen wir aus den G_i gewisse Ω-Ringe nach folgender Vorschrift aus:
Wir setzen voraus, dass die Indexmenge I wohlgeordnet ist. Auf Grund des Wohlordnungsgesetzes ist

dies möglich.
m sei ein gewisser fester Index aus I. Sei für alle $b < m$ die Multioperatorringe G_b schon ausgewählt bzw. nicht gewählt. M sei die Menge der Indizes aller schon ausgewähltenΩ-Ring G_b, Wir setzen:

Der einfache Ω-Ring G_m werde ausgewählt, wenn

$$(A + \sum_{b \in M} G_b) \cap G_m = (0)$$

gilt. Der einfache Ω-Ring G_M werden jedoch nicht gewählt, wenn

$$(A + \sum_{b \in M} G_b) \cap G_m = G_m$$

gilt. Es sind nur diese zwei Fälle möglich, da G_m einfacher Multioperatorring ist. Untersuchen wir alle Ω-Ringe (Ideale) G_i, $i \in I$, darauf, ob diese Ideale gewählt werden oder nicht, so sei I' die Indexmenge alle ausgewählten Ω-Ringe. Damit gilt:

$$A \cap G_0 = (0) \qquad ; \qquad (A + G_0) \cap G_1 = (0) \qquad ; \ldots$$
$$(A + \sum_{b \in I'; b < m} G_b) \cap G_m = (0)$$

für alle $m \in I'$. Damit ist die Summe $\sum_{b \in I'} G_b$ aber direkt. Aus der Konstruktion folgt aber auch

$$G = A \oplus (\sum_{b \in I'} G_b)$$

da genau alle G_i, $i \in I$, ausgewählt werden, welche nicht in der Summe $A + \sum_{b \in M} G_b$ schon vorhanden waren. Der Multioperatorring G ist vollständig reduzibel.

Nun sei G v.r. Multioperatorring. Wir zeigen, dass G dann die direkte Summe einfacher Multioperatorringe ist. Mit G_i, $i \in I$, bezeichnen wir alle einfachen, d.h. minimalen Ideale des Ω-Rings G. G' sei das Erzeugnis aller dieser Ideale G_i, d.h. deren Summe

$$G' = \sum_{i \in I} G_i$$

Da der Multioperatorring G vollständig reduzibel ist, existiert für das Ideal G' ein Ideal G'' in G mit

$$G = G' \oplus G''$$

Dabei besitzt G'' offenbar keine einfachen Ideale mehr. Angenommen das Ideal G'' wäre verschieden vom Nullideal.
Dann muss G'' ein von Null verschiedenes Element a besitzen, welche das Ideal A in G'' erzeugt. Da dann A ebenfalls kein einfaches Ideal besitzt, muss für jedes echte Ideal B von A ein Ideal B' existieren, so dass B in B' und B' in A echt enthalten ist, d.h.

$$B \subset B' \subset A$$

Andernfalls müsste in G ein Ideal B'' existieren, so dass

$$A = B \oplus B''$$

gilt, wobei aber B'' einfaches Ideal wäre. Damit existiert in A eine unendliche Reihe

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots \subset A$$

wobei alle A_i Ideale sowohl in A als auch in G sind. Mit Satz 1 sind aber alle diese A_i sowie deren Erzeugnis

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

vollständig reduzible Multioperatorringe. Damit existieren aber Ideale B_i, $i = 0,1,...$, und ein Ideal C' mit:

$$A_{i+1} = B_{i+1} \oplus A_i \qquad \text{und} \qquad A = C \oplus C'$$

wobei wir A_0 gleich dem Ω-Nullideal setzen. Daraus erhalten wir aber

$$A = (\oplus \sum_{i=1}^{\infty} B_i) \oplus C' \tag{2.64}$$

Andererseits lässt sich dann jedes Element a aus A in der Form

$$a = b_1 + ... + b_m + c$$

mit $b_i \in B_i$, $i = 1,...,m$, $c \in C'$, darstellen. Da aber das Ideal A von dem Element a erzeugt wird, muss

$$A \subseteq B_1 + ... + B_m + C'$$

gelten. Dies widerspricht aber der Gleichung (2.64), da dort alle B_i aus der unendlichen Indexmenge gefordert werden. Damit kann G'' nur gleich dem Nullelement werden, womit $G = G'$ ist. Aus der Menge aller einfachen Ideale G_I, $i \in I$, welche das Ideal G' erzeugen, wählen wir wie im ersten Teil des Beweises gewisse einfache Ideale G_b, $b \in I'$, aus, welche dann als direkte Summe ganz G ergeben. Der Multioperatorring G ist also direkte Summe einfacher Ideale. Der Satz ist vollständig bewiesen.

Ohne Beweis können wir zwei Folgerungen ableiten:

Satz 3 (Lu)
Sei ein Multioperatorring G die direkte Summe einfacher Ω-Ringe G_i, $i \in I$. Lassen sich die abelschen einfachen Ω-Ringe der G_i als direkte Summe unzerlegbarer Ω-Ringe H_j, $j \in J$, welche der gleichen primitiven Klasse, wie die abelschen G_i angehören, darstellen, so gilt:

$$G = (\oplus \sum_{j \in J} H_j) \oplus (\oplus \sum_{i \in I'} G_i)$$

wobei jeder der Multioperatorringe G_i mit $i \in I'$ nichtabelsch und einfach ist.
Ist A Ideal von G, so gilt:

$$A = (\oplus \sum_{j \in J} (A \cap H_j)) \oplus (\oplus \sum_{i \in I'} (A \cap G_i))$$

wobei jedes der Ideale $A \cap H_j$ direkte Summe abelscher einfacher Ideale ist. Dabei sind diese Summanden isomorph zu gewissen Multioperatorringen aus der primitiven Klasse in der sich die H_j befinden.

Und damit

Satz 4 (Lu)
Zwei beliebige direkte Zerlegungen eines v.r. Multioperatorrings in einfache Ω-Ringe sind isomorph, d.h. direkt ähnlich.

Damit wird aber keine Aussage über die Endlichkeit dieser direkten Summen getroffen. Weiterhin zeigen wir:

Satz 5
Jeder v.r. Multioperatorring ist higginsch.

Beweis: Sei γ zentraler Endomorphismus von G und Z das Zentrum des Multioperatorrings. Dann ist das Bild von G: $H = G\gamma$ im Zentrum enthalten und folglich Ω-Zeroring. Damit ist H auch Ideal in G. Da G vollständig reduzibel ist, existiert in G ein Ideal H' mit

$$G = H \oplus H'$$

Zu dieser direkten Zerlegung gehören dann Zerlegungsendomorphismen α und β, für welche

$$G\alpha = H \qquad \text{und} \qquad G\beta = H'$$

gilt. Da aber H das homomorphe Bild bezüglich des zentralen Endomorphismus γ ist, fallen die beiden Endomorphismen α und γ zusammen. γ ist Zerlegungsendomorphismus und damit nach dem Hauptsatz idempotent.
D.h. aber, dass γ für das Ideal H Automorphismus ist, womit der Multioperatorring G higginsch wird.
Der Beweis ist erbracht.

Damit gelten alle in den Abschnitten 2.6.5 und 2.6.7 getroffenen Aussagen für v.r. Multioperatorringe.

2.7.2 Kriterien und Beispiele

Von Interesse ist es weitere Kriterien für die Bestimmung von v.r. Multioperatorringen anzugeben.

Satz 1 (Higgins)
Besitzt ein Multioperatorring G zwei Ideale A und B, für welche die Ω-Faktorringe G/A und G/B vollständig reduzibel sind, so ist auch $G/(A \cap B)$ vollständig reduzibel.

Beweis: Da A und B Ideale von G sind, ist auch $A + B$ Ideal von G und damit $(A + B)/A$ Ideal von G/A. Da G/A v.r. Multioperatorring ist, existiert in G/A ein Ideal K' mit

$$G/A = (A + B)/A \oplus K'$$

K' besitzt dann bezüglich des natürlichen Homomorphismus ψ, mit $ker\psi = A$, in G ein Urbild K mit $K/A = K'$, d.h.

$$G/A = (A + B)/A \oplus K/A$$

Damit ist $A + B + K = G$ und $K \cap (A + b) = A$.
Betrachten wir nun das Ideal $A \cap B$, da $A = K \cap (A + B)$ ist, also

$$A \cap B = K \cap (A + B) \cap B = K \cap B$$

weil $B \subset A + B$ ist. Und weiterhin

$$B \subset K + B$$

und da aus $K \cap (A + B) = A$ sofort $A \subseteq K$ folgt

$$A + B \subseteq K + B$$

und mit $A + B = C$

$$C \subseteq K + B$$

d.h. $K + C \subseteq K + B$. Wie wir gesehen habe, ist aber $K + C = G$ und damit

$$G = K + B$$

Da nun $K \cap B = A \cap B$ ist, wird insgesamt

$$G/(A \cap B) = K/(A \cap B) \oplus B/(A \cap B) \tag{2.65}$$

Wenden wir für $K + B = G$ den ersten Isomorphiesatz an, erhalten wir:

$$(K + B)/B \cong K/(K \cap B) \qquad \text{, d.h.} \qquad G/B \cong K/(A \cap B) \tag{2.66}$$

Wenden wir für $C = A + B$ den ersten Isomorphiesatz an, so ergibt sich:

$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B) \qquad \text{, d.h.} \qquad C/A \cong B/(A \cap B) \tag{2.67}$$

Da C/A Ideal eines v.r. Multioperatorrings auch selbst vollständig reduzibel ist, sind beide Summanden von $G/(A \cap B)$ isomorph zu einem v.r. Ideal. Nach Satz 2 ist dann $G/(A \cap B)$ selbst vollständig reduzibel. Der Beweis ist erbracht.

Wenden wir das eben Gezeigte auf die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ an, wird aus der Tatsache, dass die Ω-Körper $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$ vollständig reduzibel sind, dass auch

$$\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(6\mathbb{Z})$$

vollständig reduzibel sind. Allgemein gilt:

Satz 2
Ein Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ ist genau dann vollständig reduzibel, wenn n Produkt von paarweise verschiedenen Primfaktoren (nicht Primzahlpotenzen) ist, d.h. eine Darstellung

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$$

mit $k \geq 1$ und $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, besitzt.

Beweis: Jeder Restklassenring modulo Primzahl ist Körper und folglich vollständig reduzibel. Die entsprechenden Ideal im Ring das ganzen Zahlen sind $p\mathbb{Z}$, mit p als Primzahl. Sei nun $k = 2$. Dann ist

$$n = p_1 \cdot p_2$$

wobei die Restklassenringe $\mathbb{Z}/(p_1\mathbb{Z})$ und $\mathbb{Z}/(p_2\mathbb{Z})$ vollständig reduzibel sind. Mit Satz 1 wird dann auch $\mathbb{Z}/(p_1\mathbb{Z} \cap p_2\mathbb{Z})$ vollständig reduzibel. Da aber

$$p_1\mathbb{Z} \cap p_2\mathbb{Z} = (p_1 \cdot p_2)\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$$

ist, folgt für $k = 2$ das Geforderte.
Induktionsvoraussetzung: Für Restklassenringe modulo n (n besitzt die obige Darstellung) mit genau k Primfaktoren ist die vollständige Reduzibilität gezeigt.
Induktionsbehauptung: Dann ist auch jeder Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ mit $m = n \cdot p_{k+1}$, $p_{k+1} \neq p_i$ für alle $i = 1,...,k$, vollständig reduzibel.
Induktionsbeweis: Nach Voraussetzung ist $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ vollständig reduzibel. Ebenso ist auch $\mathbb{Z}/(p_{k+1}\mathbb{Z})$ vollständig reduzibel, da p_{k+1} Primzahl ist. Nach Satz 1 ist dann auch

$$\mathbb{Z}/\left(\prod_{i=1}^{k} p_i \ \mathbb{Z}\right) \cap p_{k+1}\mathbb{Z}$$

vollständig reduzibel. Da nach Voraussetzung p_{k+1} nicht in

$$\prod_{i=1}^{k} p_i$$

enthalten ist, gilt

$$\left(\prod_{i=1}^{k} p_i \ \mathbb{Z}\right) \cap p_{k+1}\mathbb{Z} = \left(\prod_{i=1}^{k+1} p_i \ \mathbb{Z}\right) = m\mathbb{Z}$$

womit der Restklassenring $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ vollständig reduzibel ist.

Wenden wir uns der Umkehrung zu. Wir betrachten einen Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, bei dem in der Primfaktorzerlegung n mindestens ein Primfaktor als Potenz p^i, $i \geq 2$, auftritt. Nach dem Zerlegungssatz für Restklassenringe aus Abschnitt 2.1.4 ist dann aber das Ideal

$$(\frac{n}{p_i})$$

direkter Summand von $\mathbb{Z}_n$. Dieses Ideal ist aber, da es das nichttriviale Ideal $(\frac{n}{p_{i-1}})$ selbst enthält, nicht einfach, womit nach dem Theorem von Lu der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ nicht vollständig reduzibel ist. Der Beweis ist erbracht.

Matrizenringe sind im Allgemeinen nicht immer direkt zerlegbar und damit auch nicht vollständig reduzibel. Ändern wir aber die Matrizenmultiplikation derart ab, dass komponentenweise verknüpft wird, können wir sagen:

Satz 3
Jeder k-reihige Matrizenring mit dieser neuen Multiplikation ist vollständig reduzibel, wenn er über einem Körper gebildet wird.

Beweis: Man überlege sich, dass dieser Matrizenring dann die direkte Summe von Idealen der Art

$$\begin{pmatrix} \delta_{i,1}a & ... & \delta_{i,k}a \\ \delta_{i,k+1}a & ... & \delta_{i,2k}a \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i,(k-1)k+1}a & ... & \delta_{i,k^2}a \end{pmatrix}_\Omega$$

ist, wobei a alle möglichen Elemente des Körpers für jedes $i = 1,...,k^2$, durchläuft, womit diese Ideale isomorph zu dem Grundkörper werden.
Damit ist der Multioperatorring aber die direkte Summe einfacher Multioperatorringe und nach dem Theorem von Lu vollständig reduzibel.

2.7.3 Minimalbedingung in vollständig reduziblen Multioperatorringen

Im Allgemeinen muss ein beliebiger Multioperatorring, wenn er der Minimalbedingung für seine Ideale genügt, nicht unbedingt auch die Maximalbedingung für Ideale erfüllen. Beide Bedingungen werden nach Satz 4, 1.4.2, nur von Multioperatorringen erfüllt, welche Hauptreihen besitzen.
Für vollständig reduzible Ω-Ringe können wir aber zeigen:

Satz 1 (Higgins)
Ein v.r. Multioperatorring erfüllt genau dann die Maximalbedingung für seine Ideale, wenn er die Minimalbedingung für Ideale erfüllt.

Beweis: Sei G ein beliebiger v.r. Multioperatorring und erfülle zuerst die Maximalbedingung. D.h., jede Kette von Idealen G_i, $i \in I$, von G

$$... \subset G_n \subset ... \subset G_1 \subset G_0 = G$$

bricht nach endlich vielen Schritten bei G ab. Jedes Ideal G_i ist dann nach Satz 1, 2.7.1, selbst vollständig reduzibel.

Da ein Ideal G_i, $i \in I$, in einem Ideal G_j, $j \in I$, für alle $i,j \in I$ mit $i < j$, enthalten ist, existiert zu G_{i+1} ein Ideal H_{i+1} in G_i, welches

$$G_i = G_{i+1} \oplus H_{i+1}$$

erfüllt. Da das Ideal G_{i+1} verschieden von dem Ideal G_i ist, muss H_{i+1} verschieden vom Nullideal sein. Wenden wir dies schrittweise an, so wird

$$G = H_1 \oplus G_1 = H_1 \oplus H_2 \oplus G_2 = ... = H_1 \oplus ... \oplus H_i \oplus G_i = ...$$

Damit wird aber

$$(0) \subset H_1 \subset H_1 \oplus H_2 \subset ... \subset \oplus \sum_{j=1}^{i} H_j \subset ...$$

eine absteigende Kette von Idealen, welche bei dem Nullideal abbricht. Da die G_i und damit auch die H_i beliebig sind, erfüllt der Multioperatorring G die Minimalbedingung.

Sei nun in einem v.r. Multioperatorring mit Minimalbedingung

$$(0) \subset G_1 \subset G_2 \subset ... \subset G_i \subset ...$$

eine nach unten begrenzte aufsteigende Kette von Idealen. Da der Multioperatorring vollständig reduzibel ist, existiert zu jedem G_i ein Ideal H_i mit

$$G = G_i \oplus H_i$$

womit gilt:

$$G = G_1 \oplus H_1 = G_2 \oplus H_2 = ... = G_i \oplus H_i = ...$$

wobei

$$H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_i \supset ...$$

gilt. Da nun auch G_i echt in G_{i+1} enthalten ist, erhalten wir nach Satz 4, 2.6.1:

$$G_{i+1} = G_i \oplus (G_{i+1} \cap H_i) \tag{2.68}$$

und da G_i sogar echt in G_{i+1} enthalten ist

$$G_{i+1} \cap H_i \neq (0)$$

Da das Ideal H_i selbst vollständig reduzibel ist, existiert ein Ideal A in H_i mit

$$H_i = (G_{i+1} \cap H_i) \oplus A \tag{2.69}$$

Können wir nun zeigen, dass $A = H_{i+1}$ ist, sind die durch $H_1 \supset H_2 \supset ...$ bestimmten Ideale alle verschieden. Damit wäre die Maximalbedingung aber erfüllt.
Wir behaupten: $A = H_{i+1}$.
Aus (2.69) erhalten wir, dass A in H_i echt enthalten ist. Es ist $G_{i+1} \cap H_i \neq (0)$. Setzen wir

$$G = G_i \oplus H_i = G_i \oplus (G_{i+1} \cap H_i) \oplus A =$$

und mit Relation (2.68)

$$= G_{i+1} \oplus A$$

Da aber $G = G_{i+1} \oplus H_{i+1}$ ist, muss $A = H_{i+1}$ sein. Der Beweis ist erbracht.

Erfüllt ein v.r. Multioperatorring nun beide Bedingungen gilt auch:

Satz 2 (Higgins)
Ein v.r. Multioperatorring, welcher die Minimal- bzw. Maximalbedingung für seine Ideale erfüllt, ist direkte Summe endlich vieler einfacher Ideale und umgekehrt.

Beweis: Sei G ein beliebiger v.r. Multioperatorring, welcher der Minimalbedingung und nach Satz 1 also auch der Maximalbedingung für Ideale genügt. Dann besitzt G Hauptreihen nach Satz 4, 1.4.2. Die Länge der Hauptreihen sei n.
Nach dem Satz von Schmidt-Ore kann dann der Multioperatorring in direkt unterlegbare Summanden (endlich viele) direkt zerlegt werden. Da aber nach dem Theorem von Lu jeder v.r. Multioperatorring direkte Summe einfacher Ideale ist, muss ein v.r. Ω-Ring mit Minimalbedingung direkte Summe endlich vieler einfacher Ideale sein.

Für diese Beweisrichtung können wir auch ohne Satz von Schmidt-Ore und Theorem von Lu den Nachweis führen.
Ist G beliebiger v.r. Multioperatorring mit Minimal- und Maximalbedingung, so besitzt G ein minimales Ideal G_1 und zu diesem ein Ideal G_1' mit

$$G = G_1 \oplus G_1'$$

Nach Satz 2, 2.6.1, ist dann jedes Ideal von G_1 auch Ideal von G. Da G_1 aber minimal in G ist, kann es kein derartiges in G_1 echt enthaltenes Ideal geben. G_1 ist einfach. Nach Satz 1, 2.7.1, ist dann auch G_1' vollständig reduzibel.
Da G_1' in G echt enthalten ist, gelten auch in G_1' die Minimal- und Maximalbedingung. Damit kann in G_1' wieder ein minimales Ideal G_2 bestimmt werden, welches wieder einfach ist. Führen wir dieses Verfahren fort, gelangen wir zu

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_j \oplus G_j'$$

wobei alle G_i, $i = 1,...,j$, einfache Ideale (Multioperatorringe) sind. Da im Multioperatorring G nach Voraussetzung die Maximalbedingung gilt, bricht die Kette

$$G \subset G_1 \oplus G_2 \subset ... \subset \oplus \sum_{i=1}^{j} G_i \subset ...$$

nach endlich vielen Schritten ab, d.h., es existiert eine natürliche Zahl n, für welche G_n' zum Nullideal wird. Damit ist G aber die Summe endlich vieler einfacher Ideale.

Wenden wir uns der Umkehrung des Satze zu. Ist G direkte Summe endlich vieler einfacher Multioperatorringe, so ist G nach dem Theorem von Lu vollständig reduzibel. Betrachten wir die Normalreihe

$$(0) \subset A_1 \subset A_1 \oplus A_2 \subset ... \subset A_1 \oplus ... \oplus A_n = G$$

der direkten Summanden von G, so muss dies eine Hauptreihe im Multioperatorring G sein. Damit ist der Ω-Ring G aber ein Multioperatorring mit Minimal- und Maximalbedingung für seine Ideale. Der Satz ist vollständig bewiesen.

2.7.4 Der Satz von Wedderburn-Artin

In diesem Abschnitt werden wir versuchen, aus den gezeigten Sätzen, wie zum Beispiel dem Theorem von Lu, eine wichtige Folgerung zu ziehen. Dabei werden wir vorwiegend Beweisideen genutzt, da eine vollständige Herleitung ausführliche Vorbetrachtungen benötigen, die nicht Thema dieser Arbeit sind.

Zuerst betrachten wir einen beliebigen Ring R, von dem wir fordern, dass er **halbeinfach** ist. Unter einem halbeinfachen Ring versteht Faith in [46], Seite 449, einen Ring dessen R-Modul halbeinfach ist. In anderer Literatur wird von einem halbeinfachen Ring gefordert, dass er artinsch und radikalfrei ist. (zu dieser Definition sowie zu diesen Begriffen siehe zum Beispiel Wolfram [48], Seite 44)

Wir benutzen die von Faith gegebene Definition. Der dabei auftretende Begriff des R-Moduls wurde in Abschnitt 1.7.2 schon erwähnt. Dort stellten wir fest, dass man einen R-Modul als Multioperatorring auffassen kann, wenn man in dem Operationensystem auch unäre Operationen zulässt. Sehr ausführlich zu R-Moduln wird in Kuros [9], Kuros [11] und Kertesz [6] geschrieben.

Ein Ring R ist also genau dann per Definition halbeinfach, wenn dessen R-Modul R_R halbeinfach ist. Dabei verstehen wir unter R_R den R-Modul, welcher die additive Gruppe des Rings R als Grundstruktur und den Ring R selbst als Operatorenbereich besitzt.
Einen Modul nennt man halbeinfach, wenn er die direkte Summe einfacher Untermodul ist.

Eine Untergruppe $(U,+)$ des additiven Gruppe $(M,+)$ eines R-Moduls $(M, + ,R)$ ist dann und nur dann R-Untermodul oder einfach gesagt Untermodul, wenn für alle Elemente u aus U und r aus R:

$$ur \in U$$

gilt. Vergleichen wir diese Definition mit der Definition des Rechtsideals eines Rings aus Abschnitt 2.5.6, so können wir sagen:

Satz 1
Die additive Gruppe eines Rechtsideals eines Rings R bildet in dem R-Modul R_R einen Untermodul und umgekehrt.

Dabei müssen wir beachten, dass wir bis jetzt immer einen rechten R-Modul R_R vorausgesetzt haben. Einfach nennen wir einen Untermodul, wenn er keinen echten Untermodul besitzt. Zusammenfassend können wir bisher sagen:

Ein Ring R ist halbeinfach genau dann, wenn der rechte R-Modul R_R direkte Summe einfacher Untermoduln ist.

Da man einen R-Modul als besonderen Multioperatorring auffassen kann, können wir für R_R das Theorem von Lu anwenden. Da das Theorem von Lu in seiner ursprünglichen Form für Multioperatorgruppen gegeben wurde und jeder R-Modul als Multioperatorring auch Multioperatorgruppe ist, ist dieser Schluss gerechtfertigt.
Folglich muss der Modul R_R vollständig reduzibel sein. D.h. also, jeder Untermodul von R_R ist direkter Summand von R_R. Nach Satz 1 muss dann aber auch jedes Rechtsideal des halbeinfachen Rings R ein direkter Summand von R sein. Da nun jedes (zweiseitige) Ideal auch Rechtsideal ist, ist der halbeinfache Ring R vollständig reduzibel.

Satz 2
Jeder halbeinfache Ring R ist vollständig reduzibel und nach dem Theorem von Lu die direkte Summe einfacher Ideale.

Mit diesem Satz haben wir die Grundlage für den beabsichtigten Satz von Wedderburn-Artin gelegt. Dafür führen wir nun den Begriff des **artinschen Rings** ein. Man sagt, ein Ring R sei artinsch (rechtsartinsch), wenn er der Minimalbedingung für Rechtsideale genügt.
Liegt uns also ein halbeinfacher artinscher Ring R vor, so ist dieser nach Satz 2 direkte Summe einfacher Ideale. Da R artinsch ist, erfüllt R die Minimalbedingung für Rechtsideale und da jedes Ideal auch

Rechtsideal ist auch die Minimalbedingung für zweiseitige Ideale. Nach Satz 1, 2.7.3, gilt dann in R auch die Maximalbedingung für Ideale, wobei zu beachten ist, dass die Maximalbedingung nur für zweiseitige Ideale abgesichert ist. Die Rechtsideale müssen die Maximalbedingung nicht unbedingt erfüllen.
Da wir wissen, dass jeder halbeinfache artinsche Ring vollständig reduzibel ist und die Minimal- und Maximalbedingung für sein Ideale erfüllt, erhalten wir mit Satz 2, 2.7.3:

Satz von Wedderburg-Artin
Jeder halbeinfache artinsche Ring R ist die direkte Summe einfacher, endlich vieler artinscher Ringe.

Auf den Nachweis, dass jeder der direkten Summanden selbst artinsch ist, müssen wir hier verzichten; ebenso auf die Umkehrung des Satzes, da diese die Möglichkeiten hier übersteigt.
Dennoch dürfte es erstaunlich sein, dass aus dem Begriff des vollständig reduziblen Multioperatorrings für den Spezialfall, den Ring, dieser Zusammenhang gewonnen werden kann.
Zur Bedeutung des Satzes von Wedderburn-Artin kann man in der Literatur zur Ringtheorie nachschlagen.

2.7.5 Streng vollständig reduzible Multioperatorringe

Eine weitere besondere Form von Multioperatorringen bilden **streng vollständig reduzible Multioperatorringe**.
Darunter verstehen wir Ω-Ringe, bei denen jeder Ω-Unterring direkter Summand des Multioperatorrings ist. Da nach Abschnitt 2.3.6 jeder direkte Summand eines Ω-Rings Ideal ist, ist ein streng vollständig reduzibler Multioperatorring vollständig reduzibel und besitzt keinen Ω-Unterring, welcher nicht auch Ideal ist.
Damit muss jeder st.v.r. (streng vollständig reduzibler) Multioperatorring auch vollständig reduzibel sein. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Beispiel dafür ist der Körper der reellen Zahlen, welcher als Körper vollstä dig reduzibel ist, aber den Körper der rationalen Zahlen als Ω-Unterring besitzt und folglich nicht streng vollständig reduzibel ist.

Mit dem Begriff des streng einfachen Multioperatorrings aus Abschnitt 1.2.1 wird in Analogie zum Theorem von Lu:

Theorem über streng vollständig reduzible Multioperatorringe
Ein Multioperatorring G ist streng vollständig reduzibel genau dann, wenn G die direkte Summe streng einfacher Multioperatorringe G_i, $i \in I$, von denen nichtabelsche G_i nicht isomorph sind, ist.

Beweis: Der Beweis ist sehr umfangreich und erfordert zwischendurch den Beweis eines Lemmas.
Zuerst zeigen wir, dass jeder st.v.r. Multioperatorring G die direkte Summe streng einfacher G_i, $i \in I$, ist, bei denen nichtabelsche Ω-Ringe G_i und G_j, $i,j \in I$, nicht isomorph sind.

Der Multioperatorring G ist als st.v.r. Ω-Ring auch vollständig reduzibel. Nach dem Theorem von Lu ist G dann die direkte Summe einfacher Multioperatorring G_i, $I \in I$. Angenommen einer der Multioperatorringe G_i wäre nicht streng einfach.
Dann besitzt er einen nichttrivialen Ω-Unterring, der dann auch Ω-Unterring von G wäre. Da G nach Voraussetzung streng vollständig reduzibel ist, muss dieser Ω-Unterring dann direkter Summand von G sein. Folglich ist er aber auch Ideal in dem als nicht streng einfach angenommenen Multioperatorring. Dieser ist dann nicht einmal einfach, was aber ein Widerspruch zum Theorem von Lu ist. Folglich

muss jeder der G_i, $i \in I$, streng einfach sein.

Angenommen G_i und G_j, $i,j \in I$, $i \neq j$, seien zwei isomorphe nichtabelsche Multioperatorringe. φ sei der zugehörige Isomorphismus. Dann betrachten wir die Menge H aller Elemente der Form

$$H = \{a + a\varphi | a \in G_i, a\varphi \in G_j\}$$

Wir zeigen, dass H dann Ω-Unterring ist. Für die Addition erhalten wir auf Grund der Kommutativität:

$$(a + a\varphi) - (b + b\varphi) = (a - b) + (a\varphi + (-b)\varphi) = (a - b) + (a - b)\varphi \in H$$

da auch die G_i und G_j additive Gruppe enthalten. Aus Abschnitt 2.3.6 ergibt sich, da G_i und G_j direkte Summanden von G sind, dass deren gegenseitiger Kommutant gleich dem Nullideal ist, d.h.

$$[G_i,G_j] = (0)$$

Für eine beliebige Operation aus dem Operationensystem Ω wird dann

$$(a_1 + a_1\varphi)...(a_n + a_n\varphi)\omega_n =$$

mit dem Distributivgesetz und dem Kommutanten

$$= a_1...a_n\omega_n + (a_1\varphi)...(a_n\varphi)\omega_n = a_1...a_n\omega_n + (a_1...a_n\omega_n)\varphi \in H$$

womit H tatsächlich Ω-Unterring von G ist. Auf Grund der Tatsache, dass G streng vollständig reduzibel ist, muss H auch Ideal von G sein.
Nun zeigen wir, dass H die direkte Summe von G_i und G_j ist. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma
Ist ein Multioperatorring G die direkte summe nichtabelscher einfacher Multioperatorringe G_i, $i \in I$, so ist jedes Ideal A von G die direkte Summe gewisser G_i, $i \in I$.

Nachweis des Lemmas: Nach Voraussetzung existiert die direkte Summe

$$G = \oplus \sum_{i \in I} G_i \tag{2.70}$$

Unter der **Projektion des Ideals** A verstehen wir dann die Menge aller Elemente aus den G_i, $i \in I$, welche bei der Darstellung aller Elemente von A auf Grund der direkten Summe (2.70) benötigt werden. Wir wissen, dass bei einer direkten Summe jedes Element eindeutig als Summe von Elementen aus den direkten Summanden bestimmt ist.
Offenbar bildet dann die Projektion von A in die Ideale G_i in den G_i Ideale. Da die G_i aber streng einfach sind, müssen die induzierten Ideale entweder gleich dem Nullideal oder gleich dem ganzen Multioperatorring G_i sein.
Damit sind aber gewisse G_i in dem Ideal A enthalten, womit A direkte Summe dieser Multioperatorringe wird. Der Satz ist bewiesen.

Nachdem wir das Lemma gezeigt haben, setzen wir den Beweis des Theorems fort.
Auf Grund des Lemmas, ist dann

$$H = G_i \oplus G_j$$

b sei ein beliebiges von Null verschiedenes Element aus G_i, welches auch in H enthalten ist. Dann ist

$$b = a + a\varphi$$

Da aber $b = a$ ist, muss $a\varphi = 0$ sein. Die Abbildung φ ist nach Voraussetzung Isomorphismus, womit auch $a = b = 0$ sein muss. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Folglich müssen die beiden

Multioperatorringe nicht isomorph zueinander sein. Die ersten Richtung des Beweises ist gezeigt.

Zum Nachweis des Lemmas ist noch zu sagen, dass eigentlich ein exakter Nachweis erforderlich wäre, dass die Projektion von A in die G_i, $i \in I$, Ideale in diesen G_i erzeugt. Da der Sachverhalt aber offensichtlich ist und der zugehörige Beweis sehr umfangreich ist (siehe Lu [13], Seite 1741), wird hier darauf verzichtet.

Wenden wir uns der Umkehrung zu. G sei die direkte Summe streng einfacher abelscher Multioperatorringe H_i, $i \in I$, und untereinander nicht isomorpher nichtabelscher Multioperatorringe G_j, $j \in J$, d.h.

$$G = \left(\oplus \sum_{i \in I} H_i \right) \oplus \left(\oplus \sum_{j \in J} G_j \right)$$

A sein ein beliebiger Ω-Unterring von G. Auf Grund des Theorems von Lu genügt es zu zeigen, dass A dann Ideal von G ist. Damit wäre A dann auch direkter Summand von G.
Sei zuerst a ein beliebiges von Null verschiedenes Element von A. Da a auch in G enthalten ist, existiert dann eine eindeutige Darstellung

$$a = h_1 + ... + h_n + g_1 + ... + g_m \tag{2.71}$$

für

$$0 \neq h_l \in H_{i_l} \quad , \quad i_l \neq i_k \qquad , \text{wenn } l \neq k, \quad l,k = 1,2,...,n$$
$$0 \neq g_p \in G_{j_p} \quad , \quad j_p \neq j_q \qquad , \text{wenn } p \neq q, \quad p,q = 1,2,...,m$$

Die Summe $n + m$ bezeichnen wir als die Länge des Elements a.
Nun betrachten wir eines der von Null verschiedenen Elemente a von A, welche minimale Länge besitzen. $\{a\}$ sei der von diesem Element erzeugte Ω-Unterring von A. Aus der Tatsache, dass $\{a\}$ in A und in

$$H_{i_1} + ...H_{i_n} + G_{j_1} + ... + G_{j_m}$$

enthalten ist, folgt, dass jedes Element von $\{a\}$ die gleiche Länge $m + n$ besitzt. Damit können wir aber jedes Element in der Form

$$x \in \{a\} : \quad x = h_1(x) + ... + h_n(x) + g_1(x) + ... + g_m(x)$$

darstellen. Dabei sind alle Summanden $h_l(x) \in H_{i_l}$ und $g_p(x) \in G_{j_p}$ entweder gleichzeitig alle Null oder gleichzeitig verschieden von Null.
Damit erhalten wir aber, dass der Ω-Unterring $\{a\}$ isomorph zu dem abelschen Multioperatorring H_{i_1} ist. Zum Nachweis betrachten wir die Abbildung:

$$\varphi : \quad x\varphi = h_1(x), \qquad \text{mit } x \in \{a\}, h_1(x) \in H_{i_1}$$

Ohne dass wir hier die Homomorphiebedingungen explizit aufschreiben, ergibt sich aus der obigen Darstellung des Elements x aus $\{a\}$ und der Tatsache, dass der gegenseitige Kommutant zweier direkter Summanden von G gleich (0) ist, dass φ Homomorphismus von $\{a\}$ in H_{i_1} ist.
Da nun der abelsche Multioperatorring H_{i_1} streng einfach ist, muss der Homomorphismus sogar eine Abbildung auf ganz H_{i_1} sein. Weiterhin stellen wir fest, dass $h_1(x)$ verschieden von Null ist, wenn x verschieden von Null ist. Damit ist φ insgesamt Isomorphismus von $\{a\}$ und H_{i_1}.
Analog zeigen wir die Isomorphie von

$$\{a\} \cong H_{i_l} \cong G_{j_p}$$

für alle $l = 1,2,...,n$ und $p = 1,2,...,m$.
Da ein abelscher Multioperatorring niemals isomorph zu einem nichtabelschen Multioperatorring sein kann und nach Voraussetzung des Satzes die G_j, $j \in J$, als nichtabelsche Ω-Ringe nicht untereinander isomorph sein dürfen, treten für die Darstellung von (2.71) des Elements a zwei Möglichkeiten auf. Andernfalls würde ein Widerspruch entstehen.

1. In der Darstellung (2.71) des Elements a ist nur ein g_j, o.B.d.A. g_1, verschieden von Null. Damit erhalten wir

$$a = g_1 \qquad \text{und} \qquad \{a\} = G_{j_1}$$

womit $\{a\}$ zu einem Ideal von G wird.

2. In der Darstellung (2.71) des Elements a ist jedes g_j gleich Null, d.h.

$$a = h_1 + ... + h_n$$

womit der Ω-Unterring $\{a\} = \{h_1 + ... + h_n\}$ ein Ideal in dem Multioperatorring

$$H = \oplus \sum_{i \in I} H_i$$

ist, da H als direkte Summe abelscher Ω-Ringe selbst abelsch ist und jeder Ω-Unterring eines abelschen Multioperatorrings Ideal ist.

Damit können wir bisher sagen: Ist A ein beliebiger Ω-Unterring des Multioperatorrings G und a ein von 0 verschiedenes Element aus A, mit minimaler Länge, so ist $\{a\}$ Ideal in G.

Nun zeigen wir, dass für ein beliebiges Element b aus A $\{b\}$ ebenfalls Ideal im Multioperatorring G ist.
In Analogie zur Darstellung (2.71) des Elements a können wir b in der Form

$$b = h_1 + ... + h_s + g_1 + ... + g_t$$

schreiben, woraus sofort

$$g \in H_{i_1} + ...H_{i_s} + G_{j_1} + ... + G_{j_t}$$

folgt. b_1 sei ein beliebiges von Null verschiedenes Element aus $\{b\}$, mit minimaler Länge. Damit ergeben sich für b_1 wieder nur zwei Möglichkeiten

1. Entweder $b_1 = g_1$, womit $\{b_1\} = G_{j_1}$ zu einem Ideal in G wird. Da aber G als direkte Summe einfacher Multioperatorringe zumindest, nach dem Theorem von Lu, vollständig reduzibel ist, muss $\{b_1\}$ direkter Summand von G sein, d.h. es existiert ein Ideal B_1 in G mit

$$\{b\} = \{b_1\} \oplus B_1 \qquad \text{und}$$

$$B_1 \subseteq H_{i_1} + ... + H_{i_s} + G_{j_1} + ... + G_{j_t}$$

2. Oder $b_1 = h_1(b_1) + ... + h_t(b_1)$, mit $h_i(b_1) \neq 0$ für alle $i = 1,...,t$. Auf Grund des schon Gezeigten ist dann $\{b_1\}$ wieder Ideal von G und nach dem Theorem von Lu direkter Summand von G. Dabei erhalten wir

$$G = \{b_1\} \oplus \left(\oplus \sum_{i \in I, i \neq i_1} H_i \right) \oplus \left(\oplus \sum_{j \in J} G_j \right) \tag{2.72}$$

Damit ergibt sich aber

$$\{b\} = \{b_1\} \oplus B_1 \qquad \text{mit} \qquad B_1 = \left(\oplus \sum_{i \in I, i \neq i_1} H_i \right) \oplus \left(\oplus \sum_{j \in J} G_j \right) \subseteq H_{i_2} + ... + H_{i_s} + G_{j_1} + ... + G_{j_t}$$

In beiden möglichen Fällen erhalten wir also eine Darstellung

$$\{b\} = \{b_1\} \oplus B_1$$

Da nun $\{b_1\}$ und B_1 Ideale im Multioperatorring G sind, muss auch $\{b\}$ ein Ideal von G sein. Folglich muss auch A Ideal in G sein. Das Theorem ist bewiesen.

Nach dem umfangreichen Beweis betrachten wir ein Beispiel.
Dazu wählen wir den streng einfachen Multioperatorring $\mathbb{Z}_2$, den Restklassenring modulo 2. Da dieser nichtabelsch ist, muss die direkte Summe

$$G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

nach dem Theorem von Lu zwar vollständig reduzibel sein, kann aber, da die zwei nichtabelschen direkten Summanden isomorph sind, nicht streng vollständig reduzibel sein.
Diese direkte Summe begegnete uns in Abschnitt 2.5.4, wo wir sahen, dass G dann die Kleinsche Vierergruppe als additive Trägerstruktur besitzt. Auf Seite 159 ist die zugehörige multiplikative Strukturtafel abgebildet. Aus ihr erkennen wir, dass (a) und (b) Ideale sind, für welche $(K_4, + ,\circ) = (a) \oplus (b)$ gilt. Da dies die beiden einzigen nichttrivialen Ideale sind, ist der betrachtete Multioperatorring vollständig reduzibel.
Da nun (c) Ω-Unterring von $(K_4, + ,\circ)$ und nicht Ideal ist, kann die gebildete direkte Summe nicht streng vollständig reduzibel sein.

Bilden wir die direkte Summe von $\mathbb{Z}_2$ mit $\mathbb{Z}_3$, so erhalten wir, da beide direkten Summanden streng einfach und nicht isomorph sind, als Ergebnis einen streng vollständig reduziblen Multioperatorring. Nach Satz 1, 2.2.3, ist dies direkte Summe isomorph zu $\mathbb{Z}_6$. Allgemein können wir sagen:

Satz 1
Jeder Restklassenring $\mathbb{Z}_n$, wobei n eine Darstellung

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

mit p_i Primzahl und $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,k$, besitzt, ist streng vollständig reduzibel. Alle anderen Restklassenringe sind weder vollständig reduzibel noch streng vollständig reduzibel.

Der Nachweis ergibt sich aus dem gezeigten Theorem und dem Satz 1, 2.2.3.

2.7.6 SD-, R- und F-Multioperatorringe

Im letzten Abschnitt der Arbeit befassen wir und mit drei weiteren speziellen Typen vom Multioperatorringen. Dabei beschränken wir uns auf die Definitionen und das Nennen der Sätze, ohne einen Beweis zu führen.
Die zugehörigen Beweise sind für Multioperatorgruppen in Lu [13] auf den Seiten 1743-1745 enthalten.

Im Abschnitt 2.7 untersuchten wir bisher vollständig reduzible und streng vollständig reduzible Multioperatorringe. Zur Vereinfachung bezeichnen wir die Menge aller vollständig reduziblen Ω-Ring mit $\{ND\}$. Die Menge aller streng vollständig reduziblen Multioperatorringe erhält das Symbol $\{D\}$. Offenbar ist

$$\{D\} \subseteq \{ND\}$$

Diese Bezeichnungen sind aus Lu [13] entnommen, wo sie entsprechend für Multioperatorgruppen eingeführt wurden. Damit können wir nun an Stelle von einem v.r. Multioperatorring von einem **ND-Multioperatorring** sprechen. Ein **D-Multioperatorring** ist dann streng vollständig reduzibel.

Unter einem **SD-Multioperatorring** verstehen wir nun einen Ω-Ring, bei dem jeder Ω-Unterring **halbdirekter Summand** des Multioperatorrings ist. Halbdirekt heißt ein Ω-Unterring, wenn in dem Ω-Ring G ein Ideal B existiert, so dass für den Ω-Unterring A

$$G = A + B \qquad \text{und} \qquad A \cap B = (0)$$

gilt.

Als **R-Multioperatorring** bezeichnen wir eine Multioperatorring, in dem jeder Ω-Unterring "**wahrer Summand**" ist. Ein Ω-Unterring A ist "wahrer Summand" von G, wenn ein Ω-Unterring B existiert, so dass G das Erzeugnis von A und B ist

$$G = \{A,B\}$$

und für die von den Ω-Unterringen A und B erzeugten Ideale (A) und (B)

$$(A) \cap B = (0) \qquad \text{und} \qquad A \cap (B) = (0)$$

gilt.
Dass derartige Multioperatorringe existieren, zeigen einfache Beispiele. So ist die direkte Summe

$$(K_4, + ,\circ) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

vollständig reduzibel, also ND-Multioperatorring und außerdem noch SD-Multioperatorring, da für den Ω-Unterring (c) das Ideal (a) mit

$$(K_4, + ,\circ) = (a) + (c) \qquad \text{und} \qquad (a) \cap (c) = (0)$$

existiert. R-Multioperatorring ist zum Beispiel der Restklassenring $\mathbb{Z}_6$.
Vergleichen wir die Typen von Multioperatorringen $\{ND\}$, $\{D\}$, $\{SD\}$ und $\{R\}$, so gilt

Satz 1 (Lu)
Für jeden X-Multioperatorring, wobei X eine der vier genannten Eigenschaften ist, gilt

$$\{ND\} \supseteq \{SD\} \supseteq \{R\} \supseteq \{D\}$$

Damit ist ein streng vollständig reduzibler Multioperatorring ND-Multioperatorring, SD-Multioperatorring sowie R-Multioperatorring. Für diese Strukturen gelten dann folgende notwendige und hinreichende Bedingungen, die Lu für Multioperatorgruppen angab:

Theorem über SD-Multioperatorringe
Ein Multioperatorring G ist dann und nur dann SD-Multioperatorring, wenn G direkte Summe streng einfacher Multioperatorringe ist.

Theorem über R-Multioperatorringe
Ein Multioperatorring G ist dann und nur dann R-Multioperatorring, wenn G direkte Summe streng einfacher Multioperatorringe ist, von denen nichtabelsche Ω-Ringe untereinander nicht isomorph sind.

Theorem über ND-Multioperatorringe
Ein Multioperatorring G ist dann und nur dann ND-Multioperatorring, wenn G direkte Summe einfacher Multioperatorringe ist.

Theorem über D-Multioperatorringe
Ein Multioperatorring G ist dann und nur dann D-Multioperatorring, wenn G direkte Summe streng einfacher Multioperatorringe ist, von denen nichtabelsche Ω-Ringe untereinander nicht isomorph sind.

Die Beweise der beiden letzten Theoreme gaben wir in den Abschnitten 2.7.1 und 2.7.5. Für die beiden anderen verweisen wir auf Lu [13].

Vergleichen wir die Theorem für R- und D-Multioperatorringe, so stellen wir fest, dass beide identisch sind. d.h. jeder R-Multioperatorring ist D-Multioperatorring und umgekehrt.

Übertrage wir diese Aussagen auf abelsche Gruppen.
Da jede abelsche Gruppe Multioperatorring mit einem leeren Operationensystem ist, ist dies möglich. Offenbar können nur zyklische Gruppen mit Primzahlpotenzordnung streng einfach sein. Da diese abelsch sind (nichtabelsche streng einfache Gruppen existieren nicht) gilt:

Satz für SD-, R- und D-Gruppen
Für abelsche Gruppen als entartete Multioperatorringe sind die Eigenschaften

$$\{SD\}, \{R\} \quad \text{und} \quad \{D\}$$

identisch, d.h. jede SD-Gruppe ist sowohl R-Gruppe als auch D-Gruppe.

Übernehmen wir die Theoreme, erhalten wir:

Theorem über D-Gruppen
Eine abelsche Gruppe ist dann und nur dann D-Gruppe, wenn sie direkte Summe streng einfacher abelscher Gruppen ist, d.h., wenn sie direkte Summe zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist.

Dieses Ergebnis wird zum Beispiel von Wiegold in seiner Arbeit [59], Seite 310-320, erhalten. Zu dem gleichen Schluss gelangt Kertesz in [60], Seite 74-75.
Für vollständig reduzible ND-Operatorgruppen ergibt sich:

Theorem über ND-Operatorgruppen
Eine abelsche Operatorgruppe ist dann und nur dann ND-Operatorgruppe, wenn sie direkte Summe einfacher Operatorgruppen ist.

Diese Theorem geht auf Liu [62] zurück.

Bei der Untersuchung von D-Ringen hat sich besonders Szasz betätigt. In [61], Seite 269-272, gibt er das von uns aus dem Theoremen ableitbare Ergebnis über D-Ringe:

Theorem über D-Ringe
Ein Ring ist genau dann D-Ring, wenn er direkte Summe streng einfacher Ringe ist, bei denen nichtabelsche nicht isomorph zueinander sind.

Dabei zeigt er, dass streng einfache Ringe entweder Körper oder Zeroringe über zyklischen Gruppen von Primzahlordnung sind. Da Körper nichtabelsch sind, ist die Forderung nach nicht untereinander isomorphen nichtabelschen Summanden wieder notwendig. Außerdem muss ein SD-Ring dann nicht D-Ring sein, wie das Beispiel $(K_4, +, \circ)$ auf Seite 160 zeigt.

Zuletzt betrachten wir noch F-Multioperatorringe. Dabei verlassen wir die direkten Summen und benötigen freie Summen von Multioperatorringen.
Einen Multioperatorring G nennen wir genau dann **F-Multioperatorring**, wenn jeder seiner Ω-Unterringe freier Summand von G ist. (siehe Abschnitt 1.6.5) Zu diesen Multioperatorringen zeigt Lu:

Satz 2
Jeder F-Multioperatorring ist R-Multioperatorring.

Damit muss ein F-Ω-Ring die direkte Summe streng einfacher Multioperatorringe sein. Man kann noch weiter gehen:

Theorem über F-Multioperatorringe
Ein Multioperatorring ist dann und nur dann F-Multioperatorring, wenn dieser Multioperatorring streng einfach ist.

Zum Beweise siehe Lu [13], Seite 1745. Damit kann ein Ω-Ring dann und nur dann F-Multioperatorring sein, wenn er nur die trivialen Ω-Unteringe besitzt. Für abelsche Gruppen bedeutet das:

Satz 3 (Wiegold)
Eine abelsche Gruppe ist dann und nur dann F-Gruppe, wenn sie zyklische Gruppe von Primzahlordnung ist.

Von der Tatsache, dass jede zyklische Gruppe von Primzahlordnung F-Gruppe ist, kann man sich schnell überzeugen.
Da eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung streng einfach ist, d.h. für Gruppen, keine nichttrivialen Normalteiler besitzt, muss man nur zeigen, dass diese Gruppen die freie Summe von sich selbst und der Nulluntergruppe $\langle 0\rangle$ ist.
Die von G und $\langle 0\rangle$ erzeugte Untergruppe ist natürlich G selbst

$$G = \{G,\langle 0\rangle\}$$

Wählen wir als beliebige Gruppe aus dieser primitiven Klasse, in der sich G befindet, ein homomorphes Bild H von G bezüglich eines Homomorphismus φ, so wird:

$$G\varphi = H \qquad \text{und} \qquad \langle 0\rangle\varphi = \langle 0'\rangle$$

wobei $\langle 0'\rangle$ die Nulluntergruppe von H ist. Offenbar bestimmen wir damit eindeutig einen Homomorphismus ψ von $G = \{g,\langle 0\rangle\}$ in H, welcher auf G und $\langle 0\rangle$ mit φ zusammenfällt.
Nach der Definition der freien Summe aus Abschnitt 1.6.5 sind dann G und $\langle 0\rangle$ freie Summanden der Gruppe G.
Jede zyklische Gruppe von Primzahlordnung ist damit F-Gruppe.

Kapitel 3

Literaturverzeichnis

In das Literaturverzeichnis wurden alle Quellen aufgenommen, welche zur Einarbeitung in den Stoff, zur Anfertigung der Arbeit und zur Weiterführung im Sinne der Einordnung in umfassenderer Gebiete benutzt wurden.
Ebenso werden Arbeiten genannt, welche historische Bemerkungen enthalten.

Veröffentlichungen zum Thema "Multioperatorring"

- [4] Hion, J.W.: "Ω-Ringoide, Ω-Ringe und deren Darstellung", Trudi mosk. mat. obschestwa, 14, Moskau 1965 (russ.)
- [10] Kuros, A.G.: "Multioperatorringe und Algebren", Uspechi mathematiceskij nauk, 14-1, Verlag der Wissenschaften, Moskau 1969 (russ.)
- [16] Plotkin, B.I.: "Ω-Halbgruppen, Ω-Ringe und deren Darstellung", DAN, 199-5, Moskau 1963 (russ.)
- [29] Burkin, M.S.: "Theorem über die Freiheit linearer Ω-Algebren und Ω-Ringe", Uspechi matematiceskij nauk, 14-1, Verlag der Wissenschaften, Moskau 1969 (russ.)
- [38] Rebane, J.K.: "Darstellung von Multioperatorringen in assoziativen Ringen", Uspechi matematiceskij nauk, 14-1, Verlag der Wissenschaften, Moskau 1969 (russ.)

Weitere Veröffentlichungen

- [1] Crawley, P., Jonsson, B.: "Direct decompositions of algebraic systems", Bulletin of the Amer. Math. Soc., 60, Seite 541f., Menasha, Wisconsin, and Providencem, Rhode Island, 1963 (engl).
- [2] Flachsmeyer, J., Prohaska, L.: "Algebra", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975
- [3] Higgins, P.J.: "Groups with multiple operators", Proceedings London Math. Soc. (3) 6, London 1956 (engl.)
- [5] Hion, J.W.: "m-äre Ω-Ringoide", Sibirski matematiceskij journal, 8-1, Moskau 1965 (russ.)
- [6] Kertesz, A.: "Vorlesungen über artinsche Ringe", Akadémiai Kiadó, Budapest 1960
- [7] Kochendörffer, R.: "Einführung in die Algebra", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974
- [8] Kuros, A.G.: "Gruppentheorie", Akademie-Verlag, Berlin 1955
- [9] Kuros, A.G.: "Vorlesungen über allgemeine Algebra", B.B. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964
- [11] Kuros, A.G.: "Gruppentheorie", Band I und II, Akademie-Verlag, Berlin 1970-1972
- [12] Kuros, A.G.: "Allgemeine Algebra", Verlag der Wissenschaften, Moskau 1974 (russ.)
- [13] Lu, Shao-Sue: "Über direkte Summanden in Gruppen mit Multioperatoren", Scientia Sinica, 8-11, Seite 1735ff., Beijing 1964 (russ.)
- [14] Lugowski, H., Weinert, H.: "Grundzüge der Algebra" Band II, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968
- [15] Oniscik, A.L., Sulanke, R.: "Algebra und Geometrie", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977

- [17] Redei, L.: "Algebra", Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1959
- [18] Specht, W.: "Gruppentheorie", Springer-Verlag, Berlin(West) - Göttingen - Heidelberg 1956
- [19] Szasz, F.: "Radikale der Ringe", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975
- [20] Szasz, G.: "Einführung in die Verbandstheorie", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962
- [21] van der Waerden, B.L.: "Algebra" Band I, Springer-Verlag, Berlin(West)-Göttingen-Heidelberg 1964
- [22] Raduchin, J.M.: "Radikale in Ω-Gruppen - Allgemeine Theorie", sb. Mathematische Errungenschaften, no. 2 Seite 123-160, Kisinov 1968 (russ.)
- [23] Raduchin, J.M.: "Radikale in Ω-Gruppen - Teil 2", sb. Mathematische Errungenschaften, no. 4 Seite 108-135, Kisinov 1968-69 (russ.)
- [24] "Lexikon der Mathematik", VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977
- [25] "Mathematik - Kleine Enzyklopädie", VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977
- [26] Baer, R.: "Splitting endomorphisms", Trans. Amer. Math. Soc. 61, Seite 508-516, 1947 (engl.)
- [27] Bear, R.: "Direct decompositions", Trans. Amer. Math. Soc. 52, Seite 69-98, 1947 (engl.)
- [28] Bartsch, H.J.: "Mathematische Formeln", VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1972
- [30] Kalusnin, L.A.: "Einführung in die allgemeine Algebra", Verlag Nauka, Moskau 1973 (russ.)
- [31] Kasdorf, G., Fletschner, D., Labitzke, H.: "Weltanschaulich-philosophische Aspekte der Mathematik", Lehrmaterial zur Ausbildung von DL-Mathematik, Karl-Marx-Stadt 1978
- [32] Kochendörffer, R.: "Lehrbuch über Gruppentheorie", Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.G., Leipzig 1966
- [33] Kuros, A.G.: "Freie Summen von Multioperatoralgebren", Sibirski matematiceskij journal, 1.1, Moskau 1960 (russ.)
- [34] Kuros, A.G.: "Freie Summen von Multioperatorgruppen", Acta Scientia Mathematicum, Heft 21, Szeged 1960 (russ.)
- [35] Lugowski, H.: "Grundzüge der allgemeinen Algebra", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1976
- [36] Malcev, A.I.: "Algebraic Systems", Akademie-Verlag, Berlin 1973 (engl.)
- [37] Naas, J., Schmid, H.L.: "Mathematisches Wörterbuch" Band I und II, Akademie-Verlag Berlin und B.G. Teubner Stuttgart 1979
- [39] Sedlacek, J.: "Einführung in die Graphentheorie", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972
- [40] Wussing, H.: "Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979
- [41] Zassenhaus, H.: "Lehrbuch über Gruppentheorie", Band I, Leipzig-Berlin 1937
- [42] Belkner, H.: "Reelle Vektorräume", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1974
- [43] Bourbaki, N.: "Algebra", Verlag physikalisch-mathematischer Literatur, Moskau 1962 (russ.)
- [44] Bourbaki, N.: "Kommutative Algebra", Verlag Mir, Moskau 1971 (russ.)
- [45] Carlsen, G.: "Untersuchungen über freie Multioperatorgruppen", Diplomarbeit, eingereicht am 1. Dezember 1973 an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- [46] Faith, C.: "Algebra: Ringe, Moduln und Kategorien", Teil 1, Verlag Mir, Moskau 1977 (russ.)
- [47] Faith, C.: "Algebra: Ringe, Moduln und Kategorien", Teil 2, Verlag Mir, Moskau 1977 (russ.)
- [48] Wolfram, S.: "Ringerweiterungen und Ringkonstruktionen", Dimplomarbeit eingereicht am 1. März 1977 an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- [49] Kuros, A.G.: "Radicals of rings and algebras", Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 6. Rings, Modules and Radicals, Keszthely 71, North-Holland Publishing Company Amsterdam-London-Budapest 1973 (engl.)
- [50] Vieregge, H.: "Einführung in die klassische Algebra", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

- [51] Anderson, F.W., Fuller, K.R.: ”Modules with decomposition that complement direct summands”, Journal of Algebra, 22, Seite 241-253, 1972 (engl.)
- [52] Chase, S.U.: ”Direct products of modules”, Trans. Amer. Math. Soc. 97, Seite 457-473, 1960 (engl.)
- [53] Chase, S.U.: ”A remark on direct products of modules”, Proceedings Amer. Math. Soc. 13, Seite 214-216, 1962 (engl.)
- [54] Chase, S.U.: ”On direct products and sums in modules”, Pacif. Jounal Math. 12, Seite 847-857, 1962 (engl.)
- [55] Crawley, P., Jonsson, B.: ”Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems”, Pacif. Journal Math. 14, Seite 797-855, 1964 (engl.)
- [56] Faith, C., Walker E.A.: ”Direct sum representations of injective modules”, Journal of Algebra, 5, Seite 203-221, 1967 (engl.)
- [57] Warfield, R.B.: ”Rings whose modules have nice decompositions”, Mathematische Zeitschrift, 125, Seite 187ff., 1972 (engl.)
- [58] Warfield, R.B.: ”Exchange rings and decompositions of modules”, Mathematische Annalen, 199, Seite 31-36, 1972 (engl.)
- [59] Wiegold, J.: ”On direct factors in groups”, J. London math. Soc., 35, Seite 310-320, 1960 (engl.)
- [60] Kertesz, A.: ”On groups every subgroup of which ist a direct summand”, Public. Math. (Debrecen) 2, Seite 74-75, 1951-1952 (engl.)
- [61] Szasz, F.: ”Über Ringe, bei denen jeder Unterring direkter Summand des Ringes ist”, Mat. sb. 40 (2), Seite 269-272, 1956 (russ.)
- [62] Liu, Ming-Hui: ”Structure of completely reducible groups and rings”, J. Chinese Math. Soc. (New Serie), 1 (1), Seite 207-215, Beijing 1951 (engl.)