

**Diplomarbeit**

---

**Zur Geometrie  
der  
Platonischen Körper**

Kerstin Polster  
Technische Hochschule  
Karl-Marx-Stadt  
27. Februar 1981

---

Anmerkung:

Diese wissenschaftliche Arbeit wurde zum Abschluss des Diplomlehrerstudiums für Mathematik und Physik an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt von Oktober 1980 bis Februar 1981 erarbeitet und per Schreibmaschine in vierfacher Ausfertigung geschrieben.

Herr Dr. Liebold übernahm die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit.

Die schriftliche Arbeit und das mündliche Kolloquium wurden abschließend mit dem Prädikat "Gut" bewertet.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift des Originaltextes.

Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Geändert sind korrigierte Rechtschreib- und Grammatikfehler, unklare Formulierungen sowie einige Nummerierungen.

Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst.

Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab. Die Abbildungen der in Form von Platonischen Körpern kristallisierenden Minerale wurden durch aktuelle Fotos ersetzt.

Das ursprüngliche Kapitel 5 wurde hier als Abschnitt 3.7 eingefügt. Durch den LaTeX-Satz sind die Seitennummerierungen verändert. Das Original beinhaltete 192 Seiten.

Der fachwissenschaftliche Inhalt wurde nicht verändert bzw. gekürzt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Geschichte der regelmäßigen Körper</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Das allgemeine Polyedermodell</b>	<b>7</b>
2.1	Polyederdefinition . . . . .	7
2.2	Der Eulersche Polyedersatz . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Die fünf Platonischen Körper</b>	<b>10</b>
3.1	Eindeutigkeitsbeweis . . . . .	11
3.2	Existenznachweis . . . . .	12
3.2.1	Die Platonischen Körper in der Natur . . . . .	14
3.3	Ecken, Kanten und Flächen . . . . .	14
3.4	Schwerpunkte, Mittelpunkte . . . . .	15
3.5	Drei charakteristische Kugeln . . . . .	17
3.5.1	Die Umkugel . . . . .	19
3.5.2	Die Mittelkugel . . . . .	21
3.5.3	Die Inkugel . . . . .	22
3.6	Oberflächen und Volumina . . . . .	24
3.7	Winkel in Platonischen Körpern . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Konstruktionen und Projektionen</b>	<b>31</b>
4.1	Hilfskonstruktionen . . . . .	31
4.1.1	Quadratkonstruktion . . . . .	32
4.1.2	Sechseck- und Dreieckkonstruktion . . . . .	33
4.1.3	Fünfeck- und Zehneckkonstruktion . . . . .	34
4.1.4	Der Goldene Schnitt . . . . .	37
4.2	Konstruktion des Tetraeders . . . . .	38
4.3	Konstruktion des Würfels . . . . .	41
4.4	Konstruktion des Oktaeders . . . . .	44
4.5	Konstruktion des Ikosaeders . . . . .	47
4.6	Konstruktion des Dodekaeders . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Dualitäten</b>	<b>57</b>
5.1	Zueinander duale Polyeder . . . . .	57
5.2	Reziproke Polyeder . . . . .	58
5.3	Abstumpfungen und halbbreguläre Polyeder . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Symmetriegruppen der Platonischen Körper</b>	<b>62</b>
6.1	Definition der Symmetriegruppe . . . . .	62
6.2	Die Drehgruppe des Tetraeders . . . . .	63
6.3	Die Drehgruppen des Würfels und des Oktaeders . . . . .	64
6.4	Die Drehgruppen des Ikosaeders und des Dodekaeders . . . . .	65
6.5	Die vollständigen Symmetriegruppen der Platonischen Körper . . . . .	66
6.6	Die vollständige Symmetriegruppe des Tetraeders . . . . .	67

6.7	Die vollständigen Symmetriegruppen des Würfels und des Oktaeders . . . . .	68
6.8	Die vollständigen Symmetriegruppen des Ikosaeders und des Dodekaeders . . . . .	69
6.9	Polyederkaleidoskop . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Netze</b>	<b>72</b>
7.1	Netze der Platonischen Körper . . . . .	72
7.1.1	Das Netz eines Polyeders . . . . .	72
7.2	Inkongruente Netze bei Würfel und Oktaeder . . . . .	73
7.2.1	Die Gewinnung eines Netzes . . . . .	74
7.2.2	Die inäquivalenten Gerüste von $G(W)$ . . . . .	75
7.2.3	Anzahl der Netze bei nichtunterscheidbaren Papierseiten . . . . .	78
7.3	Inkongruente Netze beim Tetraeder . . . . .	79
7.4	Inkongruente Netze des Ikosaeders und des Dodekaeders . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Parkettierung und Dichtepackung</b>	<b>88</b>
8.1	Vom Parkettlegen . . . . .	88
8.2	Dichtepackungen . . . . .	90
<b>9</b>	<b>Die regulären Polytope in der 4. Dimension</b>	<b>93</b>
<b>10</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>96</b>

# Kapitel 1

## Geschichte der regelmäßigen Körper

*Kein der Geometrie Unkundiger trete unter mein Dach.* Plato

Die Geschichte der regelmäßigen Körper ist bereits älter als unsere Zeitrechnung. Schon seit unendlichen Zeiten interessieren sich Mathematiker für diese geometrischen Gebilde.

So lebte um 450 v.u.Z. ein italienischer Mathematiker namens Hippasos von Metapont aus der Schule der jüngeren Pythagoreer, dessen Verdienst es unter anderem war, dass er "... zuerst die aus zwölf Fünfecken zusammengesetzte Kugel öffentlich beschrieb und deshalb als ein Gottloser im Meer umgekommen sei ..." (Wussing [33]).

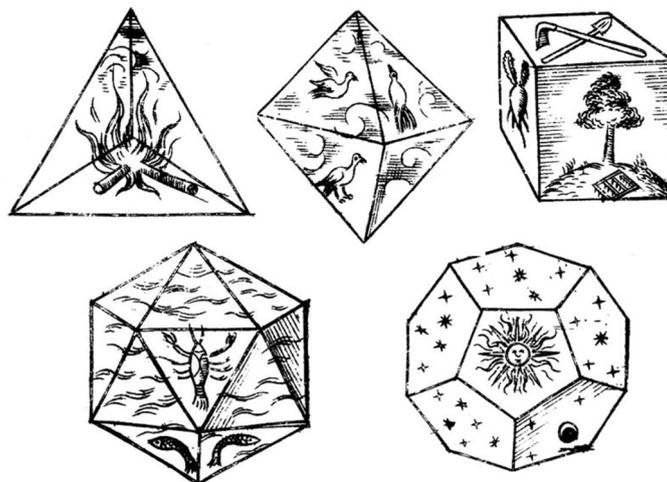
Die Kenntnis des Pentagondodekaeders hängt wahrscheinlich damit zusammen, dass der in Italien vorkommende Schwefelkies als Dodekaeder kristallisiert.

Weiterhin waren den Pythagoreern nachgewiesenermaßen auch der Würfel und das Tetraeder bekannt; möglicherweise aber auch die anderen beiden regelmäßigen konvexen Körper.

Die Entdeckung des regelmäßigen Ikosaeders und des Oktaeders schreibt man Theaitetos, der Freund Platons (etwa 429-348 v.u.Z.) zu. (Naas-Schmid [22])

Der antike Philosoph Plato war es auch, nach dem später die fünf regelmäßigen konvexen Körper benannt wurden; womit es eine besondere Bewandnis hat.

Dieser Plato gab den fünf Körpern eine bestimmte Bedeutung, und zwar ordnete er sie den vier Elementen zu, so setzte er



den Würfel (Hexaeder) = Erde  
das regelmäßige Tetraeder = Feuer  
das regelmäßige Oktaeder = Luft  
das regelmäßige Ikosaeder = Wasser

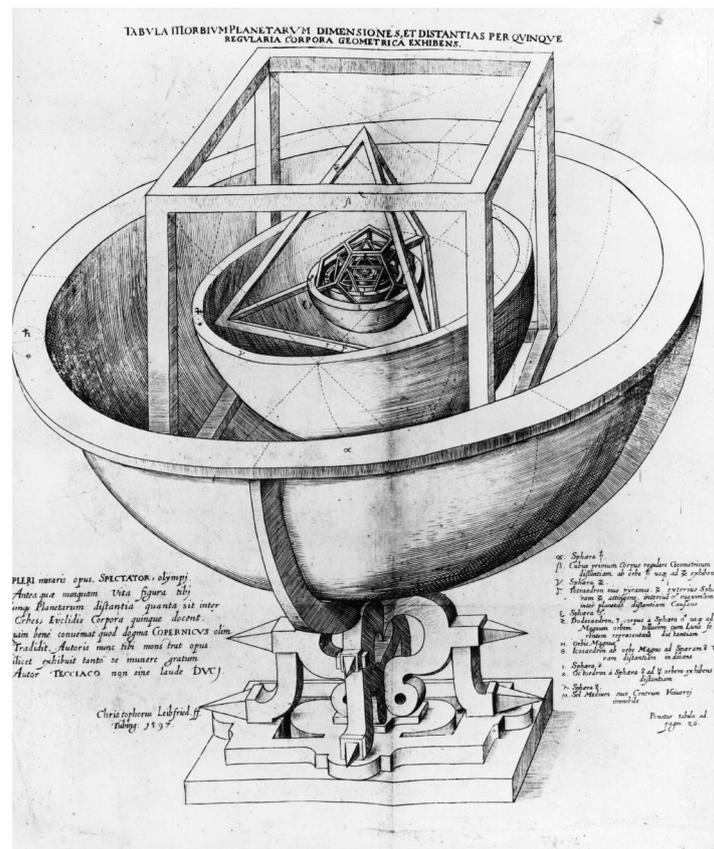
Dabei störte ihn das Missverhältnis von vier Elementen zu fünf Körpern überhaupt nicht; er schrieb einfach dem fünften Körper, dem Pentagondodekaeder, die Rolle des "Allumfassenden", des Universums zu. (siehe Abbildung vorhergehende Seite)

In mancher Literatur findet man auch die Bezeichnung "Kosmische Körper". Dieser Begriff basiert auf dem gleichen Inhalt; man stellt sich die 5 Körper ineinandergeschachtelt vor, also Erde, Feuer, Luft und Wasser eingeschlossen im Universum.

Euklid (365-300 v.u.Z.) widmete das 13. Buch seiner "Elemente" den 5 regelmäßigen konvexen Körpern, indem er sie dort beschrieb, den Existenznachweis erbrachte und vor allem, sie konstruierte. Später im 14. und 15. Buch, die nach dem Tod Euklids hinzugefügt wurden, erweiterte man diese Vorstellung der Polyeder noch.

Einen sehr großen Anteil an der Beschreibung der fünf Platonischen Körper hatte Johannes Kepler (1571-1630). (siehe auch Abschnitt 3.5)

In seinen Büchern "Mysterium cosmographicum" ("Weltgeheimnis") und "Harmonices mundi" ("Weltharmonik") wird selbst dem mathematisch-unkundigen Leser die Schönheit und Faszination, welche von diesen 5 Körpern ausgeht, nahegebracht. Für Kepler bilden diese Körper den Inbegriff alles Harmonischen auf der Welt, er meinte sogar, "Gott" hätte die Welt auf diesen Körpern errichtet. Kepler ging sogar soweit, mittels dieser Körper die Entstehung und Entwicklung der menschlichen Gesellschaft überhaupt zu erklären. (siehe [33] und Kepler [18], Seite 281f.)



Mit seiner Vorstellung über den Aufbau unseres Planetensystems (siehe Abbildung) erkennt man nun auch deutlich, was unter dem Begriff "Kosmische Körper" zu verstehen ist.

Seit dieser Zeit gibt es kaum ein Buch der Geometrie, in dem diese regelmäßigen Vielflächner nicht mindestens erwähnt werden.

Heute sagt man auch, wenn kein Irrtum möglich ist, nicht mehr regelmäßige Vielflächner, sondern einfach Oktaeder, Tetraeder usw.. Wobei wir auch der Einfachheit halber nicht mehr Pentagondodekaeder (Zwölfflächner, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünfecke sind) sagen, sondern, wenn möglich, nur vom Dodekaeder sprechen.

# Kapitel 2

## Das allgemeine Polyedermodell

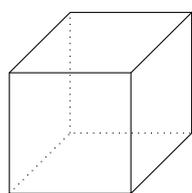
### 2.1 Polyederdefinition

Wird ein Körper nur von ebenen Flächen begrenzt, so nennt man ihn ebenflächig begrenzter Körper, **Vielflächner** oder **Polyeder**.

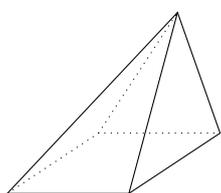
Die begrenzenden Flächen heißen Seitenflächen; die Seiten dieser Flächen nennt man Kanten, da jede Seite einer Fläche aus Seite genau einer anderen Seitenfläche ist. Zu einer Kante gehören genau zwei Flächen und zwei Ecken. In jeder Ecke stoßen mindestens drei Flächen und damit drei Kanten zusammen.

Jedes Polyeder besitzt wenigstens vier Seiten und wenigstens vier Eckpunkte.

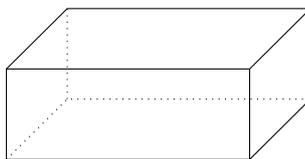
Als Beispiel für das beschriebene Modell sind Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden, Sternpolyeder u.a. zu nennen. (siehe Tafel 2 und Tafel 4)



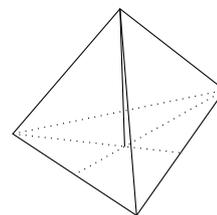
2a)



2b)



2c)



2d)

Ein Gegenbeispiel wäre die Kegel, da sein Mantel keine ebene Fläche bildet.

Im Folgenden soll lediglich auf die geraden Polyeder, die außerdem noch konvex sind, Bezug genommen werden.

#### Definition

Ein Polyeder heißt **schief**, wenn der Fußpunkt einer Höhe auf der zugehörigen Grundfläche des Körpers keinen konstanten Abstand zu den Eckpunkten dieser Grundfläche besitzt.

Ein Polyeder, welches nicht schief ist, heißt **gerades Polyeder**.

Ein Polyeder heißt **konvex** oder **Eulersches Polyeder**, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Polyeders nur Punkte aus dem inneren des Körpers enthält, wobei der Mantel zum Inneren gezählt wird.

Von den auf Tafel 2 dargestellten Körpern sind alle konvex, Körper 2b ist aber im Gegensatz zu den anderen schief. Der auf Tafel 4 dargestellte Sternpolyeder ist nicht konvex, aber gerade.

## 2.2 Der Eulersche Polyedersatz

Nachdem definiert wurde, was man unter einem konvexen Polyeder versteht, ist es nun interessant, einige Zusammenhänge zwischen der Anzahl von Ecken, Seitenflächen und Kanten zu untersuchen.

Es existiert ein grundlegender Satz über Polyeder, den schon Archimedes (um 287-212 v.u.Z.) kannte, welcher aber erst später nach dem Schweizer Mathematiker Euler (1707-1783) benannt wurde; der sogenannte Eulersche Polyedersatz.

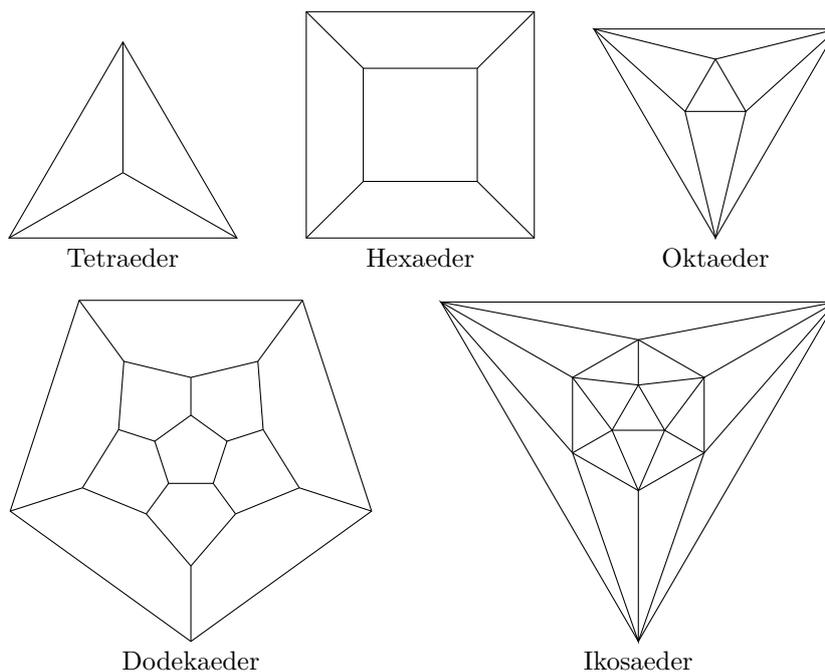
### Eulerscher Polyedersatz

Ist  $e$  die Anzahl der Ecken,  $f$  die Anzahl der Seitenflächen und  $k$  die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, so gilt

$$e + f + (-k) = 2$$

Beweis: Man stelle sich ein Polyeder als Hohlkörper mit dünner Gummihaut als Oberfläche vor. Schneidet man eine Seitenfläche heraus, so lässt sich der Rest derart dehnen, dass man die restliche Oberfläche auf eine Ebene legen kann.

Das gleiche Bild lässt sich auch erzeugen, wenn man sich ein Polyeder lediglich als Kantenmodell denkt und dieses perspektivisch aus einem Punkt betrachtet. Ein solches Bild heißt **Schlegel-Diagramm**. (siehe Tafel 3, die hier dargestellten 5 Diagramme sind gerade die der fünf Platonischen Körper).



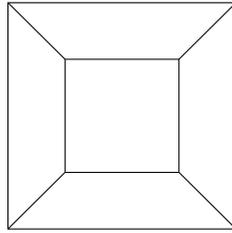
Die Idee der Kantenmodelle geht auf Leonardo da Vinci zurück, welcher Polyedermodelle herstellte, indem er für die Kanten Holzstäbe verwendete.

Man kann den Polyedersatz für alle konvexen Polyeder beweisen, aber aus Übersichtlichkeits- und Verständnisgründen soll die Gültigkeit des Satzes an dieser Stelle nur für den Würfel gezeigt werden. Beim Entfernen einer Seite und dem anschließenden Projizieren in eine Ebenen ändern sich zwar die Winkel und Form der Flächen, jedoch bleibt die Anzahl der Kanten und Ecken erhalten; die Anzahl der Flächen vermindert sich um 1.

Wenn man also zeigen kann, dass für das restliche Bild

$$e + f - k = 1$$

gilt, so gilt der Polyedersatz.



Zerlegt man das Schlegel-Diagramm durch Ziehen von Diagonalen in Dreiecke (siehe Abbildung 1), so ändert sich die Summe  $e + f - k$  nicht, da sich bei jeder Diagonalen sowohl  $f$  als auch  $k$  um 1 erhöhen.

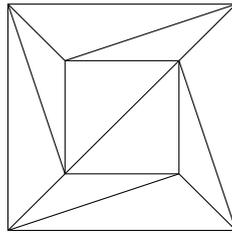


Abbildung 1

Entfernt man jetzt vom Rande her jeweils von einem Dreieck eine Kante, die nicht gleichzeitig zu einem anderen Dreieck gehört, so nehmen  $f$  und  $k$  um je 1 ab. Man führt so fort, d.h. wie in den nachfolgenden Abbildungen 2

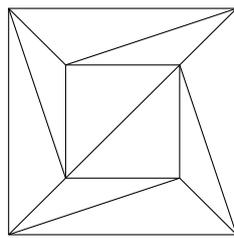


Abbildung 2a

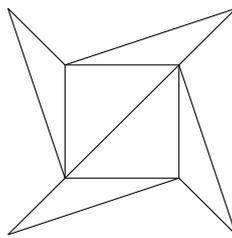


Abbildung 2b

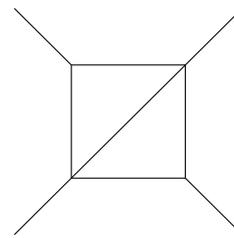


Abbildung 2c

Entfernt man vom letzten Diagramm (2c) je eine Kante mit einer Ecke, die keiner Flächen mehr angehört, so nehmen  $e$  und  $k$  je um 1 ab. Die Summe  $e + f - k$  ändert sich dabei wiederum nicht. (siehe Abbildungen 3)

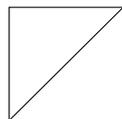


Abbildung 3a

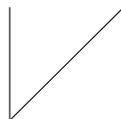


Abbildung 3b



Abbildung 3c

Man fährt so weiter fort (siehe Abbildungen 3b, 3c), bis letztendlich nur noch ein Dreieck übrig bleibt. Für dieses Dreieck gilt dann

$$e = 3 \quad k = 3 \quad f = 1$$

und damit

$$e + f - k = 1$$

Der Beweis ist erbracht.

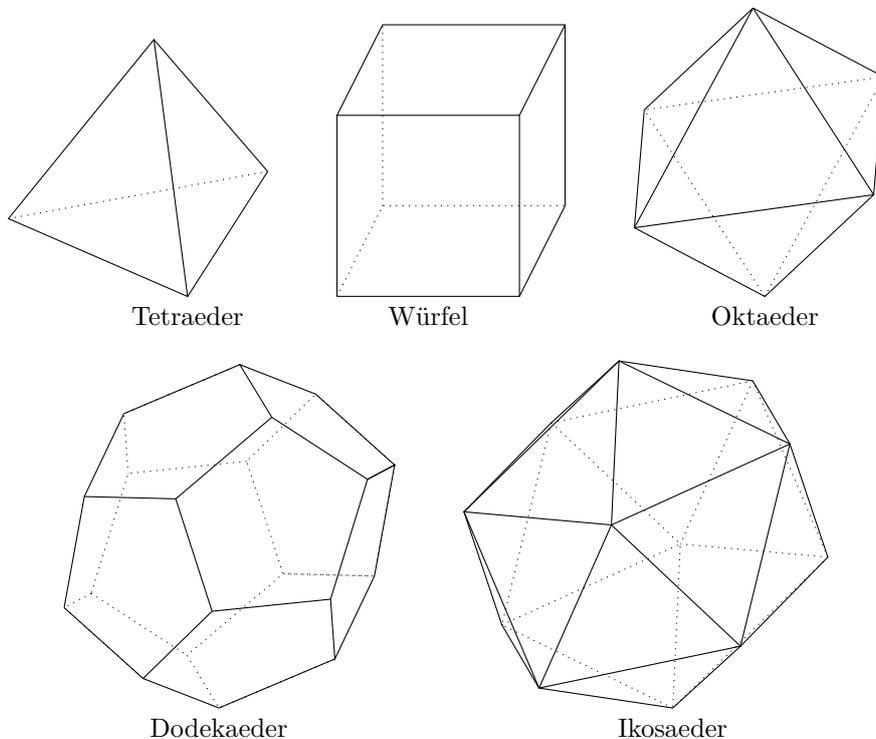
Zu diesem Beweis machen sich zwei Bemerkungen notwendig. Man könnte das Dreieck noch weiter reduzieren, bis nur noch eine Ecke übrig bleibt. Doch auch dann gilt noch:  $e + f - k = 1 + 0 - 0 = 1$ . Außerdem kann man jedes Schlegel-Diagramm eines konvexen Polyeders durch Ziehen von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, auf die sich das gezeigte Verfahren anwenden lässt.

## Kapitel 3

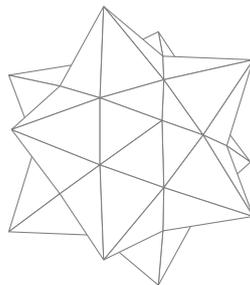
# Die fünf Platonischen Körper

Besteht die Oberfläche eines Polyeders nur aus regelmäßigen, untereinander kongruenten  $n$ -Ecken, so spricht man von einem **regelmäßigen Polyeder**.

Es gibt genau 9 solcher Körper; 4 nichtkonvexe, die sogenannten Sternpolyeder und 5 konvexe Polyeder, auch Platonische Körper genannt:



Die Entdeckung zweier Sternpolyeder (die Abbildung zeigt den sogenannten Dodekaeder-Igel bzw. das kleine Sterndodekaeder) schreibt man Kepler zu.



Sie gerieten jedoch wieder in Vergessenheit und wurden erst 1810 von dem französische Mathematiker L.Poinsot neu entdeckt, zusammen mit zwei weiteren Sternpolyedern.

Im Jahre 1811 wies Cauchy nach, dass es tatsächlich nur diese vier regelmäßigen Sternpolyeder gibt.

Die folgende Arbeit wird sich lediglich auf die fünf Platonischen Körper (Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder) beschränken, siehe Tafel 5, deren Existenz in den folgenden Ausführungen bewiesen werden soll.

### 3.1 Eindeutigkeitsbeweis

Es soll gezeigt werden, dass tatsächlich nur fünf regelmäßige konvexe Polyeder existieren können.

**Satz**

Es existieren genau fünf regelmäßige Polyeder.

Beweis: Sei  $n$  die Anzahl der Seiten einer Begrenzungsfläche und  $m$  die Anzahl der in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten. Jede Kante eines Polyeders ist nach 2.1 Seite von zwei Begrenzungsflächen. Wenn man also die Seitenzahl aller Begrenzungsflächen addiert, d.h., die Seitenzahl  $n$  mit der Flächenzahl  $f$  multipliziert, so erhält man die doppelte Anzahl der Kanten:

$$f \cdot n = 2 \cdot k \quad (3.1)$$

Jede Kante läuft nach zwei Ecken hin; addiert man nun die Anzahl der in die Eckpunkte laufenden Kanten, erhält man:

$$e \cdot m = 2 \cdot k \quad (3.2)$$

Da die Platonischen Körper konvexe Polyeder sind, gilt der Eulersche Polyedersatz:

$$f + e = k + 2$$

und damit

$$\frac{f}{2k} + \frac{e}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

aus (3.1) folgt

$$\frac{f}{2k} = \frac{1}{n}$$

aus (3.2)

$$\frac{e}{2k} = \frac{1}{m}$$

und somit

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \quad (3.3)$$

Schätzt man diese Gleichung ab, erhält man

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

da  $k$  in jedem Fall positiv sein muss. Multipliziert man beide Seiten der Ungleichung mit  $2mn$ , so wird

$$2m + 2n > m \cdot n \quad ; \quad m \cdot n - 2m - 2n < 0$$

Man begeht keinen Fehler, wenn man auf der linken Seite einmal 4 addiert und wieder subtrahiert:

$$m \cdot n - 2m - 2n + 4 < 4 \quad ; \quad m(n - 2) - 2(n - 2) < 4$$

$$(m - 2) \cdot (n - 2) < 4$$

Die linke Seite der Ungleichung kann nicht kleiner als 1 werden, da  $m$  und  $n$  mindestens gleich 3 sein müssen. Ansonsten würde man sich nicht im Raum bewegen.

Das Produkt kann also nur 1, 2 oder 3 werden. Die Zerlegung in Faktoren ergibt

$$\begin{aligned}1 \cdot 1 &: m = n = 3 \\1 \cdot 2 &: m = 3; n = 4 \\1 \cdot 3 &: m = 3; n = 5 \\2 \cdot 1 &: m = 4; n = 3 \\3 \cdot 1 &: m = 5; n = 3\end{aligned}$$

d.h. also, es kann nur fünf Körper dieser Art geben, was zu beweisen war.

Ein zweiter Beweis ist folgender:

Bei einem konvexen Körper kann die Summe der Kantenwinkel niemals größer als  $360^\circ$  sein. Bei  $360^\circ$  spannen alle Winkel eine Ebene auf, bei mehr als  $360^\circ$  handelt es sich schon um keinen konvexen Körper mehr.

Da es sich bei den Platonischen Körpern um regelmäßige Polyeder handeln soll, d.h., der Körper nur von regelmäßigen, untereinander kongruenten Flächen begrenzt sein soll, können die Begrenzungsflächen also regelmäßige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke usw. sein.

In einem regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieck ist nach dem Innenwinkelsatz jeder Winkel gleich  $60^\circ$  groß, d.h. also, in einer Ecke können 3, 4 oder 5 Dreiecke zusammentreffen. Sechs Dreiecke sind nicht mehr möglich, denn dann beträgt die Summe der Winkel schon  $360^\circ$ , und wir befinden uns nicht mehr im Raum.

In einem regelmäßigen Viereck (Quadrat) beträgt jeder Winkel  $90^\circ$ , d.h., es können in einer Ecke lediglich 3 Quadrate zusammentreffen. Die Summe der Kantenwinkel beträgt dann  $270^\circ$ .

Für Fünfecke gilt Analoges. Da ein Winkel  $108^\circ$  beträgt, können wiederum nur 3 Fünfecke in einer Ecke zusammenstoßen. Wie man sieht, ist das Zusammentreffen von Sechsecken nicht möglich, da ein Innenwinkel  $120^\circ$  beträgt. Daraus folgt, dass auch keine  $n$ -Ecke mit größerem  $n$  als Begrenzungsflächen möglich sind. Es kann also nur 5 solcher Körper geben:

1. 3 Dreiecke treffen in einer Ecke zusammen
2. 4 Dreiecke treffen in einer Ecke zusammen
3. 5 Dreiecke treffen in einer Ecke zusammen
4. 3 Vierecke treffen in einer Ecke zusammen
5. 3 Fünfecke treffen in einer Ecke zusammen

Anschließend bemerken wir noch, dass aus beiden Beweisen ersichtlich wird, dass es tatsächlich nur 5 regelmäßige konvexe Körper geben kann, jedoch ist hier der erste Beweis vorzuziehen, da schon ohne weitere Überlegungen Aussagen über  $n$  und  $m$  getroffen werden können.

## 3.2 Existenznachweis

Es ist nun zu zeigen, dass die gefundenen 5 Körper tatsächlich existieren.

Die Fälle 4, 2 und 1 sind trivial. Ersterer kennzeichnet einen Würfel (Hexaeder), welcher allgemein bekannt ist.

Zeichnet man in den Würfel alle seine Flächendiagonalen, entsteht ein weiterer Körper, das Tetraeder, Fall 1. (siehe Abbildungen 6 bzw. 7a)

Verbindet man nun jeweils 2 benachbarte Seitenmittelpunkte der Würfels miteinander, so bildet die Inneren entstandene Körperhülle ein Oktaeder, Fall 2. (siehe Abbildung 7b)

In Abbildung 6 sind beide Fälle übersichtlich zusammengefasst. Man erkennt die beiden Tetraeder  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$ , welche beim Ziehen sämtlicher Diagonalen der Würfels entstehen.

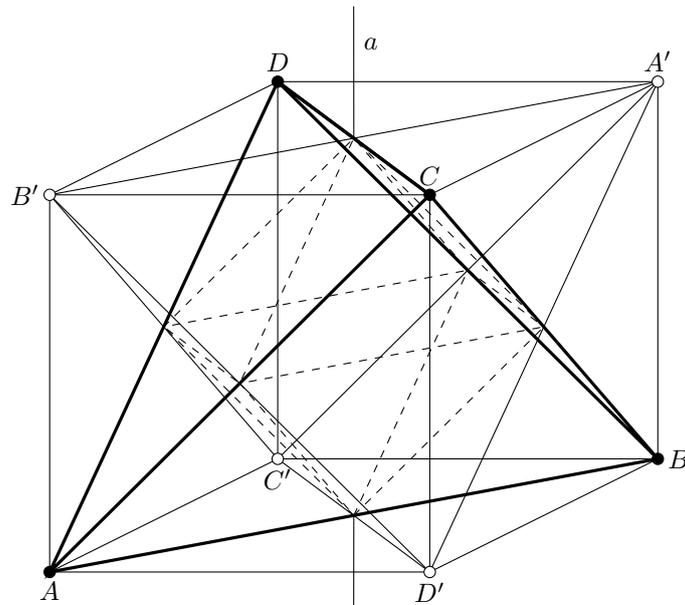


Abbildung 6

Außerdem sieht man, dass jeweils die Schnittpunkte der Tetraederkanten, welche gleichzeitig die Seitenmittelpunkte des Würfels sind, die Eckpunkte eines Oktaeders bilden.

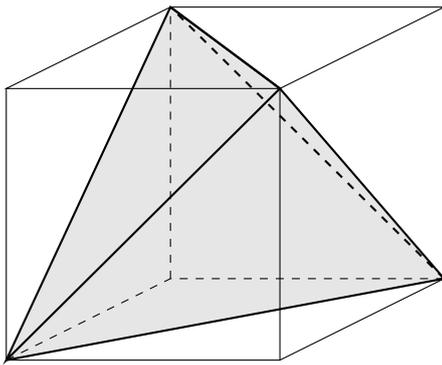


Abbildung 7a

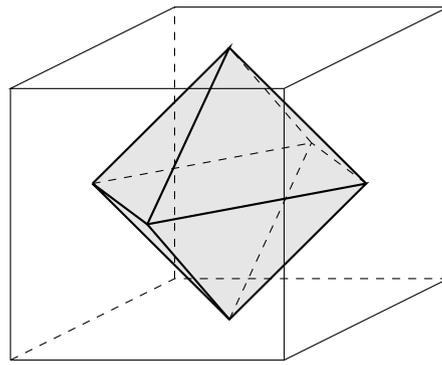


Abbildung 7b

Noch zu zeigen sind Fall 3 und Fall 5:  
zu Fall 3:

Man konstruiert eine regelmäßige fünfseitige Pyramide, welche von regelmäßigen Dreiecken begrenzt wird. Diese Pyramide spiegelt man an ihrer Grundfläche. Es entsteht so ein von zehn regelmäßigen Dreiecken umgrenzter Körper.

Diesen Körper trennt man jetzt an der ehemaligen Grundfläche auseinander, so dass zwei kongruente fünfseitige Pyramiden entstehen. An jede Kante der regelmäßigen fünfeckigen Grundflächen der Pyramiden heftet man ein zu den Seitenflächen kongruentes Dreieck an, so dass jetzt zusätzlich 10 Dreiecke hinzugekommen sind.

Nun nähert man beide Pyramiden mit den angehefteten Dreiecken derart aneinander an, dass die freien Dreiecke so ineinander gepasst werden, dass jedes Dreieck der einen Pyramide an zwei Flächen (Dreiecke) der anderen anliegt.

Es entsteht eine vollständig geschlossene Fläche; in jeder Kante treffen sich zwei Seiten. Der so entstehende Körper besitzt 20 kongruente Seitenflächen; an jeder Körperecke stoßen 5 Kanten aneinander. Den so entstandenen Körper nennt man Ikosaeder.

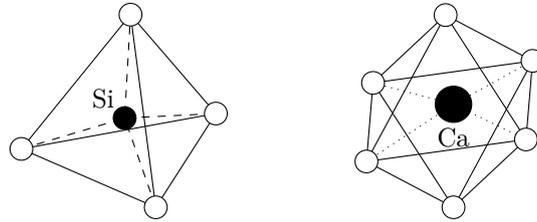
zu Fall 5:

Verbindet man beim Ikosaeder (ähnlich wie beim Würfel) jeweils zwei benachbarte Seitenmittelpunkte, so entsteht wieder eine geschlossene Fläche im Inneren des Ikosaeders, das Dodekaeder.

### 3.2.1 Die Platonischen Körper in der Natur

Ein Existenznachweis besonderer Art ist der, dass man nachweisen kann, dass die von uns untersuchten fünf Körper tatsächlich auch in der Natur vorkommen und von dieser in ihrer ureigensten Form geschaffen werden, womit unsere Betrachtungen praktischen Charakter erhalten.

So kristallisiert zum Beispiel  $SiO_4$  und Fahlerz als Tetraeder (siehe Abbildung).



Als Wunder der Natur kann man die Kristalle des Pyrits (Eisen-(II)-disulfid) bezeichnen, welche fast ideale Würfel darstellen (linke Abbildung):



Des weiteren kristallisieren Kalindichromat und Steinsalz als Würfel.

Für die typische Struktur des Oktaeders finden wir in der Natur das  $CaO_4$ , den Magneteisenstein und das Chrom(III)-kaliumsulfat (rechte Abbildung).

Dass der Schwefelkies als Dodekaeder kristallisiert war schon den Pythagoreern bekannt.

In der nichtlebenden Materie ist bis jetzt kein Beispiel für einen Körper in Form eines Ikosaeders bekannt geworden. Dagegen findet man bei einfachsten Lebewesen, zum Beispiel bei einigen Arten von Viren, eine charakteristische Ikosaedergestalt.

In der Fernsehsendung "Umschau" vom 16. Februar 1981 wurde das Modell eines 900000-fach vergrößerten Krebsvirus gezeigt, welches eindeutig die Form eines Ikosaeders aufwies.

### 3.3 Ecken, Kanten und Flächen

Da nun bekannt ist, wie viele und welche regelmäßigen konvexen Polyeder existieren, sollen im folgenden Abschnitt diese Körper im Einzelnen betrachtet werden.

Aus Abschnitt 3.2 ergibt sich für

Tetraeder :	$m = n = 3$
Hexaeder :	$m = 3; n = 4$
Oktaeder :	$m = 4; n = 3$
Ikosaeder :	$m = 5; n = 3$
Dodekaeder :	$m = 3; n = 5$

Als einfachsten Körper dieser Art betrachtet man das Tetraeder  $n = 3$  und  $m = 3$ . Ausgehend von Gleichung (3.3) aus 3.1 erhält man durch Umformen

$$k = \frac{2mn}{2m + 2n - m \cdot n}$$

Setzen wir die Werte des Tetraeders ein, ergibt sich

$$k_T = 6$$

d.h., die Kantenzahl des Tetraeders beträgt 6. Die Anzahl der Flächen lässt sich aus Gleichung (3.1), 3.1, herleiten:

$$f = \frac{2k}{n} \quad ; \quad f_T = 4$$

Die Eckenzahl ergibt sich einerseits aus dem Polyedersatz und andererseits aus Beziehung (3.2), 3.1:

$$e = \frac{2k}{m} \quad ; \quad e_T = 4$$

Analog lassen sich alle diese Größen für die anderen vier Körper berechnen. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Abschnitte 3.1 bis 3.3:

regelmäßiger Körper	begrenzende Fläche	$m$	$n$	$k$	$f$	$e$
Tetraeder	Dreieck	3	3	6	4	4
Hexaeder	Viereck	3	4	12	6	8
Oktaeder	Dreieck	4	3	12	8	6
Ikosaeder	Dreieck	5	3	30	20	12
Dodekaeder	Fünfeck	3	5	30	12	20

### 3.4 Schwerpunkte, Mittelpunkte

Dieser Abschnitt bildet eine unmittelbar Vorarbeit für den folgenden. Er ist die Grundlage für die Bestimmung von drei charakteristischen Kugeln der Platonischen Körper.

Da ein Platonischer Körper regelmäßig ist, gilt der Satz über den Mittelpunkt.

#### Satz

Es gibt in jedem regelmäßigen Körper einen einzigen Punkt, welcher von den Eckpunkten des regelmäßigen Körpers den gleichen Abstand besitzt.

Weiterhin existiert genau ein Punkt, welcher von allen Seiten des Körpers konstanten Abstand hat. Beide Punkte sind identisch.

Man nennt den entstehenden Punkt den **Mittelpunkt** dieses regelmäßigen Körpers.

Beweis: Man nehme sich einen beliebigen regelmäßigen Körper und betrachte eine Seitenfläche. Nun konstruiert man zu dieser regelmäßigen Fläche alle Mittelsenkrechten. Da die Fläche gleichseitig ist, schneiden sich alle Mittelsenkrechten in einem Punkt, dem Mittelpunkt der Körperseite. (siehe Abbildung 8a)

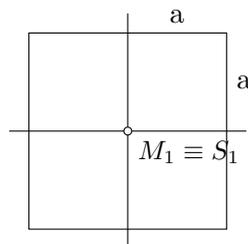


Abbildung 8a: Quadratseite

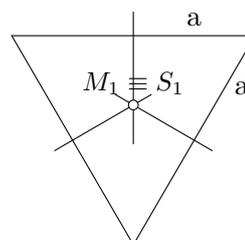


Abbildung 8a: Dreiecksseite

Diese Mittelsenkrechten sieht man jetzt als Spuren von Ebenen an, die orthogonal zur Fläche liegen und die Seite schneiden. Der Mittelpunkt  $M_1$  ist somit der gemeinsame Spurpunkt der Schnittgeraden der Ebenen.

Dieses beschriebene Verfahren führt man mit jeder Seitenfläche des Körpers durch, so dass, für  $n$  Seitenflächen auch  $n$  Schnittgeraden entstehen.

Man betrachte jetzt zwei anliegende Seitenflächen und deren Schnittgeraden. Da beide Geraden im rechten Winkel auf den Flächen stehen und die Flächen gegeneinander geneigt sind, müssen sich die Geraden in einem Punkt schneiden, der, wegen der Regelmäßigkeit des Körpers, von beiden Seiten gleich weit entfernt ist. (siehe Abbildung 8b)

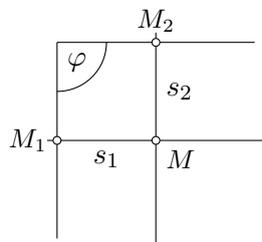


Abbildung 8b: Quadratseite

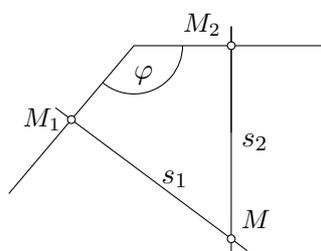
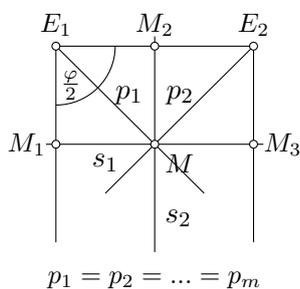


Abbildung 8b: Dreiecksseite

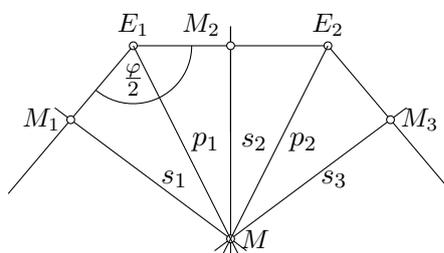
Betrachtet man jetzt eine dieser Schnittgeraden und die einer anderen anliegenden Fläche, so kommt man wieder zu einem Punkt, der auf beiden Geraden liegt und gleichweit von beiden Seiten entfernt ist. Wegen der Regelmäßigkeit der Körper muss dieser Punkt aber wieder derselbe sein wie beim ersten Vorgang, d.h., man kann den Vorgang  $(n - 1)$ -mal durchführen und erhält  $n - 1$  Punkte, welche alle identisch sind, d.h., der gefundene Punkt hat von allen Seiten den gleichen Abstand.

Der gefundene Punkt liegt also auf den Schnittgeraden, die die Seitenkanten halbieren. Da die Kanten halbiert werden, haben je zwei Eckpunkte des Körpers damit den gleichen Abstand von dem gefundenen Punkt. (siehe Abbildung 8c)



$$p_1 = p_2 = \dots = p_m$$

Abbildung 8c: Quadratseite



$$p_1 = p_2 = \dots = p_m$$

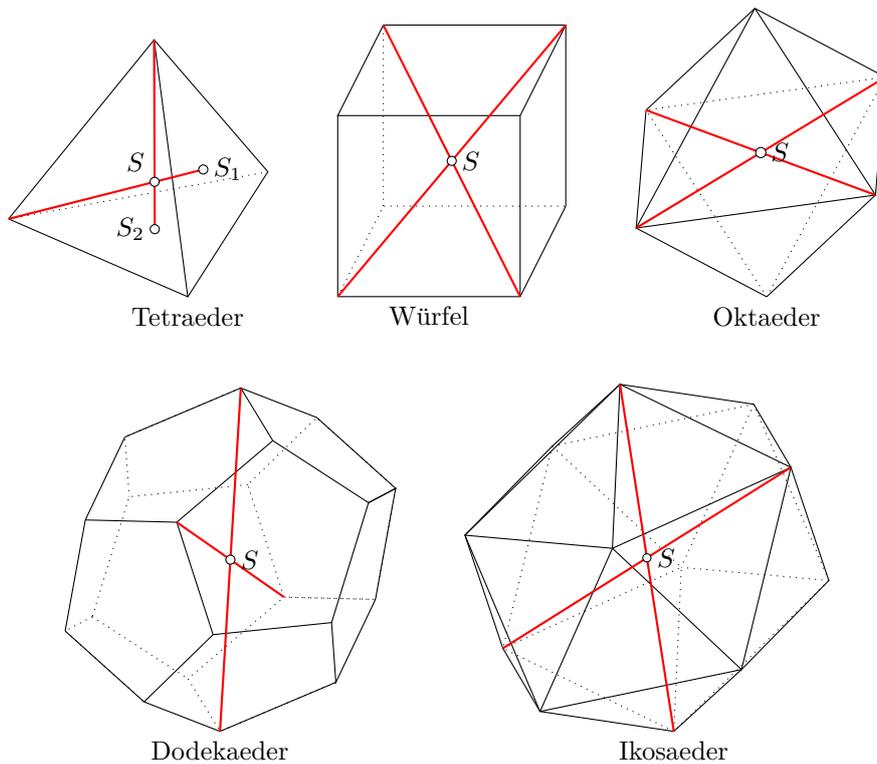
Abbildung 8c: Dreiecksseite

Auf Grund der Symmetrie der regelmäßigen Körper hat folglich jeder Eckpunkt die gleiche Entfernung zu diesem Punkt. Dieser Punkt ist durch diesen Beweis eindeutig bestimmt, d.h., es kann keinen weiteren Punkt geben, der diesen Anforderungen genügt.

Es ist gezeigt, dass alle fünf Platonischen Körper einen Mittelpunkt besitzen.

Es gilt nun den Schwerpunkt zu bestimmen, Für Hexaeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder ist die Bestimmung einfach. Da diese Körper punktsymmetrisch sind, zeichnet oder denkt man sich zwei beliebige Raumdiagonalen, und der Schnittpunkt beider ist der Schwerpunkt, da sich die Diagonalen dieser Körper halbieren. (siehe Abbildung nächste Seite)

Für das Tetraeder ist das Verfahren etwas anders. Man bestimmt zunächst den Mittelpunkt (Schwerpunkt) der einzelnen Dreiecksseiten über die Mittelsenkrechten, und dieser Schwerpunkt existiert auf Grund des bewiesenen Satzes. Danach verbindet man diese Schwerpunkte jeweils mit den gegenüberliegenden Eckpunkten.

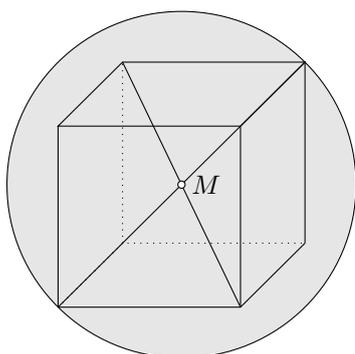


Da das Tetraeder regelmäßig ist, schneiden sich diese Geraden in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Tetraeders. Dieser Schnittpunkt liegt  $\frac{1}{4}h$ ,  $h$  sei die Höhe des Tetraeders, über jeder Grundfläche.

### 3.5 Drei charakteristische Kugeln

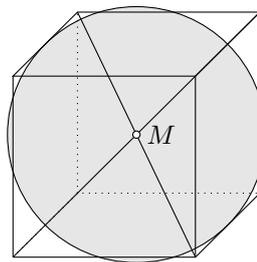
Zu allen fünf Platonischen Körpern kann man drei charakteristische Kugeln finden, die sogenannten Um-, Mittel- und Inkugeln, mit denen es eine besondere Bewandnis hat.

#### Um-, Mittel- und Inkugel am Beispiel des Würfels



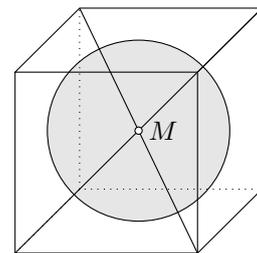
Umkugel  $r_u = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Abbildung 11a



Mittelkugel  $r_m = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Abbildung 11b

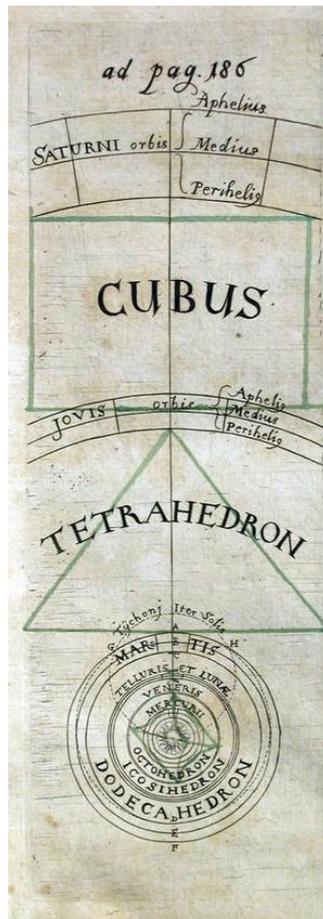


Inkugel  $r_i = \frac{1}{2}a$

Abbildung 11c

Im Mittelalter, als Naturerscheinungen gern durch schöne mathematische Zusammenhänge erklärt wurden, verwendete man auch diese Kugeln der Platonischen Körper.

Im Jahre 1595 glaubte der 23jährige Johannes Kepler das "Weltgeheimnis" gefunden zu haben. In seinem ersten großen Werk "Mysterium cosmographicum" behauptet er, dass die Planeten sich genau auf den charakteristischen Kugeln der Platonischen Körper um die Sonne bewegen. Er schreibt:



”Wir kommt es zur Sechszahl der Wandler, wie zu dem Abstand dieser Gestirne, warum ist des Jupiters Laufbahn vom Mars so weit entfernt, da im Äußersten beide?  
 Nimm Pythagoras hin, er lehrt’s mit seinen fünf Körpern.  
 Zwischen Saturn und Jupiter steht ein Würfel so, dass die Innenfläche der Saturnsphäre die dem Würfel umschriebene, die Außenfläche der Jupitersphäre die eingeschriebene Kugel ist.  
 Ebenso steht zwischen Jupiter und Mars ein Tetraeder, zwischen Mars und Erde das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder, zwischen Venus und Merkur das Oktaeder.  
 Auch die mittleren Bewegungen stehen in Beziehung zueinander. Sie verhalten sich nämlich wie die Quadrate der Abstände ...”

Ohne, dass die Kugelradien hier schon explizit hergeleitet wurden, verdeutlicht folgende Tabelle, wie groß die Abweichungen der Keplerschen Wert zu den wahren Werten sind:

Planet	bewegt sich auf	Verhältnis $\frac{\text{Umkugel}}{\text{Inkugel}}$	wahres Verhältnis
Merkur	Inkugel des Oktaeders	1,7321	1,8685
Venus	Umkugel des Oktaeders	1,7321	1,8685
Venus	Inkugel des Ikosaeders	1,2584	1,3866
Erde	Umkugel des Ikosaeders	1,2584	1,3866
Erde	Inkugel des Dodekaeders	1,2584	1,5237
Mars	Umkugel des Dodekaeders	1,2584	1,5237
Mars	Inkugel des Tetraeders	3,0000	3,4145
Jupiter	Umkugel des Tetraeders	3,0000	3,4145
Jupiter	Inkugel des Würfels	1,7321	1,8365
Saturn	Umkugel des Würfels	1,7321	1,8365

Mit der Entdeckung der drei nach ihm benannten Gesetze stellte Kepler später selbst fest, dass die Planeten sich auf Kreisen (Kugelschalen) sondern auf Ellipsenbahnen bewegen.

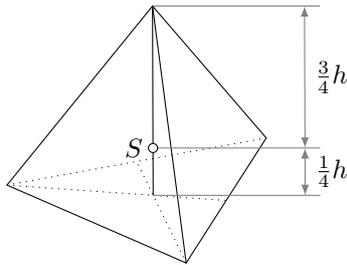
### 3.5.1 Die Umkugel

Unter einer Umkugel versteht man die Kugel, welche den Körper vollständig enthält, d.h., alle Ecken des Körpers liegen auf der Kugeloberfläche (siehe Abbildung 11a)

Um den Radius dieser Kugel zu ermitteln, sucht man zunächst den Mittelpunkt. Der Mittelpunkt jeder dieser Kugeln ist aber wegen der Regelmäßigkeit der fünf Körper auch gleich dem Schwerpunkt der entsprechenden Körper. (siehe Abschnitt 3.4)

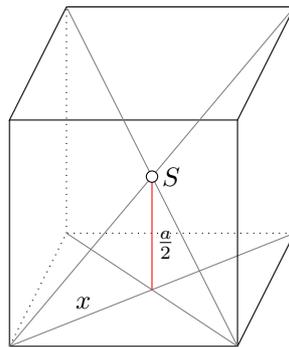
Der nächste Schritt nach der Bestimmung des Schwerpunktes ist die Ermittlung des Kugelradius.

a) Tetraeder



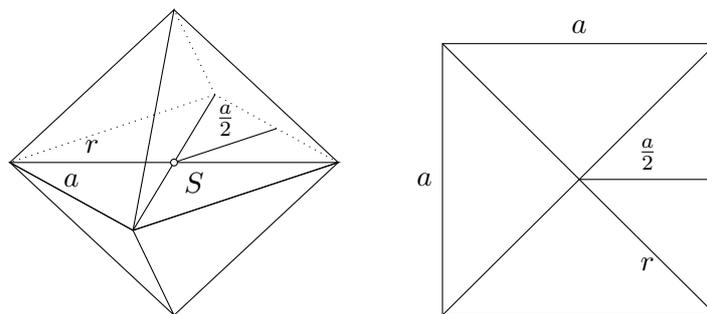
$$r_u = \frac{3}{4}h \quad ; \quad h = \frac{\sqrt{6}}{3}a \quad ; \quad r_u = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

b) Würfel



$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad ; \quad r_u = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} \quad ; \quad r_u = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

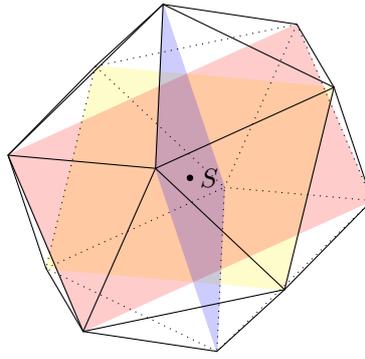
c) Oktaeder



$$r_u = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} \quad ; \quad r_u = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

d) Ikosaeder

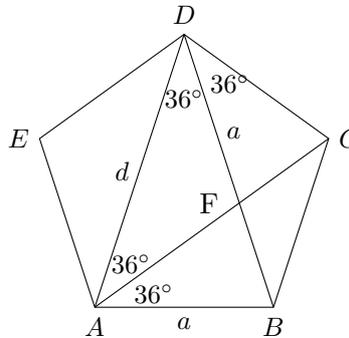
Für das Ikosaeder sind umfangreichere Überlegungen notwendig. Je zwei Gegenseiten eines Ikosaeders sind auf Grund der Regelmäßigkeit des Körpers parallel, so dass sie zu einem Rechteck gehören, dessen anderen beiden Seiten gerade Diagonale in einem regelmäßigen Fünfeck des Seitenlänge  $a$ , wenn  $a$  die Länge der Kante des betrachteten Ikosaeders ist, sind. (siehe Abbildung)



In der Abbildung sind drei derartige Rechtecke eingezeichnet. Die Diagonale eines so gebildeten Rechtecks ist dann der Durchmesser der Umkugel des Ikosaeders, d.h.

$$r_u = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + d^2}$$

Um nun die Diagonale  $d$  zu eliminieren, betrachten wir ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge  $a$ . (siehe Abbildung)



Da ein Winkel in einem regelmäßigen Fünfeck  $108^\circ$  beträgt, erhalten wir aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned} \angle BAF = \angle FAD = \angle ADB = \angle BDC = \angle ADE = 36^\circ \quad \text{und} \\ \angle BAD = \angle AFB = \angle ABD = \angle DFC = \angle FCD = 72^\circ \end{aligned}$$

Auf Grund der Ähnlichkeitssätze ist dann das Dreieck  $\triangle ABD$  zum Dreieck  $\triangle BFA$  ähnlich. Damit gilt aber für deren Seiten:

$$AB : AF = AD : AB$$

Setzen wir die Länge der Seiten und der Diagonalen  $d$  ein, erhalten wir

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d}{a}$$

Lösen wir die quadratische Gleichung  $d^2 - ad - a^2 = 0$ , so bekommen wir für die gesuchte Diagonale

$$d = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1)$$

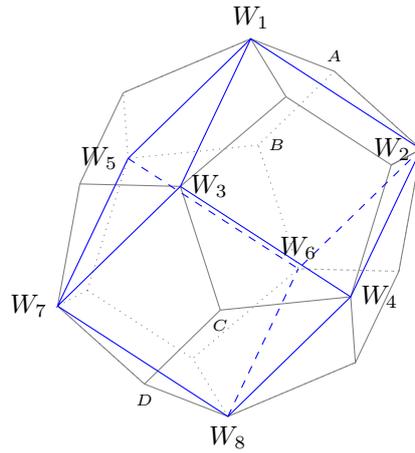
Für den Umkugelradius des Ikosaeders wird damit

$$r_u = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2(\sqrt{5} + 1)^2} = \frac{1}{2}a \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2} = \frac{1}{4}a \sqrt{4 + 5 + 1 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

womit wir die gesuchte Größe erhalten haben.

e) Dodekaeder

Auf Grund der Punktsymmetrie des Dodekaeders sind gegenüberliegende Kanten parallel. Wählen wir ein Paar solcher Kanten  $AB$  und  $CD$  aus, so können wir von  $A$  ausgehend über die Kanten des Dodekaeders zu den Eckpunkten  $W_1$  und  $W_2$  gelangen (siehe Abbildung).



Von  $B$  gelangen wir zu  $W_3$  und  $W_4$  und von den Punkten  $C$  und  $D$  zu  $W_5, W_6, W_7$  und  $W_8$ . Diese Punkte des Dodekaeders bilden dann offenbar einen Würfel. Der exakte Beweis wird später gegeben.

Der entstehende Würfel ist dann so in das Dodekaeder eingeschrieben, dass die Umkugeln beider Körper identisch sind. Die Kantenlänge des Würfels ist dann gerade gleich der Diagonale einer der fünfseitigen Seitenflächen des Dodekaeders.

Bei den Überlegungen zur Umkugel des Ikosaeders sahen wir, dass diese Diagonale  $d$  gleich

$$d = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1)$$

ist. Setzen wir nun die Gleichheit der Umkugeln der betrachteten Körper an und ersetzen die Größen, wird

$$r_u (\text{Dodekader}) = r_u (\text{Würfel}) = \frac{1}{2}a_{(\text{Würfel})}\sqrt{3} = \frac{1}{2}d\sqrt{3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1) \right) \sqrt{3}$$

$$r_u (\text{Dodekader}) = \frac{1}{4}a(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$$

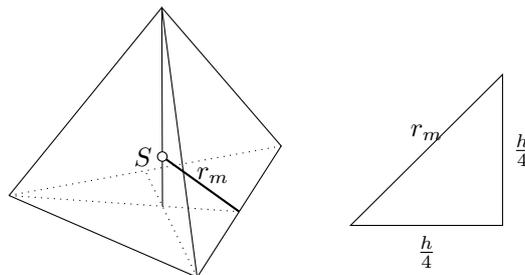
womit wir alle Umkugeln der fünf Platonischen Körper bestimmt haben.

### 3.5.2 Die Mittelkugel

Die Mittelkugel ist diejenige Kugel, auf deren Oberfläche sämtliche Mittelpunkte der Kanten des regelmäßigen Körpers liegen. (siehe Abbildung 11b)

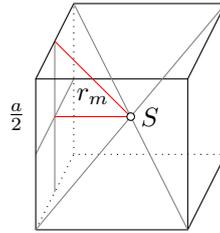
Zur Ermittlung dieser Kugeln wird zuerst wieder der Schwerpunkt bestimmt. Die Berechnung der Kugelnradien geht wie folgt vor sich:

a) Tetraeder



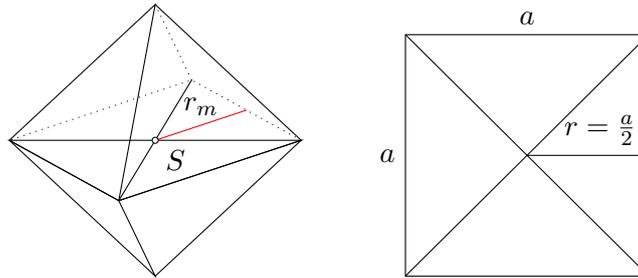
$$h = \frac{a}{3}\sqrt{6} \quad ; \quad r_m = \sqrt{2 \cdot \frac{6a^2}{144}} \quad ; \quad r_m = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

b) Hexaeder



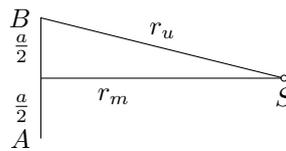
$$r_m = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} \quad ; \quad r_m = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

c) Oktaeder



$$r_m = \frac{1}{2}a$$

d) Ikosaeder



Da die Kanten eines Ikosaeders Tangente der Mittelkugel ist und wir den Umkugelradius kennen, können wir über den Satz des Pythagoras den Mittelkugelradius berechnen

$$r_m = \sqrt{r_u^2 - \frac{1}{4}a^2} \quad ; \quad r_m = \sqrt{\frac{1}{16}a^2(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{1}{14}(4a^2)} \quad ; \quad r_m = \frac{1}{4}a\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

e) Dodekaeder

siehe Bemerkung und Abbildung zum Ikosaeder

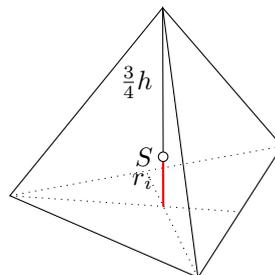
$$r_m = \sqrt{r_u^2 - \frac{1}{4}a^2} \quad ; \quad r_m = \frac{1}{4}a(3 + \sqrt{5})$$

### 3.5.3 Die Inkugel

Die Inkugel ist eine Kugel, die vollständig im Körper enthalten ist, d.h., sie berührt den Körper in allen seinen Flächenmittelpunkten. (siehe Abbildung 11c)

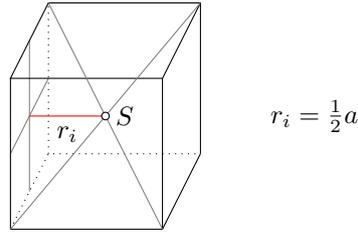
Der Mittelpunkt der Inkugel wird wieder wie in 3.5 bestimmt; der Radius wie folgt:

a) Tetraeder

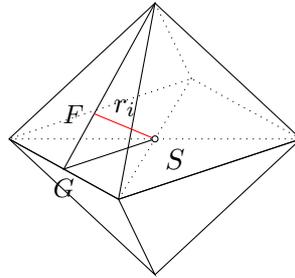


$$r_i = \frac{1}{4}h \quad ; \quad r_i = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$$

b) Hexaeder

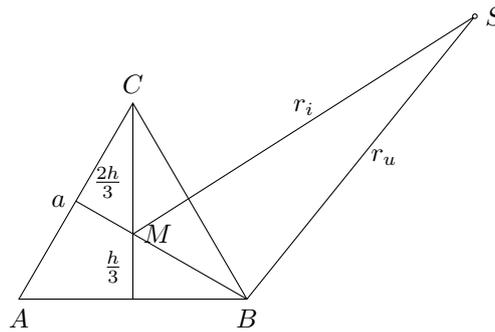


c) Oktaeder



$$FG = \frac{h}{3}; SG = \frac{a}{2} \quad ; \quad h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \quad ; \quad r_i = \sqrt{\frac{1}{12}(3a)^2 - \frac{1}{12}a^2} \quad ; \quad r_i = \frac{1}{6}a\sqrt{6}$$

d) Ikosaeder



Wie bei der Berechnung des Mittelkugelradius, können wir auch hier mittels Satz des Pythagoras und dem bekannten Umkugelradius der gesuchten Kugelradius bestimmen. In der Abbildung sind die Strecken  $BM$  und  $MS$  senkrecht zueinander (räumliche Darstellung).

Die Höhe einer Begrenzungsfläche ist dabei Tangente. Der Berührungspunkt der Inkugel befindet sich dann  $\frac{h}{3}$ ,  $h$  ist die betrachtete Höhe, von der Körperkante entfernt:

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{r_u^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 \cdot 2(5 + \sqrt{5}) - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{12}a\sqrt{9(10 + 2\sqrt{5}) - 48} = \\ &= \frac{1}{12}a\sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \frac{1}{12}a\sqrt{3}\sqrt{9 + 6\sqrt{5} + 5} = \frac{1}{12}a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

e) Dodekaeder Entsprechend der Vorgehensweise beim Ikosaeder verfahren wir nun bei der Berechnung des Inkugelradius des Dodekaeders.

Hier befinden sich die Berührungspunkte der Inkugel jeweils im Mittelpunkt einer Begrenzungsfläche der Körpers, also eines regelmäßigen Fünfecks. Dabei erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{r_u^2 - \left(\frac{1}{10}a\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 3(1 + \sqrt{5})^2 - \frac{1}{100}a^2(50 + 10\sqrt{5})} = \\ &= \frac{1}{20}a\sqrt{75(1 + \sqrt{5})^2 - 200 - 40\sqrt{5}} = \frac{1}{20}a\sqrt{250 + 11\sqrt{5}10} = \frac{1}{20}a\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} \end{aligned}$$

### 3.6 Oberflächen und Volumina

Die fünf Platonischen Körper sind von ihrem Äußeren her nun charakterisiert. Da diese Körper nicht nur theoretisch sondern auch in der Praxis vorkommen, macht es sich erforderlich, über mehr als nur das Aussehen der Körper Bescheid zu wissen. Wenden wir uns zunächst den Oberflächenformeln dieser Körper zu.

- a) Tetraeder ... bestehend aus vier gleichseitigen Dreiecken, da  $f = 4$ ,  $n = 3$  und Regelmäßigkeit vorausgesetzt waren. Nach der Definition müssen alle diese Dreiecke zueinander kongruent sein, d.h. sie besitzen alle den gleichen Flächeninhalt:

$$A = 4A_{\text{Dreieck}} = 4\left(\frac{1}{2}ah\right) = 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = a^2\sqrt{3}$$

- b) Würfel ... allgemein bekannt, d.h.,  $A = 6a^2$

- c) Oktaeder ... besteht aus 8 regelmäßigen, zueinander kongruenten Dreiecken

$$A = 8 \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$$

- d) Ikosaeder ... besteht aus 20 kongruenten Dreiecken

$$A = 5a^2\sqrt{3}$$

- e) Dodekaeder ... besteht aus zwölf kongruenten regelmäßigen Fünfecken, welche eine Fläche von

$$\frac{1}{4}a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

besitzen:

$$A = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Gehen wir zur Volumenberechnung über:

- a) Tetraeder: Ausgehend von der Volumenformel einer Pyramide  $V = \frac{1}{3}A_g h$  (\*\*).

Die Grundfläche ist ein Dreieck:  $A_g = \frac{1}{2}ah_a$ .

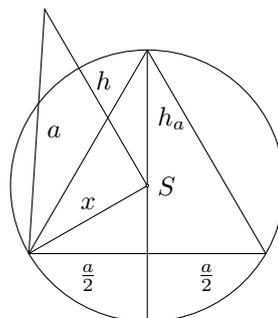
Die Höhe  $h_a$  ist mittels Satz der Pythagoras berechenbar

$$h_a = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

und damit für die Grundfläche

$$A_g = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

Die Berechnung der Höhe des Tetraeders ist aus folgender Abbildung ersichtlich:



Daraus ergibt sich für die Hilfsgröße  $x$

$$x = \sqrt{\frac{1}{36}(3a^2) + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

und für die gesuchte Höhe

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$$

Setzen wir in (\*\*) die gefundenen Größen ein, ergibt sich

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$$

b) Hexaeder ... allgemein bekannt:  $V_{\text{Würfel}} = a^3$

c) Oktaeder:

Die Herleitung der Volumenformel ist analog zu der des Tetraeders. Man teilt das Oktaeder in zwei vierseitige Pyramiden, welche ein Quadrat als Grundfläche besitzen. Die Seitenlänge dieses Quadrats ist gleich der Kantenlänge des Oktaeders. Die Höhe bestimmt man wie beim Tetraeder (siehe Abbildung vorhergehende Seite), so dass man erhält:

$$V_{\text{Oktaeder}} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$$

d) Ikosaeder:

Man stelle sich das Ikosaeder als aus 20 dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt vor. Dabei sind die Seitenflächen des Ikosaeders die Grundflächen dieser Pyramiden. Die Höhen dieser Pyramiden werden dann durch den Inkugelradius gestellt.

Dass eine derartige Zerlegung des Ikosaeders möglich ist, folgt wieder aus der Punktsymmetrie der Körpers.

Das Volumen des Ikosaeders setzt sich also aus 20 der beschriebenen Pyramiden zusammen. Wir erhalten:

$$V = 20 \left( A_g \cdot \frac{1}{3}h \right) = 20 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \right) \left( \frac{1}{12}a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5}) \right) = 20 \left( \frac{1}{144}a^3 \cdot 3(+\sqrt{5}) \right)$$

$$V_{\text{Ikosaeder}} = \frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$$

e) Dodekaeder:

Wir benutzen das gleiche Verfahren wie bei dem Ikosaeder. Das Dodekaeder kann in zwölf fünfseitige Pyramiden, welche jeweils eine Seitenfläche des Dodekaeders als Grundfläche und den Inkugelradius als Höhe besitzen.

Die Grundfläche hat dabei eine Fläche von  $\frac{1}{4}a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ . Wir erhalten

$$V = 12 \left( A_g \cdot \frac{1}{3}h \right) = 12 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \left( \frac{1}{20}a\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{20}a^3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} = \frac{1}{4}a^3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2(25 + 11\sqrt{5})}$$

$$V_{\text{Dodekaeder}} = \frac{1}{4}a^3(15 + 7\sqrt{5})$$

Wenn wir die Ergebnisse zusammenfassen ist von Interesse, wie sich die Oberflächen zu den Volumina der Platonischen Körper verhalten. Bekanntlich ist die Kugel der Körper, welcher das größte Volumen bei vorgegebener Oberfläche besitzt.

Körper	Oberfläche	Volumen
Tetraeder	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$
Hexaeder	$6a^2$	$a^3$
Oktaeder	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$
Ikosaeder	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$
Dodekaeder	$3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}a^3(15 + 7\sqrt{5})$

Setzen wir für alle Platonischen Körper eine Kantenlänge von 1 an, so erhalten wir:

Körper	$v = \frac{\text{Volumen}}{\text{Oberfläche}}$	Volumen
Tetraeder	0,067	0,118
Hexaeder	0,167	1,000
Oktaeder	0,136	0,471
Ikosaeder	0,250	2,181
Dodekaeder	0,371	7,663

Stellen wir alle fünf Platonischen Körper mit gleicher Oberfläche her, so verhalten sich die Volumina der Körper wie

$$\begin{array}{cccccc} \text{Tetraeder} & : & \text{Oktaeder} & : & \text{Würfel} & : & \text{Ikosaeder} & : & \text{Dodekaeder} \\ 4 & : & 8 & : & 10 & : & 15 & : & 22 \end{array}$$

Konstruieren wir die Körper mit einer konstanten Kantenlänge, so verhalten sich die Volumina

$$\begin{array}{cccccc} \text{Tetraeder} & : & \text{Oktaeder} & : & \text{Würfel} & : & \text{Ikosaeder} & : & \text{Dodekaeder} \\ 2 & : & 8 & : & 17 & : & 36 & : & 121 \end{array}$$

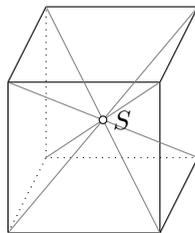
d.h., in zwei Dodekaeder kann man 121 Tetraeder der gleichen Kantenlänge unterbringen.

### 3.7 Winkel in Platonischen Körpern

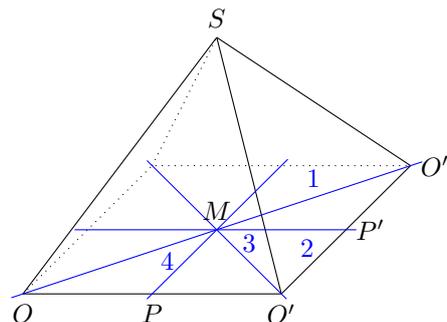
Die Mantelflächen der Platonischen Körper bestehen aus regelmäßigen Vielecken. Hier soll nun im Weiteren untersucht werden, wie groß die Winkel zwischen zwei Seitenflächen sind. Die Bewältigung dieses Problems erfordert umfangreiche Vorbetrachtungen.

Gegeben sei ein Platonischer Körper, wobei  $p$  die Anzahl der Ecken einer Fläche und  $q$  die Anzahl der in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten sind. Zur Veranschaulichung nehmen wir den Würfel mit  $p = 4$  und  $q = 3$ .

Wir bestimmen den Schwerpunkt des Körpers (siehe 3.4) und verbinden diesen Punkt mit allen Eckpunkten des Körpers. Für den Würfel entstehen somit 6 zueinander kongruente nichtregelmäßige Pyramiden (siehe Abbildung)

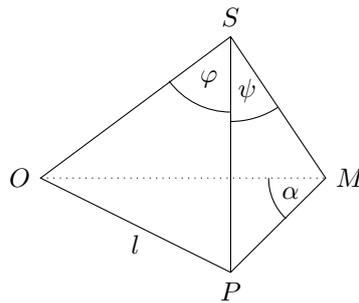


Allgemeine gilt, wenn  $f$  die Anzahl der Seitenflächen ist, dass  $f$  kongruente Pyramiden entstehen. Wir nehmen eine solche Pyramide heraus und betrachten diese. In jede solche Pyramide kann man  $p$  Symmetrieebenen legen. Hier ist dies wiederum nur für eine aus einem Würfel herausgeschnittene Pyramide getan:



Das Ergebnis dieses Verfahrens sind  $2p$  unregelmäßige zueinander kongruente Tetraeder.

Im Folgenden soll solch ein Tetraeder betrachtet werden. Die nachfolgende Abbildung zeigt einen derartigen Körper:



In solch einem Tetraeder existieren drei charakteristische rechte Winkel, und zwar sind dies

- 1.) Winkel  $\angle PMS$ , da der Radius eines Kreises stets senkrecht auf einer Fläche steht.
- 2.) Winkel  $\angle OPS$ , aus gleichem Grund.
- 3.) Winkel  $\angle OPM$ , aus Symmetriegründen, da durch  $P$  und  $M$  eine Symmetrieebene verläuft.

Dagegen ist Winkel  $\alpha$  gleich dem  $2p$ -ten Teil des Vollwinkels, d.h.

$$\alpha = \angle OMP = \frac{1}{2p} 360^\circ = \frac{\pi}{p}$$

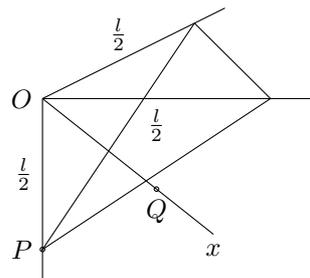
Der Winkel  $\angle SPM$  ist gleich dem halben von uns gesuchten Flächenwinkel, da an die Fläche  $PSM$  ein kongruentes Dreieck anschließt. Es gilt:

$$\angle SPM = \pi - \frac{\pi}{2} - \psi$$

und damit für den Flächenwinkel

$$\angle FW = \pi - 2\psi \tag{3.4}$$

Jetzt nimmt man eine Körperecke des ursprünglichen Platonischen Körpers mit den angrenzenden Kanten. Halbiert man die in dieser Ecke zusammenlaufenden Kanten und verbindet die entstandenen Mittelpunkte, so entsteht eine Fläche. Gezeigt ist dies für eine Würfecke in der nachfolgenden Abbildung:



Das entstandene Schnittgebilde ist tatsächlich eine Fläche, da zum einen die Eckpunkte dieser Figur auf der Kugel um  $O$  mit der halben Kantenlänge  $l$  des Körpers als Radius liegen und zum anderen alle Eckpunkte des Schnittes auf der Mittelkugel des Platonischen Körpers liegen.

D.h. also, bei  $q$  in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten entsteht ein  $q$ -Eck; im Falle des Würfels ein Dreieck.

Aus Symmetriegründen muss die entstandene Fläche regelmäßig sein. Es interessiert nun die Seitenlänge dieses  $q$ -Ecks. Wegen der Regelmäßigkeit genügt es, eine Seite, bezeichnet mit  $x$ , zu berechnen. Aus dem Kosinussatz folgt

$$x^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos\left(\frac{\pi}{p}(p-2)\right) = l^2\left(2 - 2\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right)\right)$$

Formen wir mittels des Additionstheorems

$$\cos y = 2 \cos^2 \frac{1}{2y} - 1$$

um, so erhalten wir

$$x^2 = l^2 \left( 2 - 2 \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right) - 1 \right) \right) = 4l^2 \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right) \right)$$

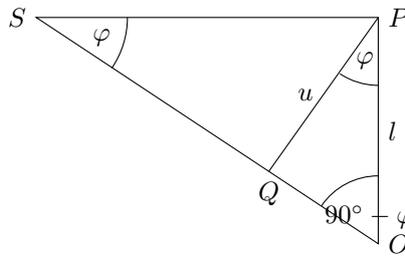
Umformen mit  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  ergibt

$$x^2 = 4l^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right) \rightarrow x = 2l \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$$

und auf Grund der Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$

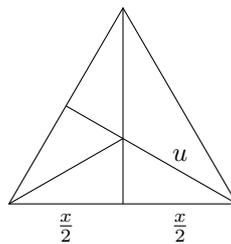
$$x = 2l \cos \left( \frac{\pi}{p} \right) \tag{3.5}$$

$Q$  sei jetzt der Mittelpunkt des Umkreises. Aus Symmetriegründen geht die Strecke  $OS$  durch das erhaltene  $q$ -Eck. Klappt man jetzt des Dreieck  $\triangle OPS$  heraus, so ergibt sich: (siehe Abbildung)



$$\cos \varphi = \frac{u}{l} \rightarrow u = l \cdot \cos \varphi \tag{3.6}$$

wobei  $u$  der Umkreisradius des  $q$ -Ecks ist. Der Umkreisradius lässt sich aber auch auf eine andere Weise berechnen. Man nimmt das gefundene  $q$ -Eck. Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des  $q$ -Ecks. Die Mittelsenkrechten halbieren damit eine  $q$ -Eckseite. (siehe Abbildung)



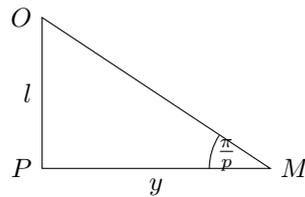
$$\sin \left( \frac{\pi}{q} \right) = \frac{x}{2u} \rightarrow u = \frac{x}{2 \sin \left( \frac{\pi}{q} \right)} \rightarrow u = \frac{l \cos \left( \frac{\pi}{p} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{q} \right)} \tag{3.7}$$

Gleichungen (3.6) und (3.7), welche beide den Umkreisradius darstellen, werden gleichgesetzt, so dass wir erhalten:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \left( \frac{\pi}{p} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{q} \right)}$$

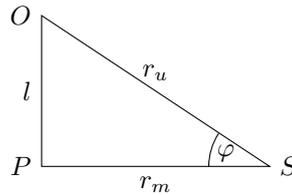
Damit ist der Winkel  $\varphi$  ermittelt.

Im Weiteren sollen noch  $\psi$  und darüber hinaus die Beziehungen für Um-, Mittel- und Inkugelradien bestimmt werden. Dafür klappen wir als erstes die Fläche  $OPM$  heraus.



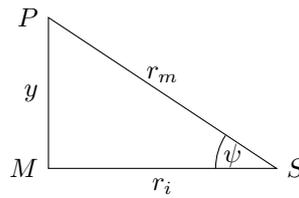
$$\cot\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{y}{l} \quad \text{und} \quad y = l \cdot \cot\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

Als nächstes wird die Fläche  $OPS$  herausgeklappt:



$$\text{Radius der Mittelkugel } r_m = l \cot \varphi \quad \text{Radius der Umkugel } r_u = \frac{l}{\sin \varphi}$$

Zur Ermittlung des Winkels  $\psi$  bezieht man sich auf die Fläche  $PMS$ :



$$\cos \psi = \frac{r_i}{r_m} \tag{3.8}$$

und nach dem Satz des Pythagoras

$$r_i^2 = r_m^2 - \left(l \cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)^2$$

Zur Bestimmung von  $\sin \varphi$  und zur Vereinfachung der bisher gefundenen Ausdrücke wird an dieser Stelle eine Hilfsgröße eingeführt:

$$k^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

so dass wird:

$$\sin \varphi = \frac{k}{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

Dass dies gültig ist, lässt sich überprüfen mittels Additionstheorem überprüfen:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{k^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} = \frac{k^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} = 1$$

Somit lässt sich der Umkreisradius  $r_u$  ausdrücken als

$$r_u = \frac{l \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{k}$$

Der Mittelkugelradius wird

$$r_m = \frac{l \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{k \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)} = \frac{l \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{k}$$

Für den Inkugelradius

$$\begin{aligned} r_i^2 &= \frac{l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{k^2} - l^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} = l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \right) = \\ &= l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} \right) = l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \left( \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{k^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$r_i = \frac{l \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{k}$$

Aus (3.8) erhalten wir für den Winkel  $\psi$ :

$$\cos \psi = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

d.h. für den Flächenwinkel

$$\angle_{\text{Flächenwinkel}} = \pi - 2\psi = 2 \arcsin \frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

Mittels dieser Gleichung kann man die Flächenwinkel der fünf platonischen Körper berechnen und erhält:

Tetraeder	70°32'44"
Hexaeder	90°
Oktaeder	109°28'14"
Ikosaeder	116°35'5"
Dodekaeder	138°11'26"

# Kapitel 4

## Konstruktionen und Projektionen

In den vorangestellten Kapiteln wurden wichtige Eigenschaften der Platonischen Körper, sowohl wesentliche Merkmale als auch charakteristische Eigenschaften, aufgezeigt. Wir wissen bereits viel über diese Körper, insbesondere über deren Aussehen.

Deshalb sollen im Folgenden diese Körper exakt konstruiert werden.

Dabei verwenden wir hauptsächlich die Euklidische Konstruktion und geben ohne Beweis weitere Möglichkeiten an.

Abschließend werden Projektionen dieser Körper dargestellt. Es ist interessant und überraschend, in wie viel verschiedenen Varianten, aus welchen Perspektiven die Körper betrachtet werden können. Hier sollen einige besonders schöne und eigenartige Darstellungen Raum finden.

Da wir eine Reihe von Hilfskonstruktionen benötigen werden, stellen wir diese an den Anfang.

### 4.1 Hilfskonstruktionen

In den folgenden Abschnitten werden wir Hilfskonstruktionen, wie z.B. die Konstruktion von regelmäßigen Sechsecken, Fünfecken usw. benötigen. Diese Konstruktionen gehen wir jetzt an:

#### Regelmäßige n-Ecke

Zuerst ergibt sich die Frage, ob und welche regelmäßigen Vielecke konstruiert werden können. Ist es möglich mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Fünfeck oder Siebeneck zu konstruieren?

Im Jahre 1796 wurde diese Frage von dem erst 19jährigen deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß eindeutig beantwortet. Auch wenn dies "schon" im 18. Jahrhundert war, ist der Nachweis auch heute nicht zum Elementarwissen zu zählen.

Nach Gauß kann ein regelmäßiges n-Eck dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn die ungeraden Primfaktoren von  $n$  paarweise verschiedene "Fermat-Primzahlen" sind. Fermat-Primzahlen sind darstellbar in der Form:

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

Die einzigen heute bekannten Primzahlen dieser Art sind:

$$F_0 = 3; \quad F_1 = 5; \quad F_2 = 17; \quad F_3 = 257; \quad F_4 = 65537$$

Schon für  $k = 5$  ergibt sich keine Primzahl mehr. Bis jetzt ist bis  $k = 16$  nachgewiesen, dass  $F_k$  keine weiteren Primzahlen darstellt. Die Mehrzahl der Mathematiker vermutet, dass es dann genannten fünf

Fermatschen Primzahlen keine weiteren gibt. Der Beweis ist noch offen.

Wir können also folgenden Schluss ziehen:

Für  $n = 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 16; 17; 20; \dots$  usw. sind die regelmäßigen Vielecke konstruierbar. Ein regelmäßiges Sieben- bzw. Neuneck ist allein mit Zirkel und Lineal nicht exakt konstruierbar.

Das regelmäßige Fünfeck, sowie das 17-Eck, wurden von Dudeney und Richmond konstruiert. Die Konstruktion des 5-Ecks war aber schon Euklid bekannt.

Im Jahre 1832 gab erstmals Richelot eine Konstruktionsbeschreibung für das regelmäßige 257-Eck.

Zehn Jahre seines Lebens opferte Hermes für die Konstruktion des 65537-Ecks, welche er 1879 beendete.

Für uns ist hier nur interessant, dass die Seitenflächen aller fünf Platonischen Körper nur mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

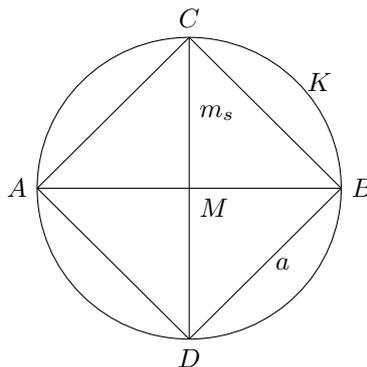
#### 4.1.1 Quadratkonstruktion

Zuerst stellen wir uns die Aufgabe ein regelmäßiges Viereck, d.h. ein Quadrat, als Seitenfläche des Hexaeders zu konstruieren, welches einen gegebenen Kreis als Umkreis besitzt.

Konstruktionsbeschreibung:

Es sei der Kreis  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und ein beliebiger Durchmesser  $AB$  gegeben. Man errichte auf  $AB$  in  $M$  die Mittelsenkrechte  $m_s$ , welche den Kreis  $K$  in den Punkten  $C$  und  $D$  schneidet.

Verbindet man die Punkte  $C$  und  $D$  paarweise mit  $A$  und  $B$ , so ist die entstandene Figur  $ABCD$  das gesuchte regelmäßige Viereck.



Begründung der Konstruktion: Das entstandene n-Eck ist sicher ein Viereck, da die Mittelsenkrechte  $m_s$  nicht mit  $AB$  zusammenfallen kann und  $m_s$  als Sehne des Kreises zwei verschiedene Schnittpunkte mit diesem gemeinsam hat. Da  $m_s$  in  $M$  errichtet wurde, ist die Mittelsenkrechte sogar Durchmesser des Kreises  $K$ , womit die Diagonalen  $AB$  und  $CD$  des konstruierten Vierecks gleich lang sind. Da diese Diagonalen sich in  $M$  halbieren und nach Konstruktion senkrecht aufeinander stehen, kann  $ABCD$  nur ein Quadrat sein, da gleichlange sich halbierende und senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für ein Quadrat sind.

$ABCD$  ist außerdem auch das gesuchte Quadrat, da offensichtlich alle vier Punkte auf der Peripherie des Kreises liegen.

Mittel Satz des Pythagoras können wir den Zusammenhang von Radius  $r$  und Seitenlänge  $a$  des Quadrates bestimmen. Es ist:

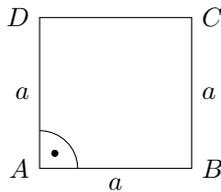
$$a = \sqrt{2}r$$

Selbstverständlich ist diese Konstruktion etwas umständlich. Ohne Beweis geben wir noch die übliche Konstruktion an:

Man zeichne eine Strecke  $AB$  der Länge  $a$ . Auf  $AB$  errichte man in den Punkten  $A$  und  $B$  Höhen. Die Schnittpunkte dieser Höhen mit Kreisen (Radius =  $a$ ) um die Punkte  $A$  und  $B$ , welche in der gleichen

Halbebene bezüglich der Geraden durch  $A$  und  $B$  liegen, seien  $C$  und  $D$ .

Verbindet man  $C$  mit  $D$ , so ist die entstandene Figur  $ABCD$  das gesuchte Quadrat, welches die Seitenlänge  $a$  besitzt.

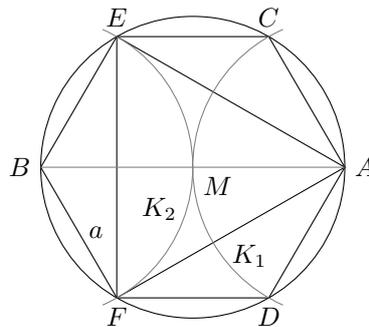


#### 4.1.2 Sechseck- und Dreieckkonstruktion

Die Aufgabe besteht darin, ein Sechseck bzw. Dreieck zu konstruieren, welches einen gegebenen Kreis  $K$  als Umkreis besitzt.

Konstruktionsbeschreibung: Es sei der Kreis  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und ein beliebiger Durchmesser  $AB$  gegeben. Um den Punkt  $A$  zeichne man einen Kreis  $K_1$  mit einem Radius von  $AM$ .

Die Schnittpunkte der Kreise  $K$  und  $K_1$  seien  $C$  und  $D$ . Um Punkt  $B$  zeichne man einen Kreis  $K_2$  mit dem Radius  $BM$ . Die Schnittpunkte von  $K$  und  $K_2$  seien die Punkte  $E$  und  $F$ .



Verbindet man  $A$  mit  $C$ ,  $C$  mit  $E$ ,  $E$  mit  $B$ ,  $B$  mit  $F$ ,  $F$  mit  $D$  und  $D$  mit  $A$ , so ist die entstehende Figur  $ACEBFD$  das gesuchte regelmäßige Sechseck. Verbindet man  $A$  mit  $E$ ,  $E$  mit  $F$  und  $F$  mit  $A$ , so entsteht das gesuchte regelmäßige Dreieck, welches den Kreis  $K$  als Umkreis besitzt.

Begründung der Konstruktion: Sei  $a$  der Radius des gegebenen Kreises  $K$ . Dann ist, da  $AB$  Durchmesser und  $M$  Mittelpunkt von  $K$  sind:

$$AM = BM = a$$

Auf Grund der Konstruktion ist dann aber auch

$$AC = AD = BE = BF = a$$

womit die Dreiecke  $\triangle ACM$ ,  $\triangle ADM$ ,  $\triangle BEM$  und  $\triangle BFM$  gleichseitige Dreiecke sind. Da in gleichschenkligen Dreiecken alle Innenwinkel gleich  $60^\circ$  sind, gilt:

$$\angle AMC = \angle AMD = \angle BME = \angle BMF = 60^\circ$$

Weiterhin sind die Winkel  $\angle CME$  und  $\angle FMD$  als Scheitelwinkel gleich groß. Da aber die Summe der Winkel  $\angle AMC$ ,  $\angle AMD$ ,  $\angle BME$ ,  $\angle BMF$ ,  $\angle CME$  und  $\angle FMD$  den Vollwinkel um  $M$  ergibt, müssen auch die Winkel  $\angle CME$  und  $\angle FMD$  gleich  $60^\circ$  sein, womit die Dreiecke  $\triangle CME$  und  $\triangle FMD$  ebenfalls gleichseitig werden und eine Seitenlänge  $a$  besitzen.

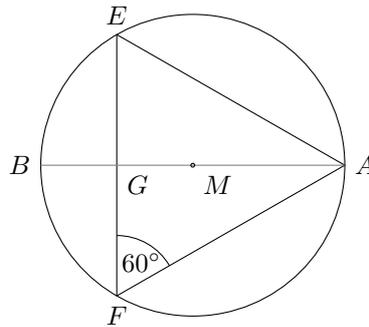
Damit ist die Figur  $ACEBFD$  tatsächlich ein regelmäßiges Sechseck, welches auf Grund der Konstruktion von dem gegebenen Kreis umfasst wird.

Da nun in einem regelmäßigen  $n$ -Eck Diagonalen, welche eine gleiche Anzahl von Ecken "überspringen", gleich lang sind, gilt auch

$$AE = EF = FA$$

und die Figur  $AEF$  ist das gesuchte regelmäßige Dreieck. Die Begründung der Konstruktion ist gegeben.

Wie gezeigt wurde, besitzt das Sechseck gerade den Radius des Kreises  $K$  als Seitenlänge. Für das Dreieck überlegen wir wie folgt:



Die Dreiecksseite  $EF$  schneidet den Radius  $BM$  im Punkt  $S$ . Da der Winkel  $\angle FEA = 60^\circ$  und damit aus Symmetriegründen auch die Winkel  $\angle GEM$ ,  $\angle MEA$ ,  $\angle GFM$ ,  $\angle MFA$ ,  $\angle BFG$  und  $\angle BEG$  gleich  $30^\circ$  sind, halbiert  $C$  die Strecke  $BM$ .

Damit ist aber  $GM$  gleich dem halben Radius und wir erhalten über den Satz des Pythagoras

$$\frac{1}{2}a_{\text{Dreieck}} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{a}a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a_{\text{Dreieck}} = a\sqrt{3}$$

Auf die allgemein übliche Konstruktion von Dreiecken wird hier nicht eingegangen.

### 4.1.3 Fünfeck- und Zehneckkonstruktion

Es ist ein regelmäßiges Fünfeck-, als Seitenfläche des Pentagondoekaeders, bzw. ein Zehneck zu konstruieren, welches einen gegebenen Kreis als Umkreis besitzt.

Konstruktionsbeschreibung: Es sei der Kreis  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Durchmesser  $AB$  gegeben. Auf  $AB$  errichte man in  $A$  eine Senkrechte  $s_A$ . Um  $A$  zeichne man mit einem Radius von  $\frac{MA}{2}$  einen Kreis, welcher  $s_A$  in  $C$  und  $D$  schneidet. Man verbinde  $C$  mit  $M$  und zeichne einen Kreis um  $C$  mit einem Radius  $\frac{MA}{2}$ . Der Schnittpunkt dieses Kreises mit  $CM$  sei  $E$ .

Nun trage man zehnmal von  $A$  aus im mathematisch positiven Sinne die Strecke  $EM$  auf der Peripherie des Kreises ab, und erhält dabei die Punkte  $F, G, H, I, B, K, L, N, P$ . (siehe Abbildung) Verbindet man die Punkte  $A$  mit  $F$ ,  $F$  mit  $G$ ,  $G$  mit  $H$ ,  $H$  mit  $I$ ,  $I$  mit  $B$ ,  $B$  mit  $K$ ,  $K$  mit  $L$ ,  $L$  mit  $N$ ,  $N$  mit  $P$  und  $P$  mit  $A$ , so ist die entstandene Figur  $AFGHIBKLNPA$  das gesuchte regelmäßige Zehneck. Verbindet man in diesem Zehneck fünf nicht benachbarte Ecken, z.B.  $A, G, I, K$  und  $N$ , so entsteht das zu konstruierende regelmäßige Fünfeck  $ANKIG$ .

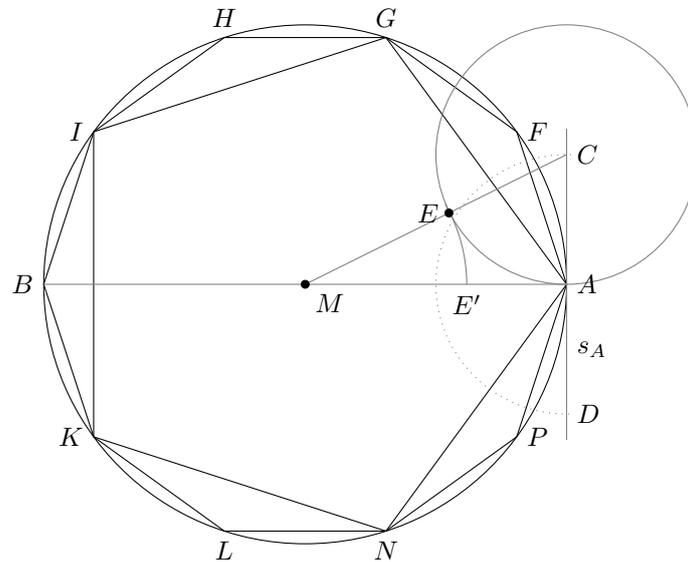
Begründung der Konstruktion:

Sei  $r$  der Radius des gegebenen Kreises  $K$ , so dass

$$BM = AM = r$$

ist. Nach der Konstruktion ist dann die Strecke  $AC$  gleich dem Radius  $\frac{r}{2}$ . Da der Winkel  $\angle MAC$  ein rechter ist, erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras

$$CM = \sqrt{AM^2 + \frac{1}{4}AM^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{5}$$

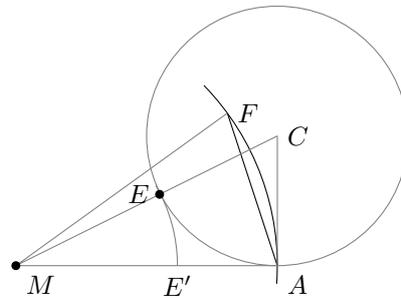


Die Länge der abzutragenden Strecke  $EM$  ist dann

$$EM = CM - \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$$

Damit haben im Dreieck  $AMF$  die Seiten die Längen

$$AM = FM = r \quad \text{und} \quad AF = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$$



Über den Kosinussatz ergibt sich dann für den Kosinus des Winkels  $\angle AMF$ :

$$\cos \angle AMF = \frac{\frac{1}{4}r^2(\sqrt{5} - 1)^2 - r^2 - r^2}{-2r \cdot r} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$$

Damit die Strecke  $EM$  tatsächlich zehnmal abtragbar ist, und die konstruierte Figur unser gesuchtes regelmäßiges Zehneck darstellt, muss der fünffache Winkel von  $AMF$  einen  $180^\circ$ -Winkel darstellen. Über das Additionstheorem:

$$\cos(5x) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$$

erhalten wir:

$$\cos(5\angle AMF) = 16 \left(\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\right)^5 - 20 \left(\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\right)^3 + 5(1 + \sqrt{5}) =$$

$$\begin{aligned}
&= 16 \left( \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \right)^2 \left( \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \right)^3 - 20 \left( \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \right) + 5(1 + \sqrt{5}) = \\
&= \frac{1}{16} ((3 + \sqrt{5})^2(1 + \sqrt{5}) - 10(3 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) + 20 + 20\sqrt{5}) = \\
&= \frac{1}{16} ((14 + 6\sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) - 10(8 + 4\sqrt{5}) + 20 + 20\sqrt{5}) = \\
&= \frac{1}{16} (14 + 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} + 30 - 80 - 40\sqrt{5}) + 20 + 20\sqrt{5} = \frac{1}{16} (-16) = -1
\end{aligned}$$

womit der Winkel  $\angle AMF$  zu einem gestreckten Winkel wird. Damit ist aber der Winkel  $\angle AMF$  gleich  $\frac{2\pi}{10}$ , womit die Strecke  $EF$  genau zehnmal von  $A$  auf der Kreisperipherie abtragbar ist, so dass wir wieder zum Ausgangspunkt zurückkommen.

Die konstruierte zehneckige Figur  $AFGHIBKLN$  ist ein regelmäßiges Zehneck.

Dass die Figur  $AGIKN$  dann das gesuchte regelmäßige Fünfeck ist, folgt sofort aus der Konstruktion. Ebenso die Tatsache, dass der gegebene Kreis beide n-Ecke umfasst. Der Beweis ist erbracht.

Wie gezeigt besteht zwischen der Seitenlänge  $EM$  des regelmäßigen Zehnecks und dem Radius des gegebenen Kreises die Beziehung

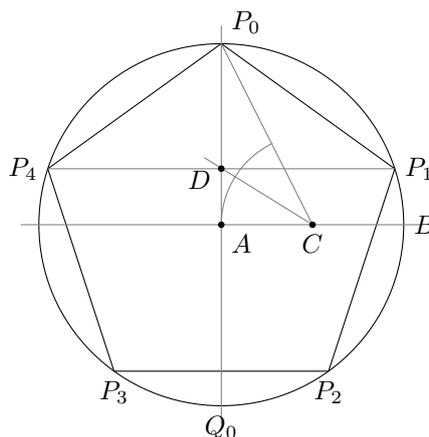
$$EM = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$$

Für das regelmäßige Fünfeck erhalten wir, ohne Beweis:

$$a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Abschließend geben wir noch eine weitere Konstruktion für das regelmäßige Fünfeck, aber ohne Begründung, an:

Gegeben sei ein Kreis  $K$  mit einem Radius  $AB = r$ .  $A$  sei der Mittelpunkt dieses Kreises. Um diesen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck einzubeschreiben, zeichne man in  $A$  die Senkrechte zu  $AB$ , welche den Kreis in den Punkten  $P_0$  und  $Q_0$  schneide.



Man halbiere die Strecke  $AB$  in dem Punkt  $C$  und verbinde  $C$  mit  $P_0$ . Nun konstruiere man die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle ACP_0$ . Der Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden mit  $AP_0$  sei der Punkt  $D$ .

Errichtet man nun in  $D$  die Senkrechte bezüglich  $AP_0$ , so schneidet diese Gerade den Kreis in den Punkten  $P_1$  und  $P_4$ .

$P_0P_1$  ist dann die gesuchte Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks.

#### 4.1.4 Der Goldene Schnitt

Im Abschnitt 3.5.1 wurde gezeigt, dass zwischen der Länge der Diagonalen und der Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks die Beziehung

$$a : (d - a) = d : a$$

besteht. Das Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung ergab:

$$d = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1) \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{1}{2}d(\sqrt{5} + 1)$$

Die dabei auftretende algebraische Zahl  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$  wird mit dem griechischen Buchstaben  $\tau$  bezeichnet und besitzt große Bedeutung. Sie charakterisiert gerade das Teilverhältnis beim Goldenen Schnitt. Johannes Kepler schrieb zu diesem Teilverhältnis:

”Unter den stetigen Proportionen existiert eine einzige ausgezeichnete Art, die göttliche Proportion, wobei von den drei Größen die zwei kleineren zusammen die größere ergeben, oder wo ein Ganzes so in zwei Teile zerlegt wird, dass zwischen den Teilen und dem Ganzen eine stetige Proportion entsteht.

Eine Eigentümlichkeit dieser Proportion besteht darin, dass aus dem größeren Teil und dem Ganzen wieder eine gleiche Proportion gebildet werden kann; was vorher der größere Teil war, wird dabei der kleinere; was vorher das Ganze war, wird der größere Teil, und die Summe beider spielt nun die Rolle des Ganzen.

Das geht unendlich weiter, immer bleibt die göttliche Proportion bestehen ...”

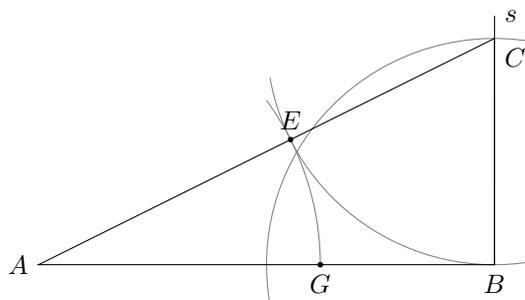
Übertragen wir dies in die uns gebräuchliche mathematische Form, so sagen wir:

Eine Strecke  $a$  heißt nach dem Goldenen Schnitt (oder stetig) geteilt, wenn ihr großer Abschnitt  $x$  mittlere Proportionale der Gesamtstrecke und des verbleibenden Abschnittes ist, d.h. es gilt

$$a : x = x : (a - x)$$

Damit teilt die Seite eines regelmäßigen Fünfecks seine Diagonale offenbar (siehe obige Proportion) im Goldenen Schnitt.  $\tau$  ist dann gleich dem entstehenden Teilverhältnis. Wenden wir uns der Konstruktion dieses Teilverhältnisses zu.

Konstruktionsbeschreibung: Es sei die Strecke  $AB$  der Länge  $a$  gegeben. Um diese Strecke stetig zu teilen, errichte man zuerst in  $B$  eine Senkrechte  $s$ . Um  $B$  zeichne man einen Kreis mit einem Radius von  $\frac{1}{2}a$ . Dieser Kreis schneide  $s$  in den Punkten  $C$  und  $D$ .



Nun verbinde man, o.B.d.A. sei es  $G$ , einen der beiden Punkte mit  $A$ . Zeichnet man nun einen Kreis um  $C$ , welcher durch den Punkt  $B$  geht, so hat dieser Kreis mit  $AC$  zwei Schnittpunkte, von denen der zwischen  $A$  und  $C$  liegende  $E$  sei.

Zeichnet man zum Abschluss einen Kreis um  $A$ , welcher durch  $E$  geht, so hat dieser Kreis mit  $AB$ ,

zwischen  $A$  und  $B$  den Schnittpunkt  $G$ , welcher dann die Strecke  $AB$  im Goldenen Schnitt teilt. (siehe Abbildung)

Begründung der Konstruktion: Sei  $a$  die Länge der Strecke  $AB$ , auf der der konstruierte Punkt  $G$  liege. Da  $s$  Senkrechte auf  $AB$  ist, bildet die Strecke  $AB$  eine Tangente des Kreises um  $C$  mit dem Radius  $\frac{1}{2}a$ . Weiterhin sei der gleichzeitig mit  $E$  entstehende Punkt  $F$ , so dass  $AF$  offenbar eine Sekante des betrachteten Kreises darstellt.

Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz erhalten wir damit die Beziehung

$$AE \cdot AF = AB^2$$

Da die Strecke  $EF$  Durchmesser des Kreises um  $C$  ist, und dieser einen Radius gleich  $\frac{1}{2}a$  besitzt, ergibt sich

$$AE \cdot (AE + AB) = AB^2$$

Da nach Konstruktion  $AE = AG$  ist, folgt

$$AG \cdot (AG + AB) = AB^2$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$AG^2 + AG \cdot AB = AB^2 \rightarrow AG^2 = AB^2 - AG \cdot AB \quad \rightarrow \quad AG^2 = AB(AB - AG)$$

Da aber die Differenz der Strecken  $AB$  und  $AG$  gleich dem kürzeren Abschnitt der Teilung ist und wir  $AB$  durch  $a$  und  $AG$  durch  $x$  ersetzen, ergibt sich

$$x^2 = a(a - x) \quad \text{also} \quad x : (a - x) = a : x$$

womit die Strecke  $AB$  in  $G$  im Goldenen Schnitt geteilt ist. Der Beweis ist erbracht.

Im Abschnitt 4.1.3 wurde die Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks angegeben. Vergleicht man, so erkennt man, dass die Teilung nach dem Goldenen Schnitt die Grundlage bildet. Tatsächlich gilt, wenn  $r$  der Radius des gegebenen Kreises und  $a_{10}$  die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist:

$$r = a_{10} \cdot \tau$$

wie man aus dem Beweis ablesen kann.

## 4.2 Konstruktion des Tetraeders

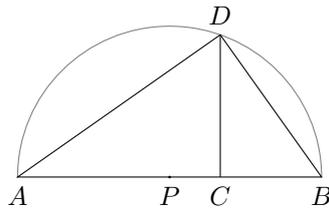
Nun haben wir alle Hilfsmittel für die weiteren Betrachtungen zusammengestellt. Wir wenden uns den Konstruktionen und Mehrtafelprojektionen der Platonischen Körper zu, wobei wir mit dem einfachsten Fall, dem Tetraeder, beginnen.

Gegeben sei eine Kugel  $K$  mit einem Durchmesser  $AB$ . Die Aufgabe besteht darin, ein regelmäßiges Tetraeder zu konstruieren, welches von dieser Kugel umfasst wird; diese Kugel als Umkugel besitzt.

Konstruktionsbeschreibung: Es sei  $AB$  ein Durchmesser der gegebenen Kugel  $K$ . Wir teilen die Strecke  $AB$  im Verhältnis  $2 : 1$  im Punkt  $C$ , so dass

$$AC = 2AB$$

gilt: Weiterhin halbiere man  $AB$  in  $P$  und zeichne um  $P$  einen Kreis mit dem Radius  $AP$ , d.h., dieser Kreis schneidet die Strecke  $AB$  gerade in den Punkten  $A$  und  $B$ .

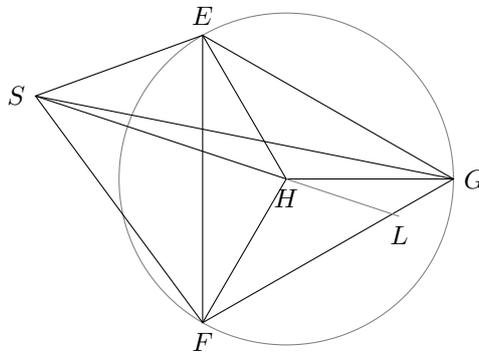


Auf  $AB$  errichte man nun in  $C$  eine Senkrechte, welche den Kreis um  $P$  in den Punkten  $D$  und  $Q$  schneidet. Man verbinde  $D$  mit  $A$  und  $B$ . (siehe Abbildung)

Nun wähle man einen beliebigen Punkt  $H$  der Ebene. Um  $H$  zeichne man einen Kreis mit einem Radius gleich  $CD$ . In diesen Kreis konstruiere man (nach 4.1.2) ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle EFG$ . Man verbinde  $E$ ,  $F$  und  $G$  mit dem Punkt  $H$ .

Nun errichte man auf der Ebene  $EFG$  in  $H$  eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechte liege im Abstand  $AC$  von  $H$  aus der Punkt  $S$ .

Verbindet man nun  $E$ ,  $F$  und  $G$  mit diesem Punkt  $S$ , so ist der entstehende Körper mit der Grundfläche  $EFG$  und der Spitze  $S$  das gesuchte regelmäßige Tetraeder (siehe nachfolgende Abbildung)



Begründung der Konstruktion: Da die Gerade  $SH$  senkrecht auf dem gleichseitigen Dreieck  $\triangle EFG$  steht, die Strecken  $AC$  und  $SH$  und  $CD$  und  $HE$  nach Konstruktion gleich lang sind, d.h.

$$AC = SH \quad \text{und} \quad CD = HE$$

gilt, erhalten wir  $DA = ES$ .

Analog erhalten wir auch  $DA = FS = GS$ . Demnach sind  $ES$ ,  $FS$  und  $GS$  gleich lange Strecken. Da im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABD$  die Strecke  $CD$  die Höhe stellt, gilt

$$AB : BC = AD^2 : DC^2$$

und da  $C$  die Strecke  $AB$  drittelt,  $AB = 3CB$ , erhalten wir

$$AD^2 = 3DC^2$$

Nun ist die Höhe  $DC$  nach Konstruktion gleich der Strecke  $EH$ , und da  $EH$  zwei Drittel der Höhe des gleichseitigen Dreiecks  $\triangle EFG$  ist:

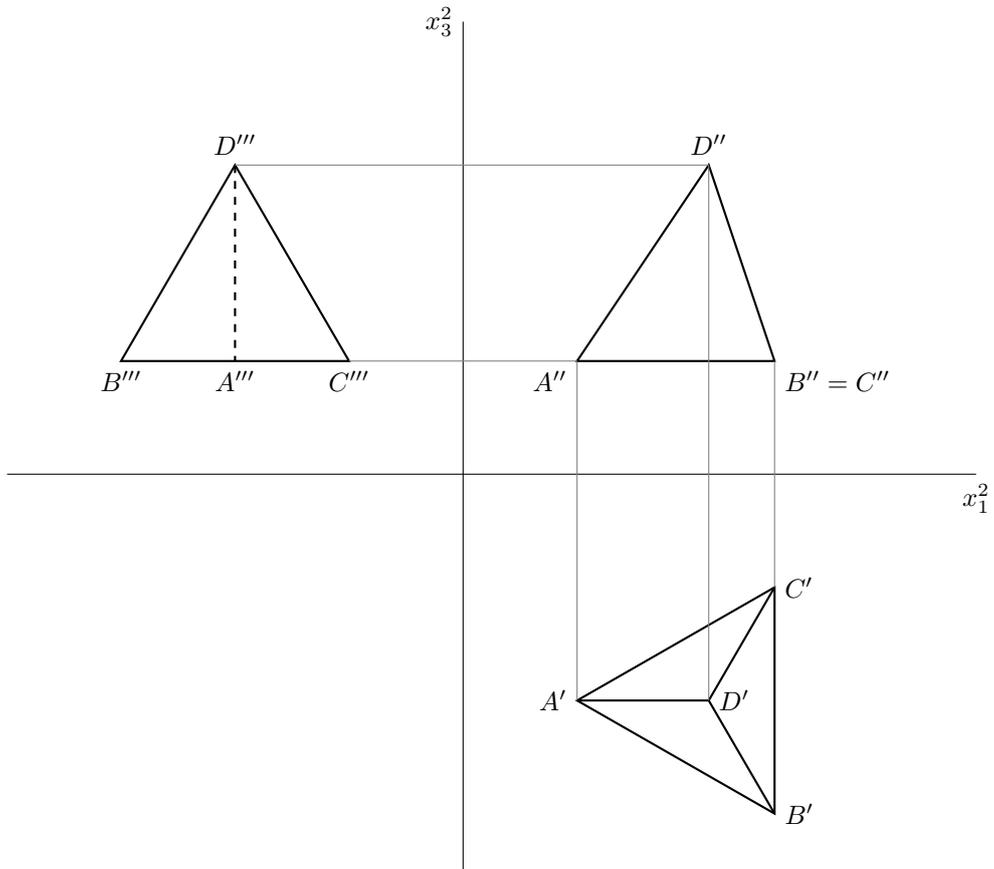
$$FE^2 = 3EH^2$$

Damit ist aber  $AD^2 = FE^2$ , also  $AD = FE$ . Mit den obigen Überlegungen sind dann aber alle Seiten (Kanten) des konstruierten Körpers gleich lang. Der Körper ist ein regelmäßiges Tetraeder.

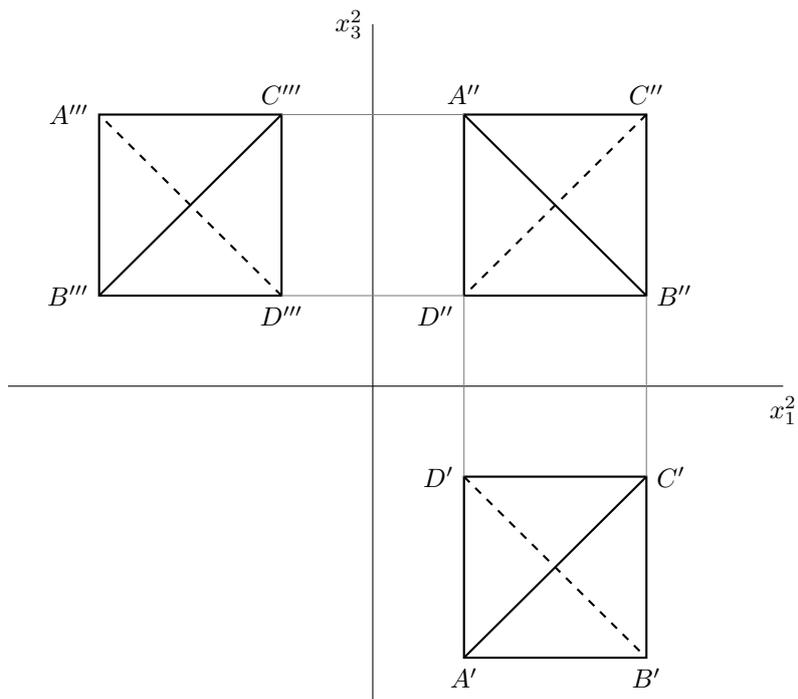
Es bleibt noch zu zeigen, dass die gegebene Kugel  $K$  tatsächlich Umkugel dieses Tetraeders ist. Dazu verlängern wir die Gerade  $SH$  über  $H$  in den anderen Teilraum hinaus, und bezeichnen den Punkt dieser Geraden, welcher in Abstand  $BC$  von  $H$  und nicht zwischen  $S$  und  $H$  liegt, mit  $L$ . Dann ist auf Grund der Konstruktion  $AB = SL$ . Da nach dem Höhensatz in rechtwinkligen Dreieck  $\triangle EFG$

$$AC : CD = CD : CB$$

Tafel 1: Dreitafelprojektion des Tetraeders



Tafel 2: Dreitafelprojektion des Tetraeders



ist und außerdem  $AC = SH$  (nach Konstruktion),  $CD = HE$  und  $CB = HL$  ist, erhalten wir

$$SH : HE = HE : HL$$

womit der Winkel  $\angle SEL$  ein rechter Winkel ist.

Beschreibt man über  $SL$  also einen Halbkreis, so befindet sich  $E$  auf dessen Peripherie. Drehen wir diesen Halbkreis, so befindet sich  $E$  auf dessen Peripherie. Drehen wir diesen Halbkreis um  $SL$ , so muss er aus Symmetriegründen auch  $F$  und  $G$  berühren, d.h., die Punkte  $E, F, G$  und  $S$  befinden sich auf der Oberfläche einer Kugel, deren Radius  $SL$  und mit oben also  $AB$  ist. Der Beweis ist erbracht.

Da, wie gezeigt,  $AB = 3CB$  ist, erhalten wir

$$AB = \frac{3}{2}AC$$

Außerdem ist in dem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABD$ :

$$AB : AC = AB^2 : AD^2 \quad \text{und damit} \quad AB^2 = \frac{3}{2}AD^2$$

D.h., dass das Quadrat des Durchmessers der gegebenen Kugel such zum Quadrat der Seitenlänge des Tetraeders wie 3 zu 2 verhält.

Abschließend wenden wir uns kurz den Mehrtafelprojektionen zu.

Die "Tafel 1" zeigt eine Dreitafelprojektion, wobei der Aufriss des Tetraeders nur als Dreieck erscheint. Eine weitere Dreitafelprojektion, wobei der Körper wieder völlig anders liegt, zeigt "Tafel 2". Hier erscheint das Tetraeder in allen 3 Rissen als Quadrat.

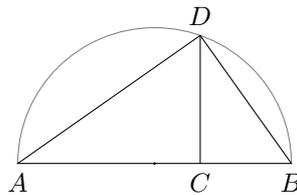
### 4.3 Konstruktion des Würfels

Es besteht wieder die Aufgabe, einen Würfel zu konstruieren, dessen Umkugel gegeben ist.

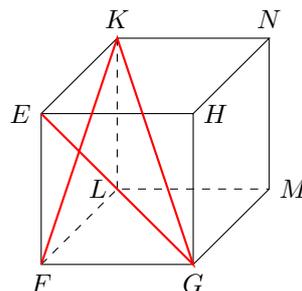
Konstruktionsbeschreibung: Sei  $K$  die gegebene Umkugel und  $AB$  einer deren Durchmesser. Der Punkt  $C$  teile diesen Durchmesser im Verhältnis 2 : 1, d.h., es gelte

$$AC = 2CB$$

Über  $AB$  konstruiere man nun einen Halbkreis. In  $C$  auf  $AB$  errichte man eine Senkrechte, welche den Halbkreis in  $D$  schneide (siehe Abbildung).



Nun verbinde man  $B$  mit  $D$ . Jetzt konstruiere man (nach 4.1.1) ein Quadrat  $EFGH$ , dessen Seitenlänge gleich  $DB$  ist. Nun errichte man auf der Quadratebene  $EFGH$  in den Punkten  $E, F, G$  und  $H$  Senkrechte.



Nun trage man jeweils die Strecke  $AB$  auf diesen Senkrechten ab und finde die Strecken  $EK$ ,  $FL$ ,  $GM$  und  $HN$ . Die dabei entstehende Figur ist das gesuchte Hexaeder (siehe Abbildung).

Beweis der Konstruktion: Dass der konstruierte Körper ein Würfel ist, erhält man sofort aus der Konstruktion. Es bleibt noch zu zeigen, dass die gegebene Kugel den Würfel umfasst.

Dazu betrachten wir die Strecken  $KG$ ,  $EG$  und  $KF$ . Da  $EK$  senkrecht auf der Ebene  $EFGH$  steht, muss der Winkel  $\angle KEG$  ebenfalls ein rechter Winkel sein. Konstruiert man über  $KG$  einen Halbkreis, so befindet sich  $E$  auf dessen Peripherie.

Da  $FG$  ebenfalls senkrecht auf der Ebene  $EFLK$  steht, muss aus gleichen Überlegungen der Winkel  $\angle GFK$  gleich  $90^\circ$  sein. Damit befindet sich der Punkt  $F$  auch auf der Peripherie des Halbkreises über  $KG$ .

Durch analoge Beweisschritte erhält man, dass auch die Punkte  $L$ ,  $H$ ,  $N$  und  $M$  auf einer Kugel liegen, welche  $KG$  als Durchmesser besitzt.

Dieser Durchmesser  $KG$  ist aber gleich  $AB$ . Da nämlich der Winkel  $\angle GFE$  ein rechter ist und die Strecken  $GF$ ,  $FE$  und  $EK$  gleich lang sind, gilt:

$$EG^2 = 2EF^2 = 2EK^2$$

(nach dem Satz des Pythagoras). Ebenso erhalten wir

$$EG^2 + EK^2 = KG^2 = 3EK^2 + 3DB^2$$

da  $EK = DB$  ist. Da nach Konstruktion  $AB = 3BC$  gilt, ergibt sich

$$AB : BC = AB^2 : DB^2 \rightarrow AB^2 = 3DB^3 \rightarrow AB = KG$$

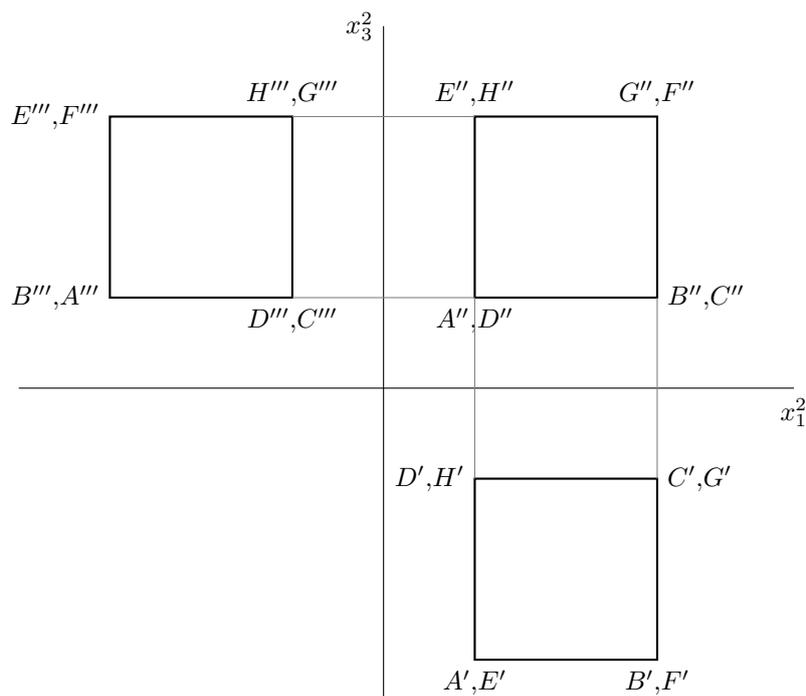
Der Beweis ist erbracht.

Da wie gezeigt,  $KG^2 = 3EK^2$  ist und der Durchmesser der Kugel  $KG$  ist, wird

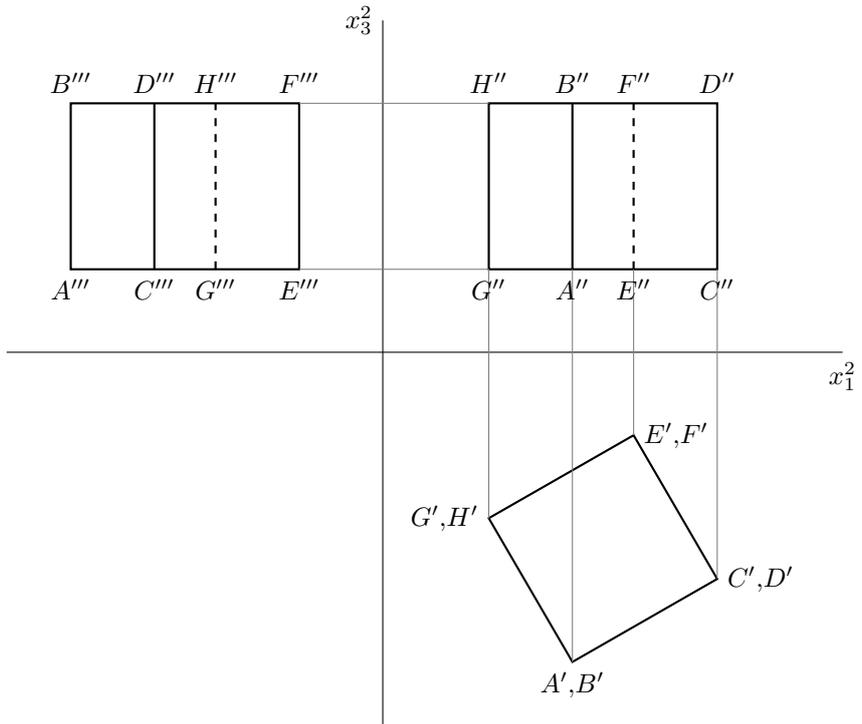
$$AB^2 = 3EK^2$$

Zusammenfassend kann man also sagen: Das Quadrat des Durchmessers der Kugel ist gleich dem dreifachen Quadrat der Kantenlänge des einbeschriebenen Würfels. Man möge mit 3.5.1 vergleichen.

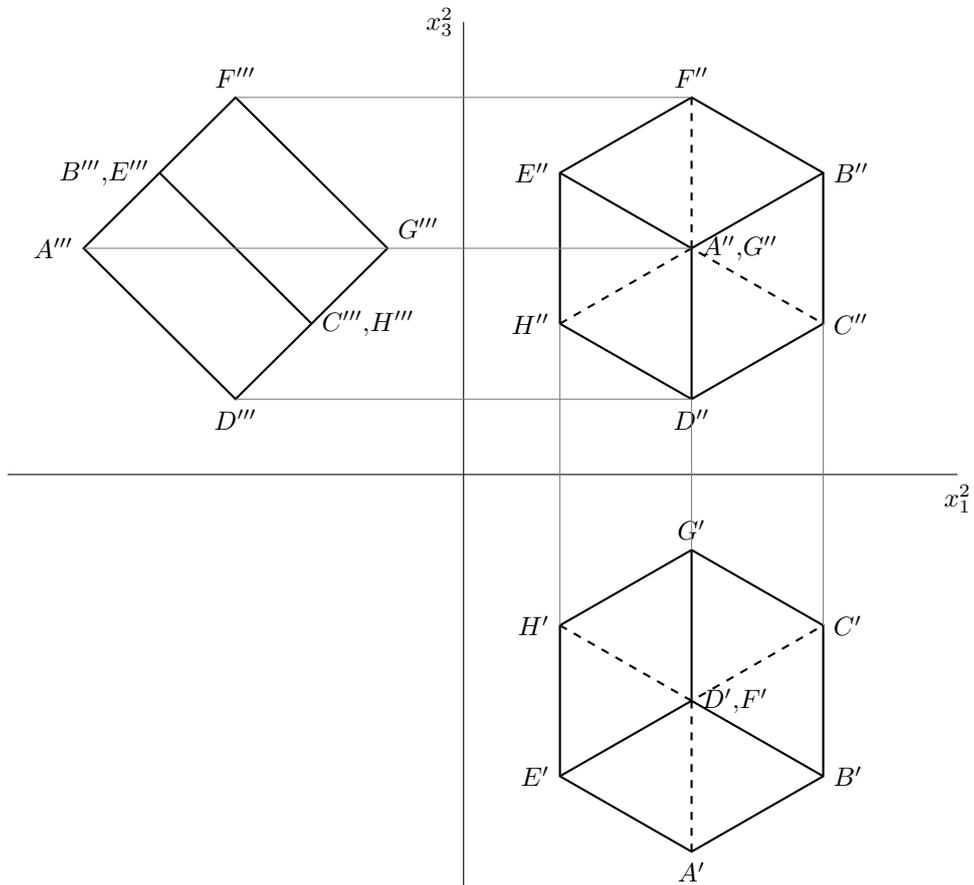
Tafel 3: Dreitafelprojektion des Würfels



Tafel 4: Dreitafelprojektion des Würfels



Tafel 5: Dreitafelprojektion des Würfels



Wenden wir uns wieder den Mehrtafelprojektionen zu.

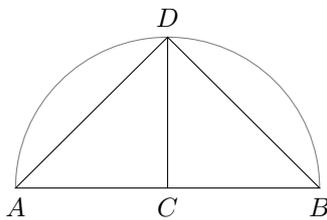
Die einfachste Würfelprojektion ist, wie in Tafel 3 ersichtlich, diejenige, die den Körper in allen 3 Rissen gleichartig als Quadrat abbildet. Tafel 4 zeigt ebenfalls einen Würfel in Dreitafelprojektion. Der Würfel ist auch hier in Normallage, der besseren Übersicht wegen, um  $30^\circ$  gegen die Aufrissebene gedreht.

Eine andere Ansicht des Würfels bietet Tafel 5. Zur Darstellung nutzt man die Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks (siehe 4.1.2) im Grundriss.

## 4.4 Konstruktion des Oktaeders

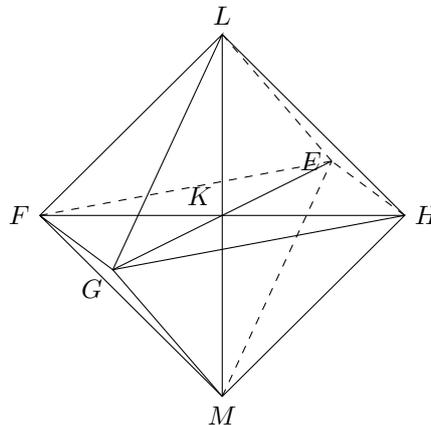
Es ist ein Oktaeder zu konstruieren, dessen Umkugel gegeben ist.

Konstruktionsbeschreibung: Es sei eine Kugel  $U$  mit einem beliebigen Durchmesser  $AB$  gegeben. Dieser Durchmesser werde im Punkt  $C$  halbiert. Weiterhin konstruiere man den Halbkreis über der Strecke  $AB$  und errichte im Punkt  $C$  eine Senkrechte auf  $AB$ , welche den Halbkreis im Punkt  $D$  schneide (siehe Abbildung).



Nun konstruiere man ein Quadrat  $EFGH$  mit einer Seitenlänge  $EF = DB$ .

Die Diagonalen dieses Quadrats schneiden sich im Punkt  $K$ . In  $K$  errichte man auf der Quadratebene  $EFGH$  eine Senkrechte. In beide Halbräume (in Bezug auf die Ebene) trage man eine Strecke der Länge  $KH$  ab, und erhalte somit die Punkte  $L$  und  $M$ . (siehe nachfolgende Abbildung)



Verbindet man nun zum einen  $L$  und zum anderen  $M$  mit den Punkten  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$ , so ist der entstehende Körper  $EFGHLM$  das gesuchte regelmäßige Oktaeder, welches von der gegebenen Kugel umfasst wird.

Begründung der Konstruktion: Da die Strecken  $KE$  und  $KH$  gleich lang sind und der Winkel  $\angle EKH$  nach Konstruktion ein rechter Winkel ist, muss

$$HE^2 = 2KE^2$$

gelten. Da nun aber auch  $KL = KE$  und  $\angle LKE = 90^\circ$  ist, erhalten wir auch  $LE^2 = 2EK^2$ , also  $HE = EL$ .

Analog ergibt sich  $LH = HE$ , so dass das Dreieck  $\triangle LEH$  gleichseitig ist. Aus Symmetriegründen sind dann auch die Dreiecke  $\triangle LEF$ ,  $\triangle LFG$  und  $\triangle LGH$  gleichseitig und untereinander sowie auch zu dem Dreieck  $\triangle LEH$  kongruent.

Da nun die Ebene  $EFGH$  Symmetrieebene ist, muss der konstruierte Körper ein regelmäßiges Oktaeder sein.

Nun ist noch nachzuweisen, dass die gegebene Kugel auch tatsächlich die Umkugel des konstruierten Oktaeders ist.

Da die Strecken  $LK$ ,  $KM$  und  $KE$  gleich lang sind, befindet sich der Punkt  $E$  auf der Peripherie eines Halbkreises über der Körperdiagonalen  $LM$ . Beschreibt dieser Halbkreis um  $LM$  eine Drehbewegung, so müssen auch die Punkte  $F$ ,  $G$  und  $H$  sich auf der entstehenden Kugel befinden. Der Oktaeder ist bezüglich jeder seiner Körperdiagonalen symmetrisch. Alle Eckpunkte des Oktaeders befinden sich folglich auf einer Kugel mit einem Durchmesser von  $LM$ .

Dieser ist aber gleich der Länge der Strecke  $AB$ . Da der Winkel  $\angle LEM$  ein rechter Winkel ist, erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras  $LM^2 = 2LE^2$ . Da nun im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABD$

$$AB : BC = AB^2 : DB^2$$

und mit  $AB = 2BC$  (nach Konstruktion) auch

$$AB^2 = 2DB^2 = 2LE^2$$

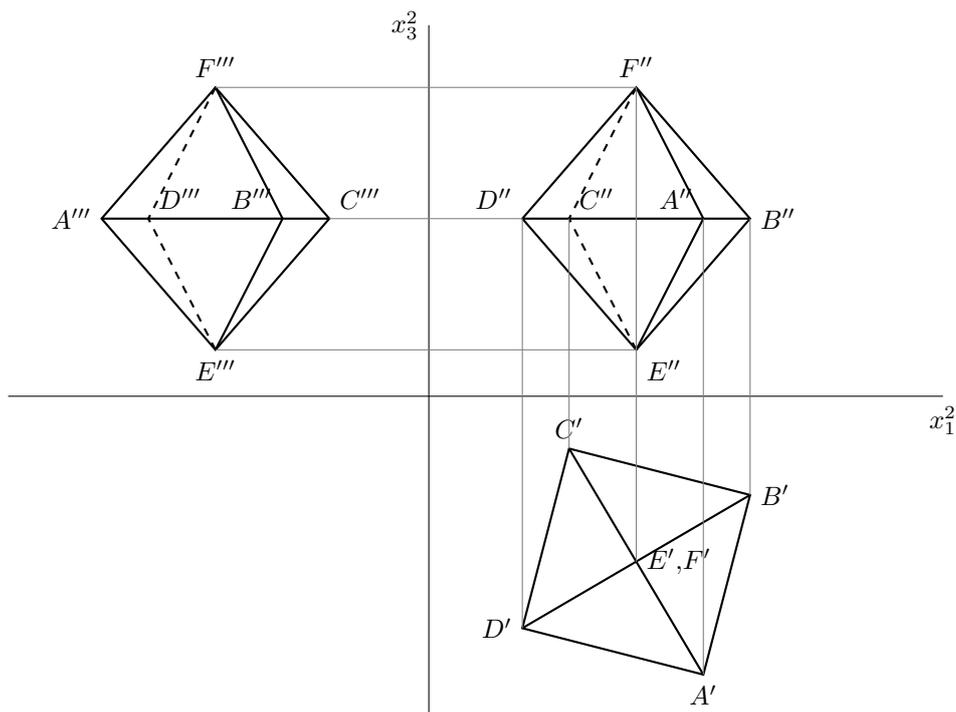
gilt, erhalten wir  $LM = AB$ , womit der Beweis beendet ist.

Übertragen wie das schon Bekannte über die Umkugel des Oktaeders (siehe 3.5.1), so erhalten wir

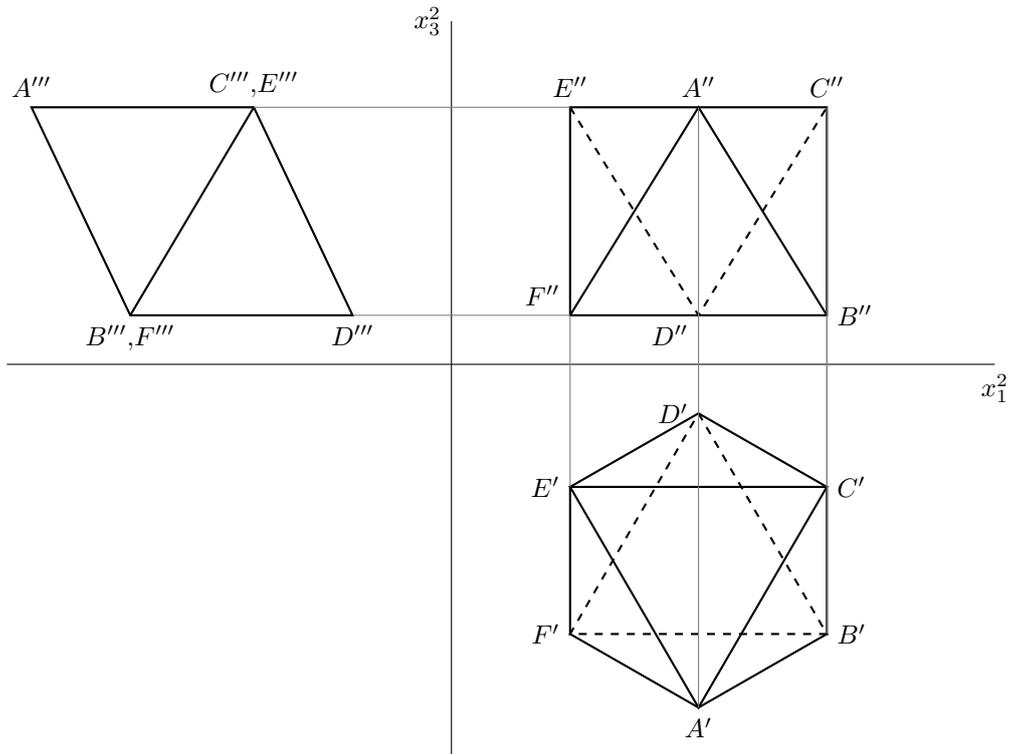
$$AB^2 = 2LE^2$$

d.h. also, das Quadrat des Durchmessers der Umkugel ist gleich dem doppelten Quadrat der Kantenlänge des Oktaeders.

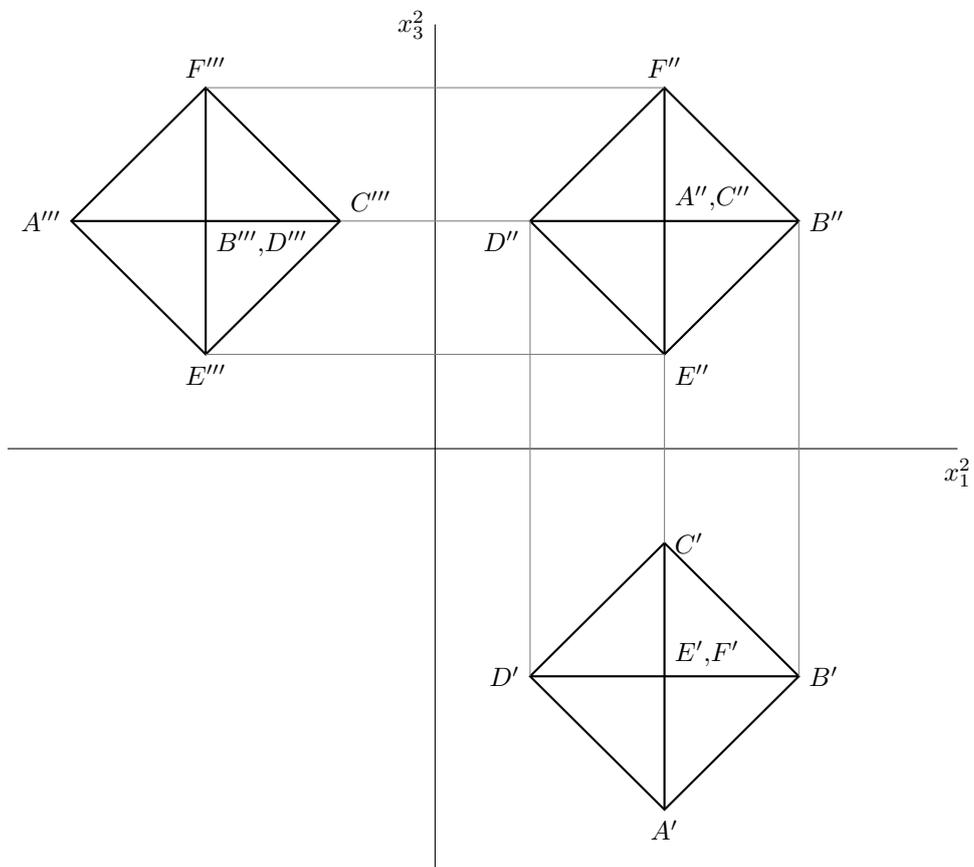
Tafel 6: Dreitafelprojektion des Oktaeders



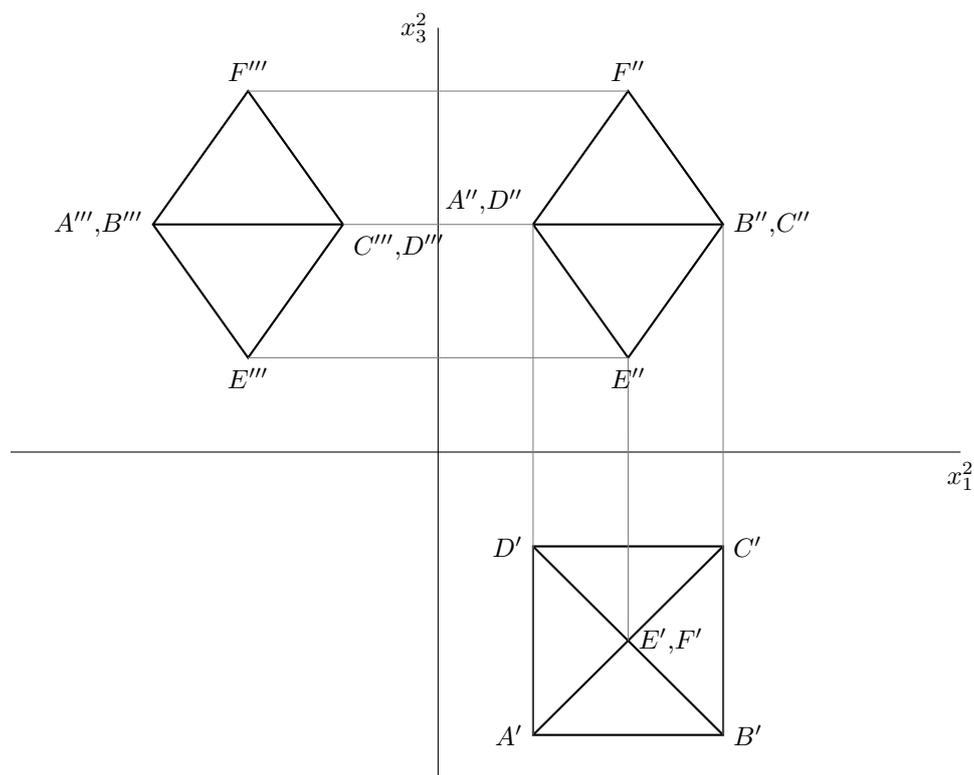
Tafel 7: Dreitafelprojektion des Oktaeders



Tafel 8: Dreitafelprojektion des Oktaeders



Tafel 9: Dreitafelprojektion des Oktaeders



Kommen wir wieder zu den Mehrtafelprojektionen. Wie bei dem Würfel gibt es auch hier zunächst einfache Darstellungen (siehe Tafel 6 und 9), wobei bei Tafel 6 schon deutlicher die Struktur eines Oktaeders zur Geltung kommt, da der Körper etwas gedreht wurde. Bei Tafel 9 bilden Aufriss und Seitenriss Rhomben, wogegen der Grundriss ein Quadrat ist.

Eine interessante Darstellung zeigt Tafel 8. Auf dieser Zeichnung werden in allen drei Rissen die gleichen Bilder sichtbar; Quadrate mit eingezeichneten Diagonalen.

Eine weitere Möglichkeit der Darstellung ist die, dass der Körper (Oktaeder) auf einer Seitenfläche aufliegt, wobei dann im Grundriss eine Seitenfläche in wahrer Größe abgebildet wird (siehe Tafel 7). Dabei ist es erforderlich, den Grundriss über ein regelmäßiges Sechseck zu konstruieren. (siehe 4.1.2)

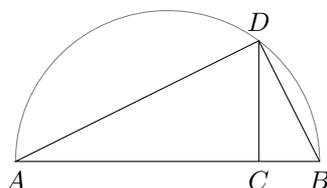
## 4.5 Konstruktion des Ikosaeders

Wir konstruieren ein Ikosaeder, welches eine gegebene Kugel als Umkugel besitzt.

Konstruktionsbeschreibung: Es sei eine Kugel mit einem Durchmesser  $AB$  gegeben. Auf diesem Durchmesser konstruiert man einen Punkt  $C$ , so dass

$$AB = 5CB$$

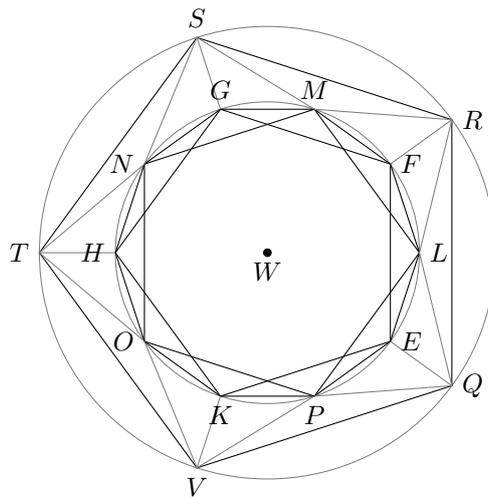
gilt. Nun zeichne man über der Strecke  $AB$  einen Halbkreis und errichte in  $C$  auf  $AB$  eine Senkrechte, welche diesen Halbkreis im Punkt  $D$  schneide. (siehe Abbildung)



Nun konstruiere man in der Ebene um einen beliebigen Punkt  $W$  einen Kreis mit einem Radius gleich  $DB$ . In diesem Kreis konstruiere man ein regelmäßiges Fünfeck (nach 4.1.3)  $EFGHK$ . Die fünf dabei entstehenden Kreisbögen werden halbiert, womit man die Punkte  $L, M, N, O$  und  $P$  erhält. Damit entsteht wieder ein regelmäßiges Fünfeck  $LMNOP$ . Gleichzeitig ist dann die Figur  $ELFMGNHOKP$  ein regelmäßiges Zehneck.

In den Punkten  $E, F, G, H$  und  $K$  errichte man nun auf der Kreisfläche Senkrechte und trage auf jeder die Strecke  $DB$  ab, so dass man die Punkte  $Q, R, S, T$  und  $V$  sowie die Strecken  $EQ, FR, GS, HT$  und  $KV$  erhält.

Durch Verbinden dieser neuen Punkte entsteht das regelmäßige Fünfeck  $QRSTV$ . Weiterhin verbinde man die Punkte  $Q$  mit  $L, L$  mit  $R, R$  mit  $M, M$  mit  $S, S$  mit  $N, N$  mit  $T, T$  mit  $O, O$  mit  $V, V$  mit  $P$  und  $P$  mit  $Q$ .



Nun errichte man in  $W$  auf der Kreisfläche eine Senkrechte und trage auf ihr die Strecke  $WZ$  in den Halbraum, in dem sich  $S$  befindet, ab. In dem anderen Halbraum (in Bezug auf die Kreisebene) befinde sich der Punkt  $Y$  auf dieser Senkrechten und zwischen  $W$  und  $Z$  der Punkt  $X$ . Dabei sei

$$WX = DB, XZ \text{ und } WY$$

aber gleich der Seitenlänge des schon konstruierten regelmäßigen Zehnecks, also

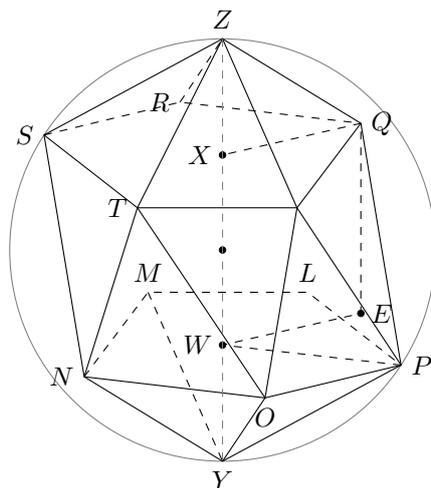
$$XZ = WY = EL$$

Den Punkt  $Z$  verbinde man nun mit den Eckpunkten des Fünfecks  $QRSTV$ . Den Punkt  $Y$  verbinde man mit den Punkten  $L, M, N, O$  und  $P$ , womit der dabei entstehende Körper mit den Eckpunkten  $Y, L, M, N, O, P, Q, S, T, R, V$  und  $Z$  dann das gesuchte Ikosaeder ist.

Begründung der Konstruktion: Da nach Konstruktion die Strecke  $EQ$  und  $FR$  senkrecht auf der konstruierten Seitenfläche stehen, sind sie parallel und außerdem gleich lang.

Da nun auch  $QR$  und  $EF$  aus gleichen Gründen parallel und gleich lang sind, muss die Figur  $QRSTV$  (durch analoge Schlüsse) ein regelmäßiges Fünfeck sein. Da  $EQ$  und  $DB$  gleich dem Radius des Kreises sind,  $EL$  gleich der Seite des einbeschriebenen Zehnecks ist und der Winkel  $\angle LEQ$  ein rechter Winkel ist, ist  $QL$  und ebenso  $LR$  gleich der Seite des einbeschriebenen Fünfecks.

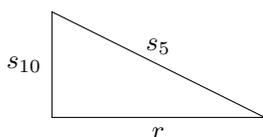
Da aber auch  $QR$  eine derartige Seite war, ist das Dreieck  $\triangle QRL$  gleichseitig. Aus den gleichen Gründen sind auch die Dreiecke  $\triangle RSM, \triangle STN, \triangle TVO$  und  $\triangle VPQ$  gleichseitig. Da  $LR, RM$  und  $ML$  ebenfalls Seiten des konstruierten regelmäßigen Fünfecks sind, wird auch das Dreieck  $\triangle LMR$  gleichseitig. Und ebenso sind dies die Dreiecke  $\triangle MNS, \triangle NOT, \triangle OPV, \triangle PLQ$ .



Da die Geraden  $XW$  und  $EQ$  nach Konstruktion auf der Kreisfläche senkrecht stehen, sind sie parallel und nach Konstruktion auch gleich lang.

Damit sind aber auch die Strecken  $WE$  und  $XQ$  parallel und gleich lang, womit  $XQ$  gleich dem Radius des konstruierten Kreises, also gleich  $DB$  wird. Nach Konstruktion ist des Radius dieses Kreises gleich  $DB$  und gleich  $WE$ .

Nun ist  $XZ$  auf Grund der Konstruktionsbeschreibung gleich der Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks. Da der Winkel  $\angle QXZ$  ein rechter Winkel ist, muss also  $QZ$  die Länge des regelmäßigen eingeschriebenen Fünfecks besitzen. (siehe Abbildung)



Verwenden wir den Satz des Pythagoras und setzen die in Abschnitt 4.1.3 bestimmten Größen für die Seiten des regelmäßigen Fünfecks und Zehnecks ein, wird

$$a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{4 + (\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

womit  $QZ$  tatsächlich gleich der Länge einer Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks ist. Aus gleichen Gründen wird dann auch  $VZ = QZ$  und da oben schon gezeigt wurde, dass auch die Strecke  $QV$  die Länge einer derartigen Fünfeckseite besitzt, ist das Dreieck  $\triangle VQZ$  gleichseitig. Analoges gilt auch für die Dreiecke  $\triangle VTZ$ ,  $\triangle TSZ$ ,  $\triangle SRZ$  und  $\triangle RGZ$ . Außerdem sind dann diese Dreiecke auch zu dem Dreieck  $\triangle LMR$  kongruent.

Da der Körper symmetrisch konstruiert wurde, müssen die Dreiecke  $\triangle POY$ ,  $\triangle ONY$ ,  $\triangle NMY$ ,  $\triangle MLY$  und  $\triangle LPY$  ebenfalls gleichseitig und zu  $\triangle LMR$  kongruent sein. Damit wird der konstruierte Körper aber von 20 gleichseitigen kongruenten Dreiecken begrenzt und ist damit ein regelmäßiges Ikosaeder.

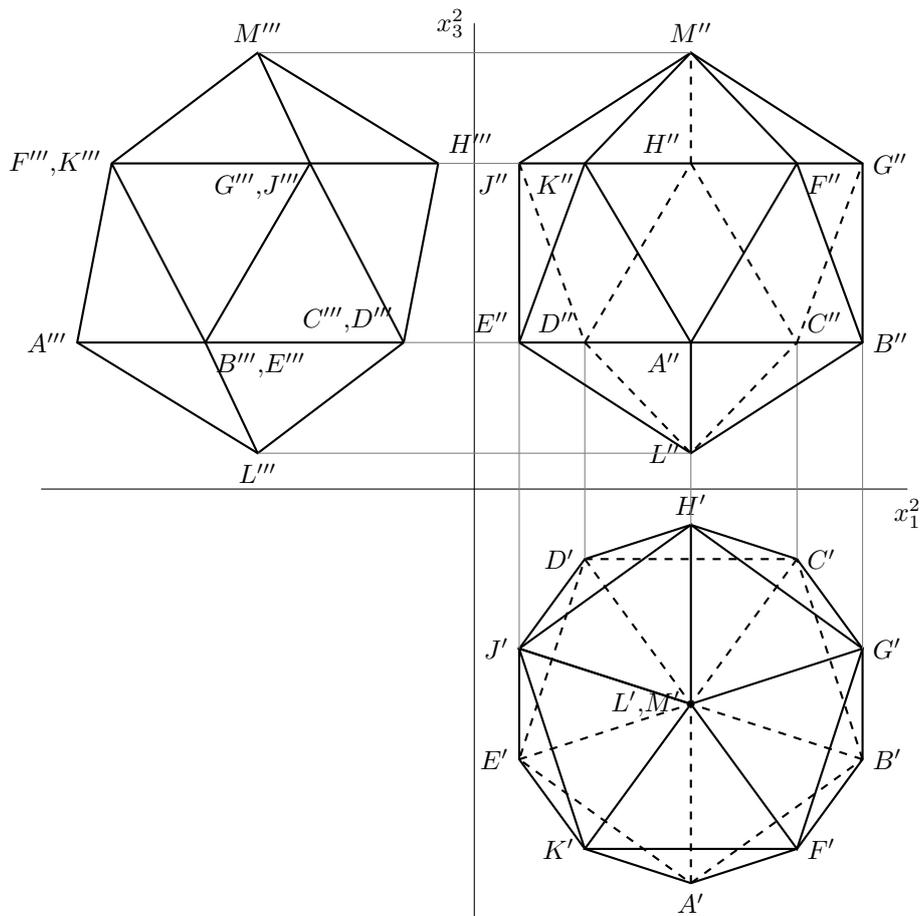
Es ist also nur noch zu zeigen, dass die gegebene Kugel den Körper tatsächlich umfasst. Da aber die Strecke  $WX$  gleich dem Radius des Hilfskreises, d.h., gleich  $DB$ , ist und die Strecke  $XZ$  gleich der Länge des Seiten des regelmäßigen eingeschriebenen Zehnecks ist, ist nach 4.1.3 und 4.1.4 die Strecke  $WZ$  in  $X$  stetig geschnitten und es gilt:

$$WZ : WX = WX : WZ \tag{4.1}$$

Da aber nach Konstruktion  $WX = WP$  und  $XZ = WY$  ist:

$$WZ : WP = WP : WY$$

Tafel 10: Dreitafelprojektion des Ikosaeders



Nun sind auf Grund der Konstruktion der Punkte  $Z$  und  $Y$  die Winkel  $\angle PWZ$  und  $\angle PWY$  rechte Winkel und damit mit der obigen Proportion die Dreiecke  $\triangle PWZ$  und  $\triangle PWY$  ähnliche Dreiecke. Damit sind aber auch der Winkel  $\angle YPZ$  ein rechter Winkel, womit ein Halbkreis über der Strecke  $YZ$  den Punkt  $P$  auf seiner Peripherie besitzen muss.

Aus der Proportion (4.1) und der Tatsache, dass  $WZ = XY$  und  $WX = XQ$  ist, erhalten wir

$$XY : XQ = XQ : XZ$$

Mit den gleichen Überlegungen, wie oben, ist dann auch der Winkel  $\angle YQZ$  ein rechter Winkel, womit der über der Strecke  $YZ$  beschriebene Halbkreis auch durch den Punkt  $Q$  geht.

Wir drehen diesen Halbkreis um die Achse  $YZ$  gedreht, so muss er auf Grund der Symmetrie des Ikosaeders auch durch alle anderen Eckpunkte gehen, d.h., die Umkugel des Ikosaeders besitzt den Durchmesser  $YZ$ . Diese ist aber gleich dem gegebenen Durchmesser  $AB$ .

Denn halbiert man die Strecke  $WX$  im Punkt  $A'$ , so erhält man, da  $X$  die Strecke  $WZ$  im goldenen Schnitt teilt:

$$ZA'^2 = 5A'X^2$$

Da nun weiterhin  $YZ = 2ZA'$  und  $WX = 2XA'$  ist, wird

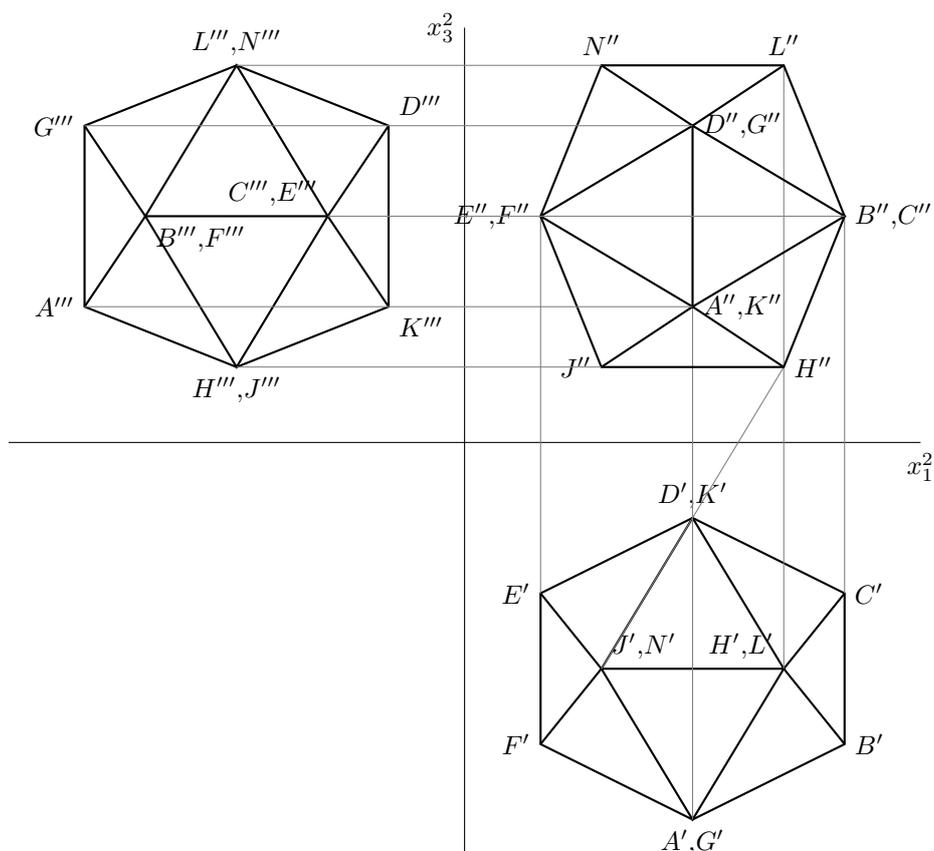
$$YZ^2 = 5WX^2 = 5BD^2$$

da ja nach Konstruktion auch  $WX = BD$  gilt. Ebenfalls nach Konstruktion ist

$$AB = 5BC \quad \text{und} \quad AB : BC = AB^2 : BD^2$$

womit wir  $AB^2 = 5BD^2$  und insgesamt  $AB = YZ$  erhalten. Der Beweis ist erbracht.

Tafel 11: Dreitafelprojektion des Ikosaeders



Wenden wir uns wieder den Projektionen des Ikosaeders zu. Die Projektionen des Ikosaeders sind, da mehr Flächen vorhanden sind, komplizierter als die bisher beschriebenen Körper.

Eine relativ einfache Darstellungsform ist in Tafel 11 sichtbar. Allerdings besteht hierbei der Nachteil, dass an das Vorstellungsvermögen hohe Anforderungen gestellt werden, da hier nirgends unsichtbare Kanten vorhanden sind.

Außerdem muss man diese Projektion über eine Hilfskonstruktion anfertigen, d.h., man stellt sich das Ikosaeder in einem Würfel eingeschlossen vor; man zeichnet zuerst den Grundriss eines Würfels und teilt mittels goldenem Schnitt (siehe 4.1.4) eine Würfelkante. Der größere entstandene Abschnitt ist dann eine Seitenkante des Ikosaeders. Auf den exakten Beweis wird hier nicht eingegangen.

Eine schönere Darstellung zeigt Tafel 10. Hierbei wird die Struktur des Ikosaeders sehr deutlich.

Im Grundriss erscheint der Körper hier als regelmäßiges Zehneck. Man muss damit über die Hilfskonstruktion eines regelmäßigen Zehnecks gehen. (siehe 4.1.3)

Im Aufriss ist das Dreieck  $\triangle KAF$  bzw.  $\triangle DHC$  in wahrer Größe abgebildet. Man kann das Ikosaeder noch beliebig drehen und erhält immer andere Abbildungen, doch die beiden gezeigten sind die symmetrischsten und sollen hier genügen.

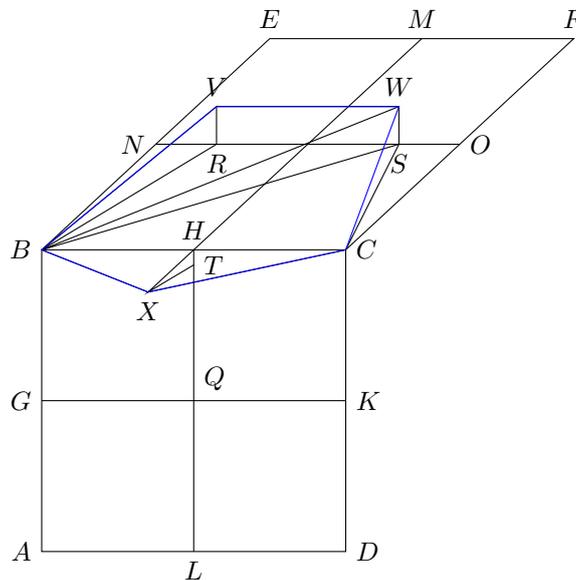
## 4.6 Konstruktion des Dodekaeders

Wiederum steht die Aufgabe in eine gegebene Kugel einen der Platonischen Körper einzubeschreiben; in diesem Fall das Pentagondodekaeder.

Konstruktionsbeschreibung: Sei die Kugel mit dem Durchmesser  $A'B'$  gegeben. Für diese Kugel konstruieren wir zunächst den Würfel (nach 4.3), welcher die Kugel als Umkugel besitzt.

Von diesem Würfel betrachten wir die senkrecht aufeinander stehenden Seitenflächen  $ABCD$  und  $CBEF$ .

Die Kanten dieser Seitenflächen halbieren wir in den Punkten  $G, H, K, L, M, N$  und  $O$  und verbinden  $GK, HL, MH$  und  $NO$ . (siehe Abbildung)



Nun teile man die Strecke  $NO$  im Punkt  $P$ , mit  $NP = PO$ .

Ebenso sei  $Q$  der Schnittpunkt der Strecken  $GK$  und  $HL$ . Jetzt teile man die Strecken  $NP, PO$  und  $HQ$  in den Punkten  $R, S$  und  $T$  im goldenen Schnitt, so dass die Strecken  $PR, PS$  und  $QT$  jeweils der größere Abschnitt sind. In den Punkten  $R$  und  $S$  errichte man auf der Ebene  $BCEF$  Senkrechte und trage auf diesen nach außen (in Bezug auf den Würfel) hin die Strecke  $PR$  ab, und finde so die Punkte  $V$  und  $W$  und die Strecken  $RV$  und  $SW$ .

Errichtet man nun auf der Ebene  $ABCD$  im Punkt  $T$  eine Senkrechte und konstruiert man auf dieser den Punkt  $X$  mit  $TX = QT$ , so wird  $TX = VR = SW$ .

Nun zeichne man die Geraden  $VB, BX, XC, CW$  und  $WV$  und erhält somit eine fünfseitige Figur  $BXCWV$ , welche ein regelmäßiges Fünfeck ist. Wird nun auf jeder der zwölf Kanten des Würfels derartig ein regelmäßiges Fünfeck konstruiert, so bilden alle diese Flächen das gesuchte Dodekaeder.

Begründung der Konstruktion: Der Beweis teilt sich auf. Zuerst zeigen wir, dass die fünfseitige Figur  $BXCWV$  gleichseitig ist.

Da die Strecke  $NP$  in  $R$  im goldenen Schnitt geteilt ist und  $PR$  nach Konstruktion der größere Abschnitt ist, gilt:

$$PN^2 + NR^2 = 3PR^2$$

Da aber auch  $PN = NB$  und  $PR = PV$  ist, erhalten wir

$$BN^2 + NR^2 = 3RV^2$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt aber auch

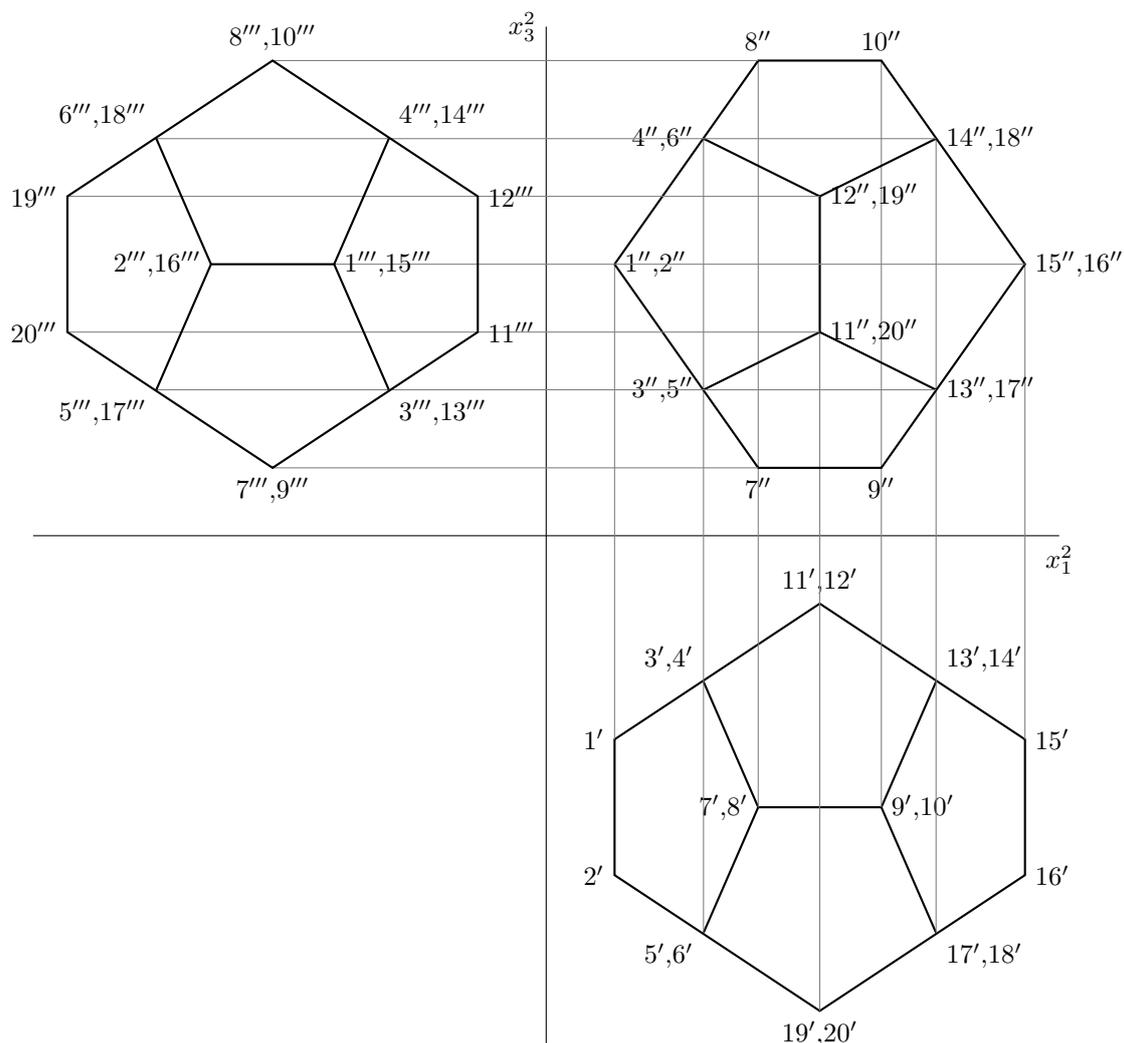
$$BN^2 + NR^2 = BR^2 \quad \text{und damit} \quad BR^2 = 3RV^2$$

Das heißt aber

$$BR^2 + RV^2 = BV^2 = 4RV^2$$

und folglich  $BV = 2RV$ . Da aber auch die Strecke  $VW$  gleich der Strecke  $RS = 2RV$  ist, gilt auch  $BV = VW$ . Analog zeigt man die Gleichheit der anderen Seiten. Die Figur  $BXCWV$  ist gleichseitig.

Tafel 12: Dreitafelprojektion des Dodekaeders



Nun zeigen wir, dass diese Figur tatsächlich in einer Ebene liegt. Errichtet man in  $P$  ebenfalls eine Senkrechte auf der Ebene  $BCEF$ , so schneidet diese Senkrechte die Strecke  $VW$  im Punkt  $Y$ , wobei dann die Strecken  $RV$ ,  $PY$  und  $SW$  parallel sind.

Verbindet man  $Y$  mit  $H$  und  $H$  mit  $X$ , so ist  $XHY$  eine Gerade. Denn, da die Strecke  $HQ$  im Punkt  $T$  im goldenen Schnitt geteilt ist und  $QT$  der größere Abschnitt ist, gilt die Proportion

$$HQ : QT = QT : TH$$

Da aber  $HQ$  gleich der Strecke  $HP$  ist und  $QT = TX = PY$  ist, erhalten wir

$$HP : PY = TX : TH$$

Da nun aber  $HP$  und  $TX$  sowie  $TH$  und  $PY$  parallel sind, muss auf Grund der Proportion die Strecke  $YX$  tatsächlich auf einer Geraden liegen. Folglich ist die fünfseitige Figur  $BVWCX$  in einer Ebene.

Damit diese Figur aber ein regelmäßiges Fünfeck ist, muss noch die Gleichwinkligkeit nachgewiesen werden.

Da die Strecke  $NP$  im Punkt  $R$  im goldenen Schnitt geteilt ist und  $PR$  den größeren Abschnitt darstellt, ist

$$(NP + PR) : PN = NP : PS$$

Da die Strecken  $PR$  und  $PS$  gleich lang sind und damit die Summe von  $NP$  und  $PR$  die Strecke  $NS$  ergibt, erhalten wir

$$NS : NP = NP : PS$$

womit auch  $NS$  im Punkt  $P$  stetig geschnitten ist. Die Strecke  $NP$  ist dabei der größere Abschnitt, so dass

$$NS^2 + SP^2 = 3PN^2$$

gilt. Da aber auch die Strecken  $PN$  und  $NB$  sowie  $SP$  und  $SW$  gleich lang sind, wird

$$NS^2 + SW^2 = 3NB^2 \quad \text{und damit} \quad NB^2 + NS^2 + SW^2 = 4NB^2$$

Auf Grund des Satzes von Pythagoras ist auch

$$NB^2 + NS^2 = BS^2 \quad ; \quad BS^2 + SW^2 = BW^2$$

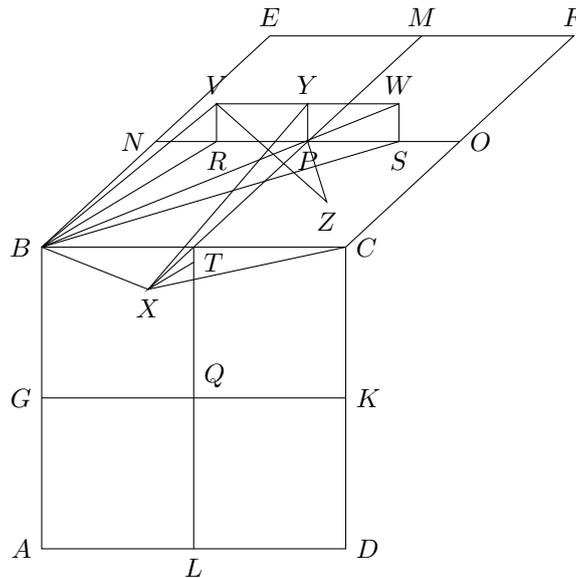
so dass wir erhalten

$$BS^2 + SW^2 = BW^2 = 4NB^2$$

d.h., da der Punkte  $N$  die Kante des Würfels halbiert

$$BW = 2NB = BC$$

Nun haben wir aber schon gezeigt, dass die Kanten der Figur  $BVWCX$  gleich lang sind, d.h.  $BV = BX = VW = CX$ . Damit sind aber auf Grund des Kongruenzsatzes SSS die Dreiecke  $\triangle BVW$  und  $\triangle BXC$  kongruent, womit die Winkel  $\angle BVW = \angle BXC$  kongruent sind. Analog zeigt man dies für die anderen Winkel, so dass der konstruierte Körper tatsächlich ein Pentagondodekaeder ist.



Es bleibt noch zu zeigen, dass die gegebene Kugel Umkugel dieses Dodekaeders ist. Verlängert man die Strecke  $YP$  in das Innere des Würfels hinein, so schneide die zugehörige Gerade die Diagonale des Würfels im Punkt  $Z$ , und halbiert die Diagonale. Damit ist  $Z$  der Punkte, welcher den Mittelpunkt der Umkugel des Würfels darstellt.

Die Strecke  $PZ$  ist dann gleich der halben Seite des Würfels (siehe obere Abbildung)

Da  $NS$  im Punkt  $P$  stetig geschnitten ist und  $NP$  der größere Abschnitt ist, gilt

$$NS^2 + SP^2 = 3NP^2$$

Da nun  $NP = PZ$ ,  $PS = YP$ ,  $NS = YZ$  und  $SP = PR$  sowie  $SP = VY$  ist, erhalten wir

$$YZ^2 + VY^2 = VZ^2 = 3NP^2$$

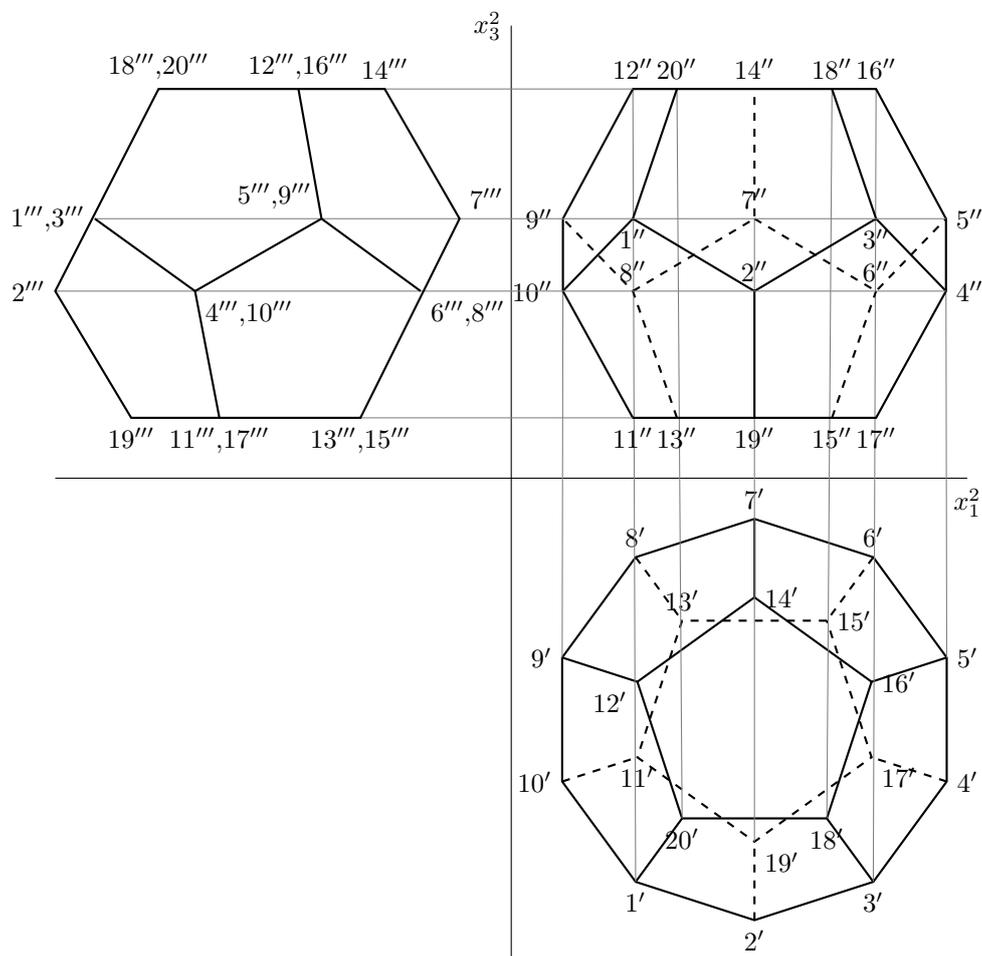
Da das Quadrat des Durchmessers gleich der Kugel dem dreifachen Quadrat der Seite des Würfels gleich ist (siehe 4.3), ist das Quadrat des Radius auch gleich dem dreifachen Quadrat der halben Seite  $NP$  gleich, d.h.

$$\frac{3}{4}NP^2 = VZ^2$$

Damit ist aber  $VZ$  der Radius der Kugel,  $Z$  deren Mittelpunkt und  $V$  ein Punkt auf der Körperoberfläche. Analog zeigt man, dass auch jeder andere Eckpunkt des Dodekaeders auf der Kugeloberfläche liegt. Damit ist die gegebene Kugel die Umkugel des konstruierten Dodekaeders. Die Konstruktion ist bewiesen.

Bei der Bestimmung des Radius der Umkugel eines Dodekaeders in Abschnitt 3.5.1 wurde vorausgesetzt, dass die Punkte  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , einen Würfel bilden. Der dort offen gebliebene Beweis ist mit dieser Konstruktion nun gegeben.

Tafel 13: Dreitafelprojektion des Dodekaeders



Kommen wir wieder zu den Mehrtafelprojektionen des Dodekaeders. Bei allen Aufzählungen, sowie auch bei Konstruktionen bzw. Projektionen, wird das Dodekaeder immer als letzter Platonischer Körper betrachtet. Dies erfolgt, da das Dodekaeder mit seinen fünfeckigen Seitenflächen schwerer als die anderen Platonischen Körper darzustellen ist (siehe Fünfeckkonstruktion 4.1.3)

Man such deshalb möglichst symmetrische Anordnungen, die dennoch deutlich die Beschaffenheit des Körpers hervorheben.

Eine solche Darstellung ist zum Beispiel die auf Tafel 13. Hier erscheint der Körper im Grundriss, ähnlich wie bei dem Ikosaeder, wieder als regelmäßiges Zehneck.

Eine andere Darstellungsform ist auch wieder ähnlich des der Ikosaeders (siehe Tafel 12). Man umschreibt dem Grundriss wieder einen Würfelgrundriss, wobei hier eine Körperkante des Dodekaeders gleich dem kleineren Abschnitt der im goldenen Schnitt geteilten Würfelkante ist. Allerdings besitzt diese Darstellung den Nachteil, dass sie weniger übersichtlich ist. Damit ist die Konstruktion der fünf Platonischen Körper abgeschlossen.

Bevor wir uns weiteren Untersuchungen zuwenden, macht sich noch eine Bemerkung zu einem der drei Meisterstiche, die "Melancholia I", von Albrecht Dürer notwendig. (siehe Abbildung)



Auf der linken Seite des Kupferstichs ist ein großer Körper, abgebildet, von dem auf den ersten Blick nur zwei große fünfseitige Begrenzungsflächen sichtbar sind. Während in einer Vielzahl von populärwissenschaftlicher Literatur dieser Körper als "grober Klotz" bezeichnet wird (die Symmetrie dieses Körpers wird gar nicht erkannt), schreiben viele Autoren von einem Dodekaeder, welches in Zentralprojektion dargestellt wurde. Das zugehörige Projektionszentrum konnte aber nicht angegeben werden.

Dies ist auch nicht möglich, da es sich bei dem abgebildeten Körper nicht um ein Dodekaeder handelt, wie man zuerst glauben mag. So ist die sichtbare Deckfläche ein Dreieck und kein Fünfeck.

E. Schröder zeigt zu diesem Problem in [25], dass es sich bei dem abgebildeten Körper um ein Rhomboeder handelt, welches an gegenüberliegenden Ecken abgestumpft ist, womit dieses Problem gelöst ist.

# Kapitel 5

## Dualitäten

### 5.1 Zueinander duale Polyeder

In allen bisherigen Kapiteln wurden die fünf Platonischen Körper einzeln für sich betrachtet. Nun stellt sich die Frage, ob und welche Beziehungen zwischen zwei oder mehr Körpern bestehen. Dieser Frage soll im Folgenden nachgegangen werden.

Theoretisch wäre es möglich, jeden der 5 Platonischen Körper irgendwie in einen anderen "hineinzulegen", so dass der eine den anderen völlig umschließt. Die allgemeinen Fälle sind jedoch von geringerer Bedeutung. Interessant sind sogenannte duale Lagen.

#### Definition

Zwei Körper sind dual zueinander, wenn bei Einschachtelung eines Körpers in den anderen genau jede Ecke des inneren Körpers genau eine Körperfläche des äußeren Körpers im Flächenmittelpunkt berührt.

Unmittelbar aus dieser Definition folgt:

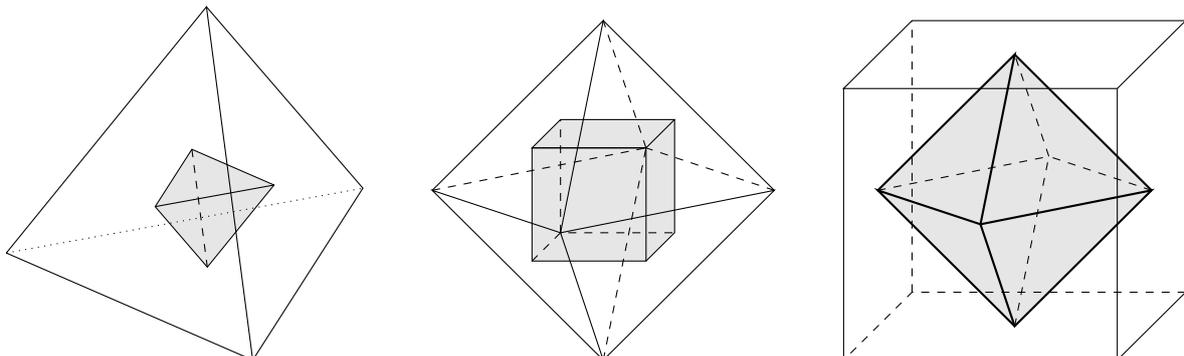
#### Satz

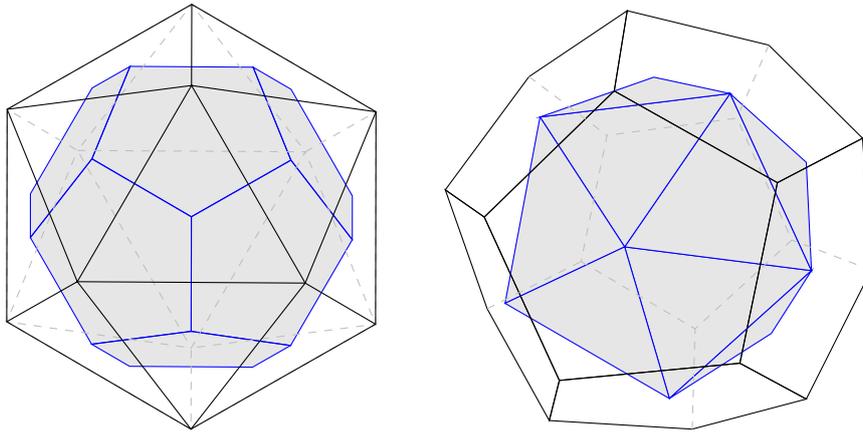
Zwei Körper sind nur dann dual zueinander, wenn  $e$  und  $f$ , also die Anzahl der Ecken und die der Körperflächen entsprechend vertauschbar sind.

Wie man sieht, müssen damit nach 3.3 auch  $m$  und  $n$  vertauschbar sein.

Daraus folgt für die Platonische Körper, dass das Tetraeder zu sich selbst, Hexaeder und Oktaeder sowie Ikosaeder und Pentagondodekaeder zueinander dual sind.

Wie dies zeichnerisch aussieht, zeigen die nachfolgenden Abbildungen:





Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht ebenfalls den Zusammenhang:

Körper	$n$	$m$	$e$	$f$
Tetraeder	3	3	4	4
Hexaeder	4	3	8	6
Oktaeder	3	4	6	8
Ikosaeder	5	3	20	12
Dodekaeder	3	5	12	20

Aus der Vertauschbarkeit der Ecken, Flächen bzw. von  $n$  und  $m$  kann ein wichtiger Satz über duale Platonische Körper abgeleitet werden.

#### **Satz (Dualitätsprinzip)**

Besteht für einen Platonischen Körper eine Aussage, so ist die duale Aussage, welche man durch Ersetzen der dualen Stücke, wie z.B. Ecken durch Flächen,  $n$  durch  $m$  usw., erhält, für den zu diesem Platonischen Körper dualen Platonischen Körper ebenfalls gültig.

Dieses Prinzip werden wir bei der Untersuchung der Dreh- und Symmetriegruppen, der Netze usw. der Platonischen Körper benötigen.

Eine symbolische Vereinfachung der Dualitätsbeziehung ist mit den Schläfli-Symbolen möglich. Dabei wird jedem Körper ein Symbol zugeordnet; so z.B. für das Tetraeder  $\{3,3\}$  und für den Würfel  $\{4,3\}$ , wobei die erste Zahl  $n$  die zweite  $m$  entspricht. Wie eingangs gezeigt, ist damit ein Körper eindeutig bestimmt. Es genügt damit zu sagen  $\{5,3\}$  um das Dodekaeder zu bezeichnen. Analog ist  $\{4,3\}$  des Oktaeder und  $\{3,5\}$  des Ikosaeder. Man kann also vereinfacht sagen:

$\{3,3\}$  ist zu sich selbst  
 $\{3,4\}$  und  $\{4,3\}$  sind zueinander und  
 $\{3,5\}$  und  $\{5,3\}$  sind zueinander dual.

Das Dualitätsprinzip lautet dann:

Wird eine Aussage für einen Platonischen Körper  $\{m,n\}$  nur aus Aussagen, welche sich aus  $m$  und  $n$  ableiten lassen, gewonnen, so ist diese Aussage auch für den Körper  $\{n,m\}$  gültig.

## 5.2 Reziproke Polyeder

Dieser Abschnitt bezieht sich unmittelbar auf den vorangegangenen. Zwischen dualen und reziproken Polyedern besteht ein enger Zusammenhang. Es existiert zu jedem Platonischen Körper ein reziprokes Polyeder.

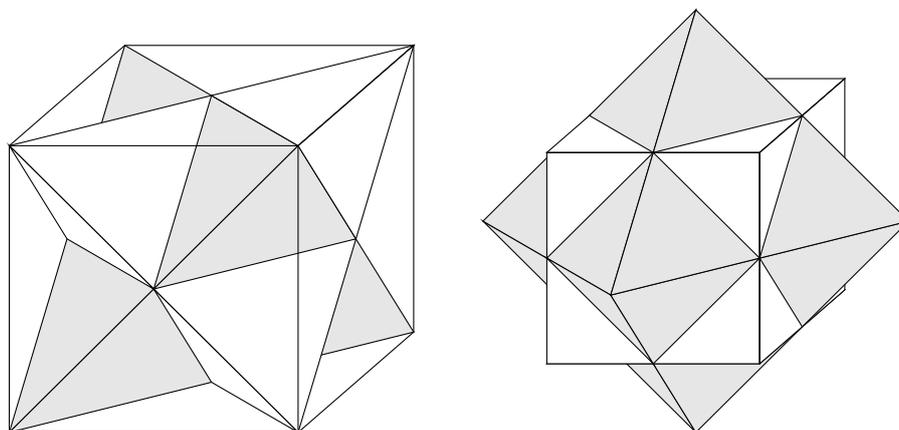
### Definition

Unter dem reziproken Polyeder versteht man dasjenige, dessen  $m$  in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten genau die  $m$  eine Flächen begrenzende Seiten eines anderen Polyeders halbiert und dessen  $n$  begrenzende Seiten einer Fläche genau  $n$  in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten des anderen halbiert.

Damit gilt: Reziprok zu  $\{m,n\}$  ist  $\{n,m\}$ , d.h., eine Ecke des einen entspricht einer Fläche des anderen Polyeders und umgekehrt.

Somit wird der Zusammenhang zwischen dualen und reziproken Polyedern deutlich. Jedes dual in einen anderen einbeschriebene Polyeder ist ein verkleinertes reziprokes Polyeder, denn jede Ecke eines reziproken Polyeders liegt genau über dem Seitenmittelpunkt des anderen reziproken Polyeders. Damit ist es nicht erforderlich, hier nochmals den Zusammenhang zwischen reziproken Polyedern aufzustellen. Einen vollständigen Überblick gibt Tabelle 4 aus 6.1.

Eine andere Darstellung geben die nachfolgenden Abbildungen, Die erste Abbildung zeigt die Verbindung zweier reziproker Polyeder, welche Tetraeder sind. Eine solche Verbindung kommt auch in der Natur vor, als sogenanntes Zwilling-Kristall.



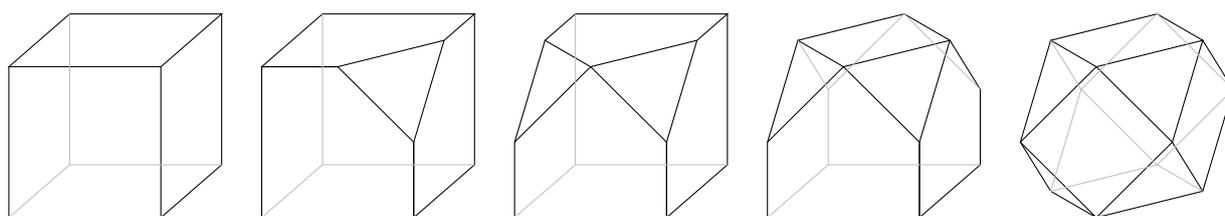
Auf der rechten Abbildung ist ein Oktaeder als Reziprokes zum Würfel gezeigt. Analoges lässt sich auch für das Dodekaeder und Ikosaeder zeichnen.

## 5.3 Abstumpfungen und halbreguläre Polyeder

Außer den fünf Platonischen Körpern gibt es, wie sich zeigen lässt, genau dreizehn halbreguläre Polyeder. Unter einem halbregulären Polyeder (konvex) versteht man ein Polyeder, welches von mindestens 2 und höchstens 3 verschiedenen kongruenten  $n$ -Ecken begrenzt wird.

Diese Körper werden auch Archimedische Körper genannt.

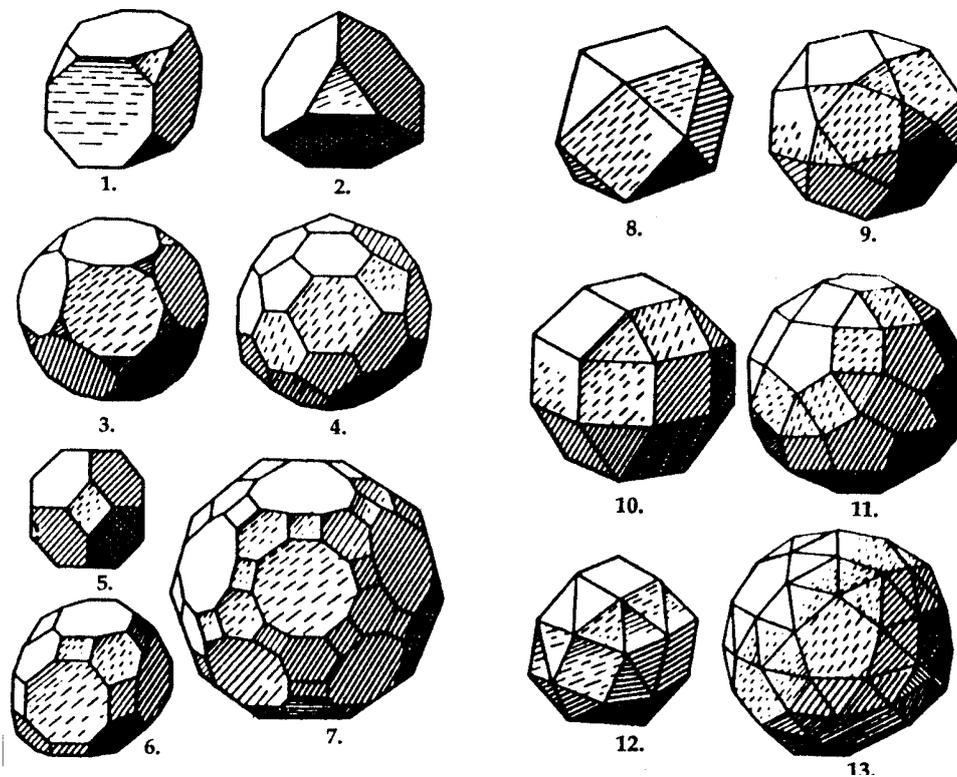
Alle diese Körper lassen sich durch geeignete Verstümmelungen der Platonischen Körper erzeugen.



Auf der oberen Abbildung ist zum Beispiel die Erzeugung eines halbregulären Polyeders aus einem Würfel in einzelnen Schritten dargestellt. Dabei werden die Kanten des Würfels halbiert und jede Ecke

entfernt, in dem eine gerade Pyramide abgeschnitten wird.

Eine Übersicht über alle Archimedischen Körper gibt die nachfolgende Abbildung aus Johannes Keplers "Harmonices mundi":



- |    |                               |    |                           |
|----|-------------------------------|----|---------------------------|
| 1  | Abgestumpftes Hexaeder        | 2  | Abgestumpftes Tetraeder   |
| 3  | Abgestumpftes Dodekaeder      | 4  | Abgestumpftes Icosaeder   |
| 5  | Abgestumpftes Oktaeder        | 6  | Abgestumpftes Kuboktaeder |
| 7  | Abgestumpftes Ikosidodekaeder | 8  | Kuboktaeder               |
| 9  | Ikosidodekaeder               | 10 | Rhombenkuboktaeder        |
| 11 | Rhombenikosidodekaeder        | 12 | Abgeschrägtes Hexaeder    |
| 13 | Abgeschrägtes Dodekaeder      |    |                           |

Im Folgenden sollen nur einige von ihnen ausgewählt und näher betrachtet werden.

Am bemerkenswertesten sind die Körper Kuboktaeder (Nr. 8) und Ikosidodekaeder (Nr. 9). Ihre Namen geben Aufschluss über die Entstehung dieser Polyeder.

Der Kuboktaeder ist aus dem reziproken Würfel und Oktaeder entstanden. Stellt man sich diesen Körper mit sämtlichen überstehenden 3- bzw. 4-seitigen Pyramiden entfernt vor, so entsteht der genannte.

Ebenso entsteht das Ikosidodekaeder aus dem reziproken Dodekaeder und Icosaeder mit wiederum entfernten überstehenden 3- bzw. 5-seitigen Pyramiden.

Ein dritter Körper soll hervorgehoben werden, das Rhombenkuboktaeder (Nr. 10). Stellt man sich diesen Körper derart vor, dass auf die Vier- und Dreiecksflächen entsprechende Pyramiden errichtet werden, so entsteht ein klassisches Beispiel für das Modell eines Adventssterns, welches sich leicht nachbauen lässt.

Stellte man sich das Abgestumpfte Icosaeder (Nr. 49) aufgeblasen vor, so hat man ein Modell des modernen Fußballs.

Dieser kleine Einblick in die Welt der halbrekulären Polyeder soll hier zur Vervollständigung des Wissenswerten über die Platonischen Körper genügen.



Das halbreguläre Polyeder Rhombenkuboktaeder (Nr. 10) auf einem Gemälde von (wahrscheinlich) Jacopo d'Barbari. Die Person im Zentrum stellt den Mathematiker Luca Pacioli (um 1445 - 1514 oder 1517) dar. Durch verschiedene Mathematikhistoriker wird die Person rechts als Albrecht Dürer (1471 - 1528) identifiziert.

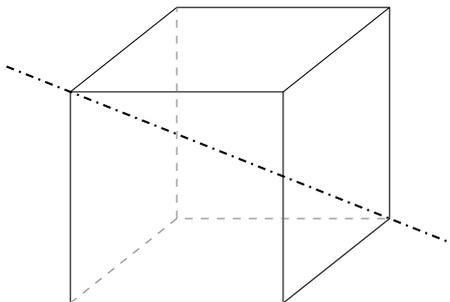
# Kapitel 6

## Symmetriegruppen der Platonischen Körper

### 6.1 Definition der Symmetriegruppe

Um ein Polyeder vollständig zu beschreiben, ist die Angabe seiner charakteristischen Bewegungsgruppe notwendig. Mitunter wird diese Gruppe auch Kongruenzgruppe genannt.

Dabei verstehen wir unter einer Kongruenz jede eigentliche und uneigentliche Bewegung des Körpers in der Ebenen und im Raum, welche den Körper mit sich selbst zur Deckung bringt. Dazu gehören alle Drehungen, Spiegelungen und Translationen des Körpers, welche ihn in sich selbst überführen.



Für den Würfel (siehe Abbildung) wäre zum Beispiel eine Drehung um  $180^\circ$  mit einer Körperdiagonalen als Drehachse eine eigentliche Kongruenz. Dagegen ist die Punktspiegelung am Schwerpunkt des Würfels eine uneigentliche Kongruenz oder Bewegung. Wir definieren:

#### Definition

Sei  $K$  ein beliebiges Polyeder. Unter der Drehgruppe  $D(K)$  des Körpers  $K$  verstehen wir dann alle eigentlichen Kongruenzen von  $K$  mit der Nacheinanderausführung als binäre algebraische Operation.

Dass die Menge aller Drehungen mit dieser Operation tatsächlich eine Gruppe darstellt, ergibt sich aus der Tatsache, dass jede Drehung um einen Winkel  $x$  ein Drehung um  $2\pi - x$  als inverse Drehung besitzt. Das neutrale Element wird dabei von der identischen Kongruenz, der Drehung um  $0^\circ$  gebildet. Die Assoziativität beruht auf der Assoziativität der Nacheinanderausführung von Bewegungen. Erweitern wir nun die Menge der eigentlichen Bewegungen um die uneigentlichen Bewegungen, so sagen wir:

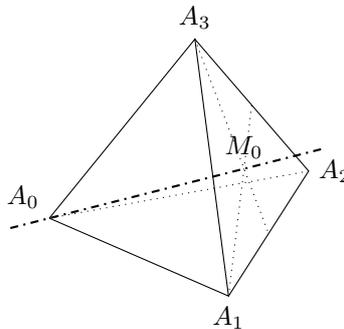
### Definition

Unter der vollständigen Symmetriegruppe  $S(K)$  eines Körpers  $K$  verstehen wir alle eigentlichen und uneigentlichen Kongruenzen des Körpers  $K$  mit der Nacheinanderausführung als Operation.

Offenbar ist die Drehgruppe  $D(K)$  eine echte Untergruppe der vollständigen Symmetriegruppe  $S(K)$ . Für den Würfel wird zum Beispiel der Nacheinanderausführung der Punktspiegelung und einer Drehung um einen Körperachse zu einer Drehspiegelung, einer uneigentlichen Bewegung. Wenden wir uns zuerst den Drehgruppen der Platonischen Körper zu.

## 6.2 Die Drehgruppe des Tetraeders

Um alle möglichen Drehungen am Tetraeder zu bestimmen, welche das Tetraeder in sich selbst überführen, betrachten wir zuerst alle Drehungen, welche einen Eckpunkt, z.B.  $A_0$ , festlassen. Derartige Drehungen müssen dann das Dreieck  $\Delta A_1 A_2 A_3$  in sich selbst überführen (siehe Abbildung).



Dies sind aber gerade die Drehungen um die Achse durch den Mittelpunkt  $M_0$  des Dreiecks  $\Delta A_1 A_2 A_3$  und den Punkt  $A_0$ . D.h., es existieren genau drei solche Drehungen:

1. Drehung:  $s_1$  die identische Drehung; alle Eckpunkte werden auf sich selbst abgebildet
2. Drehung:  $s_2$ , Achse  $A_0 M_0$  mit einem Drehwinkel von  $120^\circ$ , d.h.

$$A_1 s_2 = A_2 \quad ; \quad A_2 s_2 = A_3 \quad ; \quad A_3 s_2 = A_1$$

3. Drehung:  $s_3$ , Achse  $A_0 M_0$  mit einem Drehwinkel von  $240^\circ$ , d.h.

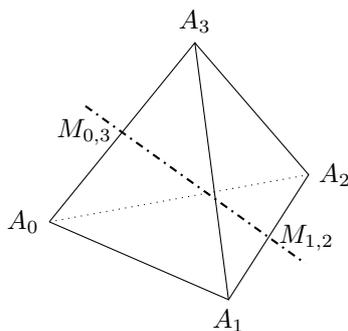
$$A_1 s_3 = A_3 \quad ; \quad A_2 s_3 = A_1 \quad ; \quad A_3 s_3 = A_2$$

Alle drei Drehungen lassen den Punkt  $A_0$  fest. Da wir Analoges für die drei restlichen Eckpunkte des Tetraeders erhalten, haben wir 9 Drehungen beschrieben. Neun deshalb, da 4 mal die identische Drehung auftritt.

Drehungen, welche 2 oder 3 Eckpunkte festlassen, kann es offensichtlich nicht geben. Damit bleibt noch die Möglichkeit, dass kein Punkt auf sich selbst abgebildet wird. Dabei treten erneut drei Drehungen auf, und zwar um die Achsen

$$M_{0,3} M_{1,2} \quad ; \quad M_{0,1} M_{2,3} \quad ; \quad M_{0,2} M_{1,3}$$

d.h., um die Achsen, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten schneiden (siehe Abbildung)



Da es keine weiteren Drehungen geben kann, der Beweis ist in Alexandrow [1], Seite 36, enthalten, erhalten wir für die Drehgruppe des Tetraeders eine Ordnung 12.

Schreiben wir jede der Drehungen als Permutation der Eckpunkte, d.h. für  $a_2$  (123), so erhalten wir

$$\begin{array}{lll} s_1 = (0) & s_2 = (123) & s_3 = (132) \\ s_4 = (032) & s_5 = (023) & s_6 = (012) \\ s_7 = (021) & s_8 = (013) & s_9 = (031) \end{array}$$

und für die zuletzt beschriebenen Drehungen um die drei Achsen durch die Kantenmittelpunkte

$$s_{10} = (03)(12) \quad s_{11} = (01)(23) \quad s_{12} = (02)(13)$$

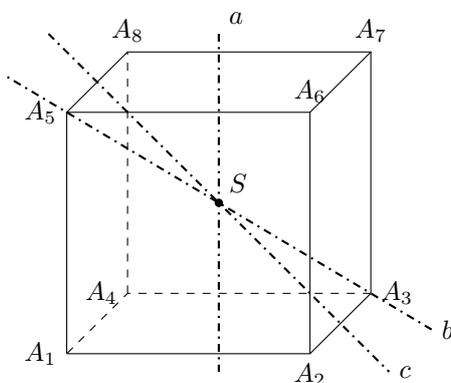
Man prüft schnell nach, dass alle diese Permutationen gerade sind. Da es aber genau 12 gerade Permutationen vom Grad 4 gibt, muss folglich die Drehgruppe  $D(T)$  des regelmäßigen Tetraeders isomorph zur alternierenden Gruppe vom Grad 4 sein, also isomorph zu  $\mathcal{A}_4$ .

Damit ist die Drehgruppe  $D(T)$  des Tetraeders vollständig beschrieben.

### 6.3 Die Drehgruppen des Würfels und des Oktaeders

Wie schon gezeigt, sind Würfel und Oktaeder zueinander duale Körper, d.h., jedem Würfel kann eindeutig ein Oktaeder einbeschrieben werden und umgekehrt. Dabei besitzen sie gleiche Symmetrieebenen, so dass jede Kongruenz des Würfels auch eine des Oktaeders darstellt, und auch umgekehrt. Dies bedeutet, dass die Drehgruppen beider Platonischer Körper zueinander isomorph sind. Deshalb beschränken wir uns auf den Würfel.

Für den Würfel erhalten wir 24 Drehungen. Durch je zwei Flächenmittelpunkte gegenüberliegender Seiten verlaufen Drehachsen, welche jeweils Drehungen um  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  gestatten. (siehe Abbildung)



Da es drei Paare gegenüberliegender Seiten gibt, und die identische Abbildung ( $0^\circ$ ) bei jedem Paar auftritt, ergeben sich 10 derartige Drehungen, die wir wieder durch Permutationen beschreiben. Dabei

wählen wir jedoch nicht die Eckpunkte als permutierende Elemente, sondern die vier Körperdiagonalen:

$$A_1A_z = D_1; \quad A_2A_8 = D_2; \quad A_3A_5 = D_3; \quad A_4A_6 = D_4$$

Außerdem schreiben wir für  $(D_1D_2D_3D_4)$  einfacher  $(1234)$ .

Für die 10 beschriebenen Drehungen erhalten wir damit:

$$\begin{array}{llll} s_1 = (1) & s_2 = (1234) & s_3 = (13)(24) & s_4 = (1432) \\ s_5 = (1432) & s_6 = (12)(34) & s_7 = (1324) & s_8 = (1243) \\ s_9 = (14)(23) & s_{10} = (1342) & & \end{array}$$

Weitere Drehungen ergeben sich, wenn wir die Körperachsen als Drehachsen benutzen. Dabei sind für jede Diagonale Drehungen um  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $240^\circ$  möglich, womit wir genau 8 noch nicht notierte Möglichkeiten erhalten:

$$\begin{array}{llll} s_{11} = (234) & s_{12} = (243) & s_{13} = (134) & s_{14} = (143) \\ s_{15} = (214) & s_{16} = (241) & s_{17} = (123) & s_{18} = (132) \end{array}$$

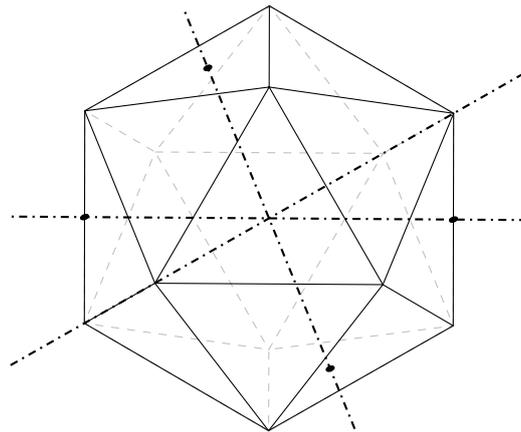
Dabei bleibt immer eine Diagonale, die Drehachse, invariant. Die restlichen 6 Abbildungen erhält man bei Drehungen um Achsen, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten (Art c) schneiden. Da der Würfel 12 Kanten, d.h. 6 Paare, besitzt, wird also

$$\begin{array}{llll} s_{19} = (12) & s_{20} = (13) & s_{21} = (14) & s_{22} = (23) \\ s_{23} = (24) & s_{24} = (34) & & \end{array}$$

Das Ergebnis sind 24 Permutationen vom Grad 4, d.h., also die volle Permutationsgruppe, die  $\mathcal{S}_4$ . Die Drehgruppen des Würfels und des Oktaeders sind isomorph zur vollen Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_4$  und besitzen die Ordnung 24.

## 6.4 Die Drehgruppen des Ikosaeders und des Dodekaeders

Um zu den Drehgruppen der zwei letzten der Platonischen Körper zu gelangen, verfahren wir wie bei Würfel und Oktaeder. Aus der Dualität folgt, dass beide Drehgruppen isomorph sind, womit wir nun das Ikosaeder betrachten. Beginnen wir mit Achsen der Art a. (siehe Abbildung)

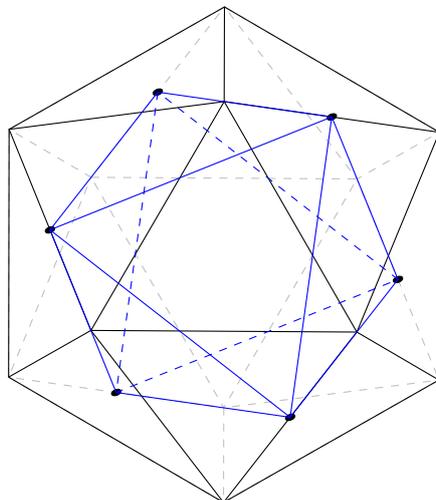


Durch je zwei gegenüberliegende Punkte verläuft eine Achse, welche Drehungen von  $0^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$  und  $288^\circ$  erlaubt. Da das Ikosaeder 12 Eckpunkte besitzt, erhalten wir so 24 plus die identische Abbildung, d.h. also 25 Drehungen.

Weiterhin verläuft durch die Flächenmittelpunkte eines jeden Paares von gegenüberliegenden Seitenflächen eine Drehachse, welche Drehungen um  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $240^\circ$  erlaubt. Das Ikosaeder besitzt 10 Flächenpaare und damit weitere 20 noch nicht genannte Drehungen.

Wählen wir zuletzt wieder Achsen, welche durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten gehen, kommen weitere 15 Drehungen hinzu, d.h., wir erhalten insgesamt 60 mögliche Drehabbildungen. Die Ordnung der Ikosaedergruppe bzw. der Dodekaedergruppe ist gleich 60.

Da wir auch hier diese Drehgruppen durch eine Permutationsgruppe ausdrücken wollen, überlegen wir wie folgt:



Wir wählen ein beliebiges Paar von gegenüberliegenden und damit parallelen Kanten. Zu diesen existieren zwei weitere Paare von gegenüberliegenden Kanten, die zueinander und zum Ausgangspaar senkrecht stehen. Wir markieren deren Mittelpunkte (siehe Abbildung). Diese sechs Punkte beschreiben offenbar ein regelmäßiges Oktaeder.

Da das Ikosaeder 30 Kanten besitzt und für ein derartiges Oktaeder 6 benötigt werden, können folglich 5 verschiedene Oktaeder einbeschrieben werden. Eine Drehung des Ikosaeders entspricht dann eine Permutation dieser 5 Oktaeder, d.h. die Drehgruppe des Ikosaeders muss eine Untergruppe der vollen Permutationsgruppe der Ordnung 5 sein.

Da die symmetrische Gruppe  $\mathcal{S}_5$  aber nur eine Untergruppe der Ordnung 60, nämlich die alternierende Gruppe  $\mathcal{A}_5$ , besitzt, können wir zusammenfassen:

Die Drehgruppe des Ikosaeders bzw. des Dodekaeders ist isomorph zur alternierenden Gruppe  $\mathcal{A}_5$ .

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen:

<b>Drehgruppen der Platonischen Körper</b>		
Körper	isomorphe Permutationsgruppe	Ordnung
Tetraeder	alternierende Gruppe vom Grad 4, $\mathcal{A}_4$	12
Würfel, Oktaeder	symmetrische Gruppe vom Grad 4, $\mathcal{S}_4$	24
Ikosaeder, Dodekaeder	alternierende Gruppe vom Grad 5, $\mathcal{A}_5$	60

## 6.5 Die vollständigen Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Im Folgenden sollen nun die vollständigen Symmetriegruppen beschrieben werden, d.h., wir werden die Drehgruppen durch die uneigentlichen Kongruenzen erweitern.

Dazu benutzen wir in der Hauptsache ein Verfahren, welches von Coxeter [4], Seite 337, beschrieben wird, dessen Nachweis aber mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich ist. Coxeter schreibt:

**Satz**

Besitzt die vollständige Symmetriegruppe eines Körpers eine Punktspiegelung  $p$ , so ergeben sich alle Drehspiegelungen (uneigentlichen Kongruenzen)  $ds_i$  aus den Drehungen  $s_i$  und der Punktspiegelung durch

$$ds_i = s_i \cdot p = p \cdot s_i$$

Weiterhin ist dann die vollständige Symmetriegruppe  $S(K)$  das direkte Produkt aus der Drehgruppe  $D(K)$  und der von  $p$  erzeugten zyklischen Gruppe der Ordnung 2

$$S(K) = D(K) \otimes \{p\}$$

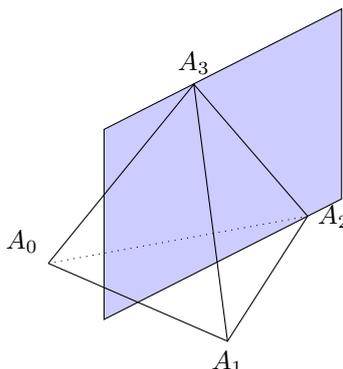
womit die Ordnung von  $S(K)$  gleich der doppelten Ordnung von  $D(K)$  ist.

Da bis auf das Tetraeder alle Platonischen Körper punktsymmetrisch sind, wird eine Anwendung dieses Satzes möglich sein. Für das Tetraeder werden wir Sondermaßnahmen treffen müssen.

## 6.6 Die vollständige Symmetriegruppe des Tetraeders

Betrachten wir zuerst die Spiegelungen als uneigentliche Bewegungen.

Offenbar führt eine Spiegelung an einer Ebene, welche die Strecke  $A_2A_3$  enthält und senkrecht auf  $A_0A_1$  steht, das Tetraeder in sich selbst über. (siehe Abbildung)



Dabei erhalten wir eine Permutation der Ecken des Tetraeders der Form (01), während  $A_2$  und  $A_3$  festgehalten werden. Da das Tetraeder sechs Kanten besitzt, existieren auch sechs derartige Spiegelungen, die wir wiederum durch Permutationen darstellen.

$$\begin{aligned} ds_1 &= (01) & ds_2 &= (02) & ds_3 &= (03) & ds_4 &= (12) \\ ds_5 &= (13) & ds_6 &= (23) \end{aligned}$$

Da die vollständige Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_4$  vom Grad 4 nur 24 Elemente besitzt, können nur noch sechs Drehspiegelungen am Tetraeder existieren. Weitere sind nicht möglich, da ein Tetraeder nur vier Eckpunkte besitzt, diese nur 24 mal permutierbar sind, und wir sechs Spiegelungen sowie 12 Drehungen des regelmäßigen Tetraeders schon beschrieben haben. Diese sechs Drehspiegelungen existieren.

Zum Nachweise drehen wir das Tetraeder um  $120^\circ$  um die Höhe durch den Eckpunkt  $A_3$  und spiegeln gleichzeitig an der Ebene, welche  $A_0A_1$  enthält und senkrecht zu  $A_2A_3$  ist. Damit wird  $A_0$  auf  $A_1$ ,  $A_1$  auf  $A_2$ ,  $A_2$  auf  $A_3$  und  $A_3$  auf  $A_0$  abgebildet, d.h.

$$ds_7 = (0123)$$

Weitere Drehspiegelungen sind

$$ds_8 = (0132) \quad ds_9 = (0312) \quad ds_{10} = (0321) \quad ds_{11} = (0213) \quad ds_{12} = (0231)$$

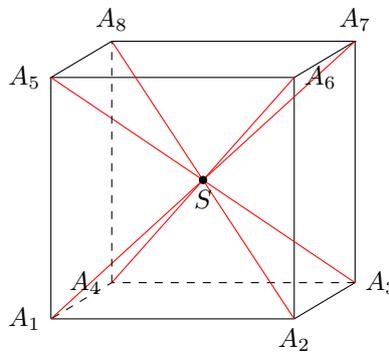
womit die volle Symmetriegruppe des Tetraeders 24 Elemente besitzt und isomorph zur vollen Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_4$  vom Grad 4 wird.

## 6.7 Die vollständigen Symmetriegruppen des Würfels und des Oktaeders

Da sowohl Würfel als auch Oktaeder punktsymmetrisch sind, gehört zu deren vollen Symmetriegruppen die Punktspiegelung am Mittelpunkt. Damit können wir den Satz von Coxeter anwenden.

Zur Notation der uneigentlichen Bewegungen ist eine Bemerkung notwendig. Da die Drehgruppe des Würfels bzw. des Oktaeders isomorph zur vollen Permutationsgruppe von Grad 4 ist, können wir die uneigentlichen Bewegungen nicht mehr als Permutationen der Würfeldiagonalen auffassen, ohne dass wir schon eine notierte Permutation erhalten. Deshalb verwenden wir jetzt Permutationen der Eckpunkte.

Für die Spiegelung am Schwerpunkt bedeutet dies (siehe Abbildung):  $ds_1 = (17)(28)(35)(46)$



Betrachten wir die Drehungen  $s_2$  bis  $s_9$  und führen wir deren Nacheinanderausführung mit der Punktspiegelung aus, erhalten wir

$$\begin{aligned} ds_2 = ds_1 s_2 &= (1836)(2547) & ds_3 = ds_1 s_3 &= (15)(26)(37)(48) & ds_4 = ds_1 s_4 &= (1638)(2745) \\ ds_5 = ds_1 s_5 &= (1683)(2574) & ds_6 = ds_1 s_6 &= (12)(34)(56)(78) & ds_7 = ds_1 s_7 &= (1386)(2475) \\ ds_8 = ds_1 s_8 &= (1863)(2457) & ds_9 = ds_1 s_9 &= (14)(23)(58)(67) & ds_{10} = ds_1 s_{10} &= (1368)(2754) \end{aligned}$$

Man sieht, dass  $ds_3$ ,  $ds_6$  und  $ds_9$  Ebenen-Spiegelungen an den drei Mittelparallelen des Würfels sind. Die restlichen sechs Bewegungen sind Drehspiegelungen.

Wählen wir die Diagonalen als Drehachsen und spiegeln anschließend am Schwerpunkt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} ds_{11} = ds_1 s_{11} &= (17)(234856) & ds_{12} = ds_1 s_{12} &= (17)(265843) \\ ds_{13} = ds_1 s_{13} &= (28)(156734) & ds_{14} = ds_1 s_{14} &= (28)(143765) \\ ds_{15} = ds_1 s_{15} &= (35)(126784) & ds_{16} = ds_1 s_{16} &= (35)(148732) \\ ds_{17} = ds_1 s_{17} &= (46)(123785) & ds_{18} = ds_1 s_{18} &= (46)(158732) \end{aligned}$$

also weitere acht Drehspiegelungen.

Bleiben noch die Verknüpfungen des Drehungen  $ds_{19}$  bis  $ds_{24}$  mit der Punktspiegelung. Die dabei entstehenden sechs Bewegungen sind gerade die Ebenenspiegelungen an Ebenen, welche gegenüberliegende parallel Kanten enthalten, d.h.

$$\begin{aligned} ds_{19} &= (18)(27) & ds_{20} &= (16)(34) & ds_{21} &= (13)(57) \\ ds_{22} &= (25)(38) & ds_{23} &= (24)(68) & ds_{24} &= (36)(45) \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

- a) 3 Ebenenspiegelungen, an den mittelparallelen Ebenen:  $ds_3, ds_6, ds_9$
- b) 6 Ebenenspiegelungen, an den Ebenen, welche gegenüberliegende Kanten enthalten:  $ds_{19}$  bis  $ds_{24}$
- c) 14 Drehspiegelungen:  $ds_2, ds_4, ds_5, ds_8, ds_7, ds_{10}$  bis  $ds_{18}$
- d) 1 Punktspiegelung am Schwerpunkt:  $ds_1$
- e) und 24 Drehungen der Hexaeder-Gruppe

Die volle Symmetriegruppe des Würfels (Oktaeders) enthält damit 48 Bewegungen und ist zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe vom Grad 8 isomorph.

Benutzen wir das Verfahren von Coxeter, so können wir die vollständige Symmetriegruppe des Würfels  $S(W)$  auch als direkte Summe darstellen:

$$S(W) = D(W) \otimes \{P\} \quad ; \quad S(W) = \mathcal{S}_4 \otimes \{P\}$$

## 6.8 Die vollständigen Symmetriegruppen des Ikosaeders und des Dodekaeders

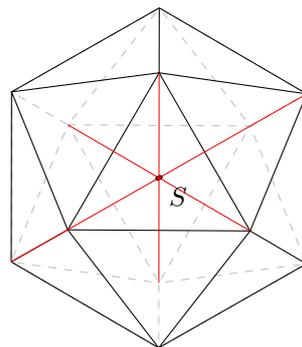
Auf Grund der Dualität von Ikosaeder und Dodekaeder genügt es wieder, einen der Körper zu betrachten. Die vollen Symmetriegruppen beider Platonischer Körper sind isomorph zueinander. Wir wählen das Ikosaeder.

Da das Ikosaeder punktsymmetrisch ist, existiert wieder eine Punktspiegelung und wir erhalten für die volle Symmetriegruppe

$$S(I) = D(I) \otimes \{p\} = \mathcal{A}_5\{p\} = \mathcal{A}_5\}Z_2$$

Aus der Gruppentheorie ist aber bekannt, dass das direkte Produkt der alternierenden Gruppe vom Grad 5 und der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 isomorph zur vollen Permutationsgruppe vom Grad 5 ist. Damit sind die vollständigen Symmetriegruppen von Ikosaeder bzw. Dodekaeder schon charakterisiert.  $S(I)$  ist isomorph zur Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_5$  und enthält damit 120 Kongruenzen.

Die Aufgabe besteht nun darin, die 60 uneigentlichen Bewegungen zu klassifizieren. Wie schon erwähnt, liegt eine Punktspiegelung am Schwerpunkt vor. (siehe Abbildung)



Des weiteren erzeugen gegenüberliegende Kanten, welche parallel sind, eine Ebene, an der der Körper gespiegelt werden kann und dabei in sich selbst übergeht. Da 15 gegenüberliegende Paare existieren, liegen 15 Ebenenspiegelungen vor.

Weiterhin erhalten wir (nach dem Satz von Coxeter) 24 Drehspiegelungen in dem um Achsen gegenüberliegende Punkte gedreht und anschließend am Schwerpunkt gespiegelt wird.

20 Drehspiegelungen entstehen, in dem um Achsen durch die Flächenmittelpunkte gegenüberliegender Flächen gedreht und anschließend am Schwerpunkt gespiegelt wird.

Damit erhalten wir 60 uneigentliche Bewegungen am Ikosaeder. Die vollständige Symmetriegruppe von Ikosaeder und Dodekaeder ist die volle Permutationsgruppe vom Grad 5, die  $\mathcal{S}_5$ . Fassen wir zusammen:

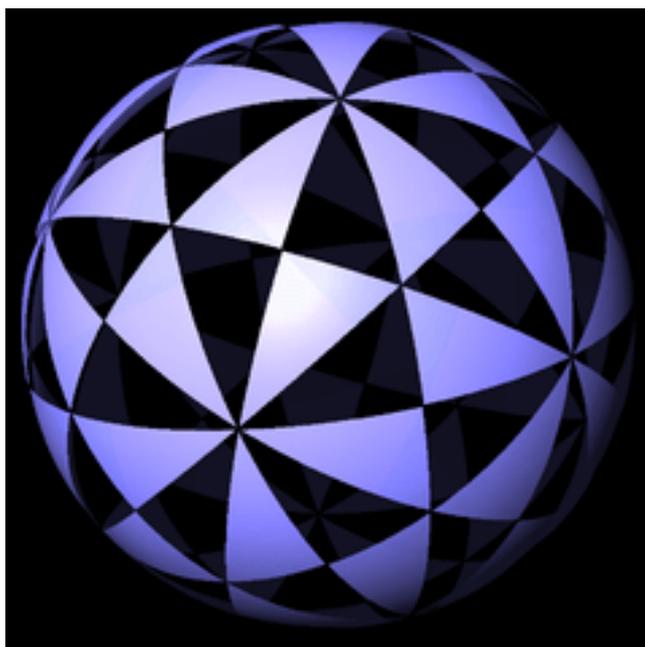
Vollständige Symmetriegruppen der fünf Platonischen Körper

Körper	isomorphe Gruppe	Ordnung
Tetraeder	symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$	24
Würfel, Oktaeder	Untergruppe der $\mathcal{S}_8 = \mathcal{A}_4 \otimes \{p\}$	48
Ikosaeder, Dodekaeder	symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_5$	120

## 6.9 Polyederkaleidoskop

Um die Drehgruppen und vollständigen Symmetriegruppen auch anschaulich darzustellen, verwenden wir das sogenannte Möbiussche Polyederkaleidoskop.

Es sei ein Platonischer Körper  $\{p,q\}$ , ( $\{p,q\}$  ist wieder das Schläfli-Symbol des Platonischen Körpers) gegeben. Projizieren wir die  $e$  Kanten dieses Platonischen Körpers aus dem Schwerpunkt heraus auf eine Kugel, welche konzentrisch bezüglich des Körpers liegt, erhalten wir  $e$  Großkreisbögen auf dieser Kugel. Besitzt der Platonische Körper  $f$  Flächen, so teilen diese Großkreisbögen die Kugeloberfläche in genau  $f$  Gebiete, welche sphärische  $p$ -Ecke sind. Spiegeln wir nun an den Seiten dieser sphärischen  $p$ -Ecke, entstehen sphärische Dreiecke. (siehe Abbildung)



Ebenso erhalten wir dieses Bild, wenn gleichzeitig des reziproke Polyeder  $\{q,p\}$  vom Mittelpunkt auf diese Kugel projiziert wird und wir gleichzeitig die Ebenen, welche den Schwerpunkt mit den Kanten von  $\{p,q\}$  und  $\{q,p\}$  verbinden, einzeichnen. Die entstandenen Dreiecke werden abwechselnd blau und schwarz gefärbt.

Auf der Abbildung ist das Kaleidoskop für die dualen Platonischen Körper Ikosaeder und Dodekaeder dargestellt. Es ist nun möglich aus diesem Kaleidoskop die Drehgruppe und vollständige Symmetriegruppe beider Körper anzulesen.

Dabei stellt ein zehnzähliger Punkt (in diesem treffen fünf schwarze und fünf blaue Dreiecke zusammen) offenbar dem Mittelpunkt einer Seitenfläche des Dodekaeders und gleichzeitig den Eckpunkt eines Ikosaeders dar.

Ein sechszähliger Punkt (in ihm laufen 3 schwarze und 3 blaue Dreiecke zusammen) charakterisiert dann einen Eckpunkt eines Dodekaeders bzw. den Flächenmittelpunkt einer Seitenfläche des Ikosaeders.

Die noch auftretenden vierzähligen Punkte sind die Projektionsbilder der Kantenmittelpunkte sowohl des Dodekaeders als auch des Ikosaeders.

Ermitteln wir zuerst die Drehgruppen. Drehen wir um einen zehnzähligen Punkt, so kann man ein blaues Dreieck mit sich selbst (identische Abbildung) und weiteren vier Dreiecken zur Deckung bringen. Um einen zehnzähligen Punkt sind also 4 Drehungen und die identische Abbildung möglich. Dies entspricht gerade den Drehungen des Dodekaeders um seine Seitenflächenmittelpunkte.

Da ein zehnzähliger Punkt aber auch ein Eckpunkt des dualen Ikosaeders charakterisiert, haben damit auch die Drehungen um Achsen durch gegenüberliegende Eckpunkte beschrieben.

Insgesamt können wir sagen, dass jede Drehung der Kugel um einen zeh-, sechs- oder vierzähligen Punkt, wobei blaue Dreiecke in blaue und schwarze in schwarze übergeführt werden, eine Drehung der Platonischen Körper, in unserem Fall des Ikosaeders und des Dodekaeders, darstellt.

Damit erhalten wir aber die vollständige Drehgruppe beider Körper, die auch isomorph sein müssen.

Um eine uneigentliche Bewegung zu charakterisieren, müssen blaue Dreieck in schwarze und schwarze in blaue Dreiecke übergeführt werden. Dies erreicht man aber durch Drehungen und anschließende Spiegelungen an Großkreisen der Kugel.

Damit beenden wir die Diskussion von Dreh- und Symmetriegruppen der Platonischen Körper.

# Kapitel 7

## Netze

### 7.1 Netze der Platonischen Körper

Einer der Platonischen Körper, das Tetraeder, begegnet uns täglich als "Tetrapack". Wir kaufen zum Beispiel Milch in solchen Verpackungen. Vor Jahren gab es dabei Diskussionen, warum ein Tetraeder für diesen Zweck genommen wurde und kein Hexaeder, also ein Würfel.

Ein Würfel, so führten seine Befürworter an, besitzt nach der Kugel die kleinste Oberfläche im Vergleich zu seinem Volumen. Man würde also im Falle des Würfels weniger Verpackungsmaterial benötigen als bei einem Tetraeder.

Dies stimmt offenbar, jedoch sind weitere Kriterien an den benutzten Körper zu stellen:

1. Welches ist der kleinste Verpackungsaufwand, bezogen auf den Inhalt?
2. Welchen Körper kann man am einfachsten aus einer ebenen Fläche durch einfaches Falten herstellen?
3. Welcher Körper hat die kürzeste Verbindungsstelle nach dem Falten?
4. Welcher Körper besitzt am wenigsten Verschnitt?
5. Welchen Körper kann man möglichst lückenlos stapeln?
6. Bei welchem Körper gibt es die wenigsten Verwechslungsmöglichkeiten, wenn eine Seite besonders gekennzeichnet werden soll?

Frage 1 und 6 können wir jetzt schon beantworten, während die restlichen Probleme noch nicht lösbar sind. Nach Frage 1 sind offenbar die Kugel und der Würfel die geeignetsten Körper, nach Frage 6 das Tetraeder, da es die wenigsten Seitenflächen besitzt.

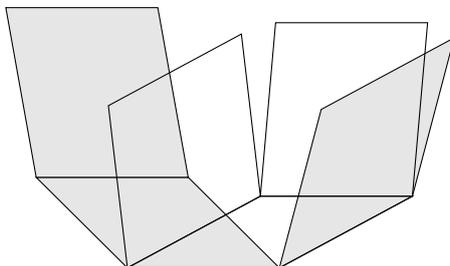
Hier werden wir uns nur mit den Fragen 2 bis 4 beschäftigen, während Frage 5 erst im Abschnitt 8 beantwortet werden kann. Um eine Antwort zu finden, muss zuerst der Begriff des Netzes eines Polyeders geklärt werden.

#### 7.1.1 Das Netz eines Polyeders

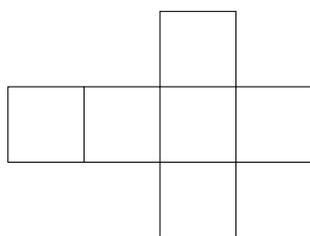
Will man aus Papier oder anderem Material einen Würfel herstellen, so kann man, da der Würfel sechs Seitenflächen besitzt, aus dem Material sechs kongruente Quadrate ausschneiden und diese auf geeignete Weise zusammenkleben. Dabei ist jede Kante des Würfels eine Klebekante.

Würde man derart aus zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken ein Ikosaeder bauen, so müsste 30 mal geklebt werden, was unökonomisch ist.

Wir können uns weitgehend Arbeit ersparen, wenn wir einige Seiten des zu konstruierenden Körpers zusammenhängend ausschneiden, diese falten und dann zusammenkleben. Am besten wird es, wenn wir den Körper, das Polyeder (Körper mit gekrümmten Kanten sind derart nicht herstellbar) auf eine Ebene "abwickeln". Darunter versteht man, das Polyeder an einer genügend großen aber hinreichend kleinen Anzahl von Kanten aufzuschneiden und die Seitenflächen in die Ebene zu klappen. In der Abbildung ist ein Würfel an sieben Kanten aufgeschnitten und schon etwas aufgeklappt.



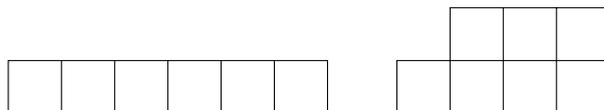
Die zweite Abbildung zeigt dann das in der Ebene entstehende Bild.



Eine genügend große Anzahl von aufgeschnittenen Kanten fordern wir, da alle Seitenflächen des Körpers in die Ebene gedreht werden sollen. Eine hinreichend kleine Zahl von Kanten fordern wir, da alle Seitenflächen zumindest mit einer weiteren noch durch eine oder mehrere Kanten verbunden sein sollen. Das dabei in der Ebene entstehende Bild nennen wir ein ebenes Netz des Polyeders. Die obere Abbildung zeigt folglich ein ebenes Netz eines Würfels.

Wie man sieht, kann man aus dem Netz eines Polyeders das Polyeder selbst wieder herstellen, indem man die nicht aufgeschnittenen Kanten faltet und die anderen Kanten zusammenklebt.

Sicher wird es von einem Polyeder (auch von jedem der fünf Platonischen Körper) mehrere verschiedene ebene Netze geben, jedoch ist eine willkürliche Aneinanderreihung der Seitenflächen des Polyeders in der Ebene nicht notwendigerweise ein Netz. Die nachfolgende Abbildung zeigt zwei Aneinanderreihungen von sechs kongruenten Quadraten, die aber offensichtlich keine Netze des Würfels darstellen, da aus ihnen kein Würfel durch einfaches Falten und anschließendes Kleben hergestellt werden kann.



Es entstehen nun für die fünf Platonischen Körper die Fragen, ob sie verschiedene Netze besitzen, wieviel sie jeder besitzen, welche besonders charakteristisch sind usw. usf.

Deshalb werden wir uns im Folgenden mit der Bestimmung der Netze der Platonischen Körper befassen, und wenn es möglich ist, diese auch explizit angeben. Zur besseren Verdeutlichung des Vorgehens beginnen wir mit den zueinander dualen Körpern Würfel und Oktaeder.

## 7.2 Inkongruente Netze bei Würfel und Oktaeder

Wir werden nun die Aufgabe lösen, die Anzahl der möglichen Netze des Würfels bzw. Oktaeders zu ermitteln. Dabei schränken wir insofern ein, dass zwei Netze bei einseitig gefärbtem Papier dann und nur dann verschieden sind, wenn sie durch keine eigentlichen und uneigentlichen Bewegungen in der Ebene auseinander hervorgehen.

Bei zweiseitig gefärbten Papier, d.h. wir unterscheiden Vorder- und Rückseite des Papiers, welches wir zur Herstellung des Netzes verwenden, sollen zwei Netze dann und nur dann verschieden sein, wenn sie nicht durch Drehungen auseinander hervorgehen.

Zuerst bestimmen wir die Anzahl der verschiedenen oder inkongruenten Netze bei zweiseitig gefärbtem Papier. Würfel und Oktaeder sind duale Polyeder, so dass es hier wieder ausreichend sein wird, einen von beiden zu betrachten. Dabei werden wir jeweils das einfacher zu handhabende Polyeder benutzen. Außerdem wird es notwendig sein, einige Überlegungen aus der Graphentheorie zu benutzen.

### 7.2.1 Die Gewinnung eines Netzes

Zuerst betrachten wir den Würfel. Um alle möglichen Netze zu erhalten, benutzen wir die Überlegungen aus 8.1.1. Wir denken uns einen Würfel aus Papier angefertigt. Indem wir geeignete Kanten des Würfels aufschneiden und entsprechende Seitenflächen in die Ebene klappen, erhalten wir eines der gesuchten Netze. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen dies nochmals für den Würfel und das Oktaeder. Dabei sind die aufgeschnittenen Kanten nummeriert.

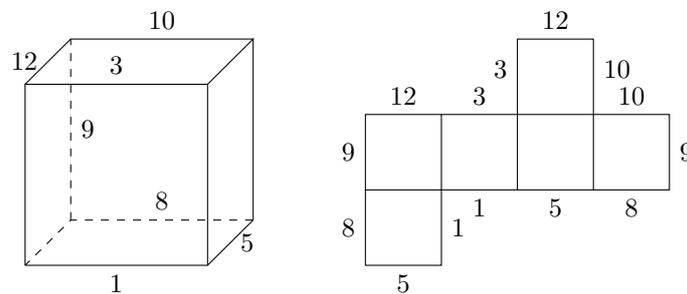
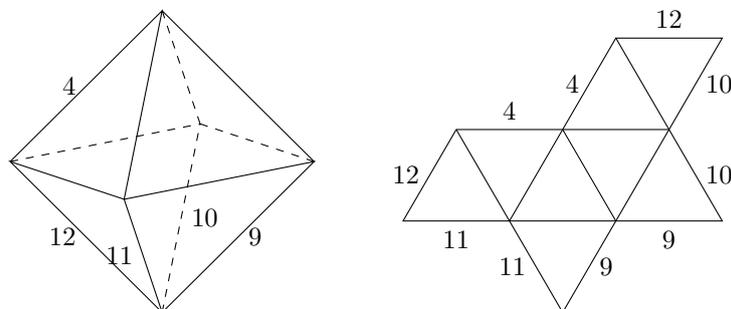
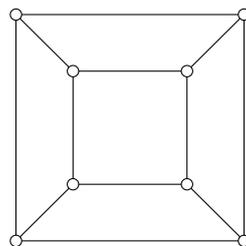


Abbildung: Würfel mit Netz



Um das Auseinanderschneiden und Aufklappen exakt zu beschreiben, betrachten wir den von den 8 Eckpunkten und 12 Kanten des Würfels gebildeten Graphen. In der nachfolgenden Abbildung ist ein Graph dargestellt, welcher zu dem Graph des Würfels isomorph ist.



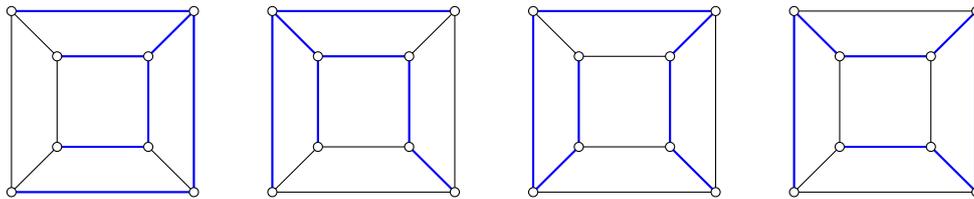
Den Eckpunkt-Kanten-Graphen des Würfels bezeichnen wir mit  $G_w$  und jeden zu  $G_w$  isomorphen Graphen als Würfelgraph. Im Graphen  $G_w$  kennzeichnen wir nun alle Kanten, an denen der Würfel zur Gewinnung eines Netzes aufgeschnitten werden soll, und bezeichnen diese Kanten als Schnittkanten. Die Abbildung "Würfel mit Netz" zeigt dies für den Würfel.

Es wird vereinbart, dass die Papieroberseite die Außenseite des Würfels bildet, d.h. also, dass das Papier zweiseitig verschieden gefärbt ist. Offensichtlich liegt jede Würfecke auf einer Schnittkante. Wäre diese nicht gegeben, könnten wir den Würfel nicht als Netz in die Ebene ausbreiten.

Die Eckpunkte des Würfels und alle Schnittkanten bilden dann einen Teilgraphen  $S_w$  und  $G_w$ . Dieser Teilgraph enthält sicher keine Kreise, da sonst eine Seitenfläche des Würfels nach dem Aufschneiden keine Verbindung zu einer anderen Fläche mehr besitzen würde.

Da die Netze zusammenhängende geometrische Gebilde sind, muss auch der Teilgraph  $S_w$  zusammenhängend sein. Der Teilgraph ist damit ein kreisloser zusammenhängender Teilgraph von  $G_w$ , der alle Knoten (Eckpunkte des Würfels) von  $G_w$  enthält.

Durch diese Eigenschaften sind aber alle Gerüste des Würfel-Graphen definiert. Die Abbildung zeigt verschiedene Gerüste des Würfelgraphen.



Ohne Beweis übernehmen wir aus der Graphentheorie die Tatsache, dass die Gerüste eines Graphen mit  $n$  Knoten  $n - 1$  Kanten besitzen. Da der Würfel-Graph  $G_w$  8 Knoten enthält, muss ein Gerüst des Würfels 7 Kanten besitzen, d.h., um aus einem Würfel ein ebenes Netz zu gewinnen, müssen wir genau 7 Kanten auf geeignete Weise trennen.

Da nun offenbar zu jedem Netz des Würfels eindeutig ein Gerüst gehört, und umgekehrt, beschränkt sich unsere Aufgabe auf die Bestimmung aller inkongruenten Gerüste des Würfels. Inkongruente Gerüste eines Würfels sind aber nur diejenigen, welche durch keine Drehung des Würfels auseinander hervorgehen.

Damit erzeugen die Drehungen eines Würfels in der Menge der Gerüste eine Äquivalenzrelation, wobei zu jeder Äquivalenzklasse dann ein inkongruentes Netz gehört. Wir können also sagen:

**Satz**

Die Anzahl der inkongruenten Netze des Würfels stimmt mit der Anzahl der inäquivalenten Gerüste von  $G_w$  bezüglich der Würfeldrehgruppe (Oktaederdrehgruppe) überein.

Es wäre noch zu zeigen, dass auch jedem Netz des Oktaeders ein Gerüst zugeordnet werden kann, und dass zwischen Würfel und Oktaeder eine Beziehung besteht, welche auch tatsächlich die Berechtigung gibt, aus der Dualität beider Körper zu schließen, dass beide die gleiche Anzahl von Netzen besitzen. Dies wird hier nicht getan, da die Kenntnisse aus der Graphentheorie dafür nicht ausreichend sind. Zu diesem Problem sei auf Jeger [17], Seite 75 bis 77, verwiesen.

### 7.2.2 Die inäquivalenten Gerüste von $G(W)$

In diesem Abschnitt werden wir uns aus Gründen der Zweckmäßigkeit auf das Oktaeder beziehen. Dazu bezeichnen wir noch den Eckpunkt-Kanten-Graphen des Oktaeders mit  $G_o$ .

Es sollen nun alle inäquivalenten Gerüste von  $G_o$  in Bezug auf die Oktaedergruppe bestimmt werden. Die Oktaedergruppe erzeugt auf der Menge aller Gerüste  $G$  des Oktaeders eine Permutationsgruppe, welche wir mit  $H_o$  bezeichnen. Jedes inäquivalente Netz von  $G_o$  wird dann durch eine Transitivitätsklasse von  $G$ , welche durch  $H_o$  hervorgerufen wird, charakterisiert.

Unter einer Transitivitätsklasse verstehen wir hier alle Elemente, d.h., Gerüste aus  $G$ , welche durch irgendeine Permutation aus  $H_o$  ineinander übergeführt werden. D.h. also:

Zwei inäquivalente Gerüste können, da es keine Drehung in der Oktaedergruppe gibt, welche sie ineinander überführt, und damit auch keine Permutation in  $H_o$  existiert, welche das eine Gerüst in das andere überführt, nicht in ein und derselben Transitivitätsklasse liegen.

D.h., jedem inkongruenten Netz kann eineindeutig eine Transitivitätsklasse zugeordnet werden.

Damit müssen wir noch die Anzahl aller Transitivitätsklassen der Permutationsgruppe  $H_o$  bestimmen. Dazu benutzen wir das Lemma von Burnside. Dieses sagt aus:

**Lemma von Burnside**

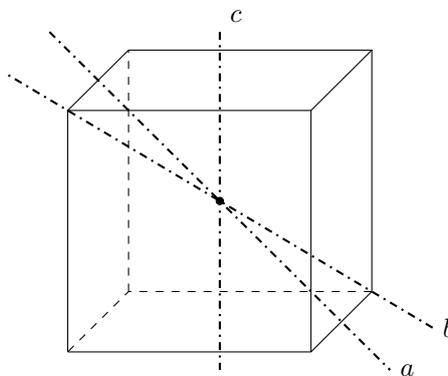
Die Anzahl der Transitivitätsklassen  $t(p)$  einer Permutationsgruppe  $P$  ist gleich

$$t(p) = \frac{1}{m(P)} \sum_{w \in P} x(w)$$

wobei  $m(p)$  die Ordnung der Gruppe  $P$  und  $x(w)$  die Anzahl der Objekte ist, welche bei der Permutation  $w$  von  $P$  invariant bleiben. Dabei ist die Summe über alle Permutationen von  $P$  auszuführen.

Für die Bestimmung der Transitivitätsbereiche der Permuationsgruppe  $H_o$  des Oktaders benötigen wir die Oktaederdrehgruppe. Wie wir in 6.3 sahen, gehören zur Oktaedergruppe:

- die identische Abbildung
- 6 Drehungen um Achsen der Art a
- 8 Drehungen um Achsen der Art b
- 9 Drehungen um Achsen der Art c



Ein Oktaedergruppe hat die Ordnung 24. Wir teilen nun die Drehungen wie folgt auf:

1.  $S_a$  sei eine  $180^\circ$ -Drehung um eine Achse a
2.  $D_b$  sei eine  $120^\circ$ -Drehung um eine Achse b
3.  $D_c$  sei eine  $90^\circ$ -Drehung um eine Achse c
4.  $S_c$  sei eine  $180^\circ$ -Drehung um eine Achse c

Mit  $e$  bezeichnen wir die identische Abbildung und mit  $s_a, d_b, d_c$  und  $s_c$  die Permutationen auf  $G$ , die aus den Drehungen  $S_a, D_b, D_c, S_c$  abgeleitet sind. Dann gilt für die Transitivitätsbereiche

$$t(H_o) = \frac{1}{24} (x(e) + 6x(s_a) + 8x(d_b) + 6x(d - c) + 3x(s_c))$$

Nun bestimmen wir die Anzahl der invariant bleibenden Gerüste bei den einzelnen Permutationen.

Bestimmung von  $x(e)$ :

Die identische Permutation lässt alle Gerüste von  $G$  invariant.  $x(e)$  ist folglich die Anzahl aller Gerüste von  $G_o$ . Zur Berechnung dieser Anzahl benutzen wir das Theorem von Kirchhoff-Trent.

Dazu besitze der Graph die Knoten  $P_1, \dots, P_n$ .  $r_i$  sei die Anzahl der in  $P_i$  zusammenlaufenden Kanten von  $v_{ij}$  die Anzahl der Verbindungen der Knoten  $P_i$  und  $P_j$ . Ist  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol, dann heißt die  $n$ -reihige Matrix  $A$  mit den Elementen

$$a_{ij} = \delta_{ij}r_i - v_{ij}$$

die Admittanz-Matrix des Graphen.

Streichen wir jetzt aus dieser Matrix eine beliebige Reihe  $i$  und die Zeile  $i$  heraus, so erhalten wir eine Matrix  $A_i$ , welche  $(n - 1)$ -reihig ist. Das Theorem von Kirchhoff-Trent besagt nun, dass die Determinante von  $A_i$ , unabhängig von  $i$ , gleich der Anzahl der Gerüste ist.

Für den Eckpunkt-Kanten-Graphen  $G_o$  des Oktaeders bedeutet dies:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Streichen wir die 6. Zeile und Reihe:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmt man die Determinante dieser 5-reihigen Matrix, erhält man

$$\det A_6 = 384$$

womit der Graph  $G_o$  also genau 384 Gerüste besitzt.

Auf Grund der Gleichberechtigung des Oktaeders und des Würfels hätten wir auch die Admittanz-Matrix des Graphen  $G_w$  des Würfels bestimmen können, jedoch besitzt diese, da der Würfel 8 Eckpunkte besitzt, 8-Reihen, so dass die Bestimmung einer Determinante einer 7-reihigen Matrix notwendig gewesen wäre, woraus sich die Benutzung des Oktaeders ergibt.

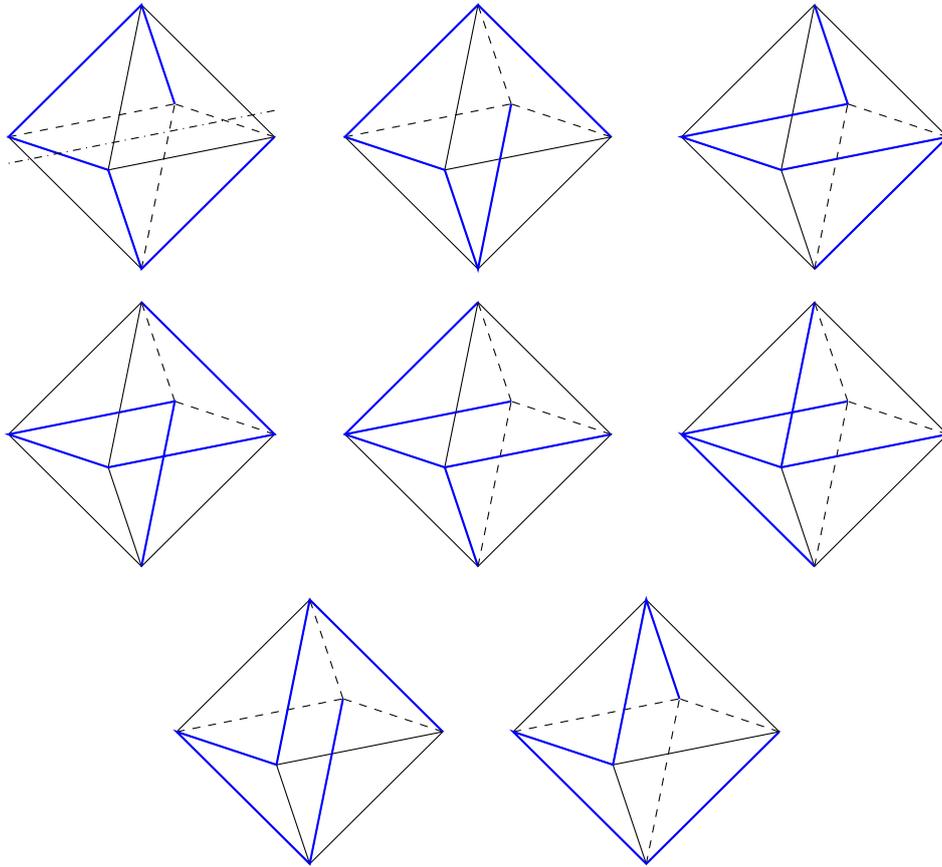
Beim Ikosaeder werden wir noch sehen, dass Probleme bei der Auflösung der Determinanten auftreten können.

Bestimmung von  $x(s_a)$ :

$x(s_a)$  ist die Anzahl der Gerüste von  $G_o$ , welche bei der Permutation  $s_a$  invariant bleiben. Diese und nur diese Gerüste bleiben dann aber auch bei einer Drehung  $S_a$  invariant. Da ein Gerüst von  $G_o$  5 Kanten besitzt, muss damit die Drehachse von  $a$  durch den Mittelpunkt einer Kanten des Oktaeders gehen. Wie man auf der nachfolgenden Abbildung sieht, gibt es offenbar 8 bezüglich  $s_a$  invariante Gerüste mit der Kante  $P_1P_2$ .

Da es aber für die Kante  $P_3P_4$  ebensoviele bezüglich  $s_a$  gibt, wird:

$$x(s_a) = 16$$



Bestimmung von  $x(d_b)$ ,  $x(d_c)$  und  $x(s_c)$ :

Eine  $120^\circ$ -Drehung des Oktaeders um eine Achse der Art b wird durch Zyklen der Länge 3 beschrieben. Da ein Gerüst von  $G_o$  aber 5 Kanten besitzt, kann es kein Gerüst geben, welches invariant bleibt. Es ist  $x(d_b) = 0$ .

Aus einer  $90^\circ$ -Drehung geht eine Permutation mit 4-Zyklen hervor, so dass hier ebenfalls  $x(d_c) = 0$  ist.

Da nun bei einer  $180^\circ$ -Drehung um eine Achse der Art c vier Zweierzyklen die Permutation beschreiben, kann wiederum kein Gerüst invariant bleiben:  $x(s_c) = 0$ .

Wenden wir das Lemma von Burnside an, erhalten wir:

$$t(H_o) = \frac{1}{24}(384 + 6 \cdot 16) = 20$$

und damit:

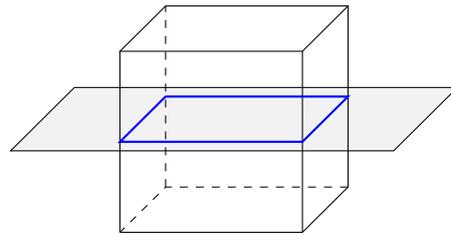
Bei Verwendung von Papier mit unterschiedlich gefärbten Seiten gibt es beim Würfel und beim Oktaeder je 20 inkongruente ebene Netze.

### 7.2.3 Anzahl der Netze bei nichtunterscheidbaren Papierseiten

Um nun die Anzahl der inkongruenten Netze beider Körper zu bestimmen, wenn die Papierseiten nicht unterscheidbar sind, muss von der Drehgruppe zur vollen Symmetriegruppe übergegangen werden. Wie wir in 6.7 sahen, gehören zu den uneigentlichen Kongruenzen des Würfels bzw. des Oktaeders

1. 3 Ebenenspiegelungen an den mittelparallelen Ebenen (siehe Abbildung)
2. 6 Ebenenspiegelungen an den Ebenen, welche gegenüberliegende Kanten enthalten
3. 14 Drehspiegelungen und
4. 1 Punktspiegelung

Wie bei den eigentlichen Bewegungen kann man auch hier zeigen, dass nur für die drei erstgenannten Ebenenspiegelungen invariante Gerüste existieren.



Wir erhalten damit

$$t(H'_o) = \frac{1}{48}(384 + 6 \cdot 16 + 3 \cdot 16) = 11$$

womit es also 11 inkongruente Netze (bei Nichtunterscheidung der Papierseiten) bei Würfel und Oktaeder gibt.

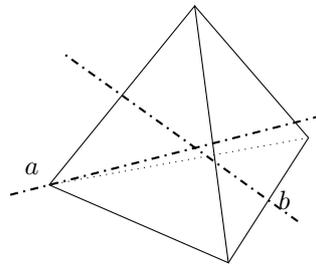
Auf der nächsten Seite werden alle diese Netze des Würfels und des Oktaeders dargestellt. Wendet man diese Netze um, so gehen alle Netze, außer den beiden mit eingezeichneten Symmetrieachsen, in die restlichen 9 inkongruenten Netze über, welche mit den 11 die 20 inkongruenten Netze bei unterscheidbaren Papierseiten bilden.

Es sei jetzt schon darauf hingewiesen, dass wir die Frage 4 aus Abschnitt 7.1 für den Würfel negativ beantworten müssen. Betrachtet man alle 11 Netze des Würfels, so sieht man, dass immer ein Verschnitt auftreten muss.

### 7.3 Inkongruente Netze beim Tetraeder

Wenden wir uns den Netzen des einfachsten Platonischen Körpers zu, dem Tetraeder.

Da wir wieder das für Würfel und Oktaeder beschriebene Verfahren anwenden, können wir gleich das Lemma von Burnside ansetzen. Die Drehungen der Tetraederdrehgruppe sind:



1. 1 identische Abbildung
2. 8 Drehungen um Achsen der Art a
3. 3 Drehungen um Achsen der Art b

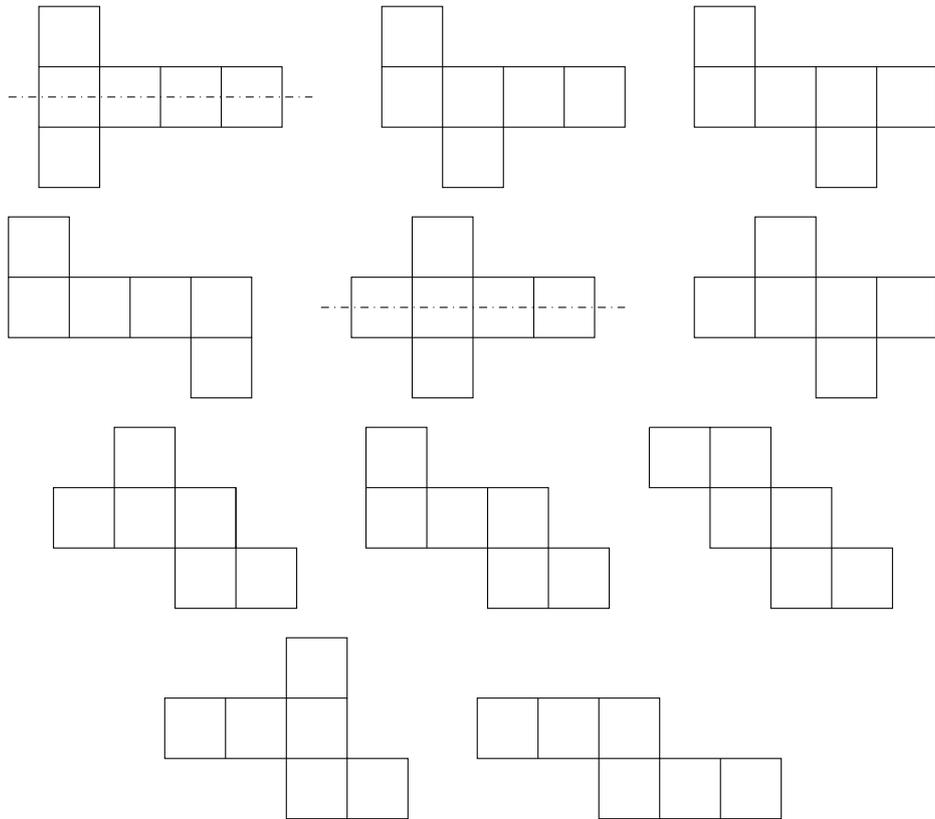
Bezeichnen wir die entstehende identische Permutation wieder mit  $e$ , die zu den 8 Drehungen gehörenden Permutationen mit  $s_a$  und die Permutationen zu den drei restlichen Drehungen mit  $s_b$ , erhalten wir für die Anzahl der inäquivalenten Gerüste

$$t(T_o) = \frac{1}{12}(x(e) + 8x(s_a) + 3x(s_b))$$

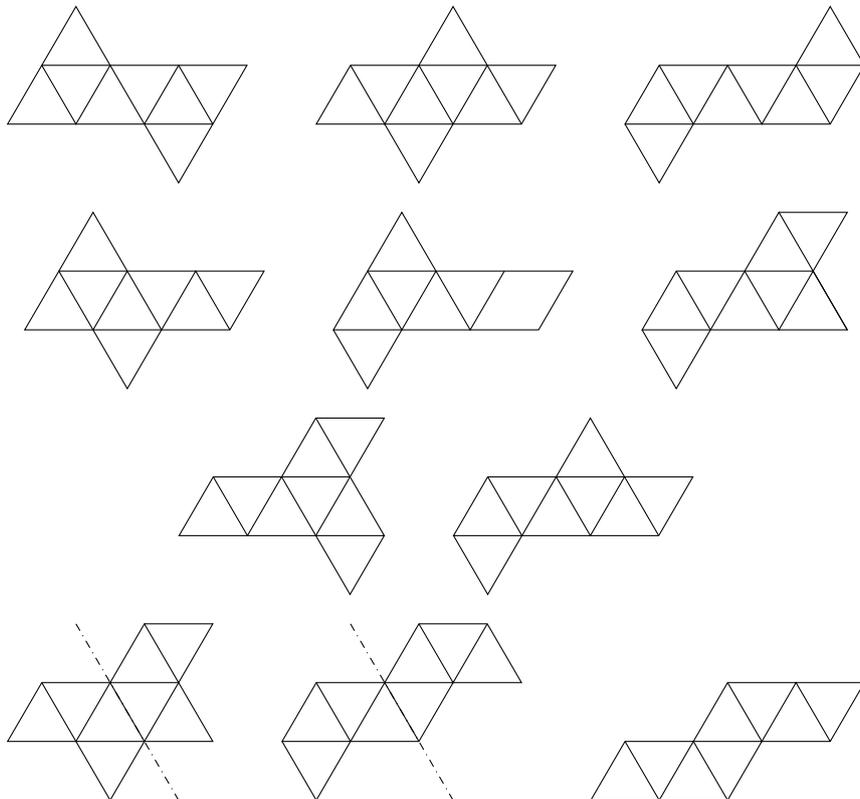
$x(e)$  ist wieder die Anzahl aller möglichen Gerüste, welche wir mittels der Admittanz-Matrix bestimmen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Inkongruente Netze des Würfels



Inkongruente Netze des Oktaeders

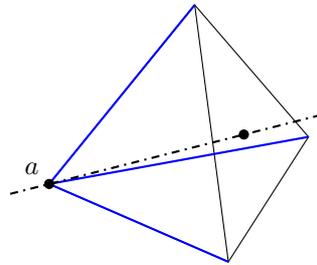


Streichen wir die 4. Zeile und Spalte, erhalten wir

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

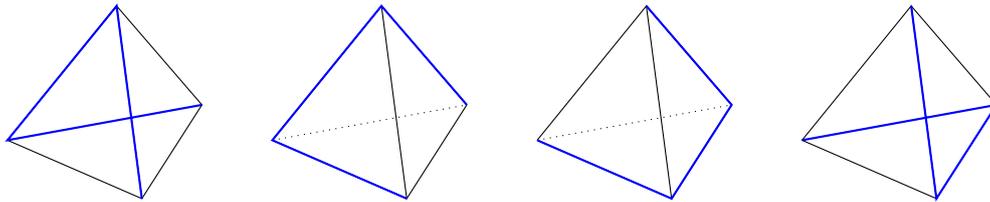
Der Wert der Determinante der Matrix  $A_4$  beträgt 16, so dass es bei einem Tetraeder 16 Gerüste geben kann. Es ist  $x(e) = 16$ .

Wenden wir uns den Drehungen um Achsen der Art a zu. Wie man schnell überprüfen kann, gibt es für jede dieser Drehungen nur ein Gerüst, welches invariant bleibt.



Damit erhalten wir für  $x(s_a)$  den Wert 1.

Bei Drehungen um Achsen der Art b, muss offensichtlich mindestens eine der Kanten, durch die die Drehachse verläuft, zu einem Gerüst gehören, welches invariant bleibt. Da das Gerüst eines Tetraeders aber nur 3 Kanten besitzt, muss genau eine der der Kanten zu den gesuchten Gerüsten gehören, welche bei der Drehung in sich selbst übergeführt wird. Damit existieren für die Drehungen um Achsen der Art b jeweils 4 inäquivalente Gerüste. (siehe Abbildung)



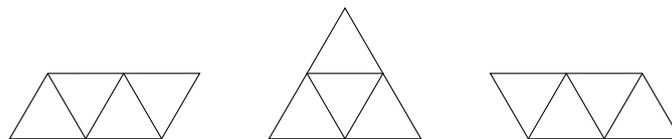
Für  $x(s_b)$  erhalten wir damit 4.

Setzen wir in die aus dem Lemma von Burnside entwickelte Gleichung ein, so wird

$$t(T_o) = \frac{1}{12}(16 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 4) = 3$$

womit wir sagen können: Für das regelmäßige Tetraeder gibt es bei unter unterscheidbaren Papierseiten genau 3 inkongruente Netze.

Die Abbildung zeigt die drei Möglichkeiten.



Wollen wir die Anzahl der inkongruenten Netze bei nicht unterscheidbaren Papierseiten bestimmen, erweitern wir unsere Untersuchung wieder auf die vollständige Symmetriegruppe des Körpers. Von den (man vergleiche mit 6.6) 6 Ebenenspiegelungen und 6 Drehspiegelungen, welche die uneigentlichen Bewegungen des Tetraeders bilden, besitzen nur wieder die Spiegelungen invariante Gerüste.

Da es offenbar für jede dieser Spiegelungen genau zwei gibt (siehe Abbildung nächste Seite) erhalten wir:

$$t(T'_o) = \frac{1}{24}(16 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2) = 2$$

womit es bei nicht unterscheidbaren Papierseiten für das Tetraeder genau 2 inkongruente Netze gibt.

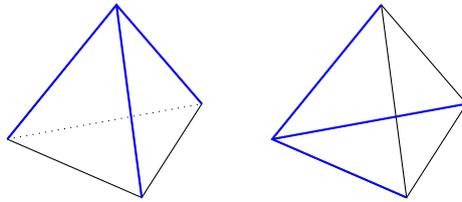
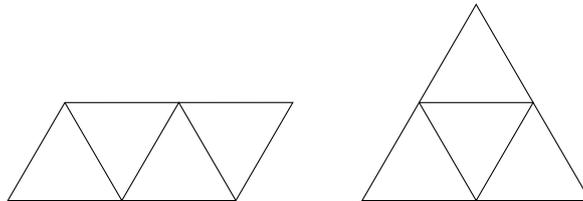


Abbildung: Invariante Gerüste bei Ebenenspiegelung

Inkongruente Netze des Tetraeders



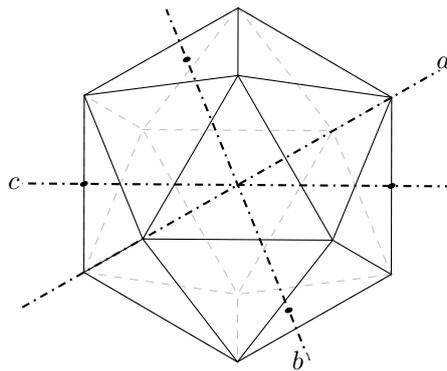
Damit können wir jetzt die Fragen aus Abschnitt 8.1 beantworten. Frage 2, 3 und 4 erhalten die Antwort (die noch zu untersuchenden Platonischen Körper werden auf Grund der große Anzahl von Seitenflächen nicht in Betracht kommen):

Das Tetraeder lässt sich von alle Körpern am einfachsten aus einer ebenen Fläche durch einfaches Falten herstellen. Dabei tritt kein Verschnitt auf. Weiterhin müssen nur drei Kanten geschlossen werden.

Auch wenn noch keine Aussage über die Lagerfähigkeit von Tetraedern getroffen wurde, können wir damit vermuten, dass die Wahl des Tetraeders als Verpackungsmaterial am ökonomischsten ist.

## 7.4 Inkongruente Netze des Ikosaeders und des Dodekaeders

Es verbleiben die zwei kompliziertesten Platonischen Körper zur Untersuchung auf inkongruente Netze. Zuerst setzen wir wieder unterscheidbare Papierseiten voraus. Die Drehgruppen des Ikosaeders bzw. Dodekaeders (siehe Abschnitt 6.4) enthalten



1. 1 identische Abbildung
2. 24 Drehungen um Achsen der Art a
3. 20 Drehungen um Achsen der Art b
4. 15 Drehungen um Achsen der Art c

Kennzeichnen wir wieder die identische Permutation mit  $e$  und die anderen Permutationen mit  $s_a$ ,  $s_b$  und  $s_c$ , so erhalten wir für die Transitivitätsklassen und damit für die Anzahl der Netze:

$$t(I_o) = \frac{1}{60}(x(e) + 24x(s_a) + 20x(s_b) + 15x(s_c))$$

Zur Berechnung von  $x(e)$  müssen wir wieder die Admittanz-Matrix des Ikosaeders oder Dodekaeders aufstellen. Da das Ikosaeder 12 Eckpunkte und das Dodekaeder 20 besitzen, empfiehlt es sich, das Ikosaeder zu bevorzugen. Dennoch hat die Admittanz-Matrix dann 12 Reihen, so dass eine 11-reihige Determinante der Form

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

aufzulösen ist. Obwohl diese Determinante symmetrisch ist und viele Komponenten gleich Null enthält, macht es sehr viel Mühe diese Determinante fehlerfrei aufzulösen.

Selbst mit Hilfe des Computers R 300 konnte nur ein wahrscheinlicher Wert bestimmt werden, da der R 300 bei wiederholtem Rechnen auf Grund von Rundungsfehlern mehrere mögliche Ergebnisse liefert. Zusätzlich kam noch der Zeitfaktor hinzu (das Auflösen der Determinante wurde in rund 25 Minuten geschafft), so dass auch ökonomischen Gründen wiederholt abgebrochen wurde. Ein Überprüfen mit manuellem Rechnen ergab insgesamt den Wert

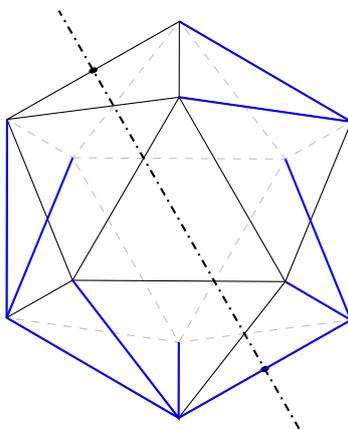
$$\det A_{12} = x(e) = 5184000$$

Berechnung von  $x(s_a)$  und  $x(s_b)$ :

Da ein Gerüst des Ikosaeders 11 Kanten besitzt und die zu den Drehungen um die Achsen a und b gehörigen Permutationen durch Fünfer- bzw. Dreierzyklen dargestellt werden, können hier keine invarianten Gerüste vorliegen.

$$x(s_a) = x(s_b) = 0$$

Berechnung von  $x(s_c)$ :



Die Anzahl der bei einer Drehung um eine Achse der Form c in sich übergehenden Gerüste ist auf Grund der 30 Kanten des Ikosaeders entsprechend groß. Durch schrittweise und systematisches Probieren erhält man

$$x(s_c) = 1312$$

Zum Beispiel ist in der oberen Abbildung ein Gerüst dargestellt, welches bei einer derartigen Drehung in sich selbst übergeht.

Setzen wir die erhaltenen Werte ein, wird:

$$t(I_o) = \frac{1}{60}(5184000 + 15 \cdot 1312) = 86728$$

womit wir sagen können:

Bei zweiseitiger verschiedener Färbung von Papierseiten können 86728 inkongruente Netze der Ikosaeders bzw. des Dodekaeders angefertigt werden.

Es ist offensichtlich, dass diese nicht alle gezeichnet werden können. Auf nachfolgenden Seiten sind 16 Netze des Ikosaeder und 3 Netze des Dodekaeders angegeben.

Um nun wieder die Anzahl der inkongruenten Netze bei nicht unterscheidbaren Papierseiten zu ermitteln, gehen wir zur vollständigen Symmetriegruppe über (siehe 6.8). Wie man sich überlegen kann, existieren nur für die 15 Ebenenspiegelungen weitere inäquivalente Gerüste und dabei wieder für jede Spiegelung 1312 derartige Gerüste. Wir erhalten:

$$t(I'_o) = \frac{1}{120}(5184000 + 15 \cdot 1312 + 15 \cdot 1312) = 43528$$

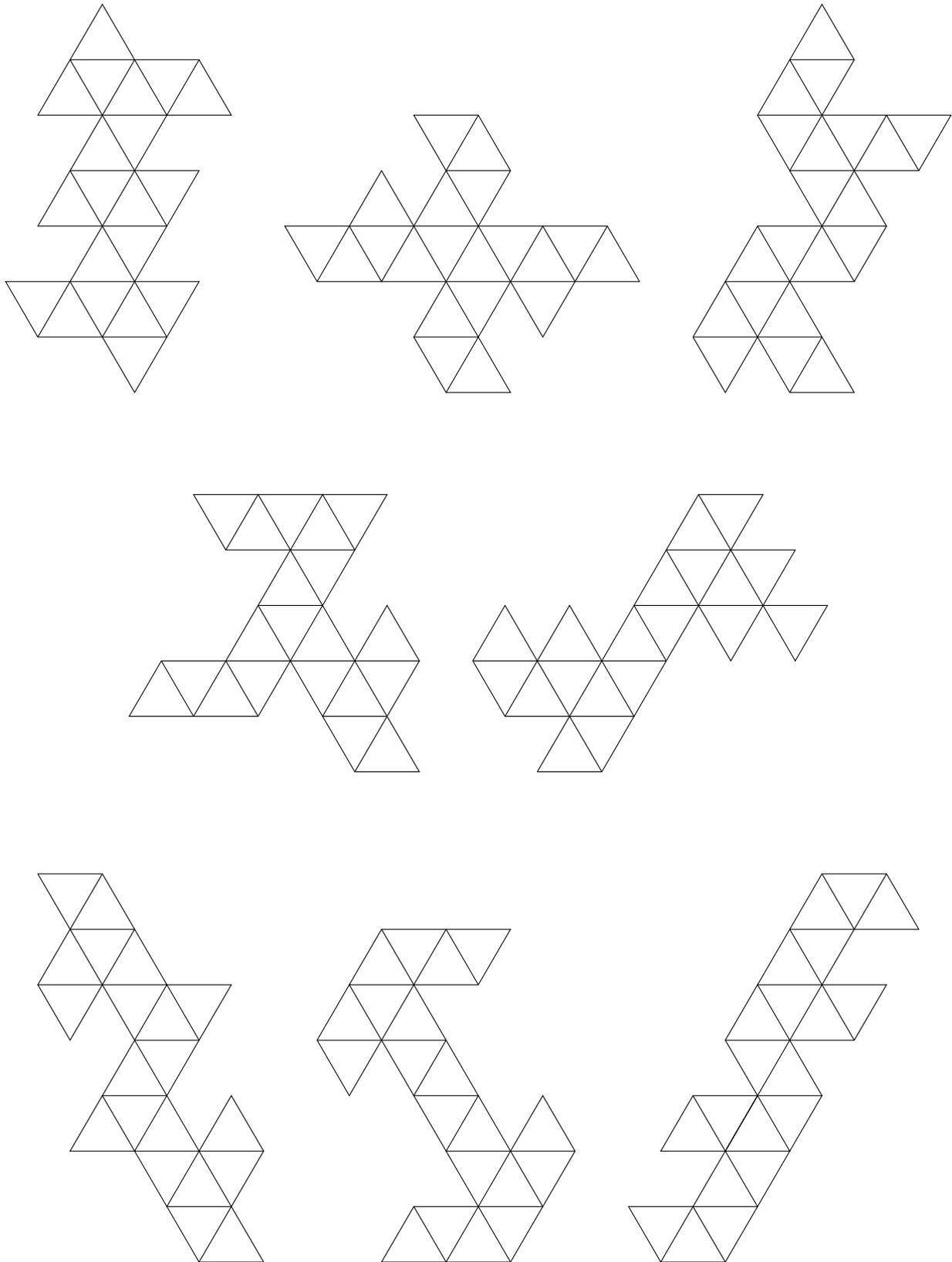
womit es genau 43528 verschiedene inkongruente Netze für die zwei Platonischen Körper Ikosaeder bzw. Dodekaeder gibt.

Fassen wir zusammen:

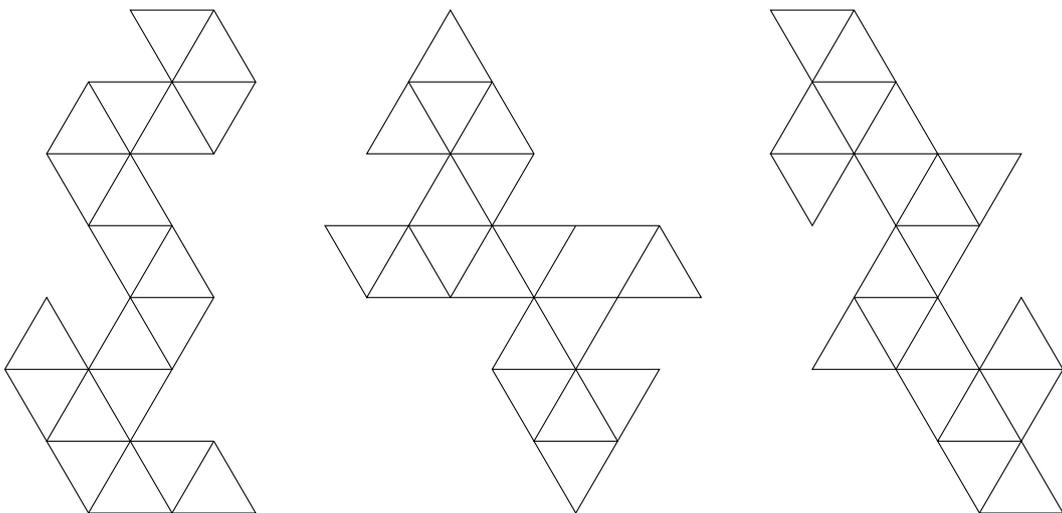
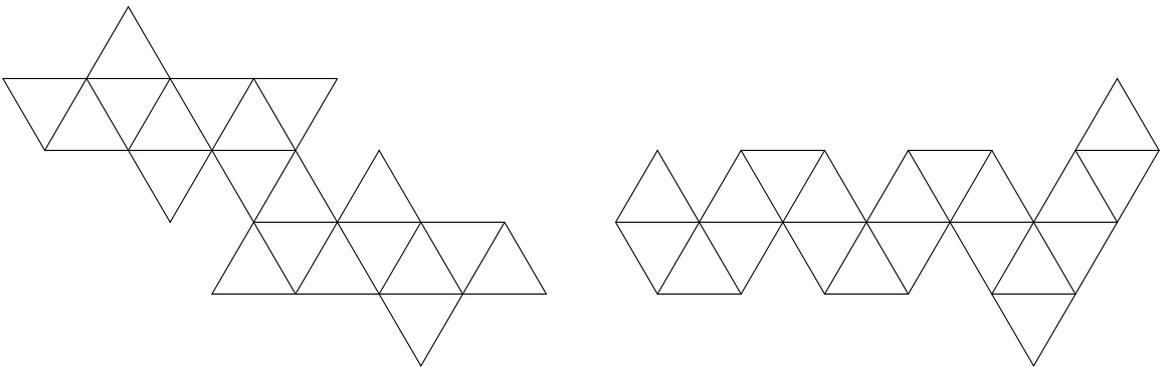
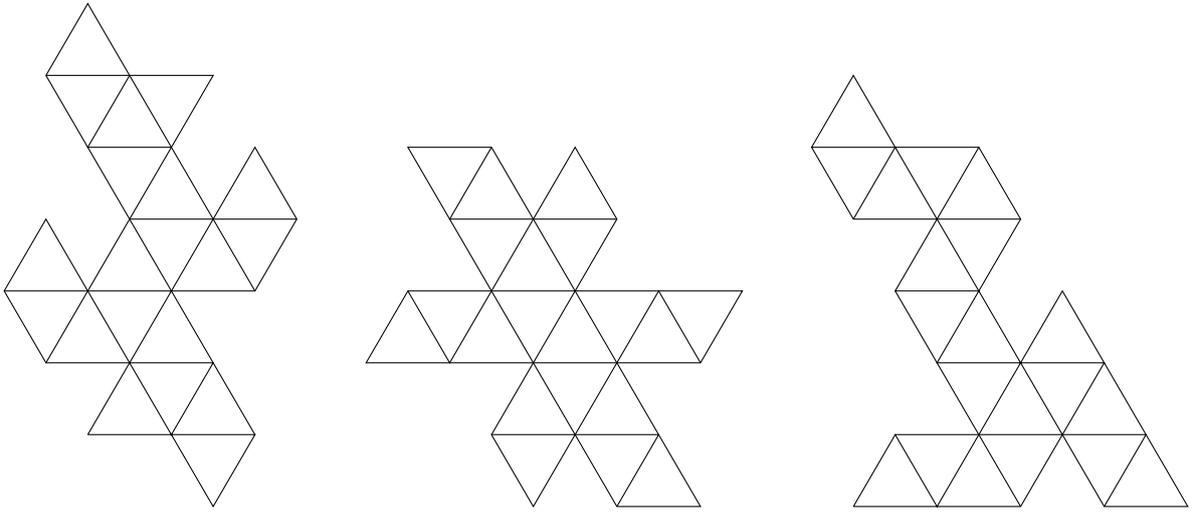
Körper	Inkongruente Netze (2-seitiges Papier)	Inkongruente Netze (1-seitiges Papier)
Tetraeder	3	2
Würfel	20	11
Oktaeder	20	11
Ikosaeder	86728	43528
Dodekaeder	86728	43528

Bewertet man das Ergebnis, so stellt man fest, dass er überraschend ist, dass die Anzahl der Netze derart stark ansteigt. Die Bestimmung der Anzahl der Netzes eines Sternpolyeders bzw. komplexen Archimedischen Körpers dürfte damit sehr anspruchsvoll sein, da diese Körper noch weit aus mehr Eckpunkte besitzen.

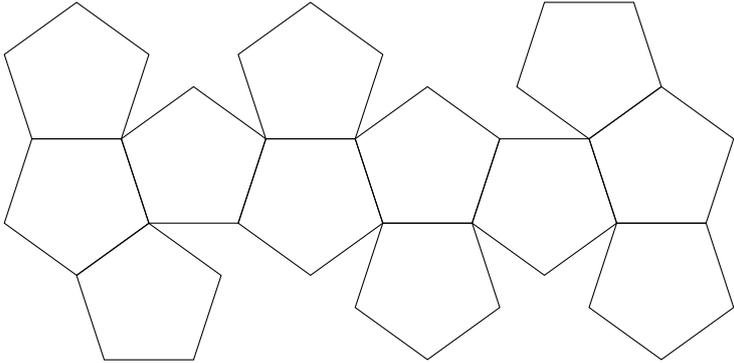
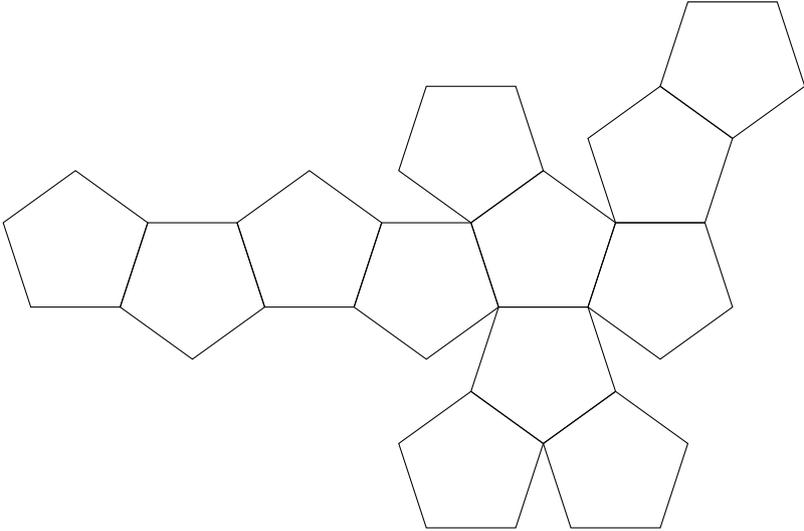
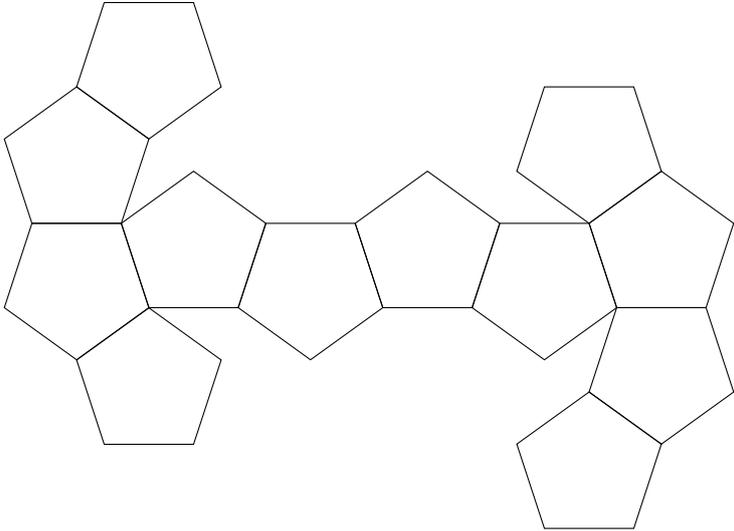
Inkongruente Netze des Ikosaeders (1)



Inkongruente Netze des Ikosaeders (2)



Inkongruente Netze des Dodekaeders



## Kapitel 8

# Parkettierung und Dichtepackung

Wie im Abschnitt 7.1 bei Frage 5 gesehen wurde, ist es nicht nur eine theoretische Frage, zu untersuchen, ob und wie dicht man die fünf Platonischen Körper lagern kann. Es stellt sich sogar die Frage, ob es möglich ist, die Körper so zu stapeln, dass, betrachtet man der Stapel von einer Seite, eine abgeschlossene Fläche, ähnlich dem Parkett entsteht.

Betrachten wir zunächst die Begrenzungsflächen der fünf Platonischen Körper. Denn, wenn diese in der Ebene nicht lückenlos zu legen sind, können die Körper aus kein Parkett bilden.

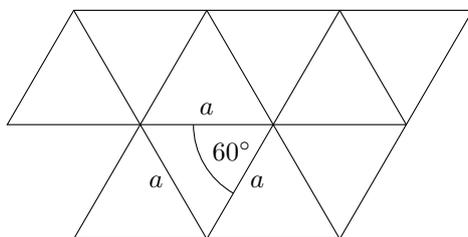
### 8.1 Vom Parkettlegen

Die Geschichte der Parkettierung ist fast ebenso als wie die Geschichte des Bauwesens. Der Fußboden von Gebäuden wurde von altersher mit Steinresten belegt. Diese bestanden anfänglich aus auf Gerate wohl nebeneinander gelegten Steinen. Später wurden diese Steine bearbeitet, damit der Fußboden möglichst ganz bedeckt wurde und wenig Lücken auftraten.

Auf Grund experimenteller Erfahrungen kamen Menschen darauf, dass man den Fußboden am besten, d.h. am dichtesten, bedeckt, wenn man gleichförmige Steine von gleicher Gestalt und Größe benutzte.

Das Problem bestand nun darin, herauszufinden, für welche Figuren das möglich war und für welche nicht, da man einen möglichst großen Formenreichtum erreichen wollte. Allerdings beschränkt sich für uns das Problem auf gleichseitige  $n$ -Ecke, welche wir als Seitenflächen der Platonischen Körper wiederfinden.

Um eine Ebene völlig dicht mit regelmäßigen  $n$ -Ecken auszufüllen, muss eine bestimmte Kombination von Innenwinkeln der regelmäßigen Vielecke den Vollwinkel  $360^\circ$  ergeben.

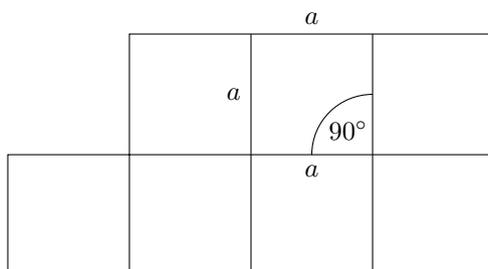


Betrachten wir zunächst ein Parkett, welches aus regelmäßigen Dreiecken bestehen soll. In einem regelmäßigen Dreieck ist jeder Innenwinkel gleich  $60^\circ$ , d.h. also, es lassen sich sechs solcher Dreiecke kombinieren, so dass ein Vollwinkel entsteht, d.h., sie liegen in einer Ebene dicht. Man kann also mit regelmäßigen (gleichseitigen) kongruenten Dreiecken ein Parkett legen. (siehe Abbildung)

Als Maß für die Möglichkeit des vollständigen Überdeckens der Ebenen mit Figuren führen wir einen

Dichtefaktor ein, der gleich dem Quotient aus überdeckter Fläche und Gesamtfläche der Ebene ist. Für gleichseitige Dreiecke, welche wir in der Abbildung gelegt sind, beträgt der Dichtefaktor 1.

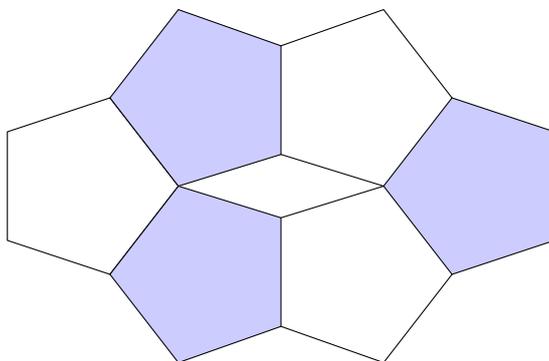
Dass man ein Parkett aus Quadraten legen kann, ist offensichtlich. (siehe Abbildung)



Man denke nur an kariertes Papier, welches mit Quadraten bedruckt ist. Der Dichtefaktor beträgt auch hier 1.

Als letzte Figur haben wir noch das regelmäßige Fünfeck zu betrachten. Andere regelmäßige n-Ecke benötigen wir nicht, wenn gleich man noch viele interessante Betrachtungen über Parkettierungen anstellen kann. (vgl. Gilde [13], Sedlacek [26] und [4])

Wie man schnell sieht, kann man regelmäßige Fünfecke nicht lückenlos in eine Ebene legen. Das folgt daraus, dass ein Innenwinkel des Fünfecks  $108^\circ$  beträgt, also auf keine Weise mehrere solche Innenwinkel zu einem Vollwinkel komplettiert werden können. Die Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung von regelmäßigen Fünfecken, welche sehr dicht ist.

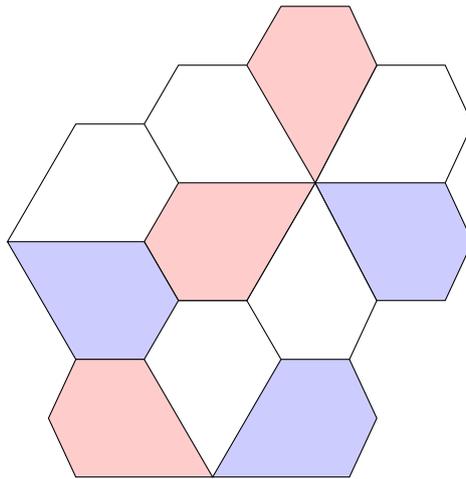


Setzt man diese Darstellung fort, erkennt man, dass zu genau zwei Fünfecken eine Lücke in Form eines Rhombus gehört. Zur Bestimmung des Dichtefaktors dieser Anordnung teilen wir den Rhombus in zwei gleichschenklige Dreiecke, deren Winkel an der Spitze  $36^\circ$  beträgt und die Schenkel gleich einer Fünfeckseite sind. Für den Dichtefaktor erhalten wir

$$d = \frac{\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} + \frac{1}{2}a^2\sin 36^\circ} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\sqrt{25+10\sqrt{5}} + 2\sin 36^\circ} \approx \frac{6,88}{8,056} = 0,854$$

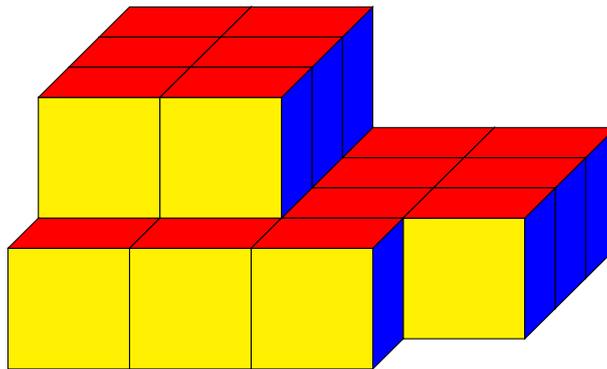
Wie wir aus diesen Überlegungen schlussfolgern können, besteht bei Würfel, Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder noch die theoretische Möglichkeit zur Parkettierung, nicht aber bei dem Dodekaeder.

Der Vollständigkeit halber soll hier ohne Beweis erwähnt werden, dass man ein Parkett (Dichtefaktor 1) aus kongruenten Fünfecken herstellen kann, wenn mindestens ein Innenwinkel des Fünfecks kleiner als  $90^\circ$  ist. Ein Beispiel zeigt die Abbildung.



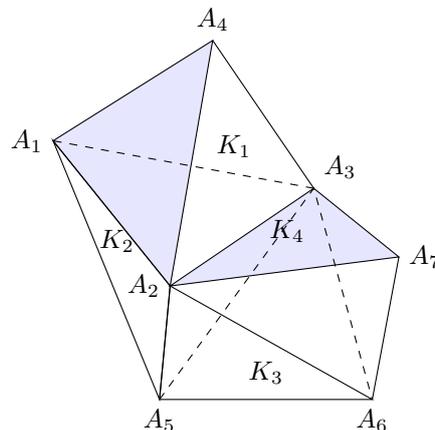
## 8.2 Dichtepackungen

Allein aus der Anschauung und der Beschaffenheit des Würfels folgt, dass dieser vollkommen dicht gelagert werden kann und entstandene Seitenflächen als Parkett betrachtet werden können. (siehe Abbildung)



Jeder Raumwinkel beträgt hier  $90^\circ$ , so dass schon die beiden Seiten von jeweils zwei aneinandergelagerten Würfeln eine ebene Fläche bilden. Jeder Würfel im Inneren einer solchen Packung trifft dann mit genau sechs anderen Würfeln zusammen. Die Dichte einer solchen Würfelpackung ist 1.

Wesentlich schwieriger liegt das Problem schon beim Tetraeder. Hier beträgt ein Flächenwinkel  $70^\circ 32' 44''$ . Allein aus dieser Größe des Winkels ist ersichtlich, dass man Tetraeder nicht lückenlos dicht lagern kann. Will man versuchen, jeweils die Tetraeder mit ihren Flächen aneinander zubringen (siehe Abbildung), so kann man auf diese Weise 5 Tetraeder aneinanderlegen.



Allerdings entsteht kein geschlossenes Gebilde. Körper 1, 4 und Körper 5 lassen sich nicht aneinanderbringen, denn

$$5 \cdot 70^\circ 32' 44'' = 352^\circ 43' 40''$$

d.h. also, es bleibt eine Lücke von  $7^\circ 16' 20''$ .

Versuchen wir es anders. Mit Dreiecken kann man ein Parkett legen. Setzen wir nun die Tetraeder eine Seitenfläche und ordnen sie so an, dass alle Grundflächen lückenlos ein Parkett bilden, was zweifellos möglich wäre, so ist es jedoch nicht möglich, Tetraeder lückenlos zwischen diese aufgestellten zu legen, da ja ein Winkel rund  $70^\circ$  beträgt, also, da der Ebenenwinkel  $180^\circ$  beträgt, je 2 Tetraeder nur noch einen Winkel von rund  $40^\circ$  frei lassen.

Wir legen also eine zweite Schicht Tetraeder so, dass eine Seite des Tetraeders parallel zur Ebene, auf der die erste Schicht steht, ist, die Spitze des Tetraeders aber nach unten zeigt und die drei Eckpunkte der Fläche, welche oben ist, auf je drei Tetraederspitzen der unteren Reihe zu liegen kommen.

Führen wir auf diesen zwei Tetraederschichten nochmals das gleiche Verfahren aus, vertauschen aber Schicht 1 und 2, so erhalten wir mit der 4. Schicht wieder eine vollkommen geschlossene Deckfläche der Packung. Die Dichte einer solchen Packung beträgt 0,5.

Es existieren weitere Tetraederpackungen, bei denen möglicherweise eine größere Dichte erreicht wird, doch niemals können Tetraeder so gelagert werden, dass sie vollkommen dicht liegen.

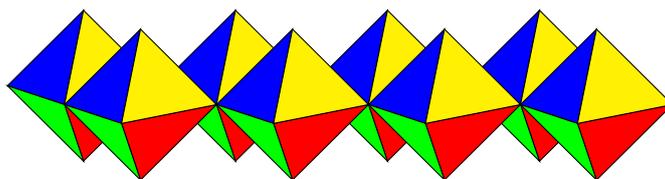
Unsere Industrie hat dieses Problem erkannt und zur Lagerung der sogenannten "Tetraederpackungen" Spezialbehälter angefertigt, welche eine kegelförmige Grundfläche haben, so dass bei dieser Lagerungsmöglichkeit eine maximale Dichte erreicht werden kann; womit jetzt übrigens auch Frage 6 aus Abschnitt 8.1 geklärt wäre.

Wenden wir uns dem dem Oktaeder zu.

Auch hier liegt die Vermutung nahe, dass man keine vollkommene Dichtepackung erhält; allein der Raumwinkel von  $109^\circ 28' 14''$  verdeutlicht das.

Es gibt auch hier wieder verschiedene Möglichkeiten der Lagerung; man stelle sich nur die Oktaeder als Duale in einer Würfelpackung vor. Hierbei berühren sich je 2 Oktaeder in einem Eckpunkt; jedoch wäre hierbei der Dichtefaktor sehr klein.

Eine bessere Lagerungsmöglichkeit zeigt die Abbildung:



Hier zeigt sich, dass jeweils zwischen vier Oktaedern ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge der Oktaeder eingebaut werden könnte.

Mit den eingeschachtelten Tetraedern wäre die Packung wieder vollkommen dicht, doch ohne diese hat die bezeichnete Oktaederpackung einen Dichtefaktor von 0,8.

An dieser Erkenntnis angelangt, besteht die Möglichkeit, nochmals zur Volumenbestimmung des Oktaeders zurückzugehen. Wie man sich überlegen kann, ist es möglich, das Volumen eines Oktaeders zu "sehen".

Auf diese Idee kam ein italienischer Schüler während einer Mathematikolympiade (Bruno de Finetti [34])

Der Schüler namens Massimo Campanino überlegte folgendes: Setzt man auf jedes zweite Feld eines Oktaeders ein Tetraeder mit gleicher Kantenlänge, so entsteht wiederum ein Tetraeder. Das Volumen des Tetraeders lässt sich bestimmen. Um nun das gesuchte Oktaedervolumen zu erhalten, subtrahiert man vom Volumen des großen Tetraeders die Summe der Volumina der aufgesetzten kleinen Tetraeder.

Bleiben noch die beiden restlichen Körper, das Ikosaeder und das Dodekaeder, welche hier zusammen betrachtet werden sollen.

Schon seit mehreren hundert Jahren wurde Versuche unternommen, um zu überprüfen, auf welche Weise sich Dodekaeder und Ikosaeder dicht lagern lassen. So unternahm zum Beispiel im Jahre 1727 Stephen Hales ein Experiment, zu dem er schrieb:

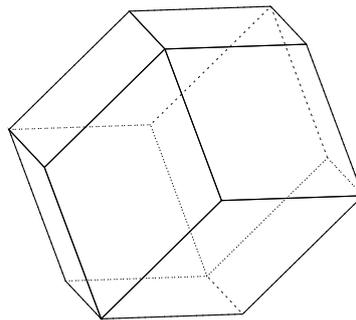
”Ich presste frische Erbsen in demselben Topf mit einem Druck von 1600, 800 und 400 Pfund. Obschon sich in diesem Versuch die Erbsen dehnten, hob sich der Deckel doch nicht; denn was sie an Masse zunahmen, wurde durch das große aufgelegte Gewicht in die Zwischenräume zwischen den Erbsen gepresst, die sich entsprechend ausfüllten. Dabei wurden die Erbsen in hübsche reguläre Dodekaeder verformt.”

(Coxeter [9])

Doch hier irrte Hales, obwohl wahrscheinlich einige 5-Eck-Seiten auf den Erbsen entstanden, konnten doch unmöglich alle Erbsen zu Dodekaedern geworden sein, denn der Raumwinkel eines solchen ist kleiner als  $120^\circ$ , deshalb bliebe, wenn 3 Dodekaeder aneinanderstoßen, eine Lücke von ungefähr  $10^\circ 19'$ .

1939 wurde der Versuch von den Botanikern Marvin und Matzke mit Bleischrot wiederholt, welches sie sorgfältig unter dem Mikroskop auswählten, damit es möglichst gleichmäßig war.

Dieser Schrot wurde mit 40000 ”Pfund” gepresst. Wurde nun das Schrot in Form von Kanonen-Kugeln aufgeschichtet und gepresst, so entstanden tatsächlich Dodekaeder, doch keine regulären Pentagondodekaeder, sondern fast vollkommene Rhombendodekaeder (siehe Abbildung)



Derartige Körper lassen sich wieder dicht lagern, da die Seitenflächen dieser Körper Vierecke (Rhomben) sind.

Wurde nun der Bleischrot wahllos in den Topf geschüttet und gepresst, so entstanden unregelmäßige Körper, welche im Mittelwert 13 bis 14 Seitenflächen hatten.

Der Versuch wurde von verschiedenen Personen mehrmals wiederholt, auch mit anderen Materialien, z.B. Seifenschaum, und stets kam man zu dem Ergebnis, dass die entstandenen Körper im Schnitt 13,7 Flächen aufwiesen. Es entstanden auch Körper mit 12 Flächen, doch keiner davon war ein regelmäßiges Dodekaeder.

Mit hoher Wahrscheinlichkeit ist es unmöglich, Dodekaeder auf irgendeine Weise dicht zu lagern. Analog folgern wir, dass auch Ikosaeder mit 20 Seitenflächen nicht dicht gepackt werden können, zumal bei den Pressversuchen niemals Dreiecke als Seitenflächen entstanden.

Zusammenfassend können wir sagen, dass der einzige regelmäßige Körper, mit dem man eine vollkommene Dichtepackung erzeugen kann, der Würfel ist.

Mit diesem Kapitel sollen die Untersuchungen der fünf Platonischen Körper abgeschlossen werden.

## Kapitel 9

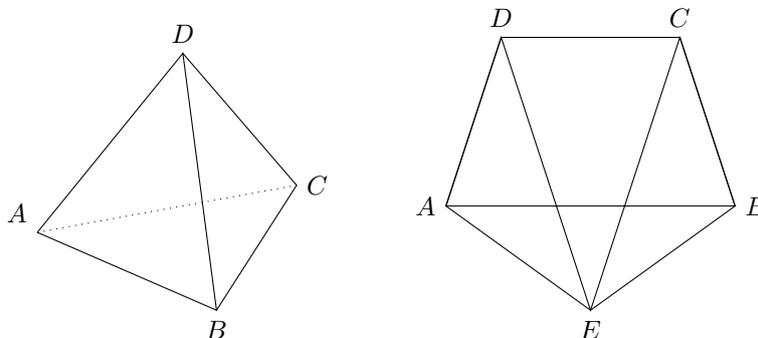
# Die regulären Polytope in der 4. Dimension

Analog zur Betrachtungsweise der fünf Platonischen Körper lassen sich auch in höheren Räumen reguläre Polytope finden. Da für uns schon der 4-dimensionale Raum schwer vorstellbar ist, begnügt man sich, die regulären Polytope dieses Raums zu beschreiben.

Im vierdimensionalen Raum existieren, wie Schläfli nachwies, 6 reguläre Polytope. Ohne auf deren einzugehen, wollen wir diese Körper kurz betrachten und Beziehungen zu den Platonischen Körpern im dreidimensionalen Raum herstellen. Auf die Eigenschaften des vierdimensionalen Raums soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. (siehe hierzu Coxeter [9], Seiten 474 bis 476)

Als einfachste vierdimensionale reguläre Figur betrachten wir das regelmäßige Simplex.

Seine Entstehung stelle man sich wie folgt vor: Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder im dreidimensionalen Raum. (siehe linke Abbildung)



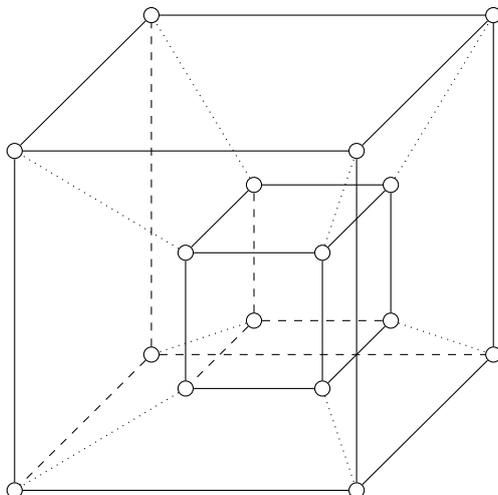
Jetzt sucht man einen fünften Punkt  $E$ , welcher im 4-dimensionalen Raum liegen soll und dessen Abstand von allen Punkten des Tetraeders gleich der Länge  $AB$  sein soll. Auf diese Weise erhält man eine Figur, die man auf fünffache Weise als Pyramide auffassen kann, man betrachte jeweils einen Punkt als Spitze und die restlichen 4 Punkte als Basis, wobei die Basis hier keine Ebenen sondern ein Körper ist.

Das so entstandene Gebilde nennt man "reguläres Simplex". Es stellt das Analogon zum Tetraeder im vierdimensionalen Raum dar. (siehe rechte Abbildung)

Ähnlich wie im dreidimensionalen Raum kann man auch für diese Körper wieder Schläfli-Symbole angeben. Das Symbol für das Simplex ist hier  $\{3,3,3\}$ , d.h. es besteht eine Konfiguration von gleichen Platonischen Körpern  $\{p,q\}$ , auch "Zellen" genannt, welche derart zusammengefügt sind, dass jede Fläche  $p$  zu 2 Zellen und jede Kante zu  $r$  Zellen gehört. Unter einem  $\{q,r\}$  versteht man hierbei die Eckfigur der entsprechenden Zelle. Das Symbol  $\{p,q,r\}$  bedeutet somit die Zusammenfügung der Symbole  $\{p,q\}$  und  $\{q,r\}$ , die die Zelle und die Eckfigur bezeichnen.

Auf die Konstruktion der regulären Polytope soll hier verzichtet werden. Begnügen wir uns mit einer Vorstellung der Figuren.

Das entsprechende Gebilde zum Würfel nennt man "Hyperwürfel". Eine Skizze dieser Figur zeigt die nachfolgenden Abbildung:

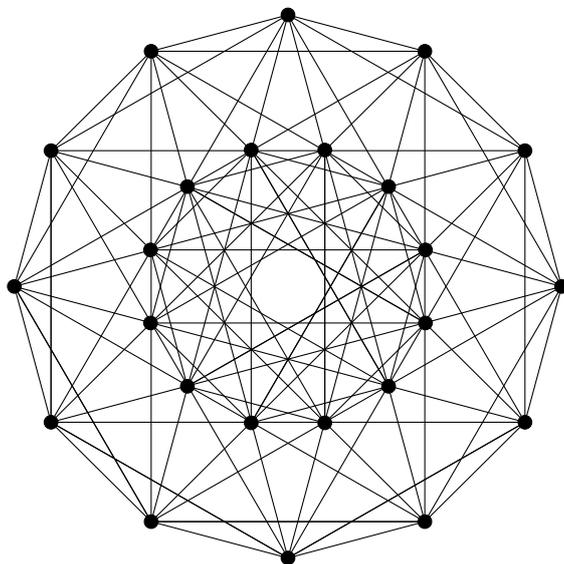


Man erkennt mehrere Würfel, die sich scheinbar schneiden. Das Schläfli-Symbol hierzu ist  $\{4,3,3\}$ . Wie in Coxeter [9], Seite 478, bewiesen wird, kann es im vierdimensionalen Raum nur die Konfigurationen

$$\begin{array}{ccc} \{3,3,3\} & \{3,3,4\} & \{3,3,5\} \\ \{4,3,3\} & \{3,4,3\} & \{5,3,3\} \end{array}$$

geben. Den ersten und vierten Fall haben wir schon dargestellt.

Das Symbol  $\{3,4,3\}$  kennzeichnet das 24-Zell, das Analogon zum Oktaeder (siehe Abbildung)

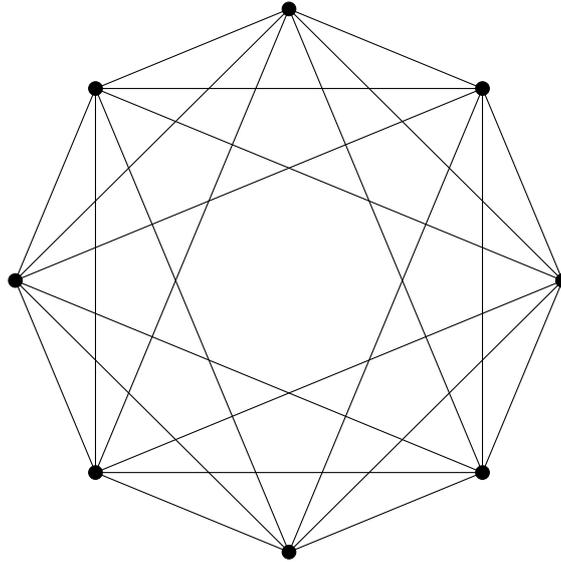


Die nachfolgende Abbildung zeigt das 16-Zell mit dem Symbol  $\{3,4,3\}$ , für welches im dreidimensionalen Raum kein entsprechendes Polytop existiert.

Mit dem Symbol  $\{5,3,3\}$  wird das 120-Zell gekennzeichnet, welches seine Entsprechung am Dodekaeder hat. Ein Modell ist hierzu in Coxeter [9], Seite 481 und 483, sowie auch in Coxeter [10] abgebildet. Die zeichnerische Konstruktion dieses Gebildes ist schwierig, womit die Konstruktion des 600-Zells, des letzten vierdimensionalen Polytops, sehr anspruchsvoll wird.

Das 600-Zell mit dem Schläfli-Symbol  $\{3,5,3\}$  hat kein analoges Polyeder im dreidimensionalen Raum. Eine Darstellung dieses Polytops findet man in Coxeter [10].

Mit der Aufzählung dieser sechs regulären vierdimensionalen Polytope stellt man fest, dass es für das Ikosaeder keine entsprechendes 4-dimensionales Gebildet gibt. Der Beweis für dieses Tatsache findet man wiederum in Coxeter [9], Seite 478.



Die Tabelle gibt abschließend einen Überblick über die vierdimensionalen Polytope und deren Zusammenhänge zu den 5 Platonischen Körpern:

3-dimensionaler Raum	Schläfli-Symbol	4-dimensionaler Raum	Schläfli-Symbol
Tetraeder	{3,3}	Simplex	{3,3,3}
Würfel	{4,3}	Hyperwürfel	{4,3,3}
Oktaeder	{3,4}	24-Zell	{3,4,3}
Dodekaeder	{5,3}	120-Zell	{5,3,3}
Ikosaeder	{3,5}	-	-
-	-	16-Zell	{3,3,4}
-	-	600-Zell	{3,3,5}

# Kapitel 10

## Literaturverzeichnis

In das Literaturverzeichnis wurden alle Quellen aufgenommen, welche zur Einarbeitung in den Stoff, zur Anfertigung der Arbeit und zur Weiterführung im Sinne der Einordnung in umfassenderer Gebiete benutzt wurden.

- [1] Alexandrow, P.S.: "Einführung in die Gruppentheorie", Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954
- [2] Autorenkollektiv: "Lexikon der Mathematik", VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977
- [3] Autorenkollektiv: "Mathematik - Kleine Enzyklopädie", VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1971
- [4] Autorenkollektiv: "Mathematisches Mosaik", Urania-Verlag, Leipzig, Jena, Berlin 1977
- [5] Autorenkollektiv: "Rund um die Mathematik", VEB Kinderbuchverlag, Berlin 1971
- [6] Autorenkollektiv: "Wissenschaft und Menschheit", Urania-Verlag, Leipzig, Jena, Berlin 1967
- [7] Bartsch, H.J.: "Mathematische Formeln", VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1972
- [8] Bereis, R.: "Darstellende Geometrie I", Akademie-Verlag, Berlin 1964
- [9] Coxeter, H.S.M.: "Unvergängliche Geometrie", Birkhäuser-Verlag, Basel, Stuttgart 1963
- [10] Coxeter, H.S.M.: "Regular Polytopes", Methuen & Co. Ltd., London 1948 (engl.)
- [11] Euklid: "Elemente", Aus dem Griechischen von J.F.Lorenz, Verlag der Waisenhaus-Buchhandlung, Halle 1798
- [12] Flachsmeier, J.; Prohaska, L.: "Algebra", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975
- [13] Geise, G.: "Durch die Welt der Tetraeder", alpha, Jahrgang 5, Heft 5, Berlin 1971
- [14] Gilde, G.: "Gespiegelte Welt", VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1979
- [15] Hajos, G.: "Einführung in die Geometrie", BSB B-G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970
- [16] Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S.: "Anschauliche Geometrie", Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1932
- [17] Jeger, M.: "Über die Anzahl der inkongruenten Netze des Würfels und der regulären Oktaeders", Elemente der Mathematik, Band 30, Heft 4

- [18] Kepler, J.: "Weltharmonik", Übersetzt von M.Caspar, Verlag R.Oldenbourg, München, Berlin 1939
- [19] von Krbek, F.: "Geometrische Plaudereien", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962
- [20] Lugowski, H.; Weinert, H.: "Grundzüge der Algebra" Band I, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957
- [21] Meinel, C.H.: "Der goldene Schnitt und die Zahl  $\tau$ ", alpha, Jahrgang 8, Heft 3, Berlin 1974
- [22] Naas, J.; Schmid, H.L.: "Mathematisches Wörterbuch" Band I und II, Akademie-Verlag, Berlin 1979
- [23] Pieper, H.: "Johannes Kepler - Astronom und Mathematiker" Teil I, alpha, Jahrgang 14, Heft 5, Berlin 1980; Teil II, alpha, Jahrgang 14, Heft 6, Berlin 1980
- [24] Riedrich, T.: "Johannes Kepler - Astronom und Mathematiker", alpha, Jahrgang 5, Heft 6, Berlin 1971
- [25] Schröder, R.: "Dürers künstlerisches Schaffen aus der Sicht seiner 'Unterweysung'", Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft der DDR, Heft 4, Berlin 1973
- [26] Sedalcek, J.: "Keine Angst vor Mathematik", VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968
- [27] Sonnemann, U.: "Wir bauen Sternpolyeder", alpha, Jahrgang 11, Heft 6, Berlin 1977
- [28] Timm, W.: "Albrecht Dürer - Kupferstiche", Insel-Verlag, Leipzig 1971
- [29] Toth, L.F.: "Reguläre Figuren", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965
- [30] Ullmann, E.: "Albrecht Dürer", VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1975
- [31] Voss, W.: "Aus der Graphentheorie", alpha, Jahrgang 6, Heft 6, Berlin 1972
- [32] Wolf, K.L.: "Theoretische Chemie", Johann Ambrosius Barth-Verlag, Leipzig 1948
- [33] Wussing, H.: "Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979
- [34] de Finetti, B.: "Die Kunst des Sehens in der Mathematik", Birkhäuser Verlag, 1974

Zusatzabbildung:  
**Der Dodekaeder-Igel, das kleine Sternpolyeder**

