Aufgabensammlung

Aufgaben der Schweizer Mathematik-Olympiade 1997-2012

Quelle und Lösungen:
https://imosuisse.ch

Schweizer IMO - Selektion 1997

erste Prüfung - 17. Mai 1997

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Eine endliche Folge ganzer Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heisst quadratisch, falls $|a_k - a_{k-1}| = k^2$ gilt für $1 \leq k \leq n$.

(a) Beweise, dass es für zwei beliebige ganze Zahlen b und c stets eine natürliche Zahl n und eine quadratische Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt mit $a_0 = b$ und $a_n = c$.

(b) Bestimme die kleinste natürliche Zahl n, für welche es eine quadratische Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt mit $a_0 = 0$ und $a_n = 1997$.

2. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Bestimme notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass ein Punkt P im Innern von $ABCD$ existiert, sodass die vier Dreiecke ABP, BCP, CDP und DAP alle denselben Flächeninhalt haben.

3. Ein 6×6-Quadrat sei mit 18 Dominosteinen bedeckt. Zeige, dass es stets eine Gerade gibt, die das Quadrat in zwei Teile teilt, ohne einen Dominostein zu teilen.

4. Es seien v und w verschiedene, zufällig gewählte Lösungen der Gleichung $z^{1997} - 1 = 0$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \leq |v + w|$ ist.

Schweizer IMO - Selektion 1998

erste Prüfung - 7. Mai 1998

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für welche gilt

(a) $f(x) - f(y) = f(x)f(\frac{1}{y}) - f(\frac{1}{x})f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) f nimmt den Wert $1/2$ mindestens einmal an.

Bestimme $f(-1)$.

2. Bestimme alle ganzzahligen und nichtnegativen Lösungen (x, y, z) der Gleichung

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}.$$

3. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Bestimme (ohne Ableitungen zu benützen) das Minimum der Funktion

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}.$$

4. Man bestimme alle Zahlen n, für welche gilt:
Es gibt eine Möglichkeit, ein Quadrat in n Teilquadrate zu zerschneiden.

5. Es sei k ein Kreis und A, B seien zwei Punkte auf k. In diesen Punkten werden die Tangenten an k gezeichnet und im gleichen Umlaufsinn die gleich langen Tangentenabschnitte AP und BQ abgetragen. Beweise, dass die Strecke PQ von der Geraden AB halbiert wird.

Schweizer IMO - Selektion 1998

zweite Prüfung - 23. Mai 1998

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Primzahlen p, sodass p^2+11 genau 6 verschiedene positive Teiler besitzt.

2. Betrachte eine $n\times n$-Matrix, bei der im Feld der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Eintrag $i+j-1$ steht. Welches ist das kleinstmögliche Produkt von n Zahlen dieser Matrix, wenn gefordert wird, dass in jeder Zeile und jeder Spalte einer dieser n Zahlen steht?

3. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt in dessen Innern. Die Geraden AP, BP und CP schneiden die Seiten BC, CA und AB in den Punkten X, Y und Z. Beweise, dass gilt

$$|XY|\cdot|YZ|\cdot|ZX| \geq |XB|\cdot|YC|\cdot|ZA|.$$

4. Zeige, dass für alle positiven Zahlen x und y gilt

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}\leq\frac{1}{xy}.$$

5. Für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt

(a) $|f(x)|\leq 1 \quad$ für alle $x\in\mathbb{R}$,

(b) $f(x+\frac{13}{42})+f(x)=f(x+\frac{1}{6})+f(x+\frac{1}{7}) \quad$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Zeige, dass f periodisch ist.

Schweizer IMO - Selektion 1999

erste Prüfung - 17. Mai 1999

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Zwei Kreise schneiden sich in den beiden Punkten M und N. Sei A ein weiterer Punkt auf dem ersten Kreis, verschieden von M und N. Die Geraden AM und AN schneiden den zweiten Kreis nochmals in den Punkten B und C. Zeige, dass die Tangente an den ersten Kreis im Punkt A parallel zur Geraden BC ist.

2. Ist es möglich, die Menge $\{1, 2, \ldots, 33\}$ derart in 11 disjunkte Teilmengen zu zerlegen, dass jede Teilmenge 3 Elemente enthält, von denen eines die Summe der beiden anderen ist?

3. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Bestimme alle reellen Lösungen (x, y, z) des Systems

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \qquad \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \qquad \frac{4z^2}{1+4z^2} = x.$$

5. Es sei $ABCD$ ein Rechteck und P sei ein Punkt auf der Geraden CD. M und N seien die Mittelpunkte von AD und BC. Die Gerade PM schneide AC in Q. Zeige, dass MN die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle QNP$ ist.

Schweizer IMO - Selektion 1999

zweite Prüfung - 20. Mai 1999

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Es seien m und n zwei positive ganze Zahlen, sodass $m^2 + n^2 - m$ durch $2mn$ teilbar ist. Zeige, dass m eine Quadratzahl ist.

7. Ein Quadrat ist in Rechtecke zerlegt, deren Seiten parallel zu den Quadratseiten liegen. Für jedes dieser Rechtecke wird das Verhältnis seiner kürzeren Seite zu seiner längeren gebildet. Zeige, dass die Summe dieser Verhältnisse mindestens 1 beträgt.

8. Bestimme alle ganzen Zahlen n, für die es positive reelle Zahlen $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 96, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 144, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = 216.$$

9. Beweise, dass es zu jedem Polynom $P(x)$ vom Grad 10 mit ganzzahligen Koeffizienten eine (in beiden Richtungen) unendliche arithmetische Folge ganzer Zahlen gibt, die keinen der Werte $P(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ enthält.

10. Zeige, dass das Produkt von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl ist.

Schweizer IMO - Selektion 2000

erste Prüfung - 28. April 2000

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Einem Kreis ist ein konvexes Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Zeige, dass die Sehne, welche die Mittelpunkte der beiden Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ verbindet, senkrecht steht auf der Sehne, welche die beiden Bogenmittelpunkte von $\widehat{BC}$ und $\widehat{DA}$ miteinander verbindet.

2. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ erfüllen die beiden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{16} a_i = 100 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{16} a_i^2 = 1000.$$

Was ist der grösstmögliche Wert, den a_{16} annehmen kann?

3. Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und fünf gleich grosse, gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $s < 1$. Zeige: Lässt sich das grosse Dreieck mit den fünf kleinen überdecken, so lässt es sich auch schon mit vier der kleinen überdecken.

4. Es sei $q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n. Bestimme den Wert von

$$q(q(q(2000^{2000}))).$$

5. Mit Hilfe der drei Buchstaben I, O, M werden Wörter der Länge n gebildet. Wieviele solche Wörter der Länge n gibt es, in denen keine benachbarten M's vorkommen?

Schweizer IMO - Selektion 2000

Nachprüfung zum 28. April

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Die positiven reellen Zahlen x, y und z haben Summe 1. Zeige, dass gilt

$$\sqrt{7x+3}+\sqrt{7y+3}+\sqrt{7z+3} \leq 7.$$

Kann die Zahl 7 auf der rechten Seite durch eine kleinere Zahl ersetzt werden?

2. Beweise, dass die Gleichung

$$14x^2 + 15y^2 = 7^{2000}$$

keine ganzzahlige Lösungen (x, y) besitzt.

3. Für $x > 0$ sei $f(x) = 4^x/(4^x + 2)$. Bestimme den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right).$$

4. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich in den verschiedenen Punkten P und Q schneiden. Konstruiere eine durch P verlaufende Strecke AB mit ihren Endpunkten auf k_1 und k_2, sodass das Produkt $|AP| \cdot |PB|$ maximal ist.

5. Auf einer kreisförmigen Rennbahn ist an n verschiedenen Positionen je ein Auto startbereit. Jedes von ihnen fährt mit konstantem Tempo und braucht eine Stunde pro Runde. Sobald das Startsignal ertönt, fährt jedes Auto sofort los, egal in welche der beiden möglichen Richtungen. Falls sich zwei Autos begegnen, ändern beide ihre Richtung und fahren ohne Zeitverlust weiter. Zeige, dass es einen Zeitpunkt gibt, in dem sich alle Autos wieder in ihren ursprünglichen Startpositionen befinden.

Schweizer IMO - Selektion 2000

zweite Prüfung - 20. Mai 2000

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Jede Ecke eines regelmässigen $2n$-Ecks ($n \geq 3$) soll mit einer Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ beschriftet werden, und zwar so, dass die Summe der Zahlen benachbarter Ecken stets gleich ist wie die Summe der Zahlen in den beiden diametral gegenüberliegenden Ecken. Zudem müssen die in den $2n$ Ecken stehenden Zahlen alle verschieden sein. Zeige, dass dies genau dann möglich ist, wenn n ungerade ist.

2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

3. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten AB, BC und CA in den Punkten D, E und F. Sei P ein Punkt im Innern von ABC, sodass der Inkreis von ABP die Seite AB ebenfalls in D berührt und die Seiten AP und BP in den Punkten Q und R. Zeige, dass die vier Punkte E, F, R und Q auf einem Kreis liegen.

4. Sei P ein Polynom vom Grad n, sodass gilt

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \qquad \text{für} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Finde $P(n + 1)$.

5. Es sei $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_{2000}\}$ eine Menge von 2000 Punkten im Innern eines Kreises vom Radius 1, sodass einer der Punkte der Kreismittelpunkt ist. Für $i = 1, 2, \ldots, 2000$ bezeichne x_i den Abstand von P_i zum nächstgelegenen Punkt $P_j \neq P_i$ aus S. Zeige, dass gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2000}^2 < 9.$$

Schweizer IMO - Selektion

erste Prüfung - 4. Mai 2001

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. In einem Park sind 2001×2001 Bäume in einem quadratischen Gitter angeordnet. Was ist die grösste Zahl an Bäumen, die man fällen kann, sodass kein Baumstrunk von einem anderen aus sichtbar ist?
(Die Bäume sollen Durchmesser 0 haben)

2. Seien a, b und c die Seiten eines Dreiecks. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

3. In einem konvexen Fünfeck ist jede Diagonale parallel zu einer Seite. Zeige, dass das Verhältnis zwischen den Längen der Diagonalen und der dazu parallelen Seite für alle Diagonalen dasselbe ist. Bestimme den Wert dieses Verhältnisses.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $t_1, t_2, \ldots, t_k$ verschiedene Teiler von n. Eine Identität der Form $n = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ heisst Darstellung von n als Summe verschiedener Teiler. Zwei solche Darstellungen gelten als gleich, wenn sie sich nur um die Reihenfolge der Summanden unterscheiden (zum Beispiel sind $20 = 10+5+4+1$ und $20 = 5+1+10+4$ zweimal die gleiche Darstellung von 20 als Summe verschiedener Teiler). Sei $a(n)$ die Anzahl verschiedener Darstellungen von n als Summe verschiedener Teiler. Zeige oder widerlege:

Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ mit $a(n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Sei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ eine Folge positiver ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass für $i < j$ die Dezimaldarstellung von a_j nicht mit jener von a_i beginnt (zum Beispiel können die Zahlen 137 und 13729 nicht beide in der Folge vorkommen). Beweise, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}$$

Schweizer IMO - Selektion

zweite Prüfung - 19. Mai 2001

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

(a) $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$

(b) $f(1) = 1$

(c) $f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y, x+y \in [0,1]$

Beweise: $f(x) \leq 2x \quad \forall x \in [0,1]$

7. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. S sei der Kreis durch A, B und O. Die Geraden AC und BC schneiden S in den weiteren Punkten P und Q. Zeige $CO \perp PQ$.

8. Finde die zwei kleinsten natürlichen Zahlen n, sodass die Brüche

$$\frac{68}{n+70}, \frac{69}{n+71}, \frac{70}{n+72}, \ldots, \frac{133}{n+135}$$

alle irreduzibel sind.

9. In Genf sind 16 Geheimagenten am Werk. Jeder Agent überwacht mindestens einen anderen Agenten, aber keine zwei Agenten überwachen sich gegenseitig. Nehme an, dass je 10 Agenten so nummeriert werden können, dass der erste den zweiten überwacht, der zweite den dritten usw. und der zehnte den ersten. Zeige, dass dann auch je 11 Agenten in dieser Art nummeriert werden können, dass jeder den nächsten überwacht.

10. Zeige, dass jede 1000-elementige Teilmenge $M \subset \{0, 1, \ldots, 2001\}$ eine Zahl enthält, die eine Zweierpotenz ist, oder zwei verschiedene Zahlen, deren Summe eine Zweierpotenz ist.

Schweizer IMO - Selektion

erste Prüfung - 10. Mai 2002

Zeit: 3.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Gegeben sind 24 Punkte im Raum. Je drei dieser Punkte spannen eine Ebene auf, und es ist bekannt, dass die 24 Punkte auf diese Weise genau 2002 verschiedene Ebenen aufspannen. Beweise, dass eine dieser Ebenen mindestens 6 der Punkte enthält.

2. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und ein Punkt O in dessen Innern sodass $\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOC = \pi$.

Zeige dass gilt:

$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle CDO$$

3. n sei eine positive ganze Zahl mit mindestens vier verschiedenen positiven Teilern. Die vier kleinsten unter diesen Teilern seien d_1, d_2, d_3, d_4. Finde alle solchen Zahlen n, für die gilt

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

4. Betrachte ein quadratisches Feld, das durch horizontale und vertikale Linien in 7×7 Einheitsquadrate unterteilt ist. In dieses Feld wollen wir Kacheln der Form eines Schweizerkreuzes (bestehend aus einem zentralen Quadrat und den vier unmittelbar angrenzenden Quadraten oben, unten, links und rechts) hineinlegen. Dabei sollen die Kanten der Kreuze auf den Linien des Feldes zu liegen kommen. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl Quadrate, die auf dem Feld markiert werden müssen, damit jedes Kreuz, egal wo es auf das Feld gelegt wird, mindestens ein markiertes Quadrat bedeckt.

5. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) Die Menge $\{\frac{f(x)}{x} | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ ist endlich

(b) $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - 1 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schweizer IMO - Selektion

zweite Prüfung - 25. Mai 2002

Zeit: 3.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Sei $x_1, x_2, x_3, ...$ eine Folge ganzer Zahlen mit den Eigenschaften

- $1 = x_1 < x_2 < x_3 < ...$
- $x_{n+1} \leq 2n$ für $n = 1, 2, 3, ...$

Zeige, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl k zwei Indizes i und j gibt mit $k = x_i - x_j$.

7. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt in dessen Innern. X, Y und Z seien die Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA und AB. Zeige dass die Summe der Flächen der Dreiecke BXP, CYP und AZP nicht von P abhängt.

8. In einer Gruppe von n Leuten veranstaltet jedes Wochenende jemand eine Party, an der er alle seine Bekannten einander gegenseitig vorstellt. Nachdem jeder der n Leute einmal eine Party gemacht hat, gibt es immer noch zwei Personen unter ihnen, die sich nicht kennen.
Zeige, dass diese zwei sich auch in Zukunft nie an einer dieser Partys kennen lernen werden.
(Zwei Leute kennen sich immer gegenseitig oder gegenseitig nicht)

9. Beweise für jede positive reelle Zahl a und jedes ganze $n \geq 1$ die folgende Ungleichung.

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2(a + \frac{1}{a} - 2)$$

und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt.

10. m sei eine beliebige natürliche Zahl. Bestimme in Abhängigkeit von m die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt: Ist $\{m, m+1, ..., k\} = A \cup B$ eine beliebige Zerlegung in zwei Mengen A und B, dann enthält A oder B drei Elemente a, b, c (die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen) mit $a^b = c$.

Schweizer IMO - Vorselektion

Bern, Zürich - 5. April 2003

Zeit: 2 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. 67 Schüler schreiben eine Prüfung. Die Prüfung besteht aus 6 multiple-choice Fragen, die alle mit *ja* oder *nein* beantwortet werden müssen. Jeder Schüler beantwortet dabei alle 6 Fragen. Eine richtige Antwort auf die k-te Frage gibt k Punkte, eine falsche Antwort $-k$ Punkte.

(a) Zeige, dass mindestens zwei Schüler das Prüfungsblatt gleich ausgefüllt haben.

(b) Zeige, dass mindestens vier Schüler gleich viele Punkte erzielten.

2. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Das Lot von A auf BC schneide den Umkreis im Punkt $D \neq A$, und die Gerade BO schneide den Umkreis im Punkt $E \neq B$. Zeige, dass ABC und $BDCE$ denselben Flächeninhalt haben.

3. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$$

4. Betrachte eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten. Auf wieviele Arten kann diese Tabelle mit lauter Nullen und Einsen ausgefüllt werden, sodass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl Einsen stehen?

5. Beweise für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2$$

Schweizer IMO - Selektion

erste Prüfung - 10. Mai 2003

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Für die rellen Zahlen x, y, a gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x^3 + y^3 &= a \\ x^5 + y^5 &= a. \end{aligned}$$

Bestimme alle möglichen Werte von a.

2. Sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck. E und F seien die Fusspunkte der Höhen durch B und C. G ist die Projektion von B auf die Gerade EF und H die Projektion von C auf EF. Zeige, dass gilt

$$|HE| = |FG|.$$

3. Finde die grösste reelle Zahl C_1 und die kleinste reelle Zahl C_2, sodass für alle positiven Zahlen a, b, c, d, e gilt

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2.$$

4. Finde die grösste natürliche Zahl n, die für jede ganze Zahl a ein Teiler ist von $a^{25} - a$.

5. Auf einem Spielbrett mit 5×9 Feldern liegen n Steine, wobei zu jedem Zeitpunkt auf jedem Feld höchstens ein Stein liegen darf. Ein Spielzug besteht darin, jeden Stein in eines der angrenzenden Felder oben, unten, links oder rechts zu verschieben. Dies geschieht für alle Steine gleichzeitig. Wird dabei ein Stein in einem Zug horizontal bewegt, dann muss er im nächsten Zug vertikal bewegt werden und umgekehrt. Bestimme den grössten Wert für n, sodass es eine Anfangsposition der n Steine und eine Folge von Spielzügen gibt, sodass dieses Spiel beliebig lange fortgesetzt werden kann.

Schweizer IMO - Selektion

zweite Prüfung - 24. Mai 2003

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $a + b + c = 2$. Zeige, dass die folgende Ungleichung erfüllt ist und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{27}{13}$$

7. Finde alle Polynome $Q(x) = ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass drei verschiedene Primzahlen p_1, p_2, p_3 existieren mit

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = 11.$$

8. Sei $A_1A_2A_3$ ein Dreieck und ω_1 ein Kreis, der durch A_1 und A_2 geht. Nehme an, es existieren Kreise $\omega_2, \ldots, \omega_7$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) ω_k geht durch die Punkte A_k und A_{k+1} für $k = 2, 3, \ldots, 7$, $\qquad (A_i = A_{i+3})$

(b) ω_k und ω_{k+1} berühren sich äusserlich für $k = 1, 2, \ldots, 6$.

Zeige: $\omega_1 = \omega_7$.

9. Gegeben sind ganze Zahlen $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{101} < 5050$, zeige, dass man daraus immer vier verschiedene a_k, a_l, a_m, a_n auswählen kann mit

$$5050 | (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

10. Finde alle streng monotonen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(f(n)) = 3n.$$

SMO - Vorrunde

Bern, Zürich - 10. Januar 2004

Zeit: 2 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle natürlichen Zahlen a, b und n, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$a! + b! = 2^n$$

2. Auf einem gewöhnlichen Schachbrett stehen 17 Türme. Zeige, dass man stets drei Türme auswählen kann, die sich gegenseitig nicht bedrohen. (Ein Turm kann in einem Zug beliebig viele Felder nach links, rechts, oben oder unten ziehen. Ein Turm bedroht einen anderen, falls er in einem Zug auf das Feld des anderen Turmes ziehen kann.)

3. Sei $ABCD$ ein Parallelogram. Die Punkte P und Q liegen im Innern von $ABCD$ auf der Diagonalen AC, dabei gilt $|AP| = |CQ| < \frac{1}{2}|AC|$. Die Gerade BP schneidet AD im Punkt E, die Gerade BQ schneidet CD in F. Zeige, dass EF parallel zur Diagonalen AC ist.

4. Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit genau 100 verschiedenen positiven Teilern, sodass mindestens 10 dieser Teiler aufeinanderfolgende Zahlen sind.

5. $m \times n$ Punkte sind in einem quadratischen Gitter zu einem Rechteck angeordnet. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Punkte rot oder weiss zu färben, sodass unter je vier Punkten, die Ecken eines Einheitsquadrates bilden, genau zwei weisse und zwei rote vorkommen?

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2004

erste Prüfung - 2. April 2004

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei Γ ein Kreis und P ein Punkt ausserhalb von Γ. Eine Tangente von P an den Kreis berühre ihn in A. Eine weitere Gerade durch P schneide Γ in den verschiedenen Punkten B und C. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle APB$ schneide AB in D und AC in E. Beweise, dass das Dreieck ADE gleichschenklig ist.

2. Sei M eine endliche Menge reeller Zahlen mit folgender Eigenschaft: Aus je drei verschiedenen Elementen von M lassen sich stets zwei auswählen, deren Summe in M liegt. Wieviele Elemente kann M höchstens haben?

3. Sei p eine ungerade Primzahl. Finde alle natürlichen Zahlen k, sodass

$$\sqrt{k^2 - pk}$$

eine positive ganze Zahl ist.

4. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

5. Seien a und b feste positive Zahlen. Finde in Abhängigkeit von a und b den kleinstmöglichen Wert der Summe

$$\frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)},$$

wobei x, y, z positive reelle Zahlen sind.

SMO Finalrunde 2004

zweite Prüfung - 3. April 2004

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Bestimme alle k, für die eine natürliche Zahl n existiert, sodass $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ mit genau k Nullen endet.

7. Gegeben sind $m \geq 3$ Punkte in der Ebene. Beweise, dass man stets drei dieser Punkte A, B, C auswählen kann, sodass gilt

$$\sphericalangle ABC \leq \frac{180°}{m}.$$

8. An einer Wandtafel steht eine Liste natürlicher Zahlen. Es wird nun wiederholt die folgende Operation ausgeführt: Wähle zwei beliebige Zahlen a, b aus, wische sie aus und schreibe an deren Stelle $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$. Zeige, dass sich der Inhalt der Liste ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr verändert.

9. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass gilt $|AB| + |CD| = |BC|$. Zeige, dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle CDA$ auf der Seite BC zu liegen kommt.

10. Sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Die Felder eines $n \times n$ Schachbretts sind abwechselnd weiss und schwarz gefärbt, sodass die vier Eckfelder schwarz sind. Ein L-triomino ist eine L-förmige Figur, die genau drei Felder des Brettes bedeckt. Für welche Werte von n ist es möglich, alle schwarzen Felder mit L-triominos zu bedecken, sodass keine zwei L-triominos sich überlappen? Bestimme für diese Werte von n die kleinstmögliche Zahl von L-triominos, die dazu nötig sind.

IMO Selektion 2004

erste Prüfung - 15. Mai 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei S die Menge aller n-Tupel $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ sind, die nicht alle verschieden sein müssen, und die auch leer sein können. Für $a = (X_1, \ldots, X_n) \in S$ bezeichne

$$E(a) = \text{Anzahl Elemente von } X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

Finde einen expliziten Ausdruck für die Summe

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

2. Bestimme die grösste natürliche Zahl n, sodass

$$4^{995} + 4^{1500} + 4^n$$

eine Quadratzahl ist.

3. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und Inkreismittelpunkt I. Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks AIB, der im Dreieck ABC liegt. Die Geraden durch P, parallel zu CA und CB, schneiden AB in D und E. Die zu AB parallele Gerade durch P schneidet CA und CB in F und G. Zeige, dass sich die beiden Geraden DF und EG auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

IMO Selektion 2004

zweite Prüfung - 16. Mai 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $abc = 1$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

5. Ein *Bauklotz*, bestehend aus 7 Einheitswürfeln, hat die Form eines $2 \times 2 \times 2$ Würfels mit einem fehlenden Eckeinheitswürfel. Aus einem Würfel der Kantenlänge 2^n, $n \geq 2$, wird ein beliebiger Einheitswürfel entfernt. Zeige, dass sich der verbleibende Körper stets aus Bauklötzen aufbauen lässt.

6. Bestimme alle endlichen Folgen $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, sodass die Zahl k in der Folge genau x_k mal auftritt.

IMO Selektion 2004

dritte Prüfung - 12. Juni 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Für die rellen Zahlen a, b, c, d gelten die Gleichungen

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}} \quad , \qquad b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}},$$
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}} \quad , \qquad d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}.$$

Zeige, dass gilt $abcd = 2004$.

8. Sei m eine natürliche Zahl grösser als 1. Die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist definiert durch

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \text{für} \quad 0 \leq i \leq m-1; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i-j} & \text{für} \quad i \geq m. \end{cases}$$

Finde das grösste k, sodass es k aufeinanderfolgende Folgeglieder gibt, die alle durch m teilbar sind.

9. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien $A_1, A_2, \ldots A_n$ verschiedene Teilmengen von X. Zeige: Es gibt ein $x \in X$, sodass die Mengen

$$A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$$

alle verschieden sind.

IMO Selektion 2004

vierte Prüfung - 13. Juni 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit Höhen $\overline{AU}$, $\overline{BV}$, $\overline{CW}$ und Höhenschnittpunkt H. X liege auf $\overline{AU}$, Y auf $\overline{BV}$ und Z auf $\overline{CW}$. X, Y und Z sind alle von H verschieden. Zeige

(a) Wenn X, Y, Z und H auf einem Kreis liegen, gilt

$$[ABC] = [ABZ] + [AYC] + [XBC],$$

wobei $[PQR]$ die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ bezeichnet.

(b) Es gilt auch die Umkehrung von (a).

11. Finde alle injektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen $x \neq y$ gilt

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

12. Finde alle natürlichen Zahlen, die sich in der Form

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

darstellen lassen, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind.

SMO - Vorrunde

Bern, Zürich - 15. Januar 2005

Zeit: 2 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $|AD| \leq |AB|$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt E sei die Projektion von B auf die Gerade CM.

(a) Zeige, dass $ANEM$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

(b) Zeige, dass die Fläche des Vierecks $ABNE$ halb so gross ist, wie die Fläche von $ABCD$.

2. Zeige, dass es in jedem konvexen 9-Eck zwei verschiedene Diagonalen gibt, sodass die beiden Geraden, auf denen diese Diagonalen liegen, entweder parallel sind, oder sich in einem Winkel von weniger als 7° schneiden.

3. Seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass dann auch die beiden Zahlen

$$m^3 + mn + n^3 \qquad \text{und} \qquad mn(m+n)$$

teilerfremd sind.

4. Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60°$. Finde alle Punkte P im Innern dieses Dreiecks mit folgender Eigenschaft:

Ist D die Projektion von P auf die Gerade BC, E die Projektion von P auf CA und F die Projektion von P auf AB, dann gilt $\sphericalangle EDF = 30°$.

5. Sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl Möglichkeiten, drei Teilmengen A, B, C von M auszuwählen, sodass gilt

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset,$$
$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2005

erste Prüfung - 24. März 2005

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck und seien D, E, F die Seitenmitten von BC, CA, AB. Die Schwerlinien AD, BE und CF schneiden sich im Schwerpunkt S. Mindestens zwei der Vierecke

$$AFSE, \quad BDSF, \quad CESD$$

seien Sehnenvierecke. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

2. Von $4n$ Punkten in einer Reihe sind $2n$ weiss und $2n$ schwarz gefärbt. Zeige, dass es $2n$ aufeinanderfolgende Punkte gibt, von denen genau n weiss und n schwarz sind.

3. Beweise für alle $a_1, \ldots, a_n > 0$ die folgende Ungleichung und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k \leq \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$

4. Bestimme alle Mengen M natürlicher Zahlen, sodass für je zwei (nicht notwendigweise verschiedene) Elemente a, b aus M auch

$$\frac{a+b}{\mathrm{ggT}(a,b)}$$

in M liegt.

5. Ein konvexes n-Eck zu *zwacken* bedeutet Folgendes: Man wählt zwei benachbarte Seiten AB und BC aus und ersetzt diese durch den Streckenzug AM, MN, NC, wobei $M \in AB$ und $N \in BC$ beliebige Punkte im Innern dieser Strecken sind. Mit anderen Worten, man schneidet eine Ecke ab und erhält ein $(n+1)$-Eck.
Ausgehend von einem regulären Sechseck $\mathcal{P}_6$ mit Flächeninhalt 1 wird durch fortlaufendes Zwacken eine Folge $\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8, \ldots$ konvexer Polygone erzeugt. Zeige, dass der Flächeninhalt von $\mathcal{P}_n$ für alle $n \geq 6$ grösser als $\frac{1}{2}$ ist, unabhängig davon wie gezwackt wird.

SMO Finalrunde 2005

zweite Prüfung - 25. März 2005

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Bestimme alle möglichen Werte, die der Ausdruck

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}$$

annehmen kann.

7. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$7 \cdot 4^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

8. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. M und N seien zwei beliebige Punkte auf den Seiten AB respektive AC. Die Kreise mit den Durchmessern BN und CM schneiden sich in den Punkten P und Q. Zeige, dass die Punkte P, Q und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen.

9. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(yf(x))(x+y) = x^2(f(x) + f(y)).$$

10. An einem Fussballturnier nehmen $n > 10$ Mannschaften teil. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere. Ein Sieg gibt zwei Punkte, ein Unentschieden einen Punkt, und eine Niederlage keinen Punkt. Nach dem Turnier stellt sich heraus, dass jede Mannschaft genau die Hälfte ihrer Punkte in den Spielen gegen die 10 schlechtesten Mannschaften gewonnen hat (insbesondere hat jede dieser 10 Mannschaften die Hälfte ihrer Punke gegen die 9 übrigen gemacht). Bestimme alle möglichen Werte von n, und gib für diese Werte ein Beispiel eines solchen Turniers an.

IMO Selektion 2005

erste Prüfung - 7. Mai 2005

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Die beiden Folgen $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ und $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ enthalten zusammen jede der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ genau einmal. Bestimme den Wert der Summe

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

2. Finde den grösstmöglichen Wert des Ausdrucks

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)},$$

wobei x, y, z positive reelle Zahlen sind.

3. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Ein reguläres $4n$-Eck der Seitenlänge 1 sei irgendwie in endlich viele Parallelogramme zerlegt.

(a) Beweise, dass mindestens eines der Parallelogramme in der Zerlegung ein Rechteck ist.

(b) Bestimme die Summe der Flächen aller Rechtecke in der Zerlegung.

IMO Selektion 2005

zweite Prüfung - 8. Mai 2005

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich im Punkt P äusserlich berühren. Ein dritter Kreis k berühre k_1 in B und k_2 in C, so dass k_1 und k_2 im Innern von k liegen. Sei A einer der Schnittpunkte von k mit der gemeinsamen Tangente von k_1 und k_2 durch P. Die Geraden AB und AC schneiden k_1 bzw. k_2 nochmals in R bzw. S. Zeige, dass RS eine gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 ist.

5. Sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeige, dass p^2 ein Teiler ist von

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}.$$

6. Sei T die Menge aller Tripel (p, q, r) von nichtnegativen ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f : T \to \mathbb{R}$ für die gilt

$$f(p,q,r) = \begin{cases} 0 & \text{für } pqr = 0, \\ 1 + \frac{1}{6}\{ \; f(p+1,q-1,r) + f(p-1,q+1,r) & \\ \qquad +f(p-1,q,r+1) + f(p+1,q,r-1) & \text{sonst.} \\ \qquad +f(p,q+1,r-1) + f(p,q-1,r+1)\} & \end{cases}$$

IMO Selektion 2005

dritte Prüfung - 14. Mai 2005

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass sich das Polynom

$$(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) \cdots (x^2 - n^2) + 1$$

nicht als Produkt von zwei nichtkonstanten Polynomen mit ganzen Koeffizienten schreiben lässt.

8. Betrachte einen See mit zwei Inseln darin und sieben Städten am Ufer. Die Inseln und Städte nennen wir im Folgenden kurz *Orte*. Zwischen genau den folgenden Paaren von Orten besteht eine Schiffsverbindung:

(i) zwischen den beiden Inseln,

(ii) zwischen jeder Stadt und jeder Insel,

(iii) zwischen zwei Städten genau dann, wenn sie nicht benachbart sind.

Jede dieser Verbindungen wird von genau einem von zwei konkurrenzierenden Schiffsunternehmen angeboten. Beweise, dass es stets drei Orte gibt, sodass zwischen je zwei dieser Orte Schiffsverbindungen desselben Unternehmens existieren.

9. Sei $A_1A_2 \ldots A_n$ ein reguläres n-Eck. Die Punkte $B_1, \ldots, B_{n-1}$ sind wie folgt definiert:

- Für $i = 1$ oder $i = n - 1$ ist B_i der Mittelpunkt der Seite A_iA_{i+1};
- Für $i \neq 1, i \neq n - 1$ sei S der Schnittpunkt von A_1A_{i+1} und A_nA_i. Der Punkt B_i ist dann der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle A_iSA_{i+1}$ mit A_iA_{i+1}.

Beweise, dass gilt

$$\sphericalangle A_1B_1A_n + \sphericalangle A_1B_2A_n + \ldots + \sphericalangle A_1B_{n-1}A_n = 180^\circ.$$

IMO Selektion 2005

vierte Prüfung - 15. Mai 2005

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und seien M und N zwei Punkte auf BC, so dass $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. Seien P und Q die Projektionen von M bzw. N auf AC bzw. AB. Zeige, dass $APHQ$ ein Sehnenviereck ist.

11. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $f(m)^2 + f(n)$ ein Teiler ist von $(m^2 + n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

12. Sei A eine $m \times m$-Matrix. Sei X_i die Menge der Einträge in der i-ten Zeile und Y_j die Menge der Einträge in der j-ten Spalte, $1 \leq i, j \leq m$. A heisst *cool*, wenn die Mengen $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m$ alle verschieden sind. Bestimme den kleinsten Wert für n, sodass eine coole 2005×2005-Matrix mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ existiert.

SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 14. Januar 2006

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Tripel (p, q, r) von Primzahlen, sodass auch die drei Differenzen

$$|p-q|, \quad |q-r|, \quad |r-p|$$

alle Primzahlen sind.

2. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Teilmengen $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$, sodass für keine zwei Elemente $x, y \in A$ gilt $x + y = 2n + 1$.

3. Im Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$. Der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ falle mit dem Inkreismittelpunkt von $\triangle ADC$ zusammen. Finde die Winkel von $\triangle ABC$.

4. Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = a + b + c.$$

5. Betrachte ein $m \times n$-Brett, das in Einheitsquadrate unterteilt ist. Ein L-Triomino besteht aus einem Zentrumsquadrat und zwei Schenkelquadraten, also insgesamt aus drei Einheitsquadraten. In der Ecke oben links liegt ein L-Triomino, sodass das Zentrumsquadrat auf dem Eckfeld liegt. In einem Zug kann das L-Triomino um den Mitelpunkt von einem der beiden Schenkelquadrate um Vielfache von 90° gedreht werden. Für welche m und n ist es möglich, dass das L-Triomino nach endlich vielen solchen Zügen in der unteren rechten Ecke zu liegen kommt?

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2006

erste Prüfung - 31. März 2006

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$yf(2x) - xf(2y) = 8xy(x^2 - y^2).$$

2. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und sei D ein innerer Punkt der Seite BC. Ein Kreis berühre BC in D und scheide die Seiten AB und AC in den inneren Punkten M, N und P, Q. Beweise, dass gilt

$$|BD| + |AM| + |AN| = |CD| + |AP| + |AQ|.$$

3. Berechne die Quersumme der Zahl

$$9 \times 99 \times 9999 \times \cdots \times \underbrace{99\ldots99}_{2^n},$$

wobei sich die Anzahl Neunen in jedem Faktor verdoppelt.

4. Ein Kreis mit Umfang $6n$ wird durch $3n$ Punkte in je n Intervalle der Länge 1, 2 und 3 zerlegt. Zeige, dass es stets zwei dieser Punkte gibt, welche auf dem Kreis diametral gegenüber liegen.

5. Ein Kreis k_1 liegt innerhalb eines zweiten Kreises k_2 und berührt diesen im Punkt A. Eine Gerade durch A schneide k_1 nochmals in B und k_2 in C. Die Tangente an k_1 durch B schneide k_2 in den Punkten D und E. Die Tangenten an k_1 durch C berühren k_1 in den Punkten F und G. Beweise, dass D, E, F und G auf einem Kreis liegen.

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2006

zweite Prüfung - 1. April 2006

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. In einem Tennisturnier haben mindestens drei Spieler teilgenommen. Dabei haben je zwei Spieler genau einmal gegeneinander gespielt, und jeder Spieler hat mindestens ein Match gewonnen. Zeige, dass es drei Spieler A, B, C gibt, sodass A gegen B, B gegen C und C gegen A gewonnen hat.

7. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\angle ABC = 60°$. Nehme an, es sei $|BC| = |CD|$. Beweise, dass gilt

$$|CD| + |DA| = |AB|.$$

8. Leute aus n verschiedenen Ländern sitzen an einem runden Tisch, sodass für je zwei Personen aus demselben Land ihre direkten Sitznachbarn rechts von ihnen aus verschiedenen Ländern stammen. Was ist die grösstmögliche Anzahl Personen, die am Tisch Platz nehmen können?

9. Seien a, b, c, d reelle Zahlen. Beweise, dass gilt

$$(a^2 + b^2 + 1)(c^2 + d^2 + 1) \geq 2(a + c)(b + d).$$

10. Entscheide, ob es eine ganze Zahl $n > 1$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

(a) n ist keine Primzahl.

(b) Für alle ganzen Zahlen a ist $a^n - a$ durch n teilbar.

Viel Glück!

IMO Selektion 2006

erste Prüfung - 29. April 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Im Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite BC und E die Projektion von C auf AD. Angenommen es gelte $\angle ACE = \angle ABC$. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig oder rechtwinklig ist.

2. Sei $n \geq 5$ eine ganze Zahl. Bestimme die grösste ganze Zahl k, sodass ein Polygon mit n Ecken und genau k inneren $90°$-Winkeln existiert? (Das Polygon muss nicht konvex sein, der Rand darf sich aber nicht selbst überschneiden.)

3. Sei n eine natürliche Zahl. Jede der Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist weiss oder schwarz gefärbt. Man kann nun wiederholt eine Zahl auswählen und diese, sowie alle zu ihr nicht teilerfremden Zahlen umfärben. Anfangs sind alle Zahlen weiss. Für welche n kann man erreichen, dass irgendwann alle Zahlen schwarz sind?

IMO Selektion 2006

zweite Prüfung - 30. April 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Die positiven Teiler der natürlichen Zahl n seien $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Bestimme alle n, für die gilt
$$2n = d_5^2 + d_6^2 - 1.$$

5. Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt in dessen Inneren. Sei E ein von D verschiedener Punkt auf der Geraden AD. Seien ω_1 und ω_2 die Umkreise der Dreiecke BDE bzw. CDE. ω_1 und ω_2 schneiden die Seite BC in den inneren Punkten F bzw. G. Der Schnittpunkt von DG und AB sei X, und der Schnittpunkt von DF und AC sei Y. Zeige, dass XY parallel zu BC ist.

6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt
$$f(f(x) - y^2) = f(x)^2 - 2f(x)y^2 + f(f(y)).$$

IMO Selektion 2006

dritte Prüfung - 13. Mai 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Das Polynom $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ besitze die drei reellen Nullstellen $a > b > c$. Finde den Wert des Ausdrucks

$$a^2b + b^2c + c^2a.$$

8. Längs eines Kreises stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2006$ in beliebiger Reihenfolge. Es können nun wiederholt zwei auf dem Kreis benachbarte Zahlen miteinander vertauscht werden. Nach einer Folge solcher Vertauschungen steht jede der Zahlen diametral gegenüber ihrer Anfangsposition. Beweise, dass mindestens einmal zwei Zahlen mit Summe 2007 vertauscht wurden.

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und Höhenschnittpunkt H. Der Mittelpunkt der Seite BC sei M. Die Punkte D auf AB und E auf AC seien so, dass $AE = AD$ ist und D, H, E auf einer Geraden liegen. Zeige, dass HM und die gemeinsame Sehne der Umkreise der beiden Dreiecke ABC und ADE rechtwinklig zueinander liegen.

IMO Selektion 2006

vierte Prüfung - 14. Mai 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{ab + c} + \sqrt{bc + a} + \sqrt{ca + b} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

11. Finde alle natürlichen Zahlen k, sodass $3^k + 5^k$ eine Potenz einer natürlichen Zahl mit Exponent ≥ 2 ist.

12. Eine Raumstation besteht aus 25 Kammern, und je zwei Kammern sind mit einem Tunnel verbunden. Es gibt insgesamt 50 Haupttunnel, die in beide Richtungen benutzt werden können, die restlichen sind alle Einbahntunnel. Eine Gruppe von vier Kammern heisst *verbunden*, falls man von jeder dieser Kammern in jede andere gelangen kann, indem man nur die sechs Tunnel verwendet, welche diese Kammern untereinander verbinden. Bestimme die grösstmögliche Anzahl verbundener Vierergruppen.

SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 13. Januar 2007

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge $2a$. In jedem Eckpunkt, jedem Kantenmittelpunkt und jedem Flächenmittelpunkt befindet sich eine Stadt. Zwei Städte sind durch eine Strasse miteinander verbunden, falls ihr Abstand a beträgt. Gibt es eine Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal führt?

2. Wie viele siebenstellige Zahlen gibt es, für die das Produkt der Ziffern gleich 45^3 ist?

3. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und die Punkte D, E und F seien die Höhenfusspunkte der Höhen durch A, B bzw. C. Der Schnittpunkt der Geraden EF mit der Rechtwinkligen zu AC durch D sei S. Beweise, dass das Dreieck DES gleichschenklig ist.

4. Bestimme alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass

$$a^2 + 3b \quad \text{und} \quad b^2 + 3a$$

beides Quadratzahlen sind.

5. Auf einem Kreis k liegen fünf verschiedene Punkte A, M, B, C und D in dieser Reihenfolge und es gelte $MA = MB$. Die Geraden AC und MD schneiden sich in P und BD schneide MC in Q. Die Gerade PQ schneide k in X und Y. Zeige $MX = MY$.

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2007

erste Prüfung - 23. März 2007

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle positiven reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$a = \max\{\tfrac{1}{b}, \tfrac{1}{c}\} \qquad b = \max\{\tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{d}\} \qquad c = \max\{\tfrac{1}{d}, \tfrac{1}{e}\}$$
$$d = \max\{\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{f}\} \qquad e = \max\{\tfrac{1}{f}, \tfrac{1}{a}\} \qquad f = \max\{\tfrac{1}{a}, \tfrac{1}{b}\}$$

2. Seien a, b, c drei ganze Zahlen, sodass $a + b + c$ durch 13 teilbar ist. Zeige, dass auch

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + 2 \cdot 2007abc$$

durch 13 teilbar ist.

3. Die Ebene wird in Einheitsquadrate unterteilt. Jedes Feld soll mit einer von n Farben gefärbt werden, sodass gilt: Können vier Felder mit einem L-Tetromino bedeckt werden, dann haben diese Felder vier verschiedene Farben (das L-Tetromino darf gedreht und gespiegelt werden). Bestimme den kleinsten Wert von n, für den das möglich ist.

4. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$ und Höhenschnittpunkt H. Sei D der Höhenfusspunkt von A auf BC. Sei E die Spiegelung von C an D. Die Geraden AE und BH schneiden sich im Punkt S. Sei N der Mittelpunkt von AE und sei M der Mittelpunkt von BH. Beweise, dass MN senkrecht auf DS steht.

5. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f(1) = 0$,

(b) $f(x) > 0$ für alle $x > 1$,

(c) Für alle $x, y \geq 0$ mit $x + y > 0$ gilt

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2007

zweite Prüfung - 24. März 2007

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Drei gleich grosse Kreise k_1, k_2, k_3 schneiden sich nichttangential in einem Punkt P. Seien A und B die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2. Sei D bzw. C der von P verschiedene Schnittpunkt von k_3 mit k_1 bzw. k_2. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

7. Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen mit arithmetischem Mittel $m = \frac{a+b+c}{3}$. Beweise, dass gilt

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}} \leq 3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

8. Sei $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$ eine Menge mit folgender Eigenschaft: Unter je drei Zahlen aus M kann man stets zwei auswählen, sodass die eine durch die andere teilbar ist. Wieviele Zahlen kann M höchstens enthalten?

9. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass

$$\frac{a^3+1}{2ab^2+1}$$

eine ganze Zahl ist.

10. Die Ebene wird in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 unterteilt. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge n, dessen Seiten auf den Gitterlinien liegen. Auf jedem Gitterpunkt auf dem Rand und im Innern dieses Dreiecks liegt ein Stein. In einem Spielzug wird ein Einheitsdreieck ausgewählt, welches auf genau 2 Ecken mit einem Stein belegt ist. Die beiden Steine werden entfernt, und auf die dritte Ecke wird ein neuer Stein gelegt. Für welche n ist es möglich, dass nach endlich vielen Spielzügen nur noch ein Stein übrig bleibt?

Viel Glück!

IMO Selektion 2007

erste Prüfung - 5. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Die Punkte K und L liegen auf den Seiten AB bzw. CD mit $AK/KB = DL/LC$. Die Punkte P und Q liegen so auf der Strecke KL, dass gilt

$$\angle APB = \angle BCD \qquad \text{und} \qquad \angle CQD = \angle ABC.$$

Zeige, dass die Punkte P, Q, B und C auf einem Kreis liegen.

2. Bestimme die beiden kleinsten natürlichen Zahlen, die sich in der Form $7m^2 - 11n^2$ mit natürlichen Zahlen m und n schreiben lassen.

3. Wir nennen zwei Personen ein *befreundetes Paar*, wenn sie sich kennen, und wir nennen sie ein *nichtbefreundetes Paar*, wenn sie sich nicht kennen (befreundet sein oder nicht befreundet sein ist dabei immer gegenseitig). Seien m, n natürliche Zahlen. Finde die kleinste natürliche Zahl k, sodass Folgendes gilt: In jeder Gruppe von k Leuten gibt es stets $2m$ Leute, die m disjunkte befreundete Paare bilden, oder es gibt $2n$ Leute, die n disjunkte nichtbefreundete Paare bilden.

IMO Selektion 2007

zweite Prüfung - 6. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Ein Paar (r, s) natürlicher Zahlen heisst *gut*, falls ein Polynom P mit ganzen Koeffizienten und paarweise verschiedene ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_s$ existieren, sodass gilt

$$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_r) = 2 \qquad \text{und} \qquad P(b_1) = P(b_2) = \ldots = P(b_s) = 5.$$

(a) Zeige, dass für jedes gute Paar (r, s) natürlicher Zahlen $r, s \leq 3$ gilt.

(b) Bestimme alle guten Paare.

5. Seien $n > 1$ und m natürliche Zahlen. Ein Parlament besteht aus mn Abgeordneten, die $2n$ Kommissionen gebildet haben, sodass gilt:

(i) Jede Kommission besteht aus m Abgeordneten.

(ii) Jeder Abgeordnete ist Mitglied in genau 2 Kommissionen.

(iii) Je zwei Kommissionen haben höchstens ein gemeinsames Mitglied.

Bestimme in Abhängigkeit von n den grösstmöglichen Wert von m, sodass dies möglich ist.

6. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c \geq abc$. Beweise, dass von den folgenden drei Ungleichungen mindestens zwei richtig sind:

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \qquad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \qquad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

IMO Selektion 2007

dritte Prüfung - 19. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ eine Folge, die jede der Zahlen $1, 2, \ldots, 2007$ genau einmal enthält. Es wird nun wiederholt folgende Operation ausgeführt: Ist das erste Folgeglied gleich n, dann wird die Reihenfolge der ersten n Folgeglieder umgekehrt. Zeige, dass die Folge nach endlich vielen solchen Operation mit der Zahl 1 beginnt.

8. Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \qquad \text{und} \qquad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Die Diagonalen BD und CE treffen sich in P. Zeige, dass die Gerade AP die Seite CD in deren Mittelpunkt schneidet.

9. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die genau eine ganze Zahl a mit $0 < a < n!$ existiert, sodass gilt

$$n! \mid a^n + 1.$$

IMO Selektion 2007

vierte Prüfung - 20. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Für eine natürliche Zahl n sei

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor .$$

Beweise, dass es unendlich viele natürliche Zahlen m gibt, für die die Ungleichung $f(m) < f(m+1)$ gilt, und dass es unendlich viele natürlichen Zahlen m gibt, für die die Ungleichung $f(m) > f(m+1)$ gilt.

11. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

12. Im Dreieck ABC sei J der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Seite BC in A_1 und die Verlängerungen der Seiten AC und AB in B_1 bzw. C_1 berührt. Die Gerade A_1B_1 schneide die Gerade AB rechtwinklig in D. Sei E die Projektion von C_1 auf die Gerade DJ. Bestimme die Grösse der Winkel $\angle BEA_1$ und $\angle AEB_1$.

SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 12. Januar 2008

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Gegeben sind fünf positive Teiler von 10^{2008}. Zeige, dass es zwei dieser Teiler gibt, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

2. Ein *Weg* in der Ebene führt vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(6, 6)$, wobei man in jedem Schritt entweder um 1 nach rechts oder um 1 nach oben gehen kann. Wieviele Wege gibt es, die weder den Punkt $(2, 2)$ noch den Punkt $(4, 4)$ enthalten?

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $CD < AD$ und $CD < BC$. Die Diagonalen AC und BD schneiden sich im Punkt S. Die Spiegelung der Gerade AB an AC sei e und die Spielgelung der Geraden AB an BD sei f. Die Gerade CD schneide e und f in den Punkten E bzw. F. Beweise, dass das Dreieck SEF gleichschenklig ist.

4. Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass die Anzahl positiver Teiler von n gleich dem drittkleinsten positiven Teiler von n ist.

5. Ein quadratisches Spielbrett besteht aus $2n \times 2n$ Feldern. Es sollen n dieser Felder markiert werden, sodass keine zwei markierten Felder in derselben oder benachbarten Zeilen liegen, und sodass auch keine zwei markierten Felder in derselben oder benachbarten Spalten liegen. Auf wieviele Arten ist dies möglich?

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2008

erste Prüfung - 14.März 2008

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC \neq 45°$ und $\sphericalangle ABC \neq 135°$. Sei P der Punkt auf der Geraden AB mit $\sphericalangle CPB = 45°$. Seien O_1 und O_2 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ACP und BCP. Zeige, dass die Fläche des Vierecks CO_1PO_2 gleich gross ist wie die Fläche des Dreiecks ABC.

2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt:

$$f(xy) \leq \frac{xf(y) + yf(x)}{2}.$$

3. Zeige, dass jede Zahl der Form

$$2^{5^{2^{5^{\cdot^{\cdot}}}}} + 4^{5^{4^{5^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

durch 2008 teilbar ist, wobei die Exponententürme beliebige, voneinander unabhängige Höhen ≥ 3 haben.

4. Betrachte drei Seiten eines $n \times n \times n$-Würfels, die an einer der Würfelecken zusammenstossen. Für welche n ist es möglich, diese vollständig und überlappungsfrei mit Papierstreifen der Grösse 3×1 zu bedecken? Die Papierstreifen können dabei auch über die Kanten zwischen diesen Würfelseiten hinweggeklebt werden.

5. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Bestimme den geometrischen Ort aller Punkte P mit der Eigenschaft

$$AP \cdot CP + BP \cdot DP = 1.$$

SMO Finalrunde 2008

zweite Prüfung - 15. März 2008

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Bestimme alle ungeraden natürlichen Zahlen der Form

$$\frac{p+q}{p-q},$$

wobei $p > q$ Primzahlen sind.

7. Ein 8×11-Rechteck aus Einheitsquadraten wird irgendwie in 21 zusammenhängende Teile zerlegt. Beweise, dass mindestens zwei dieser Teile bis auf Rotationen und Spiegelungen dieselbe Form haben.

8. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, das einen Umkreis besitzt. Beweise, dass sich die Diagonalen AD, BE und CF genau dann in einem Punkt schneiden, wenn gilt

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

9. Betrachte sieben verschiedene Geraden in der Ebene. Ein Punkt heisst *gut*, falls er auf mindestens drei dieser Geraden liegt. Bestimme die grösstmögliche Anzahl guter Punkte.

10. Finde alle Paare (α, β) von positiven reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle positiven reellen Zahlen x, y, z, w gilt

$$x + y^2 + z^3 + w^6 \geq \alpha(xyzw)^\beta.$$

(b) Es gibt ein Quadrupel (x, y, z, w) von positiven reellen Zahlen, sodass in (a) Gleichheit gilt.

IMO Selektion 2008

erste Prüfung - 17. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, sodass gilt:

$$a \mid bc - 1, \qquad b \mid ca - 1, \qquad c \mid ab - 1.$$

2. Seien m, n natürliche Zahlen. Betrachte ein quadratisches Punktgitter aus $(2m+1) \times (2n+1)$ Punkten in der Ebene. Eine Menge von Rechtecken heisst *gut*, falls folgendes gilt:

(a) Für jedes der Rechtecke liegen die vier Eckpunkte auf Gitterpunkten und die Seiten parallel zu den Gitterlinien.

(b) Keine zwei der Rechtecke haben einen gemeinsamen Eckpunkt.

Bestimme den grösstmöglichen Wert der Summe der Flächen aller Rechtecke in einer guten Menge.

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle ABC \neq \angle BCA$. Der Inkreis k des Dreiecks ABC berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten D, E bzw. F. Die Strecke AD schneide k ein weiteres Mal in P. Sei Q der Schnittpunkt von EF mit der Rechtwinkligen zu AD durch P. Sei X bzw. Y der Schnittpunkt von AQ mit DE bzw. mit DF. Zeige, dass A der Mittelpunkt der Strecke XY ist.

IMO Selektion 2008

zweite Prüfung - 18. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Sei r eine Gerade durch B, die k_1 in C und k_2 in D schneidet, so dass B zwischen C und D liegt. Sei s die Gerade parallel zu AD, die k_1 in E berührt und zu AD den kleinstmöglichen Abstand hat. Die Gerade AE schneidet k_2 in F. Sei t die Tangente zu k_2 durch F. Beweise dass gilt:

(a) Die Gerade t ist parallel zu AC.

(b) Die Geraden r, s und t schneiden sich in einem Punkt.

5. Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{a}{\sqrt{3a+2b+c}} + \frac{b}{\sqrt{3b+2c+a}} + \frac{c}{\sqrt{3c+2a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}.$$

6. Ein reguläres 2008-Eck wird irgendwie mit 2005 sich nicht schneidenden Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl nicht gleichschenkliger Dreiecke, die in einer solchen Zerlegung auftreten können.

IMO Selektion 2008

dritte Prüfung - 24. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Seien a, b natürliche Zahlen. Zeige, dass man die ganzen Zahlen mit drei Farben färben kann, sodass zwei ganze Zahlen mit Differenz a oder b stets verschieden gefärbt sind.

8. Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Innern der Strecke BC. Sei X ein weiterer Punkt im Innern der Strecke BC verschieden von D und sei Y der Schnittpunkt von AX mit dem Umkreis von ABC. Sei P der zweite Schnittpunkt der Umkreise von ABC und DXY. Beweise, dass P unabhängig von der Wahl von X ist.

9. Sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

IMO Selektion 2008

vierte Prüfung - 25. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $P(x) = x^4 - 2x^3 + px + q$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen alle reell sind. Zeige, dass die grösste dieser Nullstellen im Intervall $[1, 2]$ liegt.

11. Sei $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Folge ganzer Zahlen. Der *Nachfolger* von A ist die Folge $A' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ mit

$$a'_k = |\{i < k \mid a_i < a_k\}| - |\{i > k \mid a_i > a_k\}|.$$

Sei A_0 eine endliche Folge ganzer Zahlen und für $k \geq 0$ sei $A_{k+1} = A'_k$ der Nachfolger von A_k. Zeige, dass eine natürliche Zahl m existiert mit $A_m = A_{m+1}$.

12. Seien x, y, n natürliche Zahlen mit $x \geq 3$, $n \geq 2$ und

$$x^2 + 5 = y^n.$$

Zeige, dass jeder Primteiler p von n die Kongruenz $p \equiv 1 \pmod 4$ erfüllt.

SMO - Vorrunde

Bellinzona, Lausanne, Zürich - 10. Januar 2009

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle natürlichen Zahlen $n > 1$, sodass $(n-1)!$ durch n teilbar ist.

2. Betrachte n Kinder, von denen keine zwei gleich gross sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Kinder in eine Reihe zu stellen, sodass jedes Kind ausser dem grössten einen Nachbarn besitzt, der grösser ist als es.

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = 60°$. Die Punkte D und E liegen auf den Seiten AC bzw. AB. Die Geraden BD und CE schneiden den Umkreis von ABC in den weiteren Punkten X bzw. Y. Der Schnittpunkt von BD und CE sei S. Beweise, dass die Geraden BY und CX genau dann parallel sind, wenn $AESD$ ein Sehnenviereck ist.

4. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^{6a} = b^b.$$

5. Für welche natürlichen Zahlen m, n lässt sich ein $m \times n$-Rechteck mit lauter Quadraten der Seitenlänge 2 oder 3 lückenlos und überlappungsfrei bedecken?

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2009

erste Prüfung - 13.März 2009

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei P ein reguläres Sechseck. Für einen Punkt A seien $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_6$ die Abstände von A zu den sechs Eckpunkten von P, der Grösse nach geordnet. Finde den geometrischen Ort aller Punkte A im Innern oder auf dem Rand von P, sodass

(a) d_3 den kleinstmöglichen Wert annimmt.

(b) d_4 den kleinstmöglichen Wert annimmt.

2. Ein *Palindrom* ist eine natürliche Zahl, die im Dezimalsystem vorwärts und rückwärts gelesen gleich gross ist (z.B. 1129211 oder 7337). Bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, sodass

$$(\underbrace{11\ldots11}_{m}) \cdot (\underbrace{11\ldots11}_{n})$$

ein Palindrom ist.

3. Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Beweise die folgende Ungleichung, und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

4. Sei n eine natürliche Zahl. Jedes Feld eines $n \times n$-Quadrates enthält eines von n verschiedenen Symbolen, sodass jedes der Symbole in genau n Feldern steht. Zeige, dass eine Zeile oder eine Spalte existiert, die mindestens $\sqrt{n}$ verschiedene Symbole enthält.

5. Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$ und Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis berühre BC bei D. Der Mittelpunkt von BC sei M. Zeige, dass die Gerade IM die Strecke AD halbiert.

SMO Finalrunde 2009

zweite Prüfung - 14. März 2009

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, welche für alle $x > y > z > 0$ die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x - y + z) = f(x) + f(y) + f(z) - xy - yz + xz.$$

7. Die Punkte A, M_1, M_2 und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Sei k_1 der Kreis mit Mittelpunkt M_1 durch A und k_2 der Kreis mit Mittelpunkt M_2 durch C. Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten E und F. Eine gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 berühre k_1 in B und k_2 in D. Zeige, dass sich die Geraden AB, CD und EF in einem Punkt schneiden.

8. Gegeben ist ein Bodengrundriss, der aus n Einheitsquadraten zusammengesetzt ist. Albert und Berta möchten diesen Boden mit Kacheln bedecken, wobei alle Kacheln die Form eines 1×2-Dominos oder eines T-Tetrominos haben. Albert hat nur Kacheln von einer Farbe zur Verfügung, Berta hingegen hat Dominos in zwei Farben und Tetrominos in vier Farben zur Verfügung. Albert kann diesen Bodengrundriss in a Arten mit Kacheln bedecken, Berta auf b Arten. Unter der Annahme, dass $a \neq 0$ gilt, bestimme das Verhältnis b/a.

9. Finde alle injektiven Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}.$$

10. Sei $n > 3$ eine natürliche Zahl. Beweise, dass $4^n + 1$ einen Primteiler > 20 besitzt.

IMO Selektion 2009

erste Prüfung - 16. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $GERMANYISHOT$ ein reguläres Zwölfeck. Die Geraden GN und MI schneiden sich im Punkt P. Beweise, dass

(a) der Umkreis von Dreieck GIP gleich gross ist wie der Umkreis von $GERMANYISHOT$.

(b) die Strecke PA gleich lang ist wie eine Seite von $GERMANYISHOT$.

2. Finde alle Paare (m, n) ungerader natürlicher Zahlen mit $m, n \leq 2009$ und

$$m \mid n^2 + 8, \qquad n \mid m^2 + 8.$$

3. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Permutationen $(a_1, \ldots, a_n)$ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$2(a_1 + \ldots + a_k) \quad \text{ist durch } k \text{ teilbar} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

IMO Selektion 2009

zweite Prüfung - 17. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Für welche natürlichen Zahlen n existiert ein Polynom $P(x)$ mit ganzen Koeffizienten, sodass $P(d) = (n/d)^2$ gilt für alle positiven Teiler d von n?

5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und seien P und Q Punkte innerhalb des Vierecks $ABCD$, so dass $PQDA$ und $QPBC$ Sehnenvierecke sind. Nehme an, dass ein Punkt E auf der Strecke PQ existiert, so dass $\angle PAE = \angle QDE$ und $\angle PBE = \angle QCE$. Zeige, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

6. Sei P die Menge der ersten 2009 Primzahlen und sei X die Menge aller natürlichen Zahlen, welche nur Primfaktoren aus P besitzen. Bestimme alle natürlichen Zahlen k, für die eine Funktion $f : X \to X$ existiert, welche für alle $m, n \in X$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$f(mf(n)) = f(m)n^k.$$

IMO Selektion 2009

dritte Prüfung - 23. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Betrachte eine Menge A von 2009 Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte alle in A liegen, heisst *internes Dreieck*. Beweise, dass jeder Punkt aus A im Innern einer geraden Anzahl interner Dreiecke enthalten ist.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfülllt ist:

$$f(f(x) - f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

9. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien BE und CF Höhen. Zwei Kreise durch A und F berühren die Gerade BC bei P und Q, so dass B zwischen C und Q liegt. Beweise, dass sich die Geraden PE und QF auf dem Umkreis von AEF schneiden.

IMO Selektion 2009

vierte Prüfung - 24. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei n eine natürliche Zahl und seien a, b zwei verschiedene ganze Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl m ist $a^m - b^m$ durch n^m teilbar. Zeige, dass a, b beide durch n teilbar sind.

11. Betrachte n kollineare Punkte $P_1, \ldots, P_n$ und alle Kreise mit Durchmesser P_iP_j für $1 \leq i < j \leq n$. Jeder dieser Kreise wird mit einer von k Farben gefärbt. Eine solche Menge von gefärbten Kreisen heisst ein (n, k)-*Gewusel*. Eine *einfarbige Acht* sind zwei Kreise derselben Farbe, die sich äusserlich tangential berühren. Zeige, dass genau dann jedes (n, k)-Gewusel eine einfarbige Acht enthält, wenn $n > 2^k$ gilt.

12. Seien x, y, z reelle Zahlen, welche die Gleichung $x + y + z = xy + yz + zx$ erfüllen. Beweise die Ungleichung

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \geq -\frac{1}{2}.$$

SMO - Vorrunde

Bellinzona, Lausanne, Zürich - 9. Januar 2010

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c).$$

2. Sei g eine Gerade in der Ebene. Die Kreise k_1 und k_2 liegen auf derselben Seite von g und berühren g in den Punkten A respektive B. Ein weiterer Kreis k_3 berühre k_1 in D und k_2 in C. Beweise dass gilt:

(a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

(b) Die Geraden BC und AD schneiden sich auf k_3.

3. Auf wieviele Arten kann man jeder Ecke eines Würfels eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 10$ zuordnen, sodass keine Zahl mehrfach verwendet wird, und so dass für jede Seitenfläche die Summe der Zahlen in den vier angrenzenden Ecken ungerade ist?

4. Finde alle Paare (u, v) natürlicher Zahlen, sodass

$$\frac{uv^3}{u^2 + v^2}$$

eine Primpotenz ist.

5. Ein Schweizerkreuz besteht aus fünf Einheitsquadraten, einem zentralen und vier seitlich angrenzenden. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter je n Punkten im Innern oder auf dem Rand eines Schweizerkreuzes gibt es stets zwei, deren Abstand kleiner als 1 ist.

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2010

erste Prüfung - 12.März 2010

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Drei Spielsteine liegen auf der Zahlengeraden in ganzzahligen Punkten. In einem Zug kann man zwei Steine auswählen und einen davon um eins nach rechts, den anderen um eins nach links verschieben. Für welche Anfangspositionen kann man mit einer Folge von Zügen alle Spielsteine in einen Punkt schieben?

2. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und $AB \neq AC$. Der Inkreis berühre die Seiten BC, CA bzw. AB bei D, E bzw. F. Sei M der Mittelpunkt von EF. Die Gerade AD schneide den Inkreis bei $P \neq D$. Beweise, dass $PMID$ ein Sehnenviereck ist.

3. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die gilt

$$(4a - b)(4b - a) = 2010^n.$$

4. Seien $x, y, z > 0$ reelle Zahlen mit $xyz = 1$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{(x + y - 1)^2}{z} + \frac{(y + z - 1)^2}{x} + \frac{(z + x - 1)^2}{y} \geq x + y + z.$$

5. Betrachte die Eckpunkte eines regulären n-Ecks und verbinde diese mit Seiten oder Diagonalen irgendwie zu einem geschlossenen Streckenzug, der jede Ecke genau einmal durchläuft. Ein *paralleles Paar* ist eine Menge von zwei verschiedenen parallelen Strecken in diesem Streckenzug. Zeige:

(a) Ist n gerade, dann gibt es stets mindestens ein paralleles Paar.

(b) Ist n ungerade, dann existiert nie genau ein paralleles Paar.

SMO Finalrunde 2010

zweite Prüfung - 13. März 2010

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfüllt ist:
$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y).$$

7. Seien m, n natürliche Zahlen, sodass $m+n+1$ prim ist und ein Teiler von $2(m^2+n^2)-1$. Zeige, dass $m = n$ gilt.

8. In einem Dorf mit mindestens einem Einwohner gibt es mehrere Vereine. Jeder Einwohner des Dorfes ist Mitglied in mindestens k Vereinen und je zwei verschiedene Vereine haben höchstens ein gemeinsames Mitglied. Zeige dass mindestens k dieser Vereine dieselbe Anzahl Mitglieder haben.

9. Seien k und k' zwei konzentrische Kreise mit Mittelpunkt O. Der Kreis k' sei grösser als der Kreis k. Eine Gerade durch O schneide k in A und k' in B, sodass O zwischen A und B liegt. Eine andere Gerade durch O schneidet k in E und k' in F, sodass E zwischen O und F liegt. Zeige, dass sich der Umkreis von OAE, der Kreis mit Durchmesser AB und der Kreis mit Durchmesser EF in einem Punkt schneiden.

10. Sei $n \geq 3$ und sei P ein konvexes n-Eck. Beweise, dass sich P mit Hilfe von $n-3$ sich nicht schneidenden Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt, sodass der Umkreis von jedem dieser Dreiecke ganz P enthält. Wann existiert genau eine solche Zerlegung?

IMO Selektion 2010

erste Prüfung - 8. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Die *Verwuselung* von π ist die Anzahl Paare (i, j) natürlicher Zahlen mit $1 \leq i < j \leq n$ und $a_j < a_i$. Beweise, dass für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ mit Verwuselung k existiert.

2. Sei AB ein Durchmesser des Kreises k. Sei t die Tangente an k im Punkt B und seien C, D zwei Punkte auf t, sodass B zwischen C und D liegt. Die Geraden AC bzw. AD schneiden k nochmals in den Punkten E bzw. F. Die Geraden DE bzw. CF schneiden k nochmals in den Punkten G bzw. H. Beweise, dass die Strecken AG und AH dieselbe Länge haben.

3. Eine natürliche Zahl x heisst *gut*, falls x das Produkt einer geraden Anzahl (nicht notwendig verschiedener) Primzahlen ist. Seien a, b natürliche Zahlen und definiere $m(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Beweise, dass zwei verschiedene natürliche Zahlen a, b existieren, sodass

$$m(1), m(2), \ldots, m(2010)$$

alles gute Zahlen sind.

(b) Ist $m(x)$ gut für jede natürliche Zahl x, dann gilt $a = b$.

IMO Selektion 2010

zweite Prüfung - 9. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Die Punkte X, Y, Z liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden mit $|XY| \neq |YZ|$. Sei k_1 bzw. k_2 der Kreis mit Durchmesser XY bzw. YZ. Die Punkte A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2 liegen auf k_1 bzw. k_2, sodass

$$\angle A_1 Y A_2 = \angle B_1 Y B_2 = 90^\circ$$

gilt. Zeige, dass sich die beiden Geraden A_1A_2 und B_1B_2 auf XY schneiden.

5. Sei P eine endliche Menge von Primzahlen und sei $\ell(P)$ die grösstmögliche Anzahl aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, sodass jede dieser Zahlen durch mindestens eine Primzahl aus P teilbar ist. Beweise die Ungleichung $\ell(P) \geq |P|$ und zeige, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn das kleinste Element von P grösser ist als $|P|$.

6. Finde alle positiven reellen Lösungen (a, b, c, d) der Gleichung

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} = 0.$$

IMO Selektion 2010

dritte Prüfung - 23. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. In einem Land gibt es endlich viele Städte und endlich viele Strassen. Jede Strasse verbindet zwei verschiedene Städte und je zwei Städte sind durch höchstens eine Strasse verbunden. Alle Strassen können in beide Richtungen befahren werden und das Strassennetz ist so eingerichtet, dass man jede Stadt von jeder anderen Stadt aus (möglicherweise über Umwege) erreichen kann. Für jede Stadt gibt es zudem eine gerade Anzahl Strassen, die von dieser Stadt wegführen.

Die Regierung beschliesst nun, sämtliche Strassen zu Einbahnstrassen umzubauen. Dies soll so geschehen, dass für jede Stadt die Anzahl herausführender Strassen gleich gross ist wie die Anzahl hineinführender Strassen.

(a) Zeige, dass dies stets möglich ist.

(b) Zeige, dass man immer noch jede Stadt von jeder anderen aus erreichen kann, egal wie die Regierung ihren Plan umsetzt.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x^4 + y^4) = xf(x^3) + y^2 f(y^2).$$

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Eine Gerade durch H schneide AB bzw. AC in den Punkten D bzw. E, so dass $|AD| = |AE|$ gilt. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide den Umkreis von ADE im Punkt $K \neq A$. Zeige, dass HK die Strecke BC halbiert.

IMO Selektion 2010

vierte Prüfung - 24. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei P ein relles Polynom, sodass für alle reellen x die Gleichung $P(x) = P(1-x)$ gilt. Beweise, dass ein reelles Polynom Q existiert mit

$$P(x) = Q\big(x(1-x)\big).$$

11. Finde alle ganzen Zahlen n, sodass $2^n + 3^n + 6^n$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

12. Bananen, Äpfel und Orangen sind irgendwie auf 100 Kisten verteilt. Beweise, dass man 51 Kisten auswählen kann, die zusammen mindestens die Hälfte der Früchte von jeder Sorte enthalten.

SMO - Vorrunde

Bellinzona, Lausanne, Zürich - 8. Januar 2011

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle CAB = 90°$. Der Punkt L liegt auf der Seite BC. Der Umkreis des Dreiecks ABL schneidet die Gerade AC in M und der Umkreis des Dreiecks CAL schneidet die Gerade AB in N. Nehme an, N liege im Inneren der Seite AB und M auf der Verlängerung der Seite AC. Zeige, dass L, M und N auf einer Geraden liegen.

2. Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass n^3 das Produkt aller positiven Teiler von n ist.

3. An der Tafel stehen 11 natürliche Zahlen. Zeige, dass man aus diesen Zahlen einige (vielleicht alle) wählen und dazwischen die Zeichen $+$ und $-$ so platzieren kann, dass das Ergebnis durch 2011 teilbar ist.

4. Gegeben ist eine ringförmige Busroute mit $n \geq 2$ Haltestellen, welche in beide Richtungen befahren werden kann. Die Strecke zwischen zwei benachbarten Haltestellen nennen wir *Abschnitt*. Eine der Haltestellen heisst Zürich. Ein Bus soll in Zürich starten, dann exakt $n+2$ Abschnitte weit fahren und sich am Ende wieder in Zürich befinden. Dabei muss er jede Haltestelle mindestens einmal besuchen. Er kann bei jeder Haltestelle wenden. Wie viele mögliche Fahrtrouten gibt es?

5. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, sodass sich die Spiegelungen der Geraden AB an den Winkelhalbierenden der Winkel $\angle CAD$ und $\angle CBD$ in einem Punkt P schneiden. Sei O das Zentrum des Umkreises von $ABCD$. Zeige, dass OP und CD rechtwinklig aufeinander stehen.

Viel Glück!

IMO Selektion 2011

erste Prüfung - 7. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Paare von Primzahlen (p, q) mit $3 \nmid p + 1$ so dass

$$\frac{p^3 + 1}{q}$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

2. Die Gerade g schneide den Kreis k in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte der Strecke AB schneide k noch einmal in C und D. Sei nun P ein weiterer Punkt auf g, der ausserhalb von k liegt. Die Parallelen zu CA und CB durch P schneiden die Geraden CB und CA in den Punkten X und Y. Beweise, dass XY senkrecht auf PD steht.

3. Betrachte ein Spielbrett mit ungeraden Seitenlängen, das in Einheitsquadrate aufgeteilt ist. Das Brett ohne ein Eckfeld wird irgendwie mit Dominos bedeckt. Man kann nun in einem Zug ein Domino in Längsrichtung um eins verschieben, sodass das vorher leere Feld bedeckt wird, dafür ein neues (zwei Felder davon entfernt) frei wird. Beweise, dass das leere Feld mit einer Folge von Zügen in jede beliebige Ecke des Brettes verschoben werden kann.
Bemerkung: Ein Domino besteht aus aus zwei Einheitsquadraten mit einer gemeinsamen Seite.

Viel Glück !

IMO Selektion 2011

zweite Prüfung - 8. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei n ein natürliche Zahl. In einem Affenkäfig mit n Affen stehen n Kletterstangen. Damit die Affen etwas Bewegung bekommen platzieren die Wärter zur Fütterung jeweils eine Banane oben an jeder Stange. Zusätzlich verbinden sie die Stangen mit einer endlichen Anzahl Seile, sodass zwei verschiedene Seilenden an verschiedenen Punkten festgemacht werden. Wenn ein Affe eine Stange hochklettert und ein Seil findet, kann er nicht widerstehen und wird sich über das Seil hangeln bevor er seinen Aufstieg fortsetzt. Jeder Affe startet bei einer anderen Stange. Zeige, dass jeder Affe einen Banane kriegt.

5. Finde natürliche Zahlen a, b, c, so dass die Quersumme von $a+b, b+c$ und $c+a$ jeweils kleiner als 5 ist, die Quersumme von $a+b+c$ aber grösser als 50.

6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ so dass für alle positiven rationalen Zahlen x, y gilt

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

Viel Glück !

IMO Selektion 2011

dritte Prüfung - 21. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Finde alle Polynome $P \neq 0$ mit reellen Koeffizienten, welche die folgende Bedingung erfüllen:

$$P(P(k)) = P(k)^2 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, (\deg P)^2$$

8. Zeige, dass es mehr als 10^{13} Möglichkeiten gibt, 81 Könige so auf einem 18×18 Schachbrett zu platzieren, dass sich keine zwei Könige attackieren.
Bemerkung: Zwei Könige können sich attackieren, falls die Felder, auf denen sie stehen, eine gemeinsame Seite oder eine gemeinsame Ecke besitzen.

9. In einem Dreieck ABC mit $AB \neq AC$ sei D die Projektion von A auf BC. Ferner seien E, F die Mittelpunkte der Strecken AD bzw. BC und G die Projektion von B auf AF. Zeige, dass die Gerade EF die Tangente im Punkt F an den Umkreis des Dreiecks GFC ist.

Viel Glück !

IMO Selektion 2011

vierte Prüfung - 22. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $ABCD$ ein Quadrat und M ein Punkt im Innern der Strecke BC. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAM$ schneide die Strecke BC im Punkt E. Ferner schneide die Winkelhalbierende des Winkels $\angle MAD$ die Gerade CD im Punkt F. Zeige, dass AM und EF senkrecht aufeinander stehen.

11. Seien $x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ reelle Zahlen, sodass für $i = 1, \ldots, 8$ gilt $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$, wobei $x_9 = x_1$ und $x_{10} = x_2$. Beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+2} \leq 1$$

und finde alle Fälle in denen Gleichheit herrscht.

12. Sei $a > 1$ eine natürliche Zahl und seien f und g Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Angenommen es gibt eine natürliche Zahl n_0, so dass $g(n) > 0$ für alle $n \geq n_0$ und

$$f(n) \mid a^{g(n)} - 1 \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Zeige, dass dann f konstant sein muss.

Viel Glück !

SMO - Vorrunde

Lugano, Lausanne, Zürich - 14. Januar 2012

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, sodass $(m + 1)(n + 2)$ durch mn teilbar ist.

2. Gegeben sind $6n$ Chips in $2n$ verschiedenen Farben, sodass es von jeder Farbe genau 3 Chips hat. Diese Chips sollen auf zwei Stapel A und B verteilt werden, sodass beide Stapel dieselbe Anzahl Chips enthalten und kein Stapel drei gleichfarbige Chips enthält. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dies zu tun, wenn

a) die Reihenfolge der Chips innerhalb der Stapel keine Rolle spielt?

b) die Reihenfolge wichtig ist?

3. Seien A und B die Schnittpunkte zweier Kreise k und l mit Zentrum K respektive L. Seien M und N die Schnittpunkte von k respektive l mit einer Geraden durch A, sodass A zwischen M und N liegt. Sei D der Schnittpunkt der Geraden MK und NL. Zeige, dass die Punkte M, N, B und D auf einem Kreis liegen.

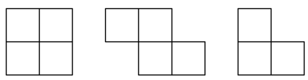
4. Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine arithmetische Folge ganzer Zahlen. Nehme an, dass für $1 \leq k \leq 50$ jeweils a_k durch k teilbar ist.

a) Beweise, dass a_{51} durch 51 und a_{52} durch 52 teilbar ist.

b) Ist a_{53} immer durch 53 teilbar?

Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ ist arithmetisch, falls die Differenz $a_{i+1} - a_i$ für alle i gleich ist.

5. Ein Brett der Grösse 11×11 soll mit Kacheln der Grösse 2×2, mit Skew-Tetrominos und mit L-Triominos überlappungsfrei bedeckt werden. Die Kacheln dürfen gedreht und gespiegelt werden. Wie viele L-Triominos werden dazu mindestens benötigt?



Viel Glück!

SMO Finalrunde 2012

erste Prüfung - 9. März 2012

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Es sitzen 2012 Chamäleons an einem runden Tisch. Am Anfang besitzt jedes die Farbe rot oder grün. Nach jeder vollen Minute wechselt jedes Chamäleon, welches zwei gleichfarbige Nachbarn hat, seine Farbe von rot zu grün respektive von grün zu rot. Alle anderen behalten ihre Farbe. Zeige, dass es nach 2012 Minuten mindestens 2 Chamäleons gibt, welche gleich oft die Farbe gewechselt haben.

2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 6.$$

3. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten D und P. Die gemeinsame Tangente an die beiden Kreise auf der Seite von D berührt k_1 in A und k_2 in B. Die Gerade AD schneidet k_2 ein zweites Mal in C. Sei M der Mittelpunkt der Sehne BC. Zeige, dass $\angle DPM = \angle BDC$ gilt.

4. Zeige, dass es keine unendliche Folge von Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ gibt, welche für jedes k $p_{k+1} = 2p_k - 1$ oder $p_{k+1} = 2p_k + 1$ erfüllt. Beachte, dass nicht für jedes k die gleiche Formel gelten muss.

5. Sei n eine natürliche Zahl. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ verschiedene 3-elementige Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, sodass $|A_i \cap A_j| \neq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq k$. Bestimme alle n, für die es n solche Teilmengen gibt.

Viel Glück !

SMO Finalrunde 2012

zweite Prüfung - 10. März 2012

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit mindestens einem Winkel ungleich $90°$ und k der Umkreis des Dreiecks ABC. Sei E der auf k diametral gegenüberliegende Punkt von B. Zeige, dass der Umkreis des Dreiecks ADE und k den gleichen Radius haben.

7. Seien n und k natürliche Zahlen sodass $n = 3k + 2$. Zeige, dass die Summe aller Teiler von n durch 3 teilbar ist.

8. Betrachte einen Würfel und zwei seiner Ecken A und B, welche die Endpunkte einer Flächendiagonalen sind. Ein *Weg* ist eine Folge von Würfelecken, wobei in jedem Schritt von einer Ecke längs eine Würfelkante zu einer der drei benachbarten Ecken gegangen wird. Sei a die Anzahl Wege der Länge 2012, die im Punkt A beginnen und in A enden und sei b die Anzahl Wege der Länge 2012, die in A beginnen und in B enden. Entscheide, welche der beiden Zahlen a und b die grössere ist.

9. Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen mit $abc = 1$. Zeige

$$1 + ab + bc + ca \geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}, \frac{(b+c)^2}{bc}, \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Wann gilt Gleichheit?

10. Sei O ein innerer Punkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Seien A_1, B_1 und C_1 die Projektionen von O auf die Seiten BC, AC und AB. Sei P der Schnittpunkt der Senkrechten zu B_1C_1 respektive A_1C_1 durch die Punkte A respektive B. Sei H die Projektion von P auf AB. Zeige, dass die Punkte A_1, B_1, C_1 und H auf einem Kreis liegen.

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

erste Prüfung - 28. April 2012

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Finde in Abhängigkeit von n die grösste natürliche Zahl d, sodass eine Permutation $a_1, a_2, \dots, a_n$ der Zahlen $1, 2, \dots, n$ existiert mit

$$|a_i - a_{i+1}| \geq d, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Eine ganze Zahl m ist eine *echte Potenz*, falls es positive ganze Zahlen a und n gibt, sodass $n > 1$ und $m = a^n$.

(a) Zeige, dass es 2012 verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass sich keine nichtleere Teilmenge davon zu einer echten Potenz aufsummiert.

(b) Zeige, dass es 2012 verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass sich jede nichtleere Teilmenge davon zu einer echten Potenz aufsummiert.

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k. Sei S der Schnittpunkt von AB und CD und T der Schnittpunkt der Tangenten an k in A und C. Zeige, dass $ADTS$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn BD die Strecke AC halbiert.

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

zweite Prüfung - 29. April 2012

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Im Dreieck ABC sei $\angle BAC = 60°$. Sei E ein Punkt auf der Geraden AB, sodass B zwischen A und E liegt und $BE = BC$ gilt. Analog sei F ein Punkt auf AC, sodass C zwischen A und F liegt und $CF = BC$ gilt. Der Umkreis von ACE schneide EF in K. Zeige, dass K auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ liegt.

5. Sei $n \geq 6$ eine natürliche Zahl. Betrachte eine Menge S von n verschiedenen reellen Zahlen. Beweise, dass es mindestens $n-1$ verschiedene zweielementige Teilmengen von S gibt, sodass das arithmetische Mittel der beiden Elemente in jeder dieser Teilmengen mindestens gleich dem arithmetischen Mittel aller Elemente in S ist.

6. Finde alle surjektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

dritte Prüfung - 12. Mai 2012

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Seien p, q zwei Primzahlen mit

$$pq \mid 2012^{p+q-1} - 1.$$

Zeige, dass genau eine der Primzahlen 2011 ist.

8. Seien f, g zwei Polynome mit ganzen Koeffizienten und seien a, b ganzzahlige Fixpunkte von $f \circ g$. Beweise, dass ganzzahlige Fixpunkte c, d von $g \circ f$ existieren mit $a + c = b + d$.
Hinweis: Für zwei Polynome p, q ist $p \circ q$ durch $(p \circ q)(x) = p(q(x))$ definiert.

9. Bestimme die grösste natürliche Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Die Menge der natürlichen Zahlen kann so in k disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_k$ aufgeteilt werden, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 15$ für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ als Summe zweier verschiedener Elemente aus A_i schreiben lässt.

Viel Glück !

IMO Selektion 2012

vierte Prüfung - 13. Mai 2012

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc \geq 1$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{a^4 - 1}{ab^3 + abc + ac^3} + \frac{b^4 - 1}{bc^3 + abc + ba^3} + \frac{c^4 - 1}{ca^3 + abc + cb^3} \geq 0.$$

11. Sei I der Inkreismittelpunkt und AD der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks ABC. Seien E und F Punkte auf den Strahlen BA und CA mit

$$BE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

Zeige, dass sich die Geraden EF und DI rechtwinklig schneiden.

12. Finde alle ganzen Zahlen $m, n \geq 2$, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(i) $m + 1$ ist eine Primzahl von der Form $4k + 3$ für eine ganze Zahl k.

(ii) Es existiert eine Primzahl p und eine nichtnegative ganze Zahl a mit

$$\frac{m^{2^n - 1} - 1}{m - 1} = m^n + p^a.$$

Viel Glück !