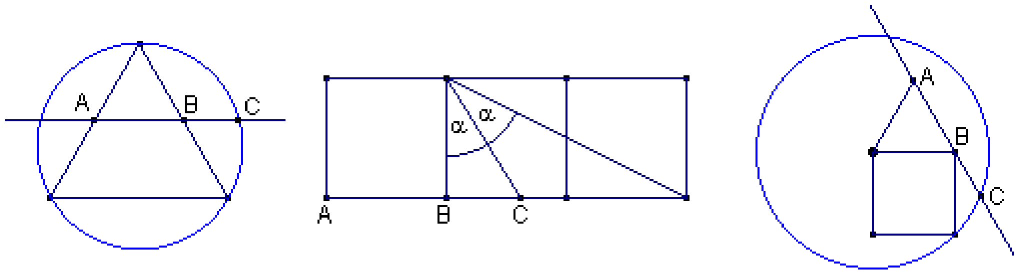
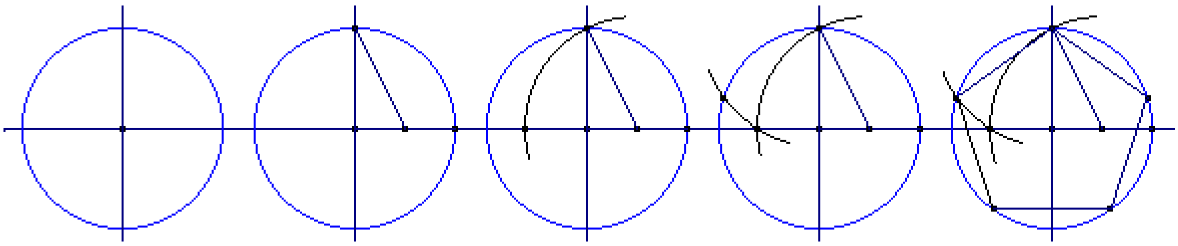
Aufgaben

1) Die folgenden Figuren sind im wesentlichen aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken aufgebaut. Bestimmen Sie jeweils die Teilverhältnisse für die Strecken AB und AC.



2) Gibt es außer Φ noch andere relle Zahlen, deren Kehrwerte die selben Nachkommastellen haben?

3) Überprüfen Sie die Richtigkeit der unten angedeuteten Konstruktion eines regulären Fünfecks!



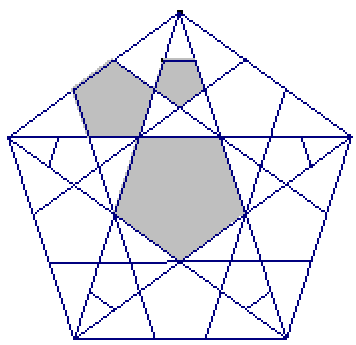
4) Zeigen Sie, dass für die Quotientenfolge $<c_n>=<a_{n+1}/a_n>$ der Fibonacci-Zahlen $<a_i>$ gilt:

$$c_{n+1} = 1 + \frac{1}{c_n}$$

5) BeweisenSie:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

6) Wie verhält sich jeweils eine der drei grauen Flächen zur Fläche des äußeren regulären Fünfecks?



7) Beweisen Sie die Berührbedingung für den Goldenen Baum! (Hinweis im Abschnitt "Fraktal")

8) Zeigen Sie, dass bei Φ-Zahlen die Ziffernfolgen 100 und 011 gleichwertig sind.

9) Berechnen Sie den Grenzwert

$$g = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

10) Stellen Sie $11{,}01_{\Phi}$ als Dezimalzahl dar!

11) Zeigen Sie: ½ ist im Goldenen Zahlensystem der periodische "Bruch" $0{,}\overline{010}$

12) Man lässt jede zweite Fibonacci-Zahl weg. Wie lautet die Rekursionsformel zur Bildung der übrigbleibenden Zahlenfolge?

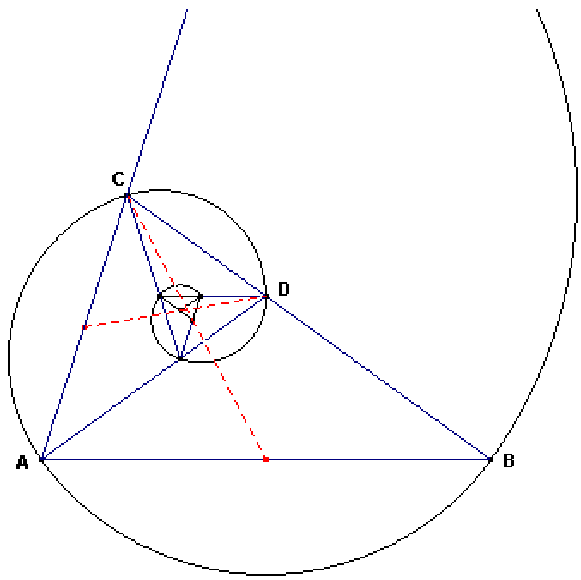
13) Bilden Sie analog zur Goldenen Spirale eine andere, indem Sie die Viertelkreise durch ihre jeweils komplementären Dreiviertelkreise ersetzen.

14) Zeigen Sie für die Figur links unten im Abschnitt "Spirale", dass SA und SA' orthogonal sind. Berechnen Sie das Verhältnis SA':SA.

15) Die positive Lösung der Gleichung $x^2-2x-1 = 0$ sei Ψ. Kann man ein Zahlensystem zur Basis Ψ bilden?

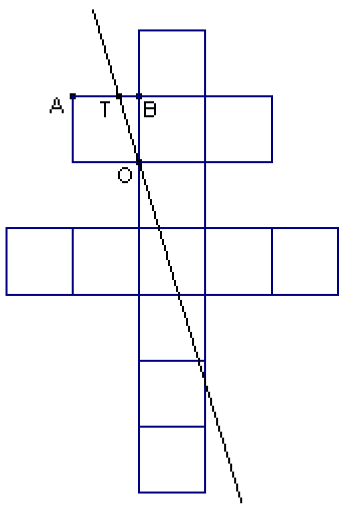
16) Eine Treppe hat n Stufen. Die erste Stufe soll immer betreten werden, dann kann man aber jeweils entweder die nächste oder gleich die übernächste Stufe nehmen. Zeigen Sie: Die Anzahl der Möglichkeiten, die Treppe zu besteigen, ist die n-te Fibonacci-Zahl.

17) Die nebenstehende Spirale wird über goldene Dreiecke erzeugt (vgl. dazu den Abschnitt "Fünfeck"). Sie besteht aus Kreisbögen, die in den Übergangspunkten A, C, usw. gemeinsame Tangenten haben. Wo liegen die jeweiligen Mittelpunkte dieser Bögen? Welche Eigenschaft kommt dem Schnittpunkt der rot gezeichneten Eckschwerlinien der Dreiecke ABC und ADC zu? Geht auch hier die bis ins Unendliche fortgesetzte Spirale durch eine Drehstreckung in sich selbst über? Eventuelles Drehzentrum? Drehwinkwinkel? Streckungsfaktor?



18) Das Lothringer Kreuz kann man sich aus 13 Quadraten gebildet denken. Es soll durch eine gerade Linie durch den Punkt O in zwei gleich große Flächen getrennt werden. Zeigen Sie, dass diese Linie die Strecke AB im goldenen Schnitt teilt.
(Die nebenstehend gezeichnete ist nicht die Lösungslinie!)

18) Das Lothringer Kreuz kann man sich aus 13 Quadraten gebildet denken. Es soll durch eine gerade Linie durch den Punkt O in zwei gleich große Flächen getrennt werden.
Zeigen Sie, dass diese Linie die Strecke AB im goldenen Schnitt teilt.
(Die nebenstehend gezeichnete ist nicht die Lösungslinie!)



19) Die grau gefärbte "Mondsichel" der Figur unten links ist so entstanden, dass der Peripheriepunkt S des kleinen Kreises Schwerpunkt der Sichelfläche ist. Beweisen Sie: Jede Sehne durch A wird im goldenen Schnitt geteilt.

20) Die Länge einer Quadratseite sei eine Fibonacci-Zahl (hier 13). Man teilt die Seiten gemäß Abbildung im Verhältnis ihrer beiden Fibonacci-Summanden, um vier Teilflächen zu erhalten, die man zu einem Rechteck zusammen setzt. Nun ergibt aber der Vergleich der Inhalte von Quadrat und Rechteck einen Unterschied von 1. Wo liegt der Fehler? Beweisen Sie in diesem Zusammenhang die für Fibonacci-Zahlen gültige Formel:

$$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$$