Canadian Mathematical Olympiad
1969

Problem 1

Show that if $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ and p_1, p_2, p_3 are not all zero, then

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

for every positive integer n.

Problem 2

Determine which of the two numbers $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$, $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ is greater for any $c \geq 1$.

Problem 3

Let c be the length of the hypotenuse of a right angle triangle whose other two sides have lengths a and b. Prove that $a + b \leq \sqrt{2}c$. When does the equality hold?

Problem 4

Let ABC be an equilateral triangle, and P be an arbitrary point within the triangle. Perpendiculars PD, PE, PF are drawn to the three sides of the triangle. Show that, no matter where P is chosen,

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Problem 5

Let ABC be a triangle with sides of lengths a, b and c. Let the bisector of the angle C cut AB in D. Prove that the length of CD is

$$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

Problem 6

Find the sum of $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!$, where $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$.

Problem 7

Show that there are no integers a, b, c for which $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Problem 8

Let f be a function with the following properties:
1) $f(n)$ is defined for every positive integer n;
2) $f(n)$ is an integer;
3) $f(2) = 2$;
4) $f(mn) = f(m)f(n)$ for all m and n;
5) $f(m) > f(n)$ whenever $m > n$.

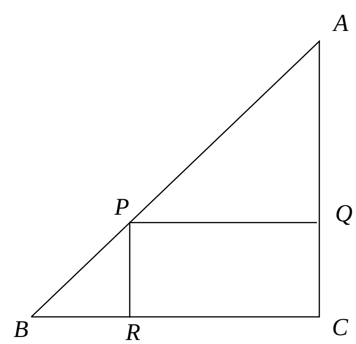
Prove that $f(n) = n$.

Problem 9

Show that for any quadrilateral inscribed in a circle of radius 1, the length of the shortest side is less than or equal to $\sqrt{2}$.

Problem 10

Let ABC be the right-angled isosceles triangle whose equal sides have length 1. P is a point on the hypotenuse, and the feet of the perpendiculars from P to the other sides are Q and R. Consider the areas of the triangles APQ and PBR, and the area of the rectangle $QCRP$. Prove that regardless of how P is chosen, the largest of these three areas is at least $2/9$.



Olympiade mathématique du Canada
1969

PROBLÈME 1

Montrer que si $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ et p_1, p_2, p_3 sont tous non nuls, alors

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

pour chaque entier positif n.

PROBLÈME 2

Trouver lequel des deux nombres $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$, $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ est le plus grand pour $c \geq 1$ quelconque.

PROBLÈME 3

Soit c la longeur de l'hypoténuse d'un triangle droit dont les deux autres côtés aient pour longueur a et b. Montrer que $a + b \leq \sqrt{2}c$. Dans quel cas a-t'on égalité?

PROBLÈME 4

Soit ABC un triangle équilatéral, et P un point arbitraire à l'intérieur du triangle. Des perpendiculaires PD, PE, PF sont tracées sur les trois côtés du triangle. Montrer que quelque soit P,

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

PROBLÈME 5

Soit ABC un triangle dont les côtés aient pour longueurs a, b et c. Soit D l'intersection de la bissectrice de l'angle C avec le côté AB. Montrer que la longueur de CD est précisément

$$\frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}.$$

PROBLÈME 6

Trouver la somme de $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!$, où $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

PROBLÈME 7

Montrer qu'il n'existe pas de nombres entiers a, b, c pour lesquels $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Problème 8

Soit f une fonction munie des propriétés suivantes:

1) $f(n)$ est définie pour chaque nombre entier positif n;
2) $f(n)$ est un nombre entier;
3) $f(2) = 2$;
4) $f(mn) = f(m)f(n)$ pour chaque m et n;
5) $f(m) > f(n)$ pour tout $m > n$.

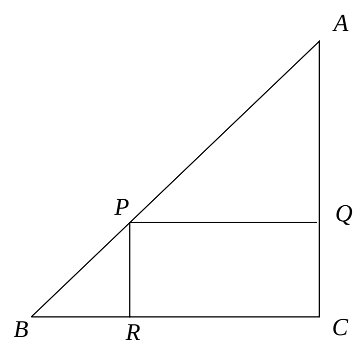
Montrer que $f(n) = n$.

Problème 9

Montrer que pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle de rayon 1, la longueur du plus petit côté est au plus $\sqrt{2}$.

Problème 10

Soit ABC un triangle isocèle droit dont les côtés égaux ont pour longueur 1. P est un point sur l'hypoténuse, et les bases des perpendiculaires de P sur les autres côtés sont Q et R. Considérons maintenant les aires des triangles APQ et PBR, et de même que l'aire du rectangle $QCRP$. Montrer que quelque soit P, la plus grande de ces aires est au moins $2/9$.



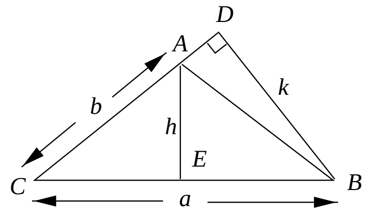
Canadian Mathematical Olympiad
1970

PROBLEM 1

Find all number triples (x, y, z) such that when any one of these numbers is added to the product of the other two, the result is 2.

PROBLEM 2

Given a triangle ABC with angle A obtuse and with altitudes of length h and k as shown in the diagram, prove that $a + h \geq b + k$. Find under what conditions $a + h = b + k$.



PROBLEM 3

A set of balls is given. Each ball is coloured red or blue, and there is at least one of each colour. Each ball weighs either 1 pound or 2 pounds, and there is at least one of each weight. Prove that there are 2 balls having different weights and different colours.

PROBLEM 4

a) Find all positive integers with initial digit 6 such that the integer formed by deleting this 6 is 1/25 of the original integer.
b) Show that there is no integer such that deletion of the first digit produces a result which is 1/35 of the original integer.

PROBLEM 5

A quadrilateral has one vertex on each side of a square of side-length 1. Show that the lengths a, b, c and d of the sides of the quadrilateral satisfy the inequalities

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

PROBLEM 6

Given three non-collinear points A, B, C, construct a circle with centre C such that the tangents from A and B to the circle are parallel.

PROBLEM 7

Show that from any five integers, not necessarily distinct, one can always choose three of these integers whose sum is divisible by 3.

PROBLEM 8

Consider all line segments of length 4 with one end-point on the line $y = x$ and the other end-point on the line $y = 2x$. Find the equation of the locus of the midpoints of these line segments.

Problem 9

Let $f(n)$ be the sum of the first n terms of the sequence

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots .$$

a) Give a formula for $f(n)$.
b) Prove that $f(s+t) - f(s-t) = st$ where s and t are positive integers and $s > t$.

Problem 10

Given the polynomial

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

with integral coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$, and given also that there exist four distinct integers a, b, c and d such that

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

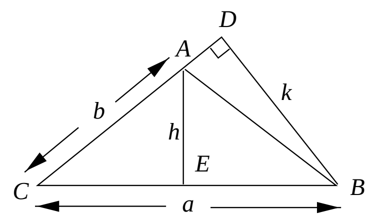
show that there is no integer k such that $f(k) = 8$.

Olympiade mathématique du Canada
1970

PROBLÈME 1

Trouver tous les triplets (x, y, z) tels que la somme de n'importe lequel de ces nombres avec le produit des deux autres soit égal à 2.

PROBLÈME 2



Etant donné un triangle ABC dont l'angle A est obtus et dont les hauteurs soient de longueurs h et k comme le montre le diagramme ci-contre, montrer que $a + h \geq b + k$. Trouver les conditions qui nous donneraient $a + h = b + k$.

PROBLÈME 3

Une collection de balles nous est donnée. Chaque balle est de couleur rouge ou bleue et au moins une de chaque couleur apparait. De plus, chaque balle pèse 1 ou 2 livres, et on a de même au moins une de chaque poids. Montrer qu'il y a 2 balles de couleur et poids différents.

PROBLÈME 4

a) Trouver tout entier positif débutant par le chiffre 6 et tel que le nombre obtenu en délaissant ce chiffre 6 soit 1/25 fois l'entier de départ.
b) Montrer qu'il n'y ait aucun entier tel qu'en délaissant son premier chiffre on obtienne un nombre qui soit 1/35 fois l'entier de départ.

PROBLÈME 5

Un quadrilatère a un sommet sur chaque côté d'un carré dont chaque côté est de longueur 1. Montrer que les longueurs a, b, c et d des côtés du quadrilatère satisfont les inégalités

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

PROBLÈME 6

Etant donnés trois points non colinéaires A, B, C, construire un cercle de centre C tel que les deux tangentes au cercle en A et B soient parallèles.

PROBLÈME 7

Montrer qu'étant donnés cinq nombres entiers, pas nécessairement tous distincts, on puisse toujour choisir trois d'entre eux de telle sorte que leur somme soit divisible par 3.

PROBLÈME 8

Considérons tous les segments de droite de longueur 4 ayant un point terminal sur la droite $y = x$ et dont l'autre point terminal se situe sur la droite $y = 2x$. Trouver l'équation du lieu géométrique des points milieux de ces segments.

Problème 9

Soit $f(n)$ la somme des n premiers termes de la suite

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots .$$

a) Donner une formule pour $f(n)$.
b) Montrer que $f(s + t) - f(s - t) = st$ où s et t sont des entiers positifs et $s > t$.

Problème 10

Etant donné le polynôme

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

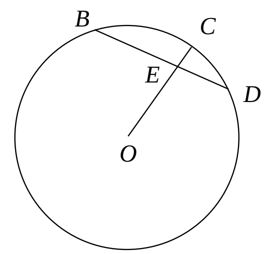
dont les coéfficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont entiers, et étant donné aussi qu'il existe quatre nombres entiers distincts a, b, c et d tels que

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

montrer alors qu'il n'existe aucun nombre entier k tel que $f(k) = 8$.

Canadian Mathematical Olympiad
1971

PROBLEM 1



DEB is a chord of a circle such that $DE = 3$ and $EB = 5$. Let O be the centre of the circle. Join OE and extend OE to cut the circle at C. (See diagram). Given $EC = 1$, find the radius of the circle.

PROBLEM 2

Let x and y be positive real numbers such that $x + y = 1$. Show that

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

PROBLEM 3

$ABCD$ is a quadrilateral with $AD = BC$. If $\angle ADC$ is greater than $\angle BCD$, prove that $AC > BD$.

PROBLEM 4

Determine all real numbers a such that the two polynomials x^2+ax+1 and x^2+x+a have at least one root in common.

PROBLEM 5

Let

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

where the coefficients a_i are integers. If $p(0)$ and $p(1)$ are both odd, show that $p(x)$ has no integral roots.

PROBLEM 6

Show that, for all integers n, $n^2 + 2n + 12$ is not a multiple of 121.

PROBLEM 7

Let n be a five digit number (whose first digit is non-zero) and let m be the four digit number formed from n by deleting its middle digit. Determine all n such that n/m is an integer.

PROBLEM 8

A regular pentagon is inscribed in a circle of radius r. P is any point inside the pentagon. Perpendiculars are dropped from P to the sides, or the sides produced, of the pentagon.

a) Prove that the sum of the lengths of these perpendiculars is constant.
b) Express this constant in terms of the radius r.

Problem 9

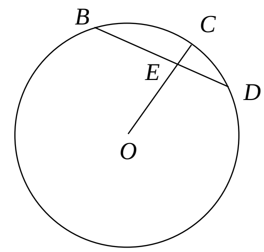
Two flag poles of heights h and k are situated $2a$ units apart on a level surface. Find the set of all points on the surface which are so situated that the angles of elevation of the tops of the poles are equal.

Problem 10

Suppose that n people each know exactly one piece of information, and all n pieces are different. Every time person A phones person B, A tells B everything that A knows, while B tells A nothing. What is the minimum number of phone calls between pairs of people needed for everyone to know everything? Prove your answer is a minimum.

Olympiade mathématique du Canada
1971

Problème 1



DEB est une corde d'un cercle tel que $DE = 3$ et $EB = 5$. Soit O le centre du cercle. Joignons maintenant OE et poursuivre OE de façon à couper le cercle au point C. (Voir le diagramme). Etant donné que $EC = 1$, trouver le rayon du cercle.

Problème 2

Soit x et y deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Problème 3

$ABCD$ est un quadrilatère dont $AD = BC$. Si $\angle ADC$ est plus grand que $\angle BCD$, montrer alors que $AC > BD$.

Problème 4

Déterminer tout nombre réel a tel que les deux polynômes $x^2 + ax + 1$ et $x^2 + x + a$ aient au moins une racine en commun.

Problème 5

Soit

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

où les coéfficients a_i sont entiers. Si $p(0)$ et $p(1)$ sont tous deux impairs, montrer que $p(x)$ n'a aucune racine entière.

Problème 6

Montrer que, pour tout entier n, $n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121.

Problème 7

Soit n un nombre à cinq chiffres (dont le premier chiffre est non nul) et soit m le nombre à quatre chiffres formé à partir de n en retirant le chiffre du milieu. Déterminer tout n tel que n/m soit entier.

Problème 8

Un pentagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon r. P étant un point quelconque à l'intérieur du pentagone, des perpendiculaires sont tracées de P aux côtés du pentagone, ou peut-être sur les extensions de ces côtés.

a) Montrer que la somme des longueurs de ces perpendiculaires est constante.
b) Exprimer cette constante en terme du rayon r.

PROBLÈME 9

Deux mâts de drapeau de hauteur h et k sont situés $2a$ unités à part sur une surface plane. Trouver l'ensemble des points sur la surface qui sont tels que les angles d'élévation sur le sommet des mâts soient égaux.

PROBLÈME 10

Supposons que n individus aient la connaissance d'exactement un renseignement, et que les n renseignements soient différents. Chaque fois que l'individu A contacte l'individu B, A dévoile à B toute sa connaissance, mais par contre B ne révèle rien à A. Quel est le nombre minimum de contacts requis entre les couples d'individus de telle sorte que chacun soit en possession de tous les renseignements? Montrer que votre réponse est en effet un minimum.

Canadian Mathematical Olympiad
1972

PROBLEM 1

Given three distinct unit circles, each of which is tangent to the other two, find the radii of the circles which are tangent to all three circles.

PROBLEM 2

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be non-negative real numbers. Define M to be the sum of all products of pairs $a_i a_j$ $(i < j)$, *i.e.*,

$$M = a_1(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_2(a_3 + a_4 + \cdots + a_n) + \cdots + a_{n-1}a_n.$$

Prove that the square of at least one of the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ does not exceed $2M/n(n-1)$.

PROBLEM 3

a) Prove that 10201 is composite in any base greater than 2.
b) Prove that 10101 is composite in any base.

PROBLEM 4

Describe a construction of a quadrilateral $ABCD$ given:
(i) the lengths of all four sides;
(ii) that AB and CD are parallel;
(iii) that BC and DA do not intersect.

PROBLEM 5

Prove that the equation $x^3 + 11^3 = y^3$ has no solution in positive integers x and y.

PROBLEM 6

Let a and b be distinct real numbers. Prove that there exist integers m and n such that $am + bn < 0$, $bm + an > 0$.

PROBLEM 7

a) Prove that the values of x for which $x = (x^2 + 1)/198$ lie between $1/198$ and $197.99494949\cdots$.
b) Use the result of a) to prove that $\sqrt{2} < 1.41\overline{421356}$.
c) Is it true that $\sqrt{2} < 1.41421356$?

PROBLEM 8

During a certain election campaign, p different kinds of promises are made by the various political parties $(p > 0)$. While several parties may make the same promise, any two parties have at least one promise in common; no two parties have exactly the same set of promises. Prove that there are no more than 2^{p-1} parties.

PROBLEM 9

Four distinct lines L_1, L_2, L_3, L_4 are given in the plane: L_1 and L_2 are respectively parallel to L_3 and L_4. Find the locus of a point moving so that the sum of its perpendicular distances from the four lines is constant.

PROBLEM 10

What is the maximum number of terms in a geometric progression with common ratio greater than 1 whose entries all come from the set of integers between 100 and 1000 inclusive?

Olympiade mathématique du Canada
1972

PROBLÈME 1

Etant donnés trois cercles de rayon unité, chacun tangent aux deux autres, trouver le rayon des cercles tangents aux trois cercles donnés.

PROBLÈME 2

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels non-négatifs. Posons M la somme de tous les produits des couples $a_i a_j$ $(i < j)$, *c.-à-d.*,

$$M = a_1(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_2(a_3 + a_4 + \cdots + a_n) + \cdots + a_{n-1}a_n.$$

Montrer que le carré d'au moins un des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne dépasse pas $2M/n(n-1)$.

PROBLÈME 3

a) Montrer que 10201 est un nombre composé pour toute base plus grande que 2.
b) Montrer que 10101 est un nombre composé pour toute base.

PROBLÈME 4

Décrire la construction d'un quadrilatère $ABCD$ étant donnés:
(i) les longueurs des quatre côtés;
(ii) que AB et CD soient parallèles;
(iii) que BC et DA ne se coupent pas.

PROBLÈME 5

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers x et y qui soient solutions de l'équation $x^3 + 11^3 = y^3$.

PROBLÈME 6

Soient a et b des nombres réels distincts. Montrer qu'il existe des nombres entiers m et n tels que $am + bn < 0$, $bm + an > 0$.

PROBLÈME 7

a) Montrer que les valeurs de x pour lesquelles $x = (x^2 + 1)/198$ se situent entre $1/198$ et $197.99494949\cdots$.
b) Utiliser le résultat de a) pour montrer que $\sqrt{2} < 1.41\overline{421356}$.
c) Est-il vrai que $\sqrt{2} < 1.41421356$?

PROBLÈME 8

Durant une certaine campagne électorale, p différentes sortes de promesses ont été faites par les divers partis concernés $(p > 0)$. Bien que plusieurs partis puissent faire la même promesse, deux partis quelconques ont au moins une promesse en commun; de plus, deux partis distincts diffèrent par au moins une promesse. Montrer que la campagne comporte au plus 2^{p-1} partis.

Problème 9

Quatre droites distinctes L_1, L_2, L_3, L_4 sont données dans le plan. L_1 et L_2 sont respectivement parallèles à L_3 et L_4. Trouver le lieu géométrique du point se déplaçant de telle sorte que la somme de ses distances perpendiculaires aux quatres droites soit constante.

Problème 10

Quel est le nombre maximum de termes d'une progression géométrique ayant un rapport commun plus grand que 1 et de plus qui soit composés des chiffres entre 100 et 1000 inclusivement?

Canadian Mathematical Olympiad
1973

PROBLEM 1

(i) Solve the simultaneous inequalities, $x < \frac{1}{4x}$ and $x < 0$; *i.e.*, find a single inequality equivalent to the two given simultaneous inequalities.
(ii) What is the greatest integer which satisfies both inequalities $4x + 13 < 0$ and $x^2 + 3x > 16$?
(iii) Give a rational number between $11/24$ and $6/13$.
(iv) Express 100000 as a product of two integers neither of which is an integral multiple of 10.
(v) Without the use of logarithm tables evaluate

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}.$$

PROBLEM 2

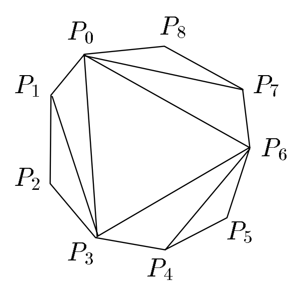
Find all the real numbers which satisfy the equation $|x+3| - |x-1| = x+1$. (Note: $|a| = a$ if $a \geq 0$; $|a| = -a$ if $a < 0$.)

PROBLEM 3

Prove that if p and $p+2$ are both prime integers greater than 3, then 6 is a factor of $p+1$.

PROBLEM 4

The figure shows a (convex) polygon with nine vertices. The six diagonals which have been drawn dissect the polygon into the seven triangles: $P_0P_1P_3$, $P_0P_3P_6$, $P_0P_6P_7$, $P_0P_7P_8$, $P_1P_2P_3$, $P_3P_4P_6$, $P_4P_5P_6$. In how many ways can these triangles be labelled with the names $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, $\triangle_7$ so that P_i is a vertex of triangle $\triangle_i$ for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$? Justify your answer.



PROBLEM 5

For every positive integer n, let

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

For example, $h(1) = 1$, $h(2) = 1 + \frac{1}{2}$, $h(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Prove that for $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n).$$

Problem 6

If A and B are fixed points on a given circle not collinear with centre O of the circle, and if XY is a variable diameter, find the locus of P (the intersection of the line through A and X and the line through B and Y).

Problem 7

Observe that

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}.$$

State a general law suggested by these examples, and prove it.
Prove that for any integer n greater than 1 there exist positive integers i and j such that

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(i+2)(i+3)} + \cdots + \frac{1}{j(j+1)}.$$

Olympiade mathématique du Canada
1973

PROBLÈME 1

(i) Résoudre les inégalités simultanées, $x < \frac{1}{4x}$ et $x < 0$; *c.-à-d.*, trouver une seule inégalité équivalente aux deux données.

(ii) Quel est le plus grand nombre entier qui satisfasse les deux inégalités $4x+13 < 0$ et $x^2 + 3x > 16$?

(iii) Trouver un nombre rationel compris entre $11/24$ et $6/13$.

(iv) Exprimer 100000 comme un produit de deux entiers dont ni l'un ni l'autre ne soit un multiple de 10.

(v) Sans l'aide de tables logarithmiques, évaluer

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}.$$

PROBLÈME 2

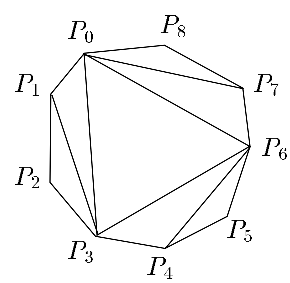
Trouver tous les nombres réels qui satisfont l'équation $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$. (Remarque: $|a| = a$ si $a \geq 0$; $|a| = -a$ si $a < 0$.)

PROBLÈME 3

Montrer que si p et $p+2$ sont tous deux des nombres premiers supérieurs à 3, alors 6 est un facteur de $p + 1$.

PROBLÈME 4

Le dessin ci-contre nous montre un polygone (convexe) muni de neuf sommets. Les six diagonales qui ont été tracées découpent notre polygone en sept triangles: $P_0P_1P_3$, $P_0P_3P_6$, $P_0P_6P_7$, $P_0P_7P_8$, $P_1P_2P_3$, $P_3P_4P_6$, $P_4P_5P_6$. Combie n puisse-t'on trouver de façons de désigner ces triangles sous les noms de $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, $\triangle_7$ de sorte que P_i soit un sommet du triangle $\triangle_i$ pour chaque $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$? Justifier votre réponse.



PROBLÈME 5

Pour chaque nombre entier positif n, soit

$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Par example, $h(1) = 1$, $h(2) = 1 + \frac{1}{2}$, $h(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Montrer que pour $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n - 1) = nh(n).$$

PROBLÈME 6

Si A et B sont des points fixes sur un cercle donné non colinéaires avec le centre O du cercle, et si de plus XY est un diamètre variable, trouver le lieu géométrique des points P (l'intersection de la droite par A et X et la droite par B et Y).

PROBLÈME 7

Observer que

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}.$$

Enoncer maintenant une régle générale suggérée par ces examples, et démontrer-là. Montrer que pour chaque nombre entier n supérieur à 1 il existe d'autres entiers i et j de telle sorte que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{(i+2)(i+3)} + \cdots + \frac{1}{j(j+1)}.$$

Canadian Mathematical Olympiad
1974

PART A

PROBLEM 1

i) If $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ and $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, show that $y^x = x^y$.
ii) Show that, for all positive integers n,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^n(n-1)^2 + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + \cdots + n).$$

PROBLEM 2

Let $ABCD$ be a rectangle with $BC = 3AB$. Show that if P, Q are the points on side BC with $BP = PQ = QC$, then

$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC.$$

PART B

PROBLEM 3

Let

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

be a polynomial with coefficients satisfying the conditions:

$$0 \leq a_i \leq a_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Let $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ be the coefficients of the polynomial

$$\begin{aligned}\big(f(x)\big)^2 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^2\\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{2n}x^{2n}.\end{aligned}$$

Prove that

$$b_{n+1} \leq \frac{1}{2}\big(f(1)\big)^2.$$

PROBLEM 4

Let n be a fixed positive integer. To any choice of n real numbers satisfying

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

there corresponds the sum

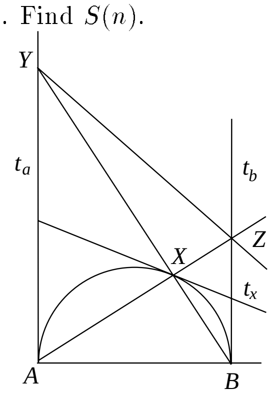
(*)

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j| &= |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + \cdots + |x_1 - x_{n-1}| + |x_1 - x_n| \\ &\quad + |x_2 - x_3| + |x_2 - x_4| + \cdots + |x_2 - x_{n-1}| + |x_2 - x_n| \\ &\quad + |x_3 - x_4| + \cdots + |x_3 - x_{n-1}| + |x_3 - x_n| \\ &\quad + \cdots + |x_{n-2} - x_{n-1}| + |x_{n-2} - x_n| \\ &\quad + |x_{n-1} - x_n|.\end{aligned}$$

Let $S(n)$ denote the largest possible value of the sum $(*)$. Find $S(n)$.

PROBLEM 5

Given a circle with diameter AB and a point X on the circle different from A and B, let t_a, t_b and t_x be the tangents to the circle at A, B and X respectively. Let Z be the point where line AX meets t_b and Y the point where line BX meets t_a. Show that the three lines YZ, t_x and AB are either concurrent (*i.e.*, all pass through the same point) or parallel.

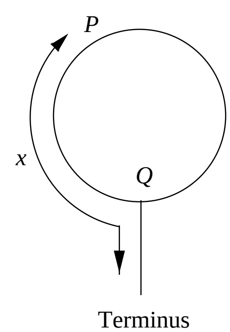


PROBLEM 6

An unlimited supply of 8-cent and 15-cent stamps is available. Some amounts of postage cannot be made up exactly, *e.g.*, 7 cents, 29 cents. What is the largest unattainable amount, *i.e.*, the amount, say n, of postage which is unattainable while all amounts larger than n are attainable? (Justify your answer.)

PROBLEM 7

A bus route consists of a circular road of circumference 10 miles and a straight road of length 1 mile which runs from a terminus to the point Q on the circular road (see diagram). It is served by two buses, each of which requires 20 minutes for the round trip. Bus No. 1, upon leaving the terminus, travels along the straight road, once around the circle clockwise and returns along the straight road to the terminus. Bus No. 2, reaching the terminus 10 minutes after Bus No. 1, has a similar route except that it proceeds counterclockwise around the circle. Both buses run continuously and do not wait at any point on the route except for a negligible amount of time to pick up and discharge passengers.



A man plans to wait at a point P which is x miles $(0 \le x < 12)$ from the terminus along the route of Bus No. 1 and travel to the terminus on one of the buses.

Assuming that he chooses to board that bus which will bring him to his destination at the earliest moment, there is a maximum time $w(x)$ that his journey (waiting plus travel time) could take.
Find $w(2)$; find $w(4)$.
For what value of x will the time $w(x)$ be the longest?
Sketch a graph of $y = w(x)$ for $0 \leq x < 12$.

Olympiade mathématique du Canada
1974

PARTIE A

PROBLÈME 1

i) Si $x = (1+\frac{1}{n})^n$ et $y = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, montrer que $y^x = x^y$.
ii) Montrer que, pour tout entier positif n,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^n(n-1)^2 + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1+2+\cdots+n).$$

PROBLÈME 2

Soit $ABCD$ un rectangle dont $BC = 3AB$. Montrer que si P, Q sont les points sur le côté BC pour lesquels $BP = PQ = QC$, alors

$$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC.$$

PARTIE B

PROBLÈME 3

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

un polynôme dont les coéfficients satisfont les conditions:

$$0 \le a_i \le a_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Posons $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ les coéfficients du polynôme

$$\begin{aligned}\big(f(x)\big)^2 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^2 \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{2n}x^{2n}.\end{aligned}$$

Montrer que

$$b_{n+1} \le \frac{1}{2}\big(f(1)\big)^2.$$

PROBLÈME 4

Soit n un nombre entier quelconque. A tout choix de n nombres réels satisfaisant

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

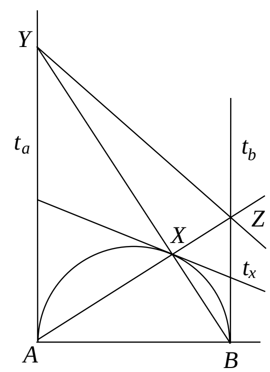
on fait correspondre la somme
(∗)

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j| \\ &= |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + \cdots + |x_1 - x_{n-1}| + |x_1 - x_n| \\ &\quad + |x_2 - x_3| + |x_2 - x_4| + \cdots + |x_2 - x_{n-1}| + |x_2 - x_n| \\ &\quad + |x_3 - x_4| + \cdots + |x_3 - x_{n-1}| + |x_3 - x_n| \\ &\quad + \cdots + |x_{n-2} - x_{n-1}| + |x_{n-2} - x_n| \\ &\quad + |x_{n-1} - x_n|.\end{aligned}$$

Posons $S(n)$ la plus grande des valeurs de la somme (∗). Trouver $S(n)$.

PROBLÈME 5

Etant donné un cercle de diamètre AB et un point X sur le cercle mais différent de A et B, on dénote par t_a, t_b et t_x les tangentes au cercle en A, B et X respectivement. Soit de plus Z le point où la droite AX rencontre t_b et Y le point où la droite BX rencontre t_a. Montrer que les trois droites YZ, t_x et AB sont ou bien concourantes (*c.-à-d.*, elles passent toutes par le même point) ou sont alors parallèles.

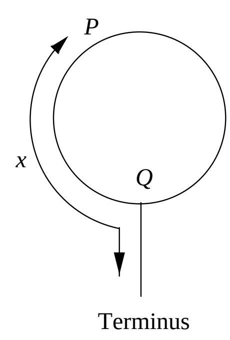


PROBLÈME 6

Un inventaire sans limite de timbres de 8 et 15 sous nous est disponible. Certaines valeurs de timbres ne peuvent pas être exactement obtenues, *p.ex.*, 7 sous, 29 sous. Quelle est la plus grande valeur qui ne puisse être obtenue, *c.-à-d.*, la valeur de timbre, disons n, qui n'est pas obtenable mais dont toutes les valeures supérieures à n soient par contre obtenable? (Justifier votre réponse.)

PROBLÈME 7

Une ligne d'autobus consiste en une route circulaire de circonférence 10 milles et une route droite de longueur 1 mille qui provient du terminus jusqu'au point Q sur la route circulaire (voir le diagramme). Deux autobus sont sur la même ligne, chacune nécessitant 20 minutes pour faire le trajet aller retour. En partant du terminus, l'autobus no. 1 parcoure la route droite, puis contourne le cercle une fois dans le sens des aiguilles d'une montre et finalement reprend la route droite jusqu'au terminus. L'autobus no. 2 parcoure un trajet semblable mais contourne le cercle dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et rejoint le terminus 10 minutes après l'autobus



no. 1. Les deux autobus parcourent de plus leur trajet sans interruption sinon pour un temps négligeable lors de l'embarquement et débarquement des passagers.
Un individu qui se situe au point P à x milles ($0 \leq x < 12$) du terminus par la route de l'autobus no. 1 se propose de se rendre au terminus par l'une des autobus. Si on suppose bien sûr que cet individu choisira l'autobus qui l'apportera au terminus dans le temps le plus court, il y a nécessairement un temps maximum $w(x)$ que ce voyage (le temps d'attente en plus du trajet) prendra.
Trouver $w(2)$; trouver $w(4)$.
Pour quelle valeur de x ce temps $w(x)$ sera-t-il le plus long?
Tracer le graphe de $y = w(x)$ pour $0 \leq x < 12$.

Canadian Mathematical Olympiad
1975

PROBLEM 1

Simplify

$$\left(\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\cdots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\cdots+n\cdot 3n\cdot 9n}\right)^{1/3}.$$

PROBLEM 2

A sequence of numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfies
(i) $a_1 = \frac{1}{2}$,
(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n \quad (n \geq 1)$.
Determine the value of $a_n \quad (n \geq 1)$.

PROBLEM 3

For each real number r, $[r]$ denotes the largest integer less than or equal to r, *e.g.*, $[6] = 6$, $[\pi] = 3$, $[-1.5] = -2$. Indicate on the (x, y)-plane the set of all points (x, y) for which $[x]^2 + [y]^2 = 4$.

PROBLEM 4

For a positive number such as 3.27, 3 is referred to as the integral part of the number and .27 as the decimal part. Find a positive number such that its decimal part, its integral part, and the number itself form a geometric progression.

PROBLEM 5

A, B, C, D are four "consecutive" points on the circumference of a circle and P, Q, R, S are points on the circumference which are respectively the midpoints of the arcs AB, BC, CD, DA. Prove that PR is perpendicular to QS.

PROBLEM 6

(i) 15 chairs are equally placed around a circular table on which are name cards for 15 guests. The guests fail to notice these cards until after they have sat down, and it turns out that no one is sitting in the correct seat. Prove that the table can be rotated so that at least two of the guests are simultaneously correctly seated.

(ii) Give an example of an arrangement in which just one of the 15 guests is correctly seated and for which no rotation correctly places more than one person.

PROBLEM 7

A function $f(x)$ is *periodic* if there is a positive number p such that $f(x+p) = f(x)$ for all x. For example, $\sin x$ is periodic with period 2π. Is the function $\sin(x^2)$ periodic? Prove your assertion.

Problem 8

Let k be a positive integer. Find all polynomials

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

where the a_i are real, which satisfy the equation

$$P\big(P(x)\big) = \{P(x)\}^k.$$

Olympiade mathématique du Canada 1975

PROBLÈME 1

Simplifier l'expression suivante:

$$\left(\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\cdots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\cdots+n\cdot 3n\cdot 9n}\right)^{1/3}.$$

PROBLÈME 2

Une suite de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfait

(i) $a_1 = \frac{1}{2}$,

(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n \quad (n \geq 1)$.

Déterminer les valeurs des $a_n \quad (n \geq 1)$.

PROBLÈME 3

Pour chaque nombre réel r on dénote par $[r]$ le plus grand entier plus petit ou égal à r, *p.ex.*, $[6] = 6$, $[\pi] = 3$, $[-1.5] = -2$. Indiquer sur le plan (x, y) l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $[x]^2 + [y]^2 = 4$.

PROBLÈME 4

Pour un nombre positif tel que 3.27, le nombre 3 est appelé sa partie entière. et .27 sa partie décimale. Trouver un nombre positif tel que sa partie décimale, sa partie entière et le nombre lui-même forment une progression géometrique.

PROBLÈME 5

A, B, C, D étant quatre points "consécutifs" sur la circonférence d'un cercle et P, Q, R, S étant respectivement les points milieux des arcs AB, BC, CD, DA sur la circonférence du cercle, montrer que PR est perpendiculaire à QS.

PROBLÈME 6

(i) 15 chaises sont placées autours d'une table ronde sur laquelle on a posé des cartes pour 15 invités. Ces hôtes n'ont pourtant pas remarqués les cartes avant qu'ils soient tous assis, et malheureusement aucun ne se trouve assis au bon endroit. Montrer pourtant qu'il est possible de tourner la table afin qu'au moins deux des invités soient simultanément assis au bon endroit.

(ii) Donner un arrangement autour de la table pour lequel un des 15 invités soit correctement assis mais dont aucune rotation ne produise plus d'une des personnes assises au bon endroit.

PROBLÈME 7

Une fonction $f(x)$ est dite *périodique* s'il existe un nombre positif p tel que $f(x+p) = f(x)$ pour tout x. Par example, $\sin x$ est périodique de période 2π. La fonction $\sin(x^2)$ est-elle pourtant périodique? Démontrer votre énoncé.

Problème 8

Soit k un nombre entier positif. Trouver tous les polynômes

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

dont les coéfficients a_i sont réels, et qui satisfassent l'équation

$$P\bigl(P(x)\bigr) = \{P(x)\}^k.$$

Canadian Mathematical Olympiad
1976

Problem 1

Given four weights in geometric progression and an equal arm balance, show how to find the heaviest weight using the balance only twice.

Problem 2

Suppose

$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$

for every positive integer $n \geq 1$.
Given that $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, find

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}}.$$

Problem 3

Two grade seven students were allowed to enter a chess tournament otherwise composed of grade eight students. Each contestant played once with each other contestant and received one point for a win, one half point for a tie and zero for a loss. The two grade seven students together gained a total of eight points and each grade eight student scored the same number of points as his classmates. How many students from grade eight participated in the chess tournament? Is the solution unique?

Problem 4

Let AB be a diameter of a circle, C be any fixed point between A and B on this diameter, and Q be a variable point on the circumference of the circle. Let P be the point on the line determined by Q and C for which $\frac{AC}{CB} = \frac{QC}{CP}$. Describe, with proof, the locus of the point P.

Problem 5

Prove that a positive integer is a sum of at least two consecutive positive integers if and only if it is not a power of two.

Problem 6

If A, B, C, D are four points in space, such that

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = \pi/2,$$

prove that A, B, C, D lie in a plane.

Problem 7

Let $P(x, y)$ be a polynomial in two variables x, y such that $P(x, y) = P(y, x)$ for every x, y (for example, the polynomial $x^2 - 2xy + y^2$ satisfies this condition). Given that $(x - y)$ is a factor of $P(x, y)$, show that $(x - y)^2$ is a factor of $P(x, y)$.

Problem 8

Each of the 36 line segments joining 9 distinct points on a circle is coloured either red or blue. Suppose that each triangle determined by 3 of the 9 points contains at least one red side. Prove that there are four points such that the 6 segments connecting them are all red.

Olympiade mathématique du Canada
1976

PROBLÈME 1

Etant donnés quatre poids formant une progression géométrique et une balance à bras égaux, montrer comment trouver le poids le plus lourd en se servant de la balance deux fois au plus.

PROBLÈME 2

Supposons que
$$n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$$
pour tout nombre entier positif $n \geq 1$.
Si de plus $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, trouver
$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}}.$$

PROBLÈME 3

Deux étudiants de 7° année ont obtenus l'autorisation de prendre part à un tournoi d'échecs réservé habituellement aux étudiants de 8° année. Chaque participant joue une fois contre chaque autre joueur et reçoit un point pour une victoire, un demi point pour une partie nulle et aucun point pour une perte. Les deux joueurs de 7° année ont amassées ensemble un total de huit points et tous les joueurs de 8° année ont remportés le même nombre de points. Combien alors y avait-il de joueurs de 8° année présents au tournoi? Est-ce une solution unique?

PROBLÈME 4

Soit AB le diamètre d'un cercle, C un point quelconque entre A et B sur ce diamètre, et Q un point variable sur la circonférence du cercle. Soit maintenant P le point sur la droite déterminée par Q et C pour lequel $\frac{AC}{CB} = \frac{QC}{CP}$. Décrire, avec démonstration, le lieu géométrique du point P.

PROBLÈME 5

Montrer qu'un nombre entier positif est la somme d'au moins deux entiers positifs successifs si et seulement s'il n'est pas une puissance de deux.

PROBLÈME 6

Si A, B, C, D sont quatre points dans l'espace, tels que
$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = \pi/2,$$
montrer que A, B, C, D se situent tous dans un même plan.

PROBLÈME 7

Soit $P(x, y)$ un polynôme à deux variables x, y tel que $P(x, y) = P(y, x)$ pour tout x, y (par example, le polynôme $x^2 - 2xy + y^2$ satisfait ces hypothèses). Etant donné de plus que $(x - y)$ soit un facteur de $P(x, y)$, montrer que $(x - y)^2$ est également un facteur de $P(x, y)$.

PROBLÈME 8

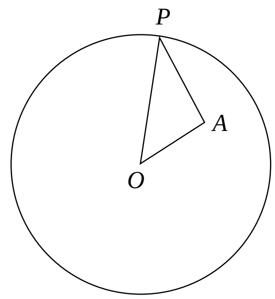
Chacun des 36 segments de droite joignant 9 points distincts d'un cercle donné est coloré rouge ou bleu. Supposons maintenant que tout triangle formé de trois des 9 points donnés contient au moins un côté de couleur rouge. Montrer alors qu'il existe quatre points dont les 6 segments les rejoignant un à l'autre soient tous rouges.

Canadian Mathematical Olympiad
1977

Problem 1

If $f(x) = x^2 + x$, prove that the equation $4f(a) = f(b)$ has no solutions in positive integers a and b.

Problem 2



Let O be the centre of a circle and A a fixed interior point of the circle different from O. Determine all points P on the circumference of the circle such that the angle OPA is a maximum.

Problem 3

N is an integer whose representation in base b is 777. Find the smallest positive integer b for which N is the fourth power of an integer.

Problem 4

Let

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

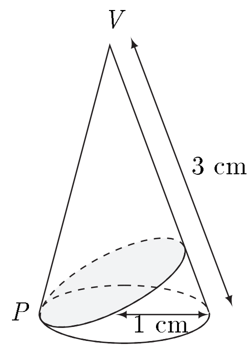
and

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

be two polynomials with integer coefficients. Suppose that all the coefficients of the product $p(x) \cdot q(x)$ are even but not all of them are divisible by 4. Show that one of $p(x)$ and $q(x)$ has all even coefficients and the other has at least one odd coefficient.

Problem 5

A right circular cone of base radius 1 cm and slant height 3 cm is given. P is a point on the circumference of the base and the shortest path from P around the cone and back to P is drawn (see diagram). What is the minimum distance from the vertex V to this path?



Problem 6

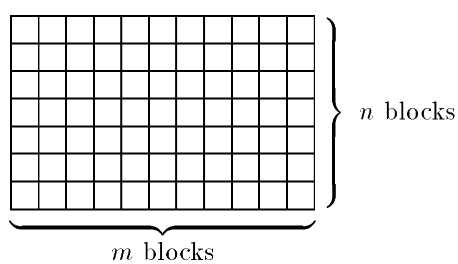
Let $0 < u < 1$ and define

$$u_1 = 1 + u, \quad u_2 = \frac{1}{u_1} + u, \quad \ldots, \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u, \quad n \geq 1.$$

Show that $u_n > 1$ for all values of $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Problem 7

A rectangular city is exactly m blocks long and n blocks wide (see diagram). A woman lives in the southwest corner of the city and works in the northeast corner. She walks to work each day but, on any given trip, she makes sure that her path does not include any intersection twice. Show that the number $f(m, n)$ of different paths she can take to work satisfies $f(m, n) \leq 2^{mn}$.

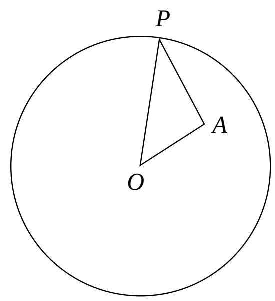


Olympiade mathématique du Canada 1977

PROBLÈME 1

Si $f(x) = x^2 + x$, montrer que l'équation $4f(a) = f(b)$ ne possède aucune solution dont les nombres a et b sont tous deux entiers positifs.

PROBLÈME 2



Soit O le centre d'un cercle et A un point intérieur fixe du cercle mais différent de O. Déterminer alors tous les points P sur la circonférence du cercle tels que l'angle OPA soit maximum.

PROBLÈME 3

Si N est un nombre entier dont la représentation dans la base b est 777, trouver alors le plus petit entier b pour lequel N est la quatrième puissance d'un entier.

PROBLÈME 4

Soient

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

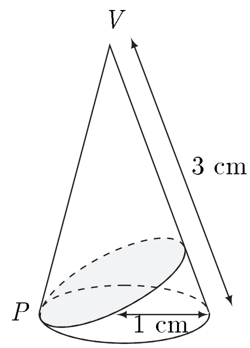
et

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

deux polynômes dont les coéfficients sont entiers. Supposons de plus que les coéfficients du produit $p(x) \cdot q(x)$ soient pairs mais pas tous divisibles par 4. Montrer alors que $p(x)$ ou sinon $q(x)$ a tous ses coéfficients pairs et que l'autre a au moins un de ses coéfficients impair.

PROBLÈME 5

Un cône circulaire droit de rayon de base 1 cm et d'inclinaison 3 cm est donné. P est de plus un point sur la circonférence de la base et le plus court trajet de P autour du cône et de retour en P est tracée (voir le diagramme). Quel est donc la distance minimum du sommet V à ce trajet?



Problème 6

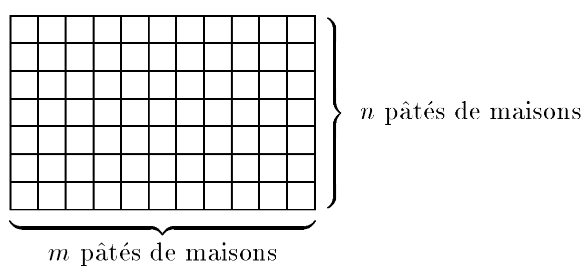
Soit $0 < u < 1$ et définissons

$$u_1 = 1 + u, \quad u_2 = \frac{1}{u_1} + u, \quad \ldots, \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u, \quad n \geq 1.$$

Montrer que $u_n > 1$ pour toutes valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Problème 7

Une ville rectangulaire est composée d'exactement m pâtés de maisons de long et n pâtés de maisons de large (voir le diagramme). Une femme demeure dans le coin sud-ouest de la ville et travaille dans le coin nord-est. Elle marche au travail chaque jour mais, chaque fois, elle s'assure que son chemin ne croise toute intersection plus d'une fois. Montrer que le nombre $f(m, n)$ de différents chemins possibles satisfait $f(m, n) \leq 2^{mn}$.



Canadian Mathematical Olympiad 1978

Problem 1

Let n be an integer. If the tens digit of n^2 is 7, what is the units digit of n^2?

Problem 2

Find all pairs a, b of positive integers satisfying the equation $2a^2 = 3b^3$.

Problem 3

Determine the largest real number z such that

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ xy + yz + xz &= 3 \end{aligned}$$

and x, y are also real.

Problem 4

The sides AD and BC of a convex quadrilateral $ABCD$ are extended to meet at E. Let H and G be the midpoints of BD and AC, respectively. Find the ratio of the area of the triangle EHG to that of the quadrilateral $ABCD$.

Problem 5

Eve and Odette play a game on a 3×3 checkerboard, with black checkers and white checkers. The rules are as follows:

I. They play alternately.
II. A turn consists of placing one checker on an unoccupied square of the board.
III. In her turn, a player may select either a white checker or a black checker and need not always use the same colour.
IV. When the board is full, Eve obtains one point for every row, column or diagonal that has an even number of black checkers, and Odette obtains one point for every row, column or diagonal that has an odd number of black checkers.
V. The player obtaining at least five of the eight points WINS.

(a) Is a 4–4 tie possible? Explain.
(b) Describe a winning strategy for the girl who is first to play.

Problem 6

Sketch the graph of $x^3 + xy + y^3 = 3$.

Olympiade mathématique du Canada
1978

Problème 1

Soit n un entier. Si le chiffre des dizaines dans le nombre n^2 est 7, quel est le chiffre des unités dans n^2?

Problème 2

Trouver toutes les paires a, b d'entiers positifs telles que $2a^2 = 3b^3$.

Problème 3

Déterminer le nombre réel z le plus grand tel que

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ xy + yz + xz &= 3 \end{aligned}$$

et tel que x et y soient réels eux aussi.

Problème 4

On prolonge les côtés AD et BC d'un quadrilatère convexe $ABCD$ jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E. Soient H et G les points milieux des centres des côtés BD et AC, respectivement. Trouver le rapport de l'aire du triangle EHG à l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Problème 5

Eve et Odette jouent sur un damier 3×3 et avec des dames noires et des dames blanches un jeu dont les règles sont les suivantes.

I. Elles jouent un coup à tour de rôle.
II. Un coup consiste à déposer une dame dans une case inoccupée du damier.
III. Chacune est libre, à chaque tour, de déposer une dame noire ou une dame blanche.
IV. Quand le damier est rempli, Eve gagne un point pour chaque ligne, colonne ou diagonale qui comprend un nombre pair de dames noires et Odette gagne un point pour chaque ligne, colonne ou diagonale qui a un nombre impair de dames noires.
V. Si l'une des deux remporte au moins cinq des huit points, c'est elle qui gagne la partie.

(a) Peut-on avoir une partie nulle 4–4? Expliquer.
(b) Décrire une stratégie gagnante pour celle qui est la première à jouer.

Problème 6

Dessiner le graphe de l'équation $x^3 + xy + y^3 = 3$.

Canadian Mathematical Olympiad
1979

Problem 1

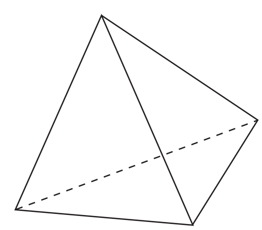
Given: (i) $a, b > 0$; (ii) a, A_1, A_2, b is an arithmetic progression; (iii) a, G_1, G_2, b is a geometric progression. Show that

$$A_1 A_2 \geq G_1 G_2$$

Problem 2

It is known in Euclidean geometry that the sum of the angles of a triangle is constant. Prove, however, that the sum of the dihedral angles of a tetrahedron is *not* constant.

NOTE. (i) A tetrahedron is a triangular pyramid, and (ii) a dihedral angle is the interior angle between a pair of faces.



Problem 3

Let a, b, c, d, e be integers such that $1 \leq a < b < c < d < e$. Prove that

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16},$$

where $[m, n]$ denotes the least common multiple of m and n (*e.g.* $[4, 6] = 12$).

Problem 4

A dog standing at the centre of a circular arena sees a rabbit at the wall. The rabbit runs around the wall and the dog pursues it along a unique path which is determined by running at the same speed and staying on the radial line joining the centre of the arena to the rabbit. Show that the dog overtakes the rabbit just as it reaches a point one-quarter of the way around the arena.

Problem 5

A walk consists of a sequence of steps of length 1 taken in directions north, south, east or west. A walk is *self-avoiding* if it never passes through the same point twice. Let $f(n)$ denote the number of n-step self-avoiding walks which begin at the origin. Compute $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, and show that

$$2^n < f(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}.$$

Olympiade mathématique du Canada
1979

PROBLÈME 1

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Si a, A_1, A_2, b est une progression arithmétique, et si a, G_1, G_2, b est une progression géométrique, montrer que

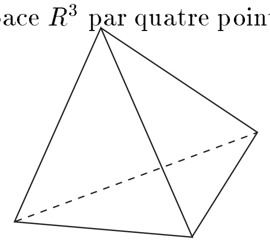
$$A_1 A_2 \geq G_1 G_2.$$

PROBLÈME 2

On sait en géométrie euclidienne que la somme des angles d'un triangle est constante. Montrer, par contre, que la somme des angles dièdres d'un tétraèdre n'est *pas* constante.

N. B. (i) Un tétraèdre est la figure formée dans l'espace R^3 par quatre points non coplanaires.

(ii) Un dièdre est la figure formée par deux demi-plans ayant même frontière. Un angle dièdre est l'un quelconque des angles déterminés par la section d'un dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.



PROBLÈME 3

Soient a, b, c, d, e des entiers tels que

$$1 \leq a < b < c < d < e.$$

Montrer que

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16},$$

où $[m,n]$ désigne le plus petit commun multiple de m et n (par exemple $[4,6] = 12$).

PROBLÈME 4

Un chien se trouvant au centre d'une arène circulaire entourée d'un mur aperçoit un lapin au pied du mur. Le lapin court le long du mur, et le chien le poursuit le long d'une trajectoire unique déterminée en courant à la même vitesse et en restant constamment sur la ligne radiale joignant le centre de l'arène au lapin.

Montrer que le chien rejoint le lapin à l'instant précis où ce dernier a accompli un quart du tour de l'arène.

PROBLÈME 5

Une promenade aléatoire dans le plan consiste en une suite de pas de longueur 1 effectués dans l'une quelconque des directions nord, sud, est, ouest. Une promenade aléatoire est dite "sans point double" si elle ne passe jamais deux fois par le même point. Soit $f(n)$ le nombre de promenades de n pas, issues de l'origine, et qui sont sans point double. Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ et montrer que

$$2^n < f(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}.$$

Canadian Mathematical Olympiad
1980

PROBLEM 1

If $a679b$ is a five digit number (in base 10) which is divisible by 72, determine a and b.

PROBLEM 2

The numbers from 1 to 50 are printed on cards. The cards are shuffled and then laid out face up in 5 rows of 10 cards each. The cards in each row are rearranged to make them increase from left to right. The cards in each column are then rearranged to make them increase from top to bottom. In the final arrangement, do the cards in the rows still increase from left to right?

PROBLEM 3

Among all triangles having (i) a fixed angle A and (ii) an inscribed circle of fixed radius r, determine which triangle has the least perimeter.

PROBLEM 4

A gambling student tosses a fair coin and scores one point for each head that turns up and two points for each tail. Prove that the probability of the student scoring *exactly* n points is $\frac{1}{3}[2 + (-\frac{1}{2})^n]$.

PROBLEM 5

A parallelepiped has the property that all cross sections which are parallel to any fixed face F, have the same perimeter as F. Determine whether or not any other polyhedron has this property.

Olympiade mathématique du Canada
1980

Problème 1

Si $a679b$ est un nombre entier à 5 chiffres (en base 10) qui est divisible par 72, déterminer a et b.

Problème 2

Cinquante cartes sont numérotées de 1 à 50. On bat les cartes et on les dispose en 5 rangées de 10 cartes, les chiffres apparaissant sur la face visible. On déplace ensuite les cartes de chaque rangée de manière à les ranger par ordre croissant de gauche à droite. Enfin on déplace les cartes de chaque colonne pour les ranger par ordre croissant de haut en bas.
Dans la configuration finale, les cartes sont-elles encore rangées par ordre croissant de gauche à droite dans chaque rangée?

Problème 3

Parmi tous les triangles ayant 1) un angle fixé A, et 2) un cercle inscrit de rayon fixé R, déterminer celui qui a le plus petit périmètre.

Problème 4

Un joueur lance une pièce équilibrée et inscrit un point pour chaque face obtenue, et deux points pour chaque pile. Montrer que la probabilité que l'étudiant obtienne exactement n points est égale à $\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^n]$.

Problème 5

Un parallélépipède a la propriété que toutes les sections planes parallèles à une face quelconque fixée F ont le même périmètre que F. Déterminer s'il existe ou non un autre polyèdre possédant cette propriété.

Canadian Mathematical Olympiad
1981

Problem 1

For any real number t, denote by $[t]$ the greatest integer which is less than or equal to t. For example: $[8] = 8$, $[\pi] = 3$ and $[-5/2] = -3$. Show that the equation

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

has no real solution.

Problem 2

Given a circle of radius r and a tangent line ℓ to the circle through a given point P on the circle. From a variable point R on the circle, a perpendicular RQ is drawn to ℓ with Q on ℓ. Determine the maximum of the area of triangle PQR.

Problem 3

Given a finite collection of lines in a plane P, show that it is possible to draw an arbitrarily large circle in P which does not meet any of them. On the other hand, show that it is possible to arrange an infinite sequence of lines (first line, second line, third line, *etc.*) in P so that every circle in P meets at least one of the lines. (A point is not considered to be a circle.)

Problem 4

$P(x)$ and $Q(x)$ are two polynomials that satisfy the identity $P\big(Q(x)\big) \equiv Q\big(P(x)\big)$ for real numbers x. If the equation $P(x) = Q(x)$ has no real solution, show that the equation $P\big(P(x)\big) = Q\big(Q(x)\big)$ also has no real solution.

Problem 5

Eleven theatrical groups participated in a festival. Each day, some of the groups were scheduled to perform while the remaining groups joined the general audience. At the conclusion of the festival, each group had seen, during its days off, at least one performance of every other group. At least how many days did the festival last?

Olympiade mathématique du Canada 1981

PROBLÈME 1

Pour chaque nombre réel t, nous désignons par $[t]$ le plus grand entier qui soit plus petit ou égal à t. Par exemple: $[8] = 8$, $[\pi] = 3$ et $[-5/2] = -3$. Montrer que l'équation

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

n'a pas de solution réelle.

PROBLÈME 2

Étant donné un cercle de rayon r avec la tangente ℓ à un point fixé P sur le cercle. D'un point variable R sur le cercle, on trace la perpendiculaire RQ touchant ℓ au point Q. (Q est donc le pied de la perpendiculaire et un point sur ℓ). Déterminer le maximum de l'aire du triangle PQR.

PROBLÈME 3

Étant donné un ensemble fini de droites dans le plan P, montrer qu'il est possible de tracer un cercle dans P, de rayon r aussi grand qu'on veut, qui ne rencontre aucune droite. Par contre, montrer qu'il est possible d'arranger une suite infinie de droites (première droite, seconde droite, troisième droite, *etc.*) dans P de telle façon que chaque cercle dans P recontre au moins une de ces droites. (Un point ne constitue pas un cercle).

PROBLÈME 4

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes qui satisfont à l'identité $P\big(Q(x)\big) \equiv Q\big(P(x)\big)$ pour tous x réels. Si l'equation $P(x) = Q(x)$ n'a pas de solution réelle, montrer que l'équation $P\big(P(x)\big) = Q\big(Q(x)\big)$ également n'a pas de solution réelle.

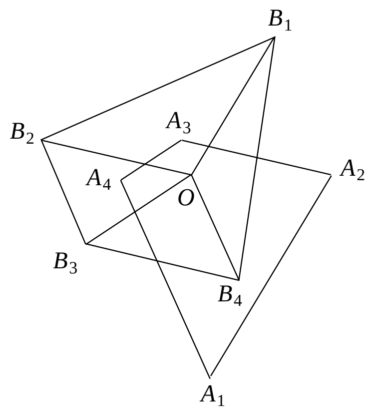
PROBLÈME 5

Onze troupes de théâtres prennent part à un festival d'art dramatique. Chaque jour quelques troupes donnent des représentations tandis que les autres troupes qui ne donnent pas des représentations sont parmi les spectateurs. Pour que chaque troupe voie au moins une des représentations données par chacune des autres troupes, que doit être la durée minimum du festival?

Canadian Mathematical Olympiad
1982

PROBLEM 1

In the diagram, OB_i is parallel and equal in length to A_iA_{i+1} for $i = 1, 2, 3$ and $4 (A_5 = A_1)$. Show that the area of $B_1B_2B_3B_4$ is twice that of $A_1A_2A_3A_4$.



PROBLEM 2

If a, b and c are the roots of the equation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$,

(i) show that a, b and c are distinct:

(ii) show that

$$\frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$$

is an integer.

PROBLEM 3

Let R^n be the n-dimensional Euclidean space. Determine the smallest number $g(n)$ of points of a set in R^n such that every point in R^n is at irrational distance from at least one point in that set.

PROBLEM 4

Let p be a permutation of the set $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. An element $j \in S_n$ is called a *fixed point* of p if $p(j) = j$. Let f_n be the number of permutations having no fixed points, and g_n be the number with exactly one fixed point. Show that $|f_n - g_n| = 1$.

PROBLEM 5

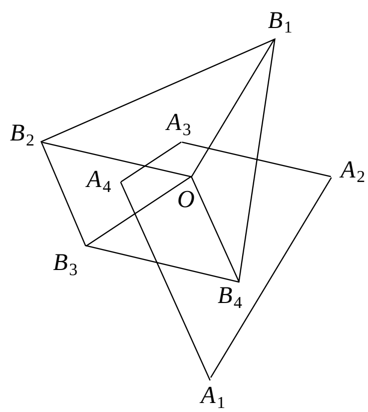
The altitudes of a tetrahedron $ABCD$ are extended externally to points A', B', C' and D' respectively, where $AA' = k/h_a$, $BB' = k/h_b$, $CC' = k/h_c$ and $DD' =$

k/h_d. Here, k is a constant and h_a denotes the length of the altitude of $ABCD$ from vertex A, *etc.* Prove that the centroid of the tetrahedron $A'B'C'D'$ coincides with the centroid of $ABCD$.

Olympiade mathématique du Canada
1982

PROBLÈME 1

Sur la figure, OB_i est parallèle à A_iA_{i+1} et de même longueur, pour $i = 1, 2, 3, 4$ $A_5 = A_1$). Montrer que l'aire de $B_1B_2B_3B_4$ est égale au double de celle de $A_1A_2A_3A_4$.



PROBLÈME 2

Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.
(i) Montrer que a, b, c sont distinctes.
(ii) Montrer que

$$\frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$$

est un entier.

PROBLÈME 3

Soit R^n l'espace euclidien de dimension n. Trouver le plus petit nombre $g(n)$ de points d'un ensemble dans R^n ayant le propriété que tout point de R^n est à distance irrationnelle d'au moins un point de cet ensemble.

PROBLÈME 4

Soit p une permutation de l'ensemble $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. On dit qu'un élément $j \in S_n$ est un point fixe de p si $p(j) = j$. Soit f_n le nombre de permutations qui n'ont aucun point fixe, et g_n le nombre de celles qui ont exactement un point fixe. Montrer que $|f_n - g_n| = 1$.

Problème 5

On prolonge les hauteurs d'un tétraèdre $ABCD$ vers l'extérieur jusqu' aux points A', B', C', D' respectivement, où $AA' = k/h_a$, $BB' = k/h_b$, $CC' = k/h_c$, $DD' = k/h_d$, et où k est une constante, h_a dénote la longueur de la hauteur de $ABCD$ issue du sommet A, *etc.* Montrer que le centre de gravité du tétraèdre $A'B'C'D'$ coincide avec celui de $ABCD$.

Canadian Mathematical Olympiad 1983

PROBLEM 1

Find all positive integers w, x, y and z which satisfy $w! = x! + y! + z!$.

PROBLEM 2

For each real number r let T_r be the transformation of the plane that takes the point (x, y) into the point $(2^r x, r2^r x + 2^r y)$. Let F be the family of all such transformations *i.e.* $F = \{T_r : r \text{ a real number}\}$. Find all curves $y = f(x)$ whose graphs remain unchanged by every transformation in F.

PROBLEM 3

The area of a triangle is determined by the lengths of its sides. Is the volume of a tetrahedron determined by the areas of its faces?

PROBLEM 4

Prove that for every prime number p, there are infinitely many positive integers n such that p divides $2^n - n$.

PROBLEM 5

The geometric mean (G.M.) of a k positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ is defined to be the (positive) k-th root of their product. For example, the G.M. of 3, 4, 18 is 6. Show that the G.M. of a set S of n positive numbers is equal to the G.M. of the G.M.'s of all non-empty subsets of S.

Olympiade mathématique du Canada
1983

PROBLÈME 1

Trouver tous les entiers positifs w, x, y et z qui satisfont $w! = x! + y! + z!$.

PROBLÈME 2

Soit $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. Soit F la famille des transformations $\{T_r : r \in \mathbf{R}\}$ où T_r transforme le point (x, y) en le point $(2^r x, r2^r x + 2^r y)$. Trouver toutes les courbes $y = f(x)$ dont le graphe est invariant pour chacune des transformations de F.

PROBLÈME 3

L'aire d'un triangle est déterminée par les longueurs de ses côtés. Est-il vrai que le volume d'un tétraèdre est déterminé par les aires de ses faces?

PROBLÈME 4

Démontrer que pour tout nombre premier p il existe une infinité d'entiers positifs n tels que p divise $2^n - n$.

PROBLÈME 5

La moyenne géométrique (M.G.) de k nombres positifs est par définition la racine k-ème de leur produit. (Par exemple la M.G. de 3, 4 et 18 est 6). Montrer que la M.G. d'un ensemble S de n nombres positifs est égale à la M.G. des moyennes géométriques de tous les sous-ensembles non vides de S.

Canadian Mathematical Olympiad
1984

Problem 1

Prove that the sum of the squares of 1984 consecutive positive integers cannot be the square of an integer.

Problem 2

Alice and Bob are in a hardware store. The store sells coloured sleeves that fit over keys to distinguish them. The following conversation takes place:

Alice: Are you going to cover your keys?
Bob: I would like to, but there are only 7 colours and I have 8 keys.
Alice: Yes, but you could always distinguish a key by noticing that the red key next to the green key was different from the red key next to the blue key.
Bob: You must be careful what you mean by "next to" or "three keys over from" since you can turn the key ring over and the keys are arranged in a circle.
Alice: Even so, you don't need 8 colours.
Problem: What is the smallest number of colours needed to distinguish n keys if all the keys are to be covered.

Problem 3

An integer is *digitally divisible* if
(a) none of its digits is zero;
(b) it is divisible by the sum of its digits (*e.g.*, 322 is digitally divisible).
Show that there are infinitely many digitally divisible integers.

Problem 4

An acute-angled triangle has unit area. Show that there is a point inside the triangle whose distance from each of the vertices is at least $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$.

Problem 5

Given any 7 real numbers, prove that there are two of them, say x and y, such that

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Olympiade mathématique du Canada
1984

PROBLÈME 1

Montrer que la somme des carrés de 1984 entiers positifs consécutifs ne peut pas être le carré d'un entier.

PROBLÈME 2

Alice et Robert sont dans un magasin de quincaillerie, où l'on vend des gaines colorées en plastique pour distinguer les clefs. On entend la conversation suivante:

Alice: Tu devrais identifier tes clefs.

Robert: J'aimerais bien, mais il n'y a que 7 couleurs et j'ai 8 clefs.

Alice: Oui, mais tu pourrais toujours distinguer une clef en remarquant que la clef rouge voisine de la verte est différente de la clef rouge voisine de la bleue.

Robert: Tu dois faire attention à ce que tu entends par "voisine de" ou "trois clefs plus loin que...", car on peut retourner l'anneau porte-clef, et les clefs sont rangées en cercle.

Alice: Malgré cela tu n'as pas besoin de 8 couleurs.

Problème: Quel est le nombre minimum de couleurs requis pour distinguer n clefs, si chacune doit être colorée?

PROBLÈME 3

Un entier est "digitalement divisible" si:

(a) aucun de ses chiffres n'est zéro;

(b) il est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple 322 est digitalement divisible.

Montrer qu'il existe un infinité d'entiers digitalement divisibles.

PROBLÈME 4

On considère un triangle d'aire unité et dont les 3 angles sont aigus. Montrer qu'il existe un point intérieur dont la distance à chacun des sommets est au moins égale a $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$.

PROBLÈME 5

Etant donné 7 nombres réels, démontrer qu'il en est deux parmi eux, notés x et y, tels que,

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Canadian Mathematical Olympiad
1985

PROBLEM 1

The lengths of the sides of a triangle are 6, 8 and 10 units. Prove that there is exactly one straight line which simultaneously bisects the area and perimeter of the triangle.

PROBLEM 2

Prove or disprove that there exists an integer which is doubled when the initial digit is transferred to the end.

PROBLEM 3

Let P_1 and P_2 be regular polygons of 1985 sides and perimeters x and y respectively. Each side of P_1 is tangent to a given circle of circumference c and this circle passes through each vertex of P_2. Prove $x + y \geq 2c$. (You may assume that $\tan\theta \geq \theta$ for $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$).

PROBLEM 4

Prove that 2^{n-1} divides $n!$ if and only if $n = 2^{k-1}$ for some positive integer k.

PROBLEM 5

Let $1 < x_1 < 2$ and, for $n = 1, 2, \ldots$, define $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$. Prove that, for $n \geq 3$, $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$.

Olympiade mathématique du Canada
1985

PROBLÈME 1

Les dimensions des côtés d'un triangle sont 6, 8 et 10 unités. Démontrer qu'il existe une et une seule ligne droite qui divise en deux simultanément l'aire et le périmètre de ce triangle.

PROBLÈME 2

Existe-t-il un entier qui est doublé quand on transfère son premier chiffre à la fin?

PROBLÈME 3

Soient P_1 et P_2 deux polygones réguliers de 1985 côtés chacun, dont les périmètres sont respectivement x et y. Chaque côté de P_1 est tangent à un cercle donné de circonférence c et chaque sommet de P_2 se trouve sur ce cercle. Montrer que $x + y \geq 2c$. (Indication: vous pouvez utiliser, sans la prouver, l'inégalité $\tan\theta \geq \theta$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$).

PROBLÈME 4

Montrer que 2^{n-1} divise $n!$ si et seulement si $n = 2^{k-1}$ pour un certain entier naturel k.

PROBLÈME 5

Soit x_1 tel que $1 < x_1 < 2$. Pour $n = 1, 2, \ldots$, on définit

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2.$$

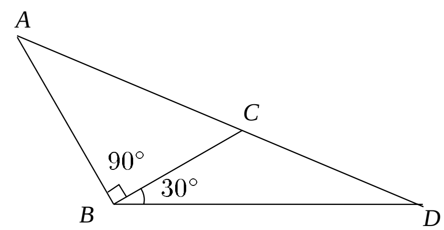
Montrer que, pour $n \geq 3$, on a

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| < 2^{-n}.$$

Canadian Mathematical Olympiad
1986

PROBLEM 1

In the diagram line segments AB and CD are of length 1 while angles ABC and CBD are 90° and 30° respectively. Find AC.



PROBLEM 2

A Mathlon is a competition in which there are M athletic events. Such a competition was held in which only A, B, and C participated. In each event p_1 points were awarded for first place, p_2 for second and p_3 for third, where $p_1 > p_2 > p_3 > 0$ and p_1, p_2, p_3 are integers. The final score for A was 22, for B was 9 and for C was also 9. B won the 100 metres. What is the value of M and who was second in the high jump?

PROBLEM 3

A chord ST of constant length slides around a semicircle with diameter AB. M is the mid-point of ST and P is the foot of the perpendicular from S to AB. Prove that angle SPM is constant for all positions of ST.

PROBLEM 4

For positive integers n and k, define $F(n,k) = \sum_{r=1}^{n} r^{2k-1}$. Prove that $F(n,1)$ divides $F(n,k)$.

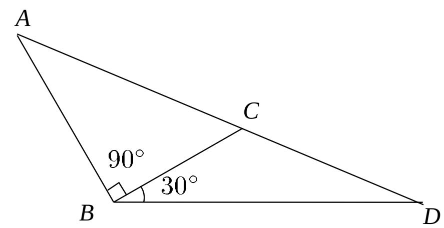
PROBLEM 5

Let $u_1, u_2, u_3, \ldots$ be a sequence of integers satisfying the recurrence relation $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$. Suppose $u_1 = 39$ and $u_2 = 45$. Prove that 1986 divides infinitely many terms of the sequence.

Olympiade mathématique du Canada
1986

PROBLÈME 1

D'après le diagramme, les segments AB et CD sont de longueur 1 et les angles ABC et CBD ont respectivement $90°$ et $30°$. Trouver AC.



PROBLÈME 2

Un Mathlon est une compétition sportive comprenant M épreuves d'athlétisme. Une telle compétition a eu lieu pour trois athlètes A, B et C. Pour chacune des épreuves, un pointage p_1 a été attribué pour la première place, p_2 pour la seconde et p_3 pour la troisième, p_1, p_2 et p_3 étant des nombres entiers tels que $p_1 > p_2 > p_3 > 0$. Le résultat final de A est de 22 points, celui de B est de 9 points et celui de C est de 9 points. B a remporté le 100 mètres. Trouver la valeur de M ainsi que l'athlète qui a obtenu la seconde place pour le saut en hauteur.

PROBLÈME 3

Une corde ST de longueur constante est tendue sur la circonférence d'un demi-cercle dont le diamètre est AB. M est le point se trouvant au milieu de ST et P est le point d'intersection avec AB de la perpendiculaire élevée de S sur AB. Démontrer que l'angle SPM est de grandeur constante pour toute position de ST.

PROBLÈME 4

Étant donnés les entiers positifs n et k, définissons $F(n,k) = \sum_{r=1}^{n} r^{2k-1}$. Démontrer que $F(n,1)$ divise $F(n,k)$.

PROBLÈME 5

Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ une suite de nombres satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$ avec $u_1 = 39$ et $u_2 = 45$. Démontrer que 1986 divise une infinité de termes de la suite.

Canadian Mathematical Olympiad
1987

PROBLEM 1

Find all solutions of $a^2 + b^2 = n!$ for positive integers a, b, n with $a \leq b$ and $n < 14$.

PROBLEM 2

The number 1987 can be written as a three digit number xyz in some base b. If $x + y + z = 1 + 9 + 8 + 7$, determine all possible values of x, y, z, b.

PROBLEM 3

Suppose $ABCD$ is a parallelogram and E is a point between B and C on the line BC. If the triangles DEC, BED and BAD are isosceles what are the possible values for the angle DAB?

PROBLEM 4

On a large, flat field n people are positioned so that for each person the distances to all the other people are different. Each person holds a water pistol and at a given signal fires and hits the person who is closest. When n is odd show that there is at least one person left dry. Is this always true when n is even?

PROBLEM 5

For every positive integer n show that

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$$

where $[x]$ is the greatest integer less than or equal to x (for example $[2.3] = 2$, $[\pi] = 3$, $[5] = 5$).

Olympiade mathématique du Canada
1987

PROBLÈME 1

Trouver toutes les solutions de l'équation $a^2 + b^2 = n!$ pour les entiers positifs a, b et n vérifiant $a \leq b$ et $n < 14$.

PROBLÈME 2

Le nombre 1987 s'écrit à trois chiffres, xyz, dans une certaine base b. Si $x+y+z = 1+9+8+7$, déterminer toutes les valeurs possible de x, y, z et b.

PROBLÈME 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme et E un point entre B et C sur la droite BC. Si les triangles DEC, BED et BAD sont isocèles quelles sont les valeurs possible de l'angle DAB?

PROBLÈME 4

Les n participants à une joute de pistolets à eau prennent position sur la plateforme de facon que les $(n-1)$ distances de chacun des joueurs aux autres soient différentes. Au signal, chaque tireur arrose le joueur le plus proche. Si n est impair, montrer qu'au moins un joueur n'est pas touché. Cela est-il toujours vrai si n est pair?

PROBLÈME 5

Pour tout entier positif n, montrer que

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$$

où $[x]$ est le plus grand entier au plus égal à x. (Par exemple, $[2.3] = 2$, $[\pi] = 3$, $[5] = 5$).

Canadian Mathematical Olympiad
1988

PROBLEM 1

For what values of b do the equations: $1988x^2 + bx + 8891 = 0$ and $8891x^2 + bx + 1988 = 0$ have a common root?

PROBLEM 2

A house is in the shape of a triangle, perimeter P metres and area A square metres. The garden consists of all the land within 5 metres of the house. How much land do the garden and house together occupy?

PROBLEM 3

Suppose that S is a finite set of at least five points in the plane; some are coloured red, the others are coloured blue. No subset of three or more similarly coloured points is collinear. Show that there is a triangle

(i) whose vertices are all the same colour, and

(ii) at least one side of the triangle does not contain a point of the opposite colour.

PROBLEM 4

Let $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, and $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Show for all $n \geq 0$ that $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

PROBLEM 5

Let $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ denote a sequence of integers. For each non-empty subsequence A of S, we define $p(A)$ to be the product of all the integers in A. Let $m(S)$ be the arithmetic average of $p(A)$ over all non-empty subsets A of S. If $m(S) = 13$ and if $m(S \cup \{a_{r+1}\}) = 49$ for some positive integer a_{r+1}, determine the values of $a_1, a_2, \ldots, a_r$ and a_{r+1}.

Olympiade mathématique du Canada 1988

PROBLÈME 1

Pour quelles valeurs de b les deux équations

$$1988x^2 + bx + 8891 = 0 \text{ et } 8891x^2 + bx + 1988 = 0$$

ont-elles une racine commune?

PROBLÈME 2

La fondation d'une maison a la forme d'un triangle de périmètre P mètres et une surface de A mètres carrés. Le jardin par ailleurs correspond au terrain à moins de 5 mètres de la maison. Calculer donc la superficie totale du terrain occupé par la maison et le jardin.

PROBLÈME 3

Soit S un ensemble fini comptant au moins cinq points du plan cartésien; de plus ces points sont colorés rouges ou bleus. Aucun des sous-ensembles de même couleur n'est colinéaire. Montrer alors qu'il existe un triangle dont

(i) les sommets sont de même couleur, et

(ii) au moins un des côtés du triangle ne contient pas de point de l'autre couleur.

PROBLÈME 4

Posons $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Montrer que $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$ pour tout $n \geq 0$.

PROBLÈME 5

Soit $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ une suite de nombres entiers. Pour toute sous-suite non vide A de S, on pose $p(A)$ comme étant le produit de tous les éléments de A. Soit maintenant $m(S)$ la moyenne arithmétique de $p(A)$ prise sur tous les sous-ensembles non vides A de S. Si $m(S) = 13$ et si $m(S \cup \{a_{r+1}\}) = 49$ pour un entier positif a_{r+1}, déterminer alors les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et a_{r+1}.

Canadian Mathematical Olympiad 1989

Problem 1

The integers $1, 2, \ldots, n$ are placed in order so that each value is either strictly bigger than all the preceding values or is strictly smaller than all preceding values. In how many ways can this be done?

Problem 2

Let ABC be a right angled triangle of area 1. Let $A'B'C'$ be the points obtained by reflecting A, B, C respectively, in their opposite sides. Find the area of $\triangle A'B'C'$.

Problem 3

Define $\{a_n\}_{n=1}$ as follows: $a_1 = 1989^{1989}$; a_n, $n > 1$, is the sum of the digits of a_{n-1}. What is the value of a_5?

Problem 4

There are 5 monkeys and 5 ladders and at the top of each ladder there is a banana. A number of ropes connect the ladders, each rope connects two ladders. No two ropes are attached to the same rung of the same ladder. Each monkey starts at the bottom of a different ladder. The monkeys climb up the ladders but each time they encounter a rope they climb along it to the ladder at the other end of the rope and then continue climbing upwards. Show that, no matter how many ropes there are, each monkey gets a banana.

Problem 5

Given the numbers $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. For a specific permutation $\sigma = X_1, X_2, \ldots, X_n$ of these numbers we define $S_1(\sigma) = X_1$, $S_2(\sigma) = X_1 + X_2$, $S_3(\sigma) = X_1 + X_2 + X_3, \ldots$ and $Q(\sigma) = S_1(\sigma)S_2(\sigma)\cdots S_n(\sigma)$. Evaluate $\sum 1/Q(\sigma)$ where the sum is taken over all possible permutations.

Olympiade mathématique du Canada 1989

PROBLÈME 1

On place les entiers $1, 2, \ldots, n$ dans un ordre tel que chaque nombre soit ou bien strictement plus grand que tous les nombres qui le précèdent, ou bien strictement plus petit que tous les nombres qui le précèdent. De combien de façons peut-on procéder à un tel arrangement?

PROBLÈME 2

Soit ABC un triangle rectangle d'aire égale à 1. A', B', C' sont respectivement les points symétriques de A, B, C. Trouver l'aire du triangle $\triangle A'B'C'$.

PROBLÈME 3

Definissons $\{A_n\}_{n=1}$ comme suit: $a_1 = 1989^{1989}$; a_n, $n > 1$, est la somme de chiffres de a_{n-1}. Quelle est la valeur de a_5?

PROBLÈME 4

Il y a 5 singes, 5 échelles, et une banane au haut de chaque échelle. Des cordes relient les échelles: chaque corde relie exactement deux échelles, et deux cordes ne sont jamais attachées au même barreau d'une échelle. Au début, les 5 signes sont au pied des 5 échelles. Ils se mettent à grimper, mais aussitôt arrivés à une corde, ils la suivent jusqu'au bout et continuent à grimper dans l'autre échelle. Montrer que quel que soit le nombre de cordes, chaque singe obtiendra une banane.

PROBLÈME 5

Considérons les nombres $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Si $\sigma = X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une permutation de ces nombres, on définit $S_1(\sigma) = X_1$, $S_2(\sigma) = X_1 + X_2$, $S_3(\sigma) = X_1 + X_2 + X_3, \ldots$ et $Q(\sigma) = S_1(\sigma)S_2(\sigma)\cdots S_n(\sigma)$. Évaluer $\sum 1/Q(\sigma)$ où on prend la somme sur toutes les permutations possibles.

Canadian Mathematical Olympiad
1990

Problem 1

A competition involving $n \geq 2$ players was held over k days. On each day, the players received scores of $1, 2, 3, \ldots, n$ points with no two players receiving the same score. At the end of the k days, it was found that each player had exactly 26 points in total. Determine all pairs (n, k) for which this is possible.

Problem 2

A set of $\frac{1}{2}n(n+1)$ distinct numbers is arranged at random in a triangular array:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \times & & & & \\ & & & \times & & \times & & & \\ & & \cdot & & \times & & \cdot & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \times & \times & \cdot & & \cdot & & \cdot & \times & \times \end{array}$$

Let M_k be the largest number in the k-th row from the top. Find the probability that

$$M_1 < M_2 < M_3 < \cdots < M_n.$$

Problem 3

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral inscribed in a circle, and let diagonals AC and BD meet at X. The perpendiculars from X meet the sides AB, BC, CD, DA at A', B', C', D' respectively. Prove that

$$|A'B'| + |C'D'| = |A'D'| + |B'C'|.$$

($|A'B'|$ is the length of line segment $A'B'$, *etc.*)

Problem 4

A particle can travel at speeds up to 2 metres per second along the x-axis, and up to 1 metre per second elsewhere in the plane. Provide a labelled sketch of the region which can be reached within one second by the particle starting at the origin.

Problem 5

Suppose that a function f defined on the positive integers satisfies

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2,$$
$$f(n+2) = f\big(n+2-f(n+1)\big) + f\big(n+1-f(n)\big) \quad (n \geq 1).$$

(a) Show that
   (i) $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$
   (ii) if $f(n)$ is odd, then $f(n+1) = f(n) + 1$.

(b) Determine, with justification, all values of n for which

$$f(n) = 2^{10} + 1.$$

Olympiade mathématique du Canada 1990

PROBLÈME 1

Un nombre $n \geq 2$ de joueurs participent à un tournoi qui dure k jours. À chaque jour, les joueurs gagnent $1, 2, 3, \ldots$, ou n points, et les scores des divers joueurs sont tous distincts pour la journée. À la fin du tournoi, après k jours, les joueurs avaient accumulé chacun 26 points. Déterminer tous les couples (n, k) pour lesquels une telle situation est possible.

PROBLÈME 2

On dispose au hasard un ensemble de $\frac{1}{2}n(n+1)$ nombres distincts dans un arrangement triangulaire comme suit:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \times & & & & \\
 & & & \times & & \times & & & \\
 & & \times & & \times & & \times & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\times & \times & \cdot & & \cdot & & \cdot & \times & \times
\end{array}$$

Soit M_k le plus grand des nombres de la $k^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut. Calculer la probabilité que

$$M_1 < M_2 < M_3 < \cdots < M_n.$$

PROBLÈME 3

Soit $ABCD$, un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, et soit X, l'intersection des diagonales AC et BD. Les perpendiculaires abaissées de X sur chacun des côtés rencontrent les côtés AB, BC, CD, et DA respectivement aux points A', B', C' et D'. Démontrer que

$$|A'B'| + |C'D'| = |A'D'| + |B'C'|.$$

($|A'B'|$ est la longueur du segment $A'B'$, *etc.*).

PROBLÈME 4

Une particule peut se déplacer jusqu'à 2 mètres à la seconde le long de l'axe des x, et jusqu'à 1 mètre à la seconde ailleurs dans le plan. Faire un graphique de la région qui peut être atteinte en une seconde par une particule partant de l'origine, en identifiant bien les diverses parties du graphique.

PROBLÈME 5

Soit f, une fonction définie sur les entiers positifs telle que

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2,$$
$$f(n+2) = f\big(n + 2 - f(n+1)\big) + f\big(n + 1 - f(n)\big) \quad (n \geq 1).$$

(a) Montrer que

(i) $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$.

(ii) Si $f(n)$ est impair, alors $f(n+1) = f(n) + 1$.

(b) Déterminer, avec preuve à l'appui, toutes les valeurs de n telles que

$$f(n) = 2^{10} + 1.$$

Canadian Mathematical Olympiad
1991

PROBLEM 1

Show that the equation $x^2 + y^5 = z^3$ has infinitely many solutions in integers x, y, z for which $xyz \neq 0$.

PROBLEM 2

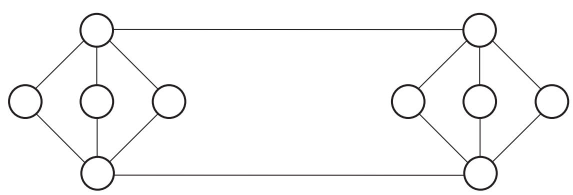
Let n be a fixed positive integer. Find the sum of all positive integers with the following property: In base 2, it has exactly $2n$ digits consisting of n 1's and n 0's. (The first digit cannot be 0.)

PROBLEM 3

Let C be a circle and P a given point in the plane. Each line through P which intersects C determines a chord of C. Show that the midpoints of these chords lie on a circle.

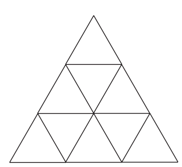
PROBLEM 4

Ten distinct numbers from the set $\{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$ are to be chosen to fill in the ten circles in the diagram. The absolute values of the differences of the two numbers joined by each segment must be different from the values for all other segments. Is it possible to do this? Justify your answer.



PROBLEM 5

In the figure, the side length of the large equilateral triangle is 3 and $f(3)$, the number of parallelograms bounded by sides in the grid, is 15. For the general analogous situation, find a formula for $f(n)$, the number of parallelograms, for a triangle of side length n.



Olympiade mathématique du Canada 1991

Problème 1

Démontrer que l'équation $x^2 + y^5 = z^3$ possède une infinité de solutions en nombres entiers x, y, z tels que $xyz \neq 0$.

Problème 2

Soit n un entier positif fixe. Déterminer la somme de tous les entiers positifs ayant la propriété suivante: en base 2, chaque entier est un nombre de $2n$ chiffres qui comprend n fois le chiffre 1 et n fois 0. (Le premier chiffre ne peut pas être 0).

Problème 3

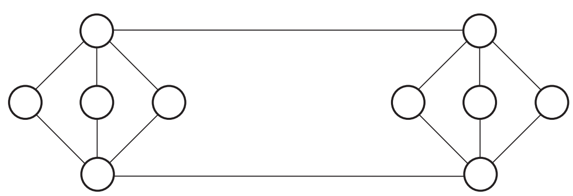
Soient C un cercle et P un point du plan. Toute droite qui passe par P et qui coupe C détermine une corde de C. Démontrer que les points milieux de ces cordes appartiennent à un cercle.

Problème 4

Est-il possible de choisir dix nombres distincts dans l'ensemble

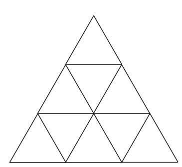
$$\{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$$

et de les placer dans les cercles du diagramme de la manière suivante: les valeurs absolues des différences de deux nombres qui sont reliés par un segment doivent être toutes distinctes. Justifier votre réponse.



Problème 5

Sur la figure, le côté du plus grand triangle équilatéral est égal à 3, et $f(3)$, le nombre de parallélogrammes limités par des segments du diagramme, est égal à 15. Dans la situation générale analogue, établir une formule pour $f(n)$, le nombre de parallélogrammes, pour un triangle de côté n.



Canadian Mathematical Olympiad
1992

PROBLEM 1

Prove that the product of the first n natural numbers is divisible by the sum of the first n natural numbers if and only if $n+1$ is not an odd prime.

PROBLEM 2

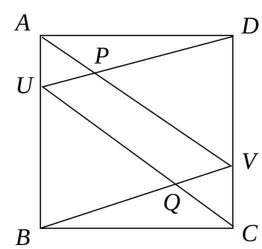
For $x, y, z \geq 0$, establish the inequality

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$$

and determine when equality holds.

PROBLEM 3

In the diagram, $ABCD$ is a square, with U and V interior points of the sides AB and CD respectively. Determine all the possible ways of selecting U and V so as to maximize the area of the quadrilateral $PUQV$.



PROBLEM 4

Solve the equation

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

PROBLEM 5

A deck of $2n+1$ cards consists of a joker and, for each number between 1 and n inclusive, two cards marked with that number. The $2n+1$ cards are placed in a row, with the joker in the middle. For each k with $1 \leq k \leq n$, the two cards numbered k have exactly $k-1$ cards between them. Determine all the values of n not exceeding 10 for which this arrangement is possible. For which values of n is it impossible?

Olympiade mathématique du Canada 1992

PROBLÈME 1

Montrer que le produit des n premiers entiers positifs est divisible par la somme des n premiers entiers positifs si et seulement si $n+1$ n'est pas un nombre premier impair.

PROBLÈME 2

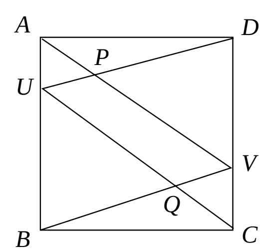
Pour $x, y, z \geq 0$, établir l'inégalité

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$$

et déterminer les valeurs pour lesquelles il y a égalité.

PROBLÈME 3

Sur le diagramme ci-dessous, $ABCD$ est un carré sur lequel on choisit des points U et V intérieurs aux côtés AB et CD respectivement. Déterminer toutes les façons possibles de choisir U et V de telle sorte que la surface du quadrilatère $PUQV$ soit maximale.



PROBLÈME 4

Résoudre l'équation

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$$

PROBLÈME 5

Un jeu de $2n+1$ cartes contient un joker et, pour chaque nombre entier de 1 à n inclusivement, 2 cartes marquées de ce numéro. Les $2n+1$ cartes sont alors alignées avec le joker au milieu. De plus, pour chaque nombre entier k avec $1 \leq k \leq n$, les deux cartes numérotées k ont exactement $k-1$ autres cartes entre elles. Trouver toutes les valeurs de n ne dépassant pas 10 pour lesquelles cet arrangement soit possible. Maintenant, pour quelles valeurs de n est-ce impossible?

Canadian Mathematical Olympiad
1993

Problem 1

Determine a triangle for which the three sides and an altitude are four consecutive integers and for which this altitude partitions the triangle into two right triangles with integer sides. Show that there is only one such triangle.

Problem 2

Show that the number x is rational if and only if three distinct terms that form a geometric progression can be chosen from the sequence

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ldots$$

Problem 3

In triangle ABC, the medians to the sides AB and AC are perpendicular. Prove that $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

Problem 4

A number of schools took part in a tennis tournament. No two players from the same school played against each other. Every two players from different schools played exactly one match against each other. A match between two boys or between two girls was called a *single* and that between a boy and a girl was called a *mixed single*. The total number of boys differed from the total number of girls by at most 1. The total number of singles differed from the total number of mixed singles by at most 1. At most how many schools were represented by an odd number of players?

Problem 5

Let $y_1, y_2, y_3, \ldots$ be a sequence such that $y_1 = 1$ and, for $k > 0$, is defined by the relationship:

$$y_{2k} = \begin{cases} 2y_k & \text{if } k \text{ is even} \\ 2y_k + 1 & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}$$

$$y_{2k+1} = \begin{cases} 2y_k & \text{if } k \text{ is odd} \\ 2y_k + 1 & \text{if } k \text{ is even} \end{cases}$$

Show that the sequence $y_1, y_2, y_3, \ldots$ takes on every positive integer value exactly once.

Olympiade mathématique du Canada 1993

PROBLÈME 1

Trouvez un triangle dont les trois côtés et une hauteur constituent quatre nombres entiers consécutifs; de plus, cette hauteur doit subdiviser le triangle en deux triangles droits ayant également des côtés de valeurs entières. Montrer finalement qu'il n'y a qu'un seul de ces triangles.

PROBLÈME 2

Montrer qu'un nombre x est rationnel si et seulement si trois termes distincts formant une progression géométrique puissent être choisis parmi la suite

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ldots$$

PROBLÈME 3

Soit un triangle ABC dont les médianes des côtés AB et AC sont perpendiculaires. Montrer que $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

PROBLÈME 4

Un certain nombre d'écoles ont pris part à un tournoi de tennis. Bien que deux joueurs de la même école ne s'affrontent jamais, deux joueurs provenant d'écoles différentes joueront exactement un match entre eux. On appelle un match entre deux joueurs de même sexe un *simple* et un match entre deux joueurs de sexe opposé un *simple mixte*. Maintenant si le nombre total de garçons et de filles ne diffèrent que d'un au plus et que le nombre total de match *simples* et *simples mixtes* ne diffèrent également que d'un au plus, quel est le plus grand nombre d'écoles qui puissent êtres représentées par un nombre impair de joueurs?

PROBLÈME 5

Soit $y_1, y_2, y_3, \ldots$ une suite dont $y_1 = 1$ et plus généralement les relations suivantes soient satisfaites pour $k > 0$:

$$y_{2k} = \begin{cases} 2y_k & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2y_k + 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$y_{2k+1} = \begin{cases} 2y_k & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2y_k + 1 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Montrer que la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$ énumère chaque nombre entier positif une et une seule fois.

Canadian Mathematical Olympiad
1994

PROBLEM 1

Evaluate the sum
$$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}.$$

PROBLEM 2

Show that every positive integral power of $\sqrt{2}-1$ is of the form $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ for some positive integer m. (e.g. $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$).

PROBLEM 3

Twenty-five men sit around a circular table. Every hour there is a vote, and each must respond *yes* or *no*. Each man behaves as follows: on the n^{th} vote, if his response is the same as the response of at least one of the two people he sits between, then he will respond the same way on the $(n+1)^{th}$ vote as on the n^{th} vote; but if his response is different from that of both his neighbours on the n-th vote, then his response on the $(n+1)$-th vote will be different from his response on the n^{th} vote. Prove that, however everybody responded on the first vote, there will be a time after which nobody's response will ever change.

PROBLEM 4

Let AB be a diameter of a circle Ω and P be any point *not* on the line through A and B. Suppose the line through P and A cuts Ω again in U, and the line through P and B cuts Ω again in V. (Note that in case of tangency U may coincide with A or V may coincide with B. Also, if P is on Ω then $P=U=V$.) Suppose that $|PU| = s|PA|$ and $|PV| = t|PB|$ for some nonnegative real numbers s and t. Determine the cosine of the angle APB in terms of s and t.

PROBLEM 5

Let ABC be an acute angled triangle. Let AD be the altitude on BC, and let H be any interior point on AD. Lines BH and CH, when extended, intersect AC and AB at E and F, respectively. Prove that $\angle EDH = \angle FDH$.

Olympiade mathématique du Canada 1994

PROBLÈME 1

Évaluer la somme
$$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}.$$

PROBLÈME 2

Montrer que chaque puissance entière positive de $\sqrt{2}-1$ est de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ pour un certain nombre entier positif m. (ex. $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$).

PROBLÈME 3

Vingt-cinq hommes sont assis autour d'une table ronde. À chaque heure, on prend un vote dont chacun doit répondre *oui* ou *non*. Chacun se comporte comme suit: au $n^{\text{ième}}$ vote, si sa réponse est la même qu'au moins un de ses deux voisins, alors il répondra de la même façon au vote suivant; mais si sa réponse est différente de celles de ses deux voisins, alors il votera différemment au prochain vote. Montrer que, quel que soit le vote de chacun au premier tour, on se trouvera à un certain temps dans la situation où chacun ne changera plus son vote.

PROBLÈME 4

Soit AB un diamètre d'un cercle Ω et P un point *n'étant pas* sur la droite passant par A et B. Supposons maintenant que la droite passant par P et A coupe Ω aussi en U, et que la droite passant par P et B coupe Ω aussi en V. (Remarquons qu'en cas de tangence, U peut coïncider avec A ou V peut coïncider avec B. De plus, si P est sur Ω, alors $P = U = V$.) Supposons de plus que $|PU| = s|PA|$ et que $|PV| = t|PB|$ pour des nombres réels non négatifs s et t. Déterminer le cosinus de l'angle APB en termes de s et t.

PROBLÈME 5

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit AD la hauteur sur BC, et soit H un point intérieur au triangle sur AD. Les droites BH et CH, si étendues, coupent AC et AB en E et F respectivement. Montrer que $\angle EDH = \angle FDH$.

Canadian Mathematical Olympiad
1995

Problem 1

Let $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Evaluate the sum

$$f(\frac{1}{1996}) + f(\frac{2}{1996}) + f(\frac{3}{1996}) + \cdots + f(\frac{1995}{1996})$$

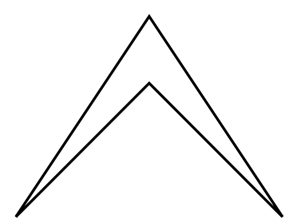
Problem 2

Let a, b, and c be positive real numbers. Prove that

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Problem 3

Define a boomerang as a quadrilateral whose opposite sides do not intersect and one of whose internal angles is greater than 180 degrees. (See Figure displayed.) Let C be a convex polygon having 5 sides. Suppose that the interior region of C is the union of q quadrilaterals, none of whose interiors intersect one another. Also suppose that b of these quadrilaterals are boomerangs. Show that $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.



Problem 4

Let n be a fixed positive integer. Show that for only nonnegative integers k, the diophantine equation

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

has infinitely many solutions in positive integers x_i and y.

Problem 5

Suppose that u is a real parameter with $0 < u < 1$. Define

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x \leq u \\ 1 - \left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2 & \text{if } u \leq x \leq 1 \end{cases}$$

and define the sequence $\{u_n\}$ recursively as follows:

$$u_1 = f(1), \text{ and } u_n = f(u_{n-1}) \text{ for all } n > 1.$$

Show that there exists a positive ineger k for which $u_k = 0$.

Olympiade mathématique du Canada
1995

PROBLÈME 1

Soit $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Evaluer la somme

$$f(\frac{1}{1996}) + f(\frac{2}{1996}) + f(\frac{3}{1996}) + \cdots + f(\frac{1995}{1996}).$$

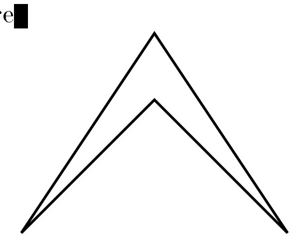
PROBLÈME 2

Soient a, b, et c des nombres réels positifs. Montrer que

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

PROBLÈME 3

Définissons un boomerang comme étant un quadrilatère dont les côtés opposés ne se coupent pas et dont un des angles internes est supérieur à 180 degrés. (Voir la figure ci-contre.) Soit maintenant C un polygone convexe à s côtés. Supposons de plus que l'intérieur de C soit l'union de q quadrilatères dont leurs intérieurs ne se chevauchent pas deux à deux. Montrer que si b de ces quadrilatères sont des boomerangs, alors $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.



PROBLÈME 4

Soit n un entier positif fixe. Montrer que seulement pour des entiers non négatifs k, l'équation diophantine

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

possède une infinité de solutions dont x_i et y soient entiers positifs.

PROBLÈME 5

Soit u un paramètre réel tel que $0 < u < 1$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq u \\ 1 - \left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2 & \text{si } u \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et définissons de plus la suite $\{u_n\}$ récursivement comme suit:

$$u_1 = f(1), \text{ et } u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour tout } n > 1.$$

Montrer qu'il existe toujour un entier positif k tel que $u_k = 0$.

Canadian Mathematical Olympiad
1996

PROBLEM 1

If α, β, γ are the roots of $x^3 - x - 1 = 0$, compute

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

PROBLEM 2

Find all real solutions to the following system of equations. Carefully justify your answer.

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

PROBLEM 3

We denote an arbitrary permutation of the integers $1, \ldots, n$ by $a_1, \ldots, a_n$. Let $f(n)$ be the number of these permutations such that

(i) $a_1 = 1$;

(ii) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \quad i = 1, \ldots, n-1$.

Determine whether $f(1996)$ is divisible by 3.

PROBLEM 4

Let $\triangle ABC$ be an isosceles triangle with $AB = AC$. Suppose that the angle bisector of $\angle B$ meets AC at D and that $BC = BD + AD$. Determine $\angle A$.

PROBLEM 5

Let $r_1, r_2, \ldots, r_m$ be a given set of m positive rational numbers such that $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$. Define the function f by $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n]$ for each positive integer n. Determine the minimum and maximum values of $f(n)$. Here $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x

Olympiade mathématique du Canada
1996

PROBLÈME 1

Si α, β, γ sont les racines de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$, alors calculer

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

PROBLÈME 2

Trouver toutes les solutions réelles du système d'équations suivant. Justifier soigneusement votre réponse.

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

PROBLÈME 3

On dénote une permutation quelconque des entiers $1, \ldots, n$ par $a_1, \ldots, a_n$. Posons maintenant $f(n)$ comme étant le nombre de telles permutations ayant les propriétés suivantes:

(i) $a_1 = 1$;

(ii) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \quad i = 1, \ldots, n-1$.

Déterminer si $f(1996)$ est divisible par 3.

PROBLÈME 4

Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle tel que $AB = AC$. Supposons de plus que l'angle bissecteur de $\angle B$ rejoigne AC en D et que $BC = BD + AD$. Déterminer alors $\angle A$.

PROBLÈME 5

Soit $r_1, r_2, \ldots, r_m$ un ensemble donné de m nombres rationnels positifs tels que $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$. On définit maintenant la fonction f par $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n]$ pour chaque entier positif n. Déterminer la valeur minimum et la valeur maximum de $f(n)$. On dénote ici par $[x]$ le plus grand entier plus petit ou égal à x.

Canadian Mathematical Olympiad
1997

PROBLEM 1

How many pairs of positive integers x, y are there, with $x \leq y$, and such that $\gcd(x, y) = 5!$ and $\text{lcd}(x, y) = 50!$.
NOTE. $\gcd(x, y)$ denotes the greatest common divisor of x and y, $\text{lcd}(x, y)$ denotes the least common multiple of x and y, and $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

PROBLEM 2

The closed interval $A = [0, 50]$ is the union of a finite number of closed intervals, each of length 1. Prove that some of the intervals can be removed so that those remaining are mutually disjoint and have total length ≥ 25.
NOTE. For $a \leq b$, the closed interval $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ has length $b - a$; disjoint intervals have *empty* intersection.

PROBLEM 3

Prove that

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}.$$

PROBLEM 4

The point O is situated inside the parallelogram $ABCD$ so that

$$\angle AOB + \angle COD = 180^\circ.$$

Prove that $\angle OBC = \angle ODC$.

PROBLEM 5

Write the sum

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24}$$

in the form $\frac{p(n)}{q(n)}$, where p and q are polynomials with integer coefficients.

Olympiade mathématique du Canada 1997

PROBLÈME 1

Combien de paires d'entiers positifs x, y y a-t'il, si $x \leq y$, $\text{pgcd}(x, y) = 5!$ et $\text{ppcm}(x, y) = 50!$.

REMARQUE. $\text{pgcd}(x, y)$ signifie le plus grand commun diviseur de x et y, et $\text{ppcm}(x, y)$ signifie le plus petit commun multiple de x et y, et finalement $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

PROBLÈME 2

L'intervalle fermé $A = [0, 50]$ est une réunion d'un nombre fini d'intervalles fermés, chacun de longueur 1. Montrer que certains de ces intervalles puissent être retirés de sorte que ceux restant soient deux à deux disjoints et aient une longueur totale ≥ 25.

REMARQUE. Etant donné $a \leq b$, la longueur de l'intervalle fermé $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est $b - a$; des intervalles disjoints ont une intersection *vide*.

PROBLÈME 3

Montrer que

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$$

PROBLÈME 4

Soit O un point situé à l'intérieur du parallélogramme $ABCD$ de sorte que

$$\angle AOB + \angle COD = 180°.$$

Montrer que $\angle OBC = \angle ODC$.

PROBLÈME 5

Écrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24},$$

sous la forme $\frac{p(n)}{q(n)}$, où p et q sont des polynômes dont les coefficients sont entiers.