Aufgabensammlung

Weitere Lösungen zu Geometrieaufgaben der Mathematik-Olympiade

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

Lösungen von Hyperplot

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de

Chemnitz, April 2019

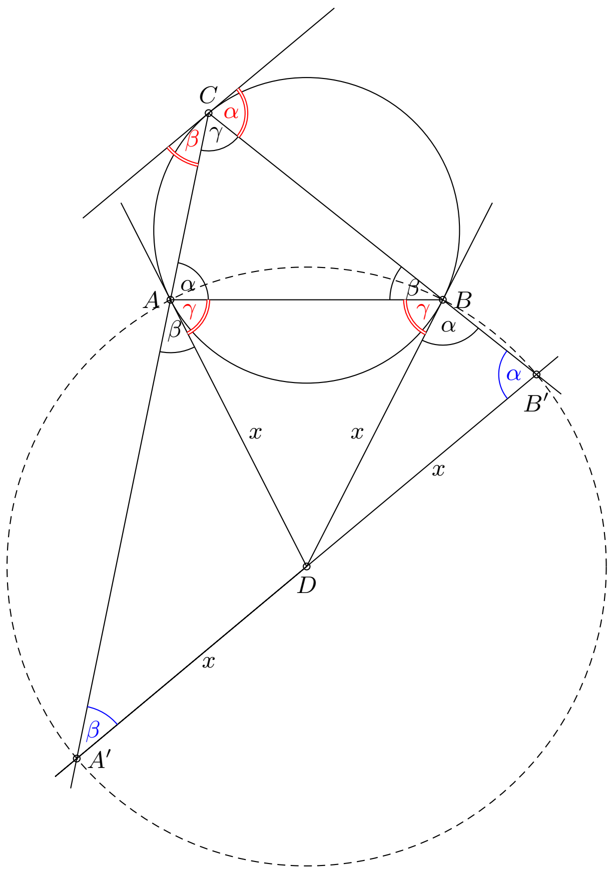
Weitere Geometrieaufgaben

Aufgabe 5 - 020915, I.Stufe 1962, Klasse 9

Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.
Es ist zu beweisen, dass

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und

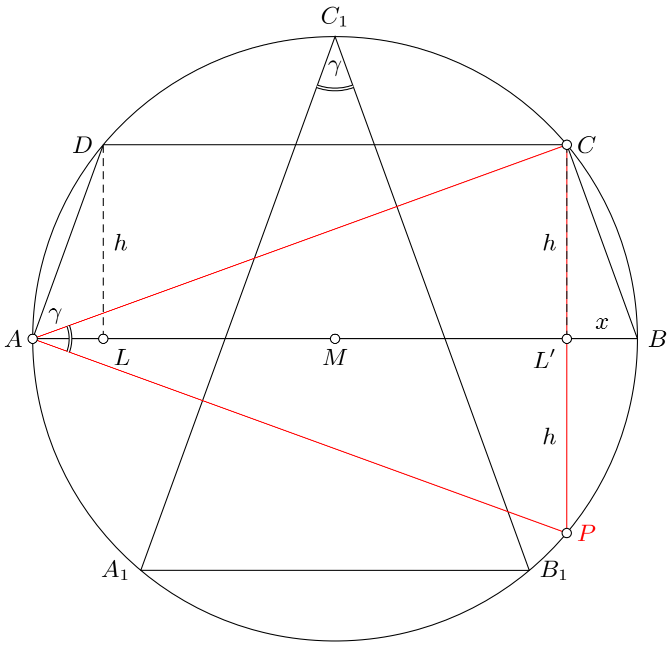
b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!



Aus dem Sehnentangentenwinkelsatz (Sehnentangentenwinkel = Umfangswinkel) folgen zunächst die Sehnentangentenwinkel (rot eingezeichnet) bei A, B und C.
Die Winkel bei A' und B' folgen als Wechsel- bzw. Z-Winkel (blau eingezeichnet) der Winkel bei C. Damit ist gezeigt, dass DAA' und DBB' gleichschenklige Dreiecke sind.
Haben die Schenkel im gleichschenkligen Dreieck DAA' die Länge x, so folgt durch Betrachtung des gleichschenkligen Dreieck DBA, dass auch das gleichschenklige Dreieck DBB' Schenkel der Länge x hat.
Also haben die Punkte A,B,A',B' alle samt von D den selben Abstand, womit D Mittelpunkt eines Kreises ist, der diese Punkte enthält.
Aufgabe gelöst von Hyperplot

Aufgabe 4 - 020924, I.Stufe 1962, Klasse 9

Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, daß eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.
Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!



- Legt man durch die Trapezecke A eine Gerade so, dass sie mit der Trapezdiagonalen $|AC|$ den Dreieckswinkel γ einschließt, so schneidet die Gerade den Umkreis in einem Punkte P; und man erhält mit PCA ein zum gegebenen Dreieck $A_1B_1C_1$ kongruentes, also flächengleiches, Dreieck.
- Sei wie üblich $|AB| = a$, dann berechnet sich die Trapezfläche zu

$$A_T = |LL'| \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{2}xh = (a - 2x) \cdot h + x \cdot h = (a - x) \cdot h$$

- Die Dreiecksfläche berechnet sich zu

$$A_\Delta = \frac{2h \cdot (a - x)}{2} = h \cdot (a - x)$$

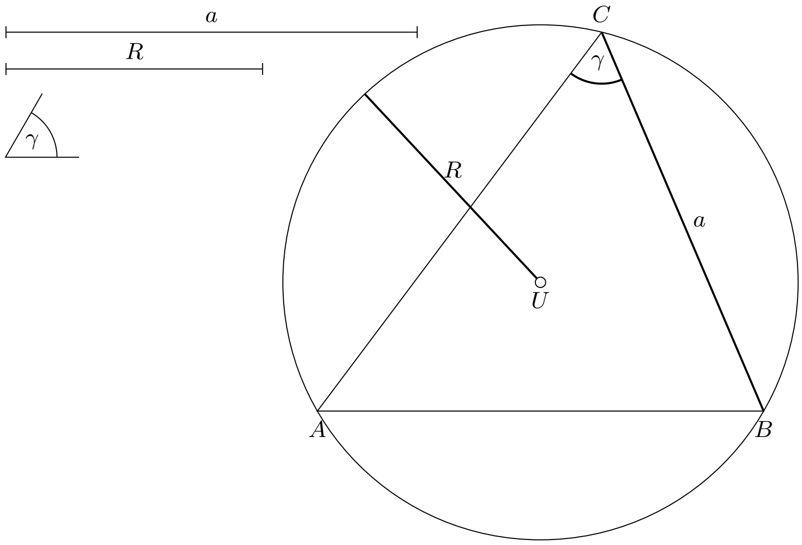
- Also ist $A_T = A_\Delta$.

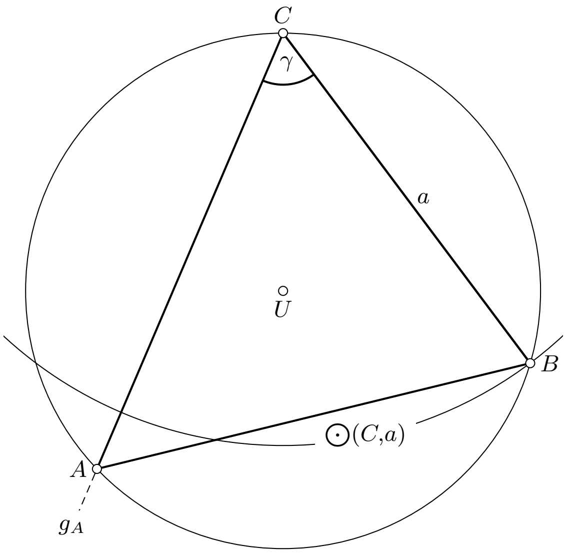
Aufgabe gelöst von Hyperplot

Aufgabe 3 - 030913, I.Stufe 1963, Klasse 9

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6$ cm, $r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$! b) Beschreiben Sie die Konstruktion! c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a! d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

a) und b) Planfigur und Konstruktion.





(1) Beschreibe einen Kreis $\odot(U, R)$ um U vom Radius R, um den Umkreis zu erhalten.

(2) Wähle einen beliebigen Punkt auf dem Umkreis als Ecke C.

(3) Beschreibe einen Kreis $\odot(C, A)$ um C vom Radius a; Schnittpunkt des Kreises mit dem Umkreis ist die Ecke B so, dass B, C auf dem Umkreis im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.

(4) Lege durch C eine Gerade g_A so, dass sie mit der Verbindung $|BC|$ den Winkel γ einschließt. Schnittpunkt von g_A mit dem Umkreis ist die Ecke A. (Hinweis: soll auch der spezielle Winkel $\gamma = 60°$ konstruiert werden, so ist über $|BC|$ das gleichseitige Dreieck zu konstruieren.)

(5) Erhalte durch entsprechende Verbindung der Punkte A,B,C das Dreieck ABC.

Zusatz zu b) Berechnung der fehlenden Seitenlängen und Innenwinkel aus den gegebenen Größen a,R,γ.

(1) $\quad 2R = \dfrac{c}{\sin(\gamma)} \quad \Rightarrow c$ („erweiterter Sinussatz“)

(2) $\quad \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \dfrac{a}{c} \quad \Rightarrow \alpha$ („Sinussatz“)

(3) $\quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ („Winkelsumme“)

(4) $\quad b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)}$ („Kosinussatz“)

d) Bedingungen.

- Man entliest der Konstruktionszeichnung, dass a maximal gleich $2R$ sein darf, also
$$a \leq 2R \quad \text{bzw.} \quad R \geq \frac{a}{2}$$
- Es ist $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$. Aus der Forderung $\beta > 0$ folgt $\gamma < 180^\circ - \alpha$; und da nach dem erweiterten Sinussatz $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{2R}$ gilt, erhält man die Bedingung
$$\gamma < 180^\circ - \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right)$$

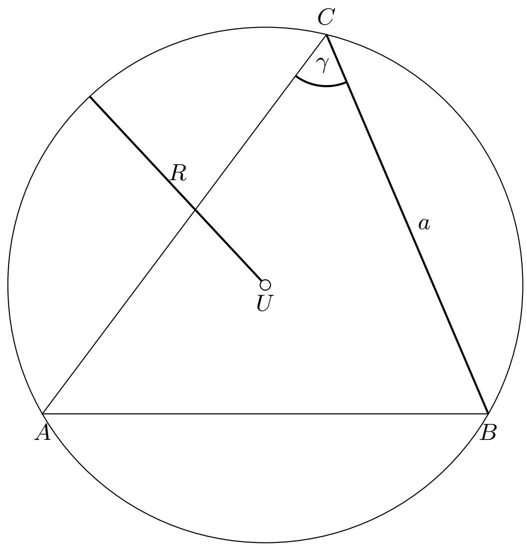
Beispielwerte:

$a = 5.6$ cm
$R = 3.5$ cm
$\gamma = 60^\circ$

$a_{\text{max}} = 7.0$ cm
$R_{\text{min}} = 2.8$ cm

$\gamma_{\text{max}} = 126.87085^\circ$

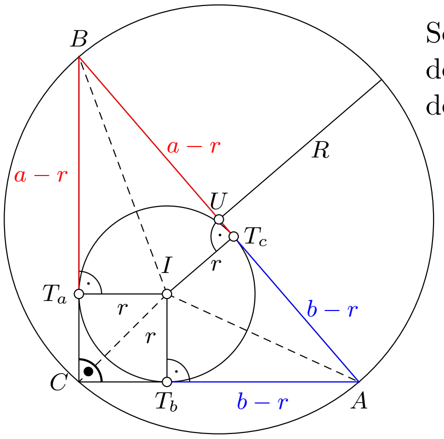
$b = 6.43738$ cm
$c = 6.0622$ cm
$\alpha = 53.13011^\circ$
$\beta = 66.86989^\circ$



Aufgabe gelöst von Hyperplot

Aufgabe 5 - 030915, I.Stufe 1963, Klasse 9

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.



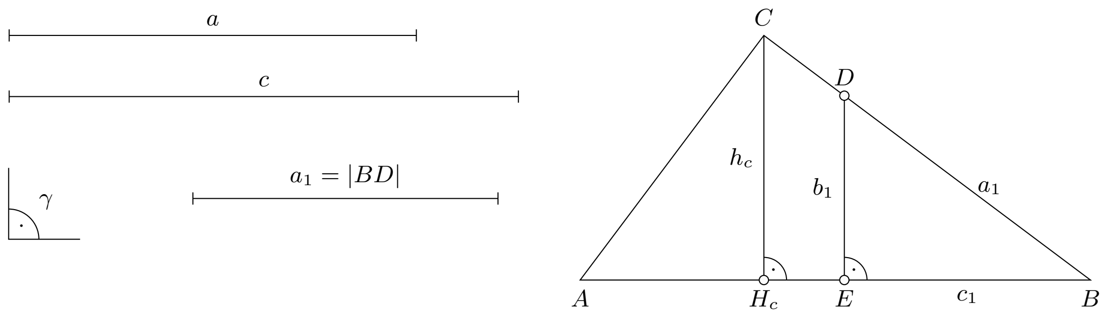
Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, d.h. $\gamma = 90°$; und sei R der Umkreisradius, r der Inkreisradius.

- Die Betrachtung der Berührpunkte T_a, T_b, T_c des Inkreises liefert $c = (a - r) + (b - r)$
- Nach dem *erweiterten Sinussatz* ist $\sin(\gamma) = \frac{c}{2R} = 1 = \sin(90°) \;\Leftrightarrow\; c = 2R$.
- Damit wird $2R = (a-r)+(b-r) \;\Leftrightarrow\; 2r + 2R = a + b$.

Aufgabe gelöst von Hyperplot

Aufgabe 4 - 040913, I.Stufe 1964, Klasse 9

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse AB 25 mm und dessen Kathete BC 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke BD von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot DE auf die Hypotenuse gefällt.
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!



(1) $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c} \cdot \sin(\gamma)\right)$ (Sinussatz)

(2) $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ (Winkelsumme)

(3) $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)}$ (Kosinussatz)

(4) $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (Heronsche Formel)

(5) $h_c = \frac{2F}{c}$ (Flächenformel)

(6) $b_1 = h_c \cdot \frac{a_1}{a}$ (Strahlensatz)

(7) $c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ (Satz des Pythagoras)

Beispielwerte:	
$a = 2$ cm	
$c = 2.5$ cm	
$\gamma = 90^\circ$	
$a_1 = \|BD\| = 1.5$ cm	
$\alpha = 53.13011^\circ$	(1)
$\beta = 36.86989^\circ$	(2)
$b = 1.5$ cm	(3)
$F = 1.5$ cm^2	(4)
$h_c = 1.2$ cm	(5)
$b_1 = \|DE\| = 0.9$ cm	(6)
$c_1 = \|BE\| = 1.2$ cm	(7)
$a_1 + b_1 + c_1 = 3.6$ cm	

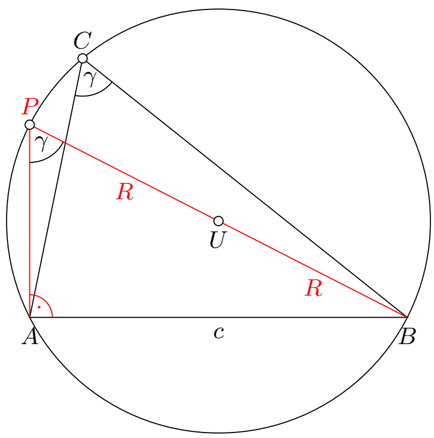
Aufgabe gelöst von Hyperplot

Aufgabe 5 - 040914, I.Stufe 1965, Klasse 9

Beweisen Sie folgenden Satz:
Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

Es ist $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$ ("erweiterter Sinussatz")
Beweis:
Der erweiterte Sinussatz folgt als Kombination von Umfangswinkelsatz und dem Satz des Thales. Man entliest der Abbildung $\sin(\gamma) = \frac{c}{2R}$, also zusammen mit dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$



Damit wird, mit Hilfe von $A = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$, für das Produkt

$$R \cdot A = \frac{a}{2\sin(\alpha)} \cdot \frac{b\,c}{2} \sin(\alpha) = \frac{a\,b\,c}{4} \qquad \square$$

Aufgabe gelöst von Hyperplot