Aufgabensammlung

Abituraufgaben
Thüringen
Grundkurs Mathematik
2001-2010

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{8x+16}{x^2} \quad (x \in R;\ x \neq 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte!
Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$! **8 BE**

b) Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt.
Berechnen Sie dessen Koordinaten und stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Wendetangente t auf!
(Auf den Nachweis des Wendepunktes wird verzichtet.) **4 BE**

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-8 \leq x \leq 8$!
Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten an! **3 BE**

d) Eine Gerade g und der Graph von f verlaufen durch die Punkte $A(-2;0)$ und $Q(-4;-1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden!
Die Gerade g und der Graph von f haben einen dritten Punkt S gemeinsam.
Berechnen Sie dessen Koordinaten! **5 BE**

e) Der Graph einer Funktion h mit $h(x) = -0{,}5x^2 + x + 2$ hat mit dem Graph der Geraden g die Punkte $B(-1;0{,}5)$ und $C(2;\ 2)$ gemeinsam.
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das von diesen beiden Graphen vollständig eingeschlossen wird! **3 BE**

f) Der Graph einer quadratischen Funktion q mit q(0) = q(2) = 4 hat in E(1; 5) einen lokalen Extrempunkt.
Geben Sie die Gleichung dieser quadratischen Funktion q an!
Vergleichen Sie die Funktionen q und h miteinander! **4 BE**

g) Die Gerade g, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u \quad (u > -2)$ begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck, das bei Rotation um die x-Achse einen Kreiskegel erzeugt.
Für welche reellen Zahlen u beträgt das Volumen dieses Kegels $\frac{2}{3}\pi$ VE? **3 BE**

Aufgabe 1.2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (2 - x) \cdot \ln(2 - x)$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte!
Geben Sie diese gegebenenfalls an! **10 BE**

b) Ermitteln Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$! **1 BE**

c) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1 \leq x < 2$! **2 BE**

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit
$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot (2 - x)^2 \cdot [1 - 2\ln(2 - x)] \; - \; 2001$$
eine Stammfunktion von f ist! **3 BE**

e) Weisen Sie nach, dass der Inhalt der Fläche, die im I. Quadranten vom Graphen von f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird, $\left(\ln 4 - \frac{3}{4}\right)$FE beträgt! **3 BE**

f) Der Graph einer quadratischen Funktion q verläuft durch den Punkt $P_0(0; 2\ln 2)$ und hat den lokalen Minimumpunkt $P_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\ln 2\right)$.
Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion!
Kontrollergebnis: $q(x) = \ln 2 \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right)$ **5 BE**

g) Durch den Punkt $P\big(u; q(u)\big)$ mit $0 < u < 1$ werden die Parallelen zu den Koordinatenachsen gezeichnet. Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird!
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an! **6 BE**

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
$A(3;0;5)$, $B(6;4;3)$ und $D(0;4;3)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und D eindeutig eine Ebene ε bestimmen!
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABD! **3 BE**

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene ε mit der x-y-Koordinatenebene! **3 BE**

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass A, B, C und D in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden! **1 BE**

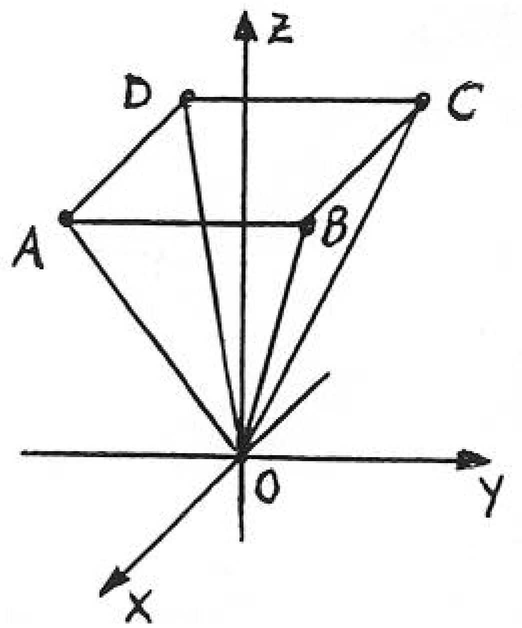
d) Ermitteln Sie die Koordinaten aller weiteren Punkte, die mit A, B
und D ein Parallelogramm ergeben! **2 BE**

e) Ein Punkt S liegt auf der Geraden g, die durch die Punkte A und $P(3;4;8)$ bestimmt wird, sowie auf der Geraden h, die durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{BD}$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft.
Ermitteln Sie die Koordinaten von S! **3 BE**

f) Zeigen Sie, dass $\overline{MS}$ die Höhe der Pyramide ABCDS ist und berechnen Sie das Volumen der Pyramide! **3 BE**

Aufgabe 2.2

Ein Regenauffangbehälter zur Messung von Niederschlägen hat die Form einer auf der Spitze stehenden, oben offenen geraden Pyramide (siehe Skizze).



Die Eckpunkte haben folgende Koordinaten: $A(5;-5;24)$, $B(5;5;24)$, $C(-5;5;24)$, $D(-5;-5;24)$, $O(0;0;0)$.
(1 LE entspricht 1 cm)

a) Gegeben ist ein weiterer Punkt E(0; 0; 40).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte E und B verläuft!
Die Gerade g durchstößt die x-y-Ebene im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes! **3 BE**

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenkante $\overline{OB}$ und die Strecke $\overline{BF}$ einschließen! **2 BE**

c) Nach einem Regenguss ist der Behälter 18 cm hoch mit Wasser gefüllt.
Ermitteln Sie das Volumen des aufgefangenen Wassers! **3 BE**

d) Im Inneren der Pyramide existiert ein Punkt R, der von allen Eckpunkten der Pyramide den gleichen Abstand besitzt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R! **3 BE**

Aufgabenteil e auf Seite 6

e) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, die die Punkte O, A und B enthält!

Eine Gerade h ist durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

$(a,\ r \in R)$ gegeben und verläuft parallel zur Ebene ε.

Ermitteln Sie den Wert des Parameters a! 4 BE

Aufgabe 2.3

Eine Urne enthält 6 gleichartige Kugeln, davon ist eine weiß, zwei Kugeln sind rot und der Rest ist blau.

Der Urne werden nacheinander mit Zurücklegen Kugeln entnommen.

a) Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der roten Kugeln. Geben Sie die Ergebnismenge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an, wenn drei Kugeln entnommen werden! **2 BE**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A:= „Die erste von drei entnommenen Kugeln ist die einzige rote.“
B:= „Die zweite von drei entnommenen Kugeln ist rot.“
C:= „Unter drei entnommenen Kugeln sind höchstens zwei rote Kugeln.“
D:= $A \cap \overline{C}$ **4 BE**

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zehn gezogenen Kugeln genau zwei rote befinden? **2 BE**

d) Wie viele Kugeln muss man der Urne mindestens entnehmen, damit die weiße Kugel mit mehr als 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal auftritt? **2 BE**

Der Urne werden nacheinander ohne Zurücklegen Kugeln entnommen.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich von jeder Farbe noch genau eine Kugel in der Urne befindet, nachdem drei Kugeln entnommen wurden? **2 BE**

f) Folgendes Gewinnspiel wird vereinbart:
Man entnimmt der Urne zwei Kugeln. Sind beide Kugeln rot, bekommt man 4,50 € (Euro), ist eine Kugel rot und die andere weiß, bekommt man 0,30 €. In allen anderen Fällen muss man 0,45 € bezahlen.
Untersuchen Sie, ob es sich hierbei um ein faires Spiel handelt! **3 BE**

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad (x \in R)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie Extrem- und Wendepunkte!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \leq x \leq 8$!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion an!
Für welche Werte c $(c \in R)$ hat die Gerade y = c mit dem Graphen von f keinen, genau einen bzw. zwei gemeinsame Punkte?
15 BE

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (x+2) + 2002$ eine Stammfunktion von f ist!
Der Graph von f, die x-Achse sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie deren Inhalt!
3 BE

c) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt P(p; f(p)) mit $p > 0$ begrenzen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.
Ermitteln Sie die Koordinaten von P so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird!
6 BE

d) Es gibt genau eine Tangente t an den Graphen von f, die durch den Koordinatenursprung verläuft.
Die Tangente t, die Senkrechte zur Tangente t durch den Punkt $Q(6; f(6))$ und die x-Achse begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks!
Bestimmen Sie den Abstand, den der Punkt Q von der Tangente t hat!
6 BE

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 5}$.

a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Funktion f !

Weisen Sie nach, dass gilt: $f'(x) = \dfrac{-6 \cdot (x-3)}{\left(x^2 - 6x + 5\right)^2}$!

Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte!

Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten sowie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen der Funktion f an!

Skizzieren Sie den Graphen von f und die Asymptoten im Intervall $-2 \le x \le 8$! **13 BE**

b) Im Punkt P(0; f(0)) wird die Tangente an den Graphen von f gelegt.

Geben Sie die Gleichung dieser Tangente an!

Diese Tangente schneidet den Graphen von f in einem weiteren Punkt Q.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q! **6 BE**

c) Die Punkte P(0; f(0)), R(6; f(6)) und $H\left(3; \dfrac{1}{4}\right)$ sind Eckpunkte eines Dreiecks.

Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang dieses Dreiecks PHR! **4 BE**

d) Der Graph einer quadratischen Funktion q mit der Gleichung $q(x) = ax^2 + bx + c$ berührt den Graphen von f in den Punkten P und R (aus Teilaufgabe c).

Bestimmen Sie eine Gleichung von q ! **3 BE**

e) Für jede reelle Zahl k ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$y = f_k(x) = \frac{x^2 - 6x + k + 3}{x^2 - 6x + k} \qquad \left(x \in R;\ x \ne 3 \pm \sqrt{9-k} \right).$$

Eine dieser Funktionen hat genau zwei Nullstellen, wobei eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ liegt.

Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion und geben Sie die zweite Nullstelle an! **4 BE**

Aufgabe B1

Bei der Untersuchung von Molekularstrukturen werden Modelle betrachtet.
Ein solches Modell sei durch eine gerade Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD gegeben. Der Inhalt der Grundfläche beträgt 16 FE, die Höhe der Pyramide 6 LE.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar und geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte an! **3 BE**

b) Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche der Pyramide gegenüber der Grundfläche! **3 BE**

c) F sei der Fußpunkt des Lotes von der Spitze S auf die Grundfläche.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes F an!
Eine Gerade verläuft durch die Mittelpunkte der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{FS}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes dieser Geraden durch die Dreiecksfläche ADS ! **6 BE**

d) Auf der Höhe $\overline{FS}$ der Pyramide existiert ein Punkt Q, für den gilt: Die Abstände des Punktes Q von jedem der fünf Eckpunkte der Pyramide sind gleich.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q ! **4 BE**

e) Auf der Höhe $\overline{FS}$ der Pyramide existiert ein weiterer Punkt P, für den der Winkel SPA $135°$ beträgt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P! **4 BE**

Aufgabe B2

Ein Souvenirladen bietet Maskottchen in 3 Farben an. Erfahrungsgemäß werden 25% gelbe, 40% blaue und 35% grüne Maskottchen verkauft.

a) Es werden nacheinander auf gut Glück 8 Maskottchen verkauft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A:= „Mindestens 3 Maskottchen sind gelb."
B:= „Die ersten 3 Maskottchen sind grün."
C:= „Mindestens zwei und höchstens 6 Maskottchen sind blau."
D:= „Unter den letzten 5 Maskottchen ist kein blaues." **6 BE**

b) Bei einer Lieferung von 25 Maskottchen sind nur gelbe und blaue enthalten.
Wie viele gelbe Maskottchen sind in der Lieferung enthalten, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen Herausgreifen zweier Maskottchen (mit einem Griff) genau ein gelbes zu erhalten, 0,48 beträgt? **3 BE**

c) Der Geschäftsinhaber vermutet, dass das Kaufinteresse für gelbe Maskottchen nachgelassen hat.
Unter den nächsten 100 verkauften Maskottchen sind 21 gelbe.
Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% schließen, dass die Vermutung richtig ist? **4 BE**

d) Bei einem Stadtfest wird der Preis eines Maskottchens ausgewürfelt.
- Wird eine 6 gewürfelt, muss $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen Preises gezahlt werden.
- Wird eine 5 oder 4 gewürfelt, wird die Hälfte des ursprünglichen Preises ausgezahlt.
- Wird weniger als 4 gewürfelt, wird $\frac{2}{3}$ des ursprünglichen Preises ausgezahlt.

Im Durchschnitt werden an diesem Tag 6,50 Euro für ein Maskottchen gezahlt.
Wie hoch ist der ursprüngliche Preis? **4 BE**

e) Das Kaufverhalten ist bei Frauen und Männern unterschiedlich.
Frauen kaufen zu 10% gelbe und zu 50% grüne Maskottchen, die Männer dagegen zu 40% blaue und nie grüne Maskottchen.
Wie viel Prozent der Käufer sind Frauen?
Ein verkauftes Maskottchen ist gelb.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es von einem Mann gekauft? **3 BE**

Aufgabe C

a) Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}$,
$n \in N$ und $n \geq 1$ keine geometrische Zahlenfolge ist! **2 BE**

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ 6 \end{pmatrix}$
mit $b_x, c_x, c_y \in R$.
Berechnen Sie b_x für den Fall, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Wert $-\frac{3}{4}$ hat!
Ermitteln Sie c_x und c_y für den Fall, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ parallel zueinander sind! **4 BE**

c) Die Gerade g mit der Gleichung $y = -2x + 4$ begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Dieses Dreieck erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Kegel.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Kegels! **2 BE**

d) Bei einem Schulfest werden Lose verkauft. In einer Lostrommel befinden sich 20 Lose. Darunter sind 15 Nieten und der Rest sind Gewinnlose. Ein Schüler zieht hintereinander zwei Lose.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Gewinnlos dabei ist? **2 BE**

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = x \cdot \ln(x) - 2x$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrem- und Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $0{,}1 \leq x \leq 8$!
Begründen Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq \infty$ ist!

12 BE

b) Weisen Sie nach, dass $F(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{5}{2}\right) + 2003$ eine Stammfunktion von f ist!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen x = 1 und x = 8 vollständig begrenzt wird!

5 BE

c) Im Punkt $P(e^2;\ 0)$ wird die Tangente t an den Graphen von f gelegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente t!
Weisen Sie nach, dass die Gerade n mit der Gleichung $y = n(x) = -x + e^2$ im Punkt P auf der Tangente t senkrecht steht.
Die Gerade n und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche A_1. Die Gerade n, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = e begrenzen eine Fläche A_2.
Zeigen Sie, dass sich die Inhalte der beiden Flächen A_1 und A_2 wie $e^2 : (e-1)^2$ verhalten!

7 BE

d) Die Gerade h mit der Gleichung $y = h(x) = x$ und der Graph der Funktion f haben genau einen Punkt gemeinsam.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes an!

Die Gerade $x = u$ mit $0{,}1 \leq u < e^3$ schneidet den Graphen von f im Punkt P_1 und den Graphen von h im Punkt P_2.
Untersuchen Sie, ob es ein u im angegebenen Intervall gibt, so dass die Strecke $\overline{P_1P_2}$ maximale Länge hat!

$\boxed{\text{6 BE}}$

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = e^x \cdot \left(x^2 + t\right) \qquad (x \in R).$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_{-3} auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte!
Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an!
Bestimmen Sie den Wertebereich von f_{-3}!
Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f_{-3} zwei Wendepunkte besitzt!
Skizzieren Sie den Graphen von f_{-3} in einem geeigneten Intervall! **14 BE**

b) Eine Gerade g verläuft durch den Punkt $P\left(0; f_{-3}(0)\right)$ und senkrecht zur Tangente h an den Graphen von f_{-3} in diesem Punkt.
Die Tangente h, die Gerade g und die x-Achse begrenzen ein Dreieck.
Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks!
Bei Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Körper.
Berechnen Sie dessen Volumen! **8 BE**

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_t mit

$$F_t(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2 + t\right)$$

eine Stammfunktion von f_t ist!
In welchem Verhältnis teilt die y-Achse die Fläche, die der Graph der Funktion f_{-3} und die x-Achse

vollständig einschließen? 5 BE

d) Untersuchen Sie, für welche Werte von t gilt:
Der Graph der Funktion f_t besitzt keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, aber zwei lokale Extrempunkte. 3 BE

Aufgabe B1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
$P(7;\,4;\,1)$, $Q(1;\,8;\,5)$, $R_a(4;\,a;\,9-a)$, $S(4;\,4;\,5)$, $T(5;\,0;\,1)$

sowie der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-6\\1\\7\end{pmatrix}$ gegeben $(a\in R)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene ε, die die Punkte P, Q und R_3 enthält!

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in welchem die x-Achse die Ebene ε durchstößt!

Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes der Ebene ε an und berechnen Sie dessen Abstand vom Koordinatenursprung!

Die Gerade g verläuft durch den Punkt T und besitzt den Richtungsvektor $\vec{v}$.

Weisen Sie nach, dass diese Gerade g parallel zur Ebene ε liegt!

7 BE

b) Die Punkte P, Q, U und T bilden in dieser Reihenfolge ein Viereck.

Wie müssen die Koordinaten des Punktes U gewählt werden, damit das Viereck ein Parallelogramm ist?

Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Parallelogrammseiten $\overline{PT}$ und $\overline{PQ}$ einschließen!

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes T von der Geraden h, die durch die Punkte P und Q verläuft!

6 BE

c) Zeigen Sie, dass der Punkt S auf der Strecke $\overline{R_3R_6}$ liegt!
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $\overline{R_3R_6}$!

3 BE

d) Weisen Sie nach, dass das Dreieck PR_aQ gleichschenklig ist!
Für welche Werte von a ist das Dreieck PR_aQ bei R_a rechtwinklig?

4 BE

Aufgabe B2

Bauer Pick besitzt einen Hof, auf dem glückliche Hühner und stolze Hähne leben.

a) Ein Teil der gelegten Eier wird in automatischen Brutöfen ausgebrütet.
Einer der Brutöfen ist sehr störanfällig und fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% pro Tag aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:
A:= „Der Ofen fällt erstmals am 4. Tag aus."
B:= „Der Ofen fällt frühestens am 5. Tag aus."
C:= „Der Ofen fällt am 3. Tag zum ersten Mal und am 8. Tag zum dritten Mal aus."

4 BE

b) Erfahrungsgemäß sind nur 90% der Eier befruchtet.
Wie viele unbefruchtete Eier sind unter 250 Eiern zu erwarten?
Wie viele Eier müssen mindestens überprüft werden, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens ein unbefruchtetes Ei zu finden, größer als 99,9% ist?

3 BE

c) Ob die Hähnchen des Bauern zur Zucht weiterverkauft werden können, hängt von der Bewertung durch eine Expertenkommission ab. Diese Kommission besteht aus 10 Prüfern, darunter sind „milde" und „strenge". Zur Bewertung werden zwei Prüfer durch Los bestimmt.
Wie viele „strenge" Prüfer sind in der Kommission, wenn die Wahrscheinlichkeit, jeweils einen „strengen" und einen „milden" Prüfer zu erhalten, $\frac{7}{15}$ beträgt?

4 BE

d) Von den Hähnchen sind 80% zur Zucht geeignet. Allerdings werden durch die Prüfer nur 90% der geeigneten auch als solche eingestuft. 5% der ungeeigneten Hähnchen werden ebenfalls als geeignet eingestuft.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Hähnchen richtig eingestuft?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als geeignet eingestuftes Hähnchen tatsächlich nicht geeignet? **4 BE**

e) Dem Auszubildenden Stift fällt auf, dass ein Teil der Eier braun ist. Er nimmt an, dass dieser Anteil 30% beträgt. Bauer Pick dagegen behauptet, dass es nur 25% sind. Der Auszubildende beschließt, sich der Meinung des Bauern anzuschließen, wenn unter den nächsten 100 Eiern höchstens 26 braune sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Auszubildende irrt, wenn er sich der Meinung des Bauern anschließt?
Angenommen, der Anteil wäre tatsächlich nur 25%. Wie würde dann die Fehlentscheidung lauten und mit welcher Wahrscheinlichkeit würde sie getroffen? **5 BE**

Aufgabe C

a) Gegeben ist die Gleichung einer Funktion f durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} \qquad (x \in R;\ x \neq 0).$$

Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f! **2 BE**

b) Die Glieder $a_6 = 10$ und $a_8 = 40$ gehören zu einer arithmetischen Zahlenfolge (a_n).

Geben Sie eine Bildungsvorschrift für (a_n) an!

Bestimmen Sie das Folgenglied a_{23} dieser Folge! **3 BE**

c) Die Punkte A, B, C und D bilden (in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.

Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ r \end{pmatrix}$ mit $r \in R$.

Für welche reelle Zahl r liegt ein Rechteck vor?

Könnte dieses Rechteck auch ein Quadrat sein?

2 BE

d) Für einen Einsatz von 2 Euro darf Wolfgang mit einem idealen Würfel einmal würfeln. Der Auszahlungsbetrag ergibt sich aus der gewürfelten Augenzahl multipliziert mit 50 Cent.

Ist dieses Spiel fair? **3 BE**

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3x + 5)(3 - x)\,, \quad x \in R\,.$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrem- und Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-3 \leq x \leq 4$!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche vom Graphen der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!

14 BE

b) Im Punkt W(0; f(0)) wird an den Graphen von f die Tangente gelegt. Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Bei der Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Kegel.
Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels!
Eine Ebene ε verläuft orthogonal zur x-Achse und schneidet diese bei $x = -2{,}5$. Diese Ebene ε teilt den Kegel in zwei Teilkörper. In welchem Verhältnis stehen deren Volumina?

8 BE

c) Der Graph einer quadratischen Funktion $q(x) = ax^2 + bx + c$ schneidet den Graphen von f im Punkt N(3; f(3)) und berührt ihn im Punkt W(0; f(0)).
Geben Sie für q eine Gleichung an!

4 BE

d) Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion h_a durch

$h_a(x) = \frac{3}{5}(x + a + \frac{1}{3}x^2)(3 - x)$, $x \in R$, gegeben.

Untersuchen Sie für jeden der drei folgenden Fälle, ob reelle Zahlen a so existieren, dass die Funktion h_a

(1) mit der Funktion f identisch ist,
(2) genau zwei Nullstellen besitzt,
(3) genau drei Nullstellen besitzt!

4 BE

Aufgabe A2

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = (x^2 + \frac{3}{2}x) \cdot e^{-x}$ $(x \in R)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit der x-Achse und auf lokale Extrempunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall!
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den Graphen von f zutreffen und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung:
(1) Der Graph von f besitzt zwei Wendepunkte.
(2) Es gilt: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

12 BE

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = (-x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 2$ vollständig begrenzt wird!

6 BE

c) Durch den Punkt P(2; 3) und den Koordinatenursprung O ist eine Gerade g festgelegt.
Weisen Sie nach, dass die Gerade g die Tangente an den Graphen von f im Punkt O ist!
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q, welcher auf der y-Achse liegt und von den Punkten P und O gleichweit entfernt ist!
Eine Gerade h verläuft durch P und senkrecht zu g.
In welchem Verhältnis teilt die Gerade g die Dreiecksfläche, die von der Geraden h und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird?

8 BE

d) Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch $y = f_t(x) = (x^2 + \frac{t}{2} \cdot x) \cdot e^{-x}$ und deren ersten Ableitung durch $f_t'(x) = (-x^2 + (2 - \frac{t}{2}) \cdot x + \frac{t}{2}) \cdot e^{-x} \quad (x \in R)$.

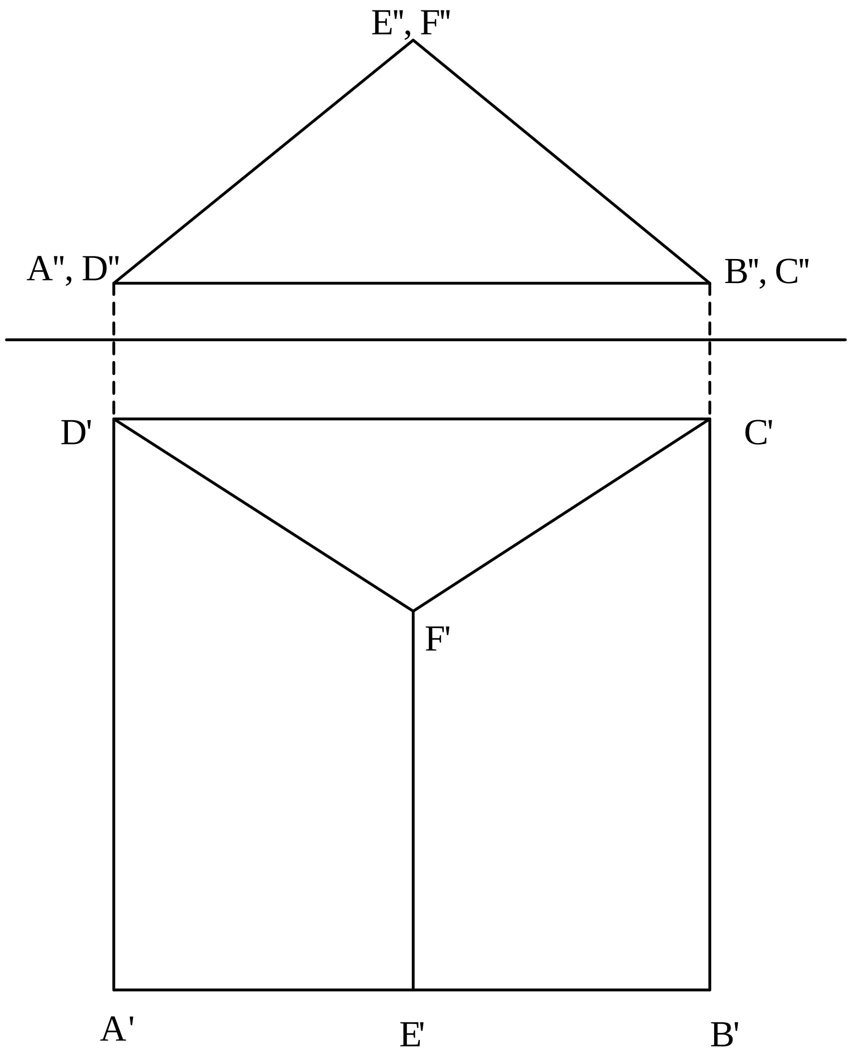
Für welchen Wert des Parameters t liegt der Punkt $R(2; \frac{4}{3})$ auf der Tangente an den Graphen von f_t im Punkt O?

Zeigen Sie, dass für jeden Parameterwert t auf dem Graphen von f_t genau zwei Punkte mit jeweils waagerechter Tangente existieren!

4 BE

Aufgabe B1

Für die Errichtung eines Dachstuhls hat ein Dachdeckermeister folgende Skizze erhalten:



(Skizze nicht maßstäblich)

Um Berechnungen durchführen zu können, soll das Dach in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden. Dabei sind die Koordinaten folgender Eckpunkte gegeben:
$A(8; 0; 0)$, $B(8; 6; 0)$, $C(0; 6; 0)$ und $F(2; 3; 2{,}5)$.
(Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.)

a) Stellen Sie das Dach in einem kartesischen Koordinatensystem dar!
Geben Sie die Koordinaten der Punkte D und E an!

3 BE

b) Auf dem Dachboden ABCD wird im Punkt G(5; 4; 0) senkrecht nach oben eine 3m lange Antenne montiert.
Beschreiben Sie diese Antenne als Strecke mit Hilfe einer Geradengleichung!
Zeigen Sie, dass die Antenne die Dachfläche BCFE im Punkt $H(5;\ 4;\ \frac{5}{3})$ durchstößt!
In welchem Längenverhältnis stehen die innerhalb und außerhalb des Dachraumes liegenden Teile der Antenne?
In der Dachfläche BCFE befindet sich außerdem eine Ausstiegsluke, zu der der Punkt L(4; 4; z) gehört.
Bestimmen Sie den Abstand der Punkte H und L!

8 BE

c) Zur Materialbestellung benötigt man die Größe der Dachflächen.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks CFD!
Der Neigungswinkel der Dachflächen zum Dachboden ABCD soll zwischen $35°$ und $55°$ liegen.
Überprüfen Sie, ob diese Vorgabe für die Dachfläche AEFD eingehalten wurde!
Zur Stabilisierung der Dachfläche benötigt man den Diagonalenschnittpunkt T der Fläche AEFD.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes T !

6 BE

d) Begründen Sie, dass es auf dem Dachfirst $\overline{EF}$ zwei Punkte S gibt, so dass der Winkel BSC ein rechter Winkel ist!
Bestimmen Sie deren Koordinaten näherungsweise!

3 BE

Aufgabe B2

Eine Süßwarenfirma stellt Fruchtriegel her. Da die Firma einer der Sponsoren für die Planung der Olympiade 2012 in Leipzig ist, wurde jedem 5. Riegel ein Freilos für die Olympialotterie 2012 beigelegt. Beim Verkauf der Riegel ist gewährleistet, dass die Riegel gut durchmischt und nicht unterscheidbar sind.

a) Gunda kauft 7 Fruchtriegel und öffnet sie nacheinander.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A:= „Keiner der 7 Riegel enthält ein Freilos."
B:= „Die ersten beiden Riegel enthalten jeweils ein Freilos. "
C:= „Nur der letzte Riegel enthält ein Freilos. "
D:= „Unter den 7 Riegeln befinden sich genau zwei Freilose."
E:= „Unter den 7 Riegeln befinden sich mindestens zwei Freilose. "
F:= „Der vierte geöffnete Riegel enthält das zweite Freilos. "
Berechnen Sie, wie viele Fruchtriegel mit Freilos unter den 7 gekauften Riegeln zu erwarten sind?

9 BE

b) Grit entnimmt einem Karton mit 60 Fruchtriegeln, von denen genau 12 ein Freilos enthalten, „auf gut Glück" genau 13 Riegel, ohne einen wieder zurückzulegen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Grit genau zwei Riegel mit Freilos erwischt!

3 BE

c) Herr Ullrich kauft für seine Kinder genau die Anzahl von Fruchtriegeln, die er mindestens braucht, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 wenigstens ein Freilos zu erhalten.
Ermitteln Sie die Anzahl der von Herrn Ullrich gekauften Riegel!

3 BE

d) Ein größerer Posten von Fruchtriegeln soll nach Leipzig geliefert werden. Es wurde allerdings vergessen, diesen zu etikettieren. Als Inhalt kommen in Frage entweder nur Fruchtriegel mit einem 20%igen Freilos-Anteil oder nur Fruchtriegel, die versehentlich nur einen 10%igen Freilos-Anteil besitzen. Um sich als Firma möglichst nicht in der Sportstadt Leipzig zu blamieren, soll ein Alternativtest mit einem Stichprobenumfang von n = 100 bezüglich der Nullhypothese $H_0:\ p = 0{,}10$ durchgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeit α, dass die „freilosärmere” Lieferung als „freilosreichere” Lieferung eingestuft wird, darf dabei höchstens 0,01 betragen.
Ermitteln Sie unter diesen Gegebenheiten den größtmöglichen Ablehnungsbereich A von H_0!
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die „freilosreichere” Lieferung als „freilosärmere” Lieferung eingestuft wird?

5 BE

Aufgabe C

a) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Polstellen!

$\boxed{\text{2 BE}}$

b) Lösen Sie die Gleichung $2^{x+1} = 8 \cdot 2^{3x-1} \; (x \in R)$!

$\boxed{\text{2 BE}}$

c) Gegeben sind die Punkte $A(2; -1; 3)$ und $B(8; 8; -3)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P, so dass dieser die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis 1 : 2 teilt!

$\boxed{\text{2 BE}}$

d) Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) durch $a_n = \frac{4n+1}{2n-1}$ mit

$n \in N$ und $n \geq 1$.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge und geben Sie an, ab welchem n der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert kleiner als 0,5 ist!

$\boxed{\text{2 BE}}$

e) In einem Test werden 10 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Von den Antworten ist jeweils genau eine richtig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem zufälligen Ankreuzen genau 4 Antworten richtig sind!

$\boxed{\text{2 BE}}$

Aufgabe A1

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = e^{-2x+1} \cdot \left(6x^2 + 2x - 4\right)$ $\left(x \in R\right)$.

a) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung von f gilt: $f'(x) = e^{-2x+1} \cdot \left(-12x^2 + 8x + 10\right)$.
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten näherungsweise an!
Begründen Sie, dass der Graph von f genau zwei Wendepunkte besitzt!
Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall!
(Einteilung auf der y-Achse $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{LE}$)
Geben Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f sowie den Wertebereich der Funktion f an! **16 BE**

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = e^{-2x+1} \cdot \left(-3x^2 - 4x\right) + 2005$ eine Stammfunktion von f ist!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird! **5 BE**

c) An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ wird die Tangente an den Graphen von f gelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente und zeichnen Sie die Tangente in das Koordinatensystem aus dem Aufgabenteil a) ein!
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Tangente mit der y-Achse! **5 BE**

d) Für jede reelle Zahl c ist eine Funktion f_c gegeben durch $y = f_c(x) = e^{-2x+1} \cdot \left(6x^2 + 2x + c\right)$ mit $x \in R$.
Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_c mit der x-Achse in Abhängigkeit vom Parameter c! **4 BE**

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{8x}{4x^2 + 1}$ $(x \in R)$.

a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f!
Der Graph von f hat mit den Koordinatenachsen genau einen Punkt gemeinsam.
Geben Sie dessen Koordinaten an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf lokale Extrempunkte!
Ermitteln Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!
Begründen Sie, dass die x-Achse Asymptote des Graphen von f ist!
Skizzieren Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an!
Die Gerade mit der Gleichung y = 1 schneidet den Graphen von f in den Punkten $P_1(x_1; 1)$ und $P_2(x_2; 1)$.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte P_1 und P_2! **16 BE**

b) Es existieren genau drei Tangenten an den Graphen von f, die mit diesem keinen weiteren Punkt gemeinsam haben.
Geben Sie die Gleichungen dieser Tangenten an!
Zeigen Sie, dass es genau zwei Tangenten an den Graphen von f gibt, die den Anstieg 1 haben! **5 BE**

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = \ln(4x^2 + 1) + 2005$ eine Stammfunktion von f ist!
Für jede positive reelle Zahl c begrenzen die Geraden mit den Gleichungen $x = c$ und $x = -c$ sowie der Graph von f und die x-Achse zwei Flächenstücke vollständig.
Für welches c beträgt die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke $2 \cdot \ln 5$ FE?

Interpretieren Sie die Aussage: $\int_{-c}^{c} f(x)dx = 0$!

6 BE

d) Für jede ganze Zahl t ($t \neq 0; t \neq 1$) ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = t \cdot f(x) = t \cdot \dfrac{8x}{4x^2 + 1}$ $(x \in R)$.
Wie geht in Abhängigkeit von t der Graph von f_t aus dem Graphen von f hervor? **3 BE**

Aufgabe B1

Ein Würfel hat folgende Eckpunkte: $P_1(0; 0; 0)$, $P_4(0; 4; 0)$ und $P_6(4; 0; 4)$. Eine Ebene ε schneidet die Kanten des Würfels in den Punkten A(4; 0; 1), B(3; 4; 0) und C(0; 4; 3).

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Würfels!
Geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Würfels an! **2 BE**

b) Die Punkte A, B, C und D bilden in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Parallelogramms.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D!
Beschreiben Sie die Lage des Punktes D bezüglich des Würfels!
Zeichnen Sie das Parallelogramm in das Schrägbild ein!
Ermitteln Sie, um welche Art Parallelogramm es sich bei ABCD handelt! **5 BE**

c) Die Raumdiagonale $\overline{P_4P_6}$ des Würfels liegt auf einer Geraden g.
Die Flächendiagonale $\overline{AC}$ des Parallelogramms ABCD liegt auf einer Geraden h.
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels beider Geraden! **5 BE**

d) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene ε an!
T sei der Punkt, in dem die Gerade g die Ebene ε durchstößt.
Weisen Sie nach, dass der Punkt T die Raumdiagonale $\overline{P_4P_6}$ des Würfels im Verhältnis 1:1 teilt!
Beschreiben Sie die Lage des Punktes T bezüglich des Würfels! **4 BE**

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes G auf der Geraden g so, dass G vom Punkt P_5 die kürzeste Entfernung hat!
Sind die Punkte P_3 und P_5 Spiegelpunkte bezüglich G?
Begründen Sie Ihre Entscheidung! **4 BE**

Aufgabe B2

Ein Glücksrad ist in sechs gleich große Sektoren eingeteilt. Ein Sektor ist schwarz, zwei sind rot und drei sind gelb gefärbt.

a) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse!
A: = „Es erscheint höchstens einmal ein roter Sektor."
B: = „Die beiden erdrehten Sektoren haben verschiedene Farben."
C: = $A \cap B$ **3 BE**

b) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,9 ein roter Sektor mindestens einmal erscheint? **3 BE**

c) Das Glücksrad wird 50mal gedreht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Anzahl der erdrehten gelben Sektoren um höchstens fünf vom Erwartungswert unterscheidet! **4 BE**

Für ein anderes Glücksspiel wird eine Urne mit sechs Kugeln benutzt, von denen eine grün, zwei blau und drei weiß sind. Ein Spieler entnimmt der Urne eine Kugel ohne Zurücklegen. Ist die Kugel weiß, ist das Spiel beendet, andernfalls nicht. Bei jeder weiteren Entnahme einer Kugel ohne Zurücklegen ist das Spiel beendet, wenn eine weiße oder blaue Kugel gezogen wird, andernfalls nicht.

d) Erstellen Sie das zugehörige Baumdiagramm und berechnen Sie für dieses Spiel die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse D und E!
D: = „Die letzte gezogene Kugel ist grün."
E: = „Die letzte gezogene Kugel ist blau." **3 BE**

e) Für die am Spielende gezogene Kugel gilt: Ist sie weiß, wird dem Spieler ein Euro ausgezahlt, ist sie blau, werden ihm zwei Euro ausgezahlt.
Für welchen Einsatz ist das Spiel fair? **3 BE**

(Aufgabenteil f auf Seite 6)

f) Eine andere Urne enthalte eine große Anzahl kleiner Kugeln, die äußerlich nur durch ihre Farbe zu unterscheiden sind. Bekannt sei weiterhin, dass der Anteil der weißen Kugeln entweder 75% oder 50% beträgt. Mit Hilfe einer Zufallsstichprobe vom Umfang 20 will man über den Anteil der weißen Kugeln Auskunft geben.
Gesucht ist die Entscheidungsvorschrift, so dass beim Alternativtest der Hypothese $H_0:\ p = 0{,}50$ gegen die Alternative $H_1: p = 0{,}75$ das Risiko für einen Fehler erster Art höchstens 0,05 beträgt.

4 BE

Aufgabe C

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n), die durch

$$a_n = \frac{3n^2 + 22040n}{2n^2 + 5} \text{ mit } n \in N \text{ und } n \geq 1 \text{ gegeben ist!}$$

Bestimmen Sie das fünfte Glied der Zahlenfolge! **2 BE**

b) Gegeben sind die Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in R)$.

Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen t gibt, so dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander orthogonal sind! **2 BE**

c) Gegeben ist der Term $\sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich des Terms und vereinfachen Sie den Term soweit wie möglich! **2 BE**

d) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2$, $x \in R$, hat mit den Koordinatenachsen genau zwei gemeinsame Punkte.
Berechnen Sie den Abstand dieser Punkte! **2 BE**

e) Eine ideale Münze wird zehnmal geworfen.
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur Zahl geworfen wird?
(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als achtmal Wappen geworfen wird? **2 BE**

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ mit $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrem- und Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
(Auf den Nachweis möglicher Wendepunkte kann verzichtet werden.)
Geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-3 \le x \le 5$!
Begründen Sie, dass die Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist!

13 BE

b) Weisen Sie nach, dass für alle $x \in R$ die Gleichung $f(1+x) = f(1-x)$ gilt!
Deuten Sie das Ergebnis geometrisch!

3 BE

Die Punkte P, Q und R sind durch $P(0;\ln 2)$, $Q(1;0)$ und $R(2;\ln 2)$ gegeben.

c) Die Tangenten an den Graphen von f in den Punkten P und R begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck.
Geben Sie die Art des Dreiecks nach Seiten und Winkeln an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

7 BE

d) Durch die Punkte P, Q und R verläuft eine Parabel g mit der Gleichung $g(x) = a \cdot (x - b)^2$.
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b!
(Kontrollergebnis: a = ln 2, b = 1)
Skizzieren Sie die Parabel in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) und geben Sie jeweils die Intervalle an, in denen der Graph von g oberhalb bzw. unterhalb des Graphen von f verläuft!
Die Funktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ beschreibt die Differenz der Funktionswerte.
Geben Sie zwei Eigenschaften dieser Funktion d an und begründen Sie Ihre Aussagen!

7 BE

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = \frac{3x - 1}{e^x}$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrem- und Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to -\infty$ und skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-0{,}5 \le x \le 4$! **13 BE**

b) Überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden drei Aussagen und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne weitere Berechnungen:
(1) Der Graph von f' besitzt einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
(2) Der Graph von f' besitzt einen Extrempunkt.
(3) Für $0 \le x \le 4$ gilt $f'(x) > 0$.

3 BE

c) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -3xe^{-x} - 2e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist! Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Inhalt! **3 BE**

d) Im Punkt P(3; f(3)) wird die Tangente an den Graphen von f gelegt. Diese schneidet die x-Achse im Punkt Q und die y-Achse im Punkt R. O ist der Koordinatenursprung.
Das Dreieck OQR rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers!
Weisen Sie rechnerisch nach, dass es zwei Tangenten an den Graphen von f gibt, die durch den Koordinatenursprung verlaufen! **8 BE**

Aufgabenteil e auf Seite 4

e) Für jedes $a\left(a \in R; a \neq 0\right)$ ist eine Funktion f_a durch die Gleichung $f_a(x) = \frac{ax - 1}{e^x}$ gegeben.

Für welchen Wert des Parameters a hat der Graph der Funktion f_a an der Stelle x=2 den Anstieg $m = \frac{4}{e^2}$?

3 BE

Aufgabe B1

Das Forschungsschiff „Meteor 1“ bewegt sich auf geradlinigem Kurs vom Punkt $F_1(-7; -16; 0)$ zum Punkt $F_2(4; 1; 0)$. Vom Punkt F_2 aus wird eine Sonde „Meteor 2“ im Punkt $S_1(32; 25; 1)$ geortet. Die Sonde dient der Aufnahme meteorologischer Messergebnisse in der Atmosphäre und bewegt sich geradlinig in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

(Koordinateneinheit 1 km)

a) Geben Sie je eine Geradengleichung für die Bahn des Forschungsschiffes und die Bahn der Sonde an! Welche Entfernung legt das Schiff vom Punkt F_1 bis zum Punkt F_2 zurück? **3 BE**

b) Die Sonde erreicht die Wasseroberfläche im Punkt S_2. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes S_2! Weisen Sie nach, dass dieser Punkt nicht auf der Geraden liegt, die das Schiff von F_1 nach F_2 befährt!
(Kontrollergebnis: $S_2(28; 33; 0)$)
Das Schiff ändert im Punkt F_2 seinen Kurs und fährt geradlinig auf den Punkt S_2 zu, um die Sonde aufzunehmen. Berechnen Sie die Größe des Winkels, um den das Schiff seinen Kurs ändern muss! **7 BE**

In den folgenden Aufgabenteilen wird das Dreieck $F_1F_2S_2$ betrachtet.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks!
Eine Boje soll im Innern des Dreiecks $F_1F_2S_2$ ausgebracht werden.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes! **4 BE**

Aufgabenteil d auf Seite 6

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes F_2 von der Geraden, die die Dreiecksseite $\overline{F_1S_2}$ enthält!
Der Punkt F_3 entsteht durch Spiegelung des Punktes F_2 an der Geraden, die die Dreieckseite $\overline{F_1S_2}$ enthält.
Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Punktes F_3 bestimmen kann!
Die Punkte F_1, F_3, S_2 und F_2 bilden ein ebenes Viereck.
Geben Sie die Art des Vierecks an und begründen Sie Ihre Aussage!

6 BE

Aufgabe B2

Eine Schülergruppe führt unter den Bewohnern ihres Stadtteils eine Umfrage zu den Lebensbedingungen durch. Bei der letzten Umfrage aus dem vergangenen Jahr waren 80% der Befragten mit den Lebensbedingungen zufrieden. (Befragte, die mit den Lebensbedingungen zufrieden sind, werden im weiteren Text kurz als „zufrieden“ bezeichnet.)

a) Ein Schüler der Gruppe befragt zehn rein zufällig ausgewählte Bewohner des Stadtteils. Berechnen Sie – unter Annahme einer unveränderten Zufriedenheitsquote – die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis D!
A:= „Alle Befragten sind zufrieden.“
B:= „Mindestens acht Befragte sind zufrieden.“
C:= „Höchstens drei Befragte sind unzufrieden.“
D:= „Der fünfte Befragte ist der zweite zufriedene Befragte.“
Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis E, das die Wahrscheinlichkeit $P(E) = 45 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 + 120 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7$ besitzt! **9 BE**

b) Der Schüler benötigt für Nachfragen einen unzufriedenen Einwohner. Berechnen Sie, wie viele Bewohner er mindestens befragen muss, um – unter Annahme einer unveränderten Zufriedenheitsquote – mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,99 zumindest einen solchen Bewohner zu finden! **3 BE**

c) Nach den Befragungen legt der Schüler jeweils genau 20 Fragebögen in eine Ablage, unter denen sich genau sieben Fragebögen von unzufriedenen Bewohnern befinden. Ein anderer Schüler der Gruppe ist mit der Auswertung beauftragt und entnimmt einer solchen Ablage nacheinander und ohne Zurücklegen genau fünf Fragebögen „auf gut Glück“.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau drei Fragebögen von unzufriedenen Befragten sind! **2 BE**

Aufgabenteil d auf Seite 8

Der Bürgermeister möchte die Ergebnisse der Schülergruppe gern als Bestätigung der Arbeit des vergangenen Jahres verwenden und bei einer Wahlveranstaltung erstmalig vorstellen. Er vermutet, dass sich der Anteil der zufriedenen Bewohner auf 90% erhöht hat. Die Schüler sollen in seinem Auftrag einen Alternativtest mit 100 rein zufällig Befragten bezüglich der Nullhypothese $H_o: \ p = 0{,}80$ und der Alternativhypothese $H_1: \ p = 0{,}9$ durchführen.

d) Welche Fehlentscheidungen sind bei diesem Test prinzipiell möglich?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersieht man bei diesem Test die real vorhandene Verbesserung auf $p = 0{,}9$ im Zufriedenheitsgrad der Einwohner, wenn man ab 90 zufriedener Befragter die Nullhypothese ablehnen würde?
Ab welcher Anzahl zufriedener Bewohner sollte man die Nullhypothese bei einem angenommenen Signifikanzniveau von 0,10 verwerfen?

6 BE

Aufgabe C

a) Gegeben sind zwei Folgenglieder $a_2 = 3$ und $a_5 = 24$.
Ermitteln Sie das Folgenglied a_{15},
wenn (a_n) eine geometrische Zahlenfolge ist! | 2 BE |

b) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{2x}$ $(x > 0)$.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer Stammfunktion F
von f! | 2 BE |

c) Für jede reelle Zahl t ist durch die Punkte $A(-5; 8; 4)$, $B(4; 11; 1)$
und $C_t(t; 6; 3)$ ein Dreieck gegeben.
Berechnen Sie alle Werte von t, so dass das Dreieck bei C_t
einen rechten Winkel besitzt! | 3 BE |

d) In einer Lostrommel befinden sich noch genau 10 Lose, darunter
sind nur zwei Gewinnlose. Karla zieht genau 3 Lose.
(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie dabei nur Nieten?
(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie beide Gewinnlose?
(3) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der
gezogenen Gewinnlose! | 3 BE |

Aufgabe A1

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{6x^2 - x^3}{4}$ mit $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \le x \le 6{,}5$! **10 BE**

b) Auf dem Graphen der Funktion f existiert ein Punkt $Q(q;\ f(q))$ mit $0 < q < 6$.
Die Parallele zur y-Achse durch Q schneidet die x-Achse im Punkt P.
O bezeichnet den Koordinatenursprung.
Ermitteln Sie die Koordinaten von Q so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal ist! **5 BE**

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f an!
Ermitteln Sie, wie viele Tangenten es an den Graphen von f gibt, die die Wendetangente senkrecht schneiden? **4 BE**

d) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis diese Fläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = 2x$ geteilt wird! **6 BE**

e) Für jede reelle Zahl a mit $a \ne 0$ ist eine Funktion g_a durch $y = g_a(x) = a \cdot \left(x^2 - 6x\right)$ mit $x \ge -2$ gegeben.
Skizzieren Sie den Graphen von g_1 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) !
Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen von f und g_1 in dem vom Ursprung verschiedenen Schnittpunkt?
Untersuchen Sie, ob man a so wählen kann, dass sich die Graphen von g_a und f an der Stelle 6 berühren? **5 BE**

Aufgabe A2

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot (\ln x - 2)$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $\frac{1}{2} \le x \le 8$!
Geben Sie den Wertebereich von f an! **11 BE**

b) An den Graphen von f wird im Punkt $P(e;\ f(e))$ die Tangente gelegt.
Zeigen Sie, dass diese Tangente eine Ursprungsgerade ist!
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Tangente die y-Achse schneidet!
Diese Tangente und die zu ihr senkrechte Gerade durch P begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck.
Berechnen Sie dessen Flächeninhalt! **8 BE**

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{6}x^3 \cdot \left(\ln x - \frac{7}{3}\right) + 2007$ eine Stammfunktion von f ist!
Aus den bisherigen Ergebnissen können Eigenschaften von F bestimmt werden. Geben Sie zwei Eigenschaften von F ohne weitere Rechnung an und begründen Sie Ihre Entscheidung!
Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = e$ eine Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt! **6 BE**

d) Für jede reelle Zahl a mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ ist eine Funktion g_a mit $g_a(x) = a \cdot f(x)$ gegeben.
Wie verändert sich der Graph von f in Abhängigkeit von a? Führen Sie dazu eine Fallunterscheidung durch!
Geben Sie zwei Eigenschaften an, die die Graphen aller Funktionen g_a gemeinsam haben! **5 BE**

Aufgabe B1

Ein Turm besitzt die Form eines Quaders ABCDEFGH mit einer aufgesetzten geraden Pyramide mit der Spitze S. Die Höhe des Turmes beträgt 14 m. Die Koordinaten folgender Punkte $A(3;2;0)$, $B(7;5;0)$, $C(4;9;0)$, $G(4;9;10)$ sind gegeben.
(1 LE entspricht 1 m)

a) Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind!
Die Grundfläche des Turms ist ein Quadrat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D!
Geben Sie die Koordinaten der restlichen Punkte an und zeichnen Sie den Turm in ein kartesisches Koordinatensystem ein! **6 BE**

b) Das Dach des Turmes soll mit Kupfer gedeckt werden. Dazu müssen alle Winkel einer Dachfläche ermittelt werden.
Berechnen Sie die Größen der Winkel sowie den Flächeninhalt einer Dreiecksfläche!
Wie viel Quadratmeter Kupfer benötigt man zur Eindeckung des gesamten Daches, wenn 5% Verschnitt zu berücksichtigen sind? **5 BE**

c) Um das Dach zu sichern, werden Stützbalken eingezogen. Der eine Balken verläuft vom Mittelpunkt der Dachkante $\overline{EH}$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 32 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix}$ zur Dachfläche FGS.
Zeigen Sie, dass dieser Balken senkrecht auf der Fläche FGS steht und berechnen Sie seine Länge!
Der zweite Balken verläuft vom Punkt E zur Dachkante $\overline{GS}$, dabei teilt das Ende des Balkens die Kante $\overline{GS}$ im Verhältnis $1:3$.
Ermitteln Sie auch die Länge dieses Balkens! **9 BE**

Aufgabe B2

An einer Schule in Thüringen wurden die Freizeitaktivitäten der Schüler erfasst. Man ermittelte, dass 70% der Schüler in einer Sportgemeinschaft trainieren. Von den Sportlern singen 2% auch im Schulchor, bei den Nichtsportlern beträgt der Anteil der Sänger 5%.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse!
A:= „Ein zufällig ausgewählter Schüler treibt Sport und singt im Chor.“
B:= „Ein zufällig ausgewählter Schüler hat wenigstens eine der beiden Freizeitbeschäftigungen.“
Formulieren Sie das Ereignis $\overline{A \cap B}$ in Worten! **4 BE**

b) Wie viele Schüler muss man nach ihrer Freizeitbeschäftigung befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 mindestens einen Sportler zu treffen? **3 BE**

c) 50 Schüler werden befragt.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 37 Sportler unter ihnen sind! **2 BE**

d) In einer Klasse mit 26 Schülern sind genau sieben Leichtathleten.
Zum Pausenklingeln verlassen die Schüler in rein zufälliger Reihenfolge den Raum.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C!
C:= „Unter den ersten fünf Schülern sind genau zwei Leichtathleten.“ **2 BE**

(Aufgabenteile e und f auf Seite 6)

Von den Schülern der 12. Klassen, die an der theoretischen Fahrschulprüfung teilnahmen, bestanden 65% die Prüfung sofort. Alle Schüler, die diese Prüfung nicht bestanden haben, nutzten die Möglichkeit einer Nachprüfung. Diese konnte jetzt von 45% der Teilnehmer erfolgreich abgelegt werden.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse D und E!

D:= „Ein Schüler bestand diese Prüfung spätestens nach der ersten Wiederholung."

E:= „In einer Klasse mit 20 Schülern, die alle an der Fahrschulprüfung teilgenommen haben, bestanden alle die theoretische Prüfung spätestens nach der ersten Wiederholung." **4 BE**

Für eine Schultombola wurden 375 Preise gestiftet und nummeriert. Unter die 375 Gewinnlose wurden noch genau 125 Nieten gemischt. Der Schulsprecher zweifelt am Anteil der Nieten und will 5 Lose testen. Er wäre zufrieden, wenn mindestens drei Gewinne darunter sind.

f) Nennen Sie für den durchzuführenden Signifikanztest die Testgröße, die Nullhypothese sowie deren Ablehnungsbereich! Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art! **5 BE**

Aufgabe C

a) In einer Nährlösung verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien innerhalb einer halben Stunde.
Nach wie vielen Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien vertausendfacht? **2 BE**

b) Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = e^x$ und g durch $g(x) = e^{x+2} - 1$.
Wie lässt sich der Graph von g aus dem Graphen von f gewinnen? **2 BE**

c) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ mit $t > 0$.
Bestimmen Sie den Wert für t so, dass beide Vektoren einen Winkel von $60°$ einschließen! **3 BE**

d) Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: „Mindestens eine Sechs wird gewürfelt."
B: „Es wird zweimal die gleiche Zahl gewürfelt."
C: „Die Augensumme ist eine Primzahl." **3 BE**

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \dfrac{2}{x^2+1}$, $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie, auf Asymptoten, auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! (Auf den Nachweis eventueller Wendepunkte wird verzichtet.)
Skizzieren Sie den Graphen von f und vorhandene Asymptoten im Intervall $-3 \le x \le 3$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Geben Sie den Wertebereich von f an! **14 BE**

b) Welche Punkte des Graphen von f haben von der Geraden mit der Gleichung $y = 2$ den Abstand 0,1 LE? **3 BE**

c) Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(x_p;\ f(x_p))$ mit $x_p > 0$ soll durch den Koordinatenursprung verlaufen.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P und geben Sie eine Gleichung der Tangente t an!
Zeichnen Sie die Tangente t in das vorhandene Koordinatensystem ein! **5 BE**

d) Eine Gerade s verläuft senkrecht zur Geraden mit der Gleichung y = x durch den Punkt $P(1;1)$.
Zeigen Sie, dass y = –x + 2 eine Gleichung für die Gerade s ist!
Die Gerade s begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bei Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Körper. Berechnen Sie dessen Volumen! **4 BE**

e) Für alle u ($u \in R,\ u > 0$) wird durch die Punkte $Q(u;\ f(u))$, $T(u;\ 2)$, $R(-u;\ 2)$ und $S(-u;\ f(-u))$ ein Rechteck bestimmt.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert für u gibt, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird!
(Auf den Nachweis des lokalen Maximums wird verzichtet.) **4 BE**

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (x-2) \cdot e^{\frac{3}{2}x}$, $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte!
(Auf den Nachweis eventueller Wendpunkte wird verzichtet.)
Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \leq x \leq 2{,}1$!
Geben Sie den Wertebereich von f an!
Für welches c $(c \in R)$ hat die Gerade mit der Gleichung $y = c$ mit dem Graphen von f im gesamten Definitionsbereich genau einen, keinen oder zwei gemeinsame Punkte?

$$\left[\text{Kontrollergebnis: } f'(x) = \left(\frac{3}{2}x - 2\right) \cdot e^{\frac{3}{2}x}\right]$$

15 BE

b) Die Funktion F mit $F(x) = e^{\frac{3}{2}x} \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{16}{9}\right) + 2008$ ist eine Stammfunktion von f.
Der Graph der Funktion f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

3 BE

c) Der Punkt $U(u;\ f(u))$ mit $0 < u < 2$ und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert von u gibt, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird!
(Auf den Nachweis des lokalen Maximums wird verzichtet.)

4 BE

Aufgabenteile d und e auf Seite 4

d) Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt Y. Im Punkt Y wird die Tangente t an den Graphen von f gelegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t!
Durch Y und den Punkt $M(4;\, 0)$ verläuft eine Gerade s.
Zeigen Sie, dass diese Gerade s senkrecht zur Tangente t verläuft!
Begründen Sie, dass der Punkt M Mittelpunkt eines Kreises ist, der den Graphen von f in Y berührt!
Berechnen Sie den Radius dieses Kreises! **6 BE**

e) Untersuchen Sie, ob es Tangenten an den Graphen von f gibt, die durch den Koordinatenursprung verlaufen! **2 BE**

Aufgabe B1

Gegeben sind die Punkte $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(4;\ 8;\ 3)$, $C(4;\ 10;\ 5)$, $D(-4;\ -6;\ -1)$ und $S(3;\ 2;\ 3)$.

a) Die Punkte B, C und D liegen in einer Ebene.
Zeigen Sie, dass auch der Punkt A in dieser Ebene liegt! **3 BE**

b) Die Punkte A, B, C, D bilden in dieser Reihenfolge ein Viereck.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, das nicht gleichschenklig ist! Berechnen Sie den Inhalt der Vierecksfläche! **7 BE**

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $M\left(\frac{4}{3};\ \frac{10}{3};\ \frac{5}{3}\right)$ der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD ist!
Das Viereck ABCD und der Punkt S bilden eine Pyramide.
Weisen Sie nach, dass $\overline{MS}$ die Höhe der Pyramide ist!
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide ABCDS! **6 BE**

d) Die x-y-Ebene und die Pyramidenkante $\overline{DS}$ haben einen Punkt F gemeinsam.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes F an!
In welchem Verhältnis teilt der Punkt F die Pyramidenkante $\overline{DS}$? **4 BE**

Aufgabe B2

Für ein neuartiges Würfelspiel produziert eine Spielzeugfirma tetraederförmige Spielsteine, deren vier Seitenflächen jeweils in einer der Farben rot, gelb, blau und weiß gefärbt sind. Ein spezielles Produktionsverfahren sichert, dass beim einmaligen Werfen des Tetraeders dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0{,}40$ auf die rot gefärbte Seitenfläche fällt. Mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0{,}20$ fällt das Tetraeder beim Werfen auf eine der anderen drei Seitenflächen.

a) Solch ein Tetraederstein wird zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis G!
A:= „Beim ersten Wurf liegt die blaue und beim zweiten Wurf die gelbe Seitenfläche unten."
B:= „Beim ersten Wurf fällt das Tetraeder nicht auf die gelbe Seitenfläche und beim zweiten Wurf nicht auf die rote."
C:= „Beim ersten Wurf liegen weder die blaue noch die rote Seitenfläche unten."
D:= „Das Tetraeder fällt zweimal auf dieselbe Seitenfläche, jedoch nicht auf die weiße."
E:= „Das Tetraeder fällt nicht zweimal auf dieselbe Seitenfläche."
F:= „Es tritt mindestens eines der beiden Ereignisse D oder E ein."
G:= „Es tritt sowohl Ereignis C als auch Ereignis D ein."

7 BE

b) Untersuchen Sie, wie oft man ein solches Tetraeder mindestens werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,99 mindestens bei einem Wurf nicht die rote Seitenfläche unten liegt!
Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis J, das mit der Wahrscheinlichkeit

$P(J) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}40^3 \cdot 0{,}60^7$ eintritt!

4 BE

Erfahrungsgemäß weisen 10 % der tetraederförmigen Spielsteine einen Farbfehler auf. Um eine möglichst hohe Qualität ihres Produktes zu gewährleisten, hat die Spielzeugfirma einen Industrieroboter angeschafft, der 99 % aller fehlerhaften Tetraeder erkennt und aussortiert. Weiterhin ist bekannt, dass die Entscheidung des Roboters in 98 % aller Fälle korrekt ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Tetraeder, das keinen Farbfehler besitzt, vom Roboter irrtümlich aussortiert wird! **3 BE**

Neben den oben beschriebenen Tetraedern produziert die Firma auch Tetraeder, bei denen die rote Seitenfläche nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,10 nach dem Werfen unten liegt. Diese beiden Tetraederarten sind ansonsten äußerlich nicht zu unterscheiden. Um einen zufällig aufgefundenen Spielstein einem der beiden Tetraederarten richtig zuordnen zu können, führt der Versandleiter der Firma einen Alternativtest mit der Nullhypothese P(„Tetraeder fällt auf die rote Seitenfläche“) = 0,40 und der Alternativhypothese P(„Tetraeder fällt auf die rote Seitenfläche“) = 0,10 durch. Er wirft den Stein zwanzigmal.

d) Der Versandleiter will die Nullhypothese nur dann ablehnen, wenn das Tetraeder höchstens dreimal auf die rote Seitenfläche fällt. Bei diesem Testverfahren sind zwei Arten von Fehlentscheidungen möglich.
Beschreiben Sie diese!
Untersuchen Sie, welche der möglichen Fehlentscheidungen unter den gegebenen Bedingungen die größere Wahrscheinlichkeit aufweist! **6 BE**

Aufgabe C

a) Von einer geometrischen Zahlenfolge sind die Glieder $a_2 = 24$ und $a_5 = 81$ gegeben.
Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift an!
Ab welchem n $(n \in N)$ sind die Glieder größer als 1000? **3 BE**

b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion zu $y = f(x) = (2x-4)^3$, deren Graph durch den Punkt $(0;\ 2008)$ verläuft! **2 BE**

c) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2k \\ k-7 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $k \in R$.
Gibt es Werte für k, so dass $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$ gilt?
Geben Sie gegebenenfalls diese Werte an!
Gibt es Werte für k, so dass $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$ verläuft?
Geben Sie gegebenenfalls auch diese Werte an! **2 BE**

d) André und Boris spielen ein Tennismatch. Dabei gewinnt derjenige, der zuerst zwei Sätze gewonnen hat. Erfahrungsgemäß gewinnt Boris zwei von drei Sätzen und André einen von drei Sätzen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass André das Tennismatch trotzdem gewinnt!
Zeichnen Sie dazu zunächst ein Baumdiagramm! **3 BE**

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(2x+1) - x$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf den Schnittpunkt mit der y-Achse, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-0{,}4 \le x \le 8$!
Begründen Sie, dass außer $x = 0$ eine weitere Nullstelle existieren muss!
Geben Sie das Verhalten des Graphen von f bei Annäherung an die Gerade mit der Gleichung $x = -\frac{1}{2}$ an!

10 BE

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit
$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(2x+1) - \frac{1}{2}x^2 - x$
eine Stammfunktion von f ist!
Der Graph der Funktion f, die x-Achse sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen für $x \le 1$ eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

4 BE

c) An den Graphen von f wird im Koordinatenursprung die Tangente t gelegt.
Die Gerade g steht senkrecht auf der Tangente t und verläuft durch den Punkt $P(1;\, f(1))$.
Die Gerade g begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt!

5 BE

d) Gegeben ist die Gerade h mit der Gleichung $h(x) = 2x + \ln 3$.
Zeichnen Sie diese Gerade h in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil a) ein!
Berechnen Sie den Abstand der Geraden h vom Koordinatenursprung!
Weisen Sie nach, dass es eine Stelle u gibt, so dass die Differenz der Funktionswerte $d(u) = h(u) - f(u)$ minimal wird!
Berechnen Sie die minimale Differenz!

8 BE

e) Für jede reelle Zahl a ist eine Gerade durch die Gleichung $y = a$ gegeben.
Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Graphen von f in Abhängigkeit von a an!

3 BE

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 2 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{x^2}, \; x \in R;\; x \neq 0.$$

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, auf Asymptoten, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! (Auf den Nachweis möglicher Wendepunkte darf verzichtet werden.)
Skizzieren Sie den Graphen von f und die waagerechte Asymptote im Intervall $-6 \leq x \leq 6$!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f an!

13 BE

b) Eine Gerade s verläuft parallel zur Wendetangente durch den Koordinatenursprung.
Ermitteln Sie eine Gleichung von s!
Unter welchem Winkel schneidet die Gerade s die x-Achse?

3 BE

c) Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F mit

$$F(x) = \frac{2x^2 - 6}{x} + 8 \cdot \ln|x|$$ eine Stammfunktion von f ist!

Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

4 BE

d) Der Punkt $U(u; f(u))$ mit $u \in R$, $u > 0$ und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Bestimmen Sie den Wert von u, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks minimal wird!
Ermitteln Sie für diesen Wert von u den Abstand des Punktes U vom Koordinatenursprung!

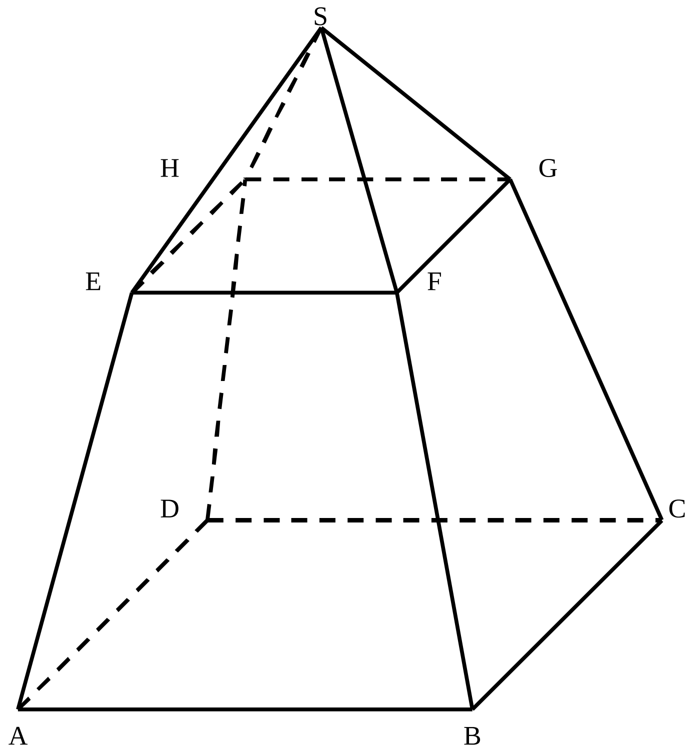
6 BE

e) Für jede reelle Zahl t $(t \neq 0)$ ist eine Funktion g_t gegeben durch
$g_t(x) = f(x) + t$.
Welche Bedeutung hat der Parameter t für den Verlauf des Graphen von g_t?
Geben Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes der Funktion g_t an!
Für welche Werte von t hat die Funktion g_t genau zwei Nullstellen?
Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

$\boxed{\text{4 BE}}$

Aufgabe B1

Eine Gartenlaterne hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide.
Die Seitenlänge der Grundfläche des Pyramidenstumpfes beträgt 6 dm, die Seitenlänge der Deckfläche 4 dm.
Die Höhe des Pyramidenstumpfes beträgt 8 dm.
Die gesamte Laterne hat eine Höhe von 9,5 dm.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Der Punkt D liegt im Koordinatenursprung. Die Punkte $A(6;\,0;\,0)$ und $E(5;\,1;\,8)$ sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes.
Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.
Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte!
Stellen Sie die Laterne in einem kartesischen Koordinatensystem dar!

4 BE

b) Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfes bestehen aus Glas.
Berechnen Sie die Größe der gesamten Glasfläche in Quadratmetern!

4 BE

c) Die Verlängerungen zweier gegenüberliegender Seitenkanten des Pyramidenstumpfes schneiden sich in einem Punkt V.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes V!
Welchen Winkel schließen diese beiden Verlängerungen ein?

4 BE

d) Im Mittelpunkt der Grundfläche des Pyramidenstumpfes soll eine Kerze stehen.
In welchem Punkt befindet sich die Spitze der Kerzenflamme, wenn sie von den Eckpunkten der Grundfläche genauso weit entfernt ist wie von der Pyramidenspitze?

4 BE

e) Um eine zusätzliche Verstrebung anzubringen, wird vom Punkt D auf die Seitenkante $\overline{AE}$ das Lot gefällt.
In welchem Verhältnis teilt der Lotfußpunkt L die Strecke $\overline{AE}$?
Berechnen Sie die Länge der Strebe $\overline{DL}$!

4 BE

Aufgabe B2

Familie Neuhaus hat sich ein Regalsystem zur Selbstmontage gekauft. Beim ersten Anblick der vielen Schrauben erkannte sie keinen Unterschied zwischen diesen und schüttete daher alle Schrauben in einen Karton. Erst beim genaueren Lesen der Montageanleitung bemerkte sie, dass es zwar alles Schrauben gleichen Durchmessers sind, aber 50 „a-Schrauben“ eine Länge von $a = 24$ mm und 110 „b-Schrauben“ eine Länge von $b = 26$ mm sowie die restlichen 20 „c-Schrauben“ eine Länge von $c = 28$ mm besitzen.

a) Den 180 Schrauben werden rein zufällig und mit einem Griff genau fünf entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B!
A := „Unter ihnen befinden sich genau drei b-Schrauben.“
B := „Unter ihnen befindet sich höchstens eine c-Schraube.“

3 BE

b) Jede Schraube ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}03$ defekt.
Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl defekter Schrauben unter 110 b-Schrauben!
Es werden 106 defektfreie b-Schrauben benötigt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 110 gelieferte b-Schrauben aus?

3 BE

c) Familie Neuhaus hatte einen Preisnachlass vereinbart, weil nach Auskunft des Verkäufers 5 % der Einlegeböden produktionsbedingt Mängel in der Beschichtung aufweisen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse C und D!
C := „Die ersten fünf rein zufällig entnommenen Einlegeböden sind frei von diesem Mangel.“
D := „Unter 28 rein zufällig entnommenen Einlegeböden befinden sich genau vier mit einem derartigen Mangel.“
Beschreiben Sie in diesem Sachzusammenhang ein Ereignis E, das mit der folgenden Wahrscheinlichkeit eintritt:

$$P(E) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{28}{k} \cdot 0{,}05^{k} \cdot 0{,}95^{28-k}$$

5 BE

d) Nachdem der Regalhersteller seine Fertigungslinie modernisiert hat, testet er, ob der Beschichtungsmangelanteil noch 5 % beträgt oder auf 1 % gesunken ist. Er will die Hypothese $p = 0{,}01$ genau dann verwerfen, wenn sich in seiner Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 200$ mindestens sechs Einlegeböden mit einem derartigen Beschichtungsmangel befinden.
Berechnen Sie für diesen Alternativtest die Wahrscheinlichkeiten sowohl für einen Fehler 1. Art als auch für einen Fehler 2. Art!

5 BE

e) Untersuchen Sie, wie viele Einlegeböden man der laufenden Produktion an der neuen Fertigungslinie mit einem Beschichtungsmangelanteil von 1 % entnehmen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,95 mindestens einen derartigen Mangel-Einlegeboden zu erhalten!

4 BE

Aufgabe C

a) Lösen Sie die Gleichung!

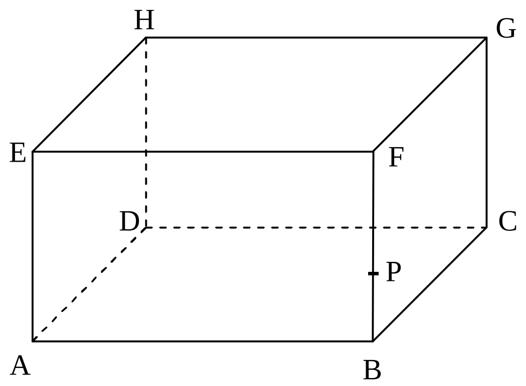
$e^{x^2-1}=1$

2 BE

b) Geben Sie eine Bildungsvorschrift einer arithmetischen Folge (a_n) an, für die $a_{12}=2009$ gilt!

2 BE

c) Gegeben ist ein Quader ABCDEFGH. Der Punkt P teilt die Strecke $\overline{BF}$ im Verhältnis 2:3.



(Skizze nicht maßstäblich)

Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{PH}$ mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AE}$ dar!

2 BE

d) Die Eckpunkte eines Quadrates liegen auf einem Kreis mit dem Radius r = 1 LE.
Geben Sie den Flächeninhalt dieses Quadrates an!

2 BE

e) Aus einem Bücherregal werden drei Bücher entnommen und willkürlich an die drei freien Plätze zurückgestellt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht jedes Buch wieder an seinem Platz?
Begründen Sie, dass es nicht möglich ist, dass genau zwei dieser drei Bücher an ihrem Platz stehen!

2 BE

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (2x+1)\cdot e^{-x}$ mit $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Begründen Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph der Funktion f nur für $x < -\frac{1}{2}$ negative Funktionswerte besitzt!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1 \le x \le 5$!
Geben Sie den Wertebereich von f an!
$\left[\text{Kontrollergebnis: } f'(x) = (-2x+1)\cdot e^{-x}\right]$ **11 BE**

b) Im Punkt $R\left(\frac{3}{2};\, 4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ wird die Tangente an den Graphen von f gelegt.
Zeigen Sie, dass diese Tangente durch die Gleichung
$y = t(x) = -2e^{-\frac{3}{2}}x + 7e^{-\frac{3}{2}}$ beschrieben werden kann!
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der y-Achse!
Die Tangente t und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck. Bei Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Körper.
Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers! **6 BE**

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit
$F(x) = (-2x-3)\cdot e^{-x} + 2010$ eine Stammfunktion von f ist!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $-1 \le x \le 1$!
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $x = c$ $\left(c > -\frac{1}{2};\, c \in R\right)$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie den Wert für c so, dass diese Fläche den Inhalt $A = \left(2\sqrt{e} - 3\right)\text{FE}$ hat! **6 BE**

d) Der Punkt $U(u; f(u))$ mit $u > -\frac{1}{2}$ $(u \in R)$ bildet mit den Punkten $Q\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ und $V(u; 0)$ ein Dreieck.
Bestimmen Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird!
(Auf den Nachweis des Maximums kann verzichtet werden.)
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt! **4 BE**

e) Für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = (2x + a) \cdot e^{-x}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen von f_a!
Durch die beiden Achsenschnittpunkte verläuft eine Gerade h.
Ermitteln Sie eine Gleichung für h! **3 BE**

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ mit $x \in R$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f außer dem Koordinatenursprung noch zwei weitere Schnittpunkte mit der x-Achse hat!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie, auf das Verhalten im Unendlichen, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-4{,}5 \leq x \leq 4{,}5$!
Geben Sie alle Werte für c an, für die gilt:
„Die Gerade h mit der Gleichung $y = c$ $(c \in R)$ und der Graph der Funktion haben genau zwei gemeinsame Punkte.“! **13 BE**

b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f, welche die y-Achse im Punkt $P(0;\, 3)$ schneidet!
Durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht der Graph einer weiteren Funktion g.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a)!
Geben Sie eine Gleichung für g an!
Die Graphen der Funktionen f und g schließen für $x > 0$ ein Flächenstück vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks! **6 BE**

c) Im Punkt $R\left(\sqrt{3};\, f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ des Graphen von f wird eine Tangente t_1 gelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente t_1!
Eine weitere Tangente t_2 an den Graphen von f hat die Gleichung $y = t_2(x) = 2\sqrt{3} \cdot x + \frac{9}{4}$.
Skizzieren Sie beide Tangenten in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil a)!
Geben Sie ohne weitere Rechnung die Koordinaten des zugehörigen Berührungspunktes der Tangente t_2 mit dem Graphen von f an!
Beide Tangenten schneiden einander im Punkt S.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an und bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Tangenten t_1 und t_2!

6 BE

d) Für jede reelle Zahl a mit $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch
$y = f_a(x) = a \cdot x^4 - \frac{3}{2}x^2$ mit $x \in R$.
Nennen Sie eine Eigenschaft des Graphen von f_a, die sich bei Veränderung des Parameters a nicht ändert!
Begründen Sie Ihre Aussage!
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a!
Für welchen Wert des Parameters a hat der Graph der zugehörigen Funktion f_a im Punkt $Q(1;\, f_a(1))$ den Anstieg 3?

5 BE

Aufgabe B1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-2;\,9;\,3)$, $B(7;\,3;\,0)$, $C(1;\,7;\,2)$, $P(0;\,3;\,0)$ und $G(0;\,1;\,4)$ gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob C auf der Geraden liegt, die durch A und B verläuft!
Wenn ja, entscheiden Sie, ob C sogar auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt und geben Sie gegebenenfalls das Teilverhältnis an!
Wenn nein, berechnen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden durch A und B!
D ist derjenige Punkt der y-Achse, der von A den gleichen Abstand hat wie von B.
Bestimmen Sie die Koordinaten von D! **6 BE**

b) Das Dreieck ABP ist die Grundfläche eines geraden Prismas, zu dessen Deckfläche der Punkt G gehört.
Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{PG}$ senkrecht auf der Grundflächenebene steht!
Stellen Sie das Prisma in einem kartesischen Koordinatensystem dar und bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte! Dabei sollen der Punkt E über A und der Punkt F über B liegen.
Berechnen Sie das Volumen des Prismas! **8 BE**

c) Vom Punkt G aus wird in dem Prisma (aus Aufgabenteil b) eine Bohrung in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ angebracht.
(Der Durchmesser der Bohrung wird vernachlässigt.)
In welchem Punkt S durchstößt die Bohrung die Ebene, zu der die Grundfläche ABP gehört?
Begründen Sie, dass der Punkt S sogar in der Grundfläche ABP des Prismas liegt!
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Bohrung mit der Kante $\overline{GF}$ einschließt! **6 BE**

Aufgabe B2

Im Jahr der Fußballweltmeisterschaft haben sich auch die Mannschaften „FC Rundes Leder”, „Einheit Holzheim” und „Wade 07” für ein Turnier qualifiziert.

a) Am Turnier nehmen zwölf Mannschaften teil. Es werden für die erste Runde vier Gruppen zu je drei Mannschaften ausgelost. Zunächst werden die drei Mannschaften der ersten Gruppe gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse!

A:= „Die drei genannten Mannschaften sind in der 1. Gruppe.“

B:= „Nur „FC Rundes Leder“ ist in der 1. Gruppe.“

C:= „Höchstens zwei von den drei genannten Mannschaften sind in der 1. Gruppe.” **3 BE**

b) Der Torwart von „Wade 07” hält einen Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15. Beim Training wird in einer Übungsphase 20-mal auf das Tor geschossen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

D:= „Der dritte Ball ist der erste, den er hält.“

E:= „Er hält genau drei Bälle.“

F:= „Keinen der 20 Schüsse kann er halten.“ **4 BE**

c) Der Fanclub von „Einheit Holzheim” hat 25 Mitglieder und bekommt fünf Freikarten für das Endspiel des Turniers. Um diese zu verteilen, werden Lose gezogen. In der Lostrommel befinden sich neben den fünf Gewinnlosen zwanzig Nieten. Die Mitglieder ziehen der Reihe nach jeder genau ein Los. Prüfen Sie, ob der Zweite, der zieht, die gleiche Chance auf eine Freikarte hat wie der Erste! **2 BE**

Aufgabenteile d) – f) auf folgender Seite

Herr Lecker betreibt regelmäßig bei solchen Veranstaltungen einen Verpflegungsstand.

d) Er bereitet pro Tag 350 belegte Brötchen vor und stellt fest, dass er an 5 % der Tage 100 Brötchen, an 20 % der Tage 50 Brötchen, an 40 % der Tage 30 Brötchen und an 10 % der Tage 10 Brötchen übrig behält. An allen anderen Tagen verkauft er alle Brötchen. An einem belegten Brötchen verdient er 0,50 €, bei einem nicht verkauften macht er 0,80 € Verlust.
Berechnen Sie seinen durchschnittlichen Gewinn pro Tag! **4 BE**

e) Er verkauft auch echte Thüringer Bratwürste. Mit seinem Lieferanten hat er folgende Vereinbahrung getroffen:
Es werden 50 Bratwürste auf ihr Mindestgewicht geprüft. Sind höchstens drei Bratwürste untergewichtig, nimmt er die Lieferung an.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Ablehnung, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine untergewichtige Bratwurst 0,05 beträgt? **3 BE**

f) Nach einiger Zeit hat er den Eindruck, dass sich der Anteil der Bratwürste mit zu geringem Gewicht vergrößert hat. Er wählt deshalb 50 Bratwürste als Zufallsprobe aus.
Wie muss seine Entscheidungsregel lauten, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass er sich mit seiner Annahme irrt, höchstens 0,01 beträgt? **4 BE**

Aufgabe C

a) Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$, $n \geq 1$.
Ab welchem n unterscheiden sich die Folgenglieder vom Grenzwert der Folge um weniger als $\frac{1}{100}$?

2 BE

b) Eine gebrochenrationale Funktion der Form $f(x) = \frac{x^2 - ax}{x+b}$
hat eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -3$ und die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.
Bestimmen Sie die Werte für a und b!

2 BE

c) Gegeben sind die Vektoren
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_k = \begin{pmatrix} 0{,}5k + 9 \\ k + 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $k \in R$.
Für welche Werte von k sind die Vektoren
(1) parallel bzw.
(2) gleich lang?

3 BE

d) Zwei ideale Würfel unterschiedlicher Farbe werden gleichzeitig geworfen und die Summe der Augenzahlen gebildet.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse!
A:= „Die Augensumme ist kleiner als 6."
B:= „Die Augensumme ist eine Primzahl."
Beschreiben Sie zu diesem Zufallsexperiment ein Ereignis C, dessen Wahrscheinlichkeit $P(C) = \frac{1}{6}$ beträgt!

3 BE