Aufgabensammlung

Prüfungsaufgaben Abitur Thüringen Leistungskurs Mathematik 2001-2010

Aufgabe 1.1

Für jede reelle Zahl t mit t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = \frac{10 - t^2 \cdot x^2}{x^3} \quad (x \in R,\ x \neq 0).$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrem- und mögliche Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Punkte an! (Auf den Nachweis der Wendepunkte wird verzichtet.)
Geben Sie alle Asymptoten des Graphen von f_t an! **13 BE**

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_{\sqrt{10}}$ im Intervall $-8 \leq x \leq 8$!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f_{\sqrt{10}}$, der x-Achse und von der Geraden mit der Gleichung $x = e^2$ vollständig begrenzt wird! **4 BE**

c) Gegeben sind die Punkte $W\left(-\sqrt{6}; f_{\sqrt{10}}\left(-\sqrt{6}\right)\right)$ und $N(-1;0)$ sowie die Punkteschar R(0; r) mit $r \in R$.
Für welche Werte von r ist der Winkel $\sphericalangle$ WRN ein rechter Winkel? **3 BE**

d) Untersuchen Sie für jeden der nachfolgenden Fälle, ob es Punkte mit den jeweils geforderten Eigenschaften auf dem Graphen von f_t gibt und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!

Fall 1: Für t = 3 ist der Punkt $P_1(x_1; f_3(x_1))$ mit $0 < x_1 < \frac{1}{3}\sqrt{10}$ von der x-Achse und von der y-Achse gleich weit entfernt.

Fall 2: Für den Punkt $P_3(2;\ f_t(2))$ sind sowohl t als auch $f_t(2)$ ganze Zahlen. **5 BE**

e) Weisen Sie nach, dass für die n-te Ableitung der Funktion f_t gilt:

$$f_t^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+3}} \cdot \left(5 \cdot (n+2)! - t^2 \cdot x^2 \cdot n!\right)$$

$(n \in N;\ n \geq 1)$!

5 BE

Aufgabe 1.2

Für jede reelle Zahl k (k > 0) ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$y = f_k(x) = \frac{1}{k}x - x\ln x \ .$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_k an!
Untersuchen Sie den Graphen von f_k auf Schnittpunkte mit der Abszissenachse, Extrem- und Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! **7 BE**

b) Die lokalen Extrempunkte der Graphen aller Funktionen f_k liegen auf einer Kurve. Geben Sie deren Gleichung an!
Skizzieren Sie die Graphen von $f_{2/3}$ und $f_{1/2}$ für $0 < x \leq 8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f_k an! **4 BE**

c) Geben Sie alle reellen Zahlen c an, für die die Gleichung $c = f_k(x)$ genau zwei Lösungen x_1 und x_2 hat! **2 BE**

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$F_k(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2} - \ln x\right),\ x > 0,$$

eine Stammfunktion der Funktion f_k ist!
Die Graphen von $f_{2/3}$, $f_{1/2}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = 1 begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche! **4 BE**

e) Für jedes k wird im Schnittpunkt des Graphen von f_k mit der x-Achse die Tangente angelegt.
Weisen Sie nach, dass alle diese Tangenten zueinander parallel sind und geben Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangenten mit der x-Achse an! **3 BE**

Aufgabenteile f und g auf Seite 4

f) An den Graphen der Funktion f_k, $0 < k < 1$, seien im Punkt $P(1; f_k(1))$ Tangente und Normale gelegt.
Geben Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an!
(Hinweis: Die Normale ist die Gerade, die auf der Tangente im Punkt P senkrecht steht.)
Zeichnen Sie für $k = \frac{2}{3}$ Tangente und Normale in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil b ein! **5 BE**

g) Tangente und Normale im Punkt $P(1; f_k(1))$ an den Graphen von f_k, $0 < k < 1$, bilden mit der y-Achse ein Dreieck.
Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von k an!
Für welches k wird dieser Flächeninhalt minimal? **5 BE**

Aufgabe 2.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind für alle r ($r \in R$, $r \neq 0$) die Punkte $A_r(2r; 2r; -4r)$, $B_r(r; r; -2r)$, $C_r(-r; r; 6r)$ und $P(3; 12; -3)$ gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob es ein r gibt, sodass die Punkte A_r, B_r und C_r auf einer Geraden liegen! **1 BE**

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte A_r, B_r und C_r unabhängig von r genau eine Ebene ε aufspannen!
Geben Sie eine parameterfreie Gleichung dieser Ebene ε an! **2 BE**

c) Gegeben ist die Ebene ε durch $4x - 2y + z = 0$.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene ε! **2 BE**

d) Die Punkte A_r, B_r, C_r und P bilden eine Pyramide $A_r B_r C_r P$.
Für welche Werte von r beträgt das Volumen der Pyramide 10 VE? **4 BE**

e) Geben Sie eine Gleichung der Ebene η an, die parallel zur Ebene ε verläuft und die den Punkt P enthält.
Zeigen Sie: Die Ebene ξ mit der Gleichung $4x - 2y + z + 7{,}5 = 0$ hat von ε denselben Abstand wie von η! **3 BE**

f) Die Pyramide $A_r B_r C_r P$ wird von der Ebene ξ geschnitten, sodass ein Pyramidenstumpf entsteht.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina von der Pyramide $A_r B_r C_r P$ und dem Pyramidenstumpf! **3 BE**

Aufgabe 2.2

Gegeben sind die Punkte P(2; 2; 3) und Q(0; 4; 2), die Geraden g_a und h durch

$$g_a:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (a, r, s \in R)$$

sowie die Ebene ε mit der Gleichung $2x - y + z - 4 = 0$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Wert a gibt, für den die Gerade g_a auf der Ebene ε senkrecht steht!
Für welchen Wert a verläuft die Gerade g_a parallel zur Ebene ε? **2 BE**

b) Zeigen Sie, dass durch die Gerade h und den Punkt P genau eine Ebene η bestimmt wird!
Geben Sie für diese Ebene η eine Parametergleichung und eine Gleichung in parameterfreier Form an! **3 BE**

c) Die Ebenen ε und η schneiden einander in einer Geraden. Geben Sie eine Gleichung für diese Schnittgerade an und bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen ε und η! **3 BE**

d) Eine Gerade k verläuft sowohl parallel zur Ebene ε als auch zur Ebene η und enthält den Punkt Q.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden k! **1 BE**

e) Zwei Ebenen verlaufen im Abstand $d = \sqrt{6}$ LE parallel zur Ebene ε.
Geben Sie je eine Gleichung für diese Ebenen an! **3 BE**

f) Es gibt genau ein a, sodass sich die Geraden g_a und h in einem Punkt S schneiden.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Winkelhalbierenden des Schnittwinkels dieser beiden Geraden! **3 BE**

Aufgabe 2.3

a) Auf einem Tisch liegen gut gemischt 10 Schachfiguren. Schachfiguren sind entweder schwarz oder weiß. Zufällig werden mit einem Griff 2 Figuren entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau eine weiße und genau eine schwarze Figur sind, beträgt $\frac{16}{45}$.
Wie viele weiße Figuren lagen auf dem Tisch? **2 BE**

b) Die Zusammensetzung der 10 Schachfiguren wird auf 3 weiße und 7 schwarze verändert. Zufällig werden 3 Figuren entnommen, wobei die entnommene Figur jedes mal wieder zurückgelegt wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den entnommenen mindestens zwei weiße Figuren sind? **2 BE**

Bei der Herstellung von Schachfiguren tritt bei 2% ein Formfehler beim Drechseln der Figuren auf. Unabhängig davon sind nicht alle Figuren fehlerfrei lackiert. Nur 90% der hergestellten Schachfiguren sind fehlerfrei, das heißt, sie haben weder einen Form- noch einen Lackfehler.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Figur genau einen der beiden beschriebenen Fehler? **3 BE**

d) Zwei Firmen A und B arbeiten bei der Herstellung von Schachfiguren zusammen. 10% der Figuren der Firma A sind fehlerhaft, von denen der Firma B sind 8% fehlerhaft.
Ein Viertel aller fehlerhaften Figuren sind von der Firma A.
Welchen Anteil Schachfiguren liefert diese Firma? **2 BE**

e) Genau eine der beiden Firmen A oder B liefert 500 Schachfiguren. Leider fehlen die Lieferpapiere, sodass der Hersteller nicht mehr feststellbar ist. Deshalb wird folgende Entscheidung getroffen: Sind unter diesen Schachfiguren mindestens 50 fehlerhaft, dann wird die Lieferung der Firma A zugeordnet, sonst der Firma B.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Lieferung irrtümlicherweise der Firma A zugeordnet? **3 BE**

Aufgabenteil f auf Seite 8

f) An einem Schachwettkampf nehmen 3 Spieler teil. Dabei soll Spieler A abwechselnd gegen Spieler B und Spieler C antreten. Spieler A hat den Wettkampf gewonnen, wenn er von den 3 Spielen zwei hintereinander gewonnen hat. Mehr als 3 Spiele finden nicht statt. Spieler B ist stärker als Spieler C.
Untersuchen Sie, ob A zuerst gegen B oder gegen C spielen sollte, um zu gewinnen! 3 BE

Aufgabe A1

Für jede reelle Zahl t mit $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$y = f_t(x) = (tx - 1) \cdot e^{tx+1}$ $\quad (x \in R)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrem- und Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! Was fällt Ihnen an Ihren Ergebnissen zu den Extrem- und Wendepunkten auf! **12 BE**

b) Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_{-1} in ein und dasselbe Koordinatensystem! Stellen Sie ausgehend von den Graphen von f_1 und f_{-1} eine Vermutung über den Zusammenhang zwischen den Graphen von f_t und f_{-t} auf und beweisen Sie diese Vermutung! **5 BE**

c) Für $t > 0$ sind die Punkte O(0; 0), $N\left(\frac{1}{t}; 0\right)$, $E(0; -e)$ und $W\left(-\frac{1}{t}; -2\right)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Untersuchen Sie für die Diagonale $\overline{OE}$, in welchem Verhältnis diese den Flächeninhalt des Vierecks OWEN in zwei Dreiecksflächen teilt! **2 BE**

d) Stellen Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung $f_t^{(n)}$ von f_t auf! Welche Bedeutung könnte die formal nach dieser Regel gebildete Funktion $f_t^{(-1)}$ haben? Überprüfen Sie, ob Ihre Vermutung zu $f_t^{(-1)}$ zutrifft! **4 BE**

e) Der Graph einer zur y-Achse symmetrischen quadratischen Funktion p verläuft durch E und N aus Teilaufgabe c. Für welchen Wert u mit $0 \leq u \leq \frac{1}{t}$ $(t > 0)$ ist die Differenz der Funktionswerte p(u) und $f_t(u)$ am größten? **7 BE**

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl a $(a > 0)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch
$y = f_a(x) = a\sqrt{x} - \ln x$, $(x \in R,\ x > 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf lokale Extrem- und Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x)$!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 in ein und dasselbe Koordinatensystem jeweils im Intervall $0 < x \leq 20$!
Prüfen Sie, ob die lokalen Extrempunkte aller Graphen von f_a auf einer Kurve k mit $y = k(x) = \ln \frac{e^2}{x}$ liegen!

12 BE

b) Entscheiden Sie, ob einer der Minimumpunkte des Graphen von f_a auf einer Koordinatenachse liegen kann. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

3 BE

c) Finden Sie zwei positive reelle Zahlen r und s mit $r \neq s$ so, dass das von den Graphen der Funktionen f_1 und f_2 sowie den Geraden mit den Gleichungen x = r und x = s begrenzte Flächenstück einen ganzzahligen Inhalt besitzt!
Geben Sie diesen Flächeninhalt an!

4 BE

d) Es sei x_W die Wendestelle der Funktion f_a.
Zeigen Sie, dass die Wendetangente die y-Achse im Punkt $T(0;\ f_a(x_W) - 1)$ schneidet!

4 BE

e) Für $0 < p < 9$ ist durch die Punkte P(p; f_1(p)), S(p; f_2 (p)), Q(9; f_1 (p)) und R(9; f_2 (p)) ein Rechteck definiert.
Ermitteln Sie p so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks PQRS extremal wird!
Um welche Art des Extremums handelt es sich?
Bestimmen Sie den extremalen Flächeninhalt!

7 BE

Aufgabe B1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Ebene $\varepsilon: -2y + z + 1 = 0$ und für jede reelle Zahl t eine Gerade g_t mit der Gleichung $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene ε im Koordinatensystem!
Bestimmen Sie den Abstand der Ebene ε zum Koordinatenursprung!
Geben Sie eine Gleichung der Ebene η an, die durch Spiegelung von ε am Koordinatenursprung entsteht! **3 BE**

b) Die Ebene ε schneidet die x-z-Ebene.
Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels und eine Gleichung der Schnittgeraden! **3 BE**

c) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene ε und der Geraden g_t in Abhängigkeit von t! **3 BE**

d) Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 zueinander windschief sind!
Berechnen Sie den Abstand der Geraden g_1 und g_2 zueinander!
Für welche Werte von t hat g_t zu g_1 einen Abstand von $\sqrt{5}$ LE? **8 BE**

e) Begründen Sie, dass es keine Gerade g_t gibt, die mit der z-Achse einen gemeinsamen Punkt besitzt!
Überprüfen Sie, ob es eine Gerade g_t gibt, die mindestens eine Koordinatenachse schneidet!
Ermitteln Sie gegebenenfalls einen entsprechenden Wert t und die Koordinaten des Schnittpunkts! **3 BE**

Aufgabe B2

Ein Gymnasium plant zu seinem 10-jährigen Jubiläum eine Festwoche. Bei der Planung ergeben sich folgende Fragestellungen.

a) Im Vorbereitungskomitee sind 7 Lehrer und 13 Schüler, darunter der Schülersprecher.
Durch Los werden 5 Vertreter ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A:= „Es werden nur Schüler ausgewählt."
B:= „Es werden genau zwei Lehrer ausgewählt."
C:= „Es wird mindestens ein Schüler ausgewählt."
D:= „Es werden mehr Schüler als Lehrer ausgewählt." **4 BE**

b) Zur Finanzierung wurde eine große Anzahl von Werbebriefen verschickt, die mit der Wahrscheinlichkeit p beantwortet werden.
Wie groß ist p mindestens, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass spätestens der Zehnte antwortet, mehr als 80% beträgt? **2 BE**

c) Zum Abschlussball sollen ehemalige Schüler eingeladen werden.
Zur Planung geht man von der Annahme aus, dass mindestens 40% der ehemaligen Schüler teilnehmen.
Diese Annahme soll durch eine stichprobenartige Befragung geprüft werden.
Erstellen Sie einen entsprechenden Prüfplan!
Welche Fehlentscheidungen sind möglich? **5 BE**

d) Für die Festveranstaltung stehen 450 Plätze zur Verfügung.
Erfahrungsgemäß nimmt jeder einzelne der Eingeladenen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% an der Veranstaltung teil.
Wie viele Einladungen dürfen höchstens verteilt werden, wenn die Plätze mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit ausreichen sollen? **5 BE**

e) Anlässlich der Festwoche findet ein Volleyballturnier statt, bei dem u.a. eine Lehrermannschaft gegen eine Schülermannschaft spielt. Sieger ist, wer zuerst 3 Sätze gewonnen hat.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 72% werden mindestens 4 Sätze gespielt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt unter dieser Voraussetzung die Lehrermannschaft einen einzelnen Satz? **4 BE**

Aufgabe C

a) Bestimmen Sie folgendes Integral: $\int \frac{1}{2} x \cdot \sin x \ dx$!

2 BE

b) Gegeben ist eine Zahlenfolge (a_n) durch ihre ersten zwei Folgenglieder $a_1 = 2$ und $a_2 = b$ $(b \in R)$.
Wie lautet das Folgenglied a_4, wenn (a_n) eine arithmetische Folge ist?

2 BE

c) Eine der Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - 4}$ $(a \in R)$ hat genau eine Polstelle $x = -2$.
Ermitteln Sie für diesen Fall den Parameter a !

2 BE

d) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ r \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$ mit $r, s \in R$ sollen den gleichen Betrag haben und zueinander orthogonal sein.
Bestimmen Sie für diesen Fall r und s!

2 BE

e) Ein Schütze trifft beim ersten Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8. War der erste Versuch ein Treffer, so trifft der Schütze beim zweiten Versuch mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Geht der erste Schuss daneben, dann verringert sich die Treffsicherheit beim zweiten Versuch um 10% des ursprünglichen Wertes.
Der Schütze schießt zweimal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses: „Es wurde genau ein Treffer erzielt.“

2 BE

Aufgabe A1

Für jede reelle Zahl t mit $0 < t < 5$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $y = f_t(x) = (5 - t) \cdot \sqrt{t - x}$ $(x \in R;\ x \leq t)$.

a) Untersuchen Sie für $t = 4$ den Graphen der Funktion f_4 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Welche Information über das Verhalten der Funktion f_4 gewinnen Sie aus der Ableitungsfunktion f_4' ?
Skizzieren Sie den Graphen von f_4 in einem geeigneten Intervall und berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_4 , die vom Graphen und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird!

7 BE

b) Die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = \frac{1}{3}x$ teilt das Flächenstück A_4 aus Teilaufgabe a). Überprüfen Sie, ob die Gerade g die Fläche A_4 halbiert!
Die Geradenschar g_m mit der Gleichung $g_m(x) = m\,x$ $(m \in R;\ m > 0)$ hat für jedes m mit dem Graphen von f_4 genau einen Punkt T gemeinsam. Ermitteln Sie den Wert des Anstiegs m für den Fall, dass die Tangente an den Graphen von f_4 im Punkt T senkrecht auf der Geraden g_m steht!

8 BE

c) Es sei S der Schnittpunkt des Graphen der Funktion f_4 mit der x-Achse und O(0; 0) der Koordinatenursprung.
Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt $P_o(x_o; f_4(x_o))$ des Graphen von f_4 gibt, so dass gilt: $\overline{OP_o} \perp \overline{SP_o}$!

3 BE

d) Die Achsenabschnitte, die der Graph von f_4 mit den beiden Koordinatenachsen bildet, stehen im Verhältnis 1 : 2.
Untersuchen Sie, ob es Parameterwerte t gibt, so dass die Schnittpunkte des Graphen von f_t mit den Koordinatenachsen vom Koordinatenursprung O(0; 0) gleich weit entfernt sind!

Wir betrachten nun die Funktion $p(t)$ mit $p(t) = f_t(2)$.
Für welchen Wert des Parameters t $(2 < t < 5)$ ist $p(t)$ extremal?
Geben Sie diesen extremalen Funktionswert der Funktion p(t) an!

$$\left(\text{Kontrollergebnis}: p'(t) = \frac{9 - 3t}{2\sqrt{t-2}}\right)$$

9 BE

e) Diskutieren Sie, ob das Produkt $f_t(x) \cdot f_t'(x)$ mit $x < t$ positive Werte annehmen kann!

3 BE

Aufgabe A2

Für jede positive reelle Zahl a seien Funktionen f_a und g_a gegeben durch $y = f_a(x) = a - a \cdot \cos ax$ bzw.
$y = g_a(x) = (2a+1) + \sin x$ mit $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse, auf Extrem- und Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a auf Symmetrie!
Geben Sie die kleinste Periode der Funktion f_a an!
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f_{\frac{1}{2}}$, f_2 und g_2 im Intervall $-1 \leq x \leq 7$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Weisen Sie nach, dass der Punkt B mit $B\left(\frac{3}{2}\pi; 4\right)$ ein Berührungspunkt der Graphen von f_2 und g_2 ist!

16 BE

b) Es sei x_0 die kleinste positive Nullstelle der Funktion f_a .
Über dem Intervall $0 \leq x \leq x_0$ begrenzen der Graph der Funktion f_a und die Abszissenachse ein Flächenstück vollständig.
Berechnen Sie dessen Inhalt!
Welchen Einfluss hat der Parameter a auf den Flächeninhalt?

4 BE

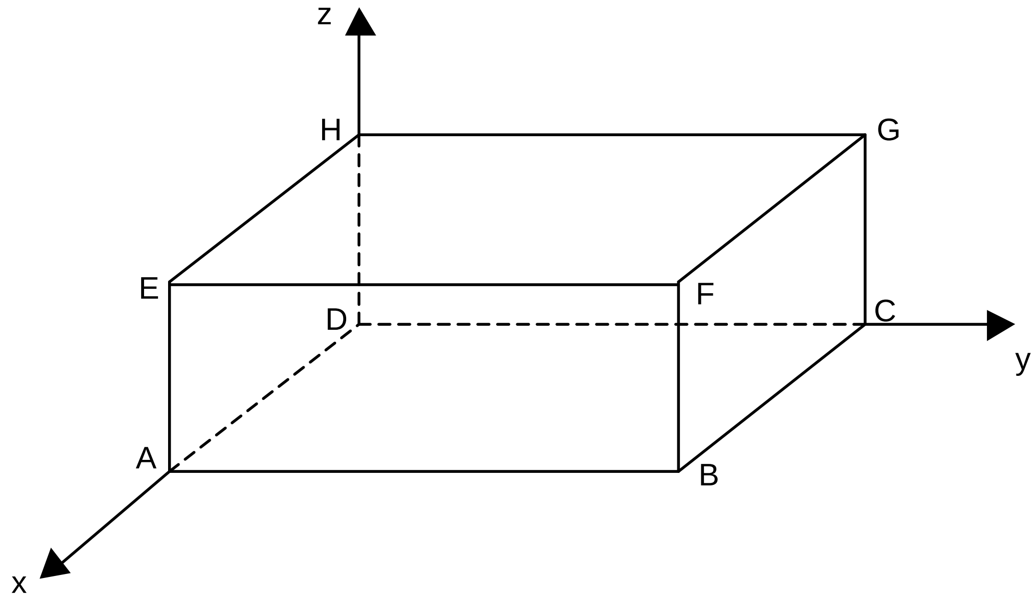
c) Welches ist der kleinste Funktionswert, den die Funktion g_a annehmen kann?
Welches ist der größte Funktionswert, den die Funktion f_a annehmen kann?
Für welche Werte a gibt es einen Punkt $B_a(x; f_a(x))$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$, der sowohl zum Graphen von f_a als auch zum Graphen von g_a gehört? **5 BE**

d) Formulieren Sie eine Vermutung für die 2n-te Ableitung der Funktion f_a $(n \in N,\ n \geq 1)$! **2 BE**

e) Für jede positive reelle Zahl a sei nun eine Funktion h_a gegeben durch $y = h_a(x) = -x^2 + 4a$ mit $x \in R$.
Ermitteln Sie die Anzahl der Werte von a, für die $3 < a < 5$ gilt und für die die Funktionen f_a und h_a gemeinsame Nullstellen besitzen! **3 BE**

Aufgabe B1

Gegeben ist der Quader ABCDEFGH mit D(0; 0; 0) und F(1; 2; 1). Alle Seitenflächen liegen in bzw. parallel zu den Koordinatenebenen. P ist Mittelpunkt der Deckfläche EFGH. Außerdem sind die Punkte $R_r(0; 2; r)$ mit $0 \leq r \leq 1$ und $r \in R$ gegeben.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders und die Koordinaten von P!
Beschreiben Sie die Menge der Punkte R_r in Bezug auf den Quader! **3 BE**

b) Durch B, P und R_r wird eine Ebene ε_r festgelegt.
Bestimmen Sie für $\varepsilon_{0,5}$ eine parameterfreie Form der Ebenengleichung, den Schnittwinkel mit der x-y-Ebene sowie die Schnittgerade mit der x-y-Ebene!
(Kontrollergebnis: $\varepsilon_{0,5} \quad 2x + 3y + 4z = 8$) **5 BE**

c) Begründen Sie, dass die Punkte $S\left(0; \frac{4}{3}; 1\right)$ und $T\left(1; \frac{2}{3}; 1\right)$ auf den Kanten $\overline{HG}$ bzw. $\overline{EF}$ liegen!

Zeigen Sie, dass das Viereck $TBR_{0,5}S$ ein Trapez ist!

Berechnen Sie die Höhe des Trapezes! 6 BE

d) Welche geometrische Form hat die Schnittfläche von ε_r mit dem Quader für r = 1?

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche! 4 BE

e) Die Ebene ε_r mit r = 0 teilt den Quader in zwei Teilkörper.

In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Teilkörper zueinander? 2 BE

Aufgabe B2

Für den letzten Schultag bestellt ein Gymnasium in Thüringen für jeden Schüler der 12. Klasse ein mit einer Aufschrift versehenes T-Shirt.
Von der gelieferten Menge sind 96% erste Wahl, der Rest ist zweite Wahl. Nach der Herstellung werden die T-Shirts in Kartons zu je 20 Stück abgepackt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Karton höchstens ein T-Shirt zweiter Wahl befindet? **2 BE**

b) Für den Versand werden Container mit je 20 Kartons gefüllt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Container genau ein Karton befindet, in dem genau ein T-Shirt zweiter Wahl vorhanden ist? **2 BE**

c) Ein gelieferter Karton enthält genau 2 T-Shirts zweiter Wahl. Eine Schülerin entnimmt daraus genau 2 T-Shirts nacheinander und ohne Zurücklegen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den entnommenen T-Shirts von jeder Wahl genau ein T-Shirt dabei ist? **2 BE**

d) Die T-Shirts zweiter Wahl haben einen geringfügigen Näh- oder Farbfehler.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein T-Shirt einen Nähfehler hat, beträgt 0,02. Näh- und Farbfehler treten unabhängig voneinander auf.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein geliefertes T-Shirt einen Farbfehler? **3 BE**

e) Durch eine Kontrolle soll die Auslieferung von T-Shirts zweiter Wahl reduziert werden. Dabei wird ein beliebiges T-Shirt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,046 als zweite Wahl ausgesondert. Allerdings wird auch ein T-Shirt erster Wahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 irrtümlich als zweite Wahl ausgesondert.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein T-Shirt zweiter Wahl ausgesondert?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesondertes T-Shirt tatsächlich zweite Wahl? **4 BE**

f) Der Hersteller vermutet, dass sich der Anteil der produzierten T-Shirts zweiter Wahl vergrößert hat.
Falls bei einer Stichprobe von 500 zufällig ausgewählten T-Shirts mehr als 25 zweite Wahl sind, will er die Vermutung annehmen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er irrtümlicherweise die Vermutung an, obwohl sich die Anzahl der produzierten T-Shirts zweiter Wahl nicht erhöht hat?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er die Vermutung nicht an, obwohl sich der Anteil der produzierten T-Shirts zweiter Wahl auf 4,5 % erhöht hat? **5 BE**

g) Ein anderer Karton enthält 10 T-Shirts, darunter höchstens eins zweiter Qualität.
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter genau ein T-Shirt zweiter Wahl befindet, sei p.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Karton keine T-Shirts zweiter Wahl enthält, wenn ein zufällig entnommenes T-Shirt erste Wahl ist? **2 BE**

Aufgabe C

a) Lösen Sie folgende Gleichung!
$\left(1-e^{x-2}\right)\cdot\left(1-\ln x\right)=0, \quad x\in R$.

2 BE

b) Der Eckpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a sei gemeinsamer Anfangspunkt einer Raum- und einer Flächendiagonale. Welchen Winkel φ schließen diese Diagonalen miteinander ein?

2 BE

c) Herr Schulz legt für n Jahre $(n \in N)$ 3000 € bei einem Zinssatz von 4% fest an.
Nach Ablauf dieser Zeit hebt Herr Schulz den Gesamtbetrag von 3650 € ab.
Berechnen Sie n!

2 BE

d) Die Graphen zweier Funktionen f und g verlaufen jeweils durch die Punkte A(0; 1) und B(4; 0); f und g sind Funktionen aus verschiedenen Funktionsklassen.
Ermitteln Sie jeweils eine Funktionsgleichung!

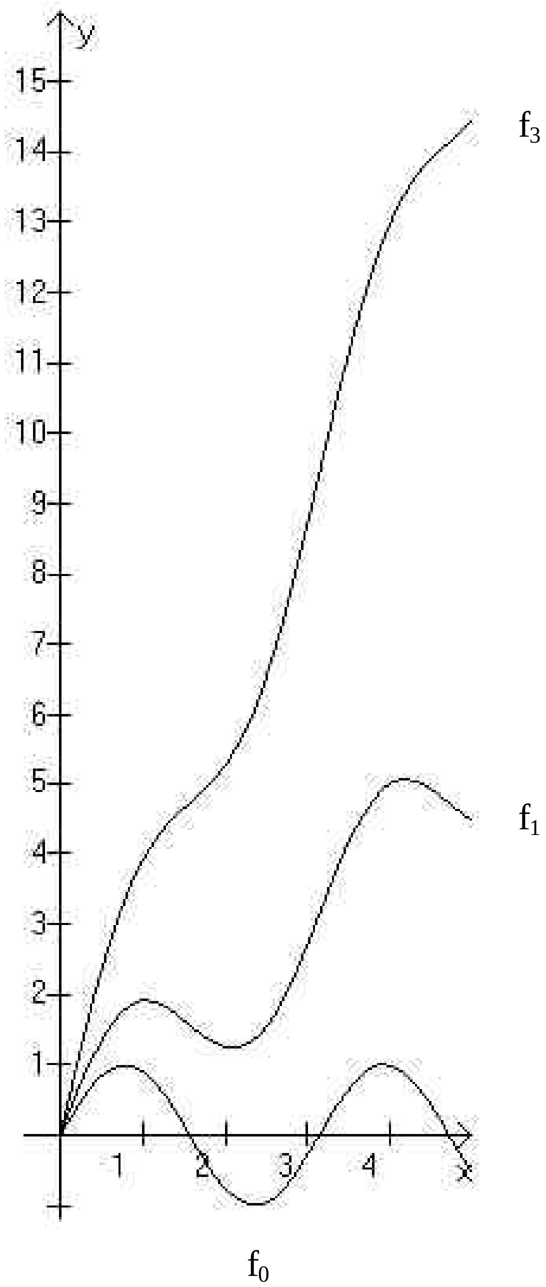
2 BE

e) Ein Schüler will eine Tür aufschließen. Er hat fünf ähnliche Schlüssel, von denen nur genau einer passt, in der rechten Hosentasche.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit passt der Schlüssel genau beim dritten Versuch, wenn er
1) einen Schlüssel probiert und diesen danach in die rechte Hosentasche zurücksteckt, wenn er nicht passt?
2) einen Schlüssel probiert und diesen danach in die linke Hosentasche steckt, wenn er nicht passt?

2 BE

Aufgabe A1

Für jede reelle Zahl $t \geq 0$ ist eine Funktion f_t durch die Gleichung $y = f_t(x) = t \cdot x + \sin(2x)$ mit $x \in R$ gegeben.
Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_3 im Intervall $0 \leq x \leq 5$.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie - falls sie existieren - die Koordinaten des jeweils ersten lokalen Maximumpunktes im I. Quadranten für die Graphen f_0, f_1 und f_3 !

Diskutieren Sie anhand der drei Graphen der Funktionen f_0 , f_1 und f_3 im vorgegebenen Intervall $0 \le x \le 5$, wie sich die Anzahl der Nullstellen, lokalen Extrempunkte bzw. der Wendepunkte ändert!

10 BE

b) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt $P(\pi; f_t(\pi))$ des Graphen von f_t mit t > 1 schneiden diese in den Punkten Q und S.

Für welche Parameterwerte t teilt der Graph von f_t die Fläche des Rechtecks OSPQ im Verhältnis 1:1 ?

Hinweise: O bezeichnet den Koordinatenursprung und alle Funktionswerte von f_t im Intervall $0 \le x < \pi$ sind kleiner als $f_t(\pi)$.

6 BE

Gegeben ist jetzt die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x + \sin(2x)$ mit $x \in R$.

c) Ermitteln Sie alle Punkte V des Graphen der Funktion f_1, die von den beiden Koordinatenachsen gleich weit entfernt sind! Zeigen Sie, dass diese Punkte V Wendepunkte des Graphen von f_1 sind!

5 BE

d) Die lokalen Maximumpunkte

$$H_k\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi;\ \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\right)$$

und die lokalen Minimumpunkte

$$T_k\left(\frac{2}{3}\pi+k\cdot\pi;\ -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi+k\cdot\pi\right)$$

des Graphen der Funktion f_1 mit $k \in Z$ liegen jeweils auf einer Geraden.

Bestimmen Sie die Gleichungen dieser beiden Ortskurven sowie deren Abstand d !

6 BE

e) Begründen Sie, dass für die Anstiege m ($m \in R$) mit $m \geq 3$ die Gerade $y = mx$ genau einen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen der Funktion f_1 hat!

3 BE

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl k mit $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$y = f_k(x) = \frac{2e^{2x}}{k + e^{2x}} \quad (x \in R).$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_k auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrempunkte sowie auf Wendepunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
(Auf einen möglicherweise notwendigen Nachweis der Wendepunkte kann verzichtet werden.)

Kontrollergebnis: $f_k''(x) = \dfrac{8k \cdot e^{2x} \cdot (k - e^{2x})}{(k + e^{2x})^3}$

Geben Sie die Asymptoten des Graphen von f_k an!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 in ein und dasselbe Koordinatensystem!

12 BE

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_2 mit der Gleichung $y = F_2(x) = \ln(2 + e^{2x})$ eine Stammfunktion von f_2 ist!

2 BE

c) Die Koordinatenachsen, der Graph von f_2 und die Gerade $x = \dfrac{\ln 2}{2}$ begrenzen eine Fläche A_1 vollständig.

Die x-Achse, der Graph von f_2, die Gerade $x = \dfrac{\ln 2}{2}$ und die Gerade $x = u$ mit $u > \dfrac{\ln 2}{2}$ begrenzen eine Fläche A_2 vollständig. Es soll $A_1 = A_2$ gelten.
Berechnen Sie für diesen Fall u !

4 BE

d) Für jede reelle Zahl n ist eine Funktion g_n gegeben durch

$$y = g_n(x) = -\frac{9}{8}x + n\,.$$

Zwei Graphen dieser Schar schneiden den Graphen von f_2 orthogonal. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Funktionen!

5 BE

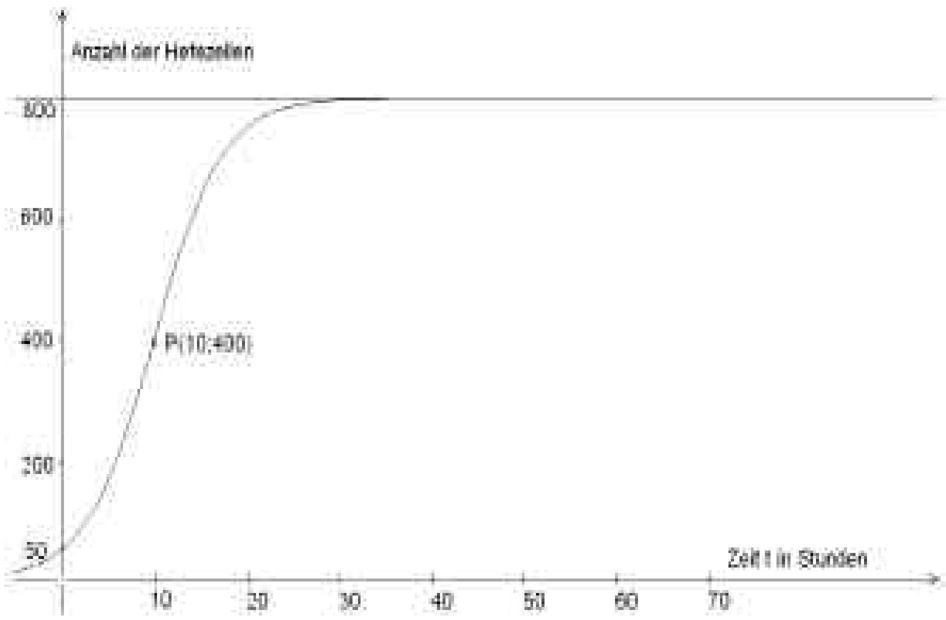
e) Für jedes geordnete Paar a und b reeller Zahlen mit $a, b > 0$ und $t \in R$, $t \geq 0$ ist eine Funktion $h_{a,b}$ gegeben durch

$$h_{a,b}(t) = \frac{a \cdot e^{(\frac{1}{10}\ln 15)\cdot t}}{b + e^{(\frac{1}{10}\ln 15)\cdot t}}\,.$$

Eine solche Funktion beschreibt z. B. die Anzahl der Hefezellen in einer Volumeneinheit in Abhängigkeit von der Zeit t.

Die Abbildung zeigt einen solchen Graphen.
Der Punkt Q(0; 50) liegt auf dem Graphen.

Der Punkt P ist der Punkt, in dem die Zuwachsrate der Hefezellen (Anstieg des Graphen) am größten ist.



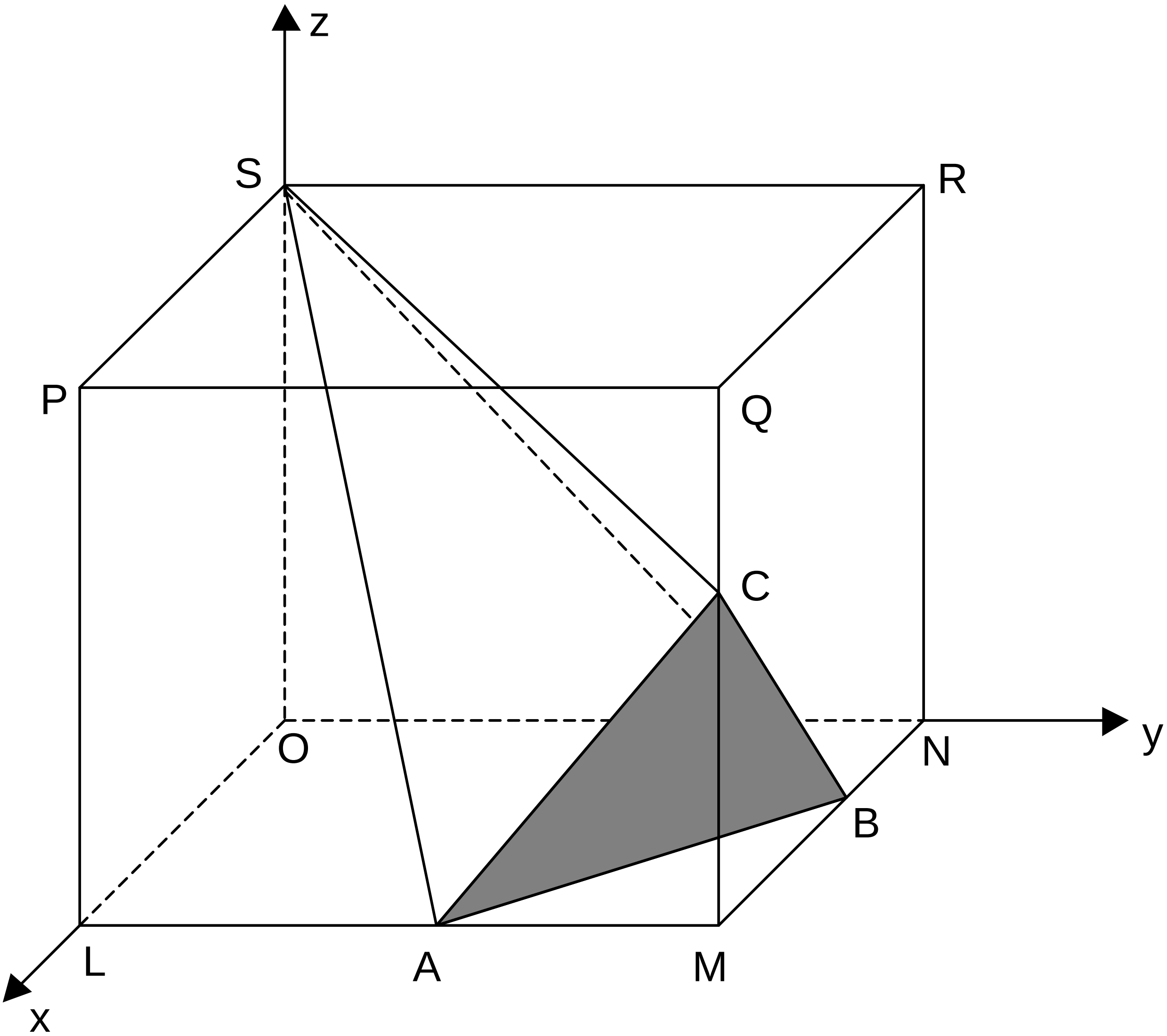
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b !
Welche Informationen über die Hefekultur kann man dem Punkt Q(0; 50) einerseits und dem Parameter a andererseits entnehmen?

7 BE

Aufgabe B1

Eine gerade dreiseitige Pyramide ABCS mit der gleichseitigen Grundfläche ABC soll in einen würfelförmigen Karton verpackt werden (siehe Skizze 1). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche haben folgende Koordinaten: $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$ und $C(5;5;3)$

Die Innenmaße des Kartons betragen $a = 5$ LE.



(Skizze 1 nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante $\overline{AS}$!
Zeigen Sie, dass die Raumdiagonale des Würfels, die den Punkt S enthält, senkrecht zur Pyramidengrundfläche ABC verläuft!
Ermitteln Sie die Höhe h der Pyramide!
(Kontrollergebnis: $h = 4 \cdot \sqrt{3}$ LE)
Vor dem Verpacken stand die Pyramide mit ihrer Grundfläche ABC auf der x-y-Ebene.
Um welchen Winkel α ist die Pyramide beim Verpacken aus dieser Lage zu neigen?

8 BE

b) Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide!

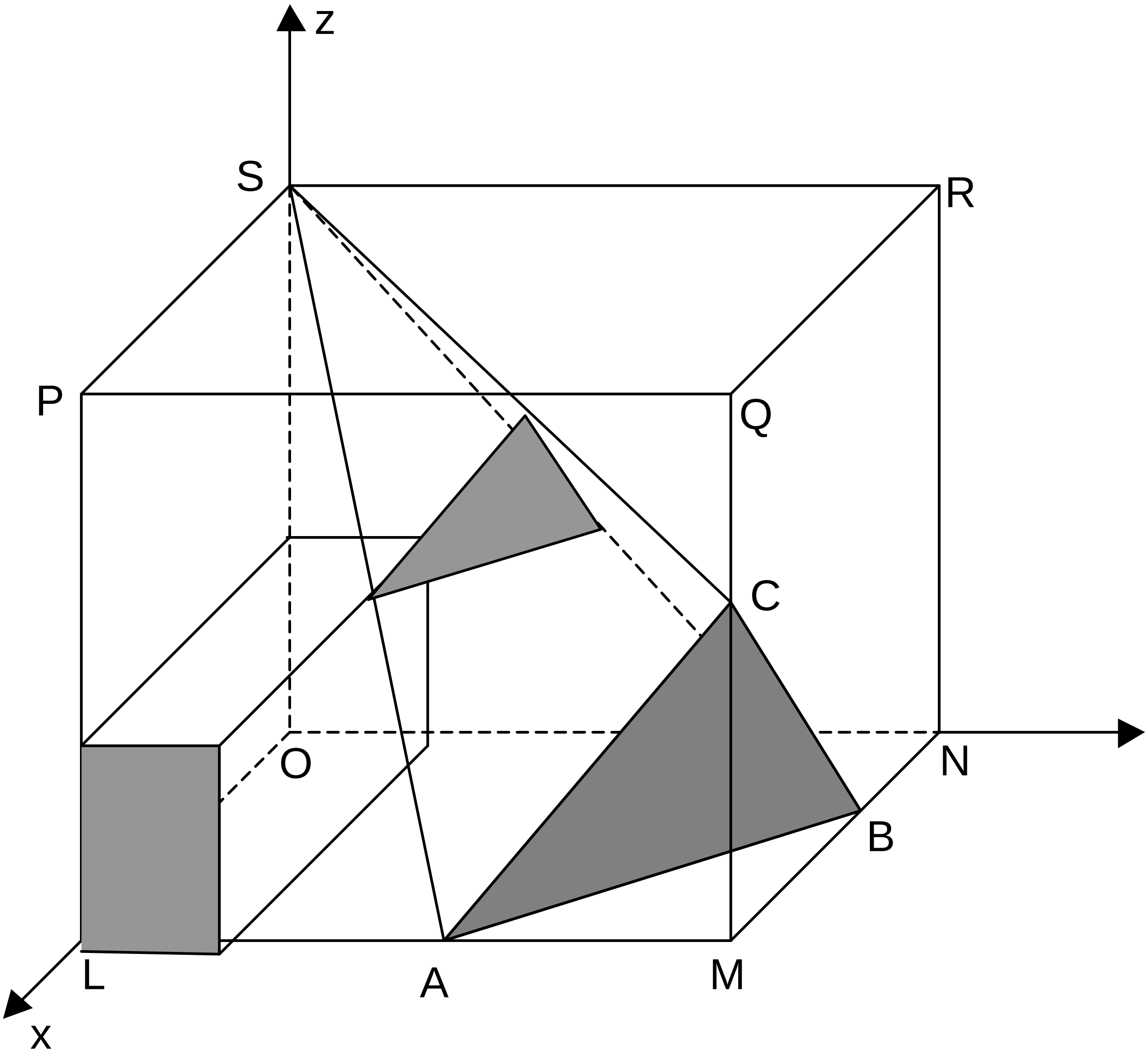
5 BE

c) Ein ebener Schnitt durch den Mittelpunkt des Würfels und parallel zur Grundfläche der Pyramide teilt die Pyramide in zwei Teilkörper, eine gerade Pyramide und einen geraden Pyramidenstumpf (siehe Skizze 2).
Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Schnittebene an!
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A', der Eckpunkt der kleinen Pyramide ist und auf der Seitenkante $\overline{AS}$ der großen Pyramide liegt.

4 BE

d) Ist es möglich, gemeinsam mit der Pyramide noch einen Quader mit den Kantenlängen 5 LE, 1 LE und 2 LE in den Karton (siehe Skizze 2) zu verpacken? Begründen Sie Ihre Antwort!

3 BE



(Skizze 2 nicht maßstäblich)

Aufgabe B2

Der Biologe Dr. Falsch untersucht Fehlbildungen bei Blättern einiger einheimischer Baumarten. Dabei hat er bereits interessante Beobachtungen angestellt.
Eine Form von Fehlbildungen tritt bei der Baumart X mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 %, der Baumart Y von 4 % und der Baumart Z von 0,5 % auf.

a) Ein Korb enthält sechzig Blätter der Baumart X, dreißig der Baumart Y und zehn der Baumart Z.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A := „Ein zufällig entnommenes Blatt besitzt diese Fehlbildung.“
B := „Ein zufällig entnommenes Blatt ist von der Baumart X und besitzt die Fehlbildung nicht.“
C := „Zwei mit einem Griff zufällig entnommene Blätter gehören zu unterschiedlichen Baumarten.“
Ein zufällig entnommenes Blatt besitzt diese Fehlbildung nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es von der Baumart Z?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von fünf mit einem Griff zufällig entnommenen Blättern genau zwei von der Baumart Y?

8 BE

Eine weitere Form von Fehlbildungen tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % auf. Sie ist nur mikroskopisch erkennbar. Tritt diese Form der Fehlbildung auf, so wird sie beim Betrachten eines Blattteiles unter dem Mikroskop mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % erkannt.

b) Wie oft muss man mindestens Teile eines Blattes mit dieser Fehlbildung mikroskopisch untersuchen, um diese Fehlbildung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zu erkennen (also mindestens einmal zu beobachten)?

2 BE

c) Bei einem speziellen Baum beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 700 Blätter diese Fehlbildung besitzen, 10,75 %.
Wie viele Blätter hat der Baum?

4 BE

d) Herr Dr. Durchblick teilt mit, er habe ein Verfahren entwickelt, mit dem man auch ohne Mikroskop diese Fehlbildung mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % erkennen kann.
Stellen Sie einen Prüfplan auf, mit dem Herrn Dr. Durchblicks Aussage getestet werden kann! Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, dass man irrtümlich annimmt, mit dieser Methode könne man diese Fehlbildung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 70 % erkennen, unter fünf Prozent bleiben.

4 BE

e) In einem Gefäß befindet sich eine unbekannte Anzahl von Blättern, unter ihnen genau drei mit dieser Form der Fehlbildung.
Die Wahrscheinlichkeit, beim Entnehmen zweier Blätter mit einem Griff genau ein Blatt mit dieser Fehlbildung zu erhalten, beträgt 22 %.
Wie viele Blätter sind in diesem Gefäß?

2 BE

Aufgabe C

a) Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{2-x} \cdot \ln(x)$ definiert ist!

2 BE

b) Für eine Zahlenfolge (a_n) gelte: $a_{2000} = u \quad (u \neq 0)$ und $a_{2002} = v$.

Ermitteln Sie das Folgenglied a_{2004}, wenn

1. (a_n) eine arithmetische Zahlenfolge bzw.
2. (a_n) eine geometrische Zahlenfolge ist!

2 BE

c) Bestimmen Sie $\int (x+1) \cdot \sin x \, dx$!

2 BE

d) Erfahrungsgemäß sind 70% aller Abiturienten Nichtraucher. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Kurs mit 25 Abiturienten mindestens 15 Nichtraucher? Wie viele Raucher sind unter 870 Abiturienten zu erwarten?

2 BE

e) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -20 \\ t \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie t $(t \in R)$ so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}_t$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind!

2 BE

Aufgabe A1

Für jede reelle Zahl t $(t \neq 0)$ ist eine Funktion f_t durch die Gleichung

$y = f_t(x) = \frac{t}{x} \cdot \ln x \qquad (x \in R,\ x > 0)$ gegeben.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, auf lokale Extrempunkte einschließlich ihrer Art sowie auf Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!
(Auf einen möglicherweise notwendigen Nachweis der Wendepunkte kann verzichtet werden.)
Skizzieren Sie den Graphen von f_4 im Intervall $0 < x \leq 8$!
Beschreiben Sie, welche Beziehung zwischen den Graphen von f_t und f_{-t} besteht! **10 BE**

b) Weisen Sie durch Integration nach, dass
$F_t(x) = \frac{t}{2} \cdot (\ln x)^2$ eine Stammfunktion von f_t ist!
Geben Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die mögliche lokale Extremstelle und die Wendestelle der Funktion F_t an! Begründen Sie Ihre Aussagen!
Berechnen Sie an der möglichen lokalen Extremstelle und an der Wendestelle die zugehörigen Funktionswerte!
Skizzieren Sie den Graphen von F_4 in das in Teilaufgabe a) verwendete Koordinatensystem im Intervall $0 < x \leq 5$! **7 BE**

c) Der Graph der Funktion f_4, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P(e^2; f_4(e^2))$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
Diese Fläche soll durch eine Gerade halbiert werden.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer solchen Geraden! **4 BE**

d) An den Graphen der Funktion f_t wird im Punkt $P(e^2; f_t(e^2))$ die Tangente angelegt. Diese Tangente begrenzt für jedes t $(t > 0)$ mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Wert von t so, dass der Inhalt der Dreiecksfläche 9 FE beträgt! **4 BE**

e) Für jede positive reelle Zahl t ist eine Funktion g_t mit der Gleichung $y = g_t(x) = \frac{t}{x}$ $(x \in R,\ x > 0)$ gegeben.
Weisen Sie nach, dass die Stelle p (p > e), an der die Differenz $f_t(p) - g_t(p)$ ein Maximum annimmt, unabhängig von t ist!
(Auf den Nachweis des globalen Maximums wird verzichtet.)
Für welchen Wert von t beträgt diese maximale Differenz 1 LE? **5 BE**

Aufgabe A2

Für jede positive reelle Zahl t ist eine Funktion f_t gegeben durch
$y = f_t(x) = x \cdot \sqrt{t - x^2}$.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich von f_4!
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_4 auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Ermitteln Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!

Kontrollergebnis: $f_4''(x) = \dfrac{2x^3 - 12x}{(4 - x^2) \cdot \sqrt{4 - x^2}}$

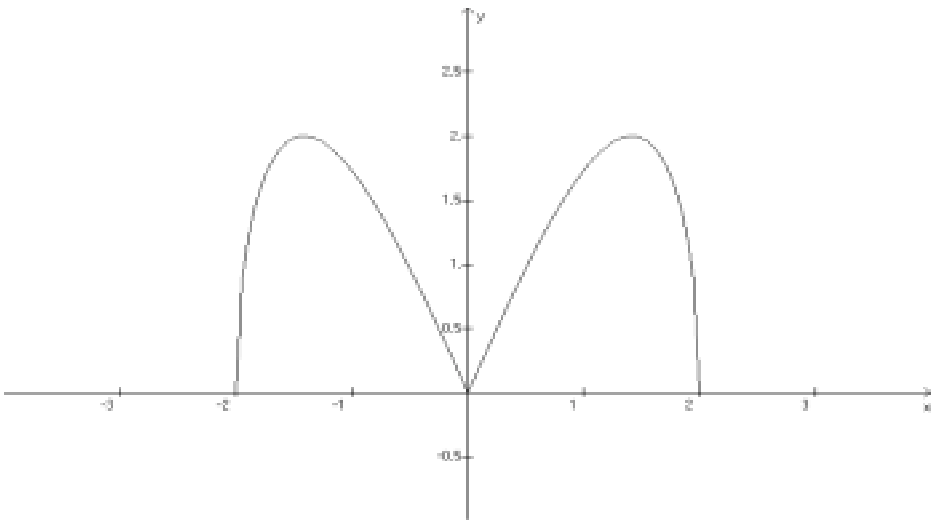
(Auf den möglicherweise notwendigen Nachweis der Wendepunkte wird verzichtet.)
Geben Sie den Wertebereich von f_4 an!
Skizzieren Sie den Graphen von f_4 über dem gesamten Definitionsbereich! **13 BE**

b) Für jede reelle Zahl r ist eine Gleichung $r = f_4(x)$ gegeben.
Geben Sie die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von r an!
Nutzen Sie die Ergebnisse von Teilaufgabe a). **2 BE**

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_4 mit
$F_4(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(4 - x^2)^3} + 2005$ eine Stammfunktion von f_4 ist!
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen der Funktion f_4 und der x-Achse im III. Quadranten vollständig eingeschlossen wird! **3 BE**

d) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g_4 mit

$g_4(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.



Zeigen Sie, dass $g_4(x) = |f_4(x)|$ gilt!

Geben Sie mindestens zwei Eigenschaften an, in denen sich die Funktionen f_4 und g_4 unterscheiden!

Begründen Sie, dass die Funktion g_4 an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar ist!

4 BE

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h mit $y = h(x) = x \cdot |x|$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) !

Der Graph jeder Funktion f_t besitzt genau zwei lokale Extrempunkte.

Zeigen Sie, dass diese lokalen Extrempunkte auf dem Graphen von h liegen!

(Auf den Nachweis der Extrempunkte wird verzichtet.)

4 BE

f) Es seien $N_t(\sqrt{t}; 0)$, $O(0; 0)$ und $H_t(\frac{1}{2}\sqrt{2t}; \frac{t}{2})$ drei Punkte des Graphen der Funktion f_t.

(1) Für welche positive reelle Zahl t hat das Dreieck ON_tH_t den Flächeninhalt $A = 250$ FE ?

(2) Für welche positive reelle Zahl t ist das Dreieck ON_tH_t rechtwinklig?

4 BE

Aufgabe B1

Für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ sind die Punkte

$$A_a(2a;\, a;\, a),$$
$$B_a(a;\, 2a;\, a) \text{ und}$$
$$C_a(a;\, a;\, 2a)$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass A_a, B_a und C_a ein gleichseitiges Dreieck bilden!
ε_a sei die Ebene, in der das Dreieck $A_aB_aC_a$ liegt. Eine Ebenengleichung von ε_a ist $x + y + z = 4a$.
Erläutern Sie, wie man aus den Punkten A_a, B_a und C_a diese Gleichung gewinnen kann!
Bestimmen Sie die Werte von a, für die der Abstand des Koordinatenursprungs von ε_a den Wert 4 LE annimmt!
Berechnen Sie den Neigungswinkel von ε_a zur x-y-Ebene!
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von ε_a mit der x-y-Ebene!

8 BE

b) In der Ebene ε_a gibt es einen Punkt $C_a' \neq C_a$, so dass das Dreieck $A_aB_aC_a'$ ebenfalls gleichseitig ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C_a'!

2 BE

Für die Teilaufgaben c) und d) sei a = 3.

c) Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte A_3 und C_3, die Gerade g_2 durch den Punkt B_3 mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander verlaufen!

Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden und bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Punkte der Geraden g_1 und g_2, die den kürzesten Abstand voneinander haben!

5 BE

d) Die Gerade g mit $g:\ \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in R$, durchstößt die Ebene ε_3 in einem Punkt D_3.
Weisen Sie nach, dass dieser Punkt im Innern des Dreiecks $A_3B_3C_3$ liegt!
Bestimmen Sie das Spiegelbild von $P(1; 1; 1)$ bei Spiegelung an der Ebene ε_3!

5 BE

Aufgabe B2

Zum 500-jährigen Stadtjubiläum erhält die Stadt S eine neue Turnhalle.

a) Von den sieben Maurern der Firma „Träge“ ist bekannt, dass jeder unabhängig von den anderen an $\frac{1}{3}$ der Arbeitstage zu spät kommt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der folgenden Ereignisse an einem beliebigen Arbeitstag!
A : = „Genau 2 Maurer kommen zu spät.“
B : = „Höchstens ein Maurer kommt zu spät.“
C : = „Mindestens 5 Maurer sind pünktlich.“

Wie viele Arbeitstage muss der Auftrag mindestens dauern, damit die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens an einem Tag alle Maurer pünktlich sind, größer als 0,95 ist?

6 BE

b) Die Firma „Dreh“ liefert Schrauben in Packungen zu 1000 Stück in zwei Qualitäten. Bei Packungen 1. Wahl sind 5% Ausschuss, bei 2. Wahl 10% Ausschuss enthalten.
Von einer Packung ist die Beschriftung verloren gegangen. Durch einen Test soll die Qualität der Packung festgestellt werden. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung 2. Wahl als 1. Wahl eingestuft wird, höchstens 0,1 betragen.
Planen und erläutern Sie einen entsprechenden Test mit einem Stichprobenumfang von 50!
Wie groß wäre in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung 1. Wahl als 2. Wahl eingestuft wird?

5 BE

c) Die Eröffnungsveranstaltung soll durch alle 28 Vereine der Stadt gestaltet werden.

Aus den Vereinen, darunter genau fünf Fußballvereine, werden genau drei durch Losentscheid ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse!
D : = „Nur der dritte ausgeloste Verein ist ein Fußballverein.“
E : = „Mindestens ein ausgewählter Verein ist ein Fußballverein.“

Bei rein zufälliger Auswahl von genau zwei Vereinen betrage die Wahrscheinlichkeit dafür, genau einen Sportverein zu erhalten, $\frac{7}{18}$.

Wie viele Sportvereine gibt es folglich in dieser Stadt? 5 BE

d) Zur Eröffnungsveranstaltung werden VIP-Karten verteilt. Aus Erfahrung weiß man, dass durchschnittlich nur 60% der eingeladenen Personen auch teilnehmen.
Begründen Sie, dass höchstens 230 Karten verteilt werden dürfen, wenn 150 Plätze mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von ca. 0,95 reichen sollen! 4 BE

Aufgabe C

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) mit

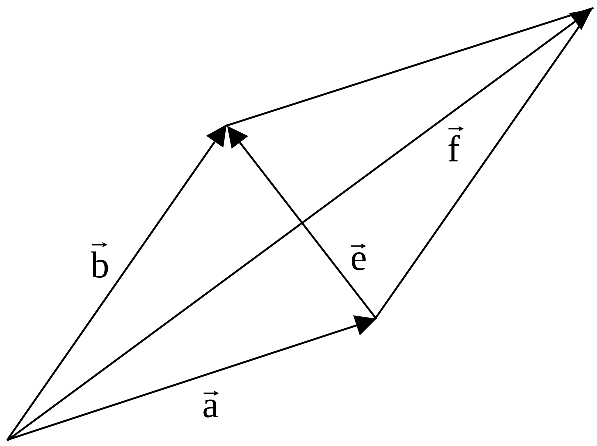
$a_n = \frac{2n^k + 3}{n^2 + 1}$ in Abhängigkeit von k $(k \in N)$!

3 BE

b) Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin 2x + \sin x = 0$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!

3 BE

c) Weisen Sie nach, dass in jedem Rhombus die Diagonalenvektoren orthogonal zueinander sind!



2 BE

d) Zwei ideale Würfel werden einmal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme durch 5 teilbar ist?

2 BE

Aufgabe A1

Für jede natürliche Zahl n $(n \geq 1)$ ist eine Funktion f_n gegeben durch

$$y = f_n(x) = \frac{1}{n}x^n + (-1)^n\left(\frac{1}{n}+1\right)x^{n-2}.$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_1 auf Asymptoten, Schnittpunkte mit der x-Achse und lokale Extrempunkte! Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an!
Skizzieren Sie die Graphen von f_1 und f_2 in ein gemeinsames Koordinatensystem!
Begründen Sie, dass der Graph von f_2 eine Lücke besitzt! **7 BE**

b) Bestimmen Sie die x-Koordinaten derjenigen Punkte auf dem Graphen von f_1, die vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand besitzen!
Auf den Nachweis des lokalen Minimums kann verzichtet werden, der Nachweis des globalen Minimums ist zu führen. **5 BE**

c) Zeigen Sie, dass es keine Gerade durch den Koordinatenursprung gibt, die zugleich Tangente an den Graphen von f_1 ist! **2 BE**

d) Untersuchen Sie den Graphen von f_3 auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte. Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f_3 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a)! **5 BE**

e) Für $x > 0$ begrenzen die Graphen von f_1 und f_3 eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Inhalt! **5 BE**

f) Der Funktionsterm der gegebenen Funktion f_n lässt sich umformen in $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{n-2} \cdot (x^2 + (-1)^n(n+1))$.
Untersuchen Sie den Graphen von f_n in Abhängigkeit von n auf Symmetrie und bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_n in Abhängigkeit von n! **6 BE**

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion f_a durch die Gleichung $y = f_a(x) = \frac{4(x+a)}{(x+1)^2}$ gegeben.

Die zweite Ableitung von f_a lautet: $f_a''(x) = \frac{8(x+3a-2)}{(x+1)^4}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f_a an!
Untersuchen Sie die Funktion f_a in Abhängigkeit von a auf Nullstellen, Polstellen, lokale Extremstellen und Wendestellen! (Auf den Nachweis möglicher Wendestellen wird verzichtet.)
Ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und die der Wendepunkte!
Geben Sie alle Asymptoten des Graphen von f_a an!
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_0 und f_1 in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Nennen Sie zwei Eigenschaften der Funktion f_1, in denen sie sich von den übrigen Funktionen dieser Funktionsschar unterscheidet! **16 BE**

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F_0 mit der Gleichung $F_0(x) = 4\ln(x+1) + \frac{4}{x+1}$ $(x > -1)$ eine Stammfunktion von f_0 ist!
Zwischen dem Graphen der Funktion f_0 und der x-Achse liegt im I. Quadranten eine nach rechts offene Fläche.
Prüfen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat! **4 BE**

Aufgabenteile c und d auf Seite 4

c) Die Funktion f_1 soll für $x > -1$ durch eine Exponentialfunktion $g_{c,b}$ der Gestalt $y = g_{c,b}(x) = c \cdot e^{bx}$ näherungsweise beschrieben werden.
Wie sind c und b zu wählen, damit sich die Graphen von f_1 und $g_{c,b}$ an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ schneiden?
Berechnen Sie für die gewählten Werte c und b den Winkel, unter dem sich die Graphen von f_1 und $g_{c,b}$ im Schnittpunkt mit der y-Achse schneiden!

5 BE

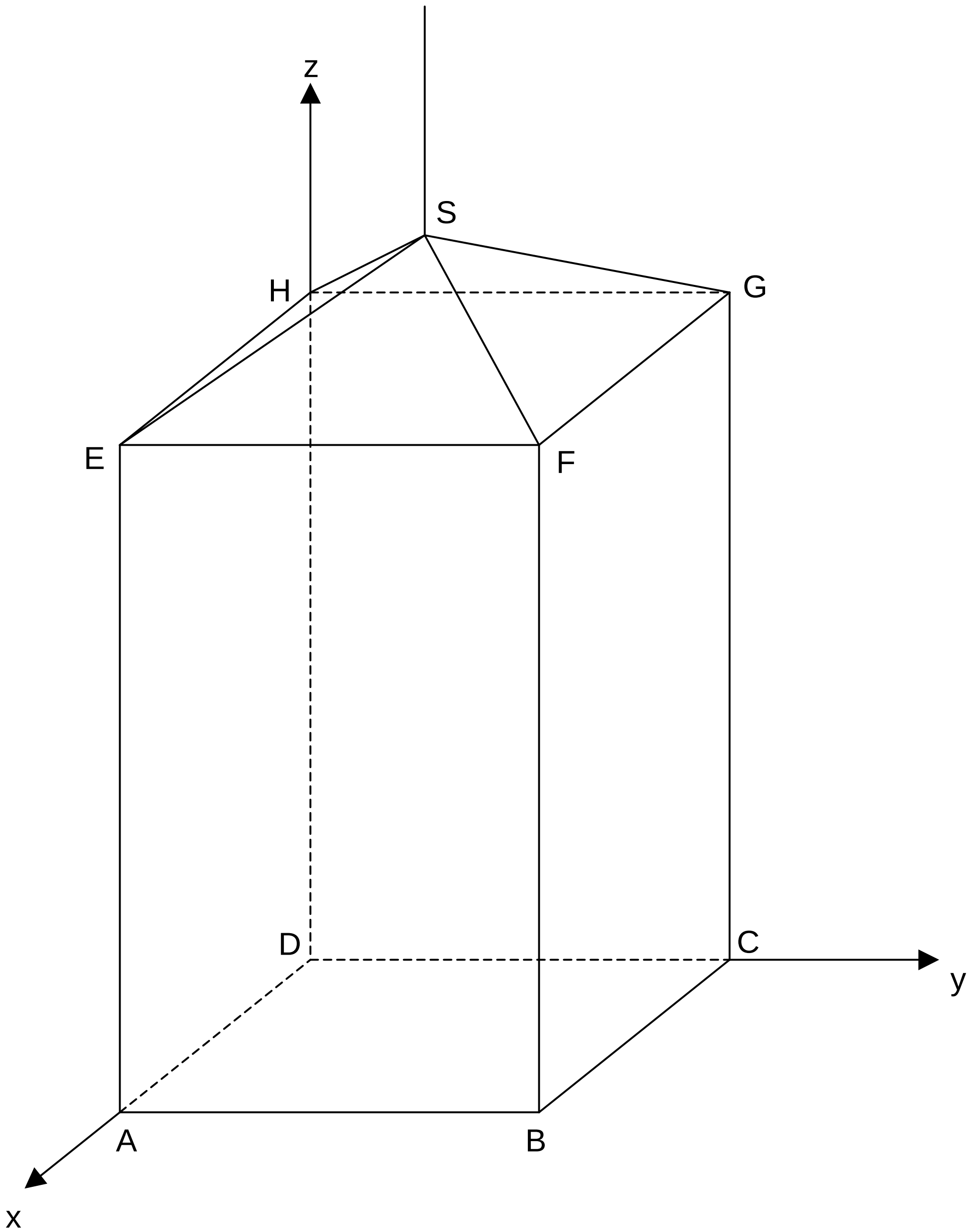
d) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion f_0 gilt:

$$f_0^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{4(x-n)}{(x+1)^{n+2}} \qquad (n \in N,\ n \geq 1)!$$

5 BE

Aufgabe B1

Als Besucherplattform für die Beobachtung der Nachstellung der Schlacht von Jena und Auerstedt wird ein Holzturm auf einer ebenen Fläche errichtet:



(Skizze nicht maßstäblich)

Er besteht aus einem Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide. Die Koordinaten folgender Punkte seien gegeben: $A(9;\,0;\,0)$, $B(9;\,12;\,0)$, $C(0;\,12;\,0)$ und $E(9;\,0;\,20)$. Eine Einheit im Koordinatensystem betrage einen Meter in der Realität. Die Höhe der Pyramide betrage fünf Meter.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Dachfläche SFG mit der Grundfläche der Pyramide einschließt! **2 BE**

b) Die Gerade g durch die Dachkante $\overline{SF}$ und die Gerade h durch die Diagonale $\overline{EG}$ verlaufen windschief zueinander.
Berechnen Sie den Abstand beider Geraden! **3 BE**

c) Auf der Spitze der Pyramide stehe eine 3 m hohe Antenne. Die Richtung des Sonnenlichtes werde durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Untersuchen Sie, ob der Schatten der Antenne vollständig in der Dachfläche SFG liegt! **4 BE**

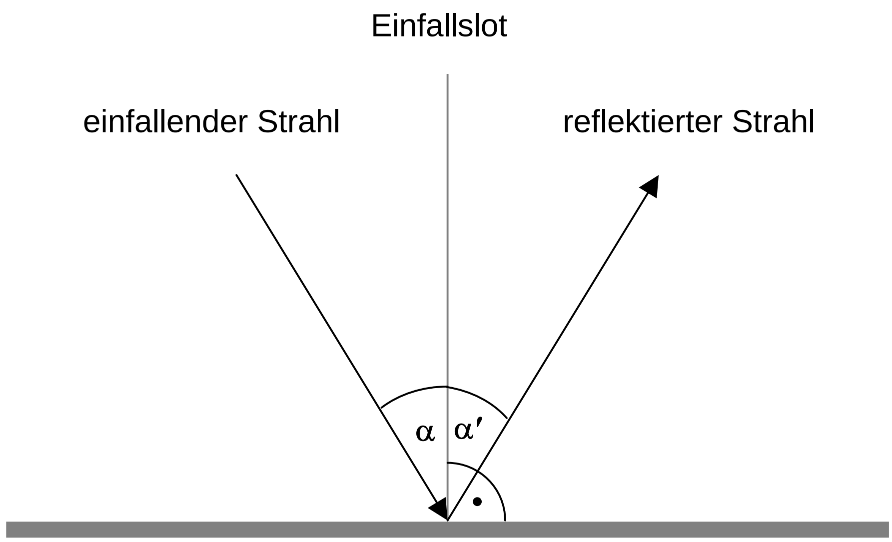
d) Von der Dachspitze S aus soll eine gerade Lichterkette so bis zum Boden gespannt werden, dass der Dachfirst $\overline{SE}$ Teil dieser Geraden ist.
Berechnen Sie die Länge der Lichterkette unter Beachtung der Tatsache, dass man für die Befestigung noch ca. 5% hinzu addieren muss! **3 BE**

e) Gegeben sei nun die Ebenenschar
$\varepsilon_a:\ 2a \cdot x + (2a-1)\cdot z - 270 = 0 \qquad (a \in R)$.
Beschreiben Sie die Lage der Ebenen dieser Ebenenschar im Koordinatensystem!
Für welches a enthält eine Ebene dieser Schar die Fläche EFS? **4 BE**

f) In der Seitenfläche BCGF liegt ein ebener Reflektor. Außerhalb des Gebäudes befindet sich einen halben Meter über dem Boden ein Scheinwerfer $L(12; 16; 0{,}5)$. Er ist so abgeschirmt, dass der von ihm ausgehende Lichtstrahl den Reflektor nur im Punkt $R(8; 12; 1)$ trifft.

Begründen Sie, dass das Licht in Richtung $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ reflektiert wird!
Auf einem Gartenweg, der 8 m vom Gebäude entfernt und parallel zur Gebäudekante $\overline{BC}$ verläuft, geht ein Mensch, dessen Augenhöhe 1,50 m beträgt.
Untersuchen Sie, ob dieser Mensch vom reflektierten Licht geblendet werden kann! **4 BE**

Hinweis: Die Skizze erläutert das Reflexionsgesetz.



$\alpha \cong \alpha'$
Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

Aufgabe B2

1 Auf einem Flughafen werden die aufgegebenen Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein rein zufällig ausgewähltes Gepäckstück das Ziel Erfurt hat, sei p.

Für die Teilaufgaben a) und b) wird $p = 0{,}22$ angenommen.

a) Es werden genau zehn aufeinanderfolgende Gepäckstücke betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis D!

A:= „Höchstens drei Gepäckstücke haben Erfurt als Ziel.“
B:= „Das zehnte Gepäckstück ist das dritte nach Erfurt.“
C:= „Genau zwei Gepäckstücke haben Erfurt als Ziel und liegen direkt hintereinander.“
D:= „Genau drei Gepäckstücke haben Erfurt als Ziel, wobei genau zwei dieser drei direkt hintereinander liegen.“

Beschreiben Sie im obigen Sachzusammenhang zwei Ereignisse E und F, die die Wahrscheinlichkeiten

$$P(E) = 0{,}22^3 \cdot 0{,}78^7 \text{ und } P(F) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}22^5 \cdot 0{,}78^5$$

besitzen! **8 BE**

b) Beim Transport kommt es vor, dass Gepäckstücke fehlgeleitet werden. Der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke beträgt 2%.
Davon haben 10% den Flughaben Erfurt als Ziel.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gepäckstück mit dem Ziel Erfurt richtig weitergeleitet wird! **3 BE**

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken mindestens eines nicht das Ziel Erfurt hat, betrage 0,88.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit p! **2 BE**

2 Das Gepäck wird mit einem Strichcode, der sich auf Papieraufklebern befindet, gekennzeichnet. Mit dessen Hilfe wird der Zielflughafen ermittelt, was in 12,5% der Fälle fehlschlägt.
Untersuchen Sie, wie viele derartige Papieraufkleber mindestens gelesen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,999 wenigstens ein Lesefehler auftritt! 2 BE

3 Dem Flughafen werde ein Lesegerät für das Sortieren der Gepäckstücke auf der Basis von Mikrochips angeboten. Der Hersteller verspricht, dass Lesefehler nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 0,01 auftreten. Der Flughafenbetreiber will seine Hypothese H_0: "Die Lesefehlerwahrscheinlichkeit beträgt mindestens 0,01." auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$ an 3 000 mit einem Mikrochip gekennzeichneten Gepäckstücken testen.
Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für diesen Test! 5 BE

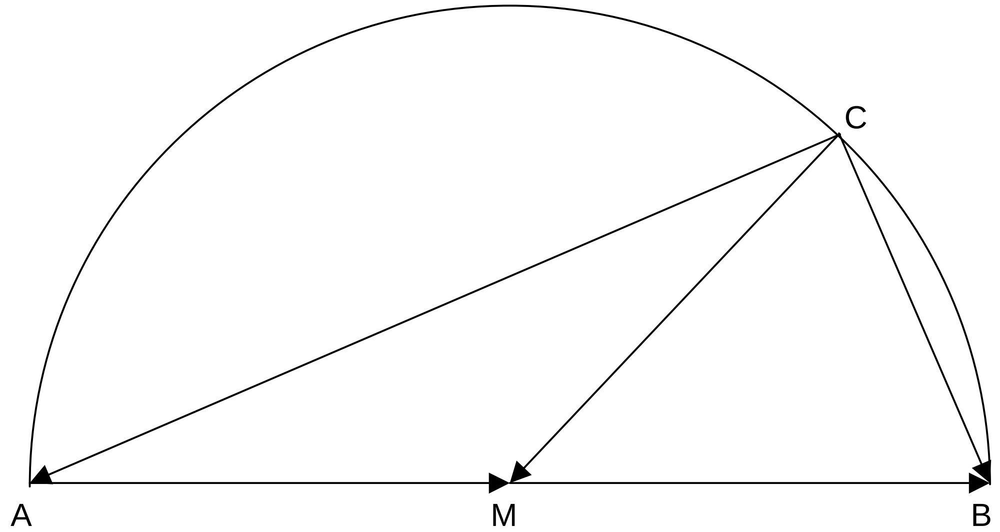
Aufgabe C

a) Zeigen Sie durch Integration, dass
$\int (x \cdot \cos x + 2006)\,dx = \cos x + x \cdot \sin x + 2006x + c$
gilt!

2 BE

b) Zeigen Sie, dass in jedem Halbkreis der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter Winkel ist (Satz des THALES).

$\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$



2 BE

c) In einem Kasten befinden sich genau neun Kugeln, drei blaue, drei grüne und drei rote. Dem Kasten werden nacheinander und ohne Zurücklegen Kugeln entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten zwei entnommenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen!
Geben Sie an, wie viele Kugeln mindestens entnommen werden müssen, um mit Sicherheit darunter zwei Kugeln gleicher Farbe zu haben!

3 BE

d) Für jede reelle Zahl a ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ ax + 1 - a & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie den Graphen von f_a für a = 1!
Für welche reelle Zahl a ist f_a an der Stelle $x_o = 1$ differenzierbar?

3 BE

Aufgabe A1

Für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ seien eine Funktion f_a durch die Gleichung $y = f_a(x) = a \cdot \sin x$ und eine Funktion g durch die Gleichung $y = g(x) = \cos x$ gegeben.

Beide Funktionen werden im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ betrachtet.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und g in ein und dasselbe Koordinatensystem, und berechnen Sie das von den Graphen von f_1 und g vollständig eingeschlossene Flächenstück A_1!
Geben Sie die Gleichungen zweier Geraden an, die jeweils das Flächenstück A_1 halbieren!

7 BE

b) Zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte eines Graphen von f_a mit der x-Achse sowie der zwischen diesen liegende lokale Extrempunkt bilden ein gleichschenkliges Dreieck.
Für welche Parameterwerte ist das Dreieck gleichseitig?
Berechnen Sie für diesen Fall den Flächeninhalt !
Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte das Dreieck rechtwinklig ist?

6 BE

c) Der Graph einer Funktion h mit $h_{a;b}(x) = f_a(x) + g(x) + b$ verlaufe durch den Punkt $P_0\left(\frac{\pi}{2}; -3\right)$ und habe an der Stelle $x_m = \frac{\pi}{4}$ den Anstieg $m = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben eine Gleichung der Funktion h!
Zeigen Sie weiterhin, dass der Anstieg aller Graphen von $h_{a;b}$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ von a und b unabhängig ist!
Der Graph der Funktion $h_{-2;-1}$ hat die Achsenschnittpunkte $A(0; 0)$ und $B(2\pi; 0)$. In den Punkten A und B werden die Tangenten an den Graphen von $h_{-2;-1}$ gelegt.
Berechnen Sie den Abstand der beiden Tangenten!

8 BE

d) Beweisen Sie mithilfe eines Integrationsverfahrens, dass $i_a(x) = f_a(x) - ax \cdot g(x)$ eine Stammfunktion von $x \cdot f_a(x)$ ist!
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass gilt:
$i_a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$?

4 BE

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion k mit $k(x) = |g(x)|$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!
Begründen Sie, dass die Funktion k nicht für alle x differenzierbar ist!

2 BE

f) Für eine Zahl $a > 1$ hat das von den Graphen von f_a und g eingeschlossene Flächenstück den Inhalt $A_2 = 4$ FE.
Ermitteln Sie für diesen Fall den Wert des Parameters a!
Bestimmen Sie dazu analog zu Teilaufgabe a) zunächst die Stelle x_1 als die kleinere der beiden Schnittstellen der Funktionen f_a und g mithilfe des Gleichungssystems

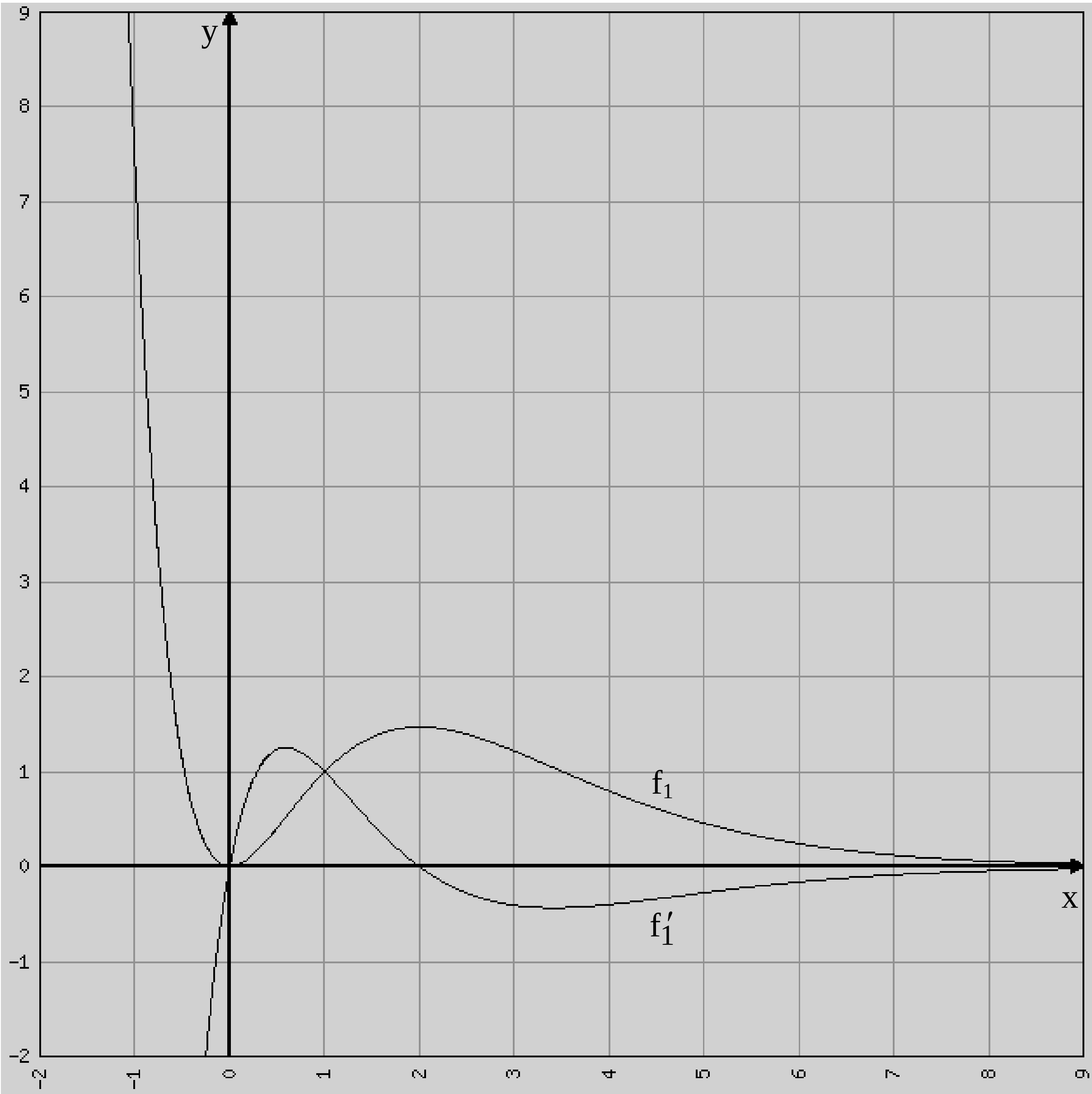
$$f_a(x_1) = g(x_1) \text{ und } A_2 = \int_{x_1}^{\pi + x_1} (f_a(x) - g(x))dx \quad !$$

3 BE

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl t mit $t > 0$ sei eine Funktion f_t mit der Gleichung

$y = f_t(x) = x^2 \cdot e^{1-\frac{x}{t}} \quad (x \in R)$ gegeben.



Die Abbildung zeigt die Graphen von f_1 und f_1'.

a) Diskutieren Sie das Monotonieverhalten der Funktion f_1 nur unter Zuhilfenahme des Graphen der Funktion f_1' !
Schlussfolgern Sie aus der Abbildung auf die Anzahl von Extrem- und Wendepunkten jeder Stammfunktion von f_1!
Begründen Sie Ihre Schlussfolgerungen! 5 BE

b) Der Graph von f_1' und die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück vollständig.
Beschreiben Sie einen Weg, um den Inhalt dieses Flächenstückes näherungsweise nur aus der Graphik zu bestimmen!
Berechnen Sie den exakten Wert des Flächeninhalts durch Integration! **5 BE**

c) Beweisen Sie, dass für die n-te Ableitung der Funktion f_t gilt:

$$f_t^{(n)}(x) = \left(-\frac{1}{t}\right)^n \cdot e^{1-\frac{x}{t}} \cdot \left(x^2 - 2 \cdot t \cdot n \cdot x + (n-1) \cdot n \cdot t^2\right);\ n \geq 1!$$

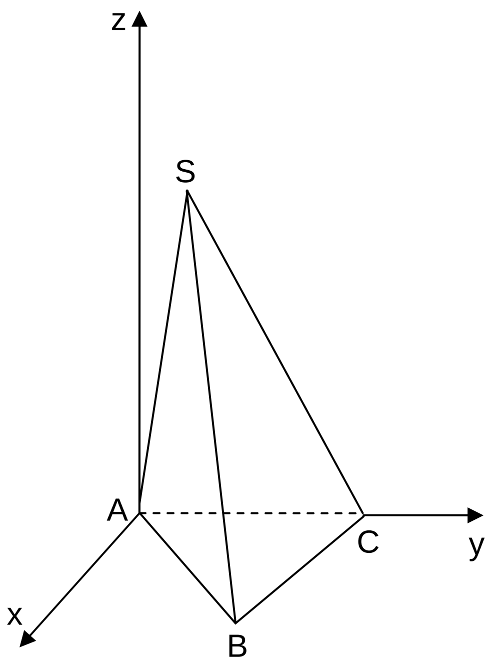
Weisen Sie durch Integration nach, dass sich für n = - 1 eine Stammfunktion von f_t ergibt! **7 BE**

d) Untersuchen Sie die Funktion f_1 auf Wendestellen und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten der zugehörigen Wendepunkte an!
Auf den Nachweis der Wendepunkte wird verzichtet.
Berechnen Sie die Anstiegswinkel der Wendetangenten! **6 BE**

e) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt $P(p;\, f_t(p))$ mit $p > 0$ begrenzen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.
Berechnen Sie p so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird!
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt A_{max} an!
Ermitteln Sie einen Wert von t, so dass die Maßzahl von A_{max} ganzzahlig wird! **7 BE**

Aufgabe B1

Die Punkte $A(0;\,0;\,0)$, $B(4;\,5;\,0)$, $C(0;\,6;\,0)$ und $S(2;\,3;\,12)$ sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.



(Skizze nicht maßstabgerecht)

a) Treffen Sie eine Aussage über die lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$ und begründen Sie Ihre Feststellung!
Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{SC}$ als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$ dar! **2 BE**

b) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{SC}$ und $\overline{AS}$ ein Parallelogramm, jedoch kein Rechteck bilden! **3 BE**

c) Die Pyramide wird durch eine Ebene ε_1, welche die Punkte D, E und F enthält, geschnitten.
Ermitteln Sie mithilfe der nachfolgenden Gleichungen die Koordinaten der Punkte D, E und F sowie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene ε_1 mit der x-y-Koordinatenebene!

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BS} \text{ und } \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CS}.$$

(Kontrollergebnis: $\varepsilon_1 : 42x - 72y + 35z - 48 = 0$) **4 BE**

d) Der Punkt L ist der Fußpunkt des Lotes von S in der x-y-Koordinatenebene.
Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Ebene ε_1 die Strecke $\overline{SL}$ teilt! **3 BE**

e) Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte A und C, die Gerade g_2 enthält die Punkte S und B. Weisen Sie nach, dass die Geraden windschief sind!
Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden! **4 BE**

f) Gegeben sind die Ebenen ε_2 durch die Gleichung $ax + by + cz - 24 = 0$ mit $a, b, c \in R$ und die Ebene ε_3, die den Punkt $P_3(3;\ 4;\ 6)$ sowie die Spannvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ enthält.
Ermitteln Sie jeweils Parameterwerte a, b und c so, dass die Ebenen ε_2 und ε_3

1) identisch bzw.
2) parallel bzw.
3) mit ganzzahligen Parameterwerten a, b und c zueinander orthogonal

sind! **4 BE**

Aufgabe B2

1 Aufgrund statistischer Erhebungen geht man davon aus, dass unter den „Thüringen-Urlaubern“ (Besucher, die mindestens drei Tage in Thüringen verweilen) 44%“Kultururlauber“ und 28% „Natururlauber“ sind. 15% aller „Thüringen-Urlauber“ verbinden bei einem Urlaub beide Urlaubsformen.

a) Für eine Befragung werden 20 „Thüringen-Urlauber“ rein zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A:= “Mindestens drei „Natururlauber“ sind unter den Befragten“
B:= „Die Anzahl der Befragten, die weder „Natururlauber“ noch „Kultururlauber“ sind, beträgt genau drei oder genau vier.“ **4 BE**

b) Bestimmen Sie, wie viele „Thüringen-Urlauber“ mindestens „auf gut Glück“ auszuwählen sind, um mit mindestens 99%iger Sicherheit mindestens einen „Kultur-“ oder „Natururlauber“ befragen zu können! **3 BE**

c) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein „auf gut Glück“ ausgewählter „Kultururlauber“ kein „Natururlauber“ ist! **2 BE**

d) Bestimmen Sie im obigen Sachzusammenhang zwei Ereignisse E und F, die die Wahrscheinlichkeiten

$$P(E) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^{16} \quad \text{und} \quad P(F) = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{13}{5} + \binom{7}{1} \cdot \binom{13}{4}}{\binom{20}{5}}$$

besitzen! **2 BE**

2 Für das Einchecken der Gäste gibt es im Hotel „Zur schönen Aussicht“ zwei Schalter. Der Eincheckvorgang dauert bei ausländischen Gästen jeweils 5 Minuten bei deutschen Gästen jeweils 3 Minuten. Zeitgleich mit den deutschen Ehepaaren Müller und Schulz kommt eine kleine niederländische Reisegruppe mit vier Personen im Hotel an. Diese acht Neuankömmlinge verteilen sich rein zufällig zu je vier Personen auf die beiden Schalter. Herr Müller steht in seiner Reihe als Letzter.
Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße
X: Zufällige Zeit bis Herr Müller den Schalter verlassen kann! **4 BE**

3 Die Internetseite der Thüringer Tourismusorganisation TTO bietet neben Informationen auch die Möglichkeit, Reisen nach Thüringen zu buchen. Eine Marktanalyse A kommt zu Ergebnis, dass 3% aller Besuche dieser Internetseite, die länger als 3 Minuten dauern, zu einer Buchung führen. Einer Marktanalyse B zufolge soll dies sogar in 4,5% aller Fälle so sein. Für den TTO-Vorstand ist es wichtig, auf welcher der beiden Analysen die weitere Planung aufzubauen ist, da im Fall A Geld für eine zusätzliche Werbekampagne zur Verfügung gestellt werden müsste.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, mit einer Zufallsstichprobe vom Umfang 1100 den erforderlichen Alternativtest so durchzuführen, dass sowohl die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art als auch für den Fehler 2. Art jeweils höchstens 0,10 beträgt! Formulieren Sie gegebenenfalls eine entsprechende Entscheidungsregel! 5 BE

Aufgabe C

a) Begründen Sie, dass folgende Aussage wahr ist:
Ist der Graph einer ganzrationalen Funktion f symmetrisch zur y-Achse, so ist der Graph der Ableitungsfunktion f' symmetrisch zum Koordinatenursprung.

2 BE

b) Geben Sie den jeweils maximal möglichen Definitionsbereich an:

$$f_1(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2} \qquad f_2(x) = \frac{2+\sin x}{2+\cos x}$$

2 BE

c) Setzen Sie die angegebene Zahlenfolge (a_n) um drei weitere Folgeglieder fort und geben Sie eine Bildungsvorschrift für diese Zahlenfolge an:
$(a_n) = (4; 7; 12; 19; 28; ...)$

2 BE

d) Ein Quader habe die Kantenlängen 3 LE, 5 LE und h LE.
Ermitteln Sie einen Wert von h, für den zwei Raumdiagonalen senkrecht aufeinander stehen!

2 BE

e) In einer Urne befinden sich nur schwarze und rote Kugeln. Von den insgesamt zwanzig Kugeln werden zwei ohne Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Anzahl der schwarzen Kugeln in dieser Urne, wenn die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine schwarze unter den gezogenen Kugeln zu haben, $\frac{27}{38}$ beträgt!

2 BE

Aufgabe A1

Für jede positive reelle Zahl a seien zwei Funktionen f_a und g_a durch die Gleichungen $y = f_a(x) = \sqrt{a - x}$ und $y = g_a(x) = \sqrt{x} - \sqrt{a}$ gegeben.

a) Nennen Sie die größtmöglichen Definitionsbereiche der Funktionen f_a und g_a!
Geben Sie für jede der Funktionen f_a und g_a die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen mit den Koordinatenachsen an!
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_2 und g_2 in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g_2 aus dem Graphen von f_2 gewinnen kann! **9 BE**

b) Die Graphen der Funktionen f_a und g_a sowie die y-Achse begrenzen ein Flächenstück vollständig. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt!
Die Tangente im Punkt $P_a(a; 0)$ an den Graphen von g_a teilt dieses Flächenstück in zwei Teilflächen.
Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Inhalte dieser Teilflächen zueinander stehen! **9 BE**

c) Der Graph der Funktion g_a sowie die Koordinatenachsen begrenzen ein Flächenstück. Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers!
Nun rotiere dasselbe Flächenstück statt um die x-Achse um die Gerade mit der Gleichung $y = \sqrt{a}$.
Ermitteln Sie auch das Volumen dieses Körpers! **6 BE**

d) Die Punkte $O(0; 0)$, $Q(r; 0)$ und $R(r; f_a(r))$ bilden für jedes r mit $0 < r < a$ ein Dreieck.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert von r gibt, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird!
Geben Sie einen ganzzahligen Wert von a an, für den dieser maximale Flächeninhalt ebenfalls ganzzahlig ist! **6 BE**

Aufgabe A2

Für jede reelle Zahl a sei eine Funktion f_a durch $y = f_a(x) = (x - a) \cdot e^{a+2-x}$ mit $x \in R$ gegeben.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte! Bestimmen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!
Alle Extrempunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion h.
Geben Sie eine Funktionsgleichung von h an!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2 für $1{,}6 \le x \le 7$! **11 BE**

b) Geben Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse aus Teilaufgabe a) zwei Eigenschaften des Graphen einer Stammfunktion von f_a an!
Bestimmen Sie durch partielle Integration eine Gleichung einer Stammfunktion von f_a!
Die x-Achse und der Graph der Funktion f_2 begrenzen im I. Quadranten eine nach rechts ins Unendliche reichende Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt!
Hinweis: $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot e^{-x} = 0$ **6 BE**

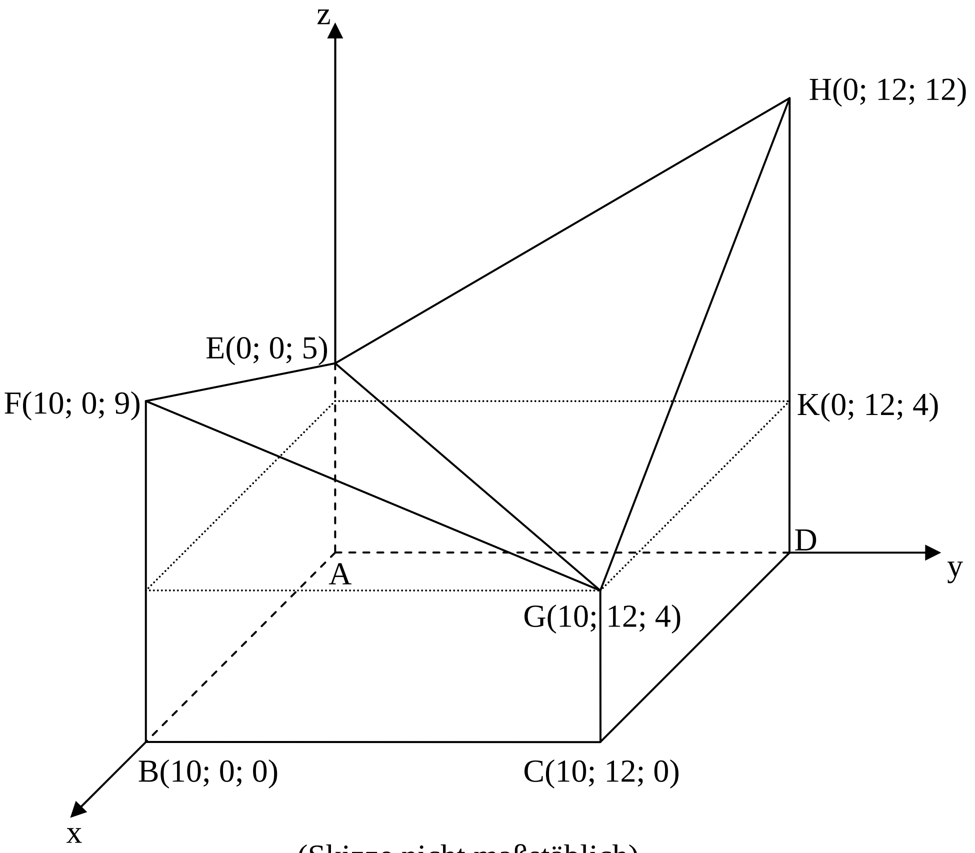
c) Im Punkt $W_a(a+2;\, f_a(a+2))$ werde die Tangente an den Graphen von f_a gelegt.
Für welchen Wert von a schneidet diese Tangente die y-Achse im Punkt $A(0;\, 2012)$?
Nun sei $a = 2$.
Berechnen Sie alle Stellen x_B, für die die Tangente im Punkt $B(x_B;\, f_2(x_B))$ an den Graphen von f_2 durch den Koordinatenursprung verläuft! **5 BE**

d) Für jeden Wert von a bilden die Punkte $R_a(a;\, f_a(a))$, $H_a(a+1;\, f_a(a+1))$ und $W_a(a+2;\, f_a(a+2))$ ein Dreieck.
Zeigen Sie, dass alle diese Dreiecke zueinander kongruent sind!
Berechnen Sie deren Flächeninhalt! **4 BE**

e) Beweisen Sie, dass für die n-te Ableitung $(n \ge 1)$ der Funktion f_a gilt:
$y^{(n)} = f_a^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n - x + a) \cdot e^{a+2-x}$ **4 BE**

Aufgabe B1

Die Abbildung zeigt den vereinfachten Computerentwurf eines Architekten für ein Ausstellungsgebäude. (Eine Längeneinheit betrage einen Meter.)



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Die Ebene ε_1 enthält die Dachfläche EGH und wird beschrieben durch die Gleichung $-48x + 35y - 60z + 300 = 0$. Die Ebene ε_2 enthält die Dachfläche EFG.
Ermitteln Sie für ε_2 eine parameterfreie Gleichung!
(Kontrollergebnis: $\varepsilon_2:\ -24x + 25y + 60z - 300 = 0$)
Aus Gründen der Stabilität wird die Dachfläche EGH durch eine vom Punkt K ausgehende, im Inneren des Gebäudes verlaufende Metallstrebe abgestützt. Diese Strebe soll im Schwerpunkt $S\left(\frac{10}{3};\ 8;\ 7\right)$ des Dreiecks EGH an die Dachfläche angesetzt werden.
Welche Länge besitzt die Strebe?
Untersuchen Sie, ob die Strebe senkrecht zur Dachfläche EGH steht!
(Die Dicke der Strebe werde bei den Berechnungen nicht berücksichtigt.) 5 BE

b) Das vom Dach ablaufende Regenwasser soll über eine Rinne $\overline{EG}$ abgeleitet werden.
Berechnen Sie die Größe des stumpfen Winkels, den die beiden Dachflächen außerhalb des Gebäudes miteinander einschließen!
Die Dachfläche EFG soll vollständig mit Solarzellen ausgelegt werden.
Ermitteln Sie die dabei anfallenden Kosten, wenn pro Quadratmeter 165,00 € veranschlagt werden! **5 BE**

c) Während Ihrer Abiturprüfung gibt es einen Zeitpunkt, zu dem das Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}$ einfällt.
Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf die Solarzellen auf?
Untersuchen Sie, ob dabei die Spitze H des Gebäudes einen Schatten auf die Dachfläche mit den Solarzellen wirft! **5 BE**

d) Die beiden Spitzen F und H werden durch ein straff gespanntes Seil miteinander verbunden. Das Durchhängen des Seils werde vernachlässigt.
Die Geraden, die das Seil $\overline{FH}$ bzw. die Rinne $\overline{EG}$ enthalten, verlaufen windschief zueinander. Berechnen Sie deren Abstand!
Am Seil wird eine Markierung angebracht, die einen Abstand von genau einem Meter von der Dachfläche EGH hat.
Ermitteln Sie die Koordinaten des zugehörigen Punktes auf dem Seil!
(Hinweis: Runden Sie auf zwei Dezimalstellen nach dem Komma.) **5 BE**

Aufgabe B2

Der Psychologe Siegmund F. geht aufgrund von umfangreichen Untersuchungen an mehr als 3 000 Probanden davon aus, dass 3% aller deutschen Schüler MHB-Schüler sind, d.h. Schüler oder Schülerinnen, die eine mathematische Hochbegabung besitzen. Um eine derartige Begabung zu erkennen, werden psychologische und mathematische Tests durchgeführt.
Der Psychologe lädt 100 rein zufällig ausgewählte Schüler aller Schularten aus ganz Deutschland zu einem solchen Test ein.

a) Berechnen Sie aufgrund dieser Annahmen die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis E!
A:= „Unter den getesteten Schülern befinden sich genau drei MHB-Schüler.“
B:= „Unter den getesteten Schülern befinden sich mindestens drei MHB-Schüler.“
C:= $A \cup \overline{B}$
D:= „Der zehnte getestete Schüler ist der erste MHB-Schüler.“
E:= „Spätestens der zehnte getestete Schüler ist der erste MHB-Schüler.“
Beschreiben Sie in diesem Sachzusammenhang ein Ereignis F, das die Wahrscheinlichkeit $P(F) = \binom{49}{1} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{48}$ besitzt! **6 BE**

b) Ermitteln Sie, wie viele Schüler man mindestens testen müsste, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,95 am Ende mindestens 30 als MHB-Schüler bekannt sein sollen! **5 BE**

Nach dem ersten Test werden von den eingeladenen Schülern rein zufällig 25 ausgewählt und einem zweiten Test unterzogen. Unter ihnen befinden sich (wie sich später herausstellt) genau vier MHB-Schüler.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der dritte Schüler beim zweiten Test der erste MHB-Schüler ist! **1 BE**

Die Psychologin Gerlinde M. zweifelt den Anteil von 3% MHB-Schülern an.

d) Mit 2 000 rein zufällig ausgewählten Schülerinnen und Schülern werden nun über eine längere Beobachtungsphase die mathematischen Leistungen getestet und 46 Schülerinnen und Schüler als mathematisch hochbegabt eingestuft.
Diskutieren Sie dieses Ergebnis im Vergleich zu der Ausgangshypothese $p = 0{,}03$ mithilfe eines Hypothesentests! **4 BE**

Von einem anderen Test, den Psychologen zur Begabungserkennung nutzen, sei bekannt, dass er einen rein zufällig ausgewählten Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,066 als mathematisch hochbegabt einstuft, d.h. der Test geht positiv aus. Bei einem Nicht-MHB-Schüler zeige der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 irrtümlich trotzdem eine mathematische Hochbegabung an.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_1, dass dieser Test bei einem MHB-Schüler positiv ausgeht!
Bei Jochen war das Testergebnis negativ.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit p_2, dass Jochen trotzdem mathematisch hochbegabt ist! **4 BE**

Aufgabe C

a) Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1-2n}{3-4n}$ mit $n \in N$.
Geben Sie den Grenzwert g dieser Folge an!
Welches ist das erste Folgeglied, das kleiner als $g + \frac{1}{100}$ ist?

3 BE

b) Der Graph einer quadratischen Funktion hat bei $x_1 = 0$ ein lokales Maximum, bei $x_2 = 3$ eine Nullstelle und schließt mit der x-Achse eine Fläche von $18\,\text{FE}$ ein.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion!

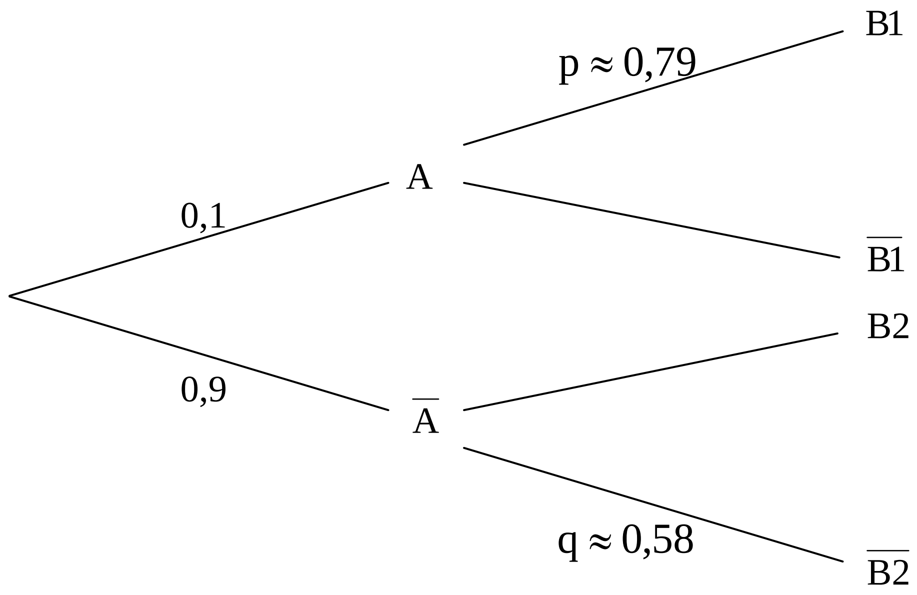
2 BE

c) Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese.

2 BE

d) Anita und Beate werfen auf eine Torwand. Zuerst wirft Anita genau einmal und danach Beate genau siebenmal.
Anitas Trefferwahrscheinlichkeit beträgt 0,10 und Beates 0,20.
Gegeben sind folgende drei Ereignisse (siehe Baumdiagramm).

A: = „Anita erzielt einen Treffer."
B1:= „Beate erzielt mindestens einen Treffer."
B2:= „Beate erzielt mindestens zwei Treffer."



Zeigen Sie, dass $p = P(B1) \approx 0{,}79$ gilt!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese beiden Handballerinnen zusammen mindestens zwei Treffer erzielen!

2 BE

e) Vereinfachen Sie den Term $\log_{\sqrt[8]{a}} a^{251}$ mit $a > 0,\ a \neq 1$ weitestgehend!

1 BE

Aufgabe A1

Für jede reelle Zahl t sei eine Funktion f_t durch die Gleichung

$y = f_t(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + t} = \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{x+t}$ gegeben.

Für die Teilaufgaben a) und b) sei $t = 2$.

a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_2 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf lokale Extrempunkte!
Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_2!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2 und die Asymptoten in einem geeigneten Intervall!
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Asymptoten des Graphen von f_2! Geben Sie die Bedeutung dieses Punktes für den Graphen von f_2 an!

13 BE

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_2 mit

$F_2(x) = 4\ln(x+2) + \frac{x^2}{2} - 3x + 2009$ für $x > -2$ eine

Stammfunktion der Funktion f_2 ist!
In den Schnittpunkten des Graphen der Funktion f_2 mit der x-Achse werden jeweils die Tangenten angelegt. Diese bilden zusammen mit der x-Achse ein Dreieck.
Berechnen Sie, in welchem Verhältnis der Graph der Funktion f_2 diese Dreiecksfläche teilt! Geben Sie dieses Verhältnis sinnvoll gerundet mit ganzen Zahlen an!

8 BE

c) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t an!
Untersuchen Sie jeweils in Abhängigkeit von t den Graphen der Funktion f_t sowohl auf Polstellen und Lücken als auch auf die Anzahl möglicher Extremstellen!
(Auf den Nachweis der Extremstellen wird verzichtet.)

6 BE

d) Zu jedem $t > 1$ existiert genau eine quadratische Funktion q_t, deren Graph die gleichen Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen hat wie der Graph der zugehörigen Funktion f_t.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion q_t!

3 BE

Aufgabe A2

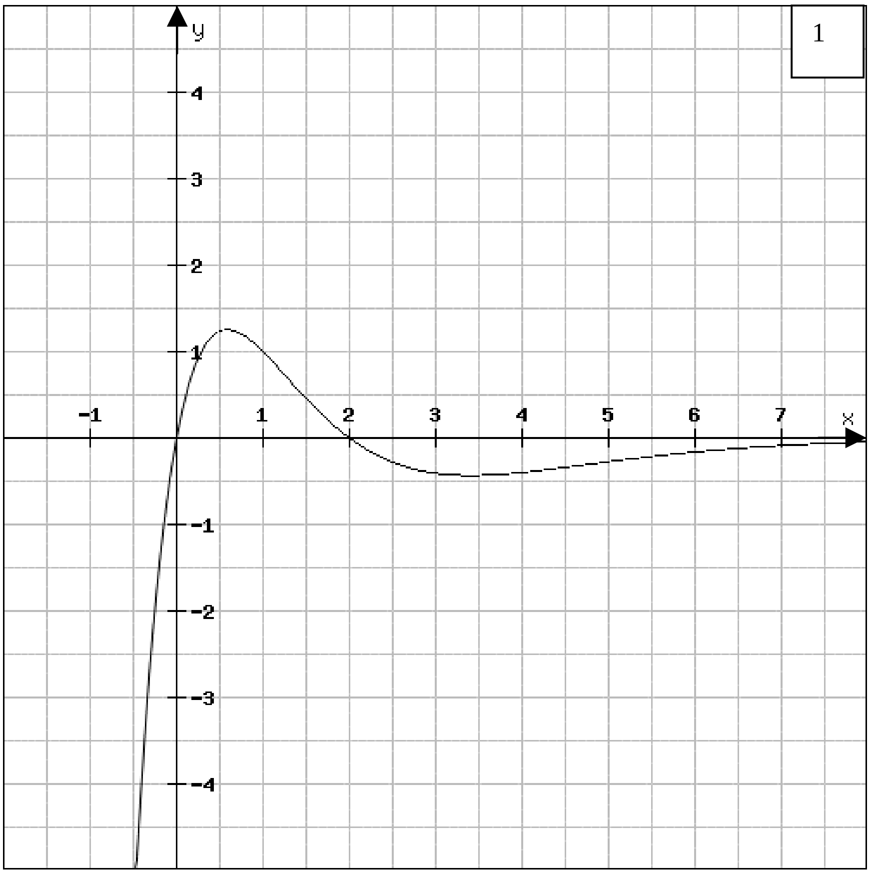
Für jede natürliche Zahl t sei eine Funktion f_t durch die Gleichung
$y = f_t(x) = x^{3-t} \cdot e^{t-x}$ gegeben.

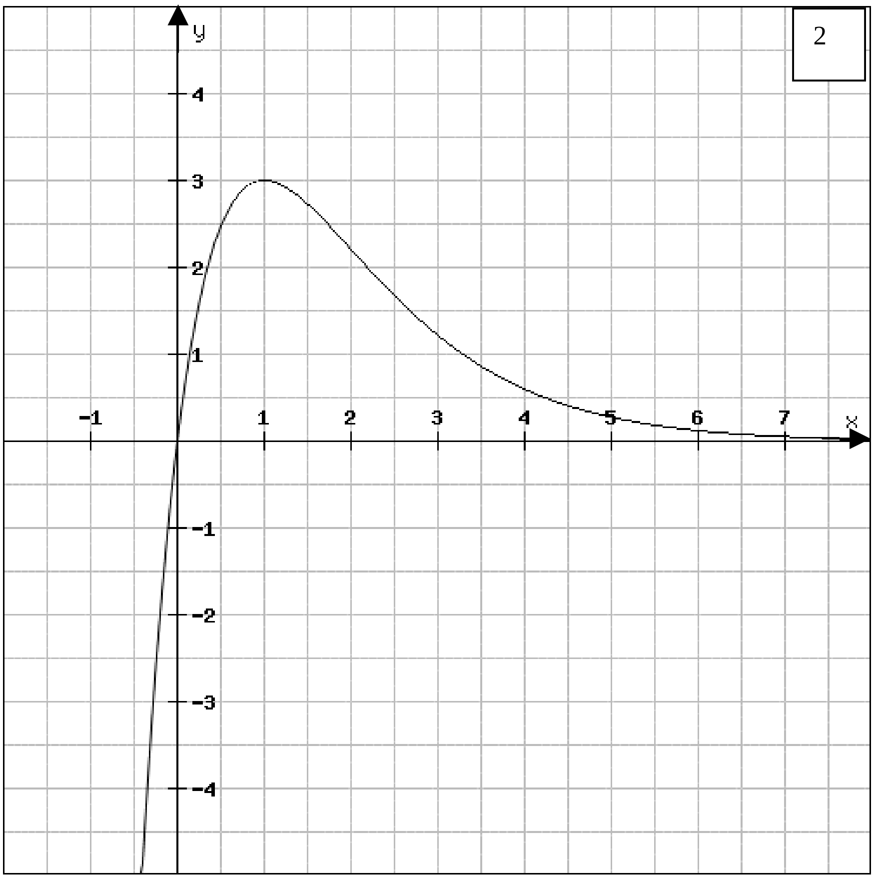
Für die Teilaufgaben a) bis e) sei $t = 1$.

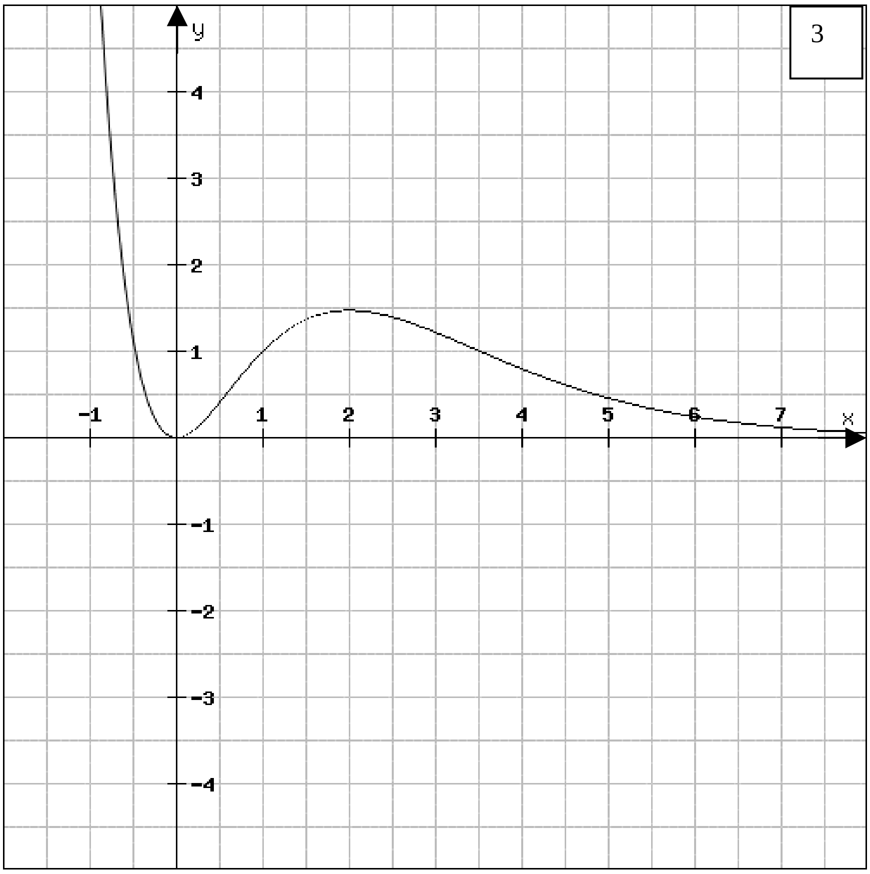
a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_1 auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf lokale Extrempunkte!
Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f_1 an!

7 BE

b) In den Koordinatensystemen 1, 2 und 3 sind die Graphen von f_1 und f_1' sowie einer weiteren Funktion dargestellt. Ordnen Sie den Funktionen f_1 und f_1' den richtigen Graphen zu!
Begründen Sie Ihre Entscheidungen!




y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-1
1
2
3
4
5
6
7
x
2


y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-1
1
2
3
4
5
6
7
x
3

c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Graphen von f_1 und f_1' im Punkt $S(x_s; f_1(x_s))$ mit $x_s > 0$!

3 BE

d) Beweisen Sie, dass für die n-te Ableitung $(n \in N,\ n \geq 1)$ der Funktion f_1 die Gleichung
$f_1^{(n)}(x) = (-1)^n [x^2 - 2nx + n(n-1)]e^{1-x}$ gilt!

4 BE

e) Für $n = -1$ liefert die Gleichung aus Teilaufgabe d) eine Stammfunktion von f_1.
Zeigen Sie, dass diese Aussage richtig ist!
Der Graph von f_1 und die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine nach rechts ins Unendliche reichende Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
(Hinweis: $\lim\limits_{x \to \infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$)

4 BE

f) Geben Sie für $t = 3$ und für $t = 4$ den maximalen Definitionsbereich an!
Untersuchen Sie die Funktionen f_3 und f_4 auf senkrechte Asymptoten!
Für welche Werte von t besitzt die Funktion f_t keine negativen Funktionswerte?
Zeigen Sie, dass der Punkt $P(e; f_t(e))$ gemeinsamer Punkt aller Graphen der Funktionen f_t ist!

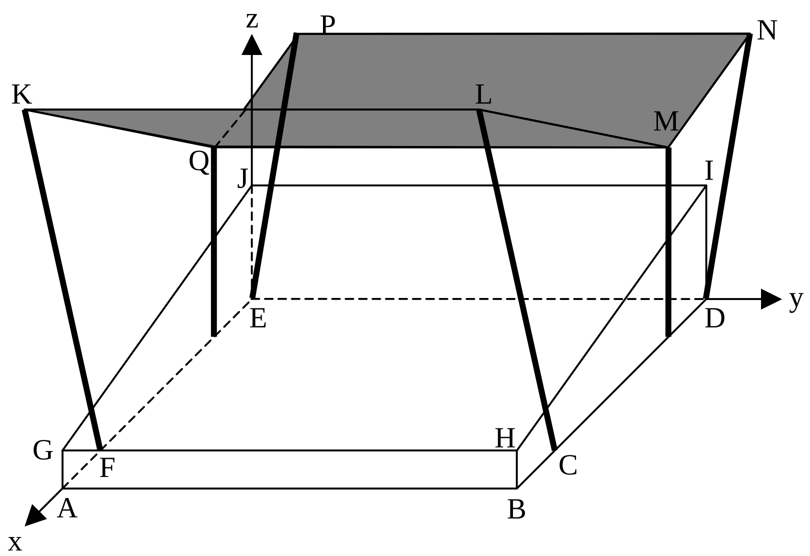
6 BE

g) Die Punkte $O(0;0)$, $Q(r;0)$ und $R(r;f_t(r))$ mit $r > 0$ und $0 \leq t \leq 3$ bilden ein Dreieck.
Bestimmen Sie den Wert von r in Abhängigkeit von t, für den der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird!
(Auf den Nachweis für das Maximum wird verzichtet.)
Geben Sie den ganzzahligen Wert von t an, so dass der maximale Flächeninhalt ganzzahlig wird!

4 BE

Aufgabe B1

Über Internet kann man bei Bedarf mobile Tribünen mit überdachten Sitzplätzen mieten. Die Abbildung zeigt eine vereinfachte Skizze einer solchen Tribüne. Das Tribünendach besteht aus zwei Rechtecken.
Folgende Punkte sind gegeben:
$B(6;\,8;\,0)$, $E(0;\,0;\,0)$, $G(6;\,0;\,1)$, $H(6;\,8;\,1)$, $I(0;\,8;\,3)$, $J(0;\,0;\,3)$,
$L(7;\,8;\,6)$, $M(1;\,8;\,5)$, $N(-1;\,8;\,h)$, $P(-1;\,0;\,h)$.
(Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.)



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Die Ebene ε_1 enthält die Tribünenfläche GHIJ.
Weisen Sie nach, dass diese Ebene durch die Gleichung $x + 3z = 9$ beschrieben werden kann!
Die Ebene ε_2 enthält die Dachfläche MNPQ und verläuft parallel zu ε_1.
Ermitteln Sie die z-Koordinaten der Punkte N und P!
Berechnen Sie den Abstand der beiden Ebenen!

5 BE

b) Die Ebene ε_3 enthält die Dachfläche KLMQ.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Dachflächen MNPQ (aus Teilaufgabe a) und KLMQ miteinander einschließen!
Ermitteln Sie den Inhalt der gesamten Dachfläche!
Gibt es einen Punkt C auf der Strecke $\overline{BD}$, für den $\overline{CL}$ senkrecht zur Ebene ε_3 steht?
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

5 BE

c) Um 12.00 Uhr regnet es. Da es windstill ist, fallen die Tropfen parallel zur z-Achse.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche in der x-y-Ebene, auf die kein Regen fällt!
Die Rinne $\overline{QM}$ enthält ein Loch.
In welcher Entfernung von der Kante $\overline{IJ}$ muss ein Zuschauer auf der Tribüne damit rechnen, nass zu werden?

5 BE

d) Um 14.00 Uhr scheint die Sonne. Der Punkt M wirft dabei auf die Tribünenfläche den Schatten $M'\left(\frac{9}{16};\frac{114}{16};\frac{45}{16}\right)$.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Tribünenfläche treffen!
Untersuchen Sie, ob der gesamte Schatten der Kante $\overline{LM}$ auf die Tribünenfläche fällt!

5 BE

Aufgabe B2

Das Gepäck von Flugreisenden von oder nach Deutschland besteht zu 60 % aus Koffern und zu 30 % aus Reisetaschen. Die restlichen 10 % werden durch andere Gepäckstücke wie Pakete, Seesäcke usw. gebildet. Das Handgepäck, das Passagiere während des Fluges mit sich führen, ist dabei nicht berücksichtigt. Die Koffer sind zu 25 % in blauer Farbe.
Am Flughafen Erfurt werden nach Ankunft eines Flugzeuges aus dem Land Stochasien alle 80 Gepäckstücke in zufälliger Anordnung auf das Entnahmeband in der Ankunftshalle entladen.

a) Begründen Sie, dass unter diesen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dass ein rein zufällig ausgewähltes Gepäckstück ein blauer Koffer ist, 0,15 beträgt!
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis E!
A := „Unter den 80 Gepäckstücken befinden sich genau 12 Koffer in blauer Farbe.“
B := „Unter den entladenen Gepäckstücken sind höchstens 12 blaue Koffer.“
C := „Das sechste Gepäckstück auf dem Band ist der erste blaue Koffer.“
D := „Spätestens das vierte Gepäckstück ist ein Koffer beliebiger Farbe.“
E := „Unter den 80 Gepäckstücken sind mindestens 48 und höchstens 52 Koffer.“

7 BE

b) Beschreiben Sie ein Ereignis E aus dem obigen Sachverhalt, dessen Wahrscheinlichkeit mit
$P(E) = \binom{80}{8} \cdot 0{,}1^8 \cdot 0{,}9^{72} + \binom{80}{9} \cdot 0{,}1^9 \cdot 0{,}9^{71}$ berechnet wird!

1 BE

c) Um die Anzahl der Möglichkeiten zu bestimmen, aus 12 Koffern genau drei auszuwählen, geben Axel und Beate zwei verschiedene Antworten.
Axel: $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$
Beate: $\binom{12}{3} = 220$
Beschreiben Sie für beide Antworten jeweils ein geeignetes Auswahlverfahren!

2 BE

d) Bestimmen Sie, wie viele Gepäckstücke mindestens über das Band gelaufen sein müssen, so dass mit 99,9 %-iger Sicherheit mindestens eine Reisetasche dabei ist!

2 BE

Ein Mitarbeiter des Abfertigungspersonals am Flughafen Erfurt möchte die Behauptung überprüfen, dass der Anteil der Reisetaschen jetzt über 30 % liegt. Dazu beabsichtigt er, die Reisetaschen unter den 80 Gepäckstücken der Urlauber auszuzählen. Nur dann, wenn es mehr als 30 Reisetaschen sind, will er diese Behauptung als richtig einstufen.

e) Konstruieren Sie einen entsprechenden Signifikanztest und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art! Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Behauptung abzulehnen ist, wenn der tatsächliche Anteil der Reisetaschen bei 40 % liegt!

5 BE

Aus Sicherheitsgründen wird das Handgepäck von Flugreisenden jeweils vor dem Abflug auf nicht erlaubte Gegenstände überprüft. Es sei bekannt, dass sich in etwa 2 % aller Handgepäckstücke unerlaubte Gegenstände befinden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,999 erkennt das am Flughafen eingesetzte automatische Prüfsystem solche unerlaubten Gegenstände und sortiert die entsprechenden Handgepäckstücke aus. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,90 erkennt das Prüfsystem Handgepäckstücke ohne unerlaubte Gegenstände und sortiert sie nicht aus.

f) Untersuchen Sie, in welchem möglichst kleinen Intervall mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,97 die Anzahl der aussortierten Handgepäckstücke liegt, wenn das automatische Prüfsystem 10 000 Handgepäckstücke überprüft!
Wählen Sie dazu ein Intervall, das symmetrisch um die zu erwartende Anzahl der aussortierten Gepäckstücke liegt!

3 BE

Aufgabe C

a) Zeigen Sie, dass für jede arithmetische Zahlenfolge (a_n) mit $n \in N,\ n \geq 2$ gilt: $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} = 0$!

2 BE

b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2;\,4;\,-3)$ von der x-Achse!

2 BE

c) Lösen Sie die folgende Gleichung: $e^{2x} = 2e^x - 1$!

2 BE

d) Gegeben sei eine Funktion f mit $f(x) = 3\sin\frac{3}{2}x$.

Ermitteln Sie die kleinste Periode der Funktion f !
Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 20{,}09$!

2 BE

e) Von den Schülern der 12. Klassen, die an der theoretischen Fahrprüfung teilnahmen, bestanden 65 % sofort diese Prüfung. Alle Schüler, die diese Prüfung nicht bestanden, nutzten die Möglichkeit einer Nachprüfung. Diese konnte jetzt von 45 % der Teilnehmer erfolgreich bestanden werden.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestand ein Schüler diese Prüfung spätestens nach der ersten Wiederholung?
2. Eine Klasse mit 20 Schülern nimmt an der Fahrschulprüfung teil. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Schüler spätestens nach der ersten Wiederholung bestanden haben?

2 BE

Aufgabe A1

Für jede positive reelle Zahl t sei eine Funktion f_t durch

$y = f_t(x) = \ln\left(\frac{t}{x} - 1\right)$ gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t an!
Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte!
Bestimmen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten!
(Auf den Nachweis eventueller Wendepunkte wird verzichtet.)
$\left[\text{Kontrollergebnis: } f_t'(x) = \frac{-t}{x(t-x)}\right]$
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_4! **10 BE**

b) Der Graph von f_4 ist symmetrisch zum Punkt $S_4(2;\,0)$.
Weisen Sie diese Symmetrie nach, indem Sie zeigen, dass $f_4(2+x) = -f_4(2-x)$ gilt! **2 BE**

c) Die Funktion F_4 sei eine Stammfunktion von f_4.
Geben Sie aufgrund der Eigenschaften von f_4 zwei Eigenschaften von F_4 an und begründen Sie Ihre Aussagen! **4 BE**

d) Begründen Sie, dass f_4 eine Umkehrfunktion $\overline{f_4}$ besitzt!
Geben Sie den Wertebereich der Funktion $\overline{f_4}$ an!
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $\overline{f_4}$!
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $\overline{f_4}$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a)! **5 BE**

e) An den Graphen von f_t wird im Punkt $S_t\left(\frac{t}{2}; 0\right)$ die Tangente g angelegt. Die Gerade h steht im Punkt S_t auf der Tangente senkrecht.
Die Tangente g und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A_1. Die Gerade h und die Koordinatenachsen begrenzen ein anderes Dreieck mit dem Flächeninhalt A_2.
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Werte von t, für die das Verhältnis $A_1 : A_2$ eine natürliche Zahl ergibt! **6 BE**

f) Untersuchen Sie, ob es Funktionen f_t gibt, für die der Anstieg des Graphen an keiner Stelle den Wert $m = -1$ annimmt!
Geben Sie gegebenenfalls alle Werte von t an! **3 BE**

Aufgabe A2

Gegeben seien die Funktionen f und g_t $(t \in R)$ durch die Gleichungen

$$y = f(x) \;= 1 + \sin(2x) \qquad \text{und}$$
$$y = g_t(x) = 1 + t \cdot \cos(x) \qquad (x \in R).$$

Die Aufgabenstellungen a) bis e) beziehen sich auf das Intervall $0 \le x \le 2\pi$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g_{-2} in ein und dasselbe Koordinatensystem!
Geben Sie an:
- die kleinste Periode der Funktion f,
- die Wertebereiche der Funktionen f und g_{-2},
- die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen!

Die Graphen von f und g_{-2} besitzen genau zwei gemeinsame Punkte und begrenzen genau eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche!
Geben Sie vom Graphen der Funktion g_t die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte und deren Art in Abhängigkeit von t an! **15 BE**

b) Geben Sie die Anzahl gemeinsamer Punkte der Graphen von f und g_0 an!
Für welche Werte des Parameters t besitzen die Graphen der Funktionen f und g_t genau zwei gemeinsame Punkte! **3 BE**

c) Beweisen Sie, dass für die (2n)-te Ableitung $(n \in N,\ n \ge 1)$ der Funktion f
$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \sin 2x$
gilt! **4 BE**

d) Im Punkt $W_1\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ werden jeweils an die Graphen von f und g_t die Wendetangenten angelegt.
Ermitteln Sie die zwei Werte des Parameters t, für die beide Tangenten mit der y-Achse eine Fläche von $\frac{\pi^2}{2}$ FE einschließen!

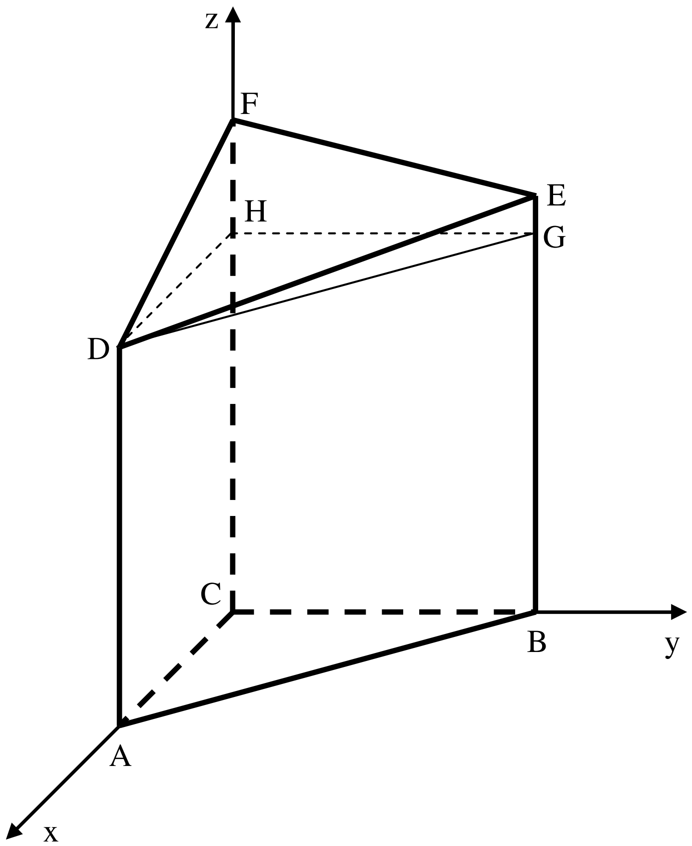
5 BE

e) Die Wendetangenten an den Graphen von g_t in den Punkten $W_1\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ und $W_2\left(\frac{3\pi}{2};1\right)$ sowie die Gerade mit der Gleichung $y=1$ begrenzen ein Dreieck.
Ermitteln Sie die Werte des Parameters t, für die dieses Dreieck gleichseitig ist!

3 BE

Aufgabe B1

Gegeben ist ein kompaktes Werkstück ABCDEF mit den Eckpunkten $A(6;0;0)$, $B(0;8;0)$, $C(0;0;0)$, $D(6;0;10)$, $E(0;8;11)$ und $F(0;0;13)$.
Alle Seitenflächen sind ebene Dreiecke bzw. ebene Trapeze.



Skizze nicht maßstäblich

a) Die Punkte D, E und F bestimmen eine Ebene ε.
Ermitteln Sie eine parameterfreie Ebenengleichung von ε!
Geben Sie die Koordinaten des Punktes X an, in dem die x-Achse die Ebene ε durchstößt! **4 BE**

b) Die Deckfläche DEF und die Seitenfläche ABED schließen im Inneren des Werkstücks einen Winkel ein.
Berechnen Sie die Größe dieses Winkels! **4 BE**

c) Der Punkt L auf der Kante $\overline{AB}$ besitzt von F den kürzesten Abstand.
Berechnen Sie die Koordinaten von L und den kürzesten Abstand! **4 BE**

Das Werkstück wird in zwei Teile zersägt. Der Schnitt verläuft durch D und parallel zur Grundfläche ABC. Die Kante $\overline{BE}$ wird im Punkt G geschnitten, die Kante $\overline{CF}$ im Punkt H. Einer der Teilkörper ist ein Prisma, der andere eine Pyramide.

d) Geben Sie die Koordinaten der Punkte G und H an!
Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper! **5 BE**

e) Durch das Prisma wird parallel zur z-Achse gebohrt. Dabei soll der Rand des Bohrloches von allen drei Seitenflächen des Prismas gleich weit entfernt sein. M ist der Mittelpunkt der Bohrung in der Grundfläche ABC.
Bestimmen Sie die Koordinaten von M! **3 BE**

Aufgabe B2

Eine Sonde soll die Zusammensetzung der Gase untersuchen, die vom Südpol des Saturnmondes Enceladus entweichen.
Eine Befragung ergab, dass 60 % der Astrophysiker einen messbaren Ethangehalt und 10 % der Astrophysiker einen messbaren Propangehalt vermuten.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse!

A:= „Von zehn Befragten vermuten genau vier einen messbaren Ethangehalt."

B:= „Von zehn Befragten vermuten mindestens vier einen messbaren Ethangehalt."

C:= „Von zehn Befragten vermutet erst der zehnte einen messbaren Ethangehalt."

D:= „Der dritte Befragte ist der zweite, der einen messbaren Ethangehalt vermutet."

E:= „Bei den ersten drei Befragten wechseln die Antworten zum messbaren Ethangehalt nach jeder Befragung." **6 BE**

b) Bei einer genaueren Auswertung der Umfrageergebnisse stellt man fest, dass alle Astrophysiker, die einen messbaren Propangehalt vermuten, auch einen messbaren Ethangehalt vermuten.
Wie viel Prozent der Astrophysiker, die einen messbaren Ethangehalt vermuten, vermuten auch einen messbaren Propangehalt? **2 BE**

c) Bei einer Messung wird vorhandenes Ethin mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % nachgewiesen.
Wie viele Messungen sind mindestens durchzuführen, damit vorhandenes Ethin nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 0,5 % nicht nachgewiesen wird? **2 BE**

Beim Bau der Sonde werden Dichtungen von hoher Qualität benötigt. Nur 80 % der Dichtungen, die eine Firma produziert, können nach erfolgreichem Durchlauf der Testreihen wirklich eingebaut werden.

d) Wie viele Dichtungen dieser Firma müssen mindestens bestellt werden, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 400 brauchbare Dichtungen bekommt? $\boxed{\text{5 BE}}$

e) Ein Team vermutet, dass der Anteil brauchbarer Dichtungen dieser Firma nur noch 60 % beträgt.
Legen Sie einen Prüfplan vor, der folgenden Kriterien genügt!
1. Es werden weniger als 100 Dichtungen geprüft.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dieser Firma irrtümlich eine höhere Ausschussrate zu unterstellen, ist kleiner als 1 %.
3. Die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich weiterhin nur von einer Ausschussrate von 20 % auszugehen, ist kleiner als 10 %. $\boxed{\text{5 BE}}$

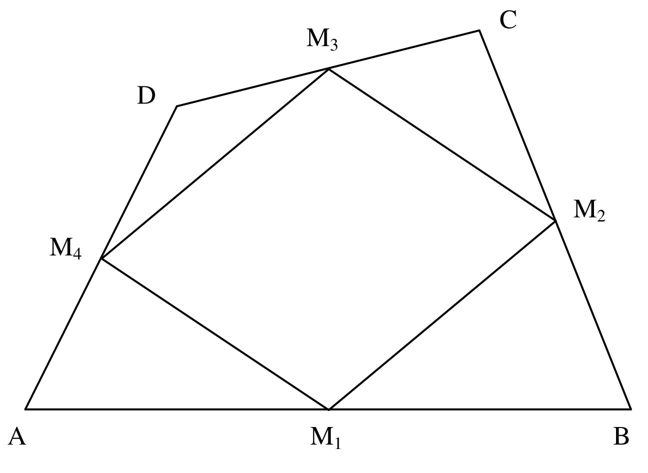
Aufgabe C

a) Spiegelt man den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = e^x$ an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$, erhält man den Graphen einer Funktion g.
Geben Sie die Gleichung dieser Funktion g an! 2 BE

b) Gegeben sind gebrochenrationale Funktionen mit Gleichungen der Form $y = f(x) = \frac{x^2 - ax}{x + b}$.
Geben Sie die Gleichung einer dieser Funktionen an, deren Graph die schräge Asymptote $y = x + 1$ hat! 2 BE

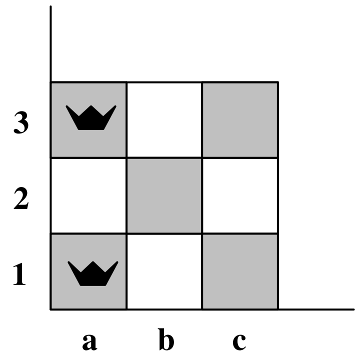
c) Gegeben sei eine Zahlenfolge (a_n) durch
$a_1 = c$ und $a_{n+1} = 2a_n - 1$.
(1) Berechnen Sie für $c = 3$ die ersten vier Folgenglieder!
(2) Für welchen Wert von c ist die Folge (a_n) eine konstante Folge? 2 BE

d) Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene und bilden ein Viereck. Die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 seien die Mittelpunkte der Viereckseiten.
Zeigen Sie, dass das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm ist!



2 BE

e) Matteo lernt Schach spielen und setzt seinen König rein zufällig. Er weiß nur, dass der König bei jedem Zug auf ein Nachbarfeld gesetzt werden muss.
(Hinweis: Zwei Felder heißen benachbart, wenn sie mindestens einen Eckpunkt gemeinsam haben.)
Matteos König steht auf dem Feld a1.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht sein König nach zwei Zügen auf dem Feld a3?



2 BE