Johannes Gronitz

Praktische Mathematik

1975 Volk und Wissen Berlin
MSB: Nr. 69
Abschrift und LaTex-Satz: 2022 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ständig wächst die Bedeutung der Mathematik. In den Naturwissenschaften, in der Technik, in der Ökonomie, in der Planung und Leitung der Volkswirtschaft und in vielen anderen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis werden in immer größerem Umfange mathematische Verfahren und Methoden benötigt und angewandt.
Oft begegnet man heute mathematischen Problemen und Aufgabenstellungen, die mit den herkömmlichen Methoden nicht lösbar sind oder die nur auf sehr schwierige Art gelöst werden können.

So muss man z.B. lineare Gleichungssysteme mit Hunderten von Gleichungen lösen, Nullstellen von Polynomen hohen Grades ermitteln, Wurzeln von transzendenten Gleichungen mit einer Unbekannten bestimmen, Integrale mit komplizierten Integranden berechnen, bei Funktionen, die nur in Form von Tabellen gegeben sind, interpolieren und Anfangswert- und Randwertprobleme bei Differentialgleichungen behandeln.

Die Zahl solcher Aufgaben wächst ständig. Sie wird, da die Mathematik immer mehr zur unmittelbaren Produktivkraft wird, weiter anwachsen. Die Kompliziertheit und der Umfang derartiger Aufgabenstellungen werden zunehmen.
Die Behandlung der genannten Probleme erfordert einen umfangreichen Rechenaufwand. Zur Bewältigung dieser gewaltigen Rechenarbeit stehen den Mathematikern heute in Gestalt der Rechenautomaten unentbehrliche Helfer zur Verfügung.

Elektronische Rechner machen es möglich, eine Vielzahl von volkswirtschaftlich wichtigen Aufgaben mit Hilfe von Verfahren, die von Mathematikern entwickelt wurden, zu lösen. Die so beschriebenen Aufgaben gehören vorwiegend zum Tätigkeitsfeld der Praktischen Mathematik.

Die Praktische Mathematik ist somit von großer Bedeutung für die Anwendung. Sie ist ein wichtiges Bindeglied zwischen Theorie und Praxis, weil sie Verfahren zur Lösung praktischer Probleme entwickelt, untersucht und für die Praxis bereitstellt.
Meist werden grafische Methoden, die Nomographie und die Numerische Mathematik unter der Überschrift "Praktische Mathematik" zusammengefasst. Wir wollen uns im wesentlichen dieser Einteilung anschließen.

Man kann auch noch andere mathematische Disziplinen und Teilgebiete der Mathematik zur Praktischen Mathematik zählen, so z. B. die Optimierung, die Spieltheorie und Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Aus diesen Bereichen sollen einige einfache Probleme der Linearoptimierung in die folgenden Ausführungen einbezogen werden.

Allerdings kann das, was hier unter Praktischer Mathematik zusammengefasst wird, nicht isoliert von anderen mathematischen Disziplinen und Teilgebieten betrachtet werden. Alle mathematischen Disziplinen befruchten sich gegenseitig, sind voneinander abhängig und gehören zusammen.

Unter grafischen Methoden versteht man alle Verfahren, mit deren Hilfe die Lösungen einer Aufgabenstellung zeichnerisch gewonnen werden. Mit Hilfe grafischer Methoden kann man z. B. Gleichungen lösen, Integrale und Differentialgleichungen behandeln. Derartige Verfahren werden auch zum Teil im Unterricht der Oberschule behandelt.
Die Genauigkeit der grafischen Methoden ist beschränkt. Man wendet sie an, um z. B. eine grobe Näherungslösung, die man vielfach als Ausgangswert für Verfahren zur Verbesserung einer Näherung benötigt, zu finden. Grafische Methoden sind einfach, übersichtlich und anschaulich.

Sie haben allerdings viel weniger Bedeutung als Verfahren der Numerischen Mathematik.

Mit Hilfe von Nomogrammen kann man gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen veränderlichen Größen bildlich darstellen. Die gesetzmäßigen Zusammenhänge kann man oft in Form einer Gleichung darstellen (z. B. Ohmsches Gesetz: $U = I \cdot R$).
So lernt man im Schulunterricht bereits in der grafischen Darstellung von Funktionen der Form $y = f(x)$ solche Nomogramme kennen. Aus dem Kurvenbild lassen sich die der unabhängigen Variablen x zugeordneten Werte der abhängigen Variablen y ablesen.

In der Nomographie werden solche gesetzmäßigen Zusammenhänge in Form von Funktionsleitern, Funktionsnetzen, Netztafeln, Linientafeln und in Form zusammengesetzter Nomogramme dargestellt, untersucht und ausgewertet.

Das umfangreichste und wichtigste Teilgebiet, das man meist unter der Überschrift "Praktische Mathematik" findet, ist die Numerische Mathematik.
Die Numerische Mathematik ist eine selbständige mathematische Disziplin. Sie befasst sich mit der angenäherten zahlenmäßigen Lösung mathematischer Probleme. Dabei werden in der Numerischen Mathematik Verfahren entwickelt, algorithmisch aufbereitet, untersucht und diskutiert, mit deren Hilfe man unter Ausnutzung moderner Rechenhilfsmittel (Rechenautomaten) die Lösung mathematischer Probleme bis zum Zahlenresultat ermöglicht. Die Verfahren müssen so beschaffen sein,

- dass die Genauigkeit des Ergebnisses beliebig gesteigert werden kann,
- dass die Beschreibung (Angabe gewisser Operationen und Entscheidungen in einer bestimmten Reihenfolge) eines solchen Verfahrens endlich ist,
- dass die Beschreibung stets vollständig und eindeutig ist.

Dabei beschäftigt sich die Numerische Mathematik u. a. mit der Fehlerrechnung, mit weiteren Problemen, die beim Zahlenrechnen auftreten (Genauigkeitsfragen, Rechenanordnung und -schemata, Arbeit mit Näherungsformeln), mit Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen, mit Methoden zur numerischen Differentiation und Integration, mit Fragen der Interpolation und Approximation und mit der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen.
Im Rahmen der Numerischen Mathematik werden auch Rechenhilfsmittel (Tafeln, Rechengeräte) erläutert. Enge Bindungen bestehen zwischen der Numerischen Mathematik und der Rechentechnik.

Die Linearoptimierung ist eine mathematische Disziplin, die in vielen Bereichen der Praxis Anwendung findet. Viele ökonomische Probleme, Aufgaben aus der Planung und Leitung und aus anderen Bereichen führen auf Linearoptimierungsaufgaben, auf die Aufgabenstellung, die Werte eines Systems von n Variablen, $x_1, x_2, ..., x_n$ zu finden, für die eine gegebene lineare Funktion

$$f(x) = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

einen optimalen (maximalen oder minimalen) Wert hat und für die zugleich gewisse Nebenbedingungen, die in Form linearer Gleichungen und Ungleichungen gegeben sind, erfüllt sind.

Zur Lösung solcher Aufgaben gibt es eine Reihe von speziellen Verfahren. Einfache Linearoptimierungsaufgaben, nämlich solche mit zwei Variablen, kann man auch grafisch lösen.
Dazu sind Kenntnisse über Ungleichungen, Ungleichungssysteme, über das Rechnen mit Ungleichungen, über äquivalente Umformungen bei Ungleichungen und über die geometrische Interpretation von Ungleichungen und einfachen Ungleichungssystemen notwendig.

In dem Lehrbuch "Praktische Mathematik" für den fakultativen Unterricht der erweiterten Oberschule sollen einige Verfahren der Praktischen Mathematik, insbesondere Probleme der Numerischen Mathematik, und einfache Probleme der Linearoptimierung behandelt werden.
Es werden

- das Rechnen mit Zahlen,
- die grafische Darstellung von Algorithmen,
- Lösungsmethoden für Gleichungen mit einer Variablen,
- ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- die Interpolation,
- die numerische Integration,
- Ungleichungen,
- Ungleichungssysteme und
- einfache Probleme der Linearoptimierung

betrachtet.
Die Kapitel 2. (Rechnen mit Zahlen) und 3. (grafische Darstellung von Algorithmen) enthalten allgemeine Hinweise.

Die Abschnitte 4.1. und 4.2. entsprechen dem Lehrplanabschnitt 1.1[1] (Grafische Lösung von Gleichungen mit einer Variablen), die Abschnitte 4.3. bis 4.6. im wesentlichen dem Lehrplanabschnitt 3. (Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen), und das Kapitel 5. entspricht dem Lehrplanabschnitt 2. (Das Gausssche Eliminationsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen).

Im Kapitel 4. wird zusätzlich als einfaches Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen die regula falsi behandelt. Damit haben die Teilnehmer am Lehrgang "Praktische Mathematik" im Rahmen des fakultativen Unterrichts die Möglichkeit, sich noch ein weiteres Verfahren anzueignen.

Die Kapitel 6. und 7. (Interpolation und Numerische Integration) sind nicht im Lehrplan enthalten. Die Interpolation und die numerische Integration sind jedoch wichtige Aufgabenstellungen der Numerischen Mathematik, und: diese beiden Komplexe sind für die Anwendung der Mathematik bedeutungsvoll. Der Leser hat so die Möglichkeit, sich selbständig in zwei weitere Probleme einzuarbeiten.
Das Kapitel 8. (Ungleichungen, Ungleichungssysteme und einfache Probleme der Linearoptimierung) enthält im wesentlichen das, was in den Lehrplanabschnitten 4. und 5. gefordert wird.

In den einzelnen Abschnitten sind Wiederholungsfragen bzw. -aufgaben enthalten, mit denen die Verbindung zum obligatorischen Unterrichtsstoff der Schule hergestellt wird.

Beispiele werden zur Erläuterung der Verfahren angegeben, Aufgaben sind zur Übung und Vertiefung zusammengestellt und einfache Beispiele zur grafischen Darstellung von Algorithmen dienen der Entwicklung der algorithmischen Arbeitsweise.
Bei der Durchrechnung der Beispiele wurden mathematische Hilfsmittel (Zahlentafeln, Tischrechenmaschinen usw.) eingesetzt. Die mit (L) gekennzeichneten Aufgaben wurden im Kapitel 9. Lösungen berücksichtigt.

[1] Vgl. "Pläne für den fakultativen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht". Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 39...49.

2 Rechnen mit Zahlen

2.1 Hinweise zum Rechnen mit Zahlen

Wenn wir hier einige Hinweise für das Rechnen mit Zahlen zusammenstellen, dann wollen wir davon ausgehen, dass die mathematische Formulierung des praktischen Problems bereits vorliegt und dass bekannt ist, nach welchen Verfahren dieses Problem zu lösen ist.

Man wird also beim zahlenmäßigen Lösen eines gegebenen Problems eine mathematische Formel oder eine Rechenvorschrift in anderer Weise zugrunde legen. Das Rechnen erfolgt dann nach dieser Vorschrift bzw. nach diesem System von Regeln. Man spricht auch vom Algorithmus des Verfahrens und meint damit also die Gesamtheit von Regeln und Formeln des Rechenverfahrens.

Bei umfangreichen Rechnungen treten häufig Fehler auf, weil der Rechner die Übersicht verliert, weil der Rechengang nicht klar aufgegliedert ist oder weil während der Rechnung bzw. nach Vorliegen des Endergebnisses keine Kontrollen bzw. Proben durchgeführt werden. Zahlenwerte, die berechnet werden, müssen jedoch einer vorgeschriebenen Genauigkeit genügen und müssen auch praktisch verwertbar sein. Man muss sich auf die Ergebnisse der Rechnung verlassen können.
Was sollte man beim Rechnen mit Zahlen beachten ?

1. Man muss übersichtlich arbeiten.
Es ist also notwendig, Haupt- und Nebenrechnungen voneinander zu trennen. Die Rechnung muss übersichtlich angeordnet werden. Dabei sollte man sich ein geeignetes Rechenschema anlegen.

2. Man muss den Algorithmus richtig aufgliedern.
Eine Formel, einen Formelsatz oder eine Rechenvorschrift für ein bestimmtes Verfahren muss man in geeigneter Weise in Einzelschritte zerlegen bzw. zergliedern. Dabei sollte man sich genau überlegen, welche Werte (Daten) für die Rechnung benötigt werden, nach welchen Vorschriften (z.B. nach welcher Formel) die Rechnung erfolgt, welche Tabellenwerte in die Rechnung eingehen und welche Werte als Ergebnis zur Verfügung stehen müssen.

3. Man muss im Laufe der Rechnung Kontrollen durchführen.
Die Kontrollen sind bei den verschiedenen Verfahren unterschiedlich. Sie können auch in der Weise erfolgen, dass mehrere Rechner nach dem gleichen Verfahren bzw. nach unterschiedlichen Verfahren parallel rechnen und Zwischenresultate laufend vergleichen.

4. Man muss eine Endkontrolle durchführen.
Auch die Endkontrollen können unterschiedlich sein. Beim Lösen einer Gleichung bzw. eines Gleichungssystems z. B. wird man das Ergebnis in die Ausgangsgleichung bzw. in das entsprechende Ausgangssystem einsetzen und nachprüfen, ob der Wert die Gleichung bzw. das System erfüllt.

5. Man muss, wenn das möglich ist, eine Fehlerbetrachtung durchführen.
Da das Ergebnis mit einer bestimmten Genauigkeit benötigt wird, ist es notwendig, entweder mit den Hilfsmitteln der Fehlerrechnung oder mit anderen Hilfsmitteln (z. B. Formeln zur Fehlerabschätzung bei bestimmten Lösungsverfahren) den Fehler abzuschätzen.

6. Man sollte rationell arbeiten, d.h. unter Nutzung aller möglichen Rechenhilfsmittel. Für das zahlenmäßige Lösen mathematischer Probleme stehen eine ganze Reihe von Hilfsmitteln zur

Verfügung. Solche Hilfsmittel sind: Tafeln, Rechenstab und Rechenmaschinen.

Diese Hinweise oder Regeln zum Zahlenrechnen sollen noch an zwei Beispielen erläutert werden.

Beispiel 2/1:
Es ist die quadratische Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ $(A \neq 0)$ zu lösen.
Aus $Ax^2 + Bx + C = 0$ erhält man bei Division durch A die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit } p = \frac{B}{A} \text{ und } q = \frac{C}{A}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

wobei für $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ die Wurzeln reell sind.

Bei der zahlenmäßigen Lösung könnte man folgende Zergliederung des Algorithmus angeben:
Gegeben: A, B, C $(A \neq 0)$
Ermittlung der Zwischenwerte: $p = \frac{B}{A}$, $q = \frac{C}{A}$
Berechnung der Diskriminante: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Berechnung der Wurzeln: Falls $D > 0$ gilt, ergibt sich

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

Eine Endkontrolle (Probe) erfolgt durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung. Als Rechenhilfsmittel wird man hier die Zahlentafel bzw. den Rechenstab verwenden.

Beispiel 2/2:
Die Quadratwurzel $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ kann man nach Newton näherungsweise nach folgender Formel bestimmen:

$$y \approx y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right)$$

für $n = 1,2,...$ und mit $y_0 = x$.
Man kann die Formel zergliedern und die Berechnung nach folgendem Schema durchführen:

n	y_{n-1}	$\frac{x}{y_{n-1}}$	$\frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) = y_n$
1	$y_0 = x$	1	$\frac{1}{2}(x+1) = y_1$
2	y_1	$\frac{x}{y_1}$	$\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{x}{y_1}\right) = y_2$
3	y_2	...	...

Falls $x = 2$ ist, erhält man, wenn man rundet,

n	y_{n-1}	$\frac{x}{y_{n-1}}$	y_n
1	2,000	1,000	1,500
2	1,500	1,333	1,417
3	1,417	1,411	1,414 ...

Es ergibt sich also $y = \sqrt{2} \approx y_3 = 1{,}414$.
Falls man Tischrechenmaschinen zur Verfügung hat, wird man sie bei der Lösung dieser Aufgabe einsetzen. Eine Endkontrolle nach drei Rechenschritten ergibt $y_3^2 = 1{,}414^3 \approx 1{,}999$.

2.2 Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung

Die meisten Zahlenangaben, mit denen man es in der Praxis zu tun hat, sind Näherungswerte, also Werte, die vom exakten Wert abweichen bzw. Werte, die mit einem Fehler behaftet sind. Es handelt sich vielfach um Mess- bzw. Tabellenwerte.
Auch gerundete Zahlen sind natürlich mit einem Fehler behaftet.

Wenn z.B. berichtet wird, dass ein Sportler beim Lauf die 100 m-Strecke in 10,3 s zurücklegte, so sind die Messwerte 100 m und 10,3 s als Näherungswerte zu betrachten.
Wenn man bei Berechnungen Funktionswertetabellen verwendet, dann sind in diesen Tabellen die meisten Funktionswerte wegen der Beschränkung auf eine bestimmte Stellenzahl mit Fehlern behaftet. Falls z.B. $x \approx 51{,}6$ ist, also die Zahl x gerundet ist, so gilt $51{,}55 \leq x \leq 51{,}64$.

Wenn man mit diesen Werten rechnet, so pflanzen sich die Fehler fort und neue kommen hinzu. Dabei kann es passieren, dass der Fehler im Endergebnis so groß ist, dass der errechnete Wert nicht mehr zu gebrauchen ist. Es ist also notwendig, eine Möglichkeit zur quantitativen Erfassung der Fehler anzugeben und zu untersuchen, wie sich Fehler bei Rechenoperationen fortpflanzen.

Vielfach muss man Werte runden.
Das Runden ist durch folgende Vorschriften festgelegt:

Folgt vor dem Runden auf die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll,

a) eine 0, 1, 2, 3, 4, so bleibt die Stelle ungeändert (Abrunden);

b) eine 6, 7, 8, 9, so wird die letzte Stelle um 1 erhöht (Aufrunden);

c) eine 5 mit noch mindestens einer von Null verschiedenen Ziffer dahinter, so wird aufgerundet;

d) eine 5, von der bekannt ist, wie sie durch Runden entstanden ist, so wird abgerundet, wenn die 5 aufgerundet war, und es wird aufgerundet, wenn die 5 abgerundet war;

e) eine genaue 5 (das ist eine 5, hinter der nur Nullen folgen) oder eine 5 unbekannter Herkunft und wird mit der gerundeten Zahl weitergerechnet, dann wird so gerundet, dass die Zahl gerade bleibt (Geradezahlregel).

□ Beispiel 2/3:

$$\begin{aligned}
7{,}3234 &\approx 7{,}323 \approx 7{,}32\\
8{,}158 &\approx 8{,}16 \approx 8{,}2\\
8{,}37501 &\approx 8{,}38\\
4{,}349 &\approx 4{,}35 \approx 4{,}3\\
3{,}451 &\approx 3{,}45 \approx 3{,}5\\
0{,}735 &\approx 0{,}74\\
0{,}745 &\approx 0{,}74
\end{aligned}$$

Die Güte eines Näherungswertes hängt ab von seiner Abweichung vom exakten Wert.

▷ Definition 2/1:
Falls x der exakte Wert einer zu messenden Größe ist und x_0 der Messwert oder Näherungswert, dann nennt man

$$\varepsilon = x_0 - x$$

den absoluten Fehler des Messwertes und

$$k = x - x_0$$

die Korrektur.

Ein Näherungswert ist umso genauer, je kleiner der Betrag seines absoluten Fehlers ist. Beim Runden ist der Betrag des absoluten Fehlers stets kleiner oder höchstens gleich einer halben Einheit der letzten Stelle.
Im allgemeinen ist der exakte Wert nicht bekannt. Daher kann man also auch den absoluten Fehler und die Korrektur nicht angeben. Bei Messgeräten ist es üblich, dass man angibt, welche maximale Abweichung vom exakten Wert zu erwarten ist. Diese Abweichung ist dann eine obere Schranke für den Betrag des absoluten Fehlers.

▷ Definition 2/2:
Der Absolutbetrag der maximalen Abweichung vom exakten Wert heißt obere Schranke oder absolute Fehlerschranke.
Man bezeichnet sie mit Δx.

Es gilt also

$$|\varepsilon| = |k| \leq \Delta x \qquad \text{oder} \qquad |x_0 - x| = |x - x_0| \leq \Delta x$$

Auch bei Messwerten und Tabellenwerten kann man diese absolute Fehlerschranke angeben.
Der exakte Wert liegt zwischen $x_0 - \Delta x$ und $x_0 + \Delta x$. Es gilt also

$$x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x$$

Will man die Fortpflanzung von Fehlern untersuchen, dann muss man davon ausgehen, dass der Wert maximal mit dem Fehler $\pm\Delta x$ behaftet sein kann. Man muss also rechnen mit $x = x_0 \pm \Delta x$.

□ Beispiel 2/4:
Es sei $x = (135{,}44 \pm 0{,}01)$ m.
Die absolute Fehlerschranke Δx beträgt 0,01 m. Man kann demnach das Messergebnis in diesem Fall nur bis auf eine Genauigkeit von ± 1 cm angeben. Das bedeutet, dass x zwischen 135,43 m und 135,45 m liegt.

Neben den Begriffen absoluter Fehler und absolute Fehlerschranke verwendet man noch weitere Begriffe bei Fehlerbetrachtungen.

▷ Definition 2/3:
Der relative Fehler ist der Absolutbetrag des Quotienten aus ε und x:

$$\delta = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right|$$

Da der exakte Wert x nicht bekannt ist, setzt man in diese Formel näherungsweise x_0 ein, und man erhält

$$\delta \approx \left|\frac{\varepsilon}{x_0}\right|$$

Diesen relativen Fehler drückt man gewöhnlich in Prozent aus:

$$\delta \approx 100 \cdot \left|\frac{\varepsilon}{x_0}\right| \%$$

Man kann so Näherungswerte hinsichtlich ihrer Genauigkeit vergleichen.
Auch für den relativen Fehler kann man eine Schranke angeben. Die Schranke für den relativen Fehler ist

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad \text{oder näherungsweise} \qquad \delta x \approx \frac{\Delta x}{|x_0|}$$

Es gilt also

$$\delta \leq \frac{\Delta x}{|x|}$$

☐ Beispiel 2/5:
Es sei $x = (135{,}44 \pm 0{,}01)$ m. Die relative Fehlerschranke ist in diesem Fall

$$\delta x \approx \left| \frac{\Delta x}{x_0} \right| = \frac{0{,}01}{135{,}44} \approx 0{,}0001; \qquad \text{also } 0{,}01\%$$

Falls man die Rechnung mit Näherungswerten durchführt, ist das Resultat auch nur angenähert richtig. Die Ungenauigkeit des Ergebnisses hängt im wesentlichen von den Fehlern ab, die in die Rechnung eingehen. Natürlich entstehen auch noch Fehler durch das Runden im Laufe der Rechnung, und es können auch Fehler dadurch entstehen, dass eine Aufgabe durch eine sogenannte Ersatzaufgabe approximiert, d.h. angenähert werden muss.

Bei der Angabe der Ergebnisse ist es notwendig, sinnvoll zu runden, und es muss das Ergebnis mit einer sinnvollen Genauigkeit angegeben werden.
Man unterscheidet Eingangsfehler, numerische Fehler (oder Rechenfehler), Verfahrensfehler und vollständige Fehler.

Eingangsfehler heißen Fehler, die beim Lösen von Aufgaben durch ungenaue Anfangsdaten entstehen. Dabei versteht man unter den Anfangsdaten die Gesamtheit aller Größen, die gegeben sein müssen, um die geforderte Lösung einer Aufgabe zu erhalten.
Numerische Fehler heißen Fehler, die durch Ungenauigkeiten im Rechengang entstehen. Verfahrensfehler heißen Fehler, die dadurch entstehen, dass man eine Aufgabe durch eine Ersatzaufgabe approximiert.

Der vollständige Fehler einer Lösung setzt sich aus Eingangsfehlern, numerischen Fehlern und Verfahrensfehlern zusammen.
In der nun folgenden Betrachtung soll gezeigt werden, wie sich Eingangsfehler im Falle der Grundrechenoperationen auf die Rechnung auswirken.

Es seien x_0 und y_0 die Näherungswerte, $\varepsilon_x = x_0 - x$ und $\varepsilon_y = y_0 - y$ die absoluten Fehler sowie Δx und Δy die absoluten Fehlerschranken.
Für die absoluten Fehler bei Summe und Differenz erhält man dann

$$\varepsilon_{x \pm y} = (x_0 \pm y_0) - (x \pm y) = \varepsilon_x \pm \varepsilon_y$$

wenn mit $\varepsilon_{x \pm y}$ der absolute Fehler der Summe bzw. Differenz bezeichnet wird. Nach der Dreiecksungleichung[2] gilt

$$|\varepsilon_{x \pm y}| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y| \leq \Delta x + \Delta y$$

Damit ergibt sich als absolute Fehlerschranke für Summe bzw. Differenz

$$\Delta(x \pm y) \leq \Delta x + \Delta y$$

[2] Falls a und b reelle Zahlen sind, dann gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$.

☐ Beispiel 2/6:
Es seien $x = (5{,}55 \pm 0{,}01)$ m und $y = (4{,}45 \pm 0{,}01)$ m zwei Messwerte mit den angegebenen absoluten Fehlerschranken.
Die Fehlerschranke der Summe bzw. Differenz beträgt dann $\pm 0{,}02$ m. Die relative Fehlerschranke der Summe beträgt

$$\delta(x+y) \approx \frac{0{,}02}{10} = 0{,}002 \quad (0{,}2\%)$$

und die der Differenz

$$\delta(x-y) \approx \frac{0{,}02}{1{,}10} = 0{,}018 \quad (1{,}8\%)$$

Der relative Fehler der Differenz kann also wesentlich größer sein als der relative Fehler von x und y.

Bei den Rechenoperationen zweiter Stufe erhält man als absolute Fehlerschranke des Produktes $x \cdot y$ durch ähnliche Überlegungen

$$(x_0 - \varepsilon_x)(y_0 - \varepsilon_y) = x_0 y_0 - (\varepsilon_x y_0 + \varepsilon_y x_0 - \varepsilon_x \varepsilon_y)$$

also

$$\varepsilon_{x \cdot y} = x_0 \varepsilon_y + y_0 \varepsilon_x - \varepsilon_s \varepsilon_y$$

wobei $\varepsilon_{x \cdot y}$ der absolute Fehler des Produktes ist.
Weiter ergibt sich[3]

$$|\varepsilon_{x \cdot y}| \leq |x_0||\varepsilon_y| + |y_0||\varepsilon_x| + |\varepsilon_x||\varepsilon_y| \leq |x_0|\Delta y + |y_0|\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

also

$$\Delta(x \cdot y) \leq |x_0|\Delta y + |y_0|\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Falls Δx und Δy kleine Werte sind, was in der Praxis im allgemeinen der Fall ist, kann das Produkt $\Delta x \cdot \Delta_y$ vernachlässigt werden, und es ergibt sich

$$\Delta(x \cdot y) \leq |x_0|\Delta y + |y_0|\Delta y$$

Für mehr als zwei Faktoren sieht das Ergebnis analog aus. Bei drei Faktoren gilt zum Beispiel

$$\Delta(x \cdot y \cdot z) \leq |y_0 z_0|\Delta x + |x_0 z_0|\Delta y + |x_0 y_0|\Delta z$$

Als Fehlerschranke für den Quotienten $\frac{x}{y}$ ergibt sich näherungsweise, ohne dass wir das hier herleiten,

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{|y_0|\Delta + |x_0|\Delta x}{y_0^2}$$

Wenn man den Taylorschen Satz kennt, lassen sich die hier angegebenen Formeln für die absoluten Fehlerschranken bei Summe, Differenz, Produkt und Quotienten sehr leicht herleiten.

Man bestimmt dazu den absoluten Fehler und die absolute Fehlerschranke für eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen. Sind in der Funktion

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

[3] Für das Rechnen mit Absolutbeträgen gilt $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und die Dreiecksungleichung, wobei a und b reelle Zahlen sind.

von n Veränderlichen die $x_1, x_2, ..., x_n$ die exakten Werte und $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ die Fehlerschranken, so dass die Werte

$$x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n$$

gemessen wurden, so ergibt sich, wenn man die Funktion in eine Taylor-Reihe entwickelt und nach dem linearen Glied abbricht (man muss allerdings voraussetzen, dass $f(x_1, ..., x_n)$ stetige partielle Ableitungen hat),

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left| \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \right|$$

Für $y = f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ erhält man

$$\Delta y \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_1 = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

für $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$:

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$$

für $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$:

$$\Delta y \leq |x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2$$

und für $y = f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$:

$$\Delta y \leq \left| \frac{1}{x_2} \right| \Delta x_1 + \left| -\frac{x_1}{x_2^2} \right| \Delta x_2 \qquad \text{oder} \qquad \Delta y \leq \frac{|x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2}{x_2^2}$$

Das sind die Formeln, die vorn für die Fehlerschranken von Summe, Differenz, Produkt und Quotienten angegeben wurden.

Die hier zusammengestellten Formeln für die absoluten Fehlerschranken von Summe, Differenz, Produkt und Quotienten geben uns die Möglichkeit, für gewisse Aufgaben eine Fehlerabschätzung durchzuführen. Die angegebene allgemeine Formel gibt die Möglichkeit, den maximalen absoluten Eingangsfehler für $f(x_1, ...,x_n)$ zu bestimmen.

Die Fehleruntersuchung soll nun noch an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

☐ Beispiel 2/7:
Es ist der Ausdruck $f = \frac{ab}{c}$ mit absolutem und relativem Fehler zu berechnen, wenn $a = 2{,}0 \pm 0{,}1$, $b = 4{,}0 \pm 0{,}2$ und $c = 2{,}5 \pm 0{,}1$ gilt.

Lösung:

$$f = \frac{2 \cdot 4}{2{,}5} = 3{,}2$$

und

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{c \cdot \Delta(ab) + ab \cdot \Delta c}{c^2} = \frac{c(a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a) + ab \cdot \Delta c}{c^2} \\ &= \frac{2{,}5(2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1) + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}1}{6{,}25} = \frac{2{,}8}{6{,}25} = 0{,}448 \approx 0{,}5\end{aligned}$$

Um den maximalen Fehler zu erfassen, wurde aufgerundet.

$$\delta x = \left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \frac{0{,}5}{3{,}2} = 0{,}156 \qquad \text{oder} \qquad 15{,}6\%$$

Es gilt damit $f = (3{,}2 \pm 0{,}5)$.

2.3 Aufgaben und Aufträge

1. Wiederholen Sie das Lösungsverfahren für zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen! Geben Sie für das Gleichungssystem

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad , \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

Lösungsformeln an! Wie lautet die Endprobe ?

2. Es sind die Polynome $P(x) = ax + b$ und $Q(x) = cx + d$ zu multiplizieren. Wie lauten die Formeln zur Berechnung der Koeffizienten α, β und γ des Polynoms

$$P(x)Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad \text{(L)}$$

3. Die Gleichung $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ kann mit Hilfe der Substitution $x^2 = z$ auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt werden. Lösen Sie die Gleichung! (L)
Geben Sie so wie im Beispiel 2/1 eine Aufgliederung des Algorithmus an!
Geben Sie in ähnlicher Weise eine Aufgliederung des Algorithmus zur Lösung der Gleichung $x^4 + ax^2 + b = 0$ an!

4. Wie groß ist der relative Fehler, der bei der Berechnung einer Kreisfläche gemacht wird, wenn $r = (76{,}0 \pm 0{,}2)$ cm und $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005$ gilt? (L)

5. Wie groß sind absoluter und relativer Fehler bei der Berechnung von

$$s = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

wenn $\sqrt{3}$ durch den auf 1,732 gerundeten Wert angenähert wird? (L)

3 Grafische Darstellung von Algorithmen

Wenn die mathematische Formulierung zur Lösung einer praktischen Aufgabenstellung vorliegt und das Verfahren zur Lösung ausgewählt ist, dann wird man den Algorithmus für das Lösungsverfahren aufstellen.

▷ Definition 3/1:
Ein Algorithmus ist eine Vorschrift zur Lösung einer Aufgabe. Er enthält die Gesamtheit von Regeln und Formeln für das Lösungsverfahren. Die Vorschrift muss aus einer eindeutig bestimmten Folge von Grundoperationen bestehen, mit deren Hilfe man schrittweise die Aufgabe lösen kann.
Die Vorschrift muss vollständig sein, und sie muss sich mit endlich vielen Regeln bzw. Formeln beschreiben lassen.

Einfache Algorithmen liegen vor bei der Anwendung der Grundrechenoperationen, beim Lösen eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen und bei dem Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel nach Newton (Beispiel 2/2).

Bei der Aufbereitung des jeweiligen Verfahrens für die Rechnung muss man dieses in Einzelschritte zerlegen. Man muss den Rechenablauf richtig durchdenken. Vor der Aufstellung des Algorithmus ist es zweckmäßig, das Verfahren in Grundoperationen zu zerlegen.

▷ Definition 3/2:
Unter Grundoperationen sollen hier die Grundrechenarten und die Größer- und Kleinerbeziehung verstanden werden.

Der Algorithmus wird dann formuliert und am besten grafisch dargestellt.

▷ Definition 3/3:
Die grafische Darstellung des Algorithmus heißt Programmablaufplan oder Flussbild.

Wir werden diese grafische Darstellung auch kurz Programm nennen. Der Programmablaufplan ist Grundlage sowohl für die Durchrechnung des Verfahrens als auch, wenn das notwendig ist, für die programmtechnische Aufbereitung des Verfahrens für Rechenautomaten, also für die Programmierung des Verfahrens.
Er ist unabhängig vom jeweiligen Automaten, den man einsetzt, und er ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Anwendung mathematischer Verfahren in der Praxis.

Die grafische Darstellung von Algorithmen soll hier betrachtet werden. Zuerst werden einige Hilfsmittel, nämlich die Sinnbilder, Elemente oder Symbole für Programmablaufpläne zusammengestellt und erläutert. Anschließend werden einige Beispiele für die Aufstellung von Algorithmen und deren grafische Darstellung angegeben.

3.1 Sinnbilder für Programmablaufpläne

Die Programmablaufpläne als grafische Darstellung von Algorithmen setzen sich aus Sinnbildern zusammen. Diese Sinnbilder, auch Elemente oder Symbole genannt, sind also Bausteine des Programmablaufplanes, und sie dienen zur Darstellung bestimmter Operationen.
Wir wollen einige Sinnbilder hier zusammenstellen und erläutern.

Programmlinie: Die Programmlinie (Bild 1) gibt den Ablauf des Programmes bzw. des Algorithmus an. In der Regel, verläuft sie von oben nach unten, und sie verbindet die Sinnbilder für die Operationen.

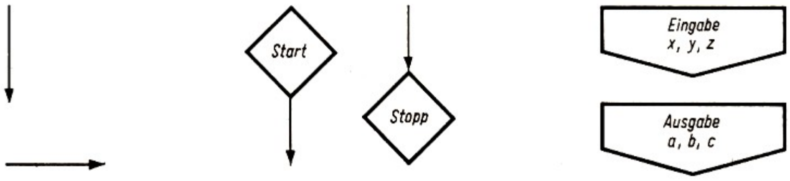


Bild 1, 2, 3

Ergibtanweisung: Die Ergibtanweisung wird mit Hilfe des Ergibtzeichens := gebildet. Es wird aus bekannten Größen auf der rechten Seite der Anweisung die links stehende Größe berechnet. Der links stehenden Variablen wird also der Wert zugeordnet, der sich bei Berechnung des rechts stehenden Ausdrucks ergibt.

☐ Beispiel 3/1:
"$x := a + 5$" bedeutet, dass zu einer beliebigen Zahl a die Zahl 5 addiert wird. Das Ergebnis wird mit x bezeichnet.

☐ Beispiel 3/2:
$i := i + 1$ bedeutet, dass zu einem Wert i die Zahl 1 addiert wird und dass das Ergebnis der neue Wert i ist (Der Wert i wird also um 1 erhöht).

☐ Beispiel 3/3:
$k := 5n - 4$ bedeutet, dass n mit 5 multipliziert wird. Davon wird 4 subtrahiert, und das Ergebnis wird mit k bezeichnet.
Ergibtanweisungen sind keine Gleichungen.

Organisationskästchen: Sie dienen der Beschreibung von Anfang und Ende des Programmablaufplanes (Bild 2).

Beim Start-Symbol beginnt die Programmablauflinie (das Kästchen hat also nur einen Ausgang), beim Stopp-Symbol endet sie (das Kästchen hat nur einen Eingang).

Ein- und Ausgabekästchen: In die Ein- und Ausgabekästchen wird eingetragen, ob es sich um Ein- oder Ausgabe handelt und welche Größen ein- oder ausgegeben werden (Bild 3). Häufig schreibt man auch "lies" und "drucke" in die Kästchen.
Die Bezeichnung Ein- und Ausgabe kommt daher, weil die Programmablaufpläne ja Grundlage sind für die Programmierung bei Automaten und weil dort dann gewisse Daten "eingegeben" ("eingelesen") werden müssen bzw. gewisse Ergebnisse "ausgegeben" ("ausgedruckt") werden.
Wir werden diese Kästchen verwenden zur Erfassung der Größen, die in die Rechnung eingehen bzw. die nach Ablauf der Rechnung als Ergebnisse zur Verfügung stehen müssen.

Operationskästchen: In den Operationskästchen werden die Regeln des Algorithmus, die Operationen, genau beschrieben (Bild 4). Das kann geschehen mit Hilfe von Formeln, mit Worten oder in einer anderen geeigneten Form. Dabei verwendet man die Ergibtanweisung. Operationskästchen haben Ein- und Ausgang.

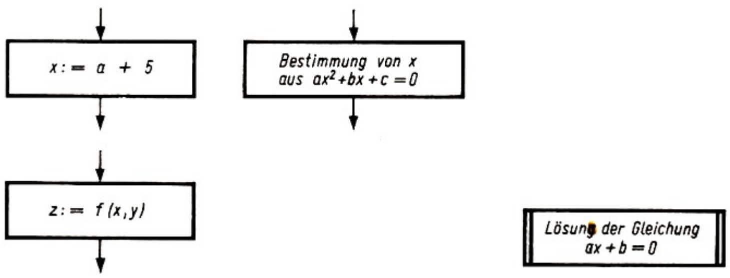
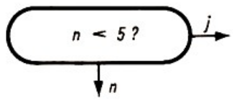


Bild 4, 5

Sinnbild für Unterprogramme: Umfangreiche Aufgaben muss man in Teilprobleme (Teilprogramme) zerlegen. Zur Beschreibung von solchen Teilprogrammen werden spezielle Sinnbilder verwendet (Bild 5).
Diese Sinnbilder verwendet man auch, wenn beim Einsatz von Rechenautomaten sogenannte Unterprogramme, Programme für ständig wiederkehrende Standardaufgaben, Verwendung finden. Jede Rechenanlage hat eine umfangreiche Bibliothek solcher Programme. Bei Unterprogrammen werden die Organisationskästchen durch Kreise dargestellt.

Alternativkästchen: Diese Alternativkästchen heißen auch Fragekästchen, Sinnbild für Testanweisung oder Vergleiche (Bild 6). Dieses Sinnbild hat einen Eingang und zwei Ausgänge (Ja-Ausgang und Nein-Ausgang). Die Kästchen nehmen die im Algorithmus auftretenden Fragen (Tests) auf.

Bild 6

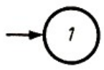


Der Vergleich wird also in das Kästchen in Form einer Frage eingetragen. Die Frage muss so formuliert sein, dass es nur zwei mögliche Antworten (ja oder nein) geben kann. Es sind sogenannte Alternativfragen. Die Antwort auf eine solche Frage, man spricht auch von einem Test, ist also immer eindeutig: ja oder nein.
Das Programm wird bei solchen Alternativkästchen verzweigt. Man spricht dann von einem verzweigten Programm, während die anderen Programme auch lineare Programme heißen. Die Zweige werden mit j (ja) und n (nein) gekennzeichnet.

Mit Hilfe dieser Kästchen ist es also möglich, verzweigte Programmablaufpläne (Programme) darzustellen. Auch Zyklen kann man organisieren. Ein Zyklus (Schleife) entsteht dann in einem Programmablaufplan, wenn ein Teil desselben wiederholt durchlaufen wird. Man spricht von zyklischen Programmen. Dabei können Zyklen auftreten, bei denen die Durchlaufzahl aus dem Programmablaufplan sofort ablesbar ist.
Die Anzahl wird gezählt durch Vergleich mit einer vorgegebenen Zahl. Bei anderen Zyklen ist diese Anzahl der Durchläufe nicht ablesbar. Die Anzahl kann z. B. abhängen von der Genauigkeitsforderung, die man an das Ergebnis stellt.

Konnektoren: Nicht immer ist es möglich, den Programmablaufplan auf einer Seite unterzubringen. Dann unterbricht man die Programmablauflinie und setzt sie auf der nächsten Seite fort. Das Symbol für die Unterbrechung ist ein Konnektor (Bild 7).

Bild 7



Mit Hilfe der Ziffern erfolgt die Nummerierung der Konnektoren.
Endet eine Programmablauflinie z. B. beim Konnektor mit der Ziffer 1, so wird sie beim folgenden Konnektor mit der Ziffer 1 fortgesetzt.

3.2 Beispiele für Programmablaufpläne

In diesem Abschnitt soll das Aufstellen des Algorithmus und des zugehörigen Programmablaufplanes an Beispielen erläutert werden.

☐ Beispiel 3/4:

Von einem Rechteck mit den Seiten a und b sind Flächeninhalt A und Umfang u zu berechnen.

Beschreibung des Algorithmus:
Flächeninhalt und Umfang werden nach den Formeln berechnet:

$$A = a \cdot b \qquad \text{und} \qquad u = 2(a+b)$$

Aus diesen Formeln lässt sich der Algorithmus ablesen: Die Werte a und b sind einzugeben (gehen in die Rechnung ein). A und u werden nach den Formeln berechnet und ausgegeben (Bild 8).

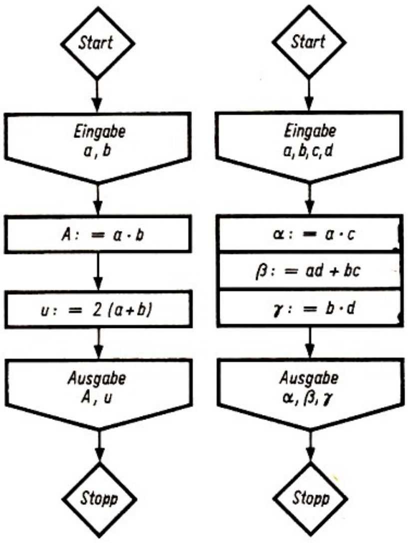


Bild 8, 9

☐ Beispiel 3/5:
Es sind die Polynome $P(x) = ax + b$ und $Q(x) = cx + d$ zu multiplizieren.
Beschreibung des Algorithmus:
Es gilt $P(x) \cdot Q(x) = (ac+b)(cx+d) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ mit $\alpha = ac$, $\beta = ad + bc$ und $\gamma = bd$. Die Werte a, b, c und d, also die Koeffizienten, gehen in die Rechnung ein. Aus ihnen werden nach den angegebenen Formeln α, β und γ berechnet. Diese Koeffizienten des quadratischen Polynoms werden ausgedruckt (Bild 9).

☐ Beispiel 3/6:
Es ist die quadratische Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ (A, B, C reell) zu lösen.

Beschreibung des Algorithmus (Bild 10):
In die Rechnung gehen die Koeffizienten A, B und C ein. Falls $A = 0$ gilt, erhält man $Bx + C = 0$ und daraus $x = -\frac{C}{B}$ ($B \neq 0$).
Falls $A \neq 0$ gilt, ist Division durch A möglich, und man muss die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lösen, wobei $p = \frac{B}{A}$ und $q = \frac{C}{A}$ gilt.
Als Lösungen erhält man

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Falls $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist, erhält man reelle Wurzeln, sonst komplexe.
Falls $D \geq 0$ werden x_1 und x_2 berechnet und als reelle Wurzeln ausgedruckt,
falls $D < 0$ ist, wird die Rechnung gestoppt.

Man kann die Beschreibung des Algorithmus auch in der folgenden Kurzfassung angeben:

(1) lies A, B, C
(2) falls $A = 0$, dann (3), sonst (4)
(3) Lösung von $ax + b = 0$, wobei $a := B$ und $b := C$
(4) $p := \frac{B}{A}$ und $q := \frac{C}{A}$
(5) $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
(6) falls $D > 0$, dann (7), sonst (9)
(7) $x_1 := -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ und $x_2 := -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$
(8) drucke x_1 und x_2
(9) stopp

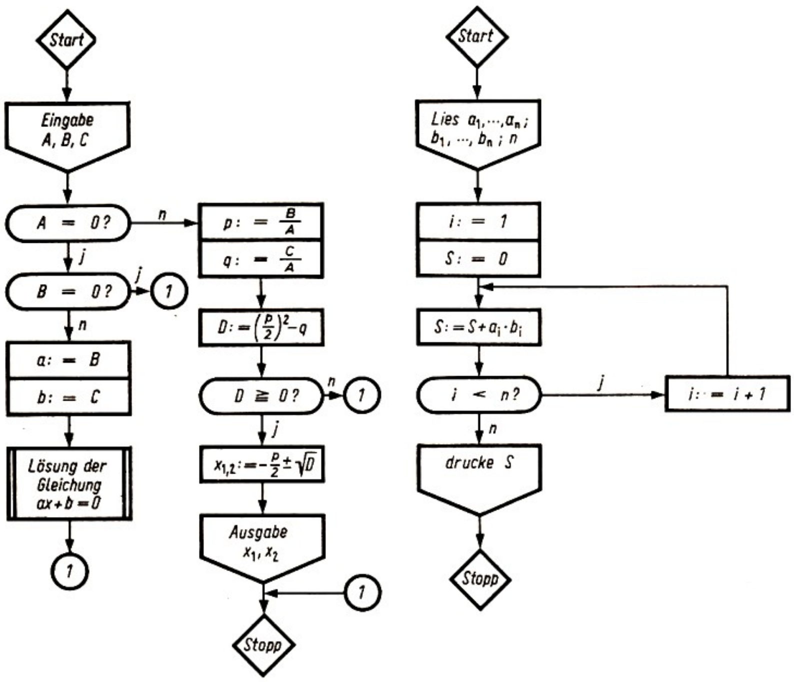


Bild 10, 11

☐ Beispiel 3/7:
Es sollen zwei n-dimensionale Vektoren $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ und $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ skalar nach der Formel

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

multipliziert werden, und das Ergebnis ist anzugeben (auszudrucken).

Beschreibung des Algorithmus (Bild 11):
Zur Berechnung des skalaren Produktes müssen die Werte $a_1, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n$ zur Verfügung stehen. (Die Werte müssen also, wenn man Automaten verwendet, "eingelesen" werden). Die Berechnung des Produktes kann man mit Hilfe eines Zyklus schrittweise durchführen. Man berechnet das Produkt nach der Formel

$$S := S + a_i \cdot b_i$$

wobei man im ersten Schritt $S := 0$ setzt und i dann die Werte 1 bis n durchlaufen lässt. Man erhält so

$$S := 0, S := S + a_1 \cdot b_1, S := S + a_2 \cdot b_2, ..., S := S + a_n \cdot b_n$$

Der Zyklus wird n-mal durchlaufen. Das Ergebnis S als skalares Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ steht dann zur Verfügung, kann "ausgedruckt" werden.

Der Algorithmus kann wieder in Kurzfassung aufgeschrieben werden:

(1) lies $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ und n
(2) $i := 1$ und $S := 0$
(3) $S := S + a_i \cdot b_i$
(4) falls $i < n$, dann (5), sonst (6)
(5) $i := i + 1$, dann (3)
(6) drucke S
(7) stopp

□ Beispiel 3/8:
Aus der Menge der voneinander verschiedenen Zahlen $a_1, ..., a_n$ ist die größte Zahl (Maximum) auszuwählen. Das Programm ist so aufzubauen, dass am Anfang die Zahlen $a_1, ..., a_n$ in den Automaten "eingelesen" werden.
Beschreibung des Algorithmus (Bild 12):

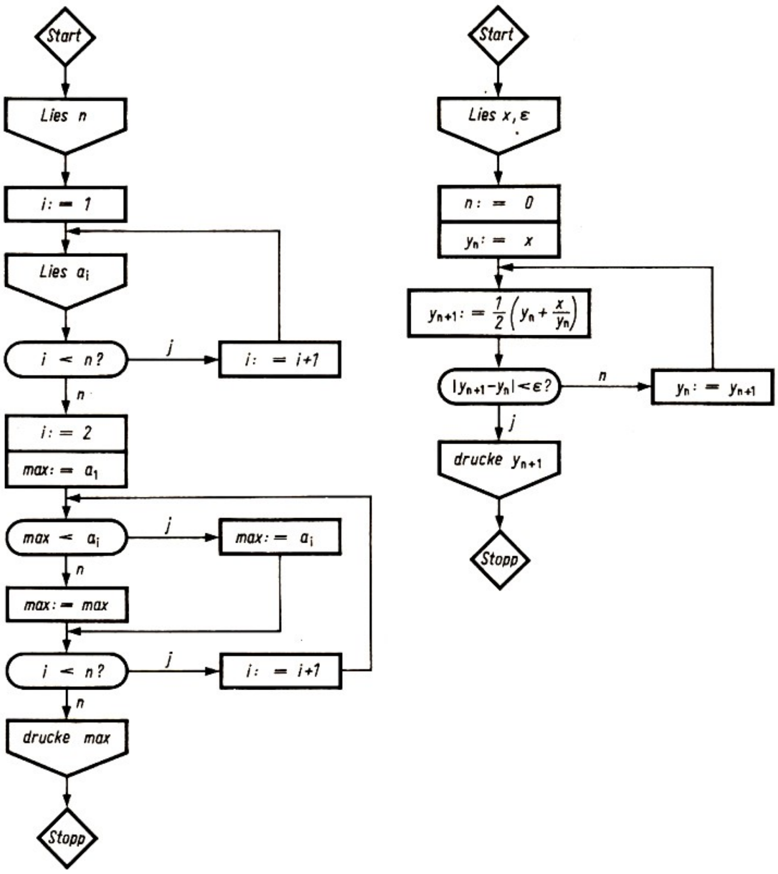


Bild 12, 13

(1) lies n
(2) $i := 1$
(3) lies a_i
(4) $i < n$, dann (5), sonst (6)
(5) $i := i + 1$, dann (3)
(6) $\max := a_1$
(7) $i := 2$
(8) $\max < a_i$, dann (9), sonst (10)
(9) $\max := a_i$
(10) $\max := \max$

(11) $i < n$, dann (12), sonst (13)
(12) $i := i + 1$, dann (8)
(13) drucke $\max := \max\{a_1, ..., a_n\}$
(14) stopp

☐ Beispiel 3/9:
Es ist die Wurzel $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ nach einer von Newton angegebenen Vorschrift (↗ Beispiel 2.2.) näherungsweise mit einer Genauigkeit von ε zu berechnen. Dabei soll unter "mit einer Genauigkeit von ε" verstanden werden, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Näherungen kleiner als ε ist.

Nach Newton kann man Näherungswerte für $y = \sqrt{x}$ nach der Formel $y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right)$ für $n = 0,1,2,...$ und $y_0 = x$ berechnen.

Der Algorithmus für diese Vorschrift muss aufgeschrieben werden.
Beschreibung des Algorithmus (Bild 13):

(1) lies x, ε
(2) $n := 0$
(3) $y_n := x$
(4) $y_{n+1} := \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right)$
(5) $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$ dann (7), sonst (6)
(6) $y_n := y_{n+1}$, dann (4)
(7) drucke y_{n+1}
(8) stopp

Beim Beispiel 3/9 muss im Algorithmus der Zyklus so oft durchlaufen werden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Es liegt also ein zyklisches Programm vor, bei dem die Anzahl der Durchläufe nicht gegeben ist.

3.3 Aufgaben

1. Stellen Sie einen Programmablaufplan (PAP) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Variablen auf!

2. Stellen Sie für das Beispiel 3/6 einen neuen Algorithmus auf, bei dem die vier Fälle
(1) $A = 0$; $B = 0$, (2) $A = 0$;$B \neq 0$, (3) $A \neq 0$; $B = 0$, (4) $A \neq 0$; $B \neq 0$
betrachtet werden! Stellen Sie einen Programmablaufplan für diesen Algorithmus auf!

3. Es ist ein PAP zur Polynommultiplikation aufzustellen
a) für zwei Polynome dritten Grades und
b) für zwei Polynome n-ten Grades!

4. Stellen Sie einen PAP zur Lösung der Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$ auf!
Hinweis: Es ist die Substitution $x^2 = z$ durchzuführen.
Fallunterscheidungen sind in ähnlicher Weise wie im Beispiel 3/6 notwendig.

5. Aus einer gegebenen Zahlenmenge $a_1, a_2, ..., a_n$ sind die größte und die kleinste Zahl auszuwählen.
a) Schreiben Sie den Algorithmus auf!
b) Stellen Sie einen PAP auf!

4 Gleichungen mit einer Variablen

Einfache Gleichungen mit einer Variablen können rechnerisch und grafisch gelöst werden.
Als Lösung der linearen Gleichung

$$a + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

erhält man den Wert $x = -\frac{b}{a}$.
Bei der Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

erhält man als Wurzeln

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

die, falls die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ ist, reell sind.
Bei praktischen Aufgabenstellungen muss man sehr oft algebraische Gleichungen höheren Grades, also Gleichungen der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

lösen.
Die Koeffizienten $a_1, a_2, ..., a_n$ sind reelle Zahlen, und n ist eine natürliche Zahl, $f(x)$ heißt Polynom.

Außerdem treten neben algebraischen Gleichungen auch transzendente Gleichungen, z. B. Gleichungen der Form

$$x \cdot \ln x = a, \quad \sin x + x = \cos x, \quad x - \tan x = 0, \quad 2^x = 4x$$

auf.
In den meisten Fällen ist man gezwungen, die angegebenen Gleichungstypen näherungsweise zu lösen. Kenntnisse über das Lösen von Gleichungen mit einer Variablen mit Hilfe von Näherungsverfahren und Fertigkeiten im Umgang mit solchen Verfahren sind für die praktische Anwendung der Mathematik notwendig.

In diesem Abschnitt werden wir solche Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen mit einer Variablen für algebraische und transzendente Gleichungen kennenlernen. Dabei werden nur reelle Lösungen (Wurzeln) gesucht, komplexe Wurzeln werden nicht ermittelt.

Es wird also die Gleichung

$$f(x) = 0$$

betrachtet, und es werden alle reellen Werte ξ_i gesucht, so dass

$$f(\xi_i) = 0$$

gilt.

4.1 Grafische Lösung

Kenntnisse über Funktionen und deren Darstellung in einem Koordinatensystem sind eine wichtige Voraussetzung für das grafische Lösen von Gleichungen mit einer Variablen.
Es sollen deshalb an dieser Stelle zunächst einige Wiederholungsfragen gestellt werden.

1. a) Wie ist eine Funktion definiert? Nennen Sie Beispiele für Funktionen!
b) Wie ist eine lineare Funktion definiert? Wie ist eine quadratische Funktion definiert ?
c) Was versteht man unter dem Definitionsbereich und dem Wertebereich einer Funktion?

2. In welcher Form kann man Funktionen darstellen? Geben Sie Beispiele an!

3. a) Wie kann man die lineare Gleichung $ax + b = 0$ grafisch lösen?
b) Lösen Sie die Gleichungen $3x + 5 = 0$, $3x - 5 = 0$, $3x = 0$ grafisch!

Die Methode, die zur grafischen Lösung einer linearen Gleichung mit einer Variablen angewandt wurde (Aufgabe 3), kann auch zur grafischen Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ benutzt werden.
Man zeichnet den Graph der Funktion $y = x^2 + px + q$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Die Abszissen der Schnittpunkte des Funktionsbildes mit der x-Achse sind die reellen Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

4. Lösen Sie grafisch die Gleichungen
a) $x^2 - 2x - 24 = 0$, b) $x^2 - 5x + 6 = 0$, c) $x^2 - 12{,}96 = 0$

Eine Erleichterung beim Zeichnen des Graphen besteht darin, dass man eine Schablone für $y = x^2$ verwendet und die Scheitelpunktskoordinaten $\left(-\frac{p}{2}; \frac{-p^2}{4} + q\right)$ des Graphen von $y = x^2 + px + q$ ermittelt.
Da das Bild der Funktion $y = x^2$ kongruent zum Bild der Funktion $y = x^2 + px + q$ ist, braucht man nur die Schablone so anzusetzen, dass der Scheitel der Schablone auf den Punkt $S\left(-\frac{p}{2}; \frac{-p^2}{4} + q\right)$ zu liegen kommt. Die Parabelachse muss parallel zur y-Achse verlaufen.

5. Lösen Sie mit Hilfe einer Schablone für $y = x^2$ die Gleichungen
a) $x^2 - 4x + 3 = 0$, b) $x^2 - 2x - 4 = 0$, c) $x^2 + 3x = 0$

6. Stellen Sie für die folgenden Funktionen Wertetafeln auf!
a) $y = 3x + 4$, b) $y = x^2 - 4x + 3$, c) $y = x + \sin x$, d) $y = x^3 + x^2 - 3x$, e) $y = \ln x + 2x$, f) $y = \sqrt[3]{x} + 3$

In den Aufgaben 3 und 4 dieser einleitenden Wiederholung wurden lineare und quadratische Gleichungen grafisch gelöst.

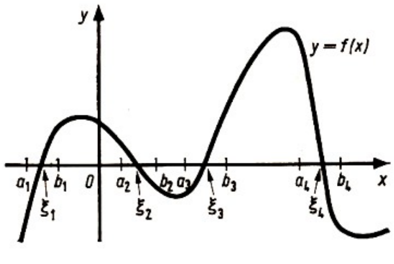


Bild 14a

Entsprechend könnte man zur grafischen Lösung einer beliebigen Gleichung $f(x) = 0$ den Graph der Funktion $y = f(x)$ in ein Koordinatensystem einzeichnen und die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse ermitteln. Die Abszissen dieser Schnittpunkte sind die Nullstellen der Funktion $y = f(x)$.

Sie geben die reellen Wurzeln ξ_i der Gleichung $f(x) = 0$ an (Bild 14a).

Die grafische Lösung liefert nur Näherungswerte. Solche Näherungswerte kann man mit Hilfe numerischer Verfahren verbessern. Man kann auch nach dem Graph leicht zwei Zahlen a_i und b_i finden, zwischen denen jeweils nur eine Wurzel ξ_i eingeschlossen ist.

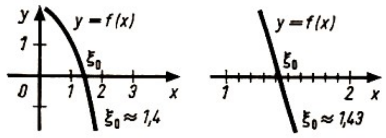
▷ Definition 4/1:
Intervalle (a_i, b_i)[4], in denen jeweils nur eine Wurzel ξ_i, der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, nennt man Intervalle der abgespaltenen Wurzeln.

Man spricht vom Abspalten der Wurzeln einer Gleichung. Für den im Bild 14b angegebenen Fall gilt z. B.

$$a_1 < \xi_1 < b_i, \qquad a_2 < \xi_2 < b_2, \qquad ...$$

Reicht die Genauigkeit des Näherungswertes für die Wurzel einer Gleichung nicht aus, so kann grafisch diese Genauigkeit erhöht werden, indem man auf der x-Achse eine Maßstabänderung in der Form durchführt, dass man das jeweilige Intervall "auseinanderzieht" (Bild 14b).

Bild 14b



Dadurch ist es möglich, den Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse genauer abzulesen.

Häufig wird man bei der praktischen Durchführung der grafischen Lösung einer Gleichung

$$f(x) = 0$$

so vorgehen, dass man $f(x)$ in der Form

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

darstellt. Die Gleichung

$$f_1(x) = f_2(x)$$

ist dann äquivalent zur Ausgangsgleichung.

Man ermittelt die Schnittpunkte der beiden Kurven $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
Die Abszissen dieser Schnittpunkte sind dann die Nullstellen der Funktion $y = f(x)$ und damit also die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. Die Aufspaltung der Funktion $f(x)$ in $f_1(x)$ und $f_2(x)$ muss so erfolgen, dass die Bilder von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ möglichst leicht zu konstruieren sind.

□ Beispiel 4/1:
Die Gleichung $x^2 + 0{,}5x - 3 = 0$ soll grafisch gelöst werden. Wir formen $x^2 + 0{,}5x - -3 = 0$ äquivalent um,

$$x^2 = -0{,}5x + 3$$

[4]Ein Intervall (a, b) ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt $a < x < b$. Ein solches Intervall, bei dem die Zahlen a, b selbst nicht zum Intervall gehören, heißt offenes Intervall.
Ein abgeschlossenes Intervall, in Zeichen $\langle a, b\rangle$, ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt $a \leq x \leq b$.
Als halboffenes Intervall $\langle a, b)$ bzw. $(a, b\rangle$ bezeichnet man die Menge aller reellen Zahlen x, für die $a \leq x < b$ bzw. $a < x \leq b$ gilt.

und betrachten die Funktionen

$$h : y = x^2 \qquad \text{und} \qquad f : y = -0{,}5x + 3$$

Die Graphen beider Funktionen werden in ein gemeinsames Koordinatensystem eingezeichnet (Bild 15).

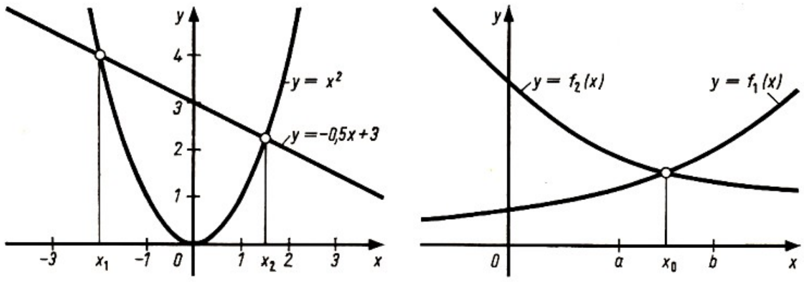


Bild 15,16

Die Abszissen der Schnittpunkte liefern die reellen Lösungen der Gleichung $x^2 + 0{,}5x - 3 = 0$. Nach der Zeichnung kann man auch bei dieser Methode zwei Zahlen a und b ermitteln, zwischen denen die Wurzel jeweils eingeschlossen ist (Bild 16).

Zusammenfassung:

Man kann die Gleichung $f(x) = 0$ in folgender Weise grafisch lösen:

1. Lösung durch grafische Darstellung der Funktion $y = f(x)$ und durch anschließendes Ablesen der Nullstellen der Funktion.

2. Lösung durch Aufspaltung der Gleichung $f(x) = 0$ in $f_1(x) = f_2(x)$ und durch Darstellen der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sowie anschließendes Ablesen der Abszissen der Schnittpunkte der Graphen dieser Funktionen.

Neben diesen beiden grafischen Lösungsmethoden wird auch das grafische Analogon zur regula falsi verwendet.
Bei diesem Verfahren verbessert man eine Näherungslösung, die im Intervall (a_0, b_0) liegt, durch Maßstabsänderung auf der x-Achse ("Auseinanderziehen" des Intervalls).

Da aber das ständige Zeichnen der Kurve $y = f(x)$ im jeweiligen Intervall sehr aufwendig ist, wendet man ein verkürztes Verfahren an.
In den die Wurzel ξ enthaltenden Intervallen

$$(a_0{,}b_0), (a_1{,}b_1), ..., (a_n{,}b_n)... \quad \text{mit} \quad (a_0{,}b_0) \supset (a_1{,}b_1) \supset ...$$

zeichnet man nämlich nicht die Kurve $y = f(x)$ selbst, sondern die Sehnen dieser Kurve bzw. die Geraden durch die Punkte

$A_0(a_0, f(a_0))$ und $B_0(b_0, f(b_0))$,
$A_1(a_1, f(a_1))$ und $B_1(b_1, f(b_1))$, ...
$A_n(a_n, f(a_n))$ und $B_n(b_n, f(b_n))$, ...

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der x-Achse liefern die Näherungen $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ für ξ. Die Umgebungen der Näherungslösungen ergeben bei Beachtung der weiter unten angegebenen Bedingungen gleichzeitig das Intervall, das durch Maßstabsänderung auf der x-Achse zu vergrößern ist, damit die jeweils gefundene Näherung weiter verbessert werden kann.

Es soll nun das Verfahren näher beschrieben werden.

Es sei (a_0, b_0) ein Intervall der abgespaltenen Wurzel, also ein Intervall, in dem nur die Wurzel ξ liegt und außerdem gelte $f(a_0) < 0$ sowie $f(b_0) > 0$ (Bild 17).

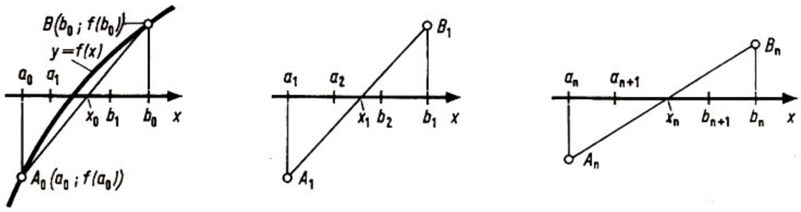


Bild 17

Durch Zeichnen der Sehne durch die Punkte $(a_0, f(a_0))$ und $(b_0, f(b_0))$ erhält man den Wert x_0, nämlich den Wert der Abszisse des Schnittpunktes der Sehne mit der x-Achse. Dieser Wert x_0 wird als Ausgangsnäherung verwendet.
Es wird nun das Intervall (a_1, b_1) so gewählt, dass gilt $x_0 \in (a_1, b_1)$, $(a_1, b_1) \subset (a_0, b_0)$ sowie $f(a_1) < 0$ und $f(b_1) > 0$.
Durch die letzte Bedingung ist gesichert, dass ξ im Intervall bleibt.

Vergrößerung des Intervalls (a_1, b_1) durch Maßstabsänderung auf der x-Achse und Bestimmung des Wertes der Abszisse x_1 des Schnittpunktes der Sehne durch $(a_1, f(a_1))$ und $(b_1, f(b_1))$ mit der x-Achse liefert die nächste Näherung x_1.
Das Intervall (a_2,b_2) wird nun wieder so gewählt, dass $x_1 \in (a_2, b_2)$, $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ sowie $f(a_1) < 0$ und $f(b_1) > 0$ gilt. Man vergrößert dann auch wieder durch Maßstabsänderung auf der x-Achse das Intervall (a_n, b_n) und bestimmt in analoger Weise x_2 und (a_3, b_3).

Allgemein liefert die Vergrößerung von (a_n, b_n) durch Maßstabsänderung auf der x-Achse und die anschließende Ermittlung des Wertes x_n das Intervall (a_{n+1},b_{n+1}) (Bild 17).

Durch die hier angegebene Methode wird grafisch die Näherungslösung der Gleichung $f(x) = 0$ immer weiter verbessert. Der Prozess kann so lange fortgesetzt werden, bis die geforderte Stellenzahl der gesuchten Wurzel erreicht ist.
Diese Methode wird häufig angewendet bei der Lösung komplizierter transzendenter Gleichungen.

Die Möglichkeit der grafischen Lösung einer Gleichung mit einer Variablen soll nun an weiteren Beispielen erläutert werden.

☐ Beispiel 4/2:
Es ist die Gleichung $x^2 - 2x - 2 = 0$ grafisch zu lösen.

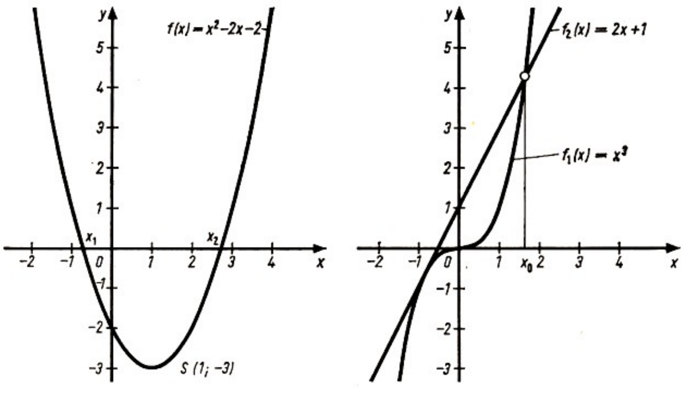


Bild 18,19

Lösung (Bild 18):
Als Scheitelpunktskoordinaten $\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + q\right)$ erhält man wegen $p = -2$ und $q = -2$: $x_s = 1$ und $y_s = 3$.

Die Darstellung der Kurve mit Hilfe der Schablone für $y = x^2$ kann nun erfolgen. Die Abszissen der Schnittpunkte dieser Kurve mit der x-Achse sind die gesuchten Näherungslösungen: $x_1 \approx -0{,}7$ und $x_2 \approx 2{,}7$.

□ Beispiel 4/3:
Es ist grafisch zu ermitteln, zwischen welchen ganzen Zahlen die Wurzel $x_0 > 0$ der Gleichung $x^3 - 2x - 1 = 0$ liegt. Gesucht wird außerdem ein grober Näherungswert.

Lösung (Bild 19):
Das Aufspalten der Gleichung führt zu $x^3 = 2x + 1$. Aus der Zeichnung sind die ganzen Zahlen und der grobe Näherungswert abzulesen.
Es gilt $1 < x_0 < 2$ und $x_0 \approx 1{,}5$.

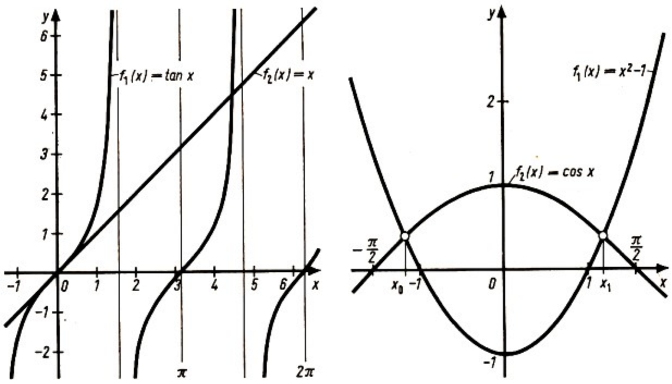


Bild 20,21

□ Beispiel 4/4:
Es ist eine Näherungslösung der Gleichung $\tan x - x = 0$ im Intervall $(0, 2\pi)$ zu ermitteln.

Lösung (Bild 20):
Nach Aufspalten der Gleichung in $\tan x = x$ und Darstellen der Funktionen $f(x) = \tan x$ und $f(x) = x$ im Intervall $(0{,}2\pi)$ lässt sich der Näherungswert aus der Zeichnung ablesen. Es gilt $4{,}0 < x_0 < \frac{3}{2}\pi$.
Wenn man eine noch genauere Zeichnung anfertigt, z. B. eine Maßstabsänderung auf der x-Achse durchführt, erhält man $4{,}4 < x_0 < 4{,}5$.

□ Beispiel 4/5:
Es sind Näherungswerte für die Lösungen der Gleichung $x^2 - 1 - \cos x = 0$ zu ermitteln.

Lösung (Bild 21):
Man kann die Gleichung darstellen in der Form $x^2 - 1 = \cos x$. Aus der Zeichnung kann man die Näherungswerte ablesen: $x_0 \approx 1{,}2$ und $x_1 \approx 1{,}2$.

□ Beispiel 4/6:
Die Gleichung $x^2 - 2x - 2 = 0$ ist mit Hilfe des Analogons der regula falsi grafisch zu lösen. (Gefordert seien zwei Schritte.)

Lösung (Bild 22):
Es wird nur die Lösung x_2 betrachtet. Nach Beispiel 4/2 liegt diese Lösung im Intervall $(2; 3)$. Dieses Intervall nimmt man als Ausgangsintervall $(a_0 = 2; b_0 = 3)$.
Man zeichnet die Gerade durch $A_0(2; f(a_0) = -2)$ und $B_0(3; f(b_0) = 1)$ und erhält $x_{20} \approx 2{,}65$ sowie das Intervall $(a_1 = 2{,}6; b_1 = 2{,}8)$. Als Verbesserung dieser Näherung erhält man im zweiten Schritt $x_{21} \approx 2{,}73$.

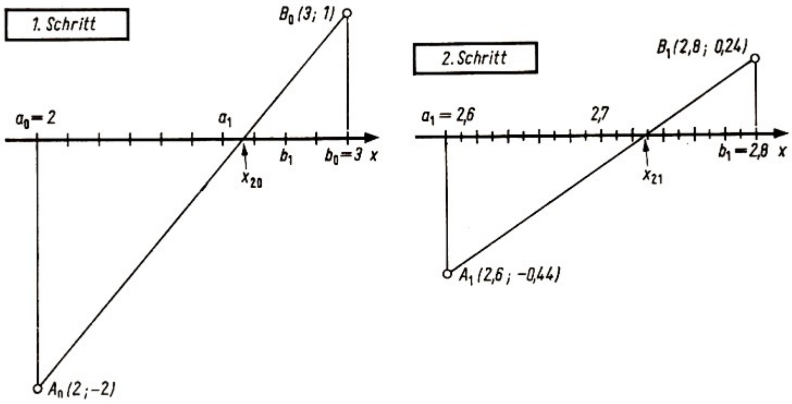


Bild 22

Man kann natürlich als Ausgangsintervall auch das Intervall $(2{,}6; 2{,}8)$ zugrunde legen.

Die grafisch gewonnenen Näherungswerte für die Lösungen von Gleichungen mit einer Variablen $f(x) = 0$ kann man mit Hilfe numerischer Verfahren verbessern.

In den nachfolgenden Abschnitten werden drei solche Verfahren betrachtet:
das Newtonsche Verfahren,
die regula falsi und
ein allgemeines Iterationsverfahren.

Zuerst soll jedoch noch im Abschnitt 4.2. als Spezialfall die kubische Gleichung betrachtet werden.

4.2 Kubische Gleichungen

Wir wenden nun die Ergebnisse des Abschnittes 4.1. auf kubische Gleichungen an. Eine kubische Gleichung (Gleichung dritten Grades) hat die Form

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

Dabei muss man $A \neq 0$ voraussetzen, denn sonst wäre die Gleichung nicht wirklich vom dritten Grad.
Wenn man die Gleichung durch A dividiert und $\frac{B}{A} = a$, $\frac{C}{A} = b$ und $\frac{D}{A} = c$ setzt, so erhält man die sogenannte Normalform der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Die reellen Wurzeln einer solchen kubischen Gleichung zu bestimmen, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Nullstellen der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

zu ermitteln. Auf diese Art und Weise kann man also die kubische Gleichung grafisch lösen.
Da $\lim\limits_{x \pm\infty} y = \pm\infty$ gilt, dazwischen weder Unstetigkeitsstellen noch Unendlichkeitsstellen liegen, besitzt der Graph mindestens einen Schnittpunkt mit der x-Achse, die Gleichung also mindestens eine reelle Wurzel x_0.

Bei unseren Betrachtungen gehen wir nicht von der Normalform der kubischen Gleichung, sondern von der reduzierten Form

$$z^3 + pz + q = 0$$

aus. Eine solche Reduktion ist stets möglich durch die Substitution

$$x = z - \frac{a}{3}$$

Man erhält nämlich aus der Normalform

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit Hilfe der Substitution $x = z - \frac{a}{3}$

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

und daraus

$$\left(z^3 - \frac{2a}{3}z^2 + \frac{a^2}{9}z - \frac{a}{3}z^2 + \frac{2a^2}{9}z - \frac{a^3}{27}\right) + \left(az^2 - \frac{2a^2}{3}z + \frac{a^3}{9}\right) + bz - \frac{ab}{3} + c = 0$$

und weiter

$$z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0$$

Es ist also

$$p = b - \frac{a^2}{3} \qquad , \qquad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

Die reduzierte kubische Gleichung ist in der Form

$$z^3 = -pz - q$$

einfach grafisch lösbar. Die reellen Wurzeln sind die Werte der Abszissen der Schnittpunkte der kubischen Parabel

$$f_1(z) = z^3 \qquad \text{und der Geraden} \qquad f_2(z) = -pz - q$$

Je nach Lage der Geraden zur Parabel erhält man

• drei Schnittpunkte (drei reelle Wurzeln ζ_1, ζ_2 und ζ_3),
• einen Schnittpunkt und einen Berührungspunkt (eine einfache reelle Wurzel ζ_1, und eine reelle Doppelwurzel $\zeta_2 = \zeta_3$) oder
• einen Schnittpunkt (eine reelle Wurzel ζ_1; die anderen beiden Wurzeln sind dann komplex).

Aus der Wurzel ζ erhält man die Lösung ξ der Ausgangsgleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

indem man durch

$$\xi = \zeta - \frac{a}{3}$$

die Substitution rückgängig macht.

Bei der Lösung der kubischen Gleichung kann man auch die nachfolgenden Überlegungen verwenden.
Wenn ξ_1 eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ist, dann gilt

$$\xi_1^3 + a\xi_1^2 + b\xi_1 + c = 0$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so erhält man

$$(x^3 - \xi_1^3) + a(x^2 - \xi_1^2) + b(x - \xi_1) = 0$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch $(x - \xi_1)$ dividieren, und man erhält

$$x^2 + ax + \xi_1 x + a\xi_1 + \xi_1^2 + b = 0$$

Es gilt also

$$(x - \xi_1)[x^2 + (a + \xi_1)x + a\xi_1 + \xi_1^2 + b] = 0$$

Damit kann man, wenn ξ_1 eine Wurzel der kubischen Gleichung ist, durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (a + \xi_1)x + (a\xi_1 + \xi_1^2 + b) = 0$$

die anderen beiden Wurzeln noch bestimmen.

Die grafische Lösung der kubischen Gleichung soll nun an einem Beispiel betrachtet werden.

□ Beispiel 4/7:
Es ist die kubische Gleichung $4x^3 - 24x^2 + 8x + 20 = 0$ zu lösen.

Lösung:
Man erhält die Normalform, indem man durch $A = 4$ dividiert, also

$$x^3 - 6x^2 + 2x + 5 = 0$$

Durch Substitution von $x = z - \frac{a}{3} = z + 2$ erhält man die reduzierte Form

$$z^3 - 10z - 7 = 0 \qquad \text{da} \qquad p = b - \frac{a^2}{3} = 2 - 12 = 10 \qquad \text{und}$$

$$q = \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 5 + \frac{12}{3} - \frac{2}{27} \cdot 216 = 5 + 4 - 16 = -7$$

In der Form $z^3 = 10z + 7$ kann man versuchen, die Lösung grafisch zu gewinnen.

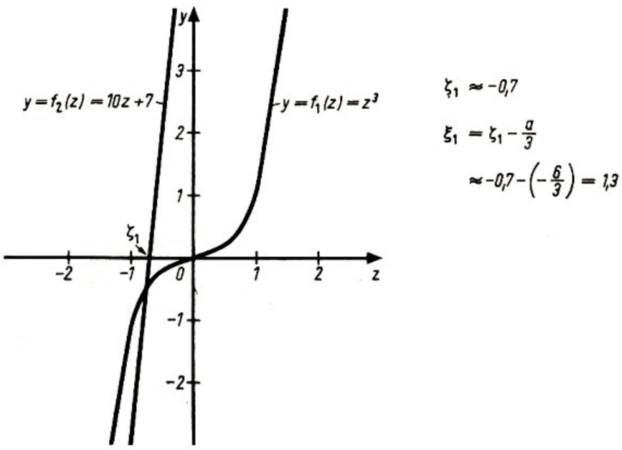


Bild 23

Die Graphen von $f_1(z) = z^3$ und $f_2(z) = 10z + 7$ werden gezeichnet, und man erhält als Wert der Abszisse eines Schnittpunktes $\zeta_1 \approx -0{,}7$ (Bild 23).
Eine Wurzel der Gleichung ist $\xi_1 \approx 1{,}3$. Mit diesem Näherungswert kann man durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4{,}7x - 4{,}11 = 0$ als weitere Näherungen $\xi_2 \approx 5{,}5$ und $\xi_3 \approx -0{,}8$ erhalten.

4.3 Das Newtonsche Verfahren

7. Erläutern Sie den Begriff "Differentialquotient" (erste Ableitung) von $y = f(x)$! Wie kann man die erste Ableitung von $y = f(x)$ geometrisch deuten ?

8. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = mx + n$! Welche Bedeutung haben m und n? Was gilt für einen Punkt $P_0(x_0; y_0)$, der auf der Geraden liegt ?

9. Wie ermittelt man die Nullstellen der Funktion $y = f(x)$?
Bestimmen Sie die Nullstellen von $y = 3x + 2$ und von $y = x^2 - x - 3$! (L)

Wir betrachten nun die Lösung der Gleichung

$$f(x) = 0$$

Es sei ξ der exakte Wert einer Wurzel dieser Gleichung, d.h., es gilt

$$f(\xi) = 0$$

Außerdem sei bekannt, dass ξ im Intervall (a, b) liegt. Dieses Intervall kann man z. B. mit Hilfe grafischer Methoden oder mit Hilfe einer Wertetabelle ermitteln.

Beim Newtonschen[5] Verfahren geht man von einer Näherungslösung x_0 aus. Diese Näherungslösung wird verbessert, indem man im Punkt $P_0(x_0; y_0 = f(x_0))$ die Tangente T_1, an die Kurve $y = f(x)$ legt, diese mit der x-Achse zum Schnitt bringt und die Abszisse x_1 des Schnittpunktes als verbesserte Näherungslösung oder sogenannte erste Näherung nimmt.

Anstelle der Gleichung der Funktion $y = f(x)$ verwendet man zur Bestimmung dieser ersten Näherung als "Ersatzfunktion" die Gleichung einer Geraden, nämlich die Gleichung der Tangente T_1. Anschließend wird im Punkt $P_1(x_1; y_1 = f(x_1))$ die Tangente T_2 an die Kurve gelegt.
Diese liefert als Abszisse des Schnittpunktes mit der x-Achse den Wert x_2. Das ist die zweite Näherung. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Man erhält so eine Folge von Näherungslösungen $x_0, x_1, x_2, ...$ die unter gewissen Bedingungen gegen die exakte Lösung ξ konvergiert (Bild 24).

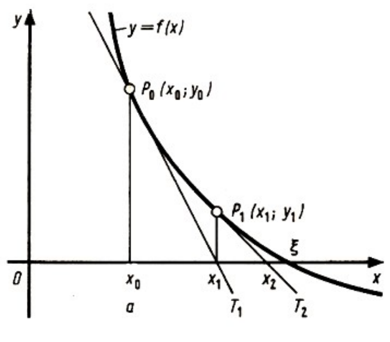


Bild 24

[5]Newton, Isaac (1643-1727), engl. Mathematiker und Physiker, von 1669 an Professor an der Universität Cambridge. Newton erwarb sich um die Begründung der Differential- und Integralrechnung große Verdienste. Als Physiker schloss Newton mit der Formulierung der Axiome der Mechanik, des Gravitationsgesetzes und der Entdeckung der Bewegungsgleichungen den Aufbau der klassischen Mechanik ab. Einige seiner bedeutendsten Werke sind:
1669: Analysis per aequationes (1704 gedruckt)
1685: Arithmetica universalis (1707 gedruckt)
1687: Philosophiae naturalis principia mathematica (1687 gedruckt)

▷ Definition 4/2:
Die Näherungslösung x_0, die als Anfangswert für die Konstruktion der Folge der Näherungslösungen verwendet wird, heißt auch Ausgangsnäherung.

Man wird diese Ausgangsnäherung so wählen, dass sie im Intervall (a, b) liegt. Häufig verwendet man den Anfangs- oder Endpunkt des Intervalls; also $x_0 = a$ oder $x_0 = b$.
Wenn man die hier angegebenen geometrischen Überlegungen analytisch verfolgt, erhält man eine Formel zur Berechnung der Näherungswerte. Bei der Herleitung der Formel legen wir das Bild 24 zugrunde.

Ausgangspunkt ist die Gleichung der Geraden in der Form $y = mx + n$, wobei m der Anstieg der Geraden ist. Bei der Herleitung der Gleichung für die Tangente T_1, nützen wir aus, dass eine Gerade eindeutig bestimmt ist durch die Angabe des Anstiegs und eines Punktes, durch den die Gerade hindurchgeht.
Für die Gleichung der Tangente T_1, gilt also, da $m = f'(x_0)$ ist,

$$y = f'(x_0)x + n$$

Da die Tangente T_1 durch den Punkt $P_0(x_0; y_0 = f(x_0))$ geht, der Punkt P_0 also auf T_1 liegt, gilt außerdem

$$y_0 = f'(x_0)x_0 + n$$

Daraus erhält man für n

$$n = y_0 - f'(x_0)x_0$$

Setzt man diesen Wert für n in die Tangentengleichung ein, so ergibt sich

$$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0 \qquad \text{also}$$

$$\text{Tangente } T_1 : \qquad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Für $y = 0$ ergibt sich die Abszisse x_1 des Schnittpunktes mit der x-Achse. Es gilt

$$y_0 + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad x_1 - x_0 = -\frac{y_0}{f'(x_0)} = -\frac{f(x_0)}{f'(x0)} \qquad \text{sowie}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Im zweiten Schritt erhält man für die Tangente T_2: $y = y_1 + f'(x_1)(x - x_1)$ und daraus für $y = 0$ und $x = x_2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Wenn man den Prozess weiter fortsetzt, ergibt sich

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \quad ...$$

oder allgemein für die Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, ...$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

für $n = 0,1,2,...$ mit x_0 als Ausgangsnäherung.

Das Newtonsche Verfahren ist ein Iterationsverfahren.
Ein Iterationsverfahren zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist ein Verfahren, mit dessen Hilfe man, ausgehend von einer Näherungslösung x_0 (Ausgangsnäherung), eine Folge $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ konstruiert, die bei Konvergenz sich der exakten Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ nähert.

Die oben angeführte Formel heißt auch Iterationsvorschrift, und das Newtonsche Verfahren wird auch Tangentenmethode genannt. Für die Konvergenz des Newtonschen Verfahrens gilt der folgende

▷ Satz 4/3:
Die Folge der Näherungslösungen $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ konvergiert gegen die exakte Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$, falls ein Intervall $I = (a, b)$ mit $\xi \in I$ und eine Zahl m mit $0 < m < 1$ existieren, so dass gilt

$$\left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| \leq m$$

für alle $x \in I$ und $x_n \in I$ für $n = 0,1,2,...$

Dabei wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ in I zweimal differenzierbar ist und $f'(x) \neq 0$ für alle x aus I gilt.
Der Nachweis wird im Abschnitt 4.6. erbracht.

Die Konvergenz des Verfahrens kann meist erreicht werden, wenn der Wert von $f(x)$ genügend klein ist, d.h., wenn man genügend nahe an ξ herangeht. Dann konvergiert das Verfahren rasch. Mangelhafte Konvergenz deutet entweder auf Rechenfehler hin oder auf die Tatsache, dass man mit der Ausgangsnäherung nicht nahe genug an ξ ist.
Das Verfahren versagt im allgemeinen, wenn $f'(x)$ in der Nähe von ξ eine Nullstelle hat.

Bei der Anwendung des Newtonschen Verfahrens ist es also notwendig, vor der Rechnung die Konvergenz zu untersuchen.

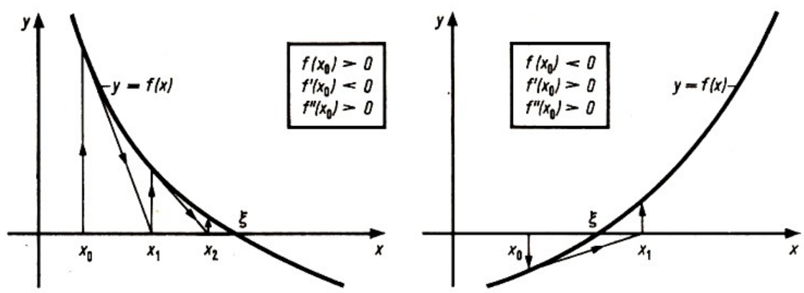


Bild 25a,b

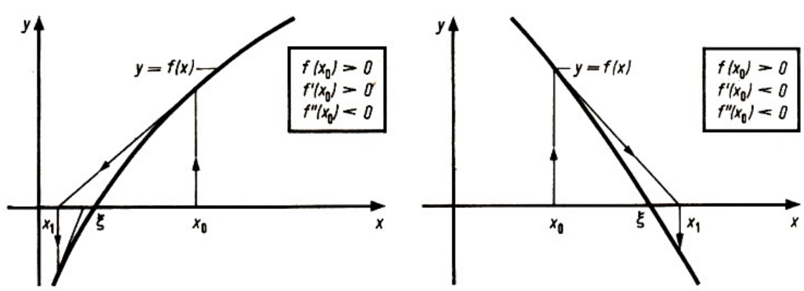


Bild 25c,d

Das Bild 25 zeigt verschiedene Fälle für die Anwendung des Iterationsprozesses.
Es kann auch passieren, dass man bei ungeeigneter Wahl der Ausgangsnäherung x_0 keine Konvergenz erzielt. Dazu sind im Bild 26 zwei Beispiele angegeben.

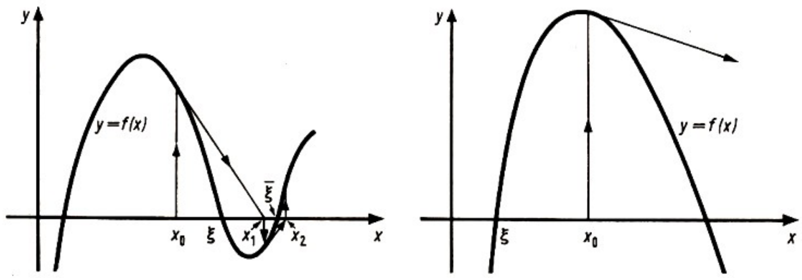


Bild 26a,b

Im Bild 26a tritt bei der gewählten Ausgangsnäherung x_0 der Fall ein, dass die Näherungsfolge $x_0, x_1, x_2, ...$ das Intervall, in dem ξ liegt, verlässt. Man erhält deshalb keinen Näherungswert für die Wurzel ξ. Die Folge der Näherungslösungen konvergiert in diesem Fall gegen eine benachbarte Wurzel.

Im Bild 26b verlässt bei der gewählten Ausgangsnäherung x_0 die Folge der Näherungslösungen den in der Zeichnung angegebenen Bereich.

Nachdem wir anschaulich den Iterationsprozess für verschiedene Fälle untersucht haben, soll nun anhand einiger Beispiele die Durchführung des Newtonschen Verfahrens demonstriert werden.
Im Beispiel 4/8 hat man sehr leicht die Möglichkeit, die exakten Lösungen zu ermitteln und kann so mit den Näherungslösungen, die sich aus der Anwendung des Newtonschen Verfahrens ergeben, vergleichen.

☐ Beispiel 4/8:
Es ist die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ näherungsweise mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens zu lösen.

Lösung:
1) Bestimmung der Ausgangsnäherung: Man weiß, dass die gegebene quadratische Gleichung höchstens zwei reelle Wurzeln, ξ_1 und ξ_2 haben kann. Mit Hilfe der Wertetabelle für $y = f(x) = x^2 - x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	1	-1	-1	1

können diese Wurzeln auf die Intervalle $(-1{,}0)$ und $(1{,}2)$ lokalisiert werden. [In diesem Beispiel soll nur auf die Wurzel ξ_2 im Intervall $(1{,}2)$ eingegangen werden.]
Eine nähere Untersuchung des Intervalls $(1{,}2)$ führt auf die Wertetabelle:

x	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	2,0
y	-1	-0,76	-0,44	-0,25	-0,04	0,19	0,44	1

Die Wurzel ξ_2 liegt also im Intervall $(1{,}6; 1{,}7)$.

2) Konvergenzuntersuchung: Es ist $f'(x) = 2x - 1$ und $f''(x) = 2$.
Die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ sind im Intervall $(1{,}6; 1{,}7)$ monoton steigend. Im Intervall $(1{,}6; 1{,}7)$ gilt demnach

$$\left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{2(x^2 - x - 1)}{(2x-1)^2}\right| < \frac{2 \cdot 0{,}19}{2{,}2^2} = \frac{0{,}38}{4{,}84} < 1$$

Damit ist die Konvergenz gesichert, falls die Folge $x_1, x_2, ...$ im betrachteten Intervall liegt.

3) Berechnung der Näherungswerte: Die Berechnung erfolgt nach der Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1}$$

für $n = 0{,}1{,}2{,}...$ mit $x_0 = 1{,}6$.
Man erhält die in der nachstehenden Übersicht zusammengestellten Ergebnisse:

n	x_n	$f(x_n) = x_n^2 - x_n - 1$	$f'(x_n) = 2x_n - 1$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,6000	-0,0400	2,2000	-0,0182
1	1,6182	0,0004	2,2364	0,0002
2	1,6180			

4) Probe: Ein Vergleich dieser Lösung, die mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens gewonnen wurde, mit derjenigen, die man beim üblichen Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen erhält, ergibt:
$x_2 = 1{,}6180 \approx 0{,}5 + \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}6175$ (Tafel; lineare Interpolation).

☐ Beispiel 4/9:
Die Gleichung $x^3 - 2x - 2 = 0$ besitzt im Intervall $(1{,}2)$ eine reelle Wurzel. Es sind nach dem Newtonschen Verfahren die erste und die zweite Näherung auszurechnen.

Lösung:
1) Bestimmung der Ausgangsnäherung: Mit Hilfe der grafischen Methode (Zerlegen von $f(x)$ in $x^3 = 2x + 2$ und Maßstabsänderung auf der x-Achse) ermittelt man zunächst eine Ausgangsnäherung x_0. Man verkleinert das Intervall, in dem die Wurzel liegt. Aus der Zeichnung (Bild 27) ergibt sich $1{,}6 < x_0 < 1{,}8$.

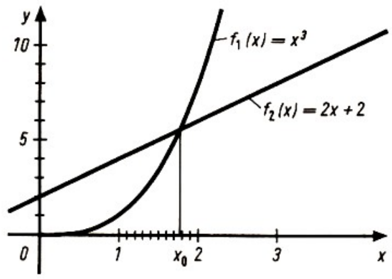


Bild 27

2) Konvergenzuntersuchung: Es ist $f'(x) = 3x^2 - 2$ und $f''(x) = 6x$.
Extremwertstellen der Funktion $f(x)$ sind $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Die Extremwertstellen liegen also außerhalb des Intervalls $\langle 1{,}6; 1{,}8\rangle$, in dem die Nullstelle liegt. Da $f'(x)$ für $1{,}6 < x < 1{,}8$ größer Null ist, ist dort die Funktion monoton steigend; auch $f'(x)$ und $f''(x)$ sind in diesem Intervall monoton steigend. Es gilt somit

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < \frac{1{,}2 \cdot 10{,}8}{(5{,}68)^2} = \frac{12{,}96}{32{,}26} \approx 0{,}4 < 1$$

Damit ist die Konvergenz gesichert, wenn alle Werte der Näherungsfolge in dem Intervall $\langle 1{,}6; 1{,}8\rangle$ liegen.

3) Berechnung der Näherungswerte: Die Berechnung erfolgt nach der Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

für $n = 0{,}1{,}2{,}...$ und mit $x_0 = 1{,}6$.
Man erhält:

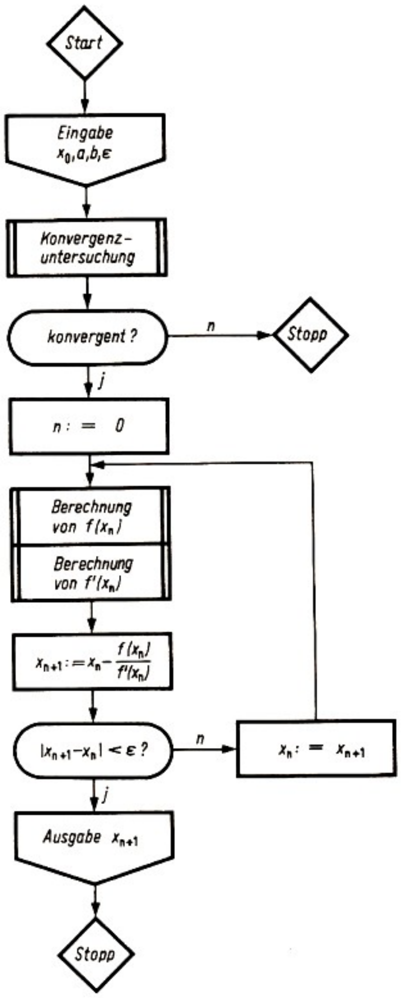
n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 - 2x_n - 2$	$f'(x_n) = 3x_n^2 - 2$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,6	-1,104	5,680	-0,194
1	1,79	0,155	7,612	0,020
2	1,77			

Damit ergeben sich als Näherungswerte $x_1 \approx 1{,}79$ und $x_2 \approx 1{,}77$. Man kann auch als Ausgangsnäherung $x_0 = 1{,}8$ wählen.

4) Probe: Eine Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt

$$x_2^3 - 2x_2 - 2 = 5{,}545 - 3{,}54 - 2 = 0{,}005$$

Da ein Näherungswert x_2 für die exakte Lösung ξ in die Ausgangsgleichung eingesetzt wird, ergibt sich $f(x_2) \neq 0$, nämlich hier im Beispiel $f(x_2) = 0{,}005$.



Programmablaufplan (Bild 28 links)

☐ Beispiel 4/10:
Die Gleichung $f(x) = 0$ ist nach dem Verfahren von Newton zu lösen. Es sind der Algorithmus und der Programmablaufplan anzugeben. Die Genauigkeitsforderung sei $|x_{n-1} - x_n| < \varepsilon$.

Beschreibung des Algorithmus (Bild 28):
x_0 sei eine bekannte Ausgangsnäherung; sie liege im Intervall $\langle a, b\rangle$ in dem auch alle weiteren Näherungen der Folge liegen.
(1) lies x_0, a, b, ε
(2) Konvergenzuntersuchung
(3) $n := 0$
(4) Berechnung von $f(x_n)$ und $f'(x_n)$
(5) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
(6) $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, dann (8), sonst (7)
(7) $x_n := x_{n+1}$, dann (4)
(8) drucke x_{n+1}
(9) stopp

Zusammenfassung:
Falls die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmt werden sollen, kann man nach folgenden Arbeitsschritten vorgehen:

1. Bestimmung der Ausgangsnäherungen
Die Gleichung $f(x) = 0$ wird auf die Form $f_1(x) = f_2(x)$ gebracht, und die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ werden grafisch dargestellt. Die Abszissen der Schnittpunkte der Kurven und damit die Näherungswerte für die Wurzeln und die Intervalle, die jeweils nur eine Wurzel enthalten, können ermittelt werden. Man wählt eine geeignete Ausgangsnäherung. Dabei sind

die günstigsten Bedingungen für die Konvergenz zu wählen.

2. Konvergenzuntersuchung
Es werden die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ ermittelt. Nach der vorn angegebenen Bedingung wird die Konvergenz des Newton-Verfahrens im vorliegenden Fall untersucht.

3. Berechnung der Näherungswerte für die Wurzeln
Nach der Iterationsvorschrift werden die Näherungswerte für die Wurzeln berechnet. Die Rechnung wird abgebrochen, wenn eine vorgegebene Genauigkeit, etwa $|x_{n-1} - x_n| < \varepsilon$, erreicht ist.
Es ist zweckmäßig, sich für die Berechnung der Näherungswerte ein Schema in folgender Form anzulegen:

n	x_n	Berechnung von $f(x_n)$	Berechnung von $f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	
1	x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

4. Durchführung einer Probe

4.4 Das Horner-Schema

Bei der Lösung von Gleichungen mit einer Variablen mit Hilfe von Näherungsverfahren muss man immer wieder Funktionswerte ausrechnen. Das haben wir beim Newtonschen Verfahren festgestellt, und das gilt auch für andere Verfahren.

In diesem Abschnitt wollen wir eine einfache Methode zur Berechnung von Funktionswerten bei ganzen rationalen Funktionen, also bei solchen der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

kennenlernen. Diese Methode zur Berechnung von Funktionswerten wird vielfach Horner-Schema[6] genannt.
Es sei

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

und x_0 ein fester Wert. Wenn wir das Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

durch $(x - x_0)$ dividieren, so ergibt sich folgendes:

[6] Horner, William George (1786-1837) ist der Verfasser eines im Jahre 1819 in London erschienenen Buches mit dem Titel Phil. Transactions, in dem er das nach ihm benannte Verfahren zur Auflösung von Gleichungen angab. In ähnlicher Weise wurden aber bereits im 11. Jahrhundert in Persien kubische Gleichungen aufgelöst, und das von Horner beschriebene Verfahren wurde auch schon 1804 von dem italienischen Mathematiker Paolo Ruffini angegeben.

$$
\begin{array}{l}
(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + \quad a_1 x + \quad a_0) : (x - x_0) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + ... + b_{n-1} + \dfrac{b_n}{x - x_0} \\
\underline{a_n x^n + a_n x_0 x^{n-1}} \\
\qquad b_1 x^{n-1} \\
\qquad \underline{b_1 x^{n-1} - b_1 x_0 x^{n-2}} \\
\qquad\qquad\qquad ... \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{...} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad b_{n-1}x + \quad a_0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{b_{n-1}x + x_0 b_{n-1}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_n
\end{array}
$$

mit

$$b_1 = a_n x_0 + a_{n-1}, \qquad b_2 = b_1 x_0 + a_{n-2}, \qquad ..., \qquad b_n = b_{n-1}x_0 + a_0$$

Wenn man das Ergebnis der Division zusammenfasst, erhält man

$$f(x) : (x - x_0) = p_1(x) + \frac{b_n}{x - x_0} \qquad \text{oder} \qquad f(x) = p_1(x) \cdot (x - x_0) + b_n$$

Setzt man in der letzten Gleichung $x = x_0$, so ergibt sich

$$f(x_n) = b_n$$

Das bedeutet, dass man den Funktionswert von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$, also den Wert $f(x_0)$, erhält, indem man b_n berechnet. Der Wert b_n ergibt sich schrittweise nach den Formeln

$$b_1 = a_n x_0 + a_{n-1} \tag{1}$$
$$b_2 = b_1 x_0 + a_{n-2} \tag{2}$$
$$...$$
$$b_n = b_{n-1} x_0 + a_0 \tag{n}$$

In diese Formeln gehen die Koeffizienten des Polynoms, also die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ und der Wert $x = x_0$ ein.
Die Berechnung führt man am besten mit Hilfe eines Rechenschemas, durch.

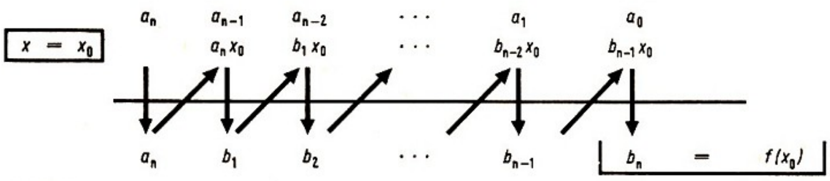


Bild 29

In der ersten Zeile stehen die in die Rechnung eingehenden Koeffizienten des Polynoms $f(x)$, nämlich die Werte $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$. Vor die zweite Zeile schreibt man zweckmäßigerweise den Wert $x = x_0$, für den der Funktionswert $f(x_0)$ berechnet werden soll. In die zweite Zeile werden dann sukzessive die Produkte eingetragen, die aufgrund des Formelsatzes (1), (2), ..., (n) zur Berechnung der b_i ($i = 1,2,....,n$) gebildet werden und zu den entsprechenden Koeffizienten a_i addiert werden müssen. Der Ablauf der Rechnung ist durch die Pfeile angedeutet.

Man muss also immer im Wechsel eine Multiplikation und eine Addition ausführen. Entsprechend der Darstellung im Bild 29 beginnt man mit der Multiplikation $a_n \cdot x_0$. Man schreibt dieses Produkt in die zweite Zeile unter a_{n-1} und addiert a_{n-1} und $a_n x_0$. Die Summe

$$a_{n-1} + a_n x_0 = b_1$$

wird in der dritten Zeile festgehalten. Dann folgt die nächste Multiplikation: $b_1 \cdot x_0$. Wiederum wird das Produkt in der zweiten Zeile niedergeschrieben und die Summe

$$a_{n-2} + b_1 x_0 = b_2$$

gebildet und in die dritte Zeile geschrieben. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis die letzte Summe

$$a_0 + b_{n-1} x_0 = b_n$$

den gesuchten Wert $f(x_0)$ ergibt.

Bei der- Rechnung mit dem Horner-Schema ist zu beachten, dass für fehlende Koeffizienten von $f(x)$ im Schema Nullen zu schreiben sind (vgl. Beispiel 4/11). Außerdem kann man bei der Berechnung der Produkte den Rechenstab verwenden und einen Faktor, nämlich den Wert x_0, fest einstellen.

☐ Beispiel 4/11:
Gesucht ist der Funktionswert, den die Funktion

$$f(x) = 3x^5 - 70x^3 + 23x^2 + 48$$

an der Stelle $x_0 = -5$ annimmt.

Lösung:
Anstelle der Berechnung von

$$f(-5) = 3 \cdot (-5)^5 - 70 \cdot (-5)^3 + 23 \cdot (-5)^2 + 48$$

kann man das Horner-Schema folgendermaßen anwenden: Ausgehend von

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

erhält man im vorliegenden Fall

$$f(x) = 3x^5 + 0x^4 - 70x^3 + 23x^2 + 0x + 48$$

und für $x_0 = -5$ folgendes Schema (Bild 30):

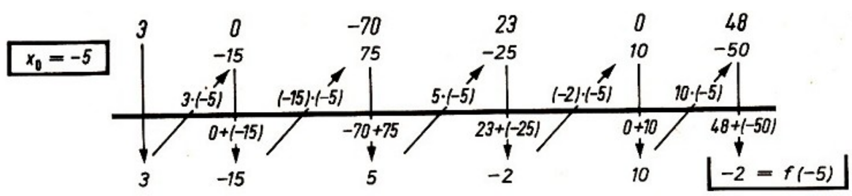


Bild 30

Man erhält also $f(-5) = -2$.

4.5 Regula falsi

10. Erläutern Sie den Begriff "Sehne einer Kurve"! Zeichnen Sie den Graph der Funktion $y = x^2 - 2x - 4$ im Intervall $(1{,}5)$!
Zeichnen Sie die Sehne der Kurve zwischen den Punkten $A(a = 1; f(a))$ und $B(b = 5; f(b))$!

11. Schreiben Sie die Gleichung der Geraden auf, die durch die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ geht!
Hinweis:
Gehen Sie von der Geradengleichung der Form $y = mx + n$ aus und beachten Sie, dass P_1 und P_2 auf der Geraden liegen, die Gerade eindeutig bestimmen!

Bei der Anwendung des Newtonschen Verfahrens zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen mit einer Variablen gehen in die Rechnung die Werte der ersten Ableitung von $f(x)$ ein.
Die Bildung der ersten Ableitung kann manchmal auf Schwierigkeiten stoßen. Eine Methode zur Lösung von Gleichungen, bei der die Ableitung $f'(x)$ nicht benötigt wird, ist die Methode des linearen Eingabelns oder die regula falsi, für die keine Konvergenzuntersuchung erforderlich ist, da die Lösung eingeschlossen wird. Diese Methode soll nun betrachtet werden.

Es sei bekannt, dass eine reelle Wurzel ξ der Gleichung $f(x) = 0$ im Intervall (a, b) liegt, dass also gilt $a < \xi < b$. Zur Bestimmung eines Näherungswertes x_1 für ξ ersetzen wir die Kurve im Intervall $\langle a, b\rangle$ durch die Sehne AB. Die Abszisse des Schnittpunktes der Sehne mit der x-Achse liefert die erste Näherung x_1 für die Wurzel ξ (Bild 31).

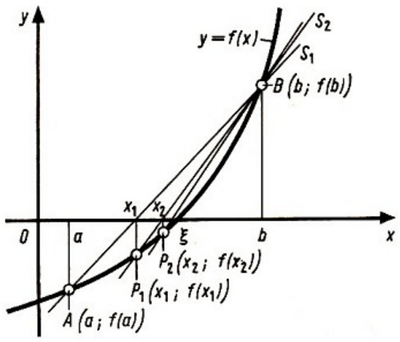


Bild 31

Da die Kurve zwischen A und B durch die Sehne ersetzt wird, heißt die Methode auch Sehnenmethode. In dem Fall, der im Bild 31 dargestellt wird, liegt die Wurzel ξ jetzt zwischen der ersten Näherung x_1 und b.
Die zweite Näherung x_2 erhält man, indem man die Kurve zwischen P_1 und B wiederum durch die Sehne P_1B ersetzt und diese mit der x-Achse zum Schnitt bringt. Falls die Wurzel ξ dann zwischen x_2 und b liegt, so wie das in der Abbildung der Fall ist, erhält man die dritte Näherung x_3 durch Schnitt der Sehne P_2B mit der x-Achse.

Das Verfahren wird in entsprechender Weise fortgesetzt und liefert so eine Folge von Näherungslösungen $x_1, x_2, x_3, ...$ mit Hilfe einer Folge von Sehnen.

Aus den geometrischen Überlegungen lässt sich eine Formel zur Berechnung der Näherungswerte $x_1, x_2, ...$ gewinnen. Man erhält die Gleichung für die Sekante S_1, durch die Punkte $A(a; f(a))$ und $B(b; f(b))$, indem man von der Gleichung der Geraden in der Form $y = mx+n$ ausgeht und berücksichtigt, dass durch die zwei Punkte A und B die Gerade eindeutig bestimmt ist.
Die zwei Punkte A und B liegen auf der Sekante S_1, und es gilt

$$f(b) = m \cdot b + n \qquad \text{und} \qquad f(a) = m \cdot a + n$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{und} \qquad n = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a$$

Wenn man diese Werte in die Geradengleichung der Form $y = mx + n$ einsetzt, erhält man die Gleichung der Sekante S_1:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a \qquad \text{oder} \qquad y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Für $y = 0$ erhält man die Abszisse x_1 des Schnittpunktes der Sekante S_1 mit der x-Achse, also die erste Näherung für die Wurzel ξ:

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) = 0 \qquad , \qquad x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

In entsprechender Weise erhält man

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \qquad \text{und} \qquad x_3 = x_2 - \frac{(b - x_2) f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}$$

Die allgemeine Vorschrift zur Berechnung der Näherungslösungen lautet in diesem Falle (Bild 31):

$$x_{n-1} = x_n - \frac{(b - x_n) \cdot f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \qquad \text{für } n = 1{,}2{,}...$$

Es sei $x_{n-1} < \xi < x_n$ $(n = 1{,}2{,}...)$.
Dann müssen $f(x_{n-1})$ und $f(x_n)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, es muss also gelten

$$f(x_{n-1}) \cdot f(x_n) < 0$$

In diesem Falle lautet dann die Formel

$$x_{n-1} = x_{n-1} - \frac{(x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Da x_{n+1} als $(n + 1)$te Näherung zwischen x_{n-1} und x_n liegt, brauchen keine Konvergenzuntersuchungen geführt zu werden. Es wird die exakte Lösung ξ durch die Folge der Näherungslösungen eingeschlossen. Das Verfahren konvergiert also, aber meist langsam.

Häufig ist es zweckmäßig, die Endpunkte des Intervalls, in dem die jeweilige Näherung liegt, immer wieder mit a bzw. b zu bezeichnen. Dann kann man die allgemeine Vorschrift zur Berechnung der Näherungslösungen auch in dieser Form

$$x_n = a - \frac{(b - a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \qquad \text{mit } n = 1{,}2{,}3{,}...$$

schreiben. Es muss dann gelten $f(a) - f(b) < 0$.
Betrachten wir den Verlauf des Prozesses zur Konstruktion der Näherungslösungen für die in den Bildern 32a und b dargestellten Fälle:

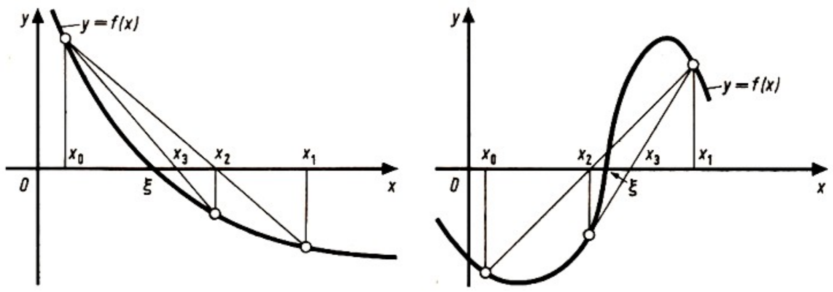


Bild 32a,b

1.Schritt ($n = 2$):
(32a und b): $x_0 < \xi < x_1$, $\quad f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, $\quad a := x_0, b := x_1$

2.Schritt ($n = 3$):
(32a): $x_0 < \xi < x_2$, $\quad f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$, $\quad a := x_0, b := x_2$
(32b): $x_2 < \xi < x_1$, $\quad f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$, $\quad a := x_2, b := x_1$

3.Schritt ($n = 4$):
(32a): $x_0 < \xi < x_3$, $\quad f(x_0) \cdot f(x_3) < 0$, $\quad a := x_0, b := x_3$
(32b): $x_2 < \xi < x_3$, $\quad f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$, $\quad a := x_2, b := x_3$

☐ Beispiel 4/12:
Die Gleichung $x^3 - 2x - 2 = 0$ besitzt im Intervall $\langle 1{,}2 \rangle$ eine Wurzel. Es sind nach der Sehnenmethode die erste und zweite Näherung zu berechnen.

Lösung:
Mit Hilfe der Formel erhält man

$$x_1 = a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = 1 - \frac{1 \cdot (-3)}{2 - (-3)} = 1{,}6$$

Es gilt also $x_1 = 1{,}6 \approx \xi$.
Da $f(1{,}6) \cdot f(2) < 0$ gilt, kann man mit $a = 1{,}6$ und $b = 2$ weiterrechnen und erhält

$$x_2 = 1{,}6 - \frac{0{,}4 \cdot (-1{,}1)}{2 - (-1{,}1)} = 1{,}6 + 0{,}14 = 1{,}74$$

Es gilt also $x_2 = 1{,}74 \approx \xi$.

☐ Beispiel 4/13:
Es sind die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 2 = 0$ mit Hilfe der regula falsi mit der Genauigkeitsforderung $|x_{n+1} - x_n| < 0{,}0001$ zu ermitteln.

Lösung:
Mit Hilfe grafischer Methoden kann man grob das Intervall bestimmen, in dem die einzige reelle Nullstelle ξ liegt. Man erhält $1 < \xi < 2$, und es gilt $f(1) = -2$ und $f(2) = 0{,}59$. Man kann das Intervall mit Hilfe einer Maßstabsänderung auf der x-Achse noch weiter einschränken (Bild 33).

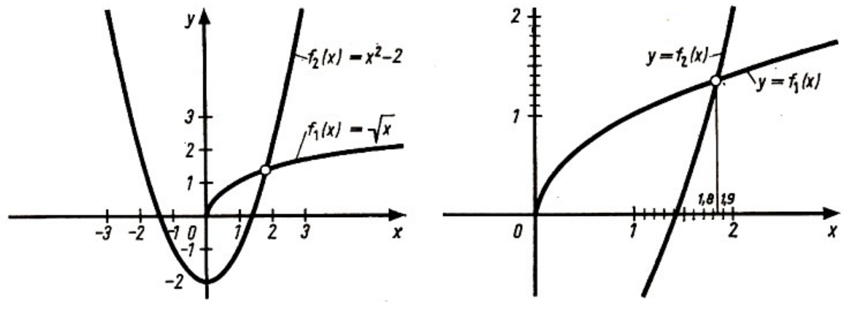


Bild 33a,b

Man erhält $1{,}8 < \xi < 1{,}9$, und es gilt $f(1{,}8) = -0{,}1$ und $f(1{,}9) = 0{,}23$.
Die Näherungslösungen ergeben sich nach der Formel

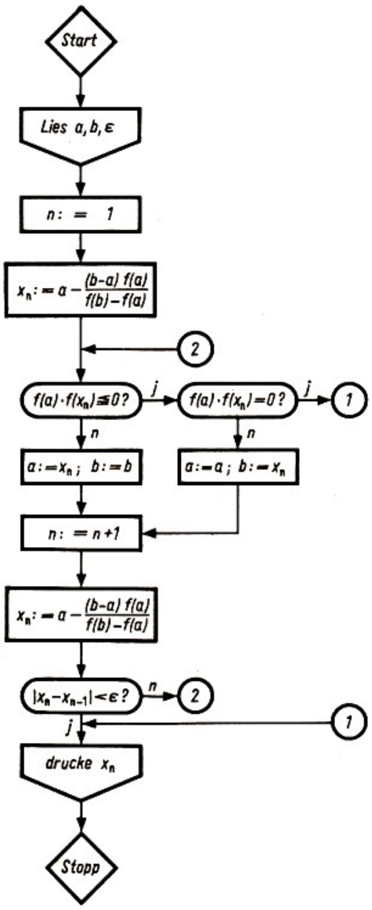
$$x_n = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \text{mit } n = 1,2,3,...$$

wobei man das Intervall $\langle a, b\rangle$ nach jedem Schritt neu festlegen muss.
Die Werte sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt:

	Ausgangspunkte					
n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_n	$f(x_n)$
1	1,8	1,9	-0,1	0,23	1,83	-0,0041
2	1,83	1,9	-0,0041		1,831	-0,00044
3	1,831	1,9	-0,00044	0,23	1,8311	-0,000253
4	1,8311	1,9	-0,00025		1,83117	-0,000024
5	1,83117	1,9	-0,000024		1,83117	-0,000023

Es gilt $|x_5 - x_4| = 0{,}00007 < 0{,}0001$.
Damit hat man die gewünschte Genauigkeit erreicht. Da außerdem $f(1{,}83118) > 0$ ist, lautet das Ergebnis $x_5 = 1{,}83117 \approx \xi$.

☐ Beispiel 4/14:
Es ist der Algorithmus für die regula falsi zu beschreiben, und es ist ein Programmablaufplan zu entwerfen. Die Genauigkeitsforderung lautet $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.
Die Ausgangswerte a und b seien bekannt, und es sei $f(a) <=$ und $f(b) > 0$.



Beschreibung des Algorithmus:
(1) lies a, b und ε
(2) $n := 1$
(3) $x_n = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$
(4) $f(a)\cdot f(x_n) \leq 0$, dann (5), sonst (7)
(5) $f(a)\cdot f(x_n) = 0$, dann (11), sonst (6)
(6) $a := a$ und $b := x_n$, dann (8)
(7) $a := x_n$ und $b := b$, dann (8)
(8) $n := n - 1$
(9) $x_n = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$
(10) $|x_n - x_{n-1} l < \varepsilon$, dann (11) sonst (4)
(11) drucke x_n
(12) stopp

Programmablaufplan Bild 34

Zusammenfassung:
Bei der praktischen Durchrechnung der Sehnenmethode kann man nach folgenden Arbeitsschritten vorgehen:

1. Bestimmung der Intervalle der abgespaltenen Wurzeln
Mit Hilfe grafischer Methoden werden die Intervalle ermittelt, in denen jeweils eine reelle Wurzel ξ liegt. Es sei das Intervall $\langle a, b\rangle$ ein solches Intervall; es gelte $a < \xi < b$.

2. Berechnung der ersten Näherung x_1
Die Berechnung erfolgt nach der Formel

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Die Werte werden in ein entsprechendes Rechenschema eingetragen.

3. Einschränkung des Intervalls Mit Hilfe der bisher ermittelten Näherung x_1 und den Werten a und b wird das kleinste Intervall ermittelt, in dem die Wurzel ξ liegt (entweder $x_1 < \xi < b$ oder $a < \xi < x_1$).
Die Endpunkte des Intervalls werden wieder mit a und b bezeichnet. Sie sind der Ausgangspunkt für die Berechnung einer weiteren Näherung x_2 nach der obigen Formel.

4. Berechnung weiterer Näherungen
Einschränkung des Intervalls - Bezeichnung der Endpunkte jeweils mit a und b - Berechnung nach der Formel

$$x_n = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \text{mit } n = 3,4,...$$

Es empfiehlt sich, bei der Rechnung das folgende Rechenschema zu verwenden:

	Ausgangspunkte					
n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_n	$f(x_n)$
1	a	b	...	...	x_1	$f(x_1)$
2	$a = x_1$ oder $a = a$	$b = b$ oder $b = x_1$	...	...		

4.6 Allgemeines Iterationsverfahren

Neben dem Newtonschen Verfahren und, der regula falsi wird im folgenden Abschnitt noch ein allgemeines Iterationsverfahren betrachtet.
Es sei x_0 ein Näherungswert für die Wurzel ξ der Gleichung $f(x) = 0$, der durch ein grafisches Verfahren oder ein anderes Näherungsverfahren bestimmt worden ist. Für das allgemeine Iterationsverfahren wird die Gleichung

$$f(x) = 0 \qquad \text{auf die Form} \qquad x = \varphi(x)$$

gebracht. Das ist i. a. in mannigfacher Weise möglich. Wir betrachten dazu einige Beispiele:

Die Gleichung $x^2 - 2x + 3 = 0$ lässt sich z. B. auf die Formen

$$x = \sqrt{2x-3}, \qquad x = \frac{2x-3}{x}, (x \neq 0), \qquad x = \frac{x^2+3}{2}$$

bringen.

Die Gleichung $x^2 - 2 - \ln x = 0$ kann auf die Formen

$$x = \sqrt{2 + \ln x}, \qquad x = e^{x^2-2}, \qquad x = \frac{2 + \ln x}{x}, (x \neq 0)$$

gebracht werden.
Diese Formen sind im allgemeinen nicht äquivalent.

Die Gleichung $f(x) = 0$ lässt sich mit Hilfe der Iterationsvorschrift des Newtonschen Verfahrens auf die folgende Form bringen:

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Beim Newtonschen Verfahren ist die Umformung äquivalent. Ist nämlich $f(\xi) = 0$, so gilt

$$\varphi(\xi) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = \xi, \qquad \text{falls} \qquad f'(\xi) \neq 0 \quad \text{gilt}$$

Aus $\varphi(\xi) = \xi$ folgt

$$\xi - \varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = 0 \qquad \text{also} \qquad f(\xi) = 0$$

Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form $x = \varphi(x)$ gebracht wird, muss man die Umformung möglichst so vornehmen, dass die Gleichungen $x = \varphi(x)$ und $f(x) = 0$ die gleichen Lösungen haben. Es muss also möglichst eine äquivalente Umformung vorgenommen werden.

Nach der Umformung der Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form $x = \varphi(x)$ wird ausgehend von einem Näherungswert $x_=0$ eine Folge von Näherungslösungen nach der Vorschrift

$$x_1 = \varphi(x_0), \qquad x_2 = \varphi(x_1), \qquad x_3 = \varphi(x_2), ...$$

oder allgemein

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

für $n = 1{,}2{,}3{,}...$ konstruiert.

Dieser Prozess der fortlaufenden Berechnung der Folge der Näherungslösungen x_n $(n = 1{,}2{,}...)$ heißt auch, wie wir bereits vorn angegeben haben, Methode der schrittweisen Näherung oder Iterationsverfahren.
Für die Konvergenz des allgemeinen Iterationsverfahrens zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen gilt der

▷ Satz 4/4:
Ist in einem Intervall (a, b), das außer einer Wurzel ξ von f(x) = 0 bzw. $x = \varphi(x)$ auch alle Näherungswerte x_n $(n = 0{,}1, ...)$ enthält, die Bedingung

$$|\varphi'(x)| \leq m < 1, \qquad \text{für alle} \quad x \in (a{,}b)$$

erfüllt, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

d.h, die Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen ξ.
Man sagt auch, dass das Iterationsverfahren konvergiert.

Beweis:
Da ξ Wurzel ist, gilt $\xi = \varphi(\xi)$. Aus der Iterationsvorschrift erhält man $x_1 = varphi(x_0)$ mit x_1 aus dem Intervall (a, b).
Es gilt

$$\xi - x_1 = \varphi(\xi) - \varphi(x_0)$$

und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_0) = (\xi - x_0)\varphi'(\eta_0) \qquad \text{mit} \qquad x_0 < \eta_0 < \xi \text{ oder } \xi < \eta_0 < x_0$$

Damit gilt also

$$\xi - x_1 = (\xi - x_0)\varphi'(\eta_0) \qquad \text{mit} \qquad x_0 < \eta_0 < \xi \text{ oder } \xi < \eta_0 < x_0$$

Entsprechend erhält man weiter

$$\begin{aligned} \xi - x_2 &= (\xi - x_1)\varphi'(\eta_1) \qquad \text{mit} \qquad x_1 < \eta_1 < \xi \text{ oder } \xi < \eta_1 < x_1 \\ &\dots \\ \xi - x_n &= (\xi - x_{n-1})\varphi'(\eta_{n-1}) \qquad \text{mit} \qquad x_{n-1} < \eta_{n-1} < \xi \text{ oder } \xi < \eta_{n-1} < x_{n-1} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Voraussetzung $|\varphi'(x)| < m$ erhält man

$$\begin{aligned} |\xi - x_1| &\le |\xi - x_0| \cdot m \\ |\xi - x_2| &\le |\xi - x_1| \cdot m \le |\xi - x_0| m^2 \\ &\dots \\ |\xi - x_n| &\le |\xi - x_0| \cdot m^n \end{aligned}$$

Die Folge $\{m^n\}$ ist für $m < 1$ eine Nullfolge (geometrische Folge mit $m < 1$), $|\xi - x_0|$ ist konstant, und damit ist auch die Folge $\{\xi - x_n\}$ eine Nullfolge. Es gilt also:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\xi - x_0| m^n < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge n_0$$

gilt. Somit gilt erst recht

$$|x_n - \xi| = |\xi - x_n| < \varepsilon$$

Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert also gegen ξ. Damit ist der Satz bewiesen.

Bei der praktischen Durchführung des Verfahrens muss man versuchen, die Gleichung $f(x) = 0$ so umzuformen, dass die Ableitung $\varphi'(x)$ in der Nähe der gesuchten Wurzel ξ dem absoluten Betrag nach möglichst klein ist.

Das Newtonsche Verfahren ist ein Spezialfall des allgemeinen Iterationsverfahrens mit

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Wir können nun auch die angegebene Konvergenzbedingung für das Newtonsche Verfahren herleiten. Es ergibt sich nämlich unter Anwendung der entsprechenden Differentiationsregeln

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - 1 + \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

und damit

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Gilt nun

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| \leq m < 1$$

in einem Intervall (a, b), das ξ und die Folge $\{x_n\}$ enthält, so konvergiert nach Satz 4/4 die Folge $\{x_n\}$ gegen ξ.

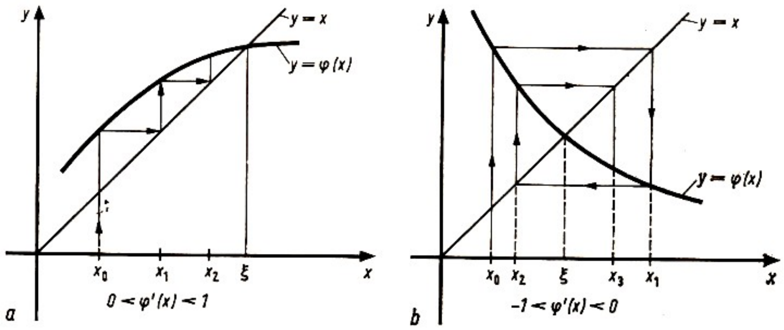


Bild 35

Im Bild 35 wird zunächst der Iterationsprozess für zwei verschiedene Fälle, nämlich für die monotone oder treppenförmige Konvergenz und für die oszillierende oder spiralförmige Konvergenz, anschaulich verfolgt.
Einer Fehlerabschätzung beim allgemeinen Iterationsverfahren, bei dem Konvergenz vorliegt, dient die folgende Betrachtung.

Es gilt nach den Überlegungen im Beweis zu Satz 4/4

$$|x_n - \xi| \leq m \cdot |x_{n-1} - \xi| \qquad \text{mit} \quad m < 1$$

Formt man $|x_{n-1} - \xi|$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung um, also

$$|x_{n-1} - \xi| = |x_{n-1} - x_n + x_n - \xi| \leq |x_{n-1} - x_n| + |x_n - \xi|$$

so erhält man

$$|x_n - \xi| \leq m \cdot [|x_{n-1} - x_n| + |x_n - \xi|]$$

und daraus

$$|x_n - \xi| \leq \frac{m}{1-m} |x_{n-1} - x_n|$$

Damit lässt sich der Fehler für die n-te Näherung x_n mit Hilfe des Absolutbetrages $|x_{n-1} - x_n|$ abschätzen, wenn eine Schranke $m < 1$ für $|\varphi'(x)|$ bekannt ist. Das Verfahren soll, ehe wir Hinweise zur praktischen Rechnung geben, an einem Beispiel erläutert werden.

□ Beispiel 4/15:
Es sind die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$ grafisch zu ermitteln und mit Hilfe des Iterationsverfahrens zu verbessern.

Lösung:
1) Bestimmung der Ausgangsnäherungen
Nach Aufspaltung der gegebenen Gleichung

$$f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$$

in $f_1(x) = f_2(x)$ mit

$$f_1(x) = x - 0{,}2 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x^5$$

und grafischer Darstellung erhält man als Ausgangswerte (↗ Bild 36)

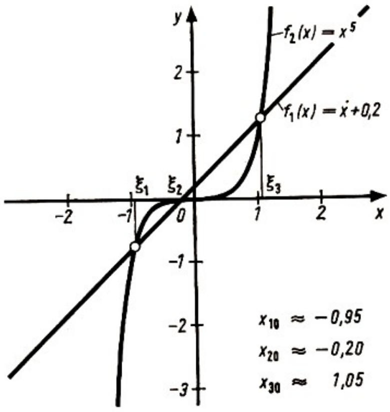


Bild 36

$$x_{10} = -0{,}95 \quad ; \quad x_{20} = -0{,}2 \quad \text{und} \quad x_{30} = 1{,}05$$

2) Umformung und Konvergenzuntersuchung
Als Umformung bieten sich mehrere Möglichkeiten an. So kann man zunächst x^5 isolieren

$$x^5 = x + 0{,}2$$

und dann auf beiden Seiten der Gleichung radizieren:

$$x = \sqrt[5]{x + 0{,}2} \qquad (x \geq -0{,}2)$$

(Die notwendige Einschränkung des Variablengrundbereichs bei dieser Gleichung bringt es mit sich, dass in diesem Fall auch eine Einschränkung des Definitionsbereichs der gegebenen Funktion $f(x) = x^5 - x - 0{,}2$ vorgenommen werden muss.
Diese Umformung gilt also nur für den Fall, dass die Funktion in einem gewissen Intervall, nämlich im Intervall $-0{,}2 \leq x < \infty$, betrachtet wird.)

Eine andere Umformung erhält man, wenn nach dem Isolieren von x^5 auf der rechten Seite der Gleichung der Faktor (-1) ausgeklammert wird:

$$x^5 = x + 0{,}2 = (-1)(-x - 0{,}2) \quad , \quad x = -\sqrt[5]{-x - 0{,}2} \quad (x \leq -0{,}2)$$

Betrachten wir als dritte Umformung den Fall, dass x in der Ausgangsgleichung isoliert wird:

$$x = x^5 - 0{,}2$$

Wir stellen nun alle drei Umformungen zusammen:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x) = -\sqrt[5]{-x - 0{,}2} \quad (x \leq -0{,}2) \\ x &= \varphi_2(x) = x^5 - 0{,}2 \\ x &= \varphi_3(x) = \sqrt[5]{x + 0{,}2} \quad (x \geq -0{,}2) \end{aligned}$$

Die Gleichung $x = \varphi_2(x)$ ist geeignet zur Berechnung der Näherungslösungen für ξ_2 mit $x_{20} = -0{,}2$, da

$$|\varphi_2'(x)| = 5x^4 < 1 \quad \text{für} \quad -0{,}3 < x < -0{,}1$$

Die Gleichung $x = \varphi_3(x) = \sqrt[5]{x^2 + 0{,}2}$ ist geeignet zur Berechnung der Näherungslösungen für ξ_3 mit $x_{30} = 1{,}05$ als Ausgangsnäherung, da

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x+0{,}2)^4}} < 1 \quad \text{für} \quad 1 < x < 1{,}1$$

Schließlich ist die Gleichung $x = \varphi_1(x) = -\sqrt[5]{-x - 0{,}2}$ geeignet zur Berechnung der Näherungslösungen für ξ_1 mit $x_{10} = -0{,}95$, da

$$|\varphi_1'(x)| = \frac{1}{5\sqrt[5]{(-x-0{,}2)^4}} < 1 \quad \text{für} \quad -1 < x < -0{,}9$$

Man muss also für alle drei reellen Wurzeln drei verschiedene Aufspaltungen der Gleichung $f(x) = 0$ verwenden.
Die Gleichung $x = \varphi_2(x) = x^5 - 0{,}2$ ist zum Beispiel nicht für die Berechnung der Näherungslösungen für ξ_1 und ξ_3 geeignet, da

$$|\varphi_2'(x)| = 5x^4 > 1 \quad \text{für} \quad -1 < x < -0{,}9 \quad \text{und für} \quad 1 < x < 1{,}1$$

gilt. Damit ist die Konvergenzbedingung nicht erfüllt.

Die Gleichung $x = \varphi_3(x) = \sqrt[5]{x + 0{,}2}$ ist für die Berechnung der Näherungslösungen ξ_2 nicht geeignet, da

$$|\varphi_3'(x)| = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x+0{,}2)^4}} > 1 \quad \text{für} \quad -0{,}3 < x < -0{,}1$$

gilt.

3) Berechnung der Näherungslösungen
Die Berechnung der Näherungslösungen erfolgt nach den entsprechenden Formeln:
Für ξ_1 nach der Formel

$$x_{1_{n+1}} = -\sqrt[5]{-x_{1n} - 0{,}2} \quad \text{mit} \quad x_{10} = -0{,}95$$

für ξ_2 nach der Formel

$$x_{2_{n+1}} = x_{2n}^5 - 0{,}2 \quad \text{mit} \quad x_{20} = -0{,}2$$

und für ξ_3 nach der Formel

$$x_{3_{n+1}} = \sqrt[5]{x_{3n} + 0{,}2} \quad \text{mit} \quad x_{30} = 1{,}05$$

Man erhält:

n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}
0	-0,95	-0,2	1,05
1	-0,944	-0,2003	1,0456
2	-0,9426	-0,2003	1,0449
3	-0,9422		1,0448
4	-0,9421		1,0448
5	-0,9421		

also $\xi_1 \approx -0{,}94$; $\xi_2 \approx -0{,}20$ und $\xi_3 \approx 1{,}04$.

4) Fehlerabschätzung
Es wird die Fehlerabschätzung für die Näherungslösung von ξ_2 durchgeführt. Es gilt hier

$$|\varphi'(x)| = 5x^4 < 0{,}05 = m \quad \text{in} \quad (-0{,}3; -0{,}1)$$

Damit erhält man für den Fehler nach der ersten Näherung

$$|x_{21} - \xi| \leq \frac{0{,}05}{0{,}95}|x_{20} - x_{21}| \approx 0{,}05 \cdot 0{,}003 = 0{,}000015$$

Zusammenfassung:
Bei der praktischen Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens sollte man folgende Arbeitsschritte gehen:

1. Bestimmung einer Ausgangsnäherung x_0
2. Umformung der Gleichung $f(x) = 0$ in $x = \varphi(x)$
3. Konvergenzuntersuchung
4. Berechnung der Folge der Näherungslösungen x_n
5. Fehlerabschätzung

Das Rechenschema sollte die Werte x_n, Spalten zur Berechnung von $\varphi(x_n)$ und die Werte $\varphi(x_n)$ selbst enthalten.

4.7 Aufgaben

12. Lösen Sie grafisch die folgenden Gleichungen!
a) $8x^2 + 23 = 5x^2 + 50$; b) $x^2 - 3x + 5 = 0$; c) $x^2 + 6x = 7$

13. Stellen Sie bei den nachfolgenden kubischen Gleichungen die reduzierte Form her und lösen Sie die Gleichungen durch geeignete Zerlegung grafisch!
a) $x^3 + 3x2 - 5x + 7 = 0$ (L); b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ (L); c) $19x^3 - 10x^2 + 8 = 0$

14. Geben Sie Möglichkeiten für die grafische Lösung von Gleichungen der Form $x^3+ax^2+c = 0$ an!

15. Lösen Sie grafisch die folgenden Gleichungen!
a) $\cos x - \frac{1}{3}x = 0$ (L); b) $e^x - x^2 = 0$ (L); c) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 0$;
d) $\sin x - \frac{x}{2} = 0$ (im Intervall $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$);
e) $3x - \cos x - 1 = 0$; f) $x^3 + 2x - 11 = 0$
Verbessern Sie die Näherungswerte durch Maßstabsänderung auf der x-Achse und durch Anwendung des grafischen Analogons zur regula falsi (zwei Schritte)!

16. Newton knüpfte die Darstellung seiner Lösungsmethode an die Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

an. Er rechnete dann folgendermaßen:
Ein erster Näherungswert ist $x_1 = 2$. Setzt man $x = 2 + \varepsilon$ in die Gleichung ein, so ergibt sich für ε die Bestimmungsgleichung

$$\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 10\varepsilon - 1 = 0$$

Da ε klein ist, werden die Glieder ε^3 und $6\varepsilon^2$ vernachlässigt. Man erhält so für $\varepsilon = 0{,}1$ und damit die zweite Näherung $x_2 = 2{,}1$. In dieser Weise wird fortgefahren.

Zeigen Sie, dass diese scheinbar ganz andere Form der Lösung mit der üblichen Darstellung des Newtonschen Verfahrens gleichwertig ist!

17. Um $\sin 10°$ zu berechnen, setze man $x = 10°$ und wende die Formel

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$$

an. Das liefert, da $\sin(3x)$ bekannt ist, eine Gleichung für $\sin 10°$. Berechnen Sie deren Lösung näherungsweise! (L)

18. Verbessern Sie die in den Aufgaben 4/13.a) und 4/13.b) grafisch ermittelten Näherungslösungen
a) mit Hilfe des Newtonschen Verfahren,
b) mit Hilfe der Regula falsi und
c) mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens! (L)
Untersuchen Sie bei c) jeweils die Konvergenz! Schreiben Sie die Iterationsvorschrift auf und legen Sie ein geeignetes Rechenschema an!
Rechnen Sie jeweils beim Newtonschen Verfahren einen Schritt und bei den anderen Verfahren zwei Schritte!

19. Es sind folgende Gleichungen gegeben:
a) $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$, b) $x^3 - 3x + 1 = 0$, c) $x^2 - 3x + \cos x = 0$,
d) $x^2 + \frac{1}{x} - 2 = 0$, e) $\sin x + \frac{1}{x} - 2 = 0$

(1) Ermitteln Sie die Intervalle, in denen die Gleichungen reelle Wurzeln haben! (L)
(2) Berechnen Sie mit Hilfe der Regula falsi jeweils eine Näherungslösung! (L)
(3) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die jeweilige Näherungslösung mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens berechnen!

20. Berechnen Sie mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens
a) die kleinste positive reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ (L),
b) die größte positive reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 3x + 1 = 0$ (L).

(Bestimmen Sie eine Ausgangsnäherung! Bringen Sie die Gleichung auf die Form $x = \varphi(x)$! Führen Sie eine Konvergenzuntersuchung durch! Es ist ein geeignetes Rechenschema anzulegen, und es sind einige Schritte zu rechnen. Führen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas eine Probe durch!)

21. Berechnen Sie alle reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x + 1 = 0$ mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens! (L)

22. Berechnen Sie die Wurzeln der Gleichung $\sin x + \frac{1}{x} - 2 = 0$ mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens! (L)

5 Lineare Gleichungssysteme

1. Schreiben Sie ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Variablen auf! Wie kann ein solches Gleichungssystem gelöst werden ? Diskutieren Sie die Lösbarkeit!

2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 19 \\ 6x - 2y &= 6 \end{aligned}$$

a) rechnerisch und b) grafisch! (L)

3. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \text{(L)}$$

4. Wie lautet die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= a_2 \end{aligned}$$

wenn a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} reelle Zahlen sind?

Lineare Gleichungssysteme mit einer großen Zahl von Variablen treten sehr häufig in der Praxis auf, so zum Beispiel bei der Lösung von Aufgaben der mathematischen Physik. Das Lösen solcher Systeme ist jedoch meist mit Schwierigkeiten verbunden. Die Methoden, die der Schüler im Unterricht kennenlernt, reichen nicht aus.
Vielfach muss man Methoden zur näherungsweisen Lösung verwenden. So kennt man direkte Methoden oder sogenannte exakte Verfahren. Diese Verfahren führen theoretisch immer zum Ziel. Sie enthalten jedoch eine Vielzahl von arithmetischen Operationen, und es können sich bei diesen Methoden Rundungsfehler stark häufen und fortpflanzen.

Neben den direkten Methoden wendet man auch iterative Methoden oder Iterationsverfahren an. Diese Methoden sind gut für den Einsatz an Rechenautomaten geeignet, da gewisse Zyklen ständig wieder zu durchlaufen sind. Sie liefern auch, wenn Konvergenz vorliegt, das Ergebnis mit einer großen Genauigkeit. Es gibt jedoch keine Näherungsverfahren, die für alle lösbaren Systeme angewendet werden können.

Wir werden in diesem Abschnitt ein direktes Verfahren, das zur praktischen Lösung von Gleichungssystemen geeignet ist, behandeln, nämlich den Gaussschen Algorithmus. Dabei stellen wir keine Untersuchungen zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen an, sondern wir setzen die Lösbarkeit voraus und geben nur den Algorithmus für das Lösungsverfahren an.

5.1 Grundidee des Gaussschen Algorithmus

Es wird die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= a_1 \\ &... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= a_n \end{aligned}$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_i \quad \text{und} \quad i = 1,2,...,n$$

betrachtet, also eines Gleichungssystems von n Gleichungen mit n Variablen. Dieses System sei lösbar.

Das Ziel des Gaussschen Algorithmus besteht darin, das System äquivalent so umzuformen, dass es in gestaffelter Form - man sagt auch "in Dreiecksgestalt" - vorliegt. Diesen Vorgang bezeichnet man als Reduktion auf Dreiecksgestalt.

▷ Definition 5/1:
Ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen wird gestaffeltes System oder auch System in Dreiecksgestalt genannt, wenn die letzte (n-te) Gleichung des Systems nur noch die Variable x_n enthält, die vorletzte ($(n-1)$-te) Gleichung höchstens die Variablen x_n und x_{n+1} usw. und die erste Gleichung höchstens alle Variablen $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$.

Ein solches gestaffeltes System ist leicht auflösbar. Aus der n-ten Gleichung erhält man den Wert der Variablen x_n, unter Benutzung dieses Wertes aus der $(n-1)$ten Gleichung den Wert der Variablen x_{n-1} usw. Diesen Prozess nennt man Auflösung des Dreieckssystems.

Nach der Berechnung der Werte $x_1, ..., x_n$ ist noch eine Probe am Ausgangssystem sinnvoll und zweckmäßig.
Im Laufe der Rechnung sollte man Rechenkontrollen durchführen. Wir werden also bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems der vorn angegebenen Form drei Schritte beachten:

1) Reduktion auf Dreiecksgestalt (mit, Rechenkontrollen)
2) Auflösung des Dreieckssystems
3) Probe mit Hilfe des Ausgangssystems.

□ Beispiel 5/1: Das folgende Gleichungssystem ist in der oben angegebenen Weise zu lösen.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Lösung:
1) Reduktion auf Dreiecksgestalt
Durch Subtraktion des Zweifachen (Dreifachen) der ersten Gleichung von der zweiten (dritten) Gleichung wird aus der zweiten (dritten) Gleichung x_1 eliminiert. Man erhält:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ -5x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wenn man nun zur dritten Gleichung das Fünffache der zweiten Gleichung addiert, wird aus der dritten Gleichung auch x_2 eliminiert. Man erhält das Dreieckssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_3 &= -7 \end{aligned}$$

2) Auflösung des Dreieckssystems
Aus der letzten Gleichung erhält man: $x_3 = 7$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich: $x_2 = 5$ und durch Einsetzen von $x_3 = 7$ und $x_2 = 5$ in die erste Gleichung: $x_1 = 3$.

3) Probe Die Probe erfolgt im Ausgangssystem. Man erhält:

$$\begin{aligned} 3 + 5 - 7 &= 1 \\ 6 + 15 - 21 &= 0 \\ 9 - 10 + 7 &= 6 \end{aligned}$$

5.2 Drei Gleichungen mit drei Variablen

Das Gleichungssystem hat die Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

mit $a_{11} \neq 0$ (durch Umordnung der Gleichungen ist das immer möglich).
Bei der Reduktion auf Dreiecksgestalt dividieren wir im ersten Schritt die erste Gleichung durch a_{11}, die zweite durch a_{21}, und die dritte durch a_{31}. Jede Gleichung wird also durch den Koeffizienten bei x_1 dividiert. Wenn in einer Gleichung dieser Koeffizient Null ist, dann wird diese Gleichung im ersten Schritt nicht mit bearbeitet. Wir erhalten dann folgendes System:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 &= \frac{a_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 &= \frac{a_2}{a_{21}} \\ x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}}x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}}x_3 &= \frac{a_3}{a_{31}} \end{aligned}$$

Wir subtrahieren nun die erste Gleichung nacheinander von der zweiten und dritten Gleichung. Die dabei entstehenden Differenzen der Form

$$\left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right), \qquad \left(\frac{a_{23}}{a_{21}} - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right), \qquad \left(\frac{a_2}{a_{21}} - \frac{a_1}{a_{21}}\right), \quad \text{usw.}$$

bezeichnen wir im ersten Schritt mit

$$a_{22}^{(1)}, \quad a_{23}^{(1)}, \quad a_2^{(1)}, \quad \text{usw.}$$

In der ersten Gleichung führen wir zur Vereinfachung noch folgende Schreibweise ein:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{12}; \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{13}; \quad \frac{a_1}{a_{11}} = b_1$$

Somit erhalten wir nach dem ersten Schritt das System:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= a_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= a_3^{(1)} \end{aligned}$$

In diesem neuen System ist die Variable x_1 nur noch in der ersten Gleichung enthalten.
Im zweiten Schritt dividieren wir, nachdem wir die Gleichungen so umgeordnet haben, dass $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ist, jede Gleichung des Systems, beginnend mit der zweiten Gleichung, durch den jeweiligen Koeffizienten von x_2 und subtrahieren anschließend die zweite Gleichung von der restlichen.

Wenn in einer Gleichung der Koeffizient von x_2 Null ist, dann wird diese Gleichung im zweiten Schritt nicht bearbeitet. Wir erhalten dann das System nach dem zweiten Schritt

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_1 \\ x_2 + b_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{33}^{(2)}x_3 &= a_3^{(2)} \end{aligned}$$

mit

$$b_{23} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_2 = \frac{a_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{33}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} - b_{23}, \quad a_3^{(2)} = \frac{a_3^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} - b_2$$

In diesem System enthält die erste Gleichung die Variablen x_1, x_2 und x_3, die zweite Gleichung die Variablen x_2 und x_3.
Im dritten Schritt dividieren wir die dritte Gleichung durch den Koeffizienten von x_3.

Eine Subtraktion ist im hier behandelten speziellen Fall für $n = 3$ nicht mehr notwendig (bei mehr als drei Variablen wird der Prozess fortgesetzt). Man erhält das System in Dreiecksgestalt nach dem dritten Schritt:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_1 \\ x_2 + b_{23}x_3 &= b_2 \\ x_3 &= b_3 \quad \text{mit} \quad b_3 = \frac{a_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \end{aligned}$$

Die erste Gleichung enthält die Variablen x_1, x_2 und x_3, die zweite Gleichung die Variablen x_2 und x_3, die dritte die Variable x_3.
Dieses System ist leicht auflösbar. Aus der dritten Gleichung erhält man

$$x_3 = b_3$$

aus der zweiten Gleichung

$$x_2 = b_2 - b_{23}x_3 = b_2 - b_{23}b_3$$

und aus der ersten Gleichung

$$x_1 = b_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 = b_1 - b_{12}(b_2 - b_{23}b_3) - b_{13}b_3$$

Die Probe erfolgt im Ausgangssystem.

Zusammenfassung:
Bei der praktischen Durchrechnung des Algorithmus ist es zweckmäßig, folgende Schritte zu gehen:

1. Ordnen des Systems, so dass $a_{11} \neq 0$ gilt.

2. Durchführung des ersten, zweiten und dritten Schrittes.

(Gegebenenfalls muss man nach dem zweiten Schritt wieder eine Umordnung der Gleichungen des Systems durchführen, so dass $a_{22}^{(1)} \neq 0$ gilt. Die Werte werden am besten in das nachfolgende Rechenschema eingetragen.)

3. Auflösung des gestaffelten Systems, das nach dem dritten Schritt entsteht.

4. Probe im Ausgangssystem.

Die gesamte Rechnung sollte man in einem Rechenschema anordnen:

	Spaltensummen				
	t_1	t_2	t_3	t	
Schritt	Koeffizienten bei			Absolutglied	Zeilensummen
	x_1	x_2	x_3		
0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1	s_1
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2	s_2
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3	s_3
1	1	b_{12}	b_{13}	b_1	$s_1^{(1)}$
	0	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$s_2^{(1)}$
	0	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_3^{(1)}$	$s_3^{(1)}$
2	1	b_{12}	b_{13}	b_1	$s_1^{(2)} = s_2^{(1)}$
	0	1	b_{23}	b_2	$s_2^{(2)}$
	0	0	$a_{33}^{(2)}$	$a_3^{(2)}$	$s_3^{(2)}$
3	1	b_{12}	b_{13}	b_1	$s_1^{(2)} = s_3^{(1)}$
	0	1	b_{23}	b_2	$s_2^{(3)} = s_2^{(2)}$
	0	0	1	b_3	$s_3^{(3)}$

5.3 Allgemeiner Fall

Für den allgemeinen Fall, nämlich für das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = a_i \qquad (i = 1,2,...,n)$$

wird die Reduktion folgendermaßen vorgenommen:
Nach der Umordnung des Systems in der Weise, dass $a_{11} \neq 0$ gilt, wird im ersten Schritt

die erste Gleichung durch a_{11}, die zweite Gleichung durch a_{21}, ..., die n-te Gleichung durch a_{n1}

dividiert. Wenn in einer Gleichung dieser Koeffizient Null ist, dann wird diese Gleichung im ersten Schritt nicht bearbeitet. Die dann folgende Subtraktion der ersten Gleichung von allen anderen liefert das System nach dem ersten Schritt.
In diesem System ist die Variable x_1 nur noch in der ersten Gleichung enthalten. Im zweiten Schritt gehen wir analog wie im ersten Schritt vor, ordnen, wenn es notwendig ist, die Gleichungen um, dividieren jede Gleichung, beginnend mit der zweiten Gleichung, durch den jeweiligen Koeffizienten von x_2 (falls dieser ungleich Null ist) und subtrahieren anschließend die zweite Gleichung von der dritten, vierten, ... und n-ten Gleichung.

Das neue System enthält in der ersten Gleichung die Variablen $x_1, ..., x_n$, in der zweiten die Variablen $x_2, ..., x_n$ und in den restlichen $(n-2)$ Gleichungen höchstens die Variablen $x_3, ..., x_n$. Dieser Prozess der Elimination der Variablen wird fortgesetzt.

Nach n Schritten erhält man das gestaffelte System

$$\begin{aligned} x_1 * b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + ... + b_{1n}x_n &= b_1 \\ x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n &= b_2 \\ &... \\ x_{n-1}b_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ x_n &= b_n \end{aligned}$$

Dieses System ist von unten nach oben leicht auflösbar. Es ist zweckmäßig, sich auch hier ein Rechenschema wie im Fall $n = 3$ anzulegen.

5.4 Rechenkontrollen und Endprobe

Bei der Vielzahl der arithmetischen Operationen ist es notwendig, Kontrollen im Laufe der Rechnung (Zwischenkontrollen) und am Ende der Rechnung (Endprobe) durchzuführen.
Die Zwischenkontrollen werden mit Hilfe der sogenannten Zeilensummenprobe und die Endprobe mit der Spaltensummenprobe durchgeführt. Dazu werden im Ausgangsgleichungssystem die Zeilensummen

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + a_i \quad (i = 1,2,...,n)$$

und die Spaltensummen

$$t_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad \text{und} \quad t = \sum_{k=1}^{n} a_i \quad (i = 1,2,...,n)$$

gebildet.
Auf die Zeilensummen s_i werden, wie auf die Koeffizienten a_{ik} und die Absolutglieder a_i, die Operationen des Gaussschen Algorithmus angewandt.
Im ersten Schritt werden also folgende Operationen ausgeführt:

$$s_1^{(1)} = \frac{s_1}{a_{11}} \quad \text{und} \quad s_i^{(1)} = \frac{s_i}{a_i 1} - \frac{s_1}{a_{11}} \quad \text{für} \quad i = 1,2,3,..,n$$

Wenn man die Zeilensummen für das nach dem ersten Schritt entstandene System bildet und diese mit $S_i^{(1)}$ bezeichnet, so muss gelten

$$S_i^{(1)} - s_i^{(1)} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,2,3,..,n$$

Im zweiten Schritt werden auf die Zeilensummen, die man nach dem ersten Schritt gebildet hat, wiederum die Operationen des Gaussschen Algorithmus angewandt.
Die erste Gleichung wird dabei, wie das vorn angegeben wurde, unverändert übernommen, da sie bereits die erste Gleichung des gestaffelten Systems ist. Die so entstandenen Werte müssen mit den Zeilensummen nach der Durchführung des zweiten Schrittes übereinstimmen.

Mit Hilfe dieser Zeilensummenproben nach jedem Schritt werden die Zwischenkontrollen durchgeführt. Die Zeilensummen werden am besten im Rechenschema mitgeführt.
Die Endprobe wird, wie vorn angegeben, mit Hilfe der Spaltensummen durchgeführt. Es muss gelten

$$\sum_{i=1}^{k} t_k x_k = t$$

Auch die Spaltensummen werden in das Rechenschema eingetragen. Das Erfülltsein der Bedingungen der Rechenkontrolle ist notwendig für ein richtiges Resultat, aber im allgemeinen nicht hinreichend.

5.5 Beispiele

☐ Beispiel 5/2:
Es ist das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus zu lösen.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7$$

Rechenschema:

	t_1	t_2	t_3	t	Probe: 7
Schritt	Koeffizienten bei			Absolutglied	Zeilensummen
	x_1	x_2	x_3		
	1	-2	1	0	S_1 =0
0	2	-5	2	-2	S_2 = -3
	2	-2	3	7	S_3 =10
	1	-2	1	0	$s_1^{(1)}$ = 0
1	0	-0,5	0	-1	$s_2^{(1)}$ = -1,5 = $S_2^{(1)}$
	0	1	0,5	3,5	$s_3^{(1)}$ = 5 = $S_3^{(1)}$
	1	-2	1	0	$s_1^{(2)}$ = 0 = $S_1^{(2)}$
2	0	1	0	2	$s_2^{(2)}$ = 3 = $S_2^{(2)}$
	0	0	0,5	1,5	$s_3^{(2)}$ = 2 = $S_3^{(2)}$
	1	-2	1	0	0
3	0	1	0	2	3
	0	0	1	3	4

Man erhält aus dem letzten gestaffelten System $x_3 = 3$, $x_2 = 2$ und $x_1 = 1$. Die Endprobe lautet $t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = 5x_1 + (-9)x_2 + 6x_3 = 5 - 18 + 18 = 5 = t$.

☐ Beispiel 5/3:

$$2{,}75x_1 + 1{,}78x_2 + 1{,}11x_3 = 15{,}71$$
$$3{,}28x_1 + 0{,}71x_2 + 1{,}15x_3 = 43{,}78$$
$$1{,}15x_1 + 2{,}70x_2 + 3{,}58x_3 = 37{,}11$$

Rechenschema in Kurzfassung:

7,18	5,19	5,84	96,60	114,81
x_1	x_2	x_3		
2,75	1,78	1,11	15,71	21,35
3,28	0,71	1,15	43,78	48,92
1,15	2,70	3,58	37,11	44,54
1	0,647	0,404	5,713	7,764
0	-0,431	-0,053	7,635	7,151
0	1,701	2,709	26,557	30,967
1	0,647	0,404	5,713	7,764
0	1	0,123	-17,715	7,764
0	0	1,470	33,328	34,798

$x_3 = 33{,}328 : 1{,}470 = 22{,}672$
$x_2 = -17{,}715 - 0{,}123 \cdot 22{,}672 = -20{,}504$

$x_1 = 5{,}713 - 0{,}404 \cdot 22{,}672 - 0{,}647 \cdot (-20{,}504) = 9{,}820$
Die Endprobe lautet

$$7{,}18 \cdot 9{,}820 + 5{,}19 \cdot (-20{,}504) + 5{,}84 \cdot 22{,}672 = 96{,}596 \approx 96{,}60 = t$$

Die Rechnungen wurden! mit einer Tischrechenmaschine ausgeführt. Bei Verwendung des Rechenstabs wird man in der Rechnung entsprechend weniger Stellen berücksichtigen können.

5.6 Aufgaben

5. Bestimmen Sie von dem Gleichungssystem

$$5x + 3y = 19 \qquad , \qquad 6x - 2y = 6$$

a) die Zeilensummen und b) die Spaltensummen! (L)

6. a) Führen Sie bei dem Gleichungssystem

$$5x + 3y = 19 \qquad , \qquad 6x - 2y = 6$$

nach der Vorschrift des Gaussschen Algorithmus die Reduktion auf Dreiecksgestalt durch!
b) Lösen Sie das reduzierte System!
c) Führen Sie mit Hilfe der Spaltensummen die Endprobe durch! (L)

7. Lösen Sie folgende Systeme mit Hilfe des Gaussschen Algorithmus!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 1{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 &= -0{,}6 \\ -0{,}2x_1 + 1{,}6x_2 - 0{,}1x_3 &= 0{,}3 \\ 0{,}3x_1 - 0{,}1x_2 + 1{,}5x_3 &= 0{,}4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 10x_3 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2{,}1x_1 - 4{,}5x_2 - 2{,}0x_3 &= 19{,}07 \\ 3{,}0x_1 + 2{,}5x_2 + 4{,}3x_3 &= 3{,}21 \\ -6{,}0x_1 + 3{,}5x_2 + 2{,}5x_3 &= 18{,}25 \end{aligned}$$

Führen Sie die Reduktion auf Dreiecksgestalt durch!
Legen Sie sich ein Rechenschema an! Führen Sie mit Hilfe der Zeilensummen Zwischenkontrollen durch!
Führen Sie eine Endprobe mit Hilfe der Spaltensummen durch! (L)

8. Bei der im Bild 37 gezeigten Schaltung folgt aus den Kirchhoffschen Gesetzen für die Ströme I_1, I_2 und I_3 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

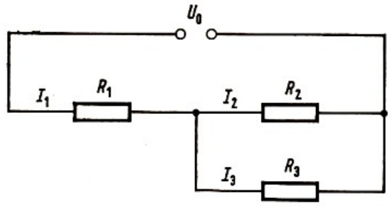


Bild 37

Berechnen Sie für $R_1 = 0{,}25\Omega$, $R_2 = 0{,}36\Omega$ und $R_3 = 0{,}45\Omega$ sowie $U_0 = 0{,}6$ V die Stromstärken I_1, I_2 und I_3! Wenden Sie zur Lösung des Gleichungssystems den Gaussschen Algorithmus an! (L)

6 Interpolation

6.1 Einführung

Im Mathematikunterricht wird eine Reihe von Zahlentafeln, so u.a. die Tafel der Quadratzahlen und -wurzeln, der Kubikzahlen und -wurzeln, der vierstelligen dekadischen Logarithmen und der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens) benötigt.
Neben dem Rechenstab und den Kurvenschablonen für die elementaren Funktionen sind diese Tafeln ein wichtiges Hilfsmittel für den Unterricht. Auch für alle diejenigen, die in ihrer beruflichen Tätigkeit mathematische Aufgaben lösen und Berechnungen durchführen, sind Tafeln neben dem Rechenstab und anderen Hilfsmitteln (z. B. Rechenmaschinen und -automaten) unentbehrlich.

Tabellen und Tafeln dienen der Vereinfachung und schnelleren Durchführung von Berechnungen. Sie erleichtern die Routinearbeit beim zahlenmäßigen Lösen eines mathematischen Problems, entlasten das Gedächtnis und schaffen Voraussetzungen dafür, dass man die ganze Aufmerksamkeit dem mathematischen Problem zuwenden kann.
Häufig reicht die Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Tafeln nicht aus. Die Ergebnisse, die man erhält, sind mit großen Fehlern behaftet.

☐ Beispiel 6/1: Es ist $x = 1{,}0434^{100}$ zu berechnen.
Wir wenden das Logarithmengesetz $\log_a b^r = r \log_a b$ an und erhalten

$$\lg x = 100 \cdot \lg 1{,}0434$$

Verwenden wir die im Schulbuch Tabellen und Formeln - Mathematik, Physik, Chemie enthaltene Tafel, so können wir zunächst nur den Logarithmus der Zahl 1,043 ablesen:

$$\lg 1{,}043 = 0{,}01828 \qquad \text{also} \qquad 100 \cdot \lg 1{,}043 = 1{,}828$$

Für 1,043410 erhalten wir mit Hilfe dieser Tafel $x \approx 67{,}3$.

Verwenden wir dagegen eine fünfstellige Logarithmentafel, so kommen wir dem exakten Wert bedeutend näher, weil eine solche Tafel im allgemeinen das Ablesen des Numerus auf vier geltende Ziffern ermöglicht.
Wir erhalten mit einer solchen Tafel, die für die Logarithmen der Zahlen 10000 bis 11000 häufig sogar siebenstellige Mantissen enthält, folgendes Ergebnis:

$$100 \cdot \lg 1{,}0434 = 100 \cdot 0{,}0184508 = 1{,}84508 \qquad , \qquad x \approx 70{,}00$$

Dieses Beispiel zeigt, dass der Wegfall einer geltenden Ziffer im Numerus gerade beim Potenzieren die Genauigkeit erheblich mindert.

Die Genauigkeit der Berechnung kann bei Benutzung einer weniger umfangreichen Tafel dadurch erhöht werden, dass man interpoliert. Beim Interpolieren in Tafeln werden dabei Funktionswerte für Argumente ermittelt, die zwischen den in der Tafel angeführten Argumenten liegen. Es werden also Funktionswerte "dazwischengeschaltet".
Man muss gewissermaßen "zwischen den Spalten der Tafel lesen".

☐ Beispiel 6/2:
Es soll $1{,}453^2$ aus der Tafel abgelesen werden. Die folgende Übersicht zeigt einen Ausschnitt aus der Quadrattafel auf den Seiten 10 und 11 des Buches Tabellen und Formeln - Mathematik, Physik, Chemie, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973.

n	...	4	5	6	7	...
⋮						
1,4	...	2,074	2,102	2,132	2,161	...
⋮						

Ohne Interpolation kann man $1{,}45^2$ und $1{,}46^2$ ablesen. Der gesuchte Wert liegt zwischen $1{,}45^2 \approx 2{,}102$ und $1{,}46^2 \approx 2{,}132$.

Der Unterschied $d = 0{,}030$ der beiden benachbarten Tafelwerte, die sogenannte Tafeldifferenz, wird gleichmäßig auf die zehn Zwischenräume der als vierte geltende Ziffer möglichen Zahlen $0{,}1, 2, ..., 9$ aufgeteilt.
Durch Lösen der Proportion

$$v : 0{,}030 = 3 : 10$$

erhält man die Verbesserung $v = 0{,}009$, die man zu $1{,}45^2 \approx 2{,}102$ addieren muss. Es ergibt sich somit:

$$1{,}453^2 \approx 2{,}102 + 0{,}009 = 2{,}111$$

Diese Art der Interpolation, bei der die Differenz der Funktionswerte zwischen zwei in der Tafel benachbarten Argumenten in der angegebenen Weise gleichmäßig (linear mit dem Argument) aufgeteilt wird, heißt lineare Interpolation.

Bei dem vorn betrachteten Beispiel der Berechnung von $x = 1{,}04341^{100}$ erhält man, falls man in der angegebenen Weise interpoliert, für x den Näherungswert 70,8.

Da bei der linearen Interpolation die Kurve der Funktion durch eine Gerade ersetzt wird, kann man diese nur anwenden, wenn sich die Funktionswerte im betrachteten Intervall fast gleichmäßig verändern.
Für die in der Schule verwendeten vierstelligen Sinustafeln z. B.,in denen die Funktionswerte für Zehntelgrade angegeben sind, kann linear interpoliert werden. Bei der Tangenstafel mit einem Argumentabstand von $0{,}1°$ ist die lineare Interpolation von Funktionswerten nur bis etwa $87°$ zulässig, da sich, wenn man sich dem Argument von $90°$ nähert, die Differenzen der Funktionswerte immer schneller ändern.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen über die Interpolation wollen wir die lineare Interpolation in Tafeln genauer untersuchen, eine verallgemeinerte Interpolationsaufgabe formulieren und einige Interpolationsmöglichkeiten kennenlernen.

6.2 Lineare Interpolation in Tafeln und lineares Interpolationspolynom

Zu gewissen Argumenten $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$, die über einen bestimmten Bereich gleichabständig[7] verteilt sind, seien in einer Tafel (Wertetafel) die zugehörigen Funktionswerte

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n), ...$$

gegeben:

k	0	1	2	...	k	...
x_k	x_0	x_1	x_2	...	x_k	...
y_k	y_0	y_1	y_2	...	y_k	...

[7] Man kann die Betrachtungen auch für solche Argumente durchführen, die nicht gleichabständig sind.

Es lassen sich also zu den in der Tafel enthaltenen x-Werten die zugehörigen y-Werte ablesen bzw. zu den y-Werten die x-Werte.

Wenn wir nun zu einem Argument x, das nicht in der Tafel enthalten ist, das aber zwischen zwei Argumenten x_i und x_{i+1} ($i \in \{0,1,2,...\}$), die in der Tafel enthalten sind, liegt, den zugehörigen Funktionswert ermitteln wollen, so kann das, wie bereits erwähnt, mit Hilfe der linearen Interpolation geschehen.
In der oben angegebenen Tafel ergibt sich als Differenz zwischen den Argumenten x_i und x_{i+1}:

$$x_{i+1} - x_i = h$$

und als Differenz zwischen den Funktionswerten

$$y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = d_i$$

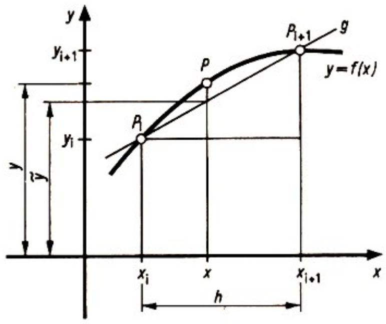


Bild 38

Bei der linearen Interpolation wird die Kurve der Funktion $y = f(x)$ im betrachteten Intervall $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ zwischen den Punkten P_i und P_{i+1} durch eine Gerade g ersetzt (Bild 38). Aus dem Bild können wir zur Bestimmung für den Näherungswert $\tilde{y} \approx f(x)$, falls x zwischen x_i und x_{i+1} liegt, die Proportion

$$\frac{x - x_i}{h} = \frac{\tilde{y} - y_i}{d_i}$$

ablesen. Aus dieser Beziehung ergibt sich

$$\tilde{y} = y_i + d_i \frac{x - x_i}{h}$$

Zusammenfassung:
Für die lineare Interpolation in Tafeln erhalten wir:
Gegeben: x mit $x_i < x < x_{i+1}$ (x_i und x_{i+1} sind als Argumente in der Tafel enthalten)
gesucht: $y = f(x)$
Näherungswert für y: $\tilde{y} = y_i + d_i \dfrac{x - x_i}{h}$

□ Beispiel 6/3:
Es soll $\lg 1233$ aus der vierstelligen Tafel auf den Seiten 20 und 21 von Tabellen und Formeln abgelesen werden.

Gegeben: $x = 1233$, gesucht: $y = f(x) = \lg x = \lg 1233$
Berechnung des Näherungswertes:

$$x_i = 1230; x_{i+1} = 1240; \qquad y_i = 3{,}0899; y_{i+1} = 3{,}0934; \quad h = 10; d_i = 0{,}0035$$

$$\tilde{y} = y_i + d_i \frac{x - x_i}{h} = 3{,}0899 + 0{,}0035 \frac{3}{10} \approx 3{,}0910; \qquad \lg 1233 \approx 3{,}0910$$

☐ Beispiel 6/4:
Es soll $\cos 48{,}37°$ aus der vierstelligen Tafel auf den Seiten 24 und 25 von Tabellen und Formeln abgelesen werden.

Gegeben: $x = 48{,}37°$; gesucht: $y = \cos x$
Berechnung des Näherungswertes:

$$x_i = 48{,}3°; x_{i+1} = 48{,}4°; \qquad y_i = 0{,}6652; y_{i+1} = 0{,}6639; \quad h = 0{,}1; d_i = -0{,}0013$$

$$\tilde{y} = y_i + d_i \frac{x - x_i}{h} = 0{,}6652 + (-0{,}0013)\frac{0{,}07}{0{,}1} \approx 0{,}6643; \qquad \cos 48{,}37° \approx 0{,}6643$$

Die geometrischen Überlegungen (Bild 38), die genutzt wurden, um eine Formel zur linearen Interpolation in Tafeln zu gewinnen, lassen sich auch noch in anderer Weise auswerten.
Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ wird im Intervall $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ durch eine Gerade g ersetzt. Die Gleichung der Geraden g kann man so als "Ersatzfunktion" für $y = f(x)$ im betrachteten Intervall auffassen.
Damit haben wir die Funktion $y = f(x)$ im Intervall $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ durch eine lineare Funktion $P_1(x)$ ersetzt. Für diese lineare Funktion $P_1(x)$ muss gelten:

$$P_1(x_1)f(x_1) \qquad \text{und} \qquad P_1(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

▷ Definition 6/1:
Man nennt die lineare "Ersatzfunktion" P_1, für die gilt

$$P_1(x_j) = f(x_j) \qquad (j = i, i+1)$$

lineares Interpolationspolynom von f zwischen x_i und x_{i+1}.

Die Werte x_i und x_{i+1} nennt man Stützstellen, die Werte y_i und y_{i+1} die zugehörigen Stützwerte und die Punkte $P_1(x_i; y_i)$ und $P_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$ Stützpunkte.

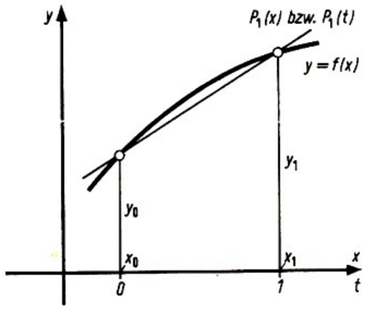


Bild 39

Mit Hilfe des Bildes 39 lässt sich die Gleichung der Geraden g als Zweipunktegleichung ermitteln:
$y = f(x)$ sei die gegebene Funktion, $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$ seien die bekannten Stützpunkte, und es soll für das lineare Interpolationspolynom $P_1(x)$ gelten:

$$P_1(x_0) = f(x_0) \qquad \text{und} \qquad P_1(x_1) = f(x_1)$$

Durch formale Umformung erhalten wir, wenn wir die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P_0 und P_1 hindurchgeht, aufstellen,

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

und daraus das lineare Interpolationspolynom

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Zusammenfassung:
Wenn von einer Funktion $y = f(x)$ die beiden Wertepaare (Stützpunkte)

$$(x_0; y_0 = f(x_0)) \qquad \text{und} \qquad (x_1; y_1 = f(x_1))$$

gegeben sind, so ermittelt man das lineare Interpolationspolynom $P_1(x)$ im Intervall $\langle x_0; y_1 \rangle$, so dass $P_1(x_0) = f(x_0)$ und $P_1(x_1) = f(x_1)$ gilt, nach folgender Vorschrift:

$$P_1(x) : y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \approx f(x)$$

☐ Beispiel 6/5:
Gegeben sind die Stützpunkte $P_0(2{,}03; y_0 = x_0^3 \approx 8{,}365)$ und $P_2(2{,}04; y_1 = x_1^3 \approx 8{,}490)$. Gesucht ist das lineare Interpolationspolynom $P_1(x)$.

Lösung:

$$P_1(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 8{,}365 + (x - 2{,}03)\frac{0{,}125}{0{,}01}$$

$$y = f(x) \approx P_1(x) = 12{,}5x - 17{,}01$$

Falls zu dem Argument $x = 2{,}037$ der zugehörige Funktionswert ermittelt werden soll, erhält man

$$y = x^3 \approx 12{,}5 \cdot 2{,}037 - 17{,}01 = 8{,}453$$

☐ Beispiel 6/6:
Gegeben sind die Stützpunkte $P_0(5{,}72; y_0 = \lg x_0 \approx 0{,}7574)$ und $P_1(5{,}73; y_1 = \lg x_1 \approx 0{,}7582)$.
Gesucht ist das lineare Interpolationspolynom $P_1(x)$.

Lösung:

$$P_1(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 0{,}7574 + (x - 5{,}72)\frac{0{,}0008}{0{,}01}$$

$$y = f(x) \approx P_1(x) = 0{,}08x + 0{,}2998$$

Der zum Argument $x = 5{,}728$ gehörige Funktionswert ist

$$y = \lg 5{,}728 \approx 0{,}08 \cdot 5{,}728 + 0{,}2998 = 0{,}7580$$

Nach dieser ausführlichen Darstellung der linearen Interpolation wollen wir im nächsten Abschnitt eine verallgemeinerte Interpolationsaufgabe formulieren.

6.3 Verallgemeinerte Interpolationsaufgabe

In der Praxis kommt es häufig vor, dass man mit Funktionen arbeiten muss, von denen man nicht den analytischen Ausdruck kennt, sondern nur eine grafische Darstellung oder eine Tabelle.
Bei praktischen Aufgaben ist es jedoch oft notwendig, Werte der Funktion für Zwischenwerte, die in der Tabelle nicht vorliegen, zu ermitteln. Im Falle der linearen Interpolation in Tabellen

hatten wir eine Möglichkeit kennengelernt, solche Zwischenwerte zu errechnen. Man konstruiert eine entsprechende Ersatzfunktion, ein lineares Interpolationspolynom.

Eine solche Ersatzfunktion in Form eines Interpolationspolynoms kommt gelegentlich auch dann zur Anwendung, wenn die betrachtete Funktionsgleichung sehr kompliziert ist.
In diesem Abschnitt wollen wir eine verallgemeinerte Aufgabenstellung für die Interpolation formulieren.

Von einer Funktion $y = f(x)$ sind im Intervall $\langle a, b\rangle$ zu $n+1$ voneinander verschiedenen Stützstellen (x-Werten) $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ die zugehörigen Funktionswerte (y-Werte oder Stützwerte)

$$y_0, y_1, y_2, ..., y_n$$

bekannt. Die betreffende Funktion ist also durch eine Gleichung oder durch eine Wertetafel in der Form

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n	...
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n	...

gegeben. Die Funktion $y = f(x)$ ist durch ein Polynom $P_n(x)$ von höchstens n-tem Grad so anzunähern, dass gilt:

$$y_0 = f(x_0) = P_n(x_0), \quad y_1 = f(x_1) = P_n(x_1), \quad ..., \quad y_n = f(x_n) = P_n(x_n)$$

also

$$y_i = f(x_i) = P_n(x_i), \quad \text{für} \quad i = 0,1,2,...,n$$

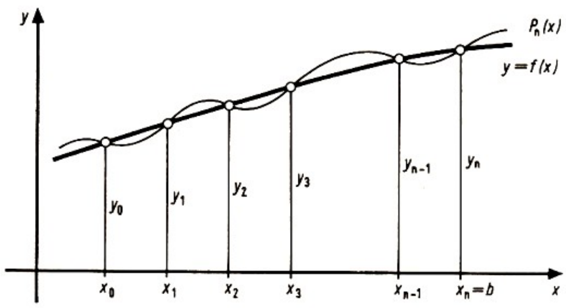


Bild 40

Das Polynom $P_n(x)$ heißt Interpolationspolynom.
Verfolgen wir die Aufgabenstellung mit Hilfe des Bildes 40 anschaulich, so stellen wir fest, dass das Interpolationspolynom $P_n(x)$ zur Funktion $y = f(x)$ so beschaffen sein muss, dass seine Kurve durch die Punkte $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(x_1; y_1)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$ der Kurve der Funktion $y = f(x)$ hindurchgehen muss.

In den folgenden Abschnitten werden wir Möglichkeiten für die Konstruktion derartiger Interpolationspolynome kennenlernen.

6.4 Unmittelbarer Polynomansatz

Soll zur Wertetafel

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n	...
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n	...

das Interpolationspolynom $P_n(x)$ konstruiert werden, so kann man den folgenden Polynomansatz, der noch $(n+1)$ unbekannte Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ enthält, machen:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Entsprechend der im Abschnitt 6.3. formulierten Aufgabenstellung erhält man durch Einsetzen der Wertepaare $(x_i; y_i)$ $(i = 0{,}1, ...,.n)$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n &= y_1 \\ &... \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

oder

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = y_i \quad \text{für} \quad i = 0{,}1{,}2{,}...{,}n$$

zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$.
Es lässt sich nachweisen, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Damit ist auch das Interpolationspolynom $P_n(x)$ eindeutig.

Bei unterschiedlichen Konstruktionsmöglichkeiten für unterschiedliche Anforderungen, die man an das Interpolationspolynom stellt, tritt es nur in verschiedenen Formen auf. Jede dieser Formen hat ihre rechnerischen Besonderheiten.

Der in der Formulierung der Aufgabenstellung angegebene Zusatz "von höchstens n-tem Grad" ist notwendig, da es beliebig viele Polynome vom Grad $> n$ gibt, die die sogenannten Stützstellenbedingungen erfüllen, und da auch Polynome vom Grad $< n$ existieren können, die die Bedingungen erfüllen.
So können z.B. alle Punkte $(x_0; y_0)$, ..., $(x_n; y_n)$ auf einer Geraden liegen. In diesem Falle haben wir bei n Stützpunkten ein lineares Interpolationspolynom. Es ist auch möglich, bei zwei Stützpunkten $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$, wo man mit einem linearen Interpolationspolynom auskommt, Parabeln zweiten oder dritten Grades zu konstruieren, deren Kurven durch P_0 und P_1 hindurchgehen.

☐ Beispiel 6/7:
Für die Funktion mit der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$$

soll eine Wertetafel mit den Abszissen $-1; 0; 1$ und 2 aufgestellt werden. Danach soll auf der Grundlage dieser Wertetafel mit Hilfe des unmittelbaren Polynomansatzes das Interpolationspolynom dritten Grades $P_3(x)$ aufgestellt werden.

Lösung:
Wir berechnen die Ordinaten und vervollständigen die Wertetafel:

x	-1	0	1	2
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

Der Ansatz $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= \frac{2}{3} \\ a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{3} \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

und die Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2}; \quad a_1 = -\frac{31}{180}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{1}{180}$$

Damit ist

$$f(x) \approx P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{31}{80}x + \frac{1}{180}x^3$$

Der hier beschriebene Weg, das Interpolationspolynom mit Hilfe des unmittelbaren Polynomansatzes zu finden, ist zwar theoretisch gut zu überblicken, praktisch aber umständlich.
Man kann auf einfachere Weise Interpolationspolynome gewinnen. So haben Lagrange[8], Newton und weitere Mathematiker Verfahren entwickelt, die bei einer großen Anzahl von Stützstellen effektiver und praktischer sind.

Im nächsten Abschnitt wird eine Möglichkeit für die Konstruktion des Interpolationspolynoms angegeben.

6.5 Das Interpolationspolynom von Lagrange

Zur Konstruktion des Interpolationspolynoms n-ten Grades zur Wertetafel

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n	...
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n	...

kann man nach Lagrange in der nachfolgenden Weise vorgehen.
Für das Interpolationspolynom $P_n(x)$ wird der Ansatz

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + ... + y_nL_n(x)$$

gemacht. Dabei sollen die Ausdrücke $L_0(x), L_1(x), ..., L_n(x)$ Polynome n-ten Grades mit der Eigenschaft

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \qquad (1) \\ 1 & \text{für } i = k \qquad (2) \end{cases}$$

sein.
Die Polynome n-ten Grades mit der Eigenschaft (1), (2) nennt man Lagrangesche Polynome.
Mit der Eigenschaft, die diese Polynome haben sollen, wird die Forderung der Aufgabenstellung, nämlich

$$P_n(x_i) = y_i \quad \text{für} \quad i = 0,1,...,n$$

[8] Lagrange, Joseph Louis (1736-1813), lehrte in seiner Heimatstadt Turin sowie später in Berlin und Paris. Er lieferte hervorragende wissenschaftliche Beiträge u. a. zur Analysis, zur Himmelsmechanik und zur Hydromechanik.

gerade verwirklicht. Dazu braucht man nur die Wertepaare in den Ansatz einzusetzen.
Es müssen nun die Lagrangeschen Polynome bestimmt werden. Aus der Eigenschaft (1) ergibt sich, dass die Werte

$$x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$$

Nullstellen des Polynoms $L_k(x)$ sind. Da $L_k(x)$ von n-tem Grad sein soll, sind das auch alle Nullstellen. Damit kann man das Polynom in Linearfaktoren aufspalten und erhält

$$L_k(x) = C(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)$$

wobei C eine noch zu bestimmende Konstante ist.
Die Konstante C kann man ermitteln, wenn man die Eigenschaft (2), die an die Lagrangeschen Polynome gestellt wird, auswertet. Es ergibt sich

$$1 = L_k(x_k) = C(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)$$

und damit

$$C = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

Wir haben so die Lagrangeschen Polynome in der Gestalt

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

oder ausführlich in der Gestalt

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x - x_1)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} \\
L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} \\
L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)...(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)...(x_2 - x_n)} \\
&... \\
L_k(x) &= \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} \\
&... \\
L_n(x) &= \frac{(x - x_0)...(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

gewonnen. Es ist zu erkennen, dass im Polynom $L_k(x)$ im Zähler der Faktor $(x - x_k)$ nicht auftritt und dass im Nenner der Faktor $(x_k - x_k)$ nicht auftreten kann.
Der Zähler von $L_k(x)$ ist ein Polynom, gebildet aus den Linearfaktoren $(x - x_i)$ aller zu x_k fremden x_i. Der Nenner ist ein Zahlwert, den dieses Polynom für $x = x_k$ annimmt.
Das Interpolationspolynom $P_n(x)$, das mit Hilfe der Lagrangeschen Polynome konstruiert wurde, lautet

$$\begin{aligned}
P_n(x) = y_0 &\cdot \frac{(x - x_1)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} + ... \\
+ y_k &\cdot \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} + ... \\
+ y_n &\cdot \frac{(x - x_0)...(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

Man nennt dieses Polynom Lagrangesches Interpolationspolynom.

Zusammenfassung:
Wenn die Stützpunkte $P_0(x_0; y_0)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$ (- eventuell in Form einer Wertetafel -) gegeben sind, so kann das Lagrangesche Interpolationspolynom folgendermaßen gefunden werden:

(1) Aufstellen der Lagrangeschen Polynome $L_i(x)$ $(i = 0,1,2,...,n)$
(2) Multiplikation dieser Polynome mit den jeweiligen Funktionswerten y_i;
(3) Ordnen nach Potenzen von x.

Nach der Herleitung des Lagrangeschen Interpolationspolynoms wollen wir nun zwei Spezialfälle betrachten.

1) Lineare Interpolation: Es sind zwei Stützpunkte $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$ gegeben, und es soll das Lagrangesche Interpolationspolynom für diesen speziellen Fall aufgeschrieben werden. Man erhält

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad , \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

und

$$P_1(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$$

bzw.

$$P_1(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

Das lineare Interpolationspolynom stimmt mit dem Polynom, das wir im Abschnitt 6.2. gewonnen hatten, überein.

Falls man $h = x_1 - x_0$ einführt, nimmt das Polynom folgende Form an

$$P_1(x) = \frac{y_1 - y_0}{h}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{h}$$

Wenn man die Transformation $x = x_0 + th$ vornimmt, also auf die Variable t transformiert, so dass x_0 der Wert $t = 0$ und x_1 der Wert $t = 1$ entspricht, vereinfacht sich das Interpolationspolynom (Bild 41). Man erhält $L_0(t) = 1 - t$ und $L_1(t) = t$.

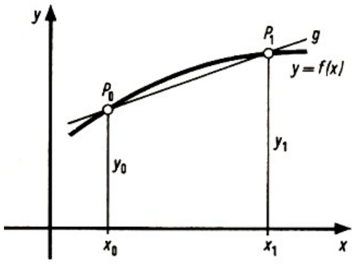


Bild 41

$$P_1(x) = (1 - t)y_0 + ty_1 = (y_1 - y_0)t + y_0$$

Eine solche Transformation ist durch passende Maßstabswahl auf der x-Achse stets möglich.

2) Kubische Interpolation: Es sind vier Stützpunkte $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(x_1; y_1)$; $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$ gegeben. Die vier Stützstellen sollen gleichen Abstand haben, es gilt also

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$$

Man spricht dann von gleichabständigen oder äquidistanten Stützstellen. Außerdem wollen wir wieder mit Hilfe von $x = x_0 + th$ so auf eine Variable t transformieren, dass gilt

x	x_0	x_1	x_2	x_3
t	0	1	2	3

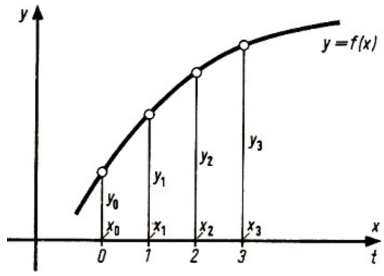


Bild 42

Das ist bei äquidistanten Stützstellen durch geeignete Maßstabsänderung auf der x-Achse stets möglich (vgl. Bild 42). Zur Aufstellung des Interpolationspolynoms erhält man

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = -\frac{1}{6}(t-1)\cdot(t-2)\cdot(t-3)$$
$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{t(t-2)(t-3)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}t\cdot(t-2)\cdot(t-3)$$
$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{t(t-1)(t-3)}{2\cdot 1\cdot(-1)} = \frac{1}{6}t\cdot(t-1)\cdot(t-2)$$
$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{6}t\cdot(t-1)\cdot(t-2)$$

Als Interpolationspolynom ergibt sich somit

$$P_3(t) = L_0(t)y_0 + L_1(t)y_1 + L_2(t)y_2 + L_3(t)y_3 = -\frac{y_0}{6}(t^3-6t^2+11t-6) + \frac{y_1}{2}(t^3-5t^2+6t) - \frac{y_2}{2}(t^3-4t^2+3t) + \frac{y_3}{6}(t^3-3t^2+2t)$$

bzw.

$$P_3(t) = \frac{1}{6}[(y_3+3y_1-3y_2-y_0)t^3 + (6y_0-15y_1+12y_2-3y_3)t^2 + (18y_1+2y_3-11y_0-9y_2)t + 6y_0]$$

Die Lagrangesche Interpolationsformel ist vor allem wichtig für die Untertafelung, d. h., wenn eine Tabelle mit äquidistanten Stützstellen (Argumenten x) durch Einschalten neuer äquidistanter Zwischenwerte unterteilt (verfeinert) werden soll und die dazugehörigen Stützwerte (Funktionswerte y) ermittelt werden sollen. Dabei ist für immer wiederkehrende x-Werte zu interpolieren.

Die Lagrangeschen Polynome können dann wiederholt verwendet werden. Für einen bestimmten x-Wert können die L_i-Werte, mit denen die y_i zu multiplizieren sind, zahlenmäßig angegeben werden.
Der Nachteil der Lagrangeschen Interpolationsformel besteht darin, dass man den Grad des Polynoms durch die Anzahl der Stützpunkte vorher festlegen muss. Wenn der Genauigkeitsgrad der Interpolation nicht ausreicht, muss man die Anzahl der Stützpunkte vergrößern.
Man erhöht damit natürlich im allgemeinen auch den Grad des Polynoms. Allerdings muss dann die gesamte Rechnung (Aufstellen der Lagrangeschen Polynome, Ermitteln der Zahlwerte) wiederholt werden.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, Interpolationspolynome zu konstruieren.

Newton hat ein Interpolationspolynom angegeben, das die hier angegebenen Nachteile des Lagrangeschen Interpolationspolynoms nicht aufweist. Für spezielle Interpolationsaufgaben gibt es außerdem spezielle Interpolationspolynome.
Zum Lagrangeschen Interpolationspolynom sollen nun noch zwei Beispiele betrachtet werden.

□ Beispiel 6/8:
Es ist das Interpolationspolynom von Lagrange für die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{1+2^x}$$

unter Verwendung der Wertetafel

x	-1	0	1	2
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

aufzustellen.

Lösung:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)\\
L_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2)\\
L_2(x) &= \frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}(x^3-x^2-2x)\\
L_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{6}(x^3-x)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$P_3(x) = -\frac{1}{9}(x^3-3x^2+2x) + \frac{1}{4}(x^3-2x^2-x+2) - \frac{1}{6}(x^3-x^2-2x) + \frac{1}{30}(x^3-x)$$

oder zusammengefasst

$$P_3(x) = \frac{1}{180}x^3 - \frac{31}{180}x + \frac{1}{2}$$

Das Beispiel zeigt, dass die Bildung des Lagrangeschen Interpolationspolynoms mit einem großen Rechenaufwand verbunden ist. Es ist zweckmäßig, den Algorithmus zur Bestimmung des Interpolationspolynoms so aufzubereiten, dass man Formeln zur Berechnung der Koeffizienten des Polynoms gewinnt.
Dann hat man die Möglichkeit, den Algorithmus in Form eines Flussbildes darzustellen, den Rechenablauf zu programmieren und Hilfsmittel (z. B. Automaten) zur Berechnung einzusetzen.

Für den Fall $n = 3$ soll das im nachfolgenden Beispiel untersucht werden.

□ Beispiel 6/9:
Es ist das Lagrangesche Interpolationspolynom für die Funktion $y = f(x)$ mit den Stützstellen x_0, x_1, x_2, x_3 ($n = 3$) aufzustellen. Der Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten ist in Form eines Flussbildes darzustellen.

Lösung:

$$\begin{aligned}
P_3(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1\\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3
\end{aligned}$$

Man erhält $P_3(x)$ als Polynom dritten Grades in der Form

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Die Koeffizienten des Polynoms lassen sich z.B. nach den folgenden Formeln berechnen:

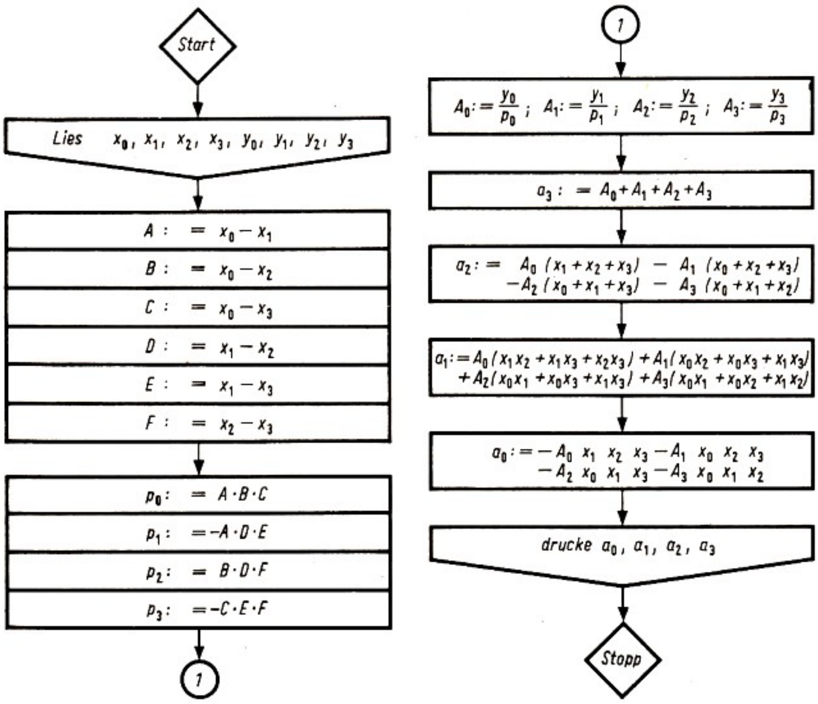


Bild 43

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{y_0}{p_0}x_1x_2x_3 - \frac{y_1}{p_1}x_0x_2x_3 - \frac{y_2}{p_2}x_0x_1x_3 - \frac{y_3}{p_3}x_0x_1x_2 \\
a_1 &= \frac{y_0}{p_0}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + \frac{y_1}{p_1}(x_0x_2 + x_0x_3 + x_2x_3) \\
&\quad + \frac{y_2}{p_2}(x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_3) + \frac{y_3}{p_3}(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) \\
a_2 &= \frac{y_0}{p_0}(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{y_1}{p_1}(x_0 + x_2 + x_3) - \frac{y_2}{p_2}(x_0 + x_1 + x_3) - \frac{y_3}{p_3}(x_0 + x_1 + x_2) \\
a_3 &= \frac{y_0}{p_0} + \frac{y_1}{p_1} + \frac{y_2}{p_2} + \frac{y_3}{p_3}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
p_0 &= (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \\
p_1 &= (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\
p_2 &= (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \\
p_3 &= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)
\end{aligned}$$

Für das geforderte Flussbild wurde im Bild 43 ein Vorschlag unterbreitet.

Aufgaben
1. Wie lautet die Formel für die lineare Interpolation?

2. Ermitteln Sie das lineare Interpolationspolynom für den Fall $P_0(6{,}38; \lg 6{,}38)$ und $P_1(6{,}39; \lg 6{,}39)$! Berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\lg 6{,}386$! (L)

3. Zur Wertetafel

x	0,1	0,2	0,4
y	1,1052	1,2214	1,4918

ist das Interpolationspolynom zweiten Grades $P_2(x)$ mit Hilfe des unmittelbaren Polynomansatzes aufzustellen. (L)

4. Wie lautet das Lagrangesche Interpolationspolynom für den Fall $n = 2$? (L)

5. Es ist die Näherungsfunktion für $y = \sqrt{x}$ mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange zu ermitteln, deren Bild durch die Punkte $P_0(1; 1)$; $P_1(1{,}21; 1{,}1)$ und $P_2(1{,}44; 1{,}2)$ geht. (L)

7 Numerische Integration

7.1 Einführung

Bei der Lösung praktischer Aufgaben stößt man vielfach auf bestimmte Integrale, also auf Integrale der Form $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Wie aus dem Unterricht in der Abiturstufe bekannt ist, entspricht der Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_a^b f(x)dx$, wobei $f(x)$ in $\langle a,b\rangle$ stetig ist und $f(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$ gilt, dem Zahlenwert des Flächeninhalts der Fläche A, die begrenzt wird, von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, von der x-Achse und von den Geraden $x = a$ und $x = b$ (Bild 44).

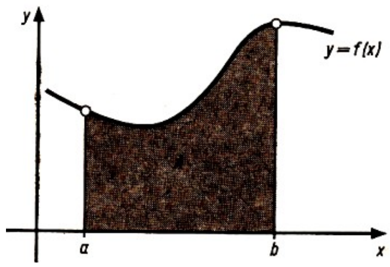


Bild 44

Bestimmte Integrale kann man in vielen Fällen formelmäßig lösen. Hierbei nutzt man die bekannten Grundintegrale, wie z. B.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad , \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad \text{u.a}$$

und wendet dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an:

Ist f eine im Intervall $\langle a,b\rangle$ stetige Funktion und F irgendeine Stammfunktion von f, so ist

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. Berechnen Sie!

a) $\int\limits_{-2}^{-1} (2x+5)dx$; b) $\int\limits_{-3}^{1} \left(\frac{x}{2} - 1{,}5\right) dx$; c) $\int\limits_{-2}^{3} (2x-4)dx$; d) $\int\limits_{-2}^{3} \left(\frac{x^3}{4} + 4\right) dx$

Interpretieren Sie die errechneten Werte geometrisch!

Mitunter muss zur Lösung eines Integrals auf eine passende Substitution zurückgegriffen werden. Darüber hinaus sind noch weitere Möglichkeiten zur formelmäßigen Lösung von Integralen gefunden worden, die jedoch nicht im obligatorischen Unterricht bis zur Klasse 12 behandelt werden.

Alle diese Verfahren führen jedoch nicht immer zum Ziel, d.h., es ist nicht in jedem Fall möglich, das Integral exakt formelmäßig zu lösen. In solchen Fällen kann man sich mit Näherungsmethoden behelfen, zu denen die Verfahren der numerischen Integration gehören.

Wenden wir uns beispielsweise der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse zu, einer Problematik, die u. a. in der Astronomie und der Astronautik von Bedeutung ist, so stoßen wir auf ein sogenanntes elliptisches Integral, das man nicht formelmäßig löst, sondern mit Hilfe eines Näherungsverfahrens.

Numerische Berechnungen von Integralen sind aber auch dann zweckmäßig, wenn der bei der exakten Lösung entstehende Ausdruck oder der Integrand sehr kompliziert ist, wenn der Integrand nur als Tabelle (Wertetafel) vorliegt und wenn man zur Auswertung von Integralen Hilfsmittel in Form von Rechenautomaten einsetzen will.

Die numerische Integration besteht darin, dass man das bestimmte Integral eben als Zahlenwert der Fläche eines "krummlinig" begrenzten Trapezes (begrenzt durch die Kurven $x = a$, $x = b$, $y = 0$ und $y = f(x)$) auffasst und, anstatt die Fläche des gegebenen Trapezes zu berechnen, ein anderes Trapez (begrenzt durch $x = a$, $x = b$, $y = 0$ und $y = g(x)$) sucht, dessen Fläche sich leichter berechnen lässt, wobei sich allerdings die Kurve $y = g(x)$ möglichst wenig von der Kurve $y = f(x)$ unterscheiden soll.
Bei der numerischen Integration wird also der Wert eines bestimmten Integrals angenähert zahlenmäßig mit Hilfe eines numerischen Verfahrens berechnet.

Es werden im folgenden 1. die Rechteckmethode, 2. die Trapezregel und 3. die Simsonsche Regel betrachtet.

Bei allen drei Methoden wird zur näherungsweisen Berechnung des bestimmten Integrals $\int\limits_a^b f(x)dx$ das Integrationsintervall $\langle a,b\rangle$ in n gleiche Teile der Länge (Schrittweite) $h = \frac{b-a}{n}$ zerlegt.
Die Teilungspunkte, die wie bei der Interpolation Stützstellen heißen, werden mit $a = x_0, x_1, x_2$, ..., $x_n = b$ bezeichnet, die zugehörigen Funktionswerte des Integranden $f(x)$ mit $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$. Nach dieser Unterteilung wird eine der angegebenen Methoden angewandt.

7.2 Die Rechteckmethode

Bei der Rechteckmethode wird die Kurve der gegebenen Funktion $y = f(x)$ in den Teilintervallen von x_0 bis x_1, x_1 bis x_2, ... und von x_{n-1} bis x_n durch Geradenabschnitte ersetzt, die parallel zur x-Achse verlaufen. Als Näherung für die Fläche wird die Summe von n Rechteckflächen genommen. Die Breite dieser Rechtecke ist gleich h, die Höhe ist gleich der rechten oder linken Ordinate in jedem der Teilintervalle (Bild 45).

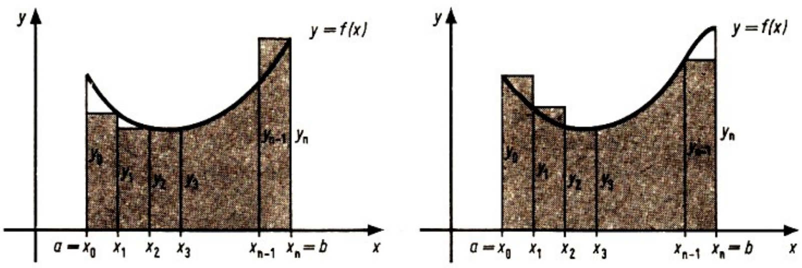


Bild 45

Als Näherungsformeln erhält man

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n) \qquad \text{bzw.}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$$

Man nennt diese Formeln auch Rechteckregeln oder Rechteckformeln. Der Fehler $d = \left|\int\limits_a^b f(x)dx - I\right|$ (wobei I der errechnete Näherungswert für das bestimmte Integral ist), der auftritt, lässt sich mit Hilfe der Ungleichung

$$d \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$$

abschätzen, wobei M_1 der größte Wert des Betrages der ersten Ableitung $f'(x)$ im Intervall $\langle a,b\rangle$ ist. $f(x)$ muss einmal stetig differenzierbar sein. Aus der Formel ist zu erkennen, dass mit der Vergrößerung der Anzahl der Teilpunkte, d.h. mit der Vergrößerung der Anzahl der Stützstellen, die

Genauigkeit wächst.

Zusammenfassung:
Gegeben: $\int\limits_a^b f(x)dx$
Gesucht: Näherungswert für das bestimmte Integral

Lösung: Unterteilung des Intervalls $\langle a,b\rangle$ in n Abschnitte von der Länge $h = \frac{b-a}{n}$
Berechnung eines Näherungswertes mit Hilfe einer Rechteckformel

☐ Beispiel 7/1:
Es ist $\int\limits_1^3 \frac{dx}{3x+7}$ für $n = 4$ mit Hilfe der Rechteckmethode näherungsweise zu berechnen.

Lösung:

$$h = \frac{b-a}{h} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

x	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0,100	0,087	0,077	0,069	0,063

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{3x+7} \approx 0{,}5 \cdot (0{,}1 + 0{,}087 + 0{,}077 + 0{,}069) = 0{,}167 \qquad \text{oder}$$

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{3x+7} \approx 0{,}5 \cdot (0{,}087 + 0{,}077 + 0{,}069 + 0{,}063) = 0{,}148$$

Man kann, da das Integral geschlossen auswertbar ist, einen Vergleich mit der exakten Lösung angeben. Man erhält

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{3x+7} = \left[\frac{1}{3}\ln|3x+7|\right]_1^3 = \frac{1}{3}(\ln|16| - \ln|10|) = \frac{1}{3}(2{,}773 - 2{,}303) \approx 0{,}157$$

☐ Beispiel 7/2:
Es ist der Fehler abzuschätzen, der bei Anwendung der Rechteckmethode im Beispiel 7/1 auftritt.

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{3x+7}, \qquad f'(x) = -\frac{3}{(3x+7)^2}, \qquad \max_{1\leq x\leq 3}|f'(x)| = \frac{3}{10^2} = 0{,}03$$

$$d \leq \frac{0{,}03\cdot 4}{8} = 0{,}015$$

7.3 Die Trapezregel

Ein weiteres Verfahren zur numerischen Integration ist die Trapezregel. Das Prinzip, das diesem Verfahren zugrunde liegt, besteht darin, dass man die Kurve der gegebenen Funktion durch einen Polygonzug ersetzt. Das hat zur Folge, dass in den Intervallen $\langle x_0,x_1\rangle$, $\langle x_1,x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1},x_n\rangle$, die durch die Abszissen der Polygonecken gebildet werden, statt der Kurven Sehnen zu betrachten sind.

Dabei entstehen Trapezflächen. Die Trapezfläche des i-ten Teilintervalls wird begrenzt durch die Kurven $y = 0$, $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, und durch die jeweilige Sehne. Als Näherung für die gesuchte Fläche wird die Summe der Trapezflächen angesehen (Bild 46).

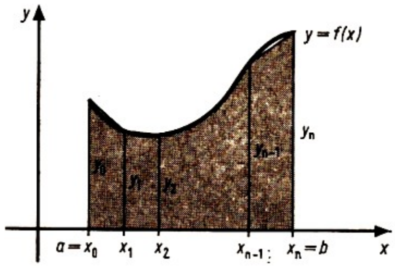


Bild 46

Die Formel für die Trapezregel hat, wenn man die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Trapezes zugrundelegt, die Gestalt

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+...+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)$$

oder

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+...+2y_{n-1}+y_n)$$

Der Fehler d, der auftritt, also der Betrag der Differenz zwischen exakter Lösung und Näherungslösung, lässt sich mit Hilfe der Ungleichung

$$d \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

abschätzen, wobei M_2 der größte Wert des Betrages der zweiten Ableitung $f''(x)$ im Intervall $\langle a,b\rangle$ ist, also $M_2 = \max\limits_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$. Die Funktion muss zweimal stetig differenzierbar sein.

Soll das Integral nach einer vorgegebenen Genauigkeit e berechnet werden, d.h., es soll gelten $d \geq e$, so kann die Zahl n der Unterteilung aus der Ungleichung

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \leq e$$

(n ist die Anzahl der Teilintervalle) ermittelt werden.
Man kann bei der Herleitung der Trapezregel auch so vorgehen, dass man in jedem der Teilintervalle $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ zwischen den beiden Stützpunkten die Kurve $y = f(x)$ durch das lineare Interpolationspolynom $P_1(x)$ ersetzt und dann im jeweiligen Intervall nicht

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \qquad (i = 0,1,...,n)$$

ausrechnet, sondern

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx$$

berechnet und den Wert dieses Integrals als Näherungswert für das bestimmte Integral verwendet. Es wird also $f(x)$ durch ein Interpolationspolynom ersetzt.

□ Beispiel 7/3:

a) Es ist $\int_1^3 \frac{dx}{3x+7}$ mit Hilfe der Trapezregel für $n = 4$ zu berechnen, und es ist der Fehler abzuschätzen.

b) Es ist die Zahl n der Unterteilung zu ermitteln, damit das Integral mit Hilfe der Trapezregel mit einer Genauigkeit von $e = 0{,}0001$ berechnet werden kann.

Lösung:

a) $\int_1^3 \frac{dx}{3x+7} \approx \frac{3-1}{2\cdot 4}(0{,}100 + 2\cdot 0{,}087 + 2\cdot 0{,}077 + 2\cdot 0{,}069 + 0{,}063) \approx 0{,}157$

Da $f''(x) = \frac{18}{(3x+7)^3}$ und $\max\limits_{1\leq x\leq 3} |f''(x)| = 0{,}018$, erhält man

$$d \leq \frac{0{,}018 \cdot 2^3}{12 \cdot 16} = 0{,}0007$$

b) $\frac{18 \cdot 2^3}{10^3 \cdot 12n^2} \leq 0{,}0001$ soll gelten. Daraus folgt $n^2 > 120$ und damit $n > 11$.

7.4 Die Simpsonsche Regel

Bei der Herleitung der Simpsonschen Regel unterteilt man das Intervall $\langle a, b\rangle$ in eine gerade Zahl $n = 2k$ von Teilintervallen

$$\langle x_0,x_1\rangle, \langle x_1,x_2\rangle, ..., \langle x_{n-1},x_n\rangle$$

Die Kurve wird durch Parabelbögen ersetzt, die jeweils durch drei aufeinanderfolgende Stützpunkte (x_0, y_0), (x_1,y_1) und (x_2, y_2); (x_2,y_2), (x_3, y_3) und (x_4,y_4) usw. hindurchgehen. In jedem der Intervalle $\langle x_0,x_2\rangle$, $\langle x_2,x_4\rangle$, ..., $\langle x_{n-2},x_n\rangle$ wird also die Funktion $y = f(x)$ durch ein Interpolationspolynom zweiten Grades (quadratische Interpolationsparabel) ersetzt. Als Näherung für das bestimmte Integral berechnet man die Summe der Flächen unter den 5 Parabelbögen (Bild 47).

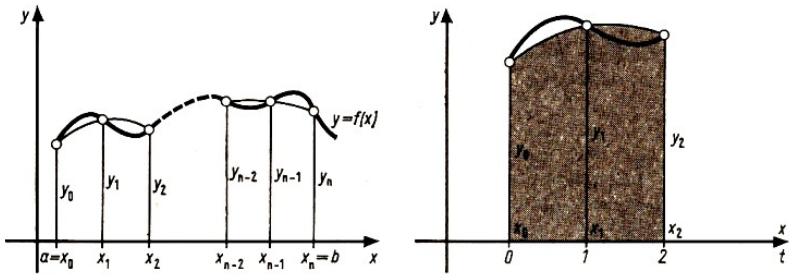


Bild 47,48

Zur Herleitung der Simpsonschen Regel wird das erste Intervall betrachtet (Bild 48).
Die Funktion $y = f(x)$ wird ersetzt durch das Lagrangesche Interpolationspolynom

$$P_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

Die Lagrangeschen Polynome lassen sich bei der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$, also bei gleichabständigen Stützstellen, mit Hilfe der Formel

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

so auf eine Variable t transformieren, dass folgende Wertetafel gilt:

x	x_0	x_1	x_2
t	0	1	2

Die Lagrangeschen Polynome mit der auf die Schrittweite 1 transformierten Variablen t lauten dann

$$L_0(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2) = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)$$

$$L_1(t) = -t(t-2) = -t^2 + 2t \qquad \text{und} \qquad L_2(t) = \frac{1}{2}t(t-1) = \frac{1}{2}(t^2 - t)$$

Integration von 0 bis 2 liefert

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \int_0^2 P_2(x)dx = \int_0^2 [L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2]\frac{dx}{dt}dt = \left(\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right) \cdot h$$

Damit erhält man für dieses Intervall als Näherungsformel für das bestimmte Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \text{mit} \qquad h = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

Diese Überlegungen lassen sich für alle Intervalle durchführen. Als Ergebnis erhält man dann zur näherungsweisen Berechnung des bestimmten Integrals die Simpsonsche Regel[9]

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + ... + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

mit $h = \frac{b-a}{n}$, also

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Die Genauigkeit, mit der das Integral nach der Simpsonschen Regel berechnet werden kann, lässt sich nach der Ungleichung

$$d \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$$

abschätzen, wobei M_4 der größte Wert des Betrages der vierten Ableitung $f(x)$ im Intervall $\langle a, b\rangle$ ist. Die Funktion f muss die entsprechenden Voraussetzungen erfüllen.
Soll das Integral mit einer vorgegebenen Genauigkeit e berechnet werden, so kann die Zahl n der Unterteilung aus der Ungleichung

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4} \leq e$$

bestimmt werden. Die Zahl n muss dabei eine gerade Zahl sein, da man bei der Anwendung der Simpsonschen Regel eine gerade Anzahl von Intervallen benötigt.

7.5 Hinweise zur praktischen Rechnung

Die Durchführung der praktischen Rechnung bei der numerischen Integration soll am Beispiel der Simpsonschen Regel erläutert werden. Falls das Integral $\int_a^b f(x)dx$ mit Hilfe der Simpsonschen Regel mit einer Genauigkeit von e berechnet werden soll, geht man am besten nach den nachfolgenden Arbeitsschritten vor. Die Ergebnisse trägt man in eine Tabelle (Rechenschema) ein.

Arbeitsschritte:

[9]Simpson, Thomas, (1710-1761) verfasste zahlreiche Lehrbücher. Die nach ihm benannte Simpsonsche Formel wurde bereits vor ihm von Torricelli, Gregory (1668) und Newton (1676) benutzt. Ein Spezialfall der Simpsonschen Formel ist die Keplersche Fassregel, die von dem deutschen Mathematiker und Astronom Johannes Kepler (1571-1630) in seinem Werk "Nova stereometria doliorum vinariorum" (Linz 1615) angegeben wurde.

1. Ermitteln der vierten Ableitung des Integranden $f^{(4)}(x)$ und des größten Wertes von $|f^{(4)}(x)|$ im Intervall $\langle a, b\rangle$, also

$$M_4 = \max_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$$

2. Ermitteln der Zahl n der Unterteilung aus der Ungleichung

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4} \leq e$$

(Wenn die erhaltene Zahl n ungeeignet ist, also ungerade ist, so kann sie vergrößert werden.)

3. Berechnen von $h = \frac{b-a}{n}$ und der Koordinatenstützstellen $x_k = a + kh$ $(k = 0,1,...,n)$.

4. Berechnen der Funktionswerte $y_k = f(x_k)$ $(k = 0,1,....,n)$. (Bei der Berechnung der Funktionswerte y_k muss man mit einer größeren Genauigkeit arbeiten, als dies die Genauigkeit, mit der das Integral berechnet werden soll, erfordert.
Die Zwischenergebnisse bei der Berechnung der y_k werden zweckmäßigerweise in Hilfsspalten in der Tabelle mitgeführt. Die Zahl der Hilfsspalten hängt von der Art des Integranden ab.)

5. Eintragen der Faktoren, mit denen die y_k-Werte bei der Simpsonschen Regel multipliziert werden müssen, in eine gesonderte Spalte der Tabelle:

$$m_0 = m_1 = 1, m_1 = m_3 = ... = m_{n-1} = 4 \text{ und } m_2 = m_4 = ... = m_{n-2} = 2$$

6. Berechnen der Produkte $m_k \cdot y_k$.

7. Aufsummieren der Produkte $m_k y_k$:

$$s = \sum_{k=0}^{n} m_k y_k$$

8. Multiplizieren der Summe s mit $\frac{h}{3}$. Man erhält so den Näherungswert für das Integral:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot s$$

Rechenschema:

k	x_k	y_k	m_k	$y_k m_k$
0	x_0	y_0	m_0	$y_0 m_0$
1	x_1	y_1	m_1	$y_1 m_1$
2	x_2	y_2	m_2	$y_2 m_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	m_{n-1}	$y_{n-1} m_{n-1}$
n	x_n	y_n	m_n	$y_n m_n$

Bei der Trapezregel kann man die Arbeitsschritte und das Rechenschema analog aufbauen.

7.6 Einige Beispiele

☐ Beispiel 7/4:
Es ist $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ nach der Simpsonschen Regel für $n = 4$ zu berechnen.

Lösung:
Man legt die Wertetabelle

k	0	1	2	3	4
x_k	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y_k	1,000	0,941	0,800	0,640	0,500

zugrunde und erhält

$$I \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{1}{12}(1{,}000 + 3{,}764 + 1{,}600 + 2{,}560 + 0{,}500) \approx 0{,}785$$

Man kann den Wert des Integrals auch exakt berechnen und erhält

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 \approx 0{,}785$$

☐ Beispiel 7/5:

Das Integral $I = \int\limits_0^5 xe^{-x}dx$ ist mit Hilfe der drei Regeln näherungsweise zu berechnen ($n = 10$).

Lösung:
Bei der Lösung dieser Aufgabe legt man sich zweckmäßigerweise ein geeignetes Rechenschema in folgender Form an:

k	x_k	y_k	$m_k y_k$ Trapezregel	$y_k m_k$ Simpsonsche Regel
0	0,0	0,000	0,000	0,000
1	0,5	0,303	0,606	1,212
2	1,0	0,368	0,736	0,736
3	1,5	0,335	0,670	1,340
4	2,0	0,271	0,542	0,542
5	2,5	0,205	0,410	0,820
6	3,0	0,149	0,298	0,298
7	3,5	0,106	0,212	0,424
8	4,0	0,073	0,146	0,146
9	4,5	0,050	0,100	0,200
10	5,0	0,034	0,034	0,034
		1,860 bzw. 1,896	3,754	5,752

a) Nach der Rechteckregel erhält man

$$I \approx \frac{5}{10} \cdot 1{,}860 = 0{,}930 \qquad \text{bzw.} \qquad I \approx \frac{5}{10} \cdot 1{,}896 = 0{,}948$$

b) Nach der Trapezregel erhält man

$$I \approx \frac{5}{20} \cdot 3{,}754 = 0{,}938$$

c) Nach der Simpsonschen Regel erhält man

$$I \approx \frac{0{,}5}{3} \cdot 5{,}752 = 0{,}958$$

Der exakte Wert beträgt 0,9596. Man kann das Integral mit Hilfe der partiellen Integration geschlossen auswerten.

☐ Beispiel 7/6:

Es ist $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}dx$ nach der Trapezregel mit einer Genauigkeit von $e = 0{,}01$ zu berechnen.

Lösung:

Wenn man nach den Hinweisen des Abschnittes 7.5. vorgeht, ergibt sich der folgende Lösungsweg.

Arbeitsschritte:
1. Bestimmen der zweiten Ableitung des Integranden $f(x) = \sqrt{1+x^3}$:

$$f''(x) = \frac{3(4x + x^4)}{4(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}$$

Da das Maximum von $|f''(x)|$ im Intervall $\langle 0,1 \rangle$ schwer zu bestimmen ist, schätzt man $|f''(x)|$ ab, d. h., es wird eine Zahl M (Schranke) mit $|f''(x)| \leq M$ im gegebenen Intervall gesucht:

$$|f''(x)| = \left| \frac{3(4x + x^4)}{4(1+x^3)^{\frac{3}{2}}} \right| < \frac{3}{4} \left| \frac{4x + x^4}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} \right| < \frac{3}{4}(4 \cdot 1 + 1) = \frac{15}{4}$$

Somit kann $M = \frac{15}{4}$ gesetzt werden.

2. Mit $M = \frac{15}{4}$, $b - a = 1$ und $e = 0{,}01$ lautet die Ungleichung zur Bestimmung von n:

$$\frac{15 \cdot 1}{4 \cdot 12 n^2} \leq 0{,}01$$

Aus dieser Beziehung erhält man $n^2 \geq 31{,}25$, d.h, $n \geq 6$. Für die Rechnung wird man $n = 8$ nehmen.

3. Für h erhält man $\frac{b-a}{n} = 0{,}125$. Die Koordinatenstützstellen x_k $(k = 0{,}1, ...,8)$ werden in die Tabelle (Spalte 2) eingetragen.

4. Die Berechnung der y_k $(k = 0{,}1, ..., 8)$ erfolgt unter Benutzung einer Hilfsspalte (Spalte 3), in die die x_k^3 eingetragen werden. Die Funktionswerte $y = \sqrt{1 + x_k^3}$ werden in die Tabelle (Spalte 4) eingetragen.

5. Die Faktoren, mit denen die Funktionswerte y_k zu multiplizieren sind, nämlich $m_0 = m_8 = 1$ und $m_1 = m_2 = ... = m_7 = 2$, werden in die Tabelle (Spalte 5) eingetragen.

6. Die Produkte $m_k \cdot y_k$ $(k = 0{,}1, ...,8)$ werden berechnet und in die Tabelle (Spalte 6) eingetragen.

7. Das Aufsummieren der Produkte liefert s und

8. Multiplikation mit $\frac{b-a}{2n}$ liefert den Näherungswert (siehe Tabelle).

Tabelle:

k	x_k	x_k^3	$y_k = \sqrt{1 + x_k^3}$	m_k	$y_k \cdot m_k$
1	2	3	4	5	6
0	0,000	0,000	1,000	1	1,000
1	0,125	0,002	1,001	2	2,002
2	0,250	0,016	1,008	2	2,016
3	0,375	0,053	1,026	2	2,052
4	0,500	0,125	1,060	2	2,120
5	0,625	0,244	1,116	2	2,232
6	0,750	0,422	1,193	2	2,386
7	0,875	0,670	1,292	2	2,584
8	1,000	1,000	1,414	1	1,414
					$s =$ 17,806

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \approx \frac{1}{16} \cdot 17{,}806 = 0{,}0625 \cdot 17{,}806 = 1{,}11$$

7.7 Aufgaben

2. Erläutern Sie die Aufgabenstellung der numerischen Integration! Wodurch unterscheiden sich Rechteck-, Trapez- und Simpsonsche Regel ?

3. Für welche Klasse von Funktionen liefert die Simpsonsche Regel die exakte Lösung ?

4. Berechnen Sie näherungsweise $\int\limits_1^3 \frac{dx}{3x+7}$ für $n = 10$ mit Hilfe der Rechteckregel! Schätzen Sie den Fehler ab! Vergleichen Sie mit Beispiel 7.2.! (L)

5. Berechnen Sie näherungsweise $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x}$ für $k = 4$ und $k = 10$ mit Hilfe der Trapezregel! Vergleichen Sie mit dem exakten Wert! (L)
Ermitteln Sie dann die Zahl n der Unterteilung, damit das Integral mit Hilfe der Trapezregel mit einer Genauigkeit von $e = 0{,}01$ berechnet werden kann! (L)

6. Berechnen Sie näherungsweise $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ mit Hilfe der drei Regeln! Vergleichen Sie die Resultate! (L)

7. Berechnen Sie $\int\limits_1^2 \frac{\lg x}{x}dx$ nach der Trapezregel mit einer Genauigkeit von $e = 0{,}001$! (L)

8. Berechnen Sie näherungsweise $\int\limits_{10}^{20} \frac{dx}{\ln x}$ mit $h = 1$! (L)

8 Einfache Probleme der Linearoptimierung

8.1 Einführung

Mathematische Aufgabenstellungen, die sich aus der weiteren Entwicklung der Naturwissenschaften, der Technik, der Volkswirtschaft und der Planung und Leitung ergeben, werden immer umfangreicher und komplizierter. Vielfach handelt es sich um Aufgaben, bei denen optimale Werte zu ermitteln sind.
Aus dem Schulunterricht ist bekannt, dass man gewisse Optimierungsaufgaben mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung lösen kann, nämlich sogenannte Extremwertaufgaben.

1. Was versteht man unter einem relativen Extremwert der Funktion $y = f(x)$!

2. Wie kann man relative Extremwerte einer Funktion $y = f(x)$ bestimmen ?

3. Was ist eine ganze rationale Funktion ? Was ist eine lineare Funktion? Was ist eine nichtlineare Funktion?

Diese Extremwertaufgaben, die mit Mitteln der Differentialrechnung unter gewissen Bedingungen gelöst werden können, beziehen sich jedoch stets auf Sachverhalte, denen nichtlineare algebraische Funktionen oder transzendente Funktionen zugrunde liegen. Bei linearen algebraischen Funktionen versagen diese Methoden, und man muss andere Verfahren heranziehen, um optimale Lösungen ermitteln zu können.

Die Optimierung, eine selbständige mathematische Disziplin, hält u. a. Verfahren für diese Aufgabentypen bereit. Handelt es sich speziell um Aufgaben, denen lineare Funktionen zugrunde liegen, so wird eine Linearoptimierung erforderlich, für die es rechnerische und gegebenenfalls auch graphische Lösungsverfahren gibt.
Wir betrachten im folgenden nur einfache Probleme der Linearoptimierung, die grafisch gelöst werden können. Voraussetzung dafür sind Kenntnisse über lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme, über deren grafische Darstellung und Lösung. In den Abschnitten 8.2. und 8.3. wird das Notwendigste zusammengestellt.

Ehe die Aufgabenstellung der Linearoptimierung exakt formuliert wird, sollen einige Beispiele betrachtet werden, die der Erläuterung dienen und an denen die praktische Bedeutung veranschaulicht werden soll. Ausgehend von einem stark vereinfachten praktischen Sachverhalt wird dabei für das jeweilige Problem die mathematische Formulierung in Form einer Linearoptimierungsaufgabe vorgenommen.
Diese Linearoptimierungsaufgabe ist also das sogenannte mathematische Modell für die jeweils vorliegende Aufgabe.

□ Beispiel 8/1:
Optimierung des Produktionsumfangs - Gewinnoptimierung

Ein Industriebetrieb erzeugt zwei Produkte A und B. Zu ihrer Produktion ist die Arbeit von drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 notwendig. Die Maschinen können zur Produktion dieser zwei Erzeugnisse nur eine bestimmte Zeit genutzt werden: M_1 24000 s, M_2 40000 s und M_3 27000 s.
Die Zeiten, die die einzelnen Maschinen zur Erzeugung einer Einheit der Produkte A und B benötigen, und die Gewinne pro Einheit sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Erzeugnis A	Erzeugnis B
M_1	$3\ \frac{\text{s}}{\text{Einheit}}$	$6\ \frac{\text{s}}{\text{Einheit}}$
M_2	$8\ \frac{\text{s}}{\text{Einheit}}$	$4\ \frac{\text{s}}{\text{Einheit}}$
M_3	$9\ \frac{\text{s}}{\text{Einheit}}$	$3\ \frac{\text{s}}{\text{Einheit}}$
Gewinn	$9\ \frac{\text{Mark}}{\text{Einheit}}$	$6\ \frac{\text{Mark}}{\text{Einheit}}$

In welcher Menge sind die Produkte A und B zu erzeugen, damit der Gewinn für den Betrieb maximal wird?

Zuerst soll die mathematische Formulierung der Aufgabe vorgenommen werden.
Wenn z der Gewinn ist, x die zu produzierende Stückzahl des Produktes A (Anzahl der Einheiten) und y die Stückzahl des Produktes B, so ergibt sich als Gewinn

$$z = 9x + 6y$$

Die so ermittelte Funktion z, die sogenannte Zielfunktion, ist zu optimieren. Es ist deren Maximum zu bestimmen.
Man schreibt dafür

$$z = 9x + 6y \Rightarrow \max$$

Allerdings ist das Maximum unter gewissen einschränkenden Bedingungen, die sich aus der Aufgabenstellung, hier aus den Produktionsbedingungen, ergeben, zu bestimmen. Aus der Tabelle und den Zeiten, die den einzelnen Maschinen zur Produktion von A und B zur Verfügung stehen, erhält man

$$\begin{aligned} 3x + 6y &\leq 24000 \\ 8x + 4y &\leq 40000 \\ 9x + 3y &\leq 27000 \end{aligned}$$

und natürlich $x,y \geq 20$. Diese Bedingungen heißen Nebenbedingungen.

Fasst man die mathematische Formulierung der Aufgabenstellung zusammen, so erhält man eben eine sogenannte Linearoptimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} z = 9x + 6y &\Rightarrow \max \\ 3x + 6y &\leq 24000 \\ 8x + 4y &\leq 40000 \\ 9x + 3y &\leq 27000 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

Bei einer solchen Aufgabe ist also eine Funktion (Zielfunktion) unter gewissen Nebenbedingungen zu optimieren (Maximum bestimmen - maximieren oder Minimum bestimmen - minimieren). Zielfunktion und Nebenbedingungen sind linear.

Die hier angegebene stark vereinfachte Aufgabe einer Gewinnoptimierung kann wie folgt interpretiert werden: Es wird nicht die Gesamtproduktion des Betriebes betrachtet, sondern nur die Erzeugung zweier Produkte A und B. Außerdem betrachtet man nur die Produktion in einem bestimmten Abschnitt, nämlich im Bereich der Maschinen M_1, M_2 und M_3.

Wenn man sich bei der vorliegenden Aufgabe (Gewinnoptimierung) von der starken Vereinfachung löst, bedeutet das bei der mathematischen Formulierung eine Erhöhung der Zahl der

Variablen und der Ungleichungen. An der mathematischen Problemstellung selbst ändert sich grundsätzlich nichts. Diese Aufgabe mit zwei Variablen kann man grafisch lösen.

□ Beispiel 8/2:
Fütterungsproblem

Schweine sollen mit Kartoffeln und Rüben gemästet werden: Dabei kommt es auf den Gehalt des Futters an Kohlehydraten, Eiweiß und Mineralstoffen an. Die Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt (ohne Einheiten):

	Kartoffeln	Rüben	Bedarf der Schweine
Kohlehydrate	140	40	560
Eiweiß	10	8	80
Mineralstoffe	4	8	48
Preis	10	4	

Wie muss die Futterzusammenstellung (Kartoffeln/Rüben) gewählt werden, damit die Kosten am geringsten sind?
Mit ähnlichen Überlegungen wie im Beispiel 8/1 erhält man als Linearoptimierungsaufgabe:

$$z = 10x + 4y \Rightarrow \min$$
$$\begin{aligned} 140x + 40y &\geq 560 \\ 10x + 8y &\geq 80 \\ 4x + 8y &\geq 48 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

Auch diese Aufgabe, die nur zwei Variable enthält, ist grafisch zu lösen.

□ Beispiel 8/3:
Optimaler Schichtplan

Auf einem Bahnhof besteht durchschnittlich folgender Personalbedarf:

zwischen 0 und 4 Uhr 3 Personen	zwischen 4 und 8 Uhr 8 Personen
zwischen 8 und 12 Uhr 10 Personen	zwischen 12 und 16 Uhr 8 Personen
zwischen 16 und 20 Uhr 14 Personen	zwischen 20 und 24 Uhr 5 Personen

Die Eisenbahner beginnen ihre Arbeit um 0, 4, 8, 12, 16 bzw. 20 Uhr. Jeder arbeitet 8 Stunden. Welcher Schichtplan erfordert einen minimalen Einsatz an Arbeitskräften?

x_1 Eisenbahner beginnen die Arbeit um 0 Uhr, x_2 um 4 Uhr, ..., x_6 um 20 Uhr. Man erhält als Linearoptimierungsaufgabe eine Aufgabe mit 6 Variablen:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \Rightarrow \min$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_3 + x_4 &\geq 8 \\ x_4 + x_5 &\geq 14 \\ x_5 + x_6 &\geq 5 \\ x_1 + x_6 &\geq 3 \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1,...,6) \end{aligned}$$

Diese Aufgabe kann nicht grafisch gelöst werden.

Nach der Betrachtung dieser vereinfachten Beispiele wollen wir die Aufgabenstellung der Linearoptimierung exakt formulieren.

4. Was ist bei allen drei Aufgabenstellungen gleich?

5. Formulieren Sie eine Linearoptimierungsaufgabe, die nur zwei Variable x_1 und x_2 enthält!

▷ Definition 8/1:
Wenn bei einer praktischen Aufgabenstellung die Werte eines Systems von n Variablen x_1, x_2, ..., x_n zu finden sind, für die eine gegebene lineare Funktion, die sogenannte Zielfunktion,

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

($c_1, c_2, ...$ sind Konstanten) einen optimalen Wert (Maximum oder Minimum) hat und für die zugleich die als Gleichungen bzw. Ungleichungen gegebenen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= a_1 \\ &... \\ a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n &= a_k \\ a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{(k+1)1}x_1 + ... + a_{(k+1)n}x_n &\geq a_{k+1} \\ &... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &\geq a_m \\ x_1, ..., x_m &\geq 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, so spricht man von einer Linearoptimierungsaufgabe. Man schreibt dafür kurz

$$\begin{aligned} z = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i &\Rightarrow \text{opt} \quad (\max \text{ oder } \min) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \geq a_j & \quad (j = 1,...,m) \\ x_i \geq 0 & \quad (i = 1,...,n) \end{aligned}$$

Entsprechend betrachtet man Linearoptimierungsaufgaben der Form:

$$\begin{aligned} z = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i &\Rightarrow \text{opt} \quad (\max \text{ oder } \min) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leq a_j & \quad (j = 1,...,m) \\ x_i \geq 0 & \quad (i = 1,...,n) \end{aligned}$$

Linearoptimierungsaufgaben dieser Art kann man für $n = 2$ auch grafisch lösen.
Für $n > 2$ wurden eine Reihe von Verfahren zur Lösung entwickelt, z.B. das Simplexverfahren. Solche Verfahren werden hier jedoch nicht behandelt.

Zu den ersten Arbeiten, die auf dem Gebiet der Linearoptimierung veröffentlicht wurden, gehört eine Untersuchung des sowjetischen Mathematikers L. W. Kantorowitsch, die im Jahre 1939 erschien. Darin werden Lösungsmethoden für solche Aufgaben angegeben, die die Planung von Transportarbeiten und von Produktionsabläufen betreffen. Die bereits erwähnte Simplexmethode wurde im Jahre 1947 von dem amerikanischen Mathematiker G. B. Dantzig erarbeitet.

8.2 Ungleichungen

6. Wiederholen Sie die Begriffe "Gleichung", "Ungleichung", "Lösung einer Gleichung (Ungleichung)", "Lineare Gleichung", "Äquivalente Gleichungen (Ungleichungen)"!

7. Lösen Sie die folgenden linearen Ungleichungen!
a) $5x - 3 < 4x$; b) $6x - 5 \leq 13$; c) $1 - \frac{x}{5} > \frac{x-1}{3}$; d) $2 - \frac{x}{10} \geq 2(7 - x)$; e) $ax + b > cx + d$ (L)

8. Was versteht man unter einer Menge? Was versteht man unter Vereinigung, Durchschnitt und Differenz zweier Mengen ?

Die beiden Ungleichungen $a < b$ und $b > a$ stellen dieselbe Beziehung zwischen den zwei verschiedenen reellen Zahlen a und b dar. Man kann die Eigenschaften von Ungleichungen mit denen von Gleichungen vergleichen.
Bei Gleichungen kann man die linke und die rechte Seite vertauschen, d. h., wenn $a = b$ ist, so ist auch $b = a$. Wenn man bei Ungleichungen die rechte und linke Seite vertauscht, so ist das Relations- oder Ungleichheitszeichen durch das entgegengesetzte Zeichen zu ersetzen. Dabei ist das zum Zeichen $<$ entgegengesetzte Zeichen das Zeichen $>$ und umgekehrt. Es gilt also

$$a < b \text{ definitionsgemäß genau dann, wenn } b > a \qquad (3 > 2 \text{ und } 2 < 3)$$

Wenn man zwei verschiedene reelle Zahlen a und b miteinander vergleicht, so ist

$a > b$ genau dann, wenn $a - b > 0$ gilt, und
$a < b$ genau dann, wenn $b - a > 0$ gilt.

Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man entscheiden, welche von zwei verschiedenen reellen Zahlen a und b größer ist. Lässt man die Gleichheit mit zu, so gilt

$a \geq b$ genau dann, wenn $a - b \geq 0$ und
$a \leq b$ genau dann, wenn $b - a \geq 0$

Natürlich kann man dieses Kriterium auch in folgender Weise formulieren:
Die Differenz $b - a$ ist positiv genau dann, wenn $b > a$, und die Differenz $b - a$ ist negativ genau dann, wenn $a > b$.
Die Grundeigenschaften von Ungleichungen gehen aus folgenden Sätzen hervor:

▷ Satz 8/1:
Wenn $a > b$ und $b > c$, so gilt $a > c$ (Transitivität).

▷ Satz 8/2:
Wenn $a > b$, dann ist $a + c > b + c$ für jede reelle Zahl c.

▷ Satz 8/3:
Wenn $a > b$ und $c > 0$ gilt, so gilt $ac > bc$ und $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
(Bei Multiplikation einer Ungleichung mit einer positiven Zahl und bei Division durch eine positive Zahl bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten.)

▷ Satz 8/4:
Wenn $a > b$ und $c < 0$ gilt, so gilt $ac < bc$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
(Bei Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl und bei Division durch eine negative Zahl muss das Ungleichheitszeichen durch das entgegengesetzte ersetzt werden.)

▷ Satz 8/5:
Falls $a > b$ und $c > d$ gilt, gilt auch $a + c > b + d$.

▷ Satz 8/6:
Falls $a > b$ und $c > d$ gilt und a, b, c und d positive Zahlen sind, so gilt auch $ac > bd$.

▷ Satz 8/7:
Wenn $a > b$ ist und a sowie b positive Zahlen sind, so gilt $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Die hier angegebenen Sätze lassen sich leicht bei Benutzung des oben angegebenen Kriteriums beweisen.
Diese Sätze sind eine wichtige Voraussetzung für das Umformen von Ungleichungen und das Rechnen mit Ungleichungen. Sie gelten auch, wenn man anstelle des Relationszeichens $>$ das Relationszeichen $>$ verwendet, wobei an einigen Stellen $c = 0$ auszuschließen ist. Die einzelnen Sätze sollen noch an einigen Beispielen erläutert werden.

□ Beispiel 8/4:
Aus $6 > 4$ und $4 > 2$ folgt $6 > 2$.
Aus $6 > 4$ folgt $6 + 5 > 4 + 5$, d.h, $11 > 9$.
Aus $6 > 4$ folgt $6 - 7 > 4 - 7$, d.h, $-1 > -3$.

□ Beispiel 8/5:
Aus $12 > 9$ folgt $12 \cdot 3 > 9 \cdot 3$ und $\frac{12}{3} > \frac{9}{3}$,
aber auch $12 \cdot (-3) < 9 \cdot (-3)$, d.h, $-36 < -27$, und
$\frac{12}{-3} < \frac{-9}{3}$, d.h., $-4 < -3$.

□ Beispiel 8/6:
Aus $4 > 3$ und $3 > 2$ ergibt sich $4 + 3 > 3 + 2$, d. h. $7 > 5$.

□ Beispiel 8/7:
Der Satz 8/6 gilt allgemein für eine beliebige Anzahl von Ungleichungen. Falls $a > b$ ist, a und b positiv sind, so ist für eine beliebige natürliche Zahl n die Ungleichung $a^n > b^n$ erfüllt ($3 > 2$, dann $3^2 > 2^2$, $3^3 > 2^3$ und $3^n > 2^n$).

Falls negative Zahlen in der Ungleichung auftreten, kann sich das Ungleichheitszeichen ändern. So gilt zum Beispiel $-4 < -2$, $(-4)^2 > (-2)^2$ und $(-4)^3 < (-2)^3$.

Mit Hilfe der bisherigen Kenntnisse kann man auch die Allgemeingültigkeit einiger Ungleichungen beweisen.

□ Beispiel 8/8:
Es ist zu beweisen, dass $a^2 + b^2 > 2ab$ für beliebige reelle Zahlen a, b gilt.

Beweis:
Es gilt $(a - b)^2 \geq 0$ für alle reellen Zahlen a, b und damit $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.
Addition von $2ab$ auf beiden Seiten (Satz 8/2) liefert $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

8.3 Ungleichungen mit einer Variablen

▷ Definition 8/2:
Eine Ungleichung mit einer Variablen ist eine Ungleichung der Form

$$f_1(x) > f_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f_1(x) \geq f_2(x)$$

wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Funktionen mit einer unabhängigen Variablen sind.

▷ Definition 8/3:
Die Lösungsmenge der Ungleichung

$$f_1(x) > f_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f_1(x) \geq f_2(x)$$

ist die Menge aller Werte x, für die die Ungleichung erfüllt ist.
Falls also $f_1(a) > f_2(a)$ gilt, so gehört $x = a$ zur Lösungsmenge der Ungleichung.

▷ Definition 8/4:
Die beiden Ungleichungen

$$f_1(x) > f_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad g_1(x) > g_2(x)$$

heißen äquivalent, wenn sie beide dieselbe Lösungsmenge haben.
Falls $x = a$ Lösung von $f_1(x) > f_2(x)$ ist, also $f_1(a) > f_2(a)$ gilt, so muss auch $g_1(a) > g_2(a)$ gelten und umgekehrt.

Die Definitionen sollen an einigen Beispielen erläutert werden.

□ Beispiel 8/9:

$$3z + 5 > x^2, \quad 4x - 3 \leq 3x + 5, \quad \sin x > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \tan x < x$$

sind Ungleichungen mit einer Variablen.

□ Beispiel 8/10:
Zur Lösungsmenge der Ungleichung $5 - 2x > 3$ gehört $x = 0{,}5$. Die Lösungsmenge ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt $x < 1$, also z.B. $x = 0{,}5; 0; -1; -2$.

□ Beispiel 8/11:
Die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{5-2x}{2+x} < x + 8 \qquad \text{ist} \qquad L = \{x \mid -11 < x < -2\} \cup \{x \mid x > -1\}$$

Man kann die Lösungsmenge einer Ungleichung geometrisch mit Hilfe der Zahlengeraden anschaulich darstellen. Im Bild 49 sind die Lösungsmengen der Beispiele 8/10 und 8/11 dargestellt.

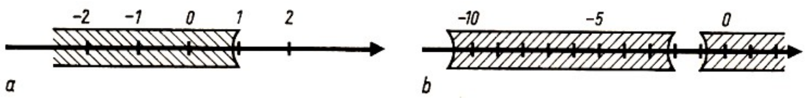


Bild 49

Über die Äquivalenz von Ungleichungen gibt es u. a. zwei wichtige Sätze, die im folgenden angegeben werden.

▷ Satz 8/8:
Wird auf beiden Seiten der Ungleichung

$$f_1(x) > f_2(x)$$

die Funktion $g(x)$, die denselben Definitionsbereich wie die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ hat, addiert, dann erhält man eine der gegebenen Ungleichung äquivalente Ungleichung

$$f_1(x) + g(x) > f_2(x) + g(x)$$

▷ Satz 8/9:
Die Funktion $h(x)$ habe denselben Definitionsbereich wie die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$. Für diese x-Werte sei $h(x)$ stets größer Null. Die Ungleichung

$$f_1(x) \cdot h(x) > f_2(x) \cdot h(x)$$

ist dann der Ungleichung $f_1(x) > f_2(x)$ äquivalent.
Wenn $h(x)$ denselben Definitionsbereich wie $f_1(x)$ und $f_2(x)$ hat, und $h(x)$ nur negative Werte annimmt, so ist die Ungleichung

$$f_1(x) \cdot h(x) < f_2(x) \cdot h(x)$$

der Ungleichung $f_1(x) > f_2(x)$ äquivalent.

Die Sätze ergeben sich aus den entsprechenden Sätzen des Abschnittes 8.2. Es ist nur zu zeigen:
Wenn $x = a$ Lösung der einen Ungleichung ist, so ist $x = a$ auch Lösung der anderen Ungleichung und umgekehrt.

Die Sätze 8/8 und 8/9 sind wichtig für die äquivalente Umformung von Ungleichungen und für das Lösen von Ungleichungen mit einer Variablen.
Die Sätze gelten analog, wenn man anstelle des Relationszeichens $>$ das Relationszeichen $>$ verwendet.

8.4 Lineare Ungleichungen mit einer Variablen

Nach den in den vorangegangenen Abschnitten durchgeführten allgemeinen Betrachtungen über Eigenschaften von Ungleichungen und über die Äquivalenz von Ungleichungen mit einer Variablen sollen nun speziell lineare Ungleichungen mit einer Variablen diskutiert werden.

▷ Definition 8/5:
Eine Ungleichung der Form

$$ax + b > 0 \text{ oder } ax + b < 0 \qquad , \qquad (ax + b \leq 0 \text{ oder } ax + b \leq 0$$

mit $a \neq 0$ heißt lineare Ungleichung mit einer Variablen.

Im Folgenden sprechen wir kurz von linearen Ungleichungen.
Wenn man bei der Ungleichung $ax + b < 0$ beide Seiten mit -1 multipliziert, erhält man eine Ungleichung der Gestalt $ax+b > 0$. Man braucht also nur Ungleichungen der Form $ax+b > 0$ zu betrachten.

Soll die Ungleichung gelöst werden, so heißt das, dass man die Menge aller x bestimmen soll, die die Ungleichung erfüllen. Diese Menge heißt, wie bereits vorn angegeben wurde, Lösungsmenge der Ungleichung.
Nach den Sätzen über die Äquivalenz von Ungleichungen erhält man aus $ax + b > 0$ nach Subtraktion von b und Division durch a auf beiden Seiten

$$x > -\frac{b}{a} \quad \text{für } a > 0 \qquad \text{oder} \qquad x < -\frac{b}{a} \quad \text{für } a < 0$$

Man kann die Lösung der linearen Ungleichung gut geometrisch veranschaulichen. Das Bild der Funktion $y = ax + b$ ist eine Gerade. Die Nullstelle dieser Funktion ist, falls $a \neq 0$ ist, $x = -\frac{b}{a}$.

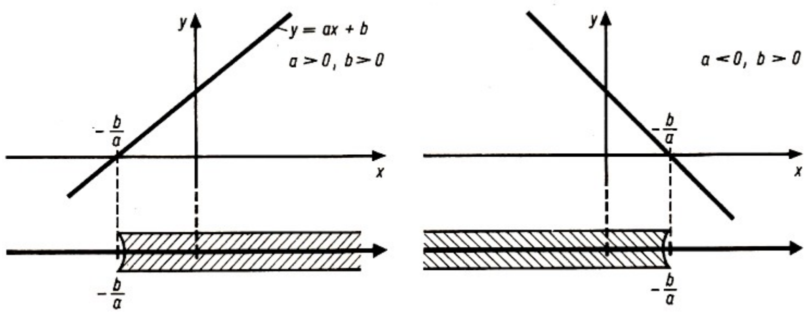


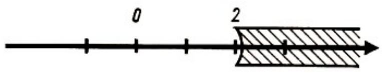
Bild 50

Im Bild 50 sind die Graphen der Funktionen $y = ax+b$ für $a > 0, b > 0$ und $a < 0, b > 0$ in der xy-Ebene sowie die Lösungen der Ungleichung $ax + b > 0$ auf der Zahlengeraden dargestellt. Es sollen nun zur Lösung linearer Ungleichungen Beispiele betrachtet werden.

☐ Beispiel 8/12:
Es ist die Ungleichung $3x - 6 > 0$ zu lösen.

Lösungsmenge: $\{x \mid x > 2\}$ (Bild 51).

Bild 51



☐ Beispiel 8/13:

$$3x - 6 > 2x + 5$$

Man erhält nach äquivalenter Umformung $x > 11$ und damit als Lösungsmenge $\{x \mid x > 11\}$.

☐ Beispiel 8/14:

$$\frac{3x+7}{2} + 3 < \frac{4x-8}{3} + 4$$

Man erhält

$$9x + 21 + 18 < 8x - 16 + 24 \qquad , \qquad x < -31$$

Lösungsmenge: $\{x \mid x < -31\}$.

Man kann auch Systeme linearer Ungleichungen mit einer Variablen betrachten.

☐ Definition 8/6:
Ein System von linearen Ungleichungen mit einer Variablen ist ein Ungleichungssystem folgender Form

$$\begin{gathered} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 > 0 \\ ... \\ a_nx + b_n > 0 \end{gathered}$$

Anstelle von $>$ kann auch stehen $>$. Das System kann auch Gleichungen mit enthalten.
Für $n = 2$ erhält man also ein System von zwei linearen Ungleichungen mit einer Variablen:

$$\begin{gathered} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 > 0 \end{gathered}$$

Man kann auch die Lösung solcher Systeme betrachten.

▷ Definition 8/7:
Die Lösungsmenge des Systems ist die Menge aller der x, die alle Ungleichungen des Systems erfüllen.

Die Lösung eines solchen Systems soll an zwei Beispielen erläutert werden.

□ Beispiel 8/15:
Es ist das System

$$3x + 4 > 0 \quad , \quad 4x - 2 < 0$$

zu lösen. Die Lösungsmenge der ersten Ungleichung ist die Menge $\left\{x \mid x > -\frac{4}{3}\right\}$, die der zweiten Ungleichung $\left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$. Die Lösungsmenge des Systems ist der Durchschnitt der beiden Lösungsmengen (Bild 52):

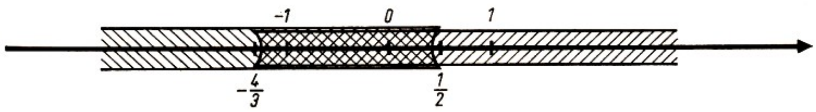


Bild 52

□ Beispiel 8/16:

$$3x - 2 < 2x + 6 \quad , \quad \frac{5x-2}{4} < 1 - x \quad , \quad 4x < \frac{5+9x}{2}$$

Man erhält die Lösungsmenge: $\{x \mid x < 8\} \cap \{x \mid x < 7\} \cap \{x \mid x > -5\}$, also die Menge $\{x \mid -5 < x < 6\}$.
Natürlich kann die Lösungsmenge auch die leere Menge sein.

8.5 Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

Bei Linearoptimierungsaufgaben treten in den Nebenbedingungen lineare Ungleichungssysteme auf. Solche Systeme sollen in diesem Abschnitt untersucht werden.
Wir werden uns speziell mit linearen Ungleichungssystemen mit zwei Variablen beschäftigen, da bei der grafischen Lösung einfacher Linearoptimierungsaufgaben nur solche Fälle vorkommen können.

9. Schreiben Sie die allgemeine Form der Geradengleichung für die Ebene auf!

10. Welches Bild erhält man bei der Darstellung der Gleichung $ax + by = c$!
Führen Sie eine Fallunterscheidung durch ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ usw.)!

11. Zeichnen Sie den Graph der Gleichung $ax + by = c$ bzw. $y = mx + n$!

12. Welche Ungleichungen gelten für die Koordinaten aller Punkte der xy-Ebene (kartesisches Koordinatensystem), die
a) oberhalb (unterhalb) der x-Achse bzw.
b) rechts (links) der y-Achse liegen?
c) Welche Ungleichungen gelten für die Koordinaten der Punkte des 1., 2., 3. und 4. Quadranten? (L)

13. Welche Ungleichung gilt für die Koordinaten der Punkte, die
a) oberhalb (unterhalb) der Geraden $y = a$ (a const.),
b) die links (rechts) der Geraden $x = b$ (b const.) liegen?

c) Welche Ungleichung gilt für die Koordinaten der Punkte, die oberhalb und auf der Geraden $y = a$ liegen? (L)

Wenn man den Graph der Funktion $ax + by = c$ in der xy-Ebene zeichnet, erhält man eine Gerade g (Bild 53).

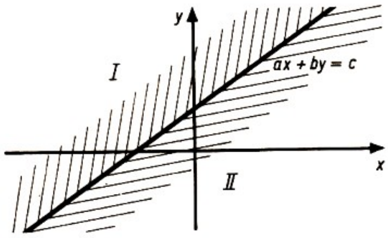


Bild 53

Diese Gerade g teilt die Ebene in zwei Halbebenen, eine Halbebene oberhalb der Geraden (I) und eine Halbebene unterhalb der Geraden (II). Die Gerade g gehört zu keiner der beiden Halbebenen. Sie heißt Grenzgerade.
Falls $b > 0$ ist, gilt für die Punkte der oberen Halbebene (I)

$$ax + by > c$$

und für die der unteren Halbebene (IT)

$$ax + by < c$$

Wird jedoch die Gerade g zu einer Halbebene hinzugenommen, z.B. zur oberen Halbebene, dann gilt

$$ax + by \geq c$$

Falls $b < 0$ ist, gilt für die Punkte der oberen Halbebene $ax + by < c$ und für die der unteren Halbebene $ax + by > c$. Die entstehenden Ungleichungen sind solche mit zwei Variablen.

▷ Definition 8/8:
Ungleichungen der Form $ax + by \geq c$ bzw. $ax + by > c$ heißen lineare Ungleichungen mit zwei Variablen.

Ungleichungen der Form $ax + by < c$ bzw. $ax + by \leq c$ sind in der Definition mit erfasst, da solche Ungleichungen durch Multiplikation mit -1 auf die obige Form gebracht werden können.

▷ Definition 8/9:
Die Lösungsmenge der Ungleichung $ax + by \geq c$ bzw. $ax + by > c$ ist die Menge aller Wertepaare $[x; y]$, die die Ungleichung erfüllen.

Man kann diese Wertepaare deuten als Koordinaten $(x; y)$ von Punkten der xy- Ebene. Damit kann man auch den Begriff "Halbebene" definieren.

▷ Definition 8/10:
Die Menge aller Punkte der xy-Ebene, deren Koordinaten der Ungleichung $ax + by > c$ genügen, bildet eine Halbebene.
Die zugehörige andere Halbebene enthält dann alle Punkte, deren Koordinaten der Ungleichung $ax + by < c$ genügen.

Die Grenzgerade gehört zu keiner der Halbebenen. Das soll auch in den weiteren Betrachtungen so sein.

Falls $b = 0$ ist, erhält man die beiden Halbebenen links und rechts der Geraden $ax = c$.

□ Beispiel 8/17:
Die Gerade $g : x - 2y = 1$ teilt die Ebene in zwei Halbebenen I und II (Bild 54).

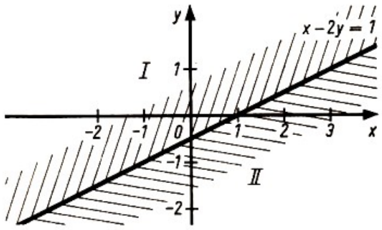


Bild 54

Für die Punkte der oberen Halbebene (I) einschließlich der Geraden g gilt $x - 2y \leq 1$, für die der unteren Halbebene (II) gilt $x - 2y > 1$.

Nach diesen Betrachtungen sollen nun lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen näher untersucht werden.

▷ Definition 8/11:
Ein lineares Ungleichungssystem von n Ungleichungen für zwei Variablen ist ein System folgender Art

$$\begin{gathered} a_1x + b_1y \geq c_1 \\ a_2x + b_2y \geq c_2 \\ ... \\ a_nx + b_ny \geq c_n \end{gathered}$$

Dabei wollen wir als Relationszeichen auch die Zeichen $>$ und $=$ in den vorliegenden Beziehungen zulassen. Das System kann auch Gleichungen, muss jedoch mindestens eine Ungleichung enthalten.

Die Relationszeichen $\leq$ und $<$ braucht man nicht noch zuzulassen. Ungleichungen, die diese Relationszeichen enthalten, können durch Multiplikation mit -1 auf die in der Definition angegebene Form gebracht werden.
Falls eine Ungleichung der Form $ax + by \geq c$ vorliegt, kann diese Ungleichung durch eine Halbebene veranschaulicht werden, zu der die Grenzgerade $ax + by = c$ mit gehört. Bei $ax + by > c$ gehört die Grenzgerade nicht mit zur Halbebene. Bei $ax + by = c$ erhält man keine Halbebene, sondern nur eine Gerade.

▷ Definition 8/12:
Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems von n Ungleichungen mit zwei Variablen ist die Menge aller Wertepaare $[x; y]$, die alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllen. "Lösen des Systems" heißt "Bestimmen der Lösungsmenge".

Die Lösungsmenge kann man für den Fall von zwei Variablen, den wir betrachten, leicht graphisch finden. Es ist eine Punktmenge der xy-Ebene. Wir betrachten zuerst ein ausführliches Beispiel.

□ Beispiel 8/18:
a) Die Ungleichung $x - 2y < 1$ definiert eine Halbebene (Bild 55, schraffiert). Die Koordinaten aller Punkte dieser Halbebene und damit alle Wertepaare $[x; y]$, denen diese Punkte zugeordnet sind, erfüllen die Ungleichung.

b) Das Ungleichungssystem

$$x - 2y \leq 1 \qquad , \qquad 2x - y \geq -2$$

definiert die im Bild 56 dargestellte schraffierte Punktmenge der xy- Ebene.

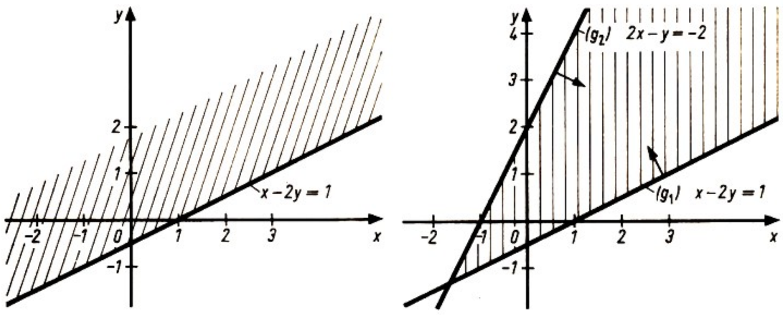


Bild 55,56

Die Menge ist der Durchschnitt der Menge der Punkte, die oberhalb und auf der Geraden g_1 mit der Gleichung $x - 2y = 1$ liegen, sowie der Menge, die unterhalb und auf der Geraden g_2 mit der Gleichung $2x - y = 2$ liegen. Die Menge ist unbeschränkt. Die Koordinaten der Punkte der Menge, und damit alle entsprechenden Wertepaare $[x; y]$, erfüllen das System.

c) Das Ungleichungssystem

$$x - 2y \leq 1 \qquad , \qquad -2x + y \leq 2 \qquad , \qquad 2x - y \leq 2$$

definiert die im Bild 57 schraffiert dargestellte Punktmenge. Es ist eine unbeschränkte Vielecksfläche.

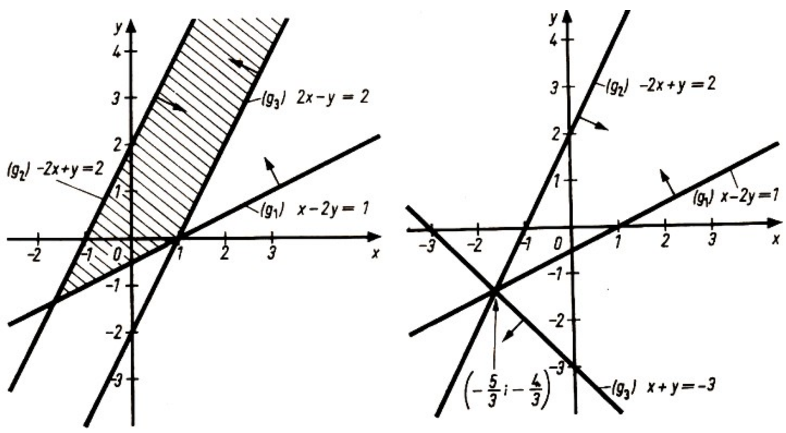


Bild 57,58

d) Das Ungleichungssystem

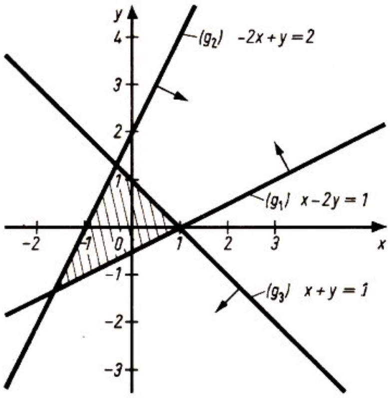
$$x - 2y \leq 1 \qquad , \qquad -2x + y \leq 2 \qquad , \qquad x + y \leq -3$$

hat als Lösung nur das Wertepaar $\left[-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right]$ (Bild 58).

e) Das Ungleichungssystem

$$x - 2y \leq 1 \qquad , \qquad -2x + y \leq 2 \qquad , \qquad x + y \leq 1$$

definiert die im Bild 59 schraffiert dargestellte Punktmenge. Es ist eine Dreiecksfläche.



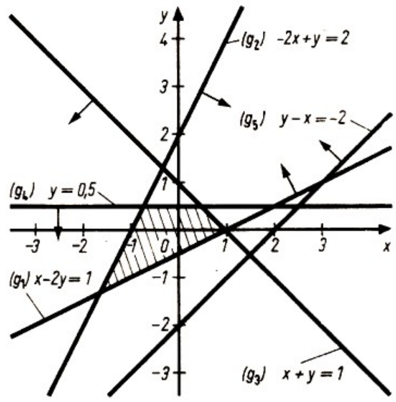


Bild 59,60

f) Das Ungleichungssystem

$$x-2y \leq 1 \quad , \quad -2x+y \leq 2 \quad , \quad x+y \leq 1 \quad , \quad y \leq \frac{1}{2}$$

definiert die im Bild 60 schraffiert dargestellte Punktmenge. Es ist eine Vierecksfläche. Nimmt man zu dem gegebenen Ungleichungssystem noch die Ungleichung

$$-x+y \geq -2 \qquad (g_5)$$

dazu, so ändert sich die Lösungsmenge nicht (Bild 60). Es können also in einem System auch Ungleichungen "überflüssig" sein.

g) Das Ungleichungssystem

$$x-2y \leq 1 \quad , \quad x-2y \geq 3$$

hat als Lösungsmenge die leere Menge.

h) Das Ungleichungssystem

$$x-2y \leq 1 \quad , \quad -2x+y \leq 2 \quad , \quad x+y \leq 1 \quad , \quad x+y \geq 1$$

hat als Lösungsmenge die Menge aller Punkte einer Seite der im Bild 59 dargestellten Dreiecksfläche.

Nach der Betrachtung dieses Beispieles wollen wir die Ergebnisse über das Lösen eines linearen Ungleichungssystems zusammenfassen.

Zusammenfassung:
Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems der Form (vgl. Definition 8/11)

$$\begin{gathered} a_1x+b_1y \geq c_1 \\ a_2x+b_2y \geq c_2 \\ ... \\ a_nx+b_ny \geq c_n \end{gathered}$$

ist eine Menge von Wertepaaren $[x;y]$. Diese Paare können als Koordinaten derjenigen Punkte angesehen werden, die den Durchschnitt aller Halbebenen mit den zugehörigen Grenzgeraden, die durch die einzelnen Ungleichungen dargestellt werden, bilden.

Will man also das Ungleichungssystem grafisch lösen, so zeichnet man alle Halbebenen mit den zugehörigen Grenzgeraden, die durch die Ungleichungen dargestellt werden, und bildet deren Durchschnitt.

Die Ungleichungssysteme können verträglich oder unverträglich sein.

$\triangleright$ Definition 8/13:
Ein lineares Ungleichungssystem mit zwei Variablen heißt verträglich, wenn wenigstens ein Wertepaar $[x; y]$ existiert, das alle Ungleichungen erfüllt.

Es gibt also in diesem Fall mindestens ein Zahlenpaar $[x; y]$, das alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt. Man kann auch sagen, es gibt wenigstens einen Punkt $P(x; y)$, der allen Halbebenen mit den zugehörigen Grenzgeraden angehört, die durch das System definiert werden.

$\triangleright$ Definition 8/14:
Ein Ungleichungssystem heißt unverträglich, wenn es kein Wertepaar $[x; y]$ gibt, das alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt.

Es gibt also bei Unverträglichkeit keinen Punkt $P(x; y)$, der allen Halbebenen mit den zugehörigen Grenzgeraden gleichzeitig angehört. Das Ungleichungssystem hat keine Lösung.
Bei verträglichen Ungleichungssystemen kann die Lösungsmenge eine Halbebene (evtl. mit der Grenzgeraden), eine unbeschränkte oder beschränkte Vielecksfläche, eine Gerade, eine Strecke (Seite eines Vielecks) oder ein einziger Punkt sein.
Die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten (Wertepaare) das Ungleichungssystem erfüllen, ist eine konvexe Menge.

$\triangleright$ Definition 8/15:
Eine konvexe Menge ist eine Menge, die mit je zwei Punkten auch die gesamte Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte enthält.

8.6 Linearoptimierungsaufgaben mit zwei Variablen

14. a) Wie kann man lineare Ungleichungen mit zwei Variablen geometrisch deuten ?
b) Wie kann man ein System von linearen Ungleichungen mit zwei Variablen geometrisch deuten?
c) Welche Punktmengen können als Lösungsmenge von linearen Ungleichungssystemen mit zwei Variablen auftreten ? Erläutern Sie die verschiedenen Fälle mit Hilfe von Skizzen!

15. Für welche Punkte der xy-Ebene gilt
a) $2x + 3y \leq 6$
b) $2x + 3y \leq 6; \quad -x + y \leq 2$
c) $2x + 3y \leq 6; \quad -x + y \leq 2; \quad -x - 3y \leq 3; \quad 2x \leq 3; \quad -3x - 2y \leq -12$
d) $3x - 2y \leq 12; \quad 3x - 2y \geq 12$ (L)

16. Zeichnen Sie die Bilder der Geraden $3x - 2y = c$ für $c = 0, \pm 1, \pm 2$,... Was stellen Sie fest ?

17. a) Ermitteln Sie grafisch die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$x - 2y \leq 2 \quad , \quad 2x - y \geq -2 \quad , \quad x - y \leq 1$$

b) In welchem Punkt $P(x; y)$ der Lösungsmenge hat die Funktion $z = 2y + x$ ihren größten Funktionswert? (L)
c) In welchem Punkt $P(x; y)$ hat die Funktion $z = 2y + x$ ihren kleinsten Funktionswert ? (L)

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die Grundlagen für die grafische Lösung von Linearoptimierungsaufgaben mit zwei Variablen zusammengestellt wurden, wollen wir in diesem Abschnitt die grafische Lösung solcher Aufgaben betrachten.

Es soll zuerst ein Beispiel diskutiert werden, nämlich das Beispiel 8/1. Als mathematisches Modell für den in diesem Beispiel angegebenen praktischen Sachverhalt erhielten wir die Linearoptimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} z = 9x + 6y &\Rightarrow \max \\ 3x + 6y &\leq 24000 \\ 8x + 4y &\leq 40000 \\ 9x + 3y &\leq 27000 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

Diese Aufgabe soll grafisch gelöst werden. Es ist also das Maximum der Zielfunktion

$$z = 9x + 6y$$

unter den als Ungleichungen angegebenen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 3x + 6y &\leq 24000 \\ 8x + 4y &\leq 40000 \\ 9x + 3y &\leq 27000 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen.
Das Ungleichungssystem kann man mit Hilfe der Überlegungen, die im Abschnitt 8.5. angestellt wurden, grafisch lösen. Es ist bei dieser Aufgabe zweckmäßig, das System

$$\begin{aligned} 3x + 6y &\leq 24 \\ 8x + 4y &\leq 40 \\ 9x + 3y &\leq 27 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

zu lösen und im Ergebnis zu beachten, dass man Tausender erhält.
Als grafische Lösung des Systems erhält man eine konvexe Vierecksfläche in der xy-Ebene (Bild 61).

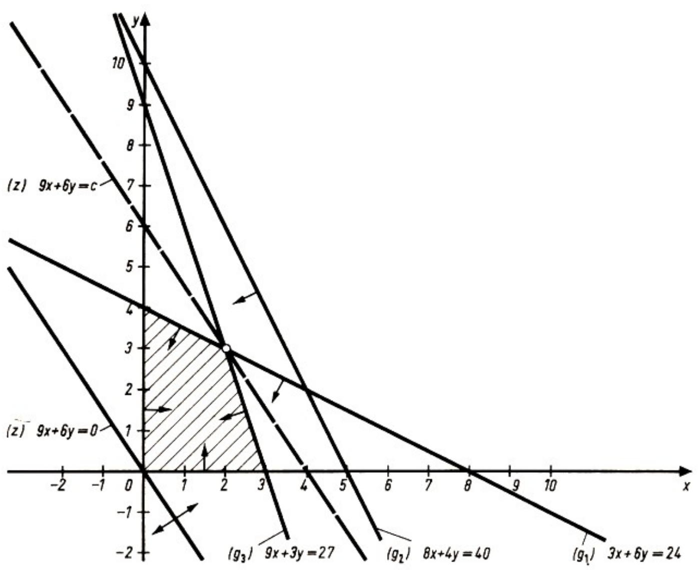


Bild 61

Diese konvexe Vierecksfläche heißt auch Bereich der zulässigen Lösungen der vorliegenden Linearoptimierungsaufgabe.
Aus dem Bereich der zulässigen Lösungen sind nun die Punkte $(x; y)$ bzw. die Wertepaare $[x; y]$ auszuwählen, die der Zielfunktion

$$z = 9x + 6y$$

den größten Wert (Maximum) erteilen. Wir zeichnen dazu das Bild der Funktion

$$9x + 6y = c$$

in der c ein Parameter ist, in das Koordinatensystem ein und ermitteln grafisch den Punkt oder die Punkte des zulässigen Bereiches, in denen c, der Wert der Zielfunktion, einen optimalen Wert (Maximum) annimmt. Dabei verfahren wir am besten in der Weise, dass wir die Gerade

$$9x + 6y = c$$

mit $c = 0$ in das Koordinatensystem einzeichnen und diese Gerade parallel so verschieben, bis c im Bereich der zulässigen Lösungen einen maximalen Wert annimmt. Parallelverschiebung der Geraden bewirkt ja gerade Änderung der Parameterwerte c oder umgekehrt.

Das Bild 61 zeigt, dass wir einen maximalen Wert von $z = 9x + 6y = c$ in einem Eckpunkt der Vierecksfläche, nämlich im Punkt mit den Koordinaten $(2; 3)$, erhalten. Einen minimalen Wert würde man im Punkt $O(0; 0)$ erhalten.
Als Lösung erhält man somit das Wertepaar $[2; 3]$, also $x = 2000$ und $y = 3000$.
In diesem Punkt nimmt die Zielfunktion bei Einhaltung der Nebenbedingungen ihren größten Wert an, nämlich den Wert

$$z = 9x + 6y = 9 \cdot 2000 + 6 \cdot 3000 = 36000$$

Wenn der Betrieb also vom Produkt A 2000 Stück und vom Produkt B 3000 Stück produziert, ist der Gewinn am größten.
Die an diesem Beispiel erläuterte Methode kann man allgemein bei Linearoptimierungsaufgaben mit zwei Variablen anwenden.

Zusammenfassung:
Eine Linearoptimierungsaufgabe mit zwei Variablen der Form

$$\begin{aligned} z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \text{ opt } (\max \text{ oder } \min) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq a_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq a_m \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

wird grafisch gelöst, indem man
1. den zulässigen Bereich der Lösungen bestimmt und
2. die Menge der Punkte ermittelt, in denen die Zielfunktion ihr Optimum annimmt.

Der zulässige Bereich der Lösungen ergibt sich aus den Nebenbedingungen, also aus einem linearen Ungleichungssystem. Dieses Ungleichungssystem ist grafisch zu lösen. Der zulässige Bereich ist eine konvexe Menge. Dabei muss man die im Abschnitt 8.5. angegebenen Fälle unterscheiden.

Durch Zeichnen der Geraden $c_1x_1+c_2x_2 = c$ für $c = 0$ und Parallelverschiebung dieser Geraden erhält man den Punkt $P(x_1; x_2)$ [die Punkte (x_1,x_2)], für dessen (deren) Koordinaten gilt

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{ opt}$$

und der (die) zugleich auch im Bereich der zulässigen Lösungen liegt (liegen).

Der optimale Wert wird, wenn eine konvexe Vielecksfläche als Bereich vorliegt in einem Eckpunkt der konvexen Vielecksfläche angenommen. Es kann allerdings auch der Fall eintreten, dass das gesuchte Optimum auf einer Seite der Vielecksfläche angenommen wird. Damit existieren unendlich viele Lösungen für die Linearoptimierungsaufgabe, nämlich alle Punkte der Seite des Vielecks.
Den Punkten $P(x_1; y_1)$, die man grafisch als Lösung erhält, werden die entsprechenden Wertepaare $[x_1; y_1]$ zugeordnet.

Mit Hilfe der angegebenen Methode kann man nur einfache Linearoptimierungsaufgaben, nämlich solche mit zwei Variablen und solche, die sich auf Aufgaben mit zwei Variablen zurückführen lassen, grafisch lösen.
Wenn man mehr als zwei Variable zulässt, kann man mit Hilfe der Linearoptimierung viele praktische Aufgaben betrachten und lösen, so u. a. Optimierung des Produktionsumfanges (vgl. Beispiel 8.1), Gestaltung optimaler Futterpläne (vgl. Beispiel 8.2), Ermittlung optimaler Bebauungspläne in der Landwirtschaft, Transportoptimierung, Optimierung von Zuschnittproblemen, Gestaltung optimaler Schichtpläne (vgl. Beispiel 8.3).
Man muss dann bei mehr als zwei Variablen andere Verfahren anwenden.

8.7 Aufgaben und Aufträge

18. Beweisen Sie die Grundeigenschaften von Ungleichungen (Satz 8/1 bis Satz 8/7)!

19. Weisen Sie die Richtigkeit der Ungleichung $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $(a \geq 0$ und $b \geq 0)$ nach!

20. Beweisen Sie, dass $(a + b)(b + c)(c + a) > 8 \cdot abc$ gilt, wenn a, b und c nichtnegative Zahlen sind!

21. Beweisen Sie die Sätze 8/8 und 8/9 über die Äquivalenz von Ungleichungen!

22. Lösen Sie folgende Ungleichungen
a) $\frac{5x-2}{4} \leq 1 + x$, b) $4x < \frac{10+18x}{3}$, c) $4x - 5 \geq 8x - 7$. (L)

23. Zeichnen Sie die Gerade $4x - 5y = 6$!
Wie lauten die Ungleichungen für die obere und untere Halbebene ? (L)

24. Für welche Punkte $P(x; y)$ der Ebene gilt das Ungleichungssystem?
a) $2x + 3y \leq 6$, $2x - 3y \leq 6$, $-2x + 3y \leq 6$, $-2x - 2 <\leq 6$

b) $2x + 3y \geq 6$, $2x - 3y \geq 6$, $-2x + 3y \geq 6$, $-2x - 2 <\geq 6$

25. Bestimmen Sie die Wertepaare $[x; y]$, die folgende Systeme erfüllen!

a) $-x \leq 0$, $-y \leq 0$

b) $x \geq 0$, $y \geq 0$

c) $x \leq 3$, $y \leq -2$

d) $x \leq 2$, $x \geq -3$, $y \leq 1$

e) $x - y \geq 0$, $x \geq 0$

f) $x - y \geq 0$, $x \geq 0$, $x \leq 5$

g) $-2x + y \leq 2$, $2x - y \leq 4$

h) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x - 3y \leq 12$

i) $-x + 2y \leq 2$, $x - y \leq 3$, $-yx - y \leq -1$

26. Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge folgender Systeme!

a) $x + y \geq 2$, $2x - 3y \geq -16$, $x + 3y \geq 4$, $-4x - 5y \geq -56$, $-5x + 2y \geq -37$

b) $x \geq 0$, $2x - 5y \geq 10$; $x + y \leq 2$, $3x + 5y \leq 15$

c) $2x - y \geq -5$, $4x + y \leq 5$, $x + 7y \geq 19$, $y \leq 1$

27. Lösen Sie die folgenden Linearoptimierungsaufgaben (L)!

a)

$$\begin{aligned} z = 12x + 18y &\Rightarrow \max \\ 4x - 3y &\geq -6 \\ x - 3y &\geq -15 \\ -x + 4y &\geq -4 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z = 12x + 18y &\Rightarrow \max \\ -x - 3y &\geq -12 \\ -x - 2y &\geq -10 \\ 2x + 5y &\geq 30 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z = x - y &\Rightarrow \max \\ 3x + 5y &\leq 6 \\ 3x + 2y &\leq 4 \\ 6x + 5y &= 5 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} z = 2x + 3y &\Rightarrow \max \\ \text{bzw. } z = 2x + 3y &\Rightarrow \min \\ x - 3y &\leq 0 \\ -2x - y &\leq -7 \\ 7x - 2y &\leq 38 \\ -6x + 22y &\leq 79 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} z = x + y &\Rightarrow \max \\ \text{bzw. } z = x + y &\Rightarrow \min \\ -x - 2y &\geq -6 \\ x - 3y &\leq 6 \\ x - y &\geq -3 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} z = y - \frac{2}{3}x &\Rightarrow \max \\ \text{bzw. } z = y - \frac{2}{3}x &\Rightarrow \min \\ -x - 3y &\leq 3 \\ 5x + 9y &\leq 45 \\ y &\leq 3 \\ 5x - 6y &\geq -30 \\ 5x + 3y &\leq 15 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

28. Lösen Sie das Beispiel 8/2 grafisch!

29. Ein Maschinenbetrieb stellt zwei Erzeugnisse E_1 und E_2 her. E_1 bringt einen Gewinn von 3000 $\frac{\text{M}}{\text{Einheit}}$ und E_2 einen von 2000 $\frac{\text{M}}{\text{Einheit}}$.
Die Produktion sei folgenden Beschränkungen unterworfen: Von den zwei benötigten Rohstoffen R_1 und R_2 werden 136 t bzw. 200 t von einem Zulieferbetrieb angeliefert. Zur Produktion von E_1 werden von R_1 17 $\frac{\text{t}}{\text{Einheit}}$ und von R_2 10 $\frac{\text{t}}{\text{Einheit}}$ benötigt, zur Produktion von E_2 8 $\frac{\text{t}}{\text{Einheit}}$ von R_1 und 20 $\frac{\text{t}}{\text{Einheit}}$ von R_2.
Eine Einheit von E_1 lastet $\frac{1}{10}$ der Kapazität der Schmiede aus, eine Einheit von E_2 lastet $\frac{1}{12}$ der Kapazität aus. Die Montagestraße des Erzeugnisses E_1 reicht aus für 7 Einheiten, die von E_2 für 12 Einheiten.
Wieviel Einheiten von E_1 und E_2 sind zu produzieren, damit der Gewinn maximal wird ? (L)

30. Die Ziegeleien Z_1 und Z_2 haben eine Produktionskapazität von 7 Mill. bzw. 4 Mill. Ziegel. Sie versorgen die Baustelle B_1 mit 3 Mill. und die Baustelle B_2 mit 8 Mill. Ziegel.
Die Kosten für den Transport von 1 Mill. Ziegel von Z_1 nach B_1 betragen 45000 M, von Z_1 nach B_2 30000 M, von Z_2 nach B_1 42000 M und von Z_2 nach B_2 13000 M.
Es soll ein Plan für den Ziegeltransport aufgestellt werden, so dass die Transportkosten am niedrigsten sind. (L)

9 Lösungen

Im folgenden sind Lösungen zu den Aufgaben aufgeführt, die weiter vorn mit einem "L" gekennzeichnet wurden.

Kapitel 2

2. $\alpha = ac$; $\beta = ad + bc$; $\gamma = bd$

3. $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$

4. $\Delta A \approx 2 \cdot 2\pi r \cdot \Delta r + r^2 \cdot \Delta\pi = 4 \cdot 76 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2 + 76^2 \cdot 0{,}005 = 219{,}79$
(mit $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005$)
$\delta A \approx \frac{219{,}79}{18136{,}64} = 0{,}012$

5. $\sqrt{3} = 1{,}732 \pm 0{,}0005$
$\Delta s = \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot 0{,}0005-(\sqrt{3}-1]\cdot 0{,}0005}{(\sqrt{3}+1)^2} \approx 0{,}0001$
$\delta s \approx 0{,}0003$

Kapitel 4

9. Man löst die Gleichung $f(x) = 0$: $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

13. a) Die Substitution $x = z + 2$ liefert $z^3 - 10z - 7 = 0$. Das grafische Lösungsverfahren, das man mit Hilfe der Zerlegung der Funktion $y = z^3 - 10z - 7$ in $y_1 = z^3$ und $y_2 = 10z + 7$ durchführen kann, führt zu
$z_1 \in (-3, -2)$ bzw. $z_1 \approx -2{,}5$
$z_2 \in (-1{,}0)$ bzw. $z_2 \approx -1$
$z_3 \in (3{,}4)$ bzw. $z_3 \approx 3{,}5$.
Damit erhält man $x_1 \approx -0{,}5$, $x_2 \approx 1$ und $x_3 \approx 5{,}5$.

13. b) Die Substitution $x = z - 1$ liefert $z^3 - 8z + 14 = 0$. Das grafische Lösungsverfahren, das man mit Hilfe der Zerlegung der Funktion $y = z^3 - 8z + 14$ in $y_1 = z^3$ und $y_2 = 8z - 14$ durchführen kann, ergibt, dass es nur eine einzige reelle Lösung im Intervall $(-4, -3)$ gibt. Man erhält $z \approx -3{,}5$ und $x \approx -4{,}5$.

15. a) Das grafische Lösungsverfahren ergibt $x_1 \approx -3{,}0$, $x_2 \approx -2{,}5$, $x_3 \approx 1{,}2$.

15. b) Das grafische Lösungsverfahren ergibt $x \approx -0{,}7$.

17. $\alpha = 10°$, $\sin 3\alpha = \sin 30° = 0{,}5 = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\sin\alpha = x$: $-4x^3 + 3x = 0{,}5$ bzw. $x^3 = 0{,}75x - 0{,}125$
Das grafische Lösungsverfahren und eine sich anschließende Untersuchung mit Hilfe einer Wertetabelle liefert $x_1 \approx -0{,}95$, $x_2 \approx 0{,}18$ und $x_3 \approx 0{,}76$.
Damit erhält man $x = \sin 10° \approx 0{,}18$.
Es erfolgt eine Verbesserung der Ausgangsnäherung $x_0 = 0{,}18$ mit Hilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens:
$x_{n+1} = \frac{4x_n^3+0{,}5}{3}$ mit $x_0 = 0{,}18$ und $n = 0{,}1{,}2{,}...$, $|\varphi'(x)| = 4x^2 < 1$, $\forall x \in (0{,}1; 0{,}2)$

n	x_n	$4x_n^3$	$\frac{4x_n^3+0{,}5}{3}$
0	0,18	0,025	0,178
1	0,178	0,022	0,174
2	0,174		

$\sin 10\circ = x \approx 0{,}174.$

18. (zu 4/13a)
Es erfolgt eine Verbesserung von z_i, da in diesem Fall die Iterationsvorschrift einfacher ist $i = 1, 2, 3$).

a) Newtonsches Verfahren:

$$z_{i,n+1} = z_{i,n} - \frac{z_{i,n}^3 - 10z_{i,n} - 7}{3z_{i,n}^2 - 10}, \quad (i = 1{,}2{,}3), \quad (n = 0{,}1{,}2{,}...)$$

	n z_{in}	$f(z_{i,n})$	$f'(z_{i,n})$	$\frac{f(z_{i,n})}{f'(z_{i,n})}$	
z_{1n}	0	-2,5	2,37	8,75	0,271
	1	-2,771			
z_{2n}	0	-1	2	-7	-0,275
	1	-0,725			
z_{3n}	0	3,5	0,88	26,75	0,032
	1	2,468			

$x_1 \approx -0{,}771$, $x_2 \approx 1{,}275$, $x_3 \approx 5{,}468$

b) Regula falsi: $z_{i,n+1} = b - \frac{(a-b)f(b)}{f(b)-f(a)}$, $(i = 1{,}2{,}3)$ $(n = 0{,}1{,}2{,}...)$

	n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	z_n	$f(z_n)$
z_{1n}	1	-3	-2	4	5	-2,56	1,742
	2	-3	-2,56	-4	1,74	-2,69	0,425
	3	-3	-2,96	-4	0,425	-2,72	0,177
z_{2n}	1	1	0	2	-7	-0,78	0,464
	2	-0,78	0	0,46	-7	-0,73	-0,106
	3	-0,78	-0,73	0,46	-0,106	-0,737	-0,030
z_{3n}	1	3	4	-10	14	3,42	-1,186
	2	3,42	4	-1,19	14	3,46	-0,147
	3	3,46	4	-0,15	14	3,467	-0,032

$x_1 \approx -0{,}72$, $x_2 \approx 1{,}263$, $x_3 \approx 5{,}467$

c) Allgemeines Iterationsverfahren: z_1 und z_3: $z_{n+1} = \sqrt[3]{10z_n + 7}$
$|\varphi'(z)| = \frac{10}{3\sqrt[3]{(10z+7)^2}} < 1$, $\forall z \in (-3, -2)$ und $\forall z \in (3{,}4)$
z_2: $z_{n+1} = \frac{z_n^3 - 7}{10}$, $|\varphi'(z)| = \frac{3}{10}z^2 < 1$, $\forall z \in (-1{,}0)$

	n	z_n	$10z_n + 7$	$\sqrt[3]{10z_n + 7}$
z_{1n}	0	-2,5	-18	-2,621
	1	-2,621	-19,21	-2,668
	2	-2,668	-19,68	-2,7
z_{3n}	0	3,5	42	3,476
	1	3,476	41,76	3,470
	2	3,470	41,70	3,468
	n	z_n	z_n^3	$\frac{z_n^3-7}{10}$
z_{2n}	0	-1	-1	-0,8
1	-0,8	-0,512	-0,751	
2	-0,751	-0,422	-0,742	

$x_1 \approx -0{,}7$; $x_2 \approx 1{,}258$; $x_3 \approx 5{,}468$.

18. (zu 4/13b)
Es erfolgt eine Verbesserung von z.
a) Newtonsches Verfahren: $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 8z_n + 14}{3z_n^2 - 8}$

n	z_n	z_n^3	z_n^2	$f(z_n)$	$f'(z_n)$	$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$
0	-3,5	-42,88	12,25	-0,88	28,75	-0,080
1	3,47	-41,78	12,04	-0,12	28,12	0,004
2	-3,466					

$x \approx -4{,}46$.

b) Regula falsi: $z_{n+1} = b - \frac{(a-b)f(b)}{f(a)-f(b)}$

n	z_n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$f(a)-f(b)$	$\frac{(a-b)f(b)}{f(a)-f(b)}$
0	-3,0	-4,0	-3,0	-18	1	-1	0,38
1	-3,38	-4,0	-3,38	-18	2,42	-0,62	0,07
2	-3,45						

$x \approx -4{,}45$.

c) Allgemeines Iterationsverfahren: $z_{n+1} = \sqrt[3]{8z_n - 14}$
$|\varphi'(z)| = \frac{8}{3\sqrt[3]{(8z-14)^2}} < 1,\ \forall z \in (-4, -3)$

n	z_n	$8z_n - 14$	$\sqrt[3]{8z_n - 14}$
0	-3	-38	-3,36
1	-3,36	-40,88	-3,42
2	-3,42		

$x \approx -4{,}42$.

19. Die Berechnung der Näherungslösungen wurde nach der regula falsi mit Hilfe eines Rechenautomaten mit einer Genauigkeit von 0,0000001 durchgeführt. Anschließend wurde auf vier Dezimalstellen gerundet.

Gleichung	Intervalle, in denen reelle Nullstellen liegen	Näherungslösung
a)	(-0,8; -0,6)	-0,6554
	(0,6; 0,8)	0,7892
	(3,8; 4,0)	3,8662
b)	(-2,0; -1,8)	-1,8794
	(0,2; 0,4)	0,3473
	(1,4; 1,6)	1,5321
c)	(-3,14; -1,57)	-1,7890
	(1,57; 3,0)	1,7950
d)	(-1,7; -1,5)	-1,6180
e)	(0,5; 1,57)	0,7658

20. a) Kleinste reelle Nullstelle $x \in (0{,}6; 0{,}8)$; $x_0 = 0{,}6$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3}{4} + \frac{1}{2}}$
$|\varphi'(x)| = \frac{3x}{4 \cdot 2\sqrt{\frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}}} < 1,\ \forall x \in (0{,}6; 0{,}8)$

n	x_n	$\frac{x_n^3}{4}$	$\sqrt{\frac{x_n^3}{4}+\frac{1}{2}}$
0	0,6	0,054	0,7443
1	0,74	0,101	0,7752
2	0,78		

$x_1 \approx 0{,}78$.
Mit dem Rechenautomaten (siehe oben) erhält man nach der Rundung: $x_1 \approx 0{,}7892$.
Probe mit Hilfe des Hornerschen Schemas:

	1	-4	0	2	
$x_1 \approx 0{,}78$		0,78	-2,5116	-1,959	
	1	-3,22	-2,5116	0,041	$= f(0{,}78)$

20. b) Größte reelle Nullstelle $x \in (3{,}8; 4{,}0)$; $x_0 = 4{,}0$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{4x_n^2 - 2}$
$|\varphi'(x)| = \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2-2)^2}} < 1$, $\forall x \in (3{,}8; 4{,}0)$

n	x_n	$4x_n^2 - 2$	$\sqrt[3]{4x_n^2 - 2}$
0	4,0	62	3,958
1	3,96	60,7	3,930
2	3,93	59,8	3,900
3	3,90		

$x_2 \approx 3{,}90$.
Mit dem Rechenautomaten (siehe Lösung zur Aufgabe 19) erhält man nach der Rundung: $x_2 \approx 3{,}8662$.
Probe mit Hilfe des Hornerschen Schemas:

	1	-4	0	2	
$x_2 \approx 3{,}9$		3,9	-0,39	-1,521	
	1	-0,1	-0,39	0,479	$= f(3{,}9)$

21. $x_1 \in (-2{,}0; -1{,}8)$; $x_0 = -2{,}0$ (Ausgangsnäherung für x_1)
$x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1}$, $|\varphi'(x)| = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} < 1$, $\forall x \in (-2{,}0; -1{,}8)$

n	x_n	$3x_n - 1$	$\sqrt[3]{3x_n - 1}$
0	-2,0	-7	-1,913
1	-1,913	-6,74	-1,890
2	-1,890	-6,67	-1,882
3	-1,882		

$x_1 \approx -1{,}882$.
Mit Hilfe des Rechenautomaten (siehe Lösung zur Aufgabe 19) erhält man nach der Rundung: $x_1 \approx -1{,}8794$.

$x_2 \in (0{,}2; 0{,}4)$; $x_0 = 0{,}2$
$x_{n+1} = \frac{x_n^3+1}{3}$, $|\varphi'(x)| = \frac{1}{3}|3x^2 + 1| < 1$, $\forall x \in (0{,}2; 0{,}4)$

n	x_n	$x_n^3 + 1$	$\frac{x_n^3+1}{3}$
0	0,2	1,008	0,336
1	0,336	1,038	0,346
2	0,346	1,041	0,347
3	0,347		

$x_2 \approx 0{,}347$.
Mit Hilfe des Rechenautomaten (siehe Lösung zur Aufgabe 19) erhält man nach der Rundung: $x_2 \approx 0{,}3473$.

$x_3 \in (1{,}4; 1{,}6)$; $x_0 = 1{,}4$
$x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1}$, $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in (1{,}4; 1{,}6)$

n	x_n	$3x_n - 1$	$\sqrt[3]{3x_n - 1}$
0	1,4	3,2	1,474
1	1,474	3,42	1,507
2	1,507	3,52	1,521
3	1,521		

$x_3 \approx 1{,}521$.
Mit Hilfe des Rechenautomaten (siehe Lösung zur Aufgabe 19) erhält man nach der Rundung: $x_3 \approx 1{,}5321$.

22. $x \in (0{,}5; 1{,}0)$; $x_0 = 0{,}5$, $x_{n+1} = x_n \sin x_n - x_n + 1$
$|\varphi'(x)| = |\sin x + x \cos x - 1| < 1$, $\forall x \in (0{,}5; 1{,}57)$

n	x_n	x_n (Grad)	$\sin x_n$	$x_n \sin x_n$	x_{n+1}
0	0,5	28,8°	0,4818	0,2409	0,7409
1	0,74	43,4°	0,6871	0,5085	0,7685
2	0,77				

$x \approx 0{,}77$.
Mit Hilfe des Rechenautomaten (siehe Lösung zur Aufgabe 19) erhält man nach der Rundung: $x \approx 0{,}7647$.

Kapitel 5

2. $x = 2$; $y = 3$

3. $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 7$

5. a) $s_1 = 27$; $s_2 = 10$ b) $t_1 = 11$; $t_2 = 1$; $t = 25$

6. a) $x + 0{,}6y = 3{,}8$; $y = 3{,}0$ b) $x = 2$; $y = 3$
c) $t_1 x + t_2 y = 11 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 25 = t$

7. a)

Schritt	$t_1 = 4$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	$t = -2$	$s_i^{(k)} \mid S_i^{(k)}$	$(i = 1{,}2{,}3; k = 0{,}1{,}2{,}3)$
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_i		
	2	-3	1	0	$S_1 = 0$	
0	3	4	2	1	$S_2 = 0$	
	5	1	4	-3	$S_3 = 7$	
	1	-1,50	0,50	0	$s_1^{(1)} = 0$	$S_1^{(1)} = 0$
1	0	0,67	0,67	-0,33	$s_2^{(1)} = 0$	$S_2^{(1)} = 0$
	0	1,70	0,30	-0,60	$s_3^{(1)} = 1{,}40$	$S_3^{(1)} = 1{,}40$
	1	-1,50	0,50	0	$s_1^{(2)} = 0$	$S_1^{(2)} = 0$
2	0	1	1	-2	$s_2^{(2)} = 0$	$S_2^{(2)} = 0$
	0	0	-0,81	1,62	$s_3^{(2)} = 0{,}81$	$S_3^{(2)} = 0{,}81$
	1	-1,50	0,50	0	$s_1^{(3)} = 0$	$S_1^{(3)} = 0$
3	0	1	1	-2	$s_2^{(3)} = 0$	$S_2^{(3)} = 0$
	0	0	1	-2	$s_3^{(3)} = -1$	$S_3^{(3)} = -1$

Lösung: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$
Endprobe: $t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -2 = t$

7. b)

Schritt	$t_1 = 1{,}3$	$t_2 = 1{,}3$	$t_3 = 1{,}7$	$t = 0{,}1$	$S_i^{(k)}/s_i^{(k)}$
	1,2	-0,2	0,3	-0,6	0,7
0	-0,2	1,6	0,1	0,3	1,6
	0,3	-0,1	1,5	0,4	2,1
	1	-0,17	0,25	-0,50	0,58/0,58
1	0	-7,83	0,25	-1	-8,58/-8,58
	0	-0,17	4,75	1,84	6,42/6,42
	1	-0,17	0,25	-0,50	0,58/0,58
2	0	1	-0,03	0,13	1,1/1,1
	0	0	-27,97	-10,93	-38,9/-38,8
	1	-0,17	0,25	-0,50	0,58/0,58
3	0	1	-0,03	0,13	1,1/1,1
	0	0	1	0,39	1,39/1,39

Lösung: $x_1 = -0{,}57$; $x_2 = 0{,}14$; $x_3 = 0{,}39$
Endprobe: $t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = 0{,}104 \approx 0{,}1 = t$

7. c)

Schritt	$t_1 = 9$	$t_2 = 6$	$t_3 = -7$	$t = 5$	$S_i^{(k)}/s_i^{(k)}$
	6	-2	3	1	8
0	1	8	0	0	9
	2	0	-10	4	-4
	1	-0,333	-0,500	0,167	1,333/1,333
1	0	8,333	-0,500	-0,167	7,667/ 7,667
	0	0,333	-5,500	1,833	-3,333/-3,333
	1	-0,333	0,500	0,167	1,333/1,333
2	0	1	-0,060	-0,020	0,920/0,920
	0	0	-16,440	5,520	-10,92/-10,92
	1	-0,333	0,500	0,167	1,333/1,333
3	0	1	-0,060	-0,020	0,920/0,920
	0	0	1	-0,335	0,664/0,665

Lösung: $x_1 = 0{,}322$; $x_2 = -0{,}040$; $x_3 = -0{,}335$
Endprobe: $t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = 5{,}003 \approx t$

7. d)

Schritt	$t_1 = -0{,}9$	$t_2 = 1{,}5$	$t_3 = 4{,}8$	$t = 40{,}53$	$S_i^{(k)}/s_i^{(k)}$
	2,1	-4,5	-2,0	19,07	14,67
0	3,0	2,5	4,3	3,21	13,01
	-6,0	3,5	2,5	18,25	18,25
	1	-2,14	-0,95	9,06	6,97/7,0
1	0	2,97	2,38	-7,99	-2,64/-2,63
	0	1,56	0,53	-12,10	-10,01/-10,01
	1	-2,14	-0,95	9,06	6,97/7,0
2	0	1	0,80	-2,68	-0,88/-0,88
	0	0	0,46	-5,07	-5,53/-5,57
	1	-2,14	-0,95	9,06	6,97/7,0
3	0	1	0,80	-2,68	-0,88/-0,88
	0	0	1	11,02	12,02/12,02

Lösung: $x_1 = -5{,}08$; $x_2 = -11{,}50$; $x_3 = 11{,}02$,
Endprobe: $t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = 40{,}22 \approx t$

8.

Schritt	$t_1 = 1{,}25$	$t_2 = -0{,}28$	$t_3 = -1{,}45$	$t = 0{,}6$	$S_i^{(k)}/s_i^{(k)}$
	1	-1	-1	0	-1/-1
0	0,25	0,36	0	0,60	1,21
	0	0,36	-0,45	0	-0,09
	1	-1	-1	0	-1/-1
1	0	2,44	1	2,4	5,84/5,84
	0	0,36	-0,45	0	-0,09/-0,09
	1	-1	-1	0	-1/-1
2	0	1	0,41	0,98	2,39/2,39
	0	0	-1,66	-0,98	-2,64/2,64
	1	-1	-1	0	-1/-1
3	0	1	0,41	0,98	2,39/2,39
	0	0	1	0,59	1,59/1,59

Lösung: $I_1 = 1{,}33$; $I_2 = 0{,}74$; $I_3 = 0{,}59$,
Endprobe: $I_1 t_1 + I_2 t_2 + I_3 t_3 = 0{,}6 = t$

Kapitel 6

2. $\tilde{y} = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
$\tilde{y} = 0{,}8048 + (6{,}386 - 6{,}380)\frac{0{,}8055 - 0{,}8048}{6{,}39 - 6{,}38} = 0{,}8052 \approx 1g6{,}386$

3. Ansatz: $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
$a_0 + 0{,}1a_1 + 0{,}01a_2 = 1{,}1052 \qquad a_2 = 0{,}6333$
$a_0 + 0{,}2a_1 + 0{,}04a_2 = 1{,}2214 \qquad a_1 = 0{,}9720$
$a_0 + 0{,}4a_1 + 0{,}16a_2 = 1{,}4918 \qquad a_0 = 1{,}0017$
$P_2(x) = 1{,}0017 + 0{,}9720x + 0{,}6333x^2$

4. $n = 2$: Bei äquidistanten Stützstellen und Transformation auf die Variable t:

$$P_2(t) = \left(\frac{y_0}{2} - y_1 + \frac{y_2}{2}\right)t^2 + \left(2y_1 - \frac{3y_0}{2} - \frac{y_2}{2}\right)t + y_0$$

5. $P_2(t) = \frac{(x-1{,}21)(x-1{,}44)}{(-0{,}21)\cdot(-0{,}44)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-1{,}44)}{0{,}21\cdot(-0{,}23)} \cdot 1{,}1 + \frac{(x-1)(x-1{,}21)}{0{,}44\cdot 0{,}23} \cdot 1{,}2 = -0{,}10x^2 + 0{,}70x + 1{,}70$

Kapitel 7

1.a) $I = 2$; b) $I = -8$; c) $I = -15$; d) $I = 16$

4.

k	x_k	$f(x_k) = \frac{1}{3x_k+7}$
0	1,00	0,100
1	1,20	0,094
2	1,40	0,089
3	1,60	0,085
4	1,80	0,081
5	2,00	0,077
6	2,20	0,073
7	2,40	0,070
8	2,60	0,067
9	2,80	0,065
10	3,00	0,062

$I \approx 0{,}2 \cdot 0{,}801 = 0{,}1602$ bzw. $0{,}2 \cdot 0{,}763 = 0{,}1526$
$M_1 = \max\limits_{x\in(1;3)} \frac{3}{(3x+7)^2} = 0{,}03$
$d \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n} = \frac{0{,}03\cdot 2^2}{20} = 0{,}006$

Das Ergebnis von Beispiel 7/2 lautet für $n = 4$: $I \approx 0{,}167$ bzw. $0{,}148$. Der exakte Wert beträgt $I = 0{,}157$.

5. $k = 4$:

k	x_k	$f(x_k) = \frac{1}{x_k}$
0	1	1,000
1	2	0,500
2	3	0,333
3	4	0,250
4	5	0,200

$I \approx \frac{5-1}{4}\left(\frac{1+0{,}2}{2} + 0{,}5 + 0{,}3333 + 0{,}250\right) = 1 \cdot 1{,}683 = 1{,}683$

5. $k = 10$:

k	x_k	$f(x_k) = \frac{1}{x_k}$
0	1,0	1,000
1	1,4	0,714
2	1,8	0,555
3	2,2	0,455
4	2,6	0,384
5	3,0	0,333
6	3,4	0,294
7	3,8	0,263
8	4,2	0,233
9	4,6	0,217
10	5,0	0,200

$I \approx \frac{5-1}{10}(0{,}6 + 3{,}448) = 1{,}6192$

Exakter Wert: $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^5 = \ln 5 = 1{,}6094$

Ermittlung der Zahl n: $M_2 = \max\limits_{x\in(1,5)}\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2$, $e = 0{,}01$

$e \geq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, $n^2 \geq 1067$, $n \geq 33$

6. $k = 8$:

k	x_k	$f(x_k)$
0	0,000	1,000
1	0,125	0,994
2	0,250	0,941
3	0,375	0,877
4	0,500	0,800
5	0,625	0,719
6	0,750	0,640
7	0,875	0,566
8	1,000	0,500

$I_R \approx 0{,}754$ bzw. $0{,}817$; $I_T \approx 0{,}7848$; $I_S \approx 0{,}7854$; $I \approx 0{,}7854$

7. Ermittlung der Zahl n: $M_2 = \max\limits_{x\in(1,2)} |f''(x)| \leq \frac{5}{8}$

$e = 0{,}0001 > \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$; $b - a = 1$;
$n^2 \geq \frac{5}{8\cdot 0{,}012} = 52{,}1$

Berechnung von I:

k	x_k	$\lg x_k$	$\frac{\lg x_k}{x_k}$
0	1,000	0,0000	0,0000
1	1,125	0,0512	0,0456
2	1,250	0,0969	0,0775
3	1,375	0,1384	0,1006
4	1,500	0,1761	0,1174
5	1,625	0,2214	0,1362
6	1,750	0,2430	0,1417
7	1,875	0,2731	0,1456
8	2,000	0,3010	0,1505

$I_T \approx 0{,}1049$

8. Berechnung mit der Simpsonschen Regel:

k	x_k	$\ln x_k$	$\frac{1}{\ln x_k}$
0	10	2,3026	0,4343
1	11	2,3979	0,4170
2	12	2,4849	0,4003
3	13	2,5649	0,3898
4	14	2,6391	0,3788
5	15	2,7081	0,3692
6	16	2,7726	0,3609
7	17	2,8332	0,3529
8	18	2,8904	0,3459
9	19	2,9444	0,3396
10	20	2,9957	0,3334

$I_S \approx 3{,}7376$

Kapitel 8

7.a) $X < 3$; b) $x \leq 3$; c) $x < \frac{5}{2}$; d) $x \geq \frac{120}{19}$;
e) $x > \frac{d-b}{a-c}$ für $a - c > 0$; $x < \frac{d-b}{a-c}$ für $a - c < 0$;

12. a) Menge der Punkte der xy-Ebene, die oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegen: $y > 0$ bzw. $y < 0$.
b) Menge der Punkte der xy-Ebene, die rechts bzw. links der y-Achse liegen: $x > 0$ bzw. $x < 0$.
c) I.Quadrant: $x > 0$; $y > 0$ II.Quadrant: $x < 0$; $y > 0$
III.Quadrant: $x < 0$; $y < 0$ IV.Quadrant: $x > 0$; $y < 0$

13. a) $y > a$ $(y < a)$; b) $x < b$ $(a > b)$; c) $y \geq a$

15. a) Halbebene unterhalb der Geraden $2_x + 3y = 6$ unter Einschluss der Punkte dieser Geraden
b) Unbeschränktes Dreieck
c) keine Lösung
d) Die Lösung ist die Gerade $3x - 2y = 12$.

17. b) Maximum im Punkt $P_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$, c) Minimum im Punkt $P_2(-2; -2)$

22. a) $x \geq 6$, b) $x > -\frac{5}{3}$, c) $x \leq \frac{1}{2}$

23. $4x - 5y > 6$ untere Halbebene

$4 - 5y \leq 6$ obere Halbebene einschließlich der Geraden mit der Gleichung $4x - 5y = 6$

27. a) Der größte Wert wird in unendlich fernen Punkten des offenen (unbeschränkten) Vielecks angenommen.
b) Keine Lösung, da die Ungleichungen unverträglich sind.
c) $\max\left(\frac{5}{6}; 0\right)$
d) $\max(7; 5{,}5)$; $\min(3; 1)$
e) $\max(6{,}0)$; $\min(-7{,}5; -4{,}5)$
f) $\max\left(-\frac{36}{7}; \frac{5}{7}\right)$; $\min\left(\frac{18}{4}; -\frac{10}{4}\right)$

29. $3x + 2y \Rightarrow \max$
$17x + 8y \leq 136, \quad 10x + 20y \leq 200, \quad \frac{1}{10}x + \frac{1}{12}y \leq 1, \quad x \leq 7, \quad y \leq 9, \quad x,y \geq 0$

Die Gerade $y = -\frac{3}{2}x$ wird parallel verschoben.
Die Zielfunktion hat ihren maximalen Wert, wenn die Gerade durch den Punkt $P(5{,}4; 5{,}5)$ geht.
Für das praktische Problem kann man nur ganze Zahlen x, y zulassen. Der letzte Punkt mit ganzzahligen Koordinaten x, y, der zum zulässigen Bereich gehört und der auf der Geraden, die die Zielfunktion darstellt, liegt, ist der Punkt $P(5; 6)$.
Man erhält also $x = 5$; $y = 6$; $z = 2700$.

30. $45x + 30(7 - x) + 42y + 12(4 - y) \Rightarrow \min$
$z = 15x + 29y \Rightarrow \min$
$x + y = 3, \quad x \leq 3, \quad y \leq 4, \quad x,y \geq 0$
Das Minimum wird angenommen in $P(3; 0)$. Man erhält $x = 3$, $y = 0$ und $z = 307$.

10 Literaturverzeichnis

AUTORENKOLLEKTIV: Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1972.

AUTORENKOLLEKTIV: Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965.

BARSOW, A. 8.: Was ist lineare Programmierung? B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966.

KERNER,I. O.: Numerische Mathematik und Rechentechnik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (Teil 1: 1970; Teil 2: 1973)

KREKO, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

MELENTJEW, P. W. und GRABOWSKI, H.: Näherungsmethoden. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967.

POLOSHI, G. N.: Mathematisches Praktikum. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963.