Aufgabensammlung

155 Aufgaben und Lösungen der Klassenstufen 9 bis 12 der Mathematik-Vorolympiade von 1960 und 1961

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

Lösungen von Mitgliedern
des Forums ”Matroids Matheplanet”
`https://matheplanet.de`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, August 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

1.1 Vorolympiade 1960

1.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

Aufgabe 1 - V600901
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

Aufgabe 2 - V600902
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Aufgabe 3 - V600903
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhuskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

Aufgabe 4 - V600904
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{rccccccccc} 270 = & 1\cdot 2^8 & +0\cdot 2^7 & +0\cdot 2^6 & +0\cdot 2^5 & +0\cdot 2^4 & +1\cdot 2^3 & +1\cdot 2^2 & +1\cdot 2^1 & +0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & \text{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{L} & \text{L} & \text{L} & 0 \end{array}$$

Aufgabe 5 - V600905
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Aufgabe 6 - V600906
Wie tief taucht ein Würfel ($a = 30$ mm) aus Eisen ($\gamma_{\text{Fe}} = 7{,}5$ p·cm^{-3}) in Quecksilber ($\gamma_{\text{Hg}} = 13{,}6$ p·cm^{-3}) ein?

Aufgabe 7 - V600907
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

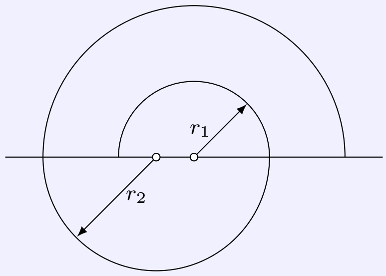
Aufgabe 8 - V600908
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Aufgabe 9 - V600909
Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Aufgabe 10 - V600910

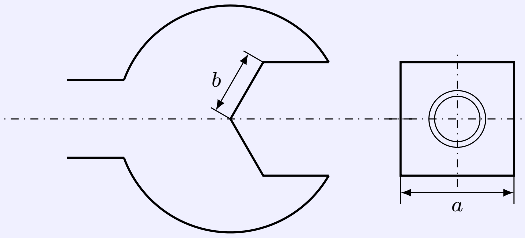


Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?

Aufgabe 11 - V600911
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a? Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Aufgabe 12 - V600912
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2; +2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1; -3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2; +1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm $\cong$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

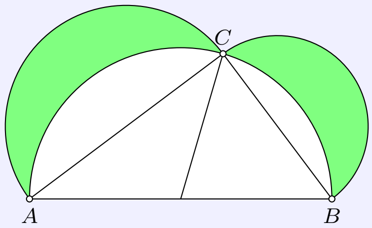
Aufgabe 13 - V600913



Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?

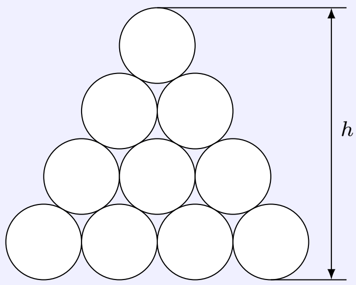
Aufgabe 14 - V600914
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Aufgabe 15 - V600915



Beweisen Sie folgenden Satz:
"Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC." (Hippokrates, 440 v.d.Zw. in Athen).

Aufgabe 16 - V600916



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?

Aufgabe 17 - V600917
In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

1.1.2 Wettbewerb V1960, Klasse 10

Aufgabe 1 - V601001
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

Aufgabe 2 - V601002
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss die Verpflegungsbombe ausgelöst werden, damit sie ihr Ziel erreicht? (g = 10 m/s^2)

Aufgabe 3 - V601003
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Aufgabe 4 - V601004
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Aufgabe 5 - V601005
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

"Sie heißt III Z ... Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Aufgabe 6 - V601006
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vom streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

Aufgabe 7 - V601007
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Aufgabe 8 - V601008
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

Aufgabe 9 - V601009
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!

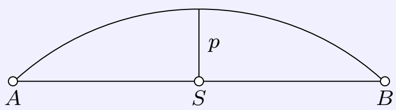
Aufgabe 10 - V601010
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Aufgabe 11 - V601011
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?

Aufgabe 12 - V601012
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?

Aufgabe 13 - V601013
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Aufgabe 14 - V601014



Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s/p)$?

Aufgabe 15 - V601015
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.
Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.

Aufgabe 16 - V601016
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

1.1.3 Wettbewerb V1960, Klasse 11

Aufgabe 1 - V601101
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^2 + z^3 = 2xyz$$

Aufgabe 2 - V601102
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^9}$$

Aufgabe 3 - V601103
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

Aufgabe 4 - V601104
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 572 $km \cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m \cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Aufgabe 5 - V601105
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Aufgabe 6 - V601106
Gibt es einen Winkel ϵ, für den die Gleichung gilt:

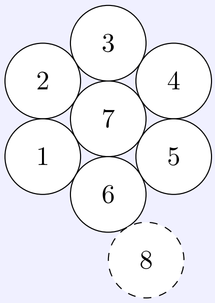
$$\sin\epsilon \cdot \cos\epsilon = 1$$

Aufgabe 7 - V601107
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

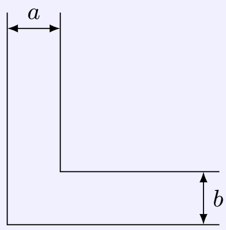
die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Aufgabe 8 - V601108



In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?

Aufgabe 9 - V601109



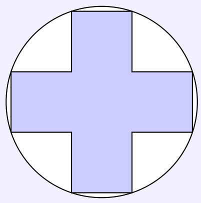
Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden. Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)

Aufgabe 10 - V601110
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\alpha = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!

Aufgabe 11 - V601111
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie größ ist die Summe aller Quadrate?

Aufgabe 12 - V601112
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.
Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.
a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 m liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?
b) Wie groß ist das Volumen?
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?

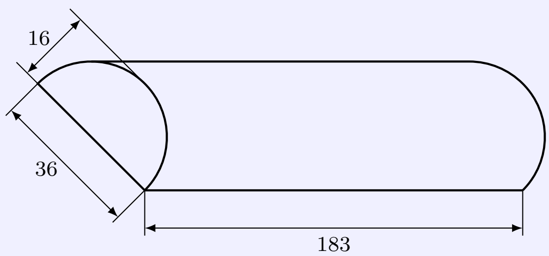
Aufgabe 13 - V601113



Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)

Aufgabe 14 - V601114
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3.

Aufgabe 15 - V601115
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

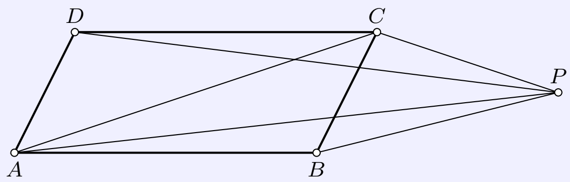
Aufgabe 16 - V601116
Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Aufgabe 17 - V601117
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis.
Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?

Aufgabe 18 - V601118
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.

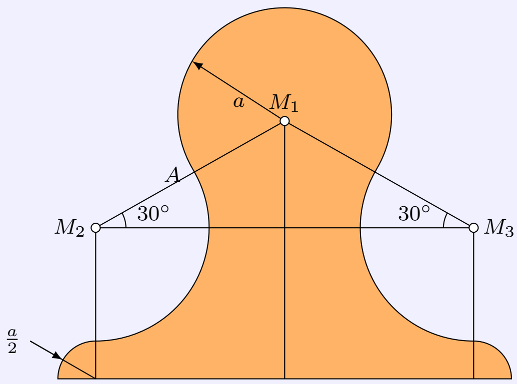
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Aufgabe 19 - V601119
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

Aufgabe 20 - V601120



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = a$ ist.

Aufgabe 21 - V601121
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,;0{,}00), B(87{,}00;54{,}40), C(153{,}60;44{,}00), D(206{,}40;25{,}00), E(303{,}50;33{,}80), F(352{,}00;0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

1.1.4 Wettbewerb V1960, Klasse 12

Aufgabe 1 - V601201
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?

Aufgabe 2 - V601202
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\bigstar\bigstar\bigstar 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Aufgabe 3 - V601203
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Aufgabe 4 - V601204
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad ..., \quad \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

Aufgabe 5 - V601205

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{1,5+\sqrt[4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}}}$$

Aufgabe 6 - V601206
Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6 + 14^6 + 16^6$$

Aufgabe 7 - V601207
Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Aufgabe 8 - V601208
Ein Trugschluss "Zwei ist größer als vier!"
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 9 - V601209
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen	b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen	d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen	f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Aufgabe 10 - V601210
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Aufgabe 11 - V601211
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

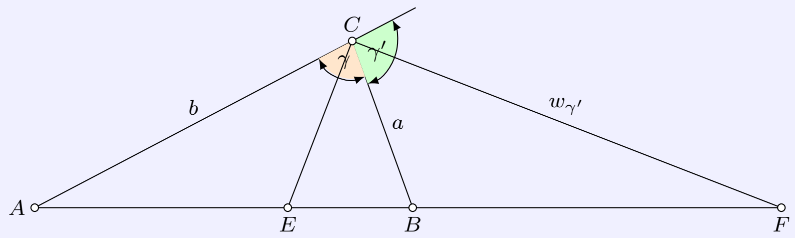
Aufgabe 12 - V601212
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Aufgabe 13 - V601213
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Aufgabe 14 - V601214
Beweisen Sie folgenden Satz:

Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

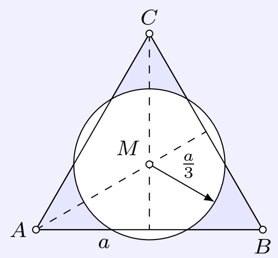
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 15 - V601215
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Aufgabe 16 - V601216



Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?

Aufgabe 17 - V601217
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Aufgabe 18 - V601218
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{10}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{40}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.

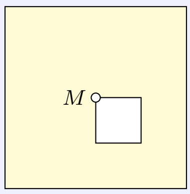
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Aufgabe 19 - V601219
Zeichnen Sie die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 20 - V601220
Berechnen Sie die innere Masse einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Aufgabe 21 - V601221
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Aufgabe 22 - V601222



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen (M = ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).

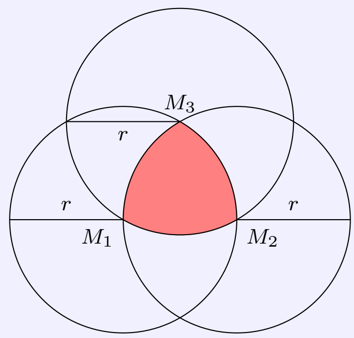
1.2 Vorolympiade 1961

1.2.1 I. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610911
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Aufgabe 2 - V610912
Wieviel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Aufgabe 3 - V610913



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p·cm^{-3}.

Aufgabe 4 - V610914
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 5 - V610915
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

1.2.2 II. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610921
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von $\pm 0{,}5$ s behaftet war?

Aufgabe 2 - V610922
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wieviel Prozent wird er 1965 betragen?

Aufgabe 3 - V610923
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Aufgabe 4 - V610924
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 5 - V610925
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

1.2.3 III. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610931
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade 33 Jahre alt. Wann ist er geboren?

Aufgabe 2 - V610932
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V-V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

Aufgabe 3 - V610933
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 4 - V610934
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren:
Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!

Aufgabe 5 - V610935
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

1.2.4 I. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611011
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Aufgabe 2 - V611012
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$a) \quad \sin x = \sin 69°$$
$$b) \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32°\right) = 1$$
$$c) \quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2$$

Aufgabe 3 - V611013
Peter sagt zu seinem Freund:
"Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis!
Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 - V611014
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47°$ und $\gamma = 55°$.
Berechnen Sie b, c und α!

Aufgabe 5 - V611015
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Aufgabe 5 - V611016
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

1.2.5 II. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611021
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

Aufgabe 2 - V611022
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm \frac{1}{2}^\circ$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

Aufgabe 3 - V611023
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

Aufgabe 4 - V611024
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611025
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

1.2.6 III. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611031
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

Aufgabe 2 - V611032
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?

Aufgabe 3 - V611033
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 75 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Aufgabe 4 - V611034
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611035
Unter der Zahl $n!$, gelesen "n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

1.2.7 II. Stufe V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611121
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

Aufgabe 2 - V611122
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

Aufgabe 3 - V611123
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.

Aufgabe 4 - V611124
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611125

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

1.2.8 III. Stufe V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611131

Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

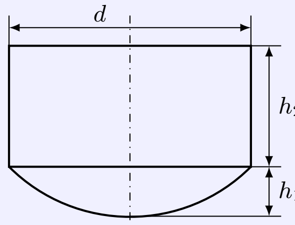
	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Aufgabe 2 - V611132



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

Aufgabe 3 - V611133

Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

Aufgabe 4 - V611134

Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke. Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 5 - V611135

Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist? b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

1.2.9 II. Stufe V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611221
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 2 - V611222
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Aufgabe 3 - V611223
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

Aufgabe 4 - V611224
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60○ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 5 - V611225
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

1.2.10 III. Stufe V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611231
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

Aufgabe 2 - V611232
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Aufgabe 3 - V611233
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Aufgabe 4 - V611234
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?

Aufgabe 5 - V611235
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder Schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

2 Vorolympiaden

2.1 Vorolympiade 1960, Klasse 9

2.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

Aufgabe 1 - V600901
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

x und y seien die zwei gesuchten Zahlen. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 20 \quad (1) \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = 202 \qquad (2)$$

Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt

$$x^2 + (20 - x)^2 = 202 \Rightarrow 2x^2 - 40x + 198 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 99 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $x_1 = 9$ und $x_2 = 11$ mit $y_1 = 11$ und $y_2 = 9$.
Die gesuchten Zahlen sind 9 und 11. Sie erfüllen die Bedingungen der Aufgabenstellung, wie die Probe bestätigt.

Aufgabe 2 - V600902
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel der Normalform der quadratischen Gleichung mit den Parametern p und q:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + px + q \\
0 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q \\
0 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 - V600903
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

x sei die Länge der Lotosblume. Dann gilt $x^2 = (x - 4)^2 + 16^2$ mit $x = 34$. Da die Lotosblume 4 m aus dem Teich hervorragt, ist der Teich 30 m tief.

Übernommen von [6]

Aufgabe 4 - V600904
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{cccccccccc} 270 = & 1\cdot 2^8 & +0\cdot 2^7 & +0\cdot 2^6 & +0\cdot 2^5 & +0\cdot 2^4 & +1\cdot 2^3 & +1\cdot 2^2 & +1\cdot 2^1 & +0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & L & 0 & 0 & 0 & 0 & L & L & L & 0 \end{array}$$

Lösung: $413 = [110011101]_2$

Aufgabe 5 - V600905
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Es sei x der Werte Stromstärke I und y der Wert des Widerstandes. Dann wird mit der Gleichung zum Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$

$$xy = 120 \tag{I}$$
$$(y+10)(x-1) = 120 \tag{2}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = 4$ und $y = 30$, d.h. die Stromstärke beträgt 4 Ampere und der Widerstand 30 Ohm.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 6 - V600906
Wie tief taucht ein Würfel ($a = 30$ mm) aus Eisen ($\gamma_{\text{Fe}} = 7{,}5$ p$\cdot$cm^{-3}) in Quecksilber ($\gamma_{\text{Hg}} = 13{,}6$ p$\cdot$cm^{-3}) ein?

Es gilt für die Eintauchtiefe h des Körpers

$$\gamma_1 : \gamma_2 = h_{\text{Eintauchtiefe}} : h_{\text{Körper}}$$

Einsetzen der Werte ergibt $h_{\text{Eintauchtiefe}} \approx 16{,}54$, d.h. der Würfel taucht etwa 165 mm ein.

Übernommen von [6]

Aufgabe 7 - V600907
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

Die gesuchte Zahl z sei $z = 10a + b$. Dann wird für die Ziffern a und b

$$a + 5 = 12 \tag{I}$$
$$(10a+5) - (10b+a) = 54 \tag{II}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $a = 9$ und $b = 3$. Da $93 - 39 = 54$ die Probe besteht, ist 93 die gesuchte Zahl.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 8 - V600908
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Die Gleichung wird, da $c > 0$ sein muss, zu

$$(10a + c) \cdot a \cdot c = 100c + 10c + c$$
$$(10a + c) \cdot a = 111 = 3 \cdot 37$$

Da $a10$ ist, muss somit $a = 3$ sein. Damit ergibt sich $c = 7$. Es ergibt sich somit $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

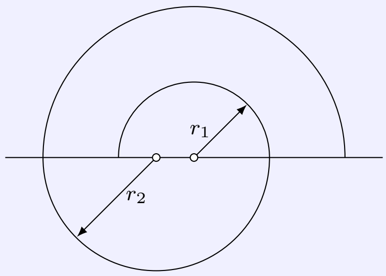
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 9 - V600909
Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Zeigt der 1.Würfel eine "1", so kann der zweite 6 Werte anzeigen, zeigt der 1.Würfel eine "2" verbleiben für den zweiten noch 5 Werte, usw. Damit gibt es bei 2 Würfeln genau 21 verschieden Würfe.
Bei drei Würfeln ergeben sich analog 56 verschiedene Würfe.

Übernommen von [6]

Aufgabe 10 - V600910



Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?

a) Es wird $r_{10} = 1 + 9 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$. Der 10.Radius ist 5,5 cm groß.

b) $(r_1 + r_2 + ... + r_{10}) \cdot \pi \approx 102{,}1$ cm.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 11 - V600911
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a?
Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Die Kugel ist für den Würfel die sogenannte Umkugel, bei der die Würfelpunkte auf der Kugel liegen. Damit ist der Radius r_u gleich der halben Länge der Raumdiagonale des Würfels, d.h.

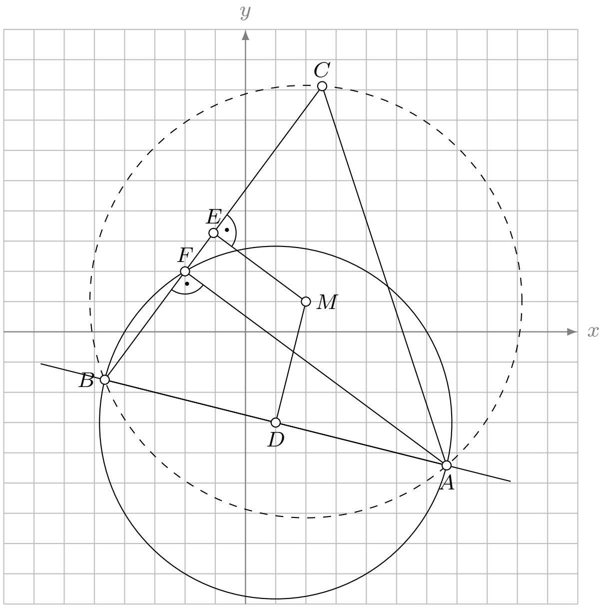
$$\frac{\sqrt{3a^2}}{2} = r_u = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Der Durchmesser der Inkugel ist gleich der Kantenlänge des Würfels, d.h.

$$r_i = \frac{a}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 12 - V600912
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2;+2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1;-3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2;+1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm $\cong$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

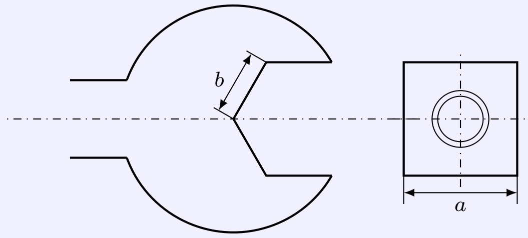


Konstruktion:
(1) Zeichne die Punkte D, F, M in ein Koordinatensystem ein.
(2) Der Höhenfußpunkt F liegt dann auf dem Thaleskreis über AB, d.h. einem Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius gleich DF. Zeichne diesen Kreis.
(3) Der Umkreismittelpunkt M liegt auf der Mittelsenkrechten von AB. Zeichne DM und konstruiere dazu eine Senkrechte s.
(4) Diese Senkrechte s schneidet den Thaleskreis über AB in den Punkten A und B. Konstruiere A und B.
(5) Verbinde A mit dem Höhenfußpunkt F und konstruiere zu AF eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke BC. Da M auf der Mittelsenkrechten von BC liegt, erhält man den Mittelpunkt E der Strecke BC indem man das Lot von M auf die Senkrechte durch F fällt. Der Lotfußpunkt ist E.
(6) Der Punkt C ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von B an E.

Dreiecksseiten: $c = 11{,}7$ cm, $a = 12{,}3$ cm, $b = 13{,}3$ cm

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 13 - V600913



Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?

b ist die Länge der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich a ist und dessen Basiswinkel 30° sind (Sechseck!). Damit wird

$$\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{a}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 14 - V600914
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Die kleinste Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse. Mit den gewöhnlichen Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck gilt daher:

$$ch = ab$$
$$h = \frac{ab}{c}$$

Für den Inkreisradius gilt

$$(a+b+c)r = ab$$
$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Wir untersuchen zunächst die "rechteÜngleichung der Aufgabenstellung. Es soll gelten:

$$\frac{c}{a+b+c} < \tfrac{1}{2}$$
$$c < \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$$
$$2c < a+b+c$$
$$c < a+b$$

Dies ist die Dreiecksungleichung, womit diese Ungleichung erfüllt ist. Die "linkeÜngleichung lautet:

$$\tfrac{2}{5} < \frac{c}{a+b+c}$$
$$\tfrac{2}{5}(a+b) < \tfrac{3}{5}c$$
$$2(a+b) < 3\sqrt{a^2+b^2}$$

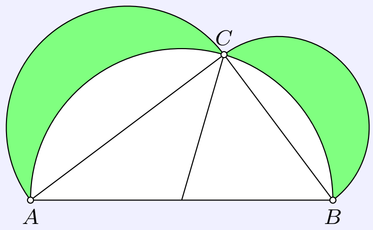
Beide Seiten quadrieren:

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 < 9a^2 + 9b^2$$
$$0 < 5a^2 - 8ab + 5b^2$$
$$0 < a^2 + 4(a-b)^2 + b^2$$

Da rechts nur positive Terme stehen, ist auch diese Ungleichung immer gültig. q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 15 - V600915



Beweisen Sie folgenden Satz:
"Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC." (Hippokrates, 440 v.d.Zw. in Athen).

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &: \text{ Flächeninhalt des Dreiecks } ABC, \\ A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} &: \text{ Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } b = \left|\overline{AC}\right|, \\ A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} &: \text{ Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } a = \left|\overline{BC}\right|, \\ A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} &: \text{ Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse } c = \left|\overline{AB}\right|, \\ A_{\text{grün}} &: \text{ Flächeninhalt der grün markierten Mondsichel.} \end{aligned}$$

Es gilt

$$A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} + A_{\text{grün}}. \quad (1)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und somit

$$A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}}.$$

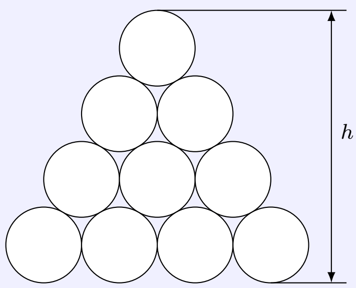
Damit folgt aus (1)

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{grün}},$$

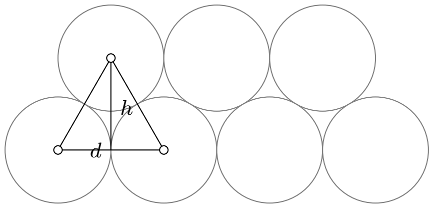
was die Behauptung beweist.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 16 - V600916



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?



Die Mittelpunkte der Grundkreise der untersten Lage liegen $\frac{d}{2}$ über der Grundfläche. Die zweite Lage Kreise befinden sich $\frac{d}{2}+h$ über dem Boden, wobei die Höhe h die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge d ist. Damit ergibt sich für die Gesamthöhe

$$\frac{d}{2}+3\cdot h+\frac{d}{2}=d+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}d\approx 187\text{ cm}$$

Allgemein gilt für n Schichten Fässer mit einem Durchmesser d für die Gesamthöhe H

$$H=d+\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot d\cdot\sqrt{3}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 17 - V600917
In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

Es seien $d_a=32$ mm, $d_i=29$ mm, $l=3$ m die Maße der ursprünglichen Rohre und $d'_a=27$ mm, $d'_i=25$ mm, $l'=x$ m der gezogenen Rohre. Da das Volumen der Rohre konstant bleibt, gilt

$$\left(\frac{\pi}{4}d_a^2-\frac{\pi}{4}d_i^2\right)\cdot l=V=\left(\frac{\pi}{4}{d'}_a^2-\frac{\pi}{4}{d'}_i^2\right)\cdot x$$
$$(d_a^2-d_i^2)\cdot l=({d'}_a^2-{d'}_i^2)\cdot x$$
$$x=\frac{d_a^2-d_i^2}{{d'}_a^2-{d'}_i^2}\cdot l$$

Einsetzen der Werte ergibt $x\approx 5{,}28$ m.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2.2 Vorolympiade 1960, Klasse 10

2.2.1 Wettbewerb V1960, Klasse 10

Aufgabe 1 - V601001
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

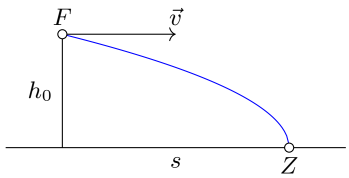
Wir bezeichnen die zweistellige Zahl mit a. Wegen der zweiten Bedingung, dass $5a - 9 < 100$ sein muss, muss $a < 22$ gelten. Daher ist der gesuchte Kandidat 18, da

$$5 \cdot 18 - 9 = 90 - 9 = 81$$

ist, somit die zweite Bedingung erfüllt ist und 18 als Quersumme 9 besitzt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - V601002
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss der Verpflegungskanister ausgelöst werden, damit er sein Ziel erreicht? (g = 10 m/s^2)



Der Kanister muss in der Entfernung s vom Zielpunkt abgeworfen werden, da er längs der Bahn eines waagerechten Wurfs den Zielpunkt erreicht. Für einen waagerechten Wurf gilt:

$$s = v_0 \cdot t \qquad ; \qquad h = h_0 - \frac{g}{2}t^2$$

wobei v_0 die Flugzeuggeschwindigkeit, h_0 die Abwurfhöhe und t die Wurfzeit ist. Der Boden wird für $h = 0$ erreicht, so dass sich ergibt

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad ; \qquad s = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte ergibt $s \approx 278$ m.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - V601003
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Die beiden gesuchten Summanden bezeichnen wir mit a und b. Die beiden Bedingungen lauten

$$a + b = 900, \tag{1}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{221}. \tag{2}$$

(2) lässt sich zu

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{900}{ab} = \frac{1}{221}$$

umschreiben, sodass

$$ab = 900 \cdot 221 = 198900$$

gilt. Mit $a = 900 - b$ aus (1) folgt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 198900 \\ (900 - b) \cdot b &= 198900 \\ b^2 - 900 \cdot b &= -198900 \\ b^2 - 900 \cdot b + 450^2 &= 450^2 - 198900 \\ (b - 450)^2 &= 3600 \end{aligned}$$

und somit die Möglichkeiten $b_1 = 390$ und $b_2 = 510$. Somit lauten die beiden Summanden - unter Beachtung der Kommutativität der Addition - dementsprechend 390 und 510.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V601004
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Wir können (1) umschreiben zu

$$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = 2^{22},$$

sodass wir das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 22, \tag{3}$$
$$x - y = 4 \tag{4}$$

lösen müssen. Aus (4) folgt $x = y + 4$ und setzen wir dieses Ergebnis in (3) ein, so ergibt sich

$$x + y = (y + 4) + y = 2y + 4 = 22$$

und somit $y = 9$ und daher $x = 13$.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V601005
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

"Sie heißt III Z ... Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Die erste Ziffer sei y, die drei letzten Ziffern: $3x$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + 3x &= 22 \\ (1000y + 100x + 10x + x) - 1998 &= 1000x + 100x + 10x + y \end{aligned}$$

Dieses System hat die Lösung $x = 5$ und $y = 7$. Die Autonummer heißt folglich III Z 7555.

Übernommen von [6]

Aufgabe 6 - V601006
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vorn streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

x sei die Zahl ohne die Anfangsziffer 7. Dann wird

$$7 \cdot 10^n + x = 3(10x + 7)$$
$$7 \cdot 10^n + x = 30x + 21$$
$$7 \cdot 10^n - 21 = 29x$$
$$7(10^n - 3) = 29x$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muss $10^n - 3$ die Zahl 29 als Teiler besitzen.

1. Lösung:
Setze $r_0 = -2$ und $r_{n+1} = 10r_n - 2 \bmod 29$, so gilt $r_n \equiv 10^n - 3 \pmod{29}$.
Durch systematisches Berechnen der Folgenglieder erhält man für $n = 1,2,...$
-22, -19, -18, -8, -24, -10, -15, -7, -14, -26, -1, -12, -6, -4, -13, -16, -17, -27, -11, -25, -20, -28 -21, -9, -5, -23, 0
Damit ist $10^{27} - 3$ ein Vielfaches von 29. Die gesuchte Zahl ist somit

$$7 \cdot 10^{27} + \frac{7 \cdot 10^{27} - 3}{29} = \frac{3}{29}(7 \cdot 10^{28} - 1)$$

Aufgabe gelöst von ochen

2. Lösung:
Setze $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 10a_n \mod 29$. Dann ergibt sich

$a_0,a_1,a_2,...,a_{28} = 1,10,13,14,24,8,22,17,25,18,6,2,20,26,28,19,16,15,5,21,7,12,4,11,23,27,9,3,1$

Danach wiederholt es sich periodisch. Das kleinste n mit $a_n = 3$ (und daher $10^n - 3 \equiv 0 \mod 29$) ist $n = 27$. Somit ist $\frac{7}{29}(10^{27} - 3)$ die gesuchte Zahl x und die kleinste Zahl aus der Aufgabenstellung $\frac{210 \cdot 10^{27} - 3}{29}$.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

3. Lösung:
Gesucht ist das kleinste n, so dass $10^n \equiv 3 \pmod{29}$. Schreibt man n in der Form $n = 6m + r$ mit $0 \leq r < 6$ (Bemerkung: $6 = \lceil\sqrt{29}\rceil$), so erhält man $10^{6m} 10^r \equiv 3 \pmod{29}$.

Wegen $10 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{29}$ und $3^6 \equiv 27^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod{29}$ suchen wir also das lexikographisch kleinste Paar (m,r) für das $10^r \equiv 3 \cdot 4^m \pmod{29}$ gilt.

Für $r = 0,1,2,3,4,5$ gilt $10^r \equiv 1,10,13,14,8,22 \pmod{29}$. Jetzt berechnen wir $3 \cdot 4^m$ modulo 29 für $m = 0,1,2,\ldots$, bis wir einen Rest aus der gerade berechneten Liste erhalten: $3 \cdot 4^m \equiv 3, 12,19,18,14 \pmod{29}$ für $m = 0,1,2,3,4$. Also ist $(m,r) = (4,3)$, d.h. $n = 6 \cdot 4 + 3 = 27$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

4. Lösung:
Mit heutigem(!) Computereinsatz kann das kleinste n gesucht werden, so dass $10^n - 3$ ein Vielfaches von 29 ist. Es ist 999999999999999999999999997.
Als Gesamtergebnis ergibt sich als kleinste, gesuchte Zahl $z = 7241379310344827586206896551$. Die Probe bestätigt das Ergebnis.
Anmerkung: 1961 war dieser Weg nicht möglich und folglich nicht im Sinne der Aufgabensteller.

Aufgabe gelöst Steffen Polster

Aufgabe 7 - V601007
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Die gesuchte Zahl z hat die Form $z = 10x + 1$, wobei x die Restzahl nach dem Streichen der 1 am Ende ist. Dann wird

$$z = 10x + 1 = 3 \cdot (100000 + x) \quad \Rightarrow \quad x = 42857$$

Die gesuchten Zahlen sind somit 428571 und 142857. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

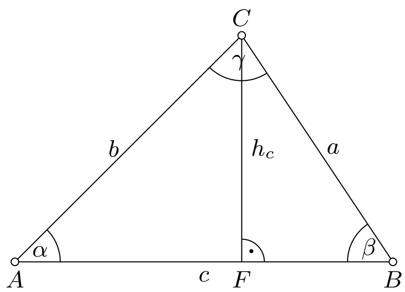
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 8 - V601008
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

Das Volumen einer Halbkugel ergibt sich zu $V_H = \frac{4}{6}\pi r^3$. Mit $V_H = 1$ dm^3 wird $r = \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}} = 0{,}78$ dm. Der innere Durchmesser der Schöpfkelle muss 15,6 cm groß sein.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 9 - V601009
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!



In den rechtwinkligen Dreiecken AFC und BFC gilt zum einen $h_c = a \sin\alpha$, zum anderen $h_c = b \sin\beta$. Für den Flächeninhalt F wird mit dem Einsetzen der zwei Gleichungen

$$F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \frac{h_c}{\sin\alpha} \frac{h_c}{\sin\beta} \sin\gamma$$

Auflösen der Gleichung nach h_c ergibt die gesuchte Beziehung

$$h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

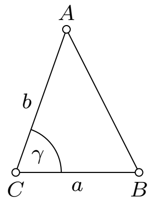
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 10 - V601010
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Der Nagel weist den besten Halt auf, der den ihn umgebenden Werkstoff in einer größeren Fläche berührt. Bei gleicher Fläche (von 1 cm^2) hat ein Dreieck den größten Umfang, vor dem Quadrat und dem Kreis. Folglich hat der Dreiecknagel den besten Halt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 11 - V601011
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?



Der Punkt, von dem die beiden Stollen ausgehen und in einer Ebene liegen, soll mit C bezeichnet werden. Die beiden Stollenlängen sind $a = 162{,}5\text{m}$ und $b = 200\text{m}$. Der Winkel, der von den beiden Stollenlängen a und b am Punkt C eingeschlossen wird, wird $\gamma = 70{,}5°$ genannt. Die gesuchte Stollenlänge nennen wir c.

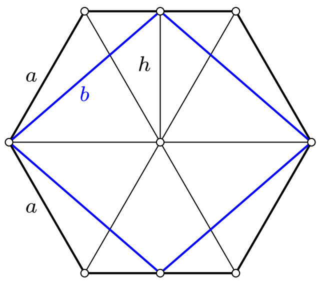
Da im Dreieck die zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel gegeben sind, folgt die eindeutige Konstruierbarkeit bis auf Kongruenz aus den Kongruenzsätzen.
Mit dem Kosinus-Satz gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \\ &= (162{,}5\text{m})^2 + (200\text{m})^2 - 2 \cdot (162{,}5\text{m}) \cdot (200\text{m}) \cdot \cos(70{,}5°) \\ &\approx 44708{,}8\text{m}^2 \end{aligned}$$

und damit $c \approx 211{,}4\text{m}$. Somit wird der Verbindungsstollen ungefähr 211,4m lang.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 12 - V601012
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?



a) Es ist

$$b = \sqrt{a^2 + h^2}$$

wobei $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ist, und daher:

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

Der Umfang des Rhombus ist somit:

$$U_R = 4b = 2\sqrt{7}\,a$$

Die Fläche des Rhombus lautet:

$$A_R = 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 2ah = \sqrt{3}\,a^2$$

b) Die Fläche des Sechsecks lautet:

$$A_S = 6 \cdot \frac{1}{2}ah = 3ah$$

Die Fläche des Rhombus ist daher zwei Drittel des Flächeninhalts des Sechsecks, und daher gerundet 66,7%.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 13 - V601013
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Mittels Induktion lässt sich für die Anzahl d der Diagonalen eines n-Ecks zeigen:

$$d(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$$

Der Induktionsanfang ist für $n = 3$ gegeben, da $d(3) = 0$ ist und ein Dreieck keine Diagonale besitzt.
Ist für ein $(n-1)$-Eck $d(n-1) = \frac{n-1}{2} \cdot (n-4)$, so wird für das $(n+1)$-Eck: In dieses zeichnet man eine Diagonale von einem beliebigen Eckpunkt zu einem übernächsten Eckpunkt, also so, dass ein Dreieck und ein $(n-1)$-Eck entsteht.
Das Dreieck hat keine und das $(n-1)$-Eck hat $d(n-1)$ Diagonalen (Induktionsvoraussetzung).

Außerdem muss man noch die Diagonalen von der Ecke des Dreiecks, die nicht eine Ecke des $(n-1)$-Ecks ist, zu allen Ecken des $(n-1)$-Ecks, die nicht Eckpunkt des Dreiecks sind, zählen - und nicht zu vergessen die eine Diagonale, mit der das Dreieck abgeteilt wurde. Folgt:

$$\begin{aligned} d(n) &= d(n-1) + (n-3) + 1 = \frac{n-1}{2} \cdot (n-4) + (n-3) + 1 = \\ &= (n-1) \cdot \frac{n-4}{2} + n - 2 = \frac{n^2 - 5n + 4}{2} + n - 2 = \\ &= \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n}{2}(n-3) \qquad \text{qed} \end{aligned}$$

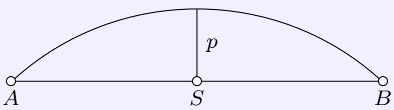
Setzt man $n = 4775$ ein, so ergeben sich für das 4775-Eck genau 11393150 Diagonalen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Anmerkung:
Für den Nachweis der Formel kommt man auch ohne Induktion aus:
Von jeder der $n = 4775$ Ecken lässt sich zu $n-3$ anderen Ecken eine Diagonale zeichnen. Bei $n \cdot (n-3)$ wird aber jede Diagonale doppelt gezählt. Folglich gibt es $\frac{1}{2} n \cdot (n-3)$ Diagonalen.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 14 - V601014



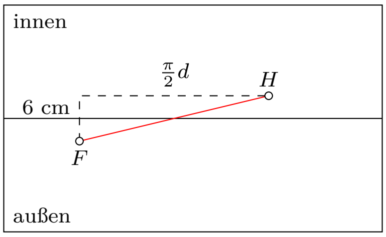
Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s;p)$?

Es sei M der Kreismittelpunkt. Dann bildet MSA ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten AS und MS und der Hypotenuse AM.
Die Seitenlängen sind $\frac{s}{2}$, $r-p$ und r. Nach Pythagoras gilt $(\frac{s}{2})^2 + (r-p)^2 = r^2$. Diese Gleichung nach r aufgelöst ergibt

$$r = r(s,p) = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2}$$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 15 - V601015
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.
Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.



Die Fliege muss sowohl den Rand des Zylinders überklettern, als auch den halben Umfang des Zylinders überwinden. Breitet man äußere Mantelfläche und innere Mantelfläche in der Ebene aus, so erkennt man, dass der kürzeste Weg die eingezeichnete Gerade von der Fliege F zum Honig H ist.

Für das entstehende rechtwinklige Dreieck wird die Hypotenuse (Weglänge) gleich $\sqrt{6^2 + \left(\frac{\pi}{2}d\right)^2}$.
Für die konkreten Maße muss die Fliege $d \approx 16{,}8$ cm Weg zurücklegen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 16 - V601016
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

Radius des kleinsten Kreises ist nach b) $r = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_1, r_2, r_3 und r_4. Es ist gefordert, dass

$$\begin{aligned} F_1 &= \pi r^2 \\ &= F_2 = \pi(r_1^2 - r^2) \\ &= F_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \\ &= F_4 = \pi(r_3^2 - r_2^2) \\ &= F_5 = \pi(r_4^2 - r_3^2) \end{aligned}$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r^2 = \pi(r_1^2 - r^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

$$\begin{aligned} r^2 = r_1^2 - r^2 &\Rightarrow 2r^2 = r_1^2 \Rightarrow r_1 = r\sqrt{2} \\ r_1^2 - r^2 = r_2^2 - r_1^2 &\Rightarrow 2r_1^2 - r^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r\sqrt{3} \\ r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 &\Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r\sqrt{4} \\ r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 &\Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r\sqrt{5} \end{aligned}$$

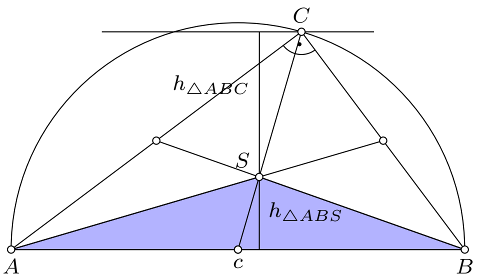
Die Kreise haben folgende Radien: $r = 2$ cm, $r_1 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_3 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_4 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Übernommen von [6]

Aufgabe 17 - V601017
Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:
a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck

$$F_1 = 6\frac{2}{3}\ \text{cm}^3$$

b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.



Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.
Aus $F = \frac{gh}{2}$ folgt $h = \frac{2F}{g}$ und damit für das Dreieck ABS:

$$h_{\triangle ABS} = \frac{4}{3}$$

Auch die Höhenabschnitte verhalten sich wie 1:2, daraus folgt:

$$h_{\triangle ABC} = 3h_{\triangle ABS} = 4 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad F_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

Aus den Verbindungslinien des Schwerpunkts S mit den Dreieckspunkten A, B und C entstehen somit drei flächengleiche Teildreiecke.
Aus c und h ergeben sich dann die Katheten mittels Höhensatz und Satz des Pythagoras zu $a = 8{,}94$ cm sowie $b = 4{,}47$ cm.

Übernommen von [6]

2.3 Vorolympiade 1960, Klasse 11

2.3.1 Wettbewerb V1960, Klasse 11

Aufgabe 1 - V601101
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^2 + z^3 = 2xyz$$

Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass das arithmetische Mittel A dreier nicht negativer reeller Zahlen a, b, c nie kleiner als das geometrische Mittel G dieser Zahlen ist, d.h. es ist

$$A = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = G \tag{1}$$

Setzt man: $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$, so folgt aus (1), dass

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} \qquad \text{d.h.}$$
$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

ist. Da weiter wegen $x > 0, y > 0, z > 0$

$$3xyz > 2xyz$$

ist, gilt stets

$$x^3 + y^3 + z^3 > 2xyz$$

und daher gibt es kein Tripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen von [2]

Aufgabe 2 - V601102
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^2}$$

Für $x = 0$ entsteht ein unbestimmter Term $\frac{0}{0}$. Nach der Regel von l'Hospital ist der Grenzwert in diesem Fall von

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweimaliges Ableiten von Nenner und Zähler (keine Quotientenregel !) ergibt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 36(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)\cos 3x - \\ &\quad - 3(3x^6 - 18x^5 + 35x^4 - 20x^3 - 15x^2 + 22x - 10)\sin 3x \\ g''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Wert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -6$$

als Grenzwert des anfänglichen Ausdrucks.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - V601103
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

Die erste Lage Papier hat eine Länge πd mit $d = 150$ mm. Mit jeder Lage wächst der Durchmesser um 0,2 mm. Damit wird für die Gesamtlänge des Papiers von 500000 mm bei n Lagen Papier

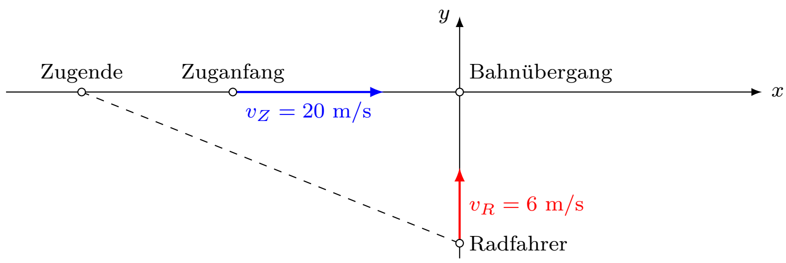
$$\begin{aligned} 500000 &= \pi d + \pi(d + 0{,}2) + \pi(d + 2 \cdot 0{,}2) + ... + \pi(d + (n-1) \cdot 0{,}2) \\ &= \pi(n \cdot d + 0{,}2 + 0{,}4 + ...(n-1) \cdot 0{,}2) \\ &= \pi \left(n \cdot d + 0{,}2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $n_1 \approx 717{,}91$ und $n_2 \approx -2216{,}91$, wobei n_2, da kleiner 0, entfällt.
Auf der Rolle befinden sich am Ende 718 Lagen Papier. Die Rolle hat dann einen Durchmesser von $150 + 717 \cdot 0{,}2 = 293{,}4$ mm, also von 29,34 cm.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - V601104
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 $km \cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m \cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Unter der Annahme, dass der Bahnübergang senkrecht zur Bahnstrecke erfolgt, betrachten wir ein Koordinatensystem, bei dem sich der Bahnübergang im Koordinatenursprung befindet und der Zug sich längs der x-Achse bewegt, der Radfahrer längs der y-Achse.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ s ist der Radfahrer 100 m vom Übergang entfernt, das Zugende (= Zugentfernung + Zuglänge) 240 m. Der Ort des Zugendes wird mit den Koordinaten $(240 + 20 \cdot t)$ beschrieben, wobei t in Sekunden gemessen wird. Die Geschwindigkeit des Zuges ist 72 km/h = 20 m/s.
Der Ort des Radfahrers ist analog $(0, 6 \cdot t - 100)$.

Die Entfernung des Radfahrers zum Zugende ist

$$d = \sqrt{(240 + 20 \cdot t)^2 + (6 \cdot t - 100)^2}$$

Die Entfernung d wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Der Radikand wird durch

$$f(t) = 4(109t^2 - 2700t + 16900)$$

beschrieben. Die 1. Ableitung ist $f'(t) = 8(109t - 1350)$ mit der Nullstelle bei $t_1 = \frac{1350}{109} \approx 12{,}39$. Da der Radikand eine quadratische Funktion mit einem positiven Faktor des quadratischen Gliedes ist, ist t_1 der Zeitpunkt des kürzesten Abstandes zwischen Zugende und Fahrradfahrer. Nach 12,39 s ist der Abstand minimal.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - V601105
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Es gilt

$$f(x) = x \cdot x^{\frac{6}{25}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{31}{25}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Differentiation liefert

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{31}{25} \cdot x^{\frac{6}{25}} + \frac{1}{5 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{4}{5}}} \cdot \left\{ \frac{1}{1-x} + (1+x) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right\} \\ &= \frac{31}{25} \cdot x^{\frac{6}{25}} + \frac{2}{5 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot (1-x)^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von svrc

2. Lösung:
Zuerst werden beide Summanden einzeln betrachtet. Für den ersten Summanden wird

$$x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} = x \cdot \sqrt[5]{x^{\frac{6}{5}}} = x^{\frac{31}{25}}$$

mit der Ableitung

$$(x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}})' = \frac{31}{25} x^{\frac{6}{25}} = \frac{31}{25} \sqrt[25]{x^6}$$

Die innere Ableitung der zweiten Summanden ist $\frac{2}{(1-x)^2}$. Es wird

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{5} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

Umformungen ergeben

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} &= \frac{2}{5} \sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{5} \sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4} \frac{1}{(1-x)^{10}}} = \frac{2}{5} \sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4 (1-x)^6}} \\ &= \frac{2}{5(1-x)} \sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)}} = \frac{2}{5(1-x)} \sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1+x)^5(1-x)}} \\ &= \frac{2}{5(1-x)(1+x)} \sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}} \end{aligned}$$

Der gesuchte Ableitungsterm ist damit

$$y' = \frac{31}{25} \sqrt[25]{x^6} + \frac{2}{5(1-x)(1+x)} \sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 6 - V601106
Gibt es einen Winkel ϵ, für den die Gleichung gilt:

$$\sin\epsilon \cdot \cos\epsilon = 1 \tag{1}$$

Mit dem Additionstheorem $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ wird aus (1)

$$\sin \epsilon \cdot \cos \epsilon = \frac{1}{2} \sin 2\epsilon = 1$$
$$\sin 2\epsilon = 2$$

Da der Funktionswertebereich der Sinusfunktion $[-1; 1]$ hat diese Gleichung keine reelle Lösung. Es gibt keinen Winkel ϵ, der (1) erfüllt.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 7 - V601107 = V601215
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3) \tag{1}$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D.h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

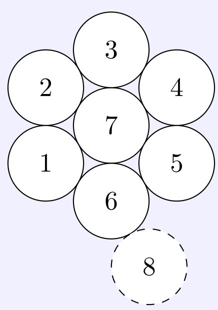
$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 8 - V601108

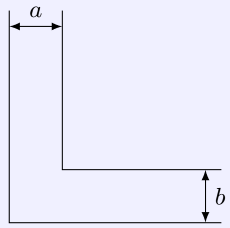


In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?

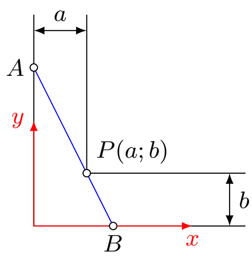
Der 8. Kreis rollt auf einem Kreis solange bis er mit seiner Peripherie den nächsten Kreis berührt. Die Mittelpunkte der zwei berührten Kreise und der Mittelpunkt des achten Kreises bilden dann ein gleichseitiges Dreieck, mit den Innenwinkeln von 60°.
Damit rollt der achte Kreis, z.B. auf dem sechsten, genau 120°, d.h. $\frac{2}{3}$ des Kreisumfangs.
Bei 6 Kreisen ergibt dies insgesamt $6 \cdot \frac{2}{3}u = 4u$. Damit führt der 8. Kreis genau 4 Umdrehungen aus.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 9 - V601109



Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden. Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)



Wir führen ein Koordinatensystem derart ein, dass die äußere Ecke im Ursprung liegt und die x- und y-Achse längs der Gänge ausgerichtet sind. (siehe Abbildung)
Durch den Punkt $P(a;b)$ legen wir dann eine lineare Funktion so, dass diese sowohl die positive x-Achse in B, also auch die positive y-Achse in A schneidet. Die minimale Strecke AB ist dann die gesuchte größte Länge der Stange.

Für die Funktion durch A und B ergibt sich (mit $m > 0$)

$$y = -m(x-a) + b$$

Die Punkte haben damit die Koordinaten $A(0; am+b)$ und $B\left(\frac{b}{m}+a\right)$. Die Länge der Stange von A nach B ist dann

$$d = \sqrt{\left(\frac{b}{m}+a\right)^2 + (am+b)^2} \tag{1}$$

Diese Länge wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Die 1.Ableitung des Radikanden ist

$$d'(m) = \frac{2}{m^2}(am+b)(am^3-b)$$

Diese Ableitung hat eine Nullstelle für $m = -\frac{b}{a}$, die entfällt da dann A und B zusammenfallen. Die zweite Nullstelle für

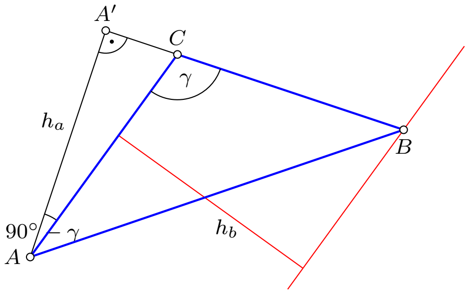
$$m = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} \tag{2}$$

ergibt das gesuchte Minimum, wie die Kontrolle über die 2.Ableitung zeigt. Für die größtmögliche Länge der Stange ergibt sich durch Einsetzen von (2) in (1)

$$d = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 10 - V601110
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\gamma = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!

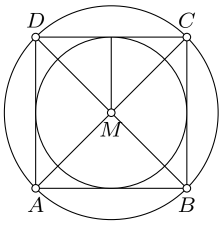


Konstruktion:
1. Zeichne ein Dreieck $AA'C$ mit $AA' = h_a$, $\angle CAA' = 90° - \gamma$ und $\angle AA'C = 90°$.
2. Verlängere die Strecke $A'C$ über C hinaus.
3. Führe eine Parallelverschiebung von AC um die Länge h_b durch.
4. Der Schnittpunkt der verschobenen Geraden und der Verlängerung von $A'C$ ist der Punkt B.

Analyse:
1. Das Dreieck ABC ist ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\gamma > 90°$. Damit liegt der Höhenfußpunkt A' der Höhe h_a außerhalb der Strecke BC.
Das Dreieck ACA' ist nach Kongruenzsatz sww direkt konstruierbar, wobei der Winkel bei A nach dem Außenwinkelsatz gleich $\gamma - 90°$ ist. (siehe Abbildung)
2. Der Punkt B liegt auf der Verlängerung von CA' und einer Parallelen zu AC mit dem Abstand h_b zu AC.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 11 - V601111
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie groß ist die Summe aller Quadrate?



Der äußere Kreis habe den Radius $r_0 = r$. Das Quadrat $ABCD$ habe die Kantenlänge $a0 = a$. Seine Diagonale d_0 hat nach dem Satz Pythagoras die Länge $d_0 = a_0\sqrt{2}$. Die Diagonale ist aber auch gleich zweimal der Radius r_0:

$$d_0 = a_0\sqrt{2} = 2r_0 \to a_0 = r_0\sqrt{2}$$

Allgemein gilt:

$$a_i = r_i\sqrt{2}$$

Die Kantenlänge a_0 des Quadrats ist identisch mit dem halben Radius r_1 des inneren Kreises $a_0 = 2r_1$, bzw. allgemein:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$$

Die rekursive Formel für die Radien der Kreise lautet demnach:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1} = r_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow r_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

Für die Kantenlängen gilt das gleiche:

$$a_i = ri\sqrt{2} = a_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow a_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

a) Die Summe der Flächeninhalte aller Kreise ist (eine geometrische Reihe)

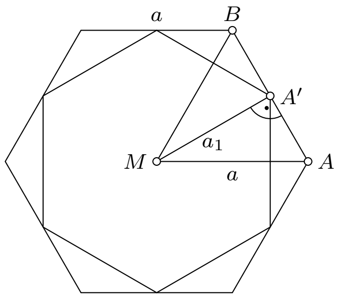
$$\sum A_K = \sum \pi r^2 = \pi \sum_{i=0}^{\infty} \left(r_0 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i \right)^2 = \pi r_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = \pi r_0^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r^2$$

b) die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate

$$\sum A_Q = \sum a_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_0 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i \right)^2 = a_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = 2a_0^2 = 4r^2$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 12 - V601112
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.
Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.
a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 mm liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?
b) Wie groß ist das Volumen?
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?



Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = a_0$ hat einen Flächeninhalt von $F = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$. Damit hat erste sechsseitige Prisma, mit einer Seitenlänge von $a = 10$ cm und einer Höhe von $h = 0{,}1$ mm, das Volumen

$$V_0 = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 \cdot h = \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Das erste aufgeklebte Sechseck hat eine Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 10$ cm (Höhe im gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a). Das Volumen des Prismas wird

$$V_1 = V_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4} V_0$$

Jedes weitere aufgesetzte Prisma hat $\frac{3}{4}$ des Volumens des vorhergehenden Prismas. Für n auf das unterste Prisma aufgesetzte Prismen ergibt sich als Gesamtvolumen mittels Partialsumme einer geometrischen Zahlenfolge

$$V = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i V_0 = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^3 \right\} = 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ cm}^3 \tag{1}$$

a) Das oberste Prisma soll noch mindestens 2 mm Seitenlänge haben. Für das n-te Prisma wird die Seitenlänge

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10 \text{ cm}$$

und damit

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10 \text{ cm} > 0{,}2 \text{ cm}$$

$$n \lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) > \lg 0{,}02$$

$$n < 27{,}1968...$$

Auf das Grundsechseck können weitere 27 Sechsecke aufgesetzt werden. Der Körper wird damit $28 \cdot 0{,}1$ mm = 2,8 cm hoch.

b) Einsetzen von $n = 27$ in (1) ergibt ein Volumen des Körpers von $\approx 10{,}389$ cm^3.

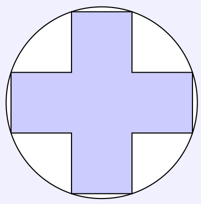
c) Für den Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich bei (1)

$$\lim_{n\to\infty} 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 6\sqrt{3}$$

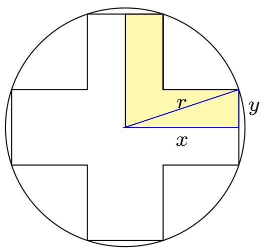
Wäre dem Ausschneiden keine Grenze gesetzt, so wäre der Sechseckturm unendlich hoch und hätte ein Volumen von $V = 6\sqrt{3} \approx 10{,}3923$ cm^3.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 13 - V601113



Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)



Das Spuleninnere setzt sich auf 4 Flächen der Form in der Abbildung zusammen. Eine solche Fläche hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{F_I}{4} = 2x \cdot y - y \cdot y$$

wobei $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gilt (siehe Abbildung). Die Zielfunktion der Fläche des Spuleninneren ist somit

$$F(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2} - (r^2 - x^2) \tag{1}$$

Die 1. Ableitung der Flächenfunktion wird dann

$$F'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x$$

Für die Suche nach dem Maximum der inneren Fläche wird $F'(x)$ gleich 0 gesetzt und die Gleichung gelöst.

$$\begin{aligned}
0 &= 2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} + 2x \\
0 &= 2(r^2-x^2) - 2x^2 + 2x\sqrt{r^2-x^2} \\
x\sqrt{r^2-x^2} &= 2x^2 - r^2 \\
0 &= 5x^4 - 5r^2x^2 + r^4
\end{aligned}$$

Mit $u = x^2$ hat die quadratische Gleichung $0 = 5i^2 - 5r^2u + r^4$ die Lösungen

$$u_1 \approx 0{,}7236r^2 \qquad ; \qquad u_2 \approx 0{,}2764r^2$$

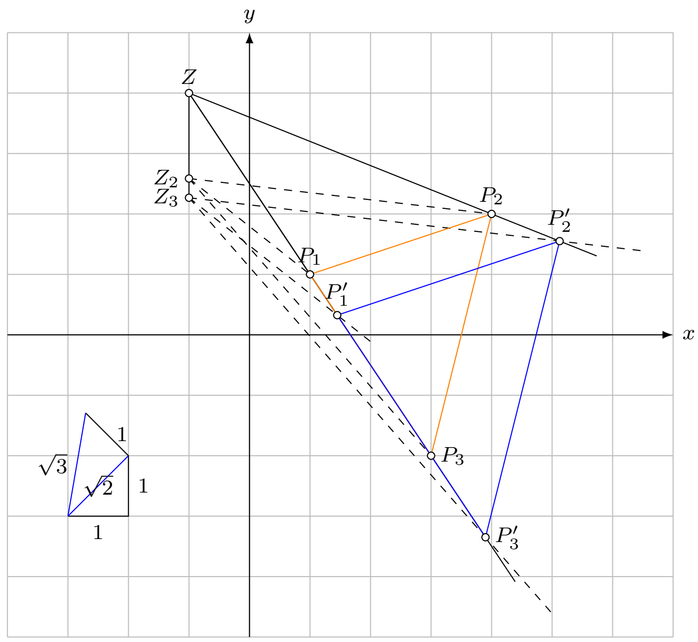
und folglich, da die negativen Lösungen entfallen:

$$x_1 \approx 0{,}8506r; \quad y_1 \approx 0{,}5257r \qquad ; \qquad x_2 \approx 0{,}5257r; \quad y_2 \approx 0{,}8506r$$

Setzt man x_1 in (1) ein, so ergibt sich für die Gesamtfläche des Spuleninneren $F_I \approx 2{,}4721r^2$. Dies entspricht 78,69 % der Kreisfläche πr^2.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 14 - V601114
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3.



Wenn die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$ im Verhältnis 2:3 stehen sollen, so müssen die Seitenlängen im Verhältnis $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ zueinander stehen.

1. In einer Nebenkonstruktion (siehe Abbildung) ermittelt man durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras zwei Strecken der Längen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
2. Von Z trägt man diese Strecken auf einer beliebigen Geraden ab und erhält die Punkte Z_2 und Z_3.
3. Von Z aus werden Strahlen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gezeichnet.
4. P_1, P_2, P_3 werden mittels Geraden mit Z_1 verbunden.
5. Die Parallelverschiebungen dieser Geraden durch Z_2 schneiden die entsprechenden Strahlen durch Z in den gesuchten Punkten P_1', P_2' und P_3'.

Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$\frac{ZZ_1}{ZZ_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{ZP_1}{ZP_1'} = \frac{ZP_2}{ZP_2'} = \frac{ZP_3}{ZP_3'}$$

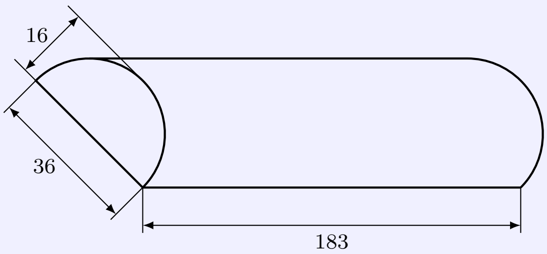
und erneut nach einem Strahlensatz

$$\frac{P_1P_2}{P_1'P_2'} = \frac{P_1P_3}{P_1'P_3'} = \frac{P_2P_2}{P_2'P_3'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}'$$

so dass das Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ das gesuchte Dreieck ist.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 15 - V601115
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

a) Durch die Punkte $P_1(-18;0)$, $P_2(0;16)$ und $P_3(18;0)$ wird eine Parabel gelegt, deren Funktionsgleichung mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ angesetzt wird. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 324a - 18b + c &= 0, \\ c &= 16, \\ 324a + 18b + c &= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $c = 16$. Gleichsetzen der ersten und dritten Gleichung liefert $b = 0$. Es folgt $a = -\frac{4}{81}$. Die Funktionsgleichung der Parabel lautet

$$f(x) = -\frac{4}{81}x^2 + 16.$$

Um die Querschnittsfläche zu berechnen, muss das Integral $\int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-18}^{18} \left\{-\frac{4}{81}x^2 + 16\right\} \mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{243}x^3 + 16x\right]_{-18}^{18} \\ &= -\frac{4}{243}\cdot(18)^3 + 16\cdot 18 - \left(-\frac{4}{243}\cdot(-18)^3 - 16\cdot 18\right) \\ &= 576 - \frac{8}{243}\cdot(18)^3 = 384. \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche der Halle beträgt $384\,\mathrm{m}^2$.

b) Für den Rauminhalt der Halle gilt

$$V = 384\,\mathrm{m}^2 \cdot 183\,\mathrm{m} = 70272\,\mathrm{m}^3$$

und somit 70272 Kubikmeter.

c) Für das Verhältnis gilt

$$\frac{A_{\text{Parabel}}}{A_{\text{Rechteck}}} = \frac{384\,\mathrm{m}^2}{36 \cdot 16\,\mathrm{m}^2} = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 16 - V601116
Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Um die Querschnittsfläche des Grabens zu berechnen, müssen wir zuerst eine Funktionsgleichung einer Parabel ermitteln, welche durch die Punkte $P_1\,(-1{,}5; 0)$, $P_2\,(0, b)$ und $P_3\,(1{,}5; 0)$ verläuft. Wir setzen mit der quadratischen Funktionsgleichung $f(x) = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b} + \widetilde{c}$ an. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2{,}25 \cdot \widetilde{a} - 1{,}5\widetilde{b} + \widetilde{c} &= 0, \\ \widetilde{c} &= b, \\ 2{,}25 \cdot \widetilde{a} + 1{,}5\widetilde{b} + \widetilde{c} &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt $\widetilde{c} = b$ und setzen wir die beiden übrigen Gleichungen gleich, so folgt $\widetilde{b} = 0$. Es bleibt $\widetilde{a} = -\frac{4}{9}b$. Somit lautet die Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{4b}{9}x^2 + b.$$

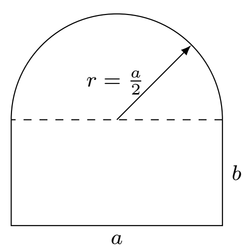
Um die Querschnittsfläche zu bestimmen, muss das Integral $\int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} \left(-\frac{4b}{9}x^2 + b\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{4b}{27}x^3 + bx\right]_{-1{,}5}^{1{,}5} \\ &= -\frac{4b}{27} \cdot (1{,}5)^3 + 1{,}5b + \frac{4b}{27} \cdot (-1{,}5)^3 + 1{,}5b \\ &= 3b - \frac{8b}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3b - b = 2b. \end{aligned}$$

Damit entspricht die Querschnittsfläche gerade dem Doppelten der Tiefe.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 17 - V601117
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis. Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?



a sei die Breite des Kanals, b die Höhe des rechteckigen Teils und $r = \frac{a}{2}$ der Radius des aufgesetzten Halbkreises.
Für den Umfang des Kanals wird dann

$$u = a + 2b + \pi a \quad \rightarrow \quad b = \frac{u - a - \pi a}{2} \tag{1}$$

Der Flächeninhalts des Querschnitts setzt sich aus dem Rechteck und dem Halbkreis zusammen:

$$A = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) und vereinfachen ergibt als Zielfunktion des Flächeninhaltes

$$A(a) = \frac{a \cdot u}{2} - \frac{a^2(3\pi + 4}{8}$$

mit den Ableitungen

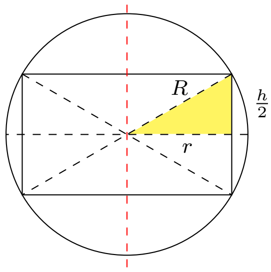
$$A'(a) = \frac{u}{2} - \frac{a(3\pi + 4)}{4} \qquad ; \qquad A''(a) = -\frac{3\pi + 4}{4} < 0$$

Die Nullstelle der 1. Ableitung ist $a = \frac{2u}{3\pi+4}$. Da die zweite Ableitung stets negativ ist, liegt ein lokales Maximum vor.
Für b wird $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$.
Der Kanal muss eine Breite von $a = \frac{2u}{3\pi+4}$ und eine rechteckige Höhe $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$ erhalten, um einen maximalen Flächeninhalt des Querschnitts von $A = \frac{u^2}{6\pi+8}$ zu erreichen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 18 - V601118
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Es sei R der Radius der Kugel, r der Radius des Zylinders und h die Höhe des Zylinders. Um ihren Zusammenhang zu finden legen wir eine Schnittebene durch Kugel und Zylinder, die normal auf die Deck- und Bodenfläche des Zylinder steht und durch den Kugelmittelpunkt geht.



In der Abbildung ist die Drehachse des Zylinders rot dargestellt. Für das rechtwinklige Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \tag{1}$$

a) Das Volumen des Zylinders berechnet sich zu

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Umstellen von (1) nach r^2 und einsetzen ergibt

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung $V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$ sind

$$h_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

Die negative Lösung entfällt. Die 2. Ableitung $V'' = -\frac{3}{2}\pi h$ ist für alle positive h negativ. Damit liegt ein lokales Maximum vor.

Der Zylinder hat bei maximalem Volumen den Radius $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ und die Höhe $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$. Das Verhältnis ist $h : r = \sqrt{2} : 1$.

b) Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$M = 2\pi r \cdot h$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$M = 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}h$$

mit der 1. Ableitung

$$M' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}}$$

Die Nullstellen ergeben sich mit etwas Umstellen zu $h_{1,2} = \sqrt{2}R$. $h = \sqrt{2}R$ erweist sich mit etwas Rechenaufwand wieder als das gesuchte lokale Maximum.

Der Zylinder hat bei maximaler Mantelfläche den Radius $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ und die Höhe $h = \sqrt{2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = 2 : 1$.

c) Die Oberfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$O = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi(h^2 - 4R^2)}{2}$$

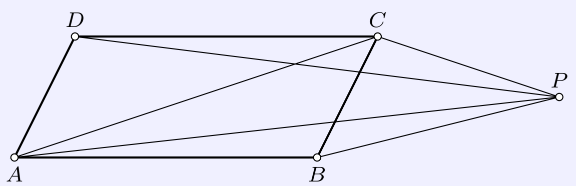
mit der 1. Ableitung

$$O' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} - \pi h$$

Eine Nullstelle, die auch das lokale Maximum ergibt, ist $h = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. (Der rechnerische Nachweis ist sehr aufwendig). Der Zylinder hat bei maximaler Oberfläche den Radius $r = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}R$ und die Höhe $\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = (1 + \sqrt{5}) : 1$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

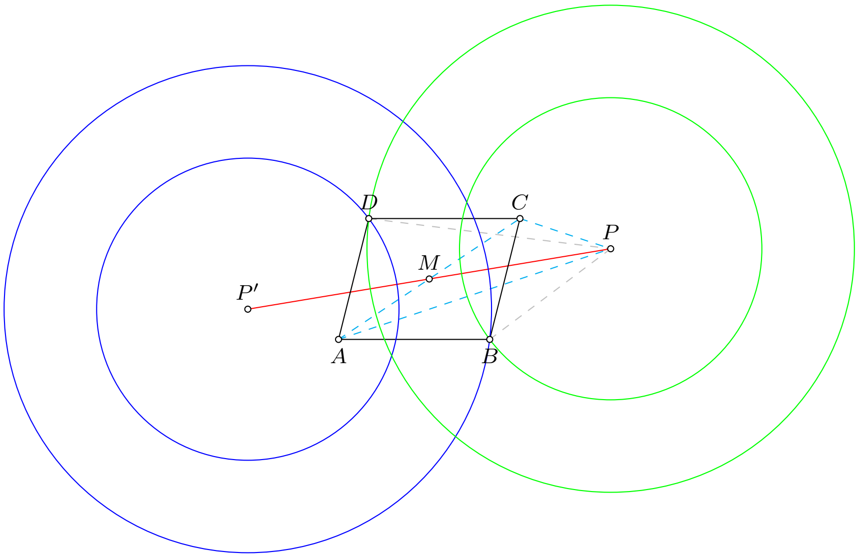
Aufgabe 19 - V601119
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

Das Dreieck ACP ist mit den bekannten Strecken AC, AP und CP unmittelbar konstruierbar (blaue gestrichelte Linien). Um das Parallelogramm zu konstruieren, spiegelt man zunächst den Punkt P am Mittelpunkt M der Geraden AC und erhält so den Punkt P'.
Nun schlägt man Kreise mit den Radien PB und PC um den Punkt P (grüne Kreise), und tut dasselbe um den Punkt P' (blaue Kreise).
Die Schnittpunkte des großen blauen Kreises mit dem kleinen grünen Kreis ergeben Kandidaten für den Eckpunkt B des Parallelogramms, während die Schnittpunkte des kleinen blauen Kreises mit dem großen grünen Kreis Kandidaten für den Eckunkt D darstellen.

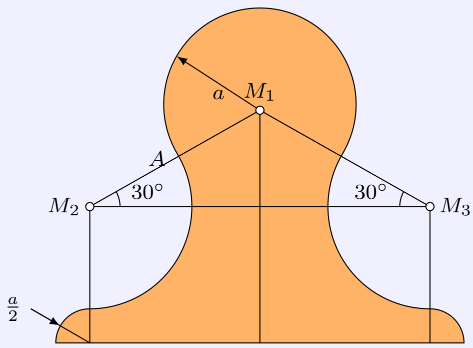
In der Darstellung sind die Kandidaten ausgewählt, die eine Nummerierung der Ecken entgegen des Uhrzeigersinns erlauben.
Zu zeigen bleibt, dass $ABCD$ tatsächlich ein Parallelogramm ist.



Die Punkte B und D sind punktsymmetrisch zu M, da sie als Schnittpunkte von Kreisen mit gleichen Radien und punktsymmetrischen Mittelpunkten konstruiert wurden. Damit sind die Längen MD und MB gleich.
Wegen der Punktsymmetrie von B und D geht deren Verbindungslinie durch M.
Die Diagonalen AC und BD treffen sich also in M und M halbiert beide Diagonalen. Damit ist nach einem bekannten Kriterium $ABCD$ ein Parallelogramm.

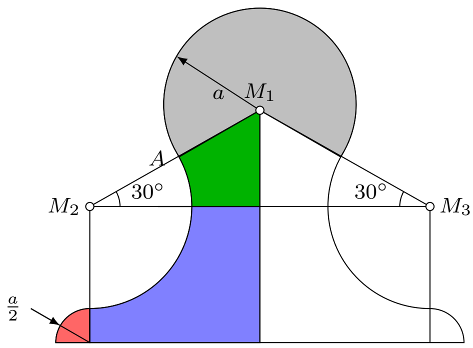
Aufgabe gelöst von wrdlprmpfd

Aufgabe 20 - V601120



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = M_2A = a$ ist.

Die Figur setzt sich aus 4 verschiedenen Arten von Figuren zusammen:



Fläche 1 (hellgrau): Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 240°

$$A_1 = \pi a^2 \cdot \frac{240}{360}$$

Fläche 2 (grün): rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $2a$ und den Katheten a, $\sqrt{3}a$, von dem ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 30° abgezogen wird

$$A_2 = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}a - \frac{30}{360}\pi a^2$$

Fläche 3 (blau): Rechteck mit den Seitenlängen $\sqrt{3}a$ und $\frac{3}{2}a$ aus dem ein Viertelkreis (Radius a) herausgeschnitten wird

$$A_3 = a \cdot \sqrt{3}a - \frac{1}{4}\pi a^2$$

Fläche 4 (rot): Viertelkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$

$$A_4 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Die Flächen 2, 3 und 4 treten in der Gesamtfläche zweimal auf, d.h.

$$A = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 = \frac{\pi + 24\sqrt{3}}{8}a^2$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 21 - V601121
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,;0{,}00), B(87{,}00;54{,}40), C(153{,}60;44{,}00), D(206{,}40;25{,}00), E(303{,}50;33{,}80), F(352{,}00;0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

a) Mit dem Satz des Pythagoras gelten:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(87-0)^2 + (54{,}4-0)^2} \approx 102{,}61,\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(153{,}6-87)^2 + (44-54{,}4)^2} \approx 67{,}41,\\
|\overline{CD}| &= \sqrt{(206{,}4-153{,}6)^2 + (25-44)^2} \approx 56{,}11,\\
|\overline{DE}| &= \sqrt{(303{,}5-206{,}4)^2 + (33{,}8-25)^2} \approx 97{,}50,\\
|\overline{EF}| &= \sqrt{(352-303{,}5)^2 + (0-33{,}8)^2} \approx 59{,}12.
\end{aligned}$$

Die Länge l der Landstraße beträgt $l \approx 382{,}75\,\mathrm{m}$. b) Für die zu asphaltierende Fläche gilt

$$A = 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot l = 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 382{,}75\,\mathrm{m} \approx 2105{,}13\,\mathrm{m}^2$$

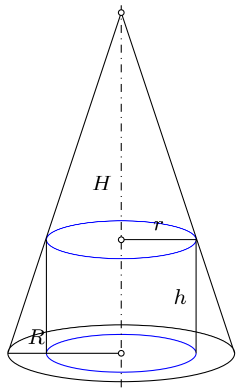
und somit müssen ungefähr 2105,13 Quadratmeter Straße asphaltiert werden.

Aufgabe gelöst von svrc

2.4 Vorolympiade 1960, Klasse 11

2.4.1 Wettbewerb V1960, Klasse 12

Aufgabe 1 - V601201
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?



(1) Für das Volumen des Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt

$$V = r^2 \pi h$$

(2) Der Zusammenhang von Kegel- und Zylinderabmessungen ergibt sich aus dem Strahlensatz zu

$$h : (R - r) = H : R$$

Damit kann h durch R, H und r ausgedrückt werden, und V wird eine Funktion der einen unabhängigen Variablen r:

$$V(r) = r^2 \pi \frac{H}{R}(R - r) = \pi r^2 \cdot H - \pi \frac{H}{R} r^3$$

(3,4) Für die erste Ableitung bezüglich r wird

$$V'(r) = 2\pi r H - 3 \cdot r^2 \pi \frac{H}{R} = r\pi \frac{H}{R}(2R - 3r)$$

und aus $r\pi \frac{H}{R}(2R-3r) = 0$ folgt $r = \frac{2}{3}R$. Da die 2. Ableitung für dieses r negativ wird, liegt ein relatives Maximum. An den Rändern gilt $V(r = 0) = 0$ und $V(r = R) = 0$. Damit ist das relative Maximum zugleich das absolute Maximum. Als maximales Volumen für den Zylinder erhält man

$$V = V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

mit der Höhe $h = \frac{H}{3}$. Es sollte ein eher kurzer Zylinder gedreht werden.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - V601202
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\bigstar\bigstar\bigstar 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Die Ziffer 9 ist die einzige Endziffer einer Zahl, die mit 9^3 eine 9 als Endziffer hat. So muss auch die gesuchte Zahl die Endziffer 9 haben. Es kann somit nur die 19 sein da 29^3 bereits 5-stellig ist. Die gesuchte Zahl ist $19^3 = 6859$.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 3 - V601203
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Sei der Winkel im Uhrzeigersinn von der 12 aus gerechnet $\sigma(t)$ für den Stundenzeiger und $\mu(t)$ für den Minutenzeiger. Zu einem gegebenen Startzeitpunkt $t = 0$ sei die Stellung der Zeiger σ_0 und μ_0. Dann lauten die Winkelgleichungen der Zeiger

$$\sigma(t) = \sigma_0 + 30° \cdot t$$

$$\mu(t) = \mu_0 + 360° \cdot t$$

Dabei werde t in Stunden angegeben. Allgemein kann man formulieren:

$$|\mu(t) - \sigma(t)| \mod 360° = |\mu_0 - \sigma_0| \mod 360°$$

Es soll nach Aufgabenstellung genau eine Stunde später wieder der gleiche Winkel zwischen den Zeigern liegen. Das heißt:

$$\frac{12}{11}\left(z - \frac{\mu_0 - \sigma_0}{180°}\right) = 1$$

Nach $\mu_0 - \sigma_0$ aufgelöst:

$$\mu_0 - \sigma_0 = 180°(z - \tfrac{11}{12})$$

$$\mu_0 - \sigma_0 = 180° \cdot z - 165°$$

Da $z = 2$ im Grunde das gleiche ergibt wie $z = 0$, gilt also entweder:

$$\mu_0 = \sigma_0 - 165°$$

oder

$$\mu_0 = \sigma_0 + 15°$$

Der Minutenzeiger muss also ursprünglich entweder 165° hinter dem Stundenzeiger sein, oder 15° weiter. Dies geschieht aller $\frac{12}{11}$. Ersteres wäre zum Beispiel um 11:30:00 Uhr der Fall, aber nicht nur, denn wie oben gezeigt, wäre es auch bei Startzeit 12:35:27 Uhr der Fall, usw.. 15° ist der Minutenzeiger dem Stundenzeiger voraus um 05:30:00 Uhr.
Singgemäß gilt das gleiche, d.h. weitere Startuhrzeiten wären zum Beispiel 06:35:27, 07:40:55 und so weiter.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - V601204
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad ..., \quad \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

Wir bezeichnen mit $a_n := \frac{1}{n\cdot n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ die Glieder der Folge. Es handelt sich bei der Summe der Glieder um eine Teleskopsumme, d.h.:

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V601205

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$(\sqrt{2})^{1,5+\ {}^{-4}\sqrt{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}}}$$

$$(\sqrt{2})^{1,5+\ {}^{-4}\sqrt{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}} = (\sqrt{2})^{1,5+\ {}^{-4}\sqrt{11+5^{0,2}\cdot 5^{0,8}}}$$

$$(\sqrt{2})^{1,5+\ {}^{-4}\sqrt{11+5}} = (\sqrt{2})^{1,5+\ {}^{-4}\sqrt{16}} = (2^{0,5})^{1,5+0.5} = 2^{0,5\cdot 2} = 2^1 = 2$$

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 6 - V601206

Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6 + 14^6 + 16^6$$

Da uns nur die Einerstellen der Summanden interessiert, folgt $\mathbf{mod} 10$

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \mathbf{mod}\, 10 \equiv \left(1^6 + 4^6 + 6^6\right) \mathbf{mod}\, 10.$$

Es ist $4^6 = 4096$, d.h $4^6\, \mathbf{mod} 10 \equiv 6\, \mathbf{mod} 10$ und es ist $6^6 = 6^3 \cdot 6^3 = 216 \cdot 216$, d.h. $6^6\, \mathbf{mod} 10 \equiv 6\, \mathbf{mod}\, 10$. Also gilt

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \mathbf{mod}\, 10 \equiv 13\, \mathbf{mod}\, 10 \equiv 3\, \mathbf{mod}\, 10$$

und somit endet die Summe auf der Einerstelle 3.

Aufgabe gelöst von svrc

2. Lösung:
Mod 5 errechnet sich die fragliche Summe sehr leicht zu

$$11^6 + 14^6 + 16^6 \equiv 1^6 + (-1)^6 + 1^6 = 3 \mod 5$$

weshab ihre Endziffer also nur 3 oder 8 sein kann. Da sie aber als Summe von einer ungeraden und von zwei geraden Zahlen sicher ungerade ist, kommt letztlich dann nur 3 in Frage.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 7 - V601207

Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Seien die beiden mit der Geschwindigkeit v_1 fahrenden PKW als PKW_1 und PKW_2 bezeichnet. Dann berechnet sich der Treffpunkt P_1 der beiden PKW mit

$$P_1 = v_1 t_1.$$

Für Treffpunkt P_2 von PKW_1 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 gilt:

$$P_2 = P_1 + v_1 t_2 = v_1 t_1 + v_1 t_2 = v_1(t_1 + t_2).$$

Und für Treffpunkt P_3 von PKW_2 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 muss damit gelten:

$$P_3 = P_2 + v_2 t_2 = v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2.$$

Und für den Zeitpunkt von P_3: $t_3 = t_1 - t_2 - \frac{P_3 - P_2}{v_1}$

$$t_3 = t_1 - t_2 - \frac{v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2 - v_1(t_1 + t_2)}{v_1} = t_1 - t_2 - \frac{v_2 t_2}{v_1}.$$

Im speziellen Fall wird P_1 um 10:30 Uhr und 50 km vom Startpunkt Berliner Ring entfernt, P_2 um 10:35 Uhr und 58,33 km entfernt und P_3 um 10:21 Uhr und 65 km entfernt, erreicht.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 8 - V601208
Ein Trugschluss "Zwei ist größer als vier!"
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

$$2\lg(\frac{1}{2}) > 4\lg(\frac{1}{2})$$
$$2\lg(1) - 2\lg(2) > 4\lg(1) - 4\lg(2)$$
$$-2\lg(2) > -4\lg(2) \;\equiv\; -2 > -4 \;\equiv\; 2 < 4$$

Die Division durch $\lg(\frac{1}{2})$ war in der Weise falsch. Da $\lg(\frac{1}{2}) < 0$ ist, hätte bei der Division das Relationszeichen gedreht werden müssen.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 9 - V601209
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen	b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen	d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen	f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Für ein $n \geq 2$ existieren genau $9 \cdot 10^{n-1}$ n-stellige Zahlen.
Damit eine n-stellige Zahl keine 0 enthält, muss an jeder Stelle eine Ziffer 1 bis 9 stehen, d.h. es gibt 9^n verschiedene n-stellige Zahlen ohne 0 in der Ziffernfolge. Der prozentuale Anteil ist somit

$$\frac{9^n}{9 \cdot 10^{n-1}} \cdot 100\% = 0{,}9^{n-1} \cdot 100\%$$

Damit ergibt sich: a) 90 %, b) 81 %, c) 65,61 %, d) 38,7 %, e) 13,5 % und f) 0,57 %.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 10 - V601210
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Es seien n Personen anwesend. Da jeder jedem gratuliert, entspricht die Anzahl der Glückwünsche der Anzahl z von Möglichkeiten aus den n Personen genau 2 auszuwählen, d.h., $z = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ist n gerade und da die Personen sich gleichzeitig gratulieren, können sich gleichzeitig $\frac{n}{2}$ Paare die Hände schütteln. Damit sind $n-1$ Gratulationsrunden erforderlich, die $3n-3$ Sekunden benötigen.
Ist n ungerade können sich gleichzeitig $\frac{n-1}{2}$ Paare die Hände schütteln, während eine Person immer warten muss. Damit sind nun n Gratulationsrunden erforderlich, die 3 Sekunden benötigen.

"Gratulationsplan":
Nummeriere die Personen mit $1, \ldots, n$.

1. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist ungerade.
Dann betrachte folgenden Gratulationsplan:
Für $r = 1,2,\ldots,n$ soll in Runde r die Person mit Nummer i der eindeutig bestimmten Person mit Nummer j gratulieren, für die $i + j \equiv r \pmod n$ gilt. Falls $i = j$ gilt, so setzt Person i in dieser Runde aus.

Korrektheitsbeweis:
Wegen $i + j = j + i$ ist klar, dass in jeder Runde die Person j, der Person i laut Plan gratulieren soll, ebenfalls der Person i gratulieren soll. Also sind die geplanten Gratulationen immer möglich.
Außerdem gratuliert jede Person jeder anderen genau einmal: Die Personen i,j gratulieren sich in der Runde r für die $r \equiv i + j \pmod n$ gilt.

Beobachtung: Da n ungerade ist, gibt es in jeder Runde r genau eine Person i, die aussetzt, also für die $2i \equiv r \pmod n$ gilt. Außerdem gibt es zu jeder Person genau eine Runde, in der die Person aussetzt.

2. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist gerade.
Betrachte die Person n getrennt von den anderen. Der neue Plan ist, den Plan für die Personen $1,2,\ldots,n-1$ gemäß des 1. Falls auszuführen mit dem Unterschied, dass die Person, die aussetzen sollte der Person n gratuliert.

Formal: Für $r = 1,2,\ldots,n-1$ soll in Runde r die Person i (mit $1 \leq i < n$) der Person j mit $i + j \equiv r \pmod{n-1}$ (falls $j \neq i$) bzw. der Person n (falls $j = i$) gratulieren.
Die Korrektheit folgt aus Fall 1 und obiger Beobachtung.

Für den konkreten Fall $n = 300$ wird $z = \binom{300}{2} = 44850$. Die 299 Gratulationsrunden erfordern 897 Sekunden, d.h. 14 min 57 s.

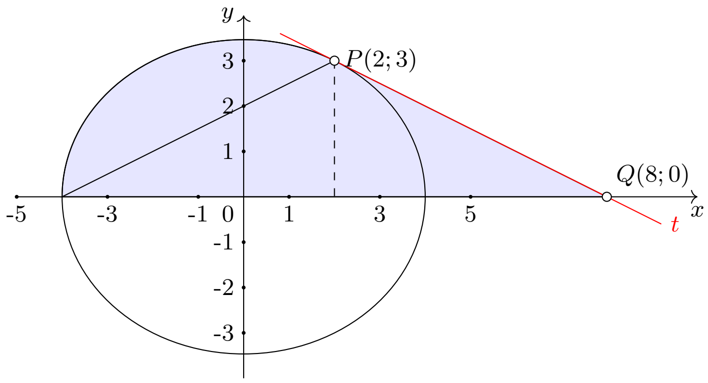
Aufgabe gelöst von Nuramon und Steffen Polster

Aufgabe 11 - V601211
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

In der Abbildung ist die um die x-Achse rotierende Fläche farbig hervorgehoben. Ihr größter Querschnitt ist ein Kreis und tritt bei $x = 0$ auf, womit aus $\pi b^2 = 12\pi$ sofort $b = \sqrt{12}$ folgt.
Aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergibt sich mit $b^2 = 12$ bei Einsetzen des Punktes $P(2;3)$, dass die große Halbachse $a = 4$ ist, d.h. $a^2 = 16$. Mit der Tangentengleichung $\frac{xx_P}{a^2} + \frac{yy_P}{b^2} = 1$ wird für die Tangente

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \to y = 4 - \frac{x}{2}$$

mit der Nullstelle $x = 8$.



Damit setzt sich die rotierende Fläche aus einem rechtwinkligen Dreieck (Kathetenlängen 3 cm und 6 cm) und einem Ellipsensegment von $x = -4$ bis $x = 2$ der Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Es wird

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Dreieck}} + V_{\text{Segment}} \\ &= \pi \cdot 3^2 \cdot 6 + \int_{-4}^{2} \left[\frac{1}{4}\sqrt{192 - 12x^2}\right]^2 dx \\ &= 54\pi + \left[\frac{x}{4}(48 - x^2)\right]_{-4}^{2} = 54\pi + 54 \end{aligned}$$

Der Rotationskörper hat ein Volumen von $54(\pi + 1) \approx 223{,}6$ cm^3.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 12 - V601212
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Für ein beliebiges Dreieck ABC gilt für den Flächeninhalt F zum einen die Heronsche Dreiecksformel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

mit dem halben Dreiecksumfang $s = \frac{a+b+c}{2}$ und hier konkret $s = \frac{1}{2}$ cm, und zum anderen die Beziehung Flächeninhalt - Umkreisradius R

$$F = \frac{1}{4}\frac{a \cdot b \cdot c}{R} \tag{2}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) und Umstellen nach R ergibt

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \tag{3}$$

Nach der Aufgabenstellung genügt es ein beliebiges Dreieck anzugeben, für das der Umkreisradius R größer als 1000 m wird. Daher betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$ und $c = 1$ cm $-a-b$. Setzt man diese Werte in (3) ein, wird (alle Maße in cm)

$$\begin{aligned} R &= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{ab(1-a-b)}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-1+a+b)}} \\ &= \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{s(s-a)^2(s-1+2a)}} \end{aligned}$$

und mit $s = \frac{1}{2}$

$$R = \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)^2(2a-\frac{1}{2})}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{16 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-a+a^2)(2a-\frac{1}{2})}}$$

$$R = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-4a+4a^2)(4a-1)}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-2a)^2(4a-1)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(4a-1)}}$$

Ist a nur wenig größer als 0,25 cm, d.h. zum Beispiel $a = 0{,}25 + \epsilon$ mit einem beliebigen $\epsilon > 0$ ergibt sich

$$R = \frac{0{,}25 + \epsilon)^2}{\sqrt{4 \cdot \epsilon}} = \frac{(0{,}25 + \epsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\epsilon}}$$

Dieser Term wächst für $\epsilon \to 0$ über alle Grenzen, d.h.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{(0{,}25 + \epsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\epsilon}} = \infty$$

Der Umkreisradius R kann damit jeden hinreichend großen positiven Wert annehmen, d.h. auch größer als 1000 m sein.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2. Lösungsvariante:
Die Rechnung kann verkürzt werden. Man muss nicht den komplizierten Weg über die Fläche gehen, sondern kann beim gleichschenkligen Dreieck den Umkreisradius durch Anwenden des Satzes von Pythagoras berechnen.

Sei a einer von den zwei gleichen Schenkeln und c die dritte Seite, dann ist

$$R^2 = \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + \left(R - \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2}\right)^2$$

$$R^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + R^2 - 2R\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2} + a^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$R\sqrt{4a^2 - c^2} = a^2$$

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{2a + c} \cdot \sqrt{2a - c}}$$

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{U}\sqrt{4a - U}}$$

Der weitere Lösungsweg entspricht dem von oben.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 13 - V601213
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Da α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks bilden, gilt nach Innenwinkelsummensatz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \iff \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

und somit

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Da $\cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ für beliebige Winkel γ gilt, folgt

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Nach dem Additionstheorem gilt

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y, sodass

$$\sin(\gamma) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

gilt. Da $\gamma \in (0°, 180°)$ gelten muss, folgt

$$2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2}$$

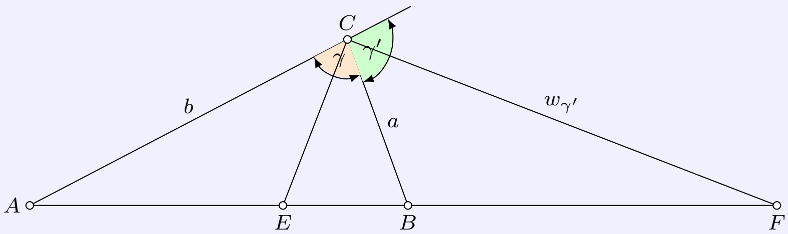
und somit

$$\gamma = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90°.$$

Deshalb handelt es sich bei γ um einen rechten Winkel.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 14 - V601214
Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

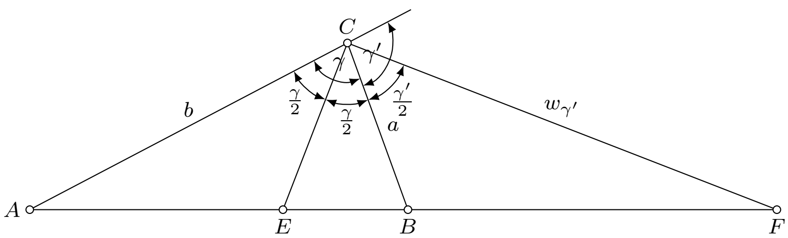
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Nach dem Sinussatz ist im Dreieck EBC (siehe nachfolgende Abbildung)

$$\frac{\sin(180° - \angle AEC)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{EB}$$

und im Dreieck AEC

$$\frac{\sin\angle AEC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{EA}$$



Wegen $\sin(180° - \frac{\gamma}{2}) = \sin\frac{\gamma}{2}$ folgt

$$\frac{EA}{EB} = \frac{b}{a}$$

Für den Außenwinkel γ' läuft der Beweis analog:

$$\frac{\sin\angle BFC}{\sin(180° - \frac{\gamma'}{2})} = \frac{b}{FA} \quad ; \quad \frac{\sin\angle BFC}{\sin\frac{\gamma'}{2}} = \frac{a}{FB}$$

und somit

$$\frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 15 - V601215 = V601107
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D.h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

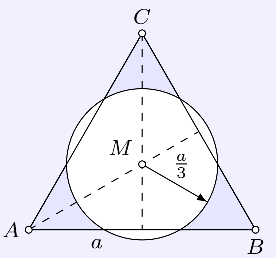
$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

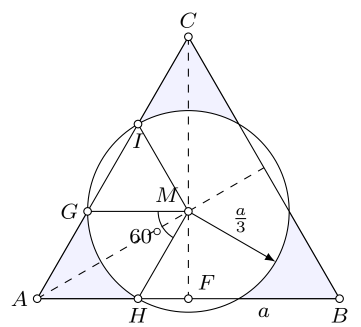
$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 16 - V601216



Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?



Die zu A näheren Schnittpunkte des Kreises mit den Seiten AC und AB seien G und H. F sei der Fußpunkt der Höhe von C, die von M im Verhältnis 2:1 geteilt wird, da $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann wird nach einem Strahlensatz

$$2 : 1 = CM : MF = MG : AF \qquad \rightarrow \qquad MG = \frac{a}{3}$$

Analog ergibt sich $AG = AH = MH = \frac{a}{3}$, so dass das Viereck $AHMG$ ein Rhombus und der Winkel $\angle HMG = \alpha = 60°$ ist.

Damit schneidet der Kreis aus dem Dreieck 3 gleichseitige Dreiecke der Art GMI (Seitenlänge $\frac{a}{3}$) und drei Sektoren $\overset{\frown}{GH}M$, die, da $\angle HMG = 60°$, zu einem Halbkreis zusammengefasst werden können. Für die nicht von Kreis bedeckte Dreiecksfläche wird somit

$$F = F_{\triangle ABC} - 3 \cdot F_{\triangle GMI} - \frac{1}{2} F_{\text{Kreis}}$$
$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}a^2$$

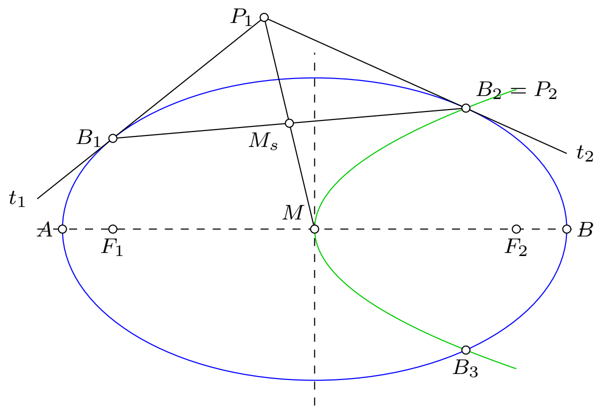
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 17 - V601217
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad (1)$$

d.h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.



a) Die Tangentengleichung dieser Ellipse in einem Berührungspunkt B ist

$$\frac{x \cdot x_B}{25} + \frac{y \cdot y_B}{9} = 1$$

Setzt man den Punkt P_1, der auf den Tangenten liegt ein, wird

$$\frac{-x}{25} + \frac{\frac{21}{5}}{9} = 1 \qquad (2)$$

(2) umgestellt und in (1) eingesetzt, liefert die Koordinaten der zwei Berührungspunkte

$$B_1\left(-4; \frac{9}{5}\right) \qquad ; \qquad B_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$$

mit den Tangenten

$$t_1: \quad y = \frac{4}{5}x + 5 \qquad ; \qquad t_2: \quad y = -\frac{9}{20}x + \frac{15}{4}$$

b) Der Mittelpunkt der Berührungssehne B_1B_2 ist $M_s\left(-\frac{1}{2};\frac{21}{10}\right)$. Er ist offensichtlich auch der Mittelpunkte der Strecke MP_1 und liegt damit auf der Gerade von P_1 durch den Mittelpunkt M der Ellipse.

c) Für die Parabel ergibt sich aus dem Ansatz $y^2 = ax$ mit den Koordinaten des Punktes $P_2\left(3;\frac{12}{5}\right)$

$$y^2 = \frac{48}{25}x \qquad ; \qquad f(x) = y = \pm\sqrt{\frac{48}{25}x}$$

Die Tangente in P_2 an die Parabel hat den Anstieg

$$f'(x) = \frac{2}{5}\sqrt{3}\cdot x \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{5} = m_2$$

Die Tangente t_2 hat den Anstieg $m_1 = -\frac{9}{20}$. Für den Schnittwinkel der zwei Geraden, d.h. auch dem Schnittwinkel von Parabel und Ellipse, folgt damit

$$\tan\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\cdot m_2} = \frac{85}{82} \Rightarrow \varphi = 46{,}03°$$

Ellipse und Parabel schneiden sich unter dem Winkel 46,03°.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 18 - V601218
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{40}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Da die zweite Parabel für alle Werte von x oberhalb der ersten verläuft, aber die innere Begrenzung des Porzellantiegels beschreibt, muss die Rotation dieser Parabeln zur Beschreibung der Begrenzung des Porzellantiegels um die y- (und nicht die x)-Achse erfolgen.

Die beiden Parabeln schneiden sich nie. Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass die Größen in cm angegeben sind, sodass also die y-Koordinate des Tiegels das Intervall $[0;10]$ durchläuft.

Das Volumen V_1 des Rotationskörpers, der durch die äußere Parabel bis zur maximalen Höhe von $y = 10$ entsteht, erhält man durch die Integration über die Kreisscheiben mit Radius $x(y)$, wobei y von 0 bis 10 läuft. Dabei ist $x(y)$ die zugehörige Umkehrfunktion, die man mit $x(y) = \sqrt{40y}$ erhält. Die zugehörige Kreisscheibe in der Höhe y hat also eine Fläche von $\pi\cdot x(y)^2 = \pi\cdot 40y$. Es ist also

$$V_1 = \int_{y=0}^{10} \pi\cdot 40y\mathrm{d}y = \left[\pi\cdot 20y^2\right]_0^{10} = \pi\cdot 2000.$$

Analog berechnet man das Volumen V_2 des durch die Rotation der zweiten Parabel entstehenden Rotationskörpers, der den nicht aus Porzellan bestehenden Teil im Innern des ersten Rotationskörpers ausschneidet, sodass dann nur noch der Porzellantiegel verbleibt mit

$$V_2 = \int_{y=1}^{10} \pi\cdot(10y - 10)\mathrm{d}y = \pi\cdot\left[5y^2 - 10y\right]_1^{10} = \pi\cdot(500 - 100 - 5 + 10) = \pi\cdot 405.$$

Damit hat der Porzellantiegel ein Volumen von $V_P = V_1 - V_2 = \pi\cdot 1595$.

Das Quecksilber-Volumen V_Q erhält man analog zu V_2, indem man den gleichen Integranden (sprich: Fläche der jeweiligen Kreisscheibe bis zum inneren Rand des Porzellantiegels) vom inneren Grund des Tiegels bei $y = 1$ bis eben zur Höhe $1 + 1 = 2$ integriert. Dabei kommt der Unterschied dadurch zu Stande, dass das Quecksilber genau die Höhe von einem Zentimeter einnimmt. Es gilt also

$$V_Q = \pi\cdot\left[5y^2 - 10y\right]_1^2 = \pi\cdot(20 - 20 - 5 + 10) = \pi\cdot 5.$$

Der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel hat eine in Gramm gemessene Masse von

$$m_P = 2{,}5 \cdot V_P + 13{,}5 \cdot V_Q = \pi \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot 1595 + \frac{27}{2} \cdot 5\right) = \pi \cdot \frac{7975 + 135}{2} = \pi \cdot \frac{8110}{2} = \pi \cdot 4055.$$

Hat der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel einen Tiefgang von $t > 0$, so verdrängt er Wasser mit einem Volumen von

$$V_W = \int_{y=0}^{t} \pi \cdot 40y\mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^t = \pi \cdot 20t^2,$$

was eine Masse m_W von $\pi \cdot 20t^2$ g besitzt. Da bei einem schwimmendem Körper dessen Masse genau der des verdrängten Wassers entspricht, gilt $m_P = m_W$, also $20t^2 = 4055$ bzw. $t = \frac{\sqrt{811}}{2} \approx 14{,}24$ cm, was mehr ist als die Höhe des Tiegels, sodass dieser vollständig untergeht.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 19 - V601219
Zeichnen Sie die Ellipse

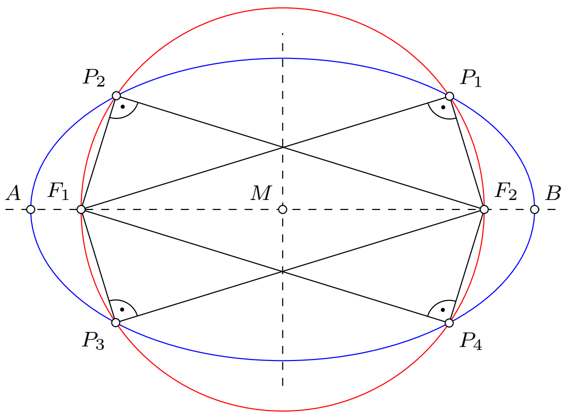
$$9x^2 + 25y^2 = 225 \tag{1}$$

und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{2}$$

d.h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.



Die Konstruktion erfolgt mit Zirkel und Lineal mittels klassischem Verfahren:

> Wir wählen einen Hilfspunkt H auf AB, zeichnen um F_1 einen Kreisbogen mit Radius HA und um F_2 einen Kreisbogen mit dem Radius HB. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise sind (symmetrisch zur Hauptachse liegende) Punkte X_1 und X_2 der Ellipse.

Die Punkte der Ellipse, in denen sich die Brennstrahlen senkrecht schneiden, müssen auf dem Thaleskreis über der Strecke F_1F_2 liegen.
Zur Konstruktion zeichnet man den Kreis um M mit dem Radius MF_1. Die Schnittpunkte mit der Ellipse sind die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit der geforderten Eigenschaft.

Der beschriebene Thaleskreis hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 16$. Umstellen nach y^2 und Einsetzen in (1) ergibt

$$9x^2 + 25(16 - x^2) = 225 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1;2} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7} \quad ; \quad y_{1,2} = \pm\frac{9}{4}$$

Die gesuchten Punkte haben somit die Koordinaten

$$P_1\left(\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_2\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_3\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_4\left(\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right)$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 20 - V601220
Berechnen Sie die innere Maße einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Mit der Dichte von $7{,}2\frac{t}{m^3}$ des Roheisens nimmt dieses einen Zylinder mit Volumen $V = \frac{20}{7{,}2}m^3$ ein. Sei $r > 0$ der in Metern gemessene Innenradius der Roheisenpfanne und $h > 0$ entsprechend die Höhe des eingefüllten flüssigen Roheisens, so gilt also $\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{20}{7{,}2}$ bzw. $h = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi \cdot r^2}$. Zu minimieren ist nun der Wärmeverlust, der proportional zur Oberfläche des vom Roheisen gebildeten Zylinders ist, wobei die Deckfläche als Oberfläche doppelt zu werten ist. Also ist der Term $\pi \cdot (2rh + 3r^2)$ bzw. äquivalent der Term $3r^2 + 2rh$ zu minimieren. Setzt man die zuvor erhaltene Bedingung an r ein, erhält man als zu minimierenden Term also

$$f(r) = 3 \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-1}.$$

Diese Funktion in Abhängigkeit von r besitzt als Ableitung die Funktion

$$f'(r) = 6r - 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-2},$$

welche genau für diejenigen $r > 0$ verschwindet, für die die Gleichung

$$3r^3 = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \qquad \text{bzw.} \qquad r = \left(\frac{20}{3 \cdot 7{,}2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}6655$$

gilt. Eine Grenzbetrachtung mit $r \to 0$ bzw. $r \to \infty$ zeigt, dass $f(r)$ dann jeweils gegen unendlich geht, also an der einzigen kritischen Stelle ein globales Minimum besitzen muss.
Also hat die Roheisenpfanne einen Innenradius von $r \approx 0{,}6655$ m und eine Innenhöhe von $h = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi \cdot r^2} \approx 6{,}272$ m.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 21 - V601221
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Es sei $h > 0$ die in Metern gemessene Höhe und $b > 0$ analog die Breite des Rechtecks. Dann beträgt seine in Quadratmetern gemessene Querschnittsfläche also $1 = h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2$ und damit $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b$. Weiterhin besitzt der Kanal eine in Metern gemessene Höhe von $0{,}9 \geq h + \frac{b}{2}$.

Die Produktionskosten hängen monoton vom Umfang der Querschnittsfläche des Kanals ab, sodass diese und mit ihr der Term $2h + b + \frac{\pi}{2} \cdot b$ unter den genannten Nebenbedingungen zu minimieren ist. Setzen wir die zuvor aus der Größe der Querschnittsfläche erhaltene Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir den Term

$$f(b) = 2b^{-1} - \frac{\pi}{4} \cdot b + b + \frac{\pi}{2} \cdot b = 2b^{-1} + \frac{\pi + 4}{4} \cdot b,$$

welcher die Ableitung $f'(b) = \frac{\pi+4}{4} - 2b^{-2}$ besitzt, die genau für $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}}$ verschwindet. Eine kurze Betrachtung für $b \to 0$ bzw. $b \to \infty$ zeigt, dass $f(b)$ in beiden Fällen gegen unendlich geht, also bis zur einzigen kritischen Stelle monoton fallend und ab dann monoton steigend ist; an der kritischen Stelle also ein globales Minimum vorliegt.

Die Produktionskosten werden also – ohne Beachtung der Höhenbedingung – minimal, wenn $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}} \approx 0{,}945$ m und $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \approx 0{,}687$ m betragen würde. Dann jedoch hätte der Kanal eine Gesamthöhe von

mehr als 0,9 m. Also muss die Breite b des Kanals soweit verändert werden, dass diese Höhenbedingung eingehalten wird.
Da jede Vergrößerung von b über den kritischen Wert hinaus bzw. jede Verkleinerung unter diesen den Umfang der Querschnittsfläche und damit die Produktionskosten weiter erhöht, werden sie unter Beachtung der Höhenbedingung dann minimal, wenn in der Höhenbedingung der Gleichheitsfall vorherrscht.

Also können wir nun zusätzlich $0{,}9 = h + \frac{b}{2}$ annehmen. Setzen wir dies in die aus der Querschnittsfläche erhaltenen Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir die Gleichung

$$0{,}9 - \frac{b}{2} = h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{4-\pi}{8} \cdot b^2 - 0{,}9b + 1 = 0$$

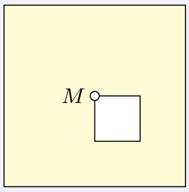
was die beiden Lösungen

$$b_1 = \frac{3{,}6}{4-\pi} + \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4-\pi)^2} - \frac{8}{4-\pi}} \approx 7 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{3{,}6}{4-\pi} - \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4-\pi)^2} - \frac{8}{4-\pi}} \approx 1{,}318$$

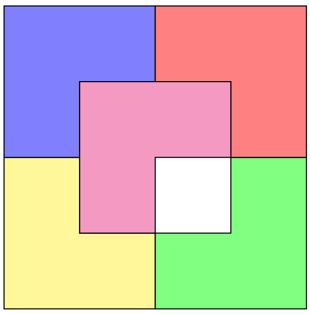
besitzt. Die erste Lösung entfällt, da nur ein negatives h dann die Höhenbedingung erfüllen könnte, was ausgeschlossen ist. Also muss $b = b_2$ gelten und wir erhalten $h = 0{,}9 - \frac{b}{2} \approx 0{,}241$.
Damit muss das Rechteck, welches dem Kanal zu Grunde liegt, eine Breite von ca. 1,318 m und eine Höhe von ca. 0,241 m besitzen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 22 - V601222



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen ($M =$ ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).



Aufgabe gelöst von ochen

2.5 Vorolympiade 1961, Klasse 9

2.5.1 I. Runde V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610911
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Berechnung der Flugzeiten: $2\frac{11}{12}$ bzw. $2\frac{1}{4}$ h.
Berechnung der Fluggeschwindigkeiten: 559 bzw. 502 km·h^{-1}.
Die Windgeschwindigkeit beträgt damit rund 28,5 km·h^{-1}.

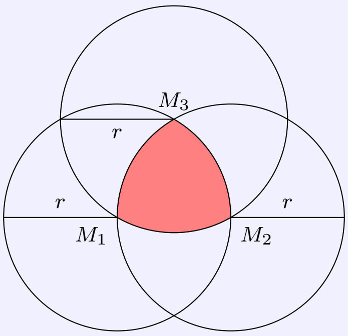
Übernommen von [6]

Aufgabe 2 - V610912
Wieviel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

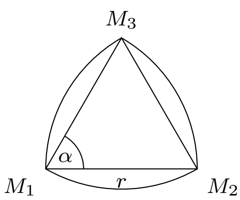
Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es $63 \cdot 64 = 4032$ zueinander verschiedene Stellungen.

Übernommen von [6]

Aufgabe 3 - V610913



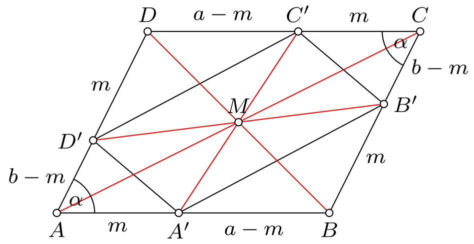
Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p·cm^{-3}.



$$F = F_{\triangle M_1 M_2 M_3} + 3F_{\text{Segmente}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin\alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2} \approx 0{,}845 cm^3$$
$$G \approx 6{,}6p$$

Übernommen von [6]

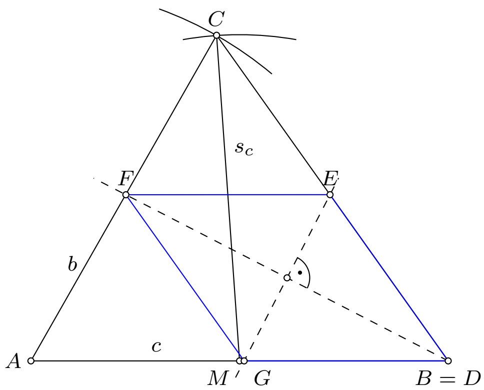
Aufgabe 4 - V610914
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!



$A'B'C'D'$ ist ein Parallelogramm. Auf Grund der Punktsymmetrie des Parallelogramm $ABCD$ bezüglich des Mittelpunktes M und die Konstruktion der Punkte A',B',C' und D' sind die Dreiecke $AA'D'$ und $B'CC'$ sowie $A'BB'$ und $C'DD'$ paarweise zueinander kongruent und spiegelsymmetrisch in Bezug auf M.
Damit sind $A'D'$ und $B'C'$ sowie $A'B'$ und $C'D'$ jeweils gleichlang und zueinander parallel. $A'B'C'D'$ ist somit ein Parallelogramm.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - V610915
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)



Konstruktion des Dreiecks ABC:
(1) Zeichne die Strecke $AB = c$. Konstruiere den Mittelpunkt M von AB.
(2) Zeichne einen Kreisbogen um M mit dem Radius s_c. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius b. Beide Kreisbögen schneiden sich in dem Punkt C. Der zweite Schnittpunkt der Kreisbögen (auf der anderen Seite von AB) erzeugt ein kongruentes Dreieck ABC_2.

Konstruktion des Rhombus $DEFG$:
(1) Der D gegenüberliegende Punkt F muss auf der Winkelhalbierenden von β liegen. Konstruiere diese Winkelhalbierende. Ihr Schnittpunkt mit AC ist der Punkt F.
(2) Konstruiere den Mittelpunkt von DF und errichte in ihm die Senkrechte zu DF. Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Seiten BC und AC sind die gesuchten Punkte E und G. $DEFG$ ist der gesuchte Rhombus.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2.5.2 II. Runde V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610921
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

a1) Umrechnung von t: $170s = \frac{170}{3600}\text{h}$
a2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100 \cdot 3600}{170} = 2117{,}6 \approx 2118$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118 km·h^{-1}.
b1) zeitliche Abweichung nach oben: $v = \frac{100 \cdot 3600}{170{,}5} = 2111{,}4 \approx 2111$.
b2) zeitliche Abweichung nach unten: $v = \frac{100 \cdot 3600}{169{,}5} = 2123{,}9 \approx 2124$. Bei einem Zweitfehler von ±0,5 s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa ±6 km·h^{-1} behaftet.

Übernommen von [6]

Aufgabe 2 - V610922
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wieviel Prozent wird er 1965 betragen?

	1958	1965
Gesamte Industrieproduktion	100	188
Produktion von Produktionsmitteln	x	$\frac{195}{100}x$
Produktion von Konsumgütern	y	$\frac{177}{100}y$

Gesamte Industrieproduktion = Produktion von Produktionsmitteln + Produktion von Konsumgütern

$$100 = x + y \qquad \text{(I)}$$
$$100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y \qquad \text{(II)}$$

Aus (I)+(II) folgt: $195x + 177(100 - x) = 18800$, d.h. $x = 61{,}1$.
Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion. Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich:
Sei p der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmitteln im Jahre 1965, dann muss gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61{,}1 : p \Rightarrow p = 63{,}4$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4 % der gesamten industriellen Produktion.

Übernommen von [6]

Aufgabe 3 - V610923
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Radius des kleinsten Kreises ist $r_1 = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_2, r_3, r_4 und r_5. Es ist gefordert, dass

$$\begin{aligned} F_1 &= \pi r_1^2 \\ &= F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \\ &= F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) \\ &= F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) \\ &= F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2) \end{aligned}$$

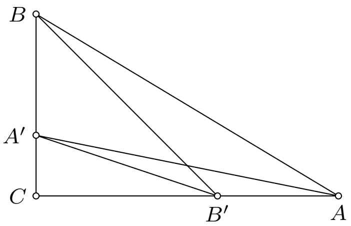
sein soll. Das heißt aber $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

$$\begin{aligned} r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 &\Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2} \\ r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 &\Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3} \\ r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 &\Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4} \\ r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 - r_4^2 &\Rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \Rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5} \end{aligned}$$

Inge muss für die Konstruktion folgende Radien wählen: $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_4 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Übernommen von [6]

Aufgabe 4 - V610924
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!



Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

I	im Dreieck $A'B'C'$	$A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2$
II	im Dreieck $BB'C$	$BC^2 + B'C^2 = BB'^2$
III	im Dreieck $AA'C$	$A'C^2 + AC^2 = AA'^2$
IV	im Dreieck ABC	$BC^2 + AC^2 = AB^2$

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2$$

Rechts steht kein Quadrat einer Vierecksseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Viereckseitenquadrat zusammenzufassen.
Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2$$

Damit ist bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Viereckseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

Übernommen von [6]

Aufgabe 5 - V610925
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6), bei Gleichheit
2. Wägung: Vergleich (7) und (8),
- bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als (8) und mit 3. Wägung Vergleich (7) und (1) ist bei Gleichheit (8) schwerer (leichter) als alle anderen Kugeln. Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als alle anderen Kugeln.
- bei Gleichheit der 2. Wägung folgt 3. Wägung: (9) und (1). Hiermit ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) und damit aller anderen Kugeln ist.

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6) und Ungleichheit, d.h. (1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)
2. Wägung: (1) (2) (3) und (7) (8) (9)
bei Gleichheit 3. Wägung (4) und (5), bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) und (7) (8) (9) folgt 3. Wägung (1) und (2).
Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit, d.h. (1) leichter oder schwerer als (2) ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

Übernommen von [6]

2.5.3 III. Runde V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610931
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade x Jahre alt. Wann ist er geboren?

Die zwei größten Quadratzahlen bis 1945 sind $1936 = 44^2$ und $1849 = 43$.
Für $x = 44$ wäre Banach $1936 - 44 = 1892$ geboren worden, für $x = 43$ ergäbe sich $1849 - 43 = 1806$. Banach wäre im zweiten Fall 139 Jahre alt geworden, d.h. diese Lösung entfällt.
Stefan Banach war 1936 44 Jahre alt.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 2 - V610932
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V-V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

a) Die Volumina betragen

$$V = 229.336 \text{cm}^3$$
$$V' = 226.980 \text{cm}^3$$

b) Der Fehler beträgt 1,03%.

c) Setzt man die Formeln für d_1 und d_2 in die Gleichung für V ein, erhält man

$$V = \frac{\pi h}{12}\left((d+\delta)^2 + (d+\delta)(d-\delta) + (d-\delta)^2\right)$$
$$V = \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2d\delta + \delta^2 + d^2 - \delta^2 + d^2 - 2d\delta + \delta^2\right)$$
$$V = \frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right)$$
$$V = \frac{\pi h}{4} d^2 + \frac{\pi h}{12}\delta^2$$

Der relative Fehler ist dann

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi h}{12}\delta^2}{\frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right)} = \frac{\delta^2}{3d^2 + \delta^2}$$

Das ergibt in diesem Fall $\frac{3}{292}$, was den 1,03% von oben entspricht.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - V610933
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

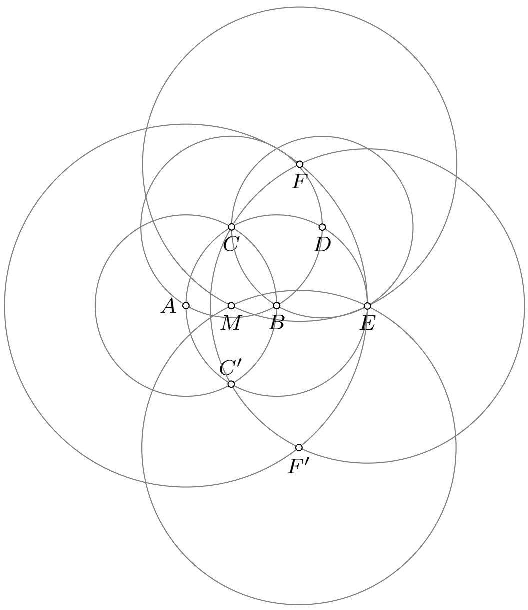
Da n eine ungerade ganze Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl k so, dass $n = 2k + 1$ ist. Es gilt

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k\,(k+1)\,.$$

Da in dem Produkt die zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen k und $k+1$ auftauchen, ist genau eine davon auch durch 2 teilbar. Somit ist $n^2 - 1$ für alle ungeraden ganzen Zahlen n durch 8 teilbar.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V610934
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren:
Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!



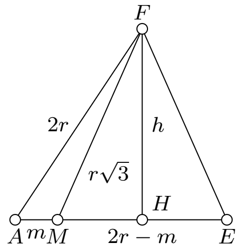
Es sei $AB = r$ der Radius des ersten Kreises. Weiterhin liege A im Koordinatenursprung und B bei $(r, 0)$. Dann ergeben sich für die Punkte auf Grund der Konstruktion die Koordinaten:

$$A(0,0) \quad ; \quad B(r,0) \quad ; \quad C\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad ; \quad E(2r,0)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der Punkte C und E: $CE = \sqrt{3}r$, sowie $AE = 2r$. Für die Punkte F und F' wird mit der Konstruktion für das Dreieck AFE

$$AE = 2r \quad ; \quad AF = 2r \quad ; \quad EF = \sqrt{3}r$$

Der Schnittpunkt M der Kreise um F und F' mit dem Radius EF liegt aus Symmetriegründen auf der Strecke AE (1).



Für den Punkt $M(m;0)$ ergibt sich dann in den zwei rechtwinkligen Dreiecken AHF und MFH für die Höhe h:

$$h^2 = (2r)^2 - \left(m + \frac{2r-m}{2}\right)^2 \qquad ; \qquad h^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2r-m}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen und Auflösen nach m ergibt:

$$m^2 + 4mr - 12r^2 = m^2 - 4mr - 8r^2$$
$$m = \frac{r}{2}$$

Damit ist mit (1) M Mittelpunkt der Strecke AB. w.z.b.w.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - V610935
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

Es ist $2^{10} \bmod 10 = 1024 \bmod 10 = 4 \bmod 10$.
Damit ist $2^{20} \bmod 10 = 16 \bmod 10 = 6 \bmod 10$.
Dann gilt $2^{25} \bmod 10 = \big((2^5 \bmod 10) \cdot (2^{20} \bmod 10)\big) \bmod 10 = 2 \bmod 10$.
Damit folgt $2^{50} \bmod 10 = 4 \bmod 10$ und somit $2^{100} \bmod 10 = 16 \bmod 10 = 6 \bmod 10$.
Das bedeutet, dass die Zahl 2^{100} auf der Ziffer 6 endet.

Aufgabe gelöst von svrc

2. Lösung:
Wegen

$$2^{100} = (2^4)^{25} \equiv 1^{25} = 1 \mod 5$$

kommt als Endziffer nur mehr 1 oder 6 in Frage. Da aber 2^{100} gerade ist, muss es die 6 sein.

Aufgabe gelöst von weird

2.5.4 I. Runde V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611011
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Für die Hackfruchtflächen werden $48{,}72 \cdot 34\text{kg} = 1656{,}48\text{kg}\ P_2O_5$ benötigt. Für die Luzerneflächen werden $20{,}47 \cdot 20\text{kg} = 409{,}40\text{kg}\ P_2O_5$ benötigt. Für die Getreideflächen werden $82{,}5 \cdot 17{,}5\text{kg} = 1443{,}75\text{kg}\ P_2O_5$ benötigt. Insgesamt werden somit $3509{,}83\text{kg}\ P_2O_5$ benötigt.

Superphosphat enthält 17,3 Prozent P_2O_5, sodass insgesamt $\frac{3509{,}63}{0{,}173}\text{kg} \approx 20286\text{kg}$ Superphosphat benötigt werden. Da eine Dezitonne 100kg entspricht, werden 202,86 Dezitonnen Superphosphat benötigt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - V611012
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} &a) && \sin x = \sin 69^\circ \\ &b) && \tan\left(\frac{x}{2} + 32^\circ\right) = 1 \\ &c) && \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

a) $x_1 = 69^\circ; x_2 = 111^\circ$. Wenn die Lösungen unter Berücksichtigung der Periodizität gegeben wurden, also mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$x_1 = 69^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad ; \quad x_2 = 111^\circ + k \cdot 360^\circ$$

b) $x_1 = 26^\circ; x_2 = 206^\circ$. Bei Berücksichtigung der Periodizität

$$x = 26^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

c) Da sowohl $\sin^2 x$ als auch $\cos^2 x$ höchstens den Wert 1 annehmen können, kann die Summe beider niemals 3,2 betragen. Es gibt mithin kein x, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Übernommen von [6]

Aufgabe 4 - V611013
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47^\circ$ und $\gamma = 55^\circ$.
Berechnen Sie b, c und α!

Da die Winkel β und γ an der Seite a anliegen, ist dieses Dreieck nach den Kongruenzsätzen bis auf Kongruenz eindeutig konstruierbar.
Für den Winkel α gilt nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 47^\circ - 55^\circ = 78^\circ.$$

Mit dem Sinussatz gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

und daher

$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(47^\circ)}{\sin(78^\circ)} \approx 3{,}74\text{cm}.$$

Ebenso folgt mit dem Sinussatz

$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(55^\circ)}{\sin(78^\circ)} \approx 4{,}19\text{cm}.$$

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V611014
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse gerade die Summe des Erdradius und der Höhe des Fernsehturms ist. Wir setzen dafür $c = 6370{,}5$km. Die bekannte Kathete ist der Erdradius und wir schreiben dafür $a = 6370$km. Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, da die gesuchte Kathete b tangential am Erdgroßkreis anliegt.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$b^2 = c^2 - a^2 = (6370{,}5\text{km})^2 - (6370\text{km})^2 = 6370{,}25\text{km}^2$$

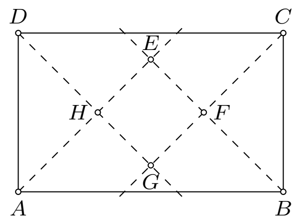
und somit

$$b \approx 79{,}8\text{km}.$$

Das bedeutet, dass man vom Fernsehturm etwa 79,8km weit sehen kann.

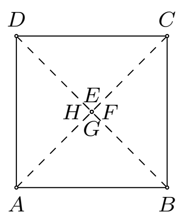
Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V611015
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?



a) Die vier Winkelhalbierenden bilden ein Quadrat $EFGH$.
F und H liegen aus Symmetriegründen auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks $ABCD$. Nach einem Strahlensatz gilt dann $EH : AE = EF : EB$. Da $AE = EB$ ist, gilt auch $EH = FH$. Analog folgt auch $FG = GH$, $EH = GH$ und $GF = EF$, d.h., alle vier Seiten von $EFGH$ sind gleich lang.
Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln von 45° (Winkelhalbierende). Das ist der Winkel bei E ein Rechter und $EFGH$ ist ein Quadrat.

b) Für ein Quadrat fallen die vier Punkte E, F, G und H zusammen, da auch die Diagonalen Symmetrieachsen sind. Es entsteht keine Fläche.



Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2.5.5 II. Runde V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611021
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

A sei die Anfangsproduktion. Dann gilt bei einer jährlichen Wachstumsrate von 10%:

$$\begin{array}{llll}
1959 & A & & \\
1960 & A+\frac{1}{10}A & = A\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1 \\
1961 & A\cdot 1{,}1+\frac{1}{10}A\cdot 1{,}1 & = A\cdot 1{,}1\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1^2 \\
1962 & A\cdot 1{,}1^2+\frac{1}{10}A\cdot 1{,}1^2 & = A\cdot 1{,}1^2\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1^3
\end{array}$$

Nach n-jährigem Wachsen ergibt sich $A\cdot 1{,}1^n$, weil sich durch Ausklammern stets nur ein weiterer Faktor von 1,1 ergibt. Danach gilt die Formel:

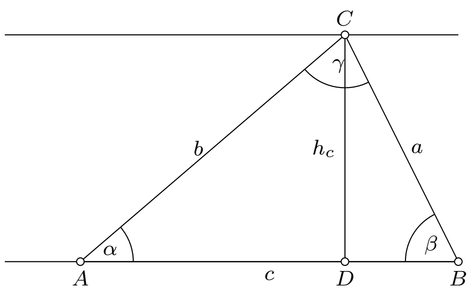
$$x = A\cdot 1{,}1^n$$

Da es nach der Aufgabe nicht auf die Produktion selbst ankommt, sondern auf die Vervielfachung, kann $A = 1$ gesetzt werden; somit ergibt sich:
zu a) $x = 1{,}1^{10} = 2{,}59 \approx 2{,}6$,
zu b) $x = 1{,}1^{20} = 6{,}73 \approx 6{,}8$,
zu c) $x = 1{,}1^{40} = 45{,}26 \approx 45{,}3$.

Die Industrieproduktion der UdSSR wächst in den nächsten 10 Jahren auf das 2,6fache, in den nächsten 20 Jahren auf das 6,8fache ..., wenn eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde gelegt wird.

Übernommen von [6]

Aufgabe 2 - V611022
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm\frac{1}{2}^\circ$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.



a) Allgemeine Lösung: Es gilt $\sin\beta = \frac{CD}{CB} = \frac{h_c}{a}$ sowie $h_c = a\sin\beta$. Aus dem Sinussatz wird durch Einsetzen

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad h_c = \frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

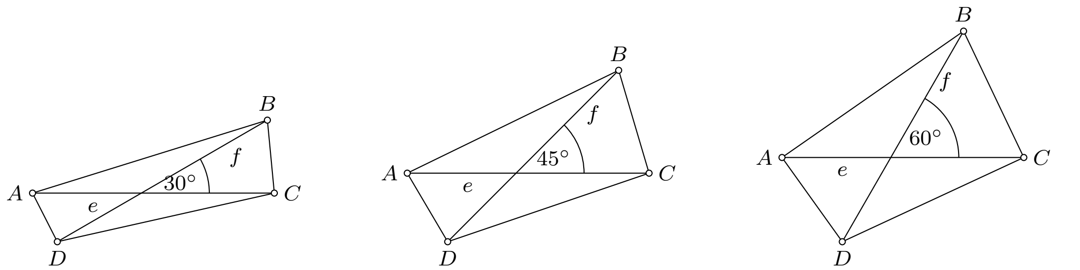
Für die gegebenen Werte ergibt sich somit $h_c = 169{,}5$ m. Die Breite des Flusses beträgt ohne Berücksichtigung des Messfehlers 169,5 m.

b) Berechnet man die Höhe h_c mit $c + 0.5$, $\alpha + 0.5°$ und $\beta + 0.5°$ ergibt sich $h_c = 173{,}3$ m.

Im Fall $c - 0.5$, $\alpha - 0.5°$ und $\beta - 0.5°$ wird $h_c = 165{,}7$ m.
Der mögliche Fehler ist somit $\frac{173{,}5-165{,}5}{2} = 4$ m.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - V611023
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?



Jedes der Vierecke wird durch die Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Dabei entstehen die Diagonalenteile e_1, e_2, f_1, f_2 mit $e = e_1 + e_2$ und $f = f_1 + f_2$. Mit dem Schnittwinkel α der Diagonalen ergibt sich dann für den Flächeninhalt des Vierecks

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}e_1 \cdot f_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_2 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_1 \cdot f_2 \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_1 \sin(180° - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot e \cdot f \end{aligned}$$

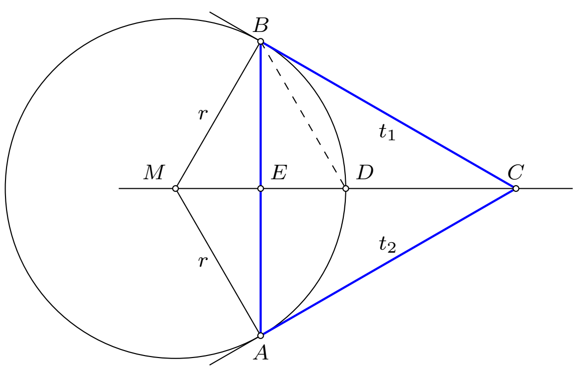
Damit folgt für die Verhältnisse der Flächeninhalte

$$\begin{aligned} F_1 : F_2 &= \sin 30° : \sin 45° = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2} \\ F_2 : F_3 &= \sin 45° : \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} : \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte der drei Vierecke verhalten sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - V611024
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!



Behauptung: Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

Beweis:
1. Winkel $\angle MBC$ ist 90° (Tangente-Berührungsradius).
2. Dreieck MDB ist gleichseitig, alle Seiten sind r, folglich sind auch alle Innenwinkel 60°.
3. Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle MED$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.
4. Das Dreieck CDB ist gleichschenklig. Folglich ist der Winkel $\angle BCD$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.

Im $\triangle EBM$ treten die Winkel $\angle EMB = 60°$ (aus 2.), $\angle MBE = 30°$ (Basiswinkel in ABM) auf, folglich ist Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle EBM$ = Winkel $\angle EBC = 60°$. Im Dreieck EBC ist der Winkel $\angle EBC = 60°$, der Winkel $BCE = 30°$ und der Winkel $\angle BEC = 90°$.
Die Strecke EC ist Symmetrieachse im Dreieck. Daraus folgt, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - V611025
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Mit $g = 2k$ für eine natürliche Zahl k bezeichnen wir die gerade Anzahl Streichhölzer. Mit $u = 2l + 1$ für eine nichtnegative ganze Zahl l bezeichnen wir die ungerade Anzahl Streichhölzer. Es gibt zwei Varianten.

Erste Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der linken Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_1 des Rätsels
$$n_1 = 2 \cdot g + 3 \cdot u = 4k + 6l + 3.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels ungerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der linken Hand befindet.

Zweite Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der rechten Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_2 des Rätsels
$$n_2 = 2 \cdot u + 3 \cdot g = 6k + 4l + 2.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels gerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der rechten Hand befindet.

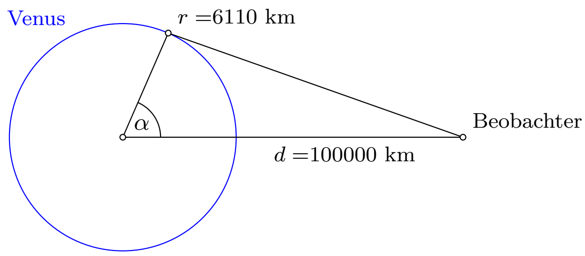
Aufgabe gelöst von svrc

2.5.6 III. Runde V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611031
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

a) Betrachtet man die Himmelskörper wie gefordert näherungsweise als scheibenförmig, dann ist das Raumschiff beim Vorbeiflug 3,84 mal näher als der Mond von der Erde entfernt ist. Außerdem ist die Venus $\frac{12220}{3476}$ mal größer als der Mond, so dass sie einem Beobachter im Raumschiff $\frac{12220}{3476} \cdot 3{,}84 = 13{,}5$ mal größer erscheinen würde als der Vollmond von der Erde aus gesehen.

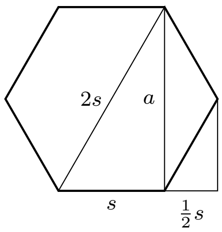
b) Hier ist man versucht, zu antworten: "den ihm Zugewandten". Es soll jedoch wohl der tatsächliche Beobachtungswinkel verwendet werden, um prozentual die sichtbare Fläche der Venus anzugeben. Leider lässt uns die Aufgabe auch im Unklaren darüber, ob mit der Entfernung von 100000 km der Abstand zum Schwerpunkt der Venus oder zur Oberfläche gemeint ist. Wir nehmen das erste an:



Es ist
$$\cos\alpha = \frac{r}{d}$$
Die gesamte Oberfläche der Venus ist
$$A_g = 4\pi r^2$$
Der sichtbare Teil ist dagegen
$$A_s = 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{d}\right)$$
Somit ist der sichtbare Anteil der Oberfläche
$$\frac{A_s}{A_g} = \frac{1-\frac{r}{d}}{2} = \frac{d-r}{2d}$$
Im vorliegenden Fall entspricht das etwa 46,9% der gesamten Oberfläche.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - V611032
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?



a) Die genaue Formel lautet:

$$F_S = (s + \tfrac{1}{2}s)a = \tfrac{3}{2}as$$

Dabei gilt wegen des Satzes von Pythagoras:

$$a = \sqrt{(2s)^2 - s^2} = \sqrt{3}\,s$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Und daher gilt für die genaue Formel:

$$F_S = \frac{3}{2\sqrt{3}}a^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

b) Der prozentuale Fehler ist immer gleich, egal ob $a = 50$mm oder irgendein anderer Zahlenwert ist. Der relative Fehler ist

$$1 - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{7}{4\sqrt{3}} = 1 - \frac{7}{12}\sqrt{3}$$

Das entspricht etwa -1%. (Die Näherung ergibt einen größeren Wert als die genaue Formel, daher negativ).

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

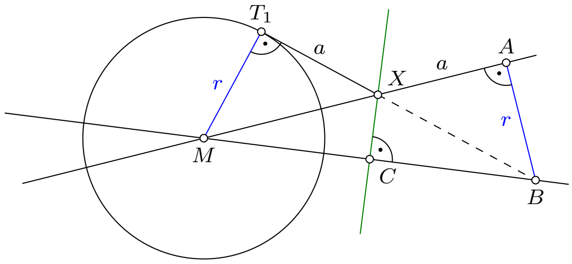
Aufgabe 3 - V611033
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Die Divisionsaufgabe die Fritz gestellt wird, möge $\frac{a}{b}$ lauten. Fritz rechnet $a = 57 \cdot b + 52$, macht die Probe und erhält dabei $57 \cdot b' + 52 = 17380$ wobei sich der Faktor b' irrtümlich in der Zehnerstelle vom korrekten Wert b unterscheidet.

Es folgt dann $b' = \frac{17380-52}{57} = 304$. Laut Aufgabenstellung ergibt sich der wirkliche Wert b, indem die Zehnerstelle 0 von b' durch 6 ersetzt wird. Folglich ist $b = 364$, $a = 57 \cdot 364 + 52 = 20800$ und die Divisionsaufgabe, die Fritz gestellt wurde, lautet $\frac{20800}{364}$.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 4 - V611034
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!



1. Man zeichne Punkt B so, dass die Strecke AB die Länge r (Radius des Kreises) habe und senkrecht stehe auf der Strecke AM, siehe Skizze.
2. Vom Punkt B zeichne man eine Gerade durch M.
3. Man konstruiere den Mittelpunkt C der Strecke MB.
4. Man zeichne eine Senkrechte auf die Gerade MB durch den Punkt C.
5. Der Schnittpunkt dieser Geraden (grün) mit der Geraden AM ist der gesuchte Punkt X.

Begründung:
Man erkennt, dass der Streckenzug MT_1XAB symmetrisch ist bezüglich der "grünen"Geraden CX. a und r stehen senkrecht aufeinander sowohl im Punkt T_1 als auch im Punkt A. T_1 und X sind zwar anfangs noch unbekannt, aber der Punkt C auf der Symmetrieachse lässt sich mit obigen Schritten einfach konstruieren.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V611035
Unter der Zahl $n!$, gelesen "n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Tatsächlich ist ja die Vielfachheit einer Primzahl p in $n!$ bekanntlich einfach

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

was speziell für $p = 5$ dann tatsächlich

$$\left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{25} \right\rfloor = 12$$

ergibt.

Aufgabe gelöst von weird

2. Lösung:
Wir zerlegen alle Faktoren in ihre Primfaktoren. Eine Endnull entsteht genau dann, wenn die Primzahlen 2 und 5 miteinander multipliziert werden. Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus den Faktoren, die als Endziffer eine Null oder eine Fünf haben, d.h:

$$5, 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, 20 = 2^2 \cdot 5, 25 = 5^2, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 35 = 5 \cdot 7, 40 = 2^3 \cdot 5, 45 = 3^2 \cdot 5, 50 = 2 \cdot 5^2.$$

Insgesamt taucht der Primfaktor 5 12 Mal auf. Da der Primfaktor 2 in jeder geraden Zahl auftaucht, hat die Zahl 50! insgesamt 12 Endnullen.

Aufgabe gelöst von svrc

2.5.7 II. Runde V1961, Klasse 11

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

Aufgabe 1 - V611121
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

a) Mit $x = 1$ cm^3, $y = 10$ cm^3, $x + y = 11$ cm^3 ist das Verhältnis 1:10 und für das Mischungsverhältnis 1:2000000 ergibt sich damit:

$$\left(\frac{1}{11}\right)^n = \frac{1}{2000000}$$

$$n = \frac{\log(2000000)}{\log(11)} \approx 6$$

b)

$$n_{Bak} = \frac{10000000}{2000000} = 5$$

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 2 - V611122
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

a) Wir suchen zuerst die konstante Beschleunigung

$$a(t) = a_0$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$. Es gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = a_0 t$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$ wegen $v(0\text{s}) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da

$$v(14\text{s}) = a_0 \cdot (14\text{s}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{80000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ist, folgt

$$a_0 = \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{1}{14\text{s}} = \frac{100}{63}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und somit für die zurückgelegte Wegstrecke nach 14 Sekunden

$$w(14\text{s}) = \frac{a_0}{2} \cdot (14\text{s})^2 = \frac{19600}{126}\text{m} = \frac{1400}{9}\text{m} \approx 0{,}156\text{km}.$$

Also legt das Fahrzeug in der Beschleunigungsphase eine Strecke von ungefähr 0,156km zurück.

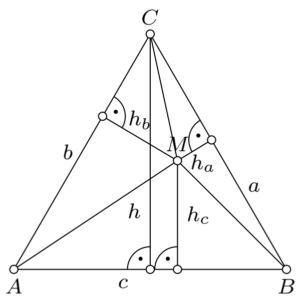
b) Für die Gesamtstrecke von 1km gilt

$$w_{\text{gesamt}} = \frac{1400}{9}\text{m} + \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot t_2 = \frac{9000}{9}\text{m}.$$

Somit folgt
$$\left(\frac{200}{9}\frac{m}{s}\right) \cdot t_2 = \frac{7600}{9}\text{m}$$
und daher $t_2 = 38\text{s}$. Damit ist 1km entsprechend nach
$$t_{\text{gesamt}} = 14\text{s} + 38\text{s} = 52\text{s}$$
zurückgelegt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 3 - V611123
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.



Wir bezeichnen mit ΔABC das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Da das Dreieck gleichseitig ist, gilt für die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten $a = \left|\overline{BC}\right|$, $b = \left|\overline{AC}\right|$ und $c = \left|\overline{AB}\right|$, dass $a = b = c$ ist. Diese Seiten möchten wir alle als Grundseite $g = a = b = c$ bezeichnen.

Liegt im Inneren des Dreiecks ein Punkt M, so entstehen die drei Dreiecke ΔABM, ΔBCM und ΔCAM. Diese Dreiecke besitzen ebenfalls die Grundseite g.

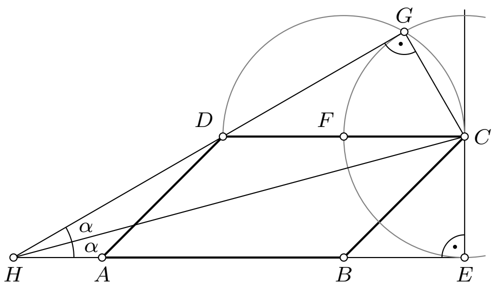
Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC mit Grundseite g und Höhe h ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei kleineren Dreiecke. Die Höhen in ΔABM, ΔBCM und ΔCAM nennen wir h_1, h_2 und h_3. Dies sind auch die Abstände von M zur entsprechenden Grundseite.

Es gilt somit
$$\frac{gh}{2} = \frac{gh_1}{2} + \frac{gh_2}{2} + \frac{gh_3}{2} = \frac{g}{2} \cdot \{h_1 + h_2 + h_3\}$$
und daher folgt
$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$
was die Behauptung zeigt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V611124
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

Den gesuchten Punkt H konstruiert man wie folgt:
1. Zeichne eine Senkrechte von C auf die Gerade AB. Der Schnittpunkt ist E.
2. Zeichne einen Kreis um den Mittelpunkt C durch den Punkt E.
3. Konstruiere den Mittelpunkt F der Strecke CD.
4. Zeichne einen Halbkreis um den Punkt F vom Punkt C zum Punkt D. Der Schnittpunkt der Kreise ist G.
5. Zeichne eine Gerade durch die Punkte D und G. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Gerade AB ist der gesuchte Punkt H.



Begründung:
Die Gerade HC muss die Winkelhalbierende der Geraden HE und HG sein. Das ist der Fall, weil die Dreiecke HEC und HCG kongruent sind, da sie in G und E einen rechten Winkel aufweisen, die Seite HC gemeinsam haben und eine weitere Seite (CG bzw. CE) gleich lang ist (SSW). Damit der Winkel $\angle DGC$ rechtwinklig ist, wurde wegen des Satzes von Thales der Kreis um den Mittelpunkt F mit dem Kreis um C geschnitten.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V611125

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Das Additions- und das Divisionszeichen.

b) Gesucht sind (rationale) Zahlen a,b,c mit $b \neq 0$ und (1) $a + b = c$ (2) $a : b = c$
Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $a + b = a : b$ und daraus

$$a = \frac{b^2}{1-b}$$

Dies in (1) eingesetzt ergibt $\frac{b^2}{1-b} + b = c$ und daraus

$$c = \frac{b}{1-b}$$

Für jedes $b \neq 0{,}1$ ergibt sich damit eine Aufgabe

$$\frac{b^2}{1-b} + b = \frac{b}{1-b}$$

Wählt man $0 < b < 1$, so sind alle Werte a,b,c zudem positiv.

c) Mit $b = \frac{1}{3}$ ergibt sich $a = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{1}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Mit $b = \frac{3}{5}$ ergibt sich $a = \frac{9}{10}$ und $c = \frac{3}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

d) a,b,c können nicht alle positive ganze Zahlen sein, da für eine ganze Zahl $b > 1$ die Zahl $c = \frac{b}{1-b}$ negativ ist. (Zudem ist $1 - b$ kein Teiler von b; c ist also noch nicht einmal ganz.)

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

2.5.8 III. Runde V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611131
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Vom Materialverbrauch ist es am günstigsten, zunächst das Baumaterial für die Wohnungen vom Typ B zu verwenden. Es ist

$$y \leq \frac{24000}{22} \approx 1090{,}9$$

und somit werden 1090 Wohnungen vom Typ B gebaut. Damit muss

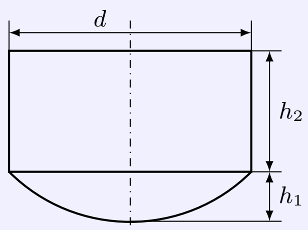
$$\begin{aligned} 5{,}23x + 4{,}19y &\leq 8000; \\ 5{,}23x &\leq 3432{,}9; \\ x &\leq \frac{3432{,}9}{5{,}23} \approx 656{,}386 \end{aligned}$$

sein, also werden 656 Wohnungen vom Typ A gebaut. Es muss also $x = 656$ und $y = 1090$ gelten.

Wollte man nur Wohnungen vom Typ A bauen, wäre $x < 1600$ und damit ist oben der günstigste Fall beschrieben, um die Gesamtanzahl zu maximieren.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - V611132



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

a) Die Gesamtfläche des Blechbehälters ist

$$A = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

Diese Fläche soll gleich der Fläche der kreisförmigen Blechscheibe sein, deren Durchmesser D sei. Daher gilt:

$$\frac{D^2\pi}{4} = \pi dh_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$
$$D = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2 + dh_2}$$

b) Der Durchmesser der Blechscheibe betrug $D = 416{,}8$mm.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und OlgaBarati

Aufgabe 3 - V611133
Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

a) O.B.d.A. seien $A = (-\frac{e}{2},0)$ und $B = (\frac{e}{2},0)$, so sind alle Punkte $F = (x,y)$ mit

$$s = ((x + \frac{e}{2})^2 + y^2) + ((x - \frac{e}{2})^2 + y^2) = 2x^2 + 2 \cdot \frac{e^2}{4} + 2y^2$$

gesucht. Diese Gleichung ist äquivalent zur Kreisgleichung

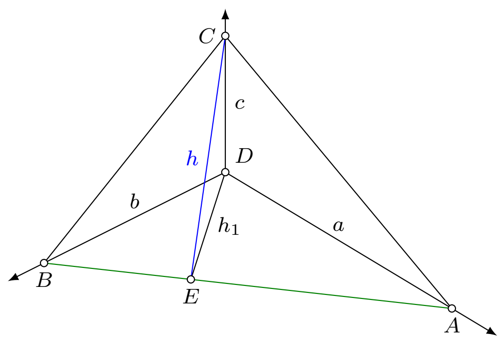
$$x^2 + y^2 = \frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Die gesuchten Punkte F bilden also einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke AB ist und dessen Radius $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}$ ist.

b) Da Quadrate reeller Zahlen stets größer oder gleich Null sind, gibt es nur solche Punkte F, wenn $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4} \geq 0$ ist. Insbesondere gibt es nicht bei jeder Wahl von e und s solche Punkte.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 4 - V611134
Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke. Beweisen Sie diese Behauptung!



Die gesuchte Fläche des Dreiecks ABC ist

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}dh = \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2c^2 + (\tfrac{1}{2}dh_1)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2c^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2 + A_{ABD}^2} = \sqrt{A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2}$$

Daher gilt

$$A_{ABC}^2 = A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V611135
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist?
b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

a) 1. Wägung: Es werden für jede Waagschale vier Kugeln ausgewählt. Fünf Kugeln werden nicht gewogen.

1.1. Die Waage zeigt Gleichgewicht. Dann sind die 8 Kugeln neutral. Drei dieser Kugeln wiegt man (rechte Seite) gegen 3 noch nicht verwendete Kugeln (linke Seite).

1.1.1. Ist die linke Seite leichter, so ist eine von den drei Kugeln leichter. Zwei dieser Kugeln werden gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.1.2. Ist die linke Seite schwerer, so ist eine von den drei Kugeln schwerer. Analog zu 1.1.1. bestimmt man diese.

1.1.3. Keine Seite ist leichter. Dann muss die gesuchte Kugel unter den zwei bisher noch bei keiner Wägung verwendeten Kugeln sein. Eine von beiden Kugeln vergleicht man mit einer neutralen. Bei Gleichgewicht ist die noch nicht verwendete die gesuchte, andernfalls findet man die gesuchte, die entweder zu leicht oder zu schwer ist.

1.2. Die Waage zeigt kein Gleichgewicht. O.B.d.A. sei die linke Seite leichter. Auf die eine Waagschale werden dann drei von der leichten Seite und eine von der schweren Seite gegen eine der leichten Seite und 3 bisher noch nicht verwendete Kugeln gewogen.

1.2.1. Die linke Seite ist leichter. Damit ist eine von drei Kugeln leichter. Nun werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.2.2. Beide Seiten sind gleich schwer. Damit muss eine der drei Kugeln der rechten Seite der 1.Wägung (die bei der 2.Wägung nicht benutzt wurden) muss damit schwerer sein. Es werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen schwerer, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel schwerer.

1.2.3. Die linke Seite ist schwerer. Dann kann die eine Kugel der linken Seite, die von der schweren Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu schwer, oder die eine Kugel der rechten Seite, die von der leichten Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu leicht. Die vielleicht zu schwere Kugel wird mit einer der neutralen Kugeln verglichen. Entweder ist sie schwerer oder die nicht verwendete Kugel ist zu leicht.

b) In allen Fällen, außer dem Fall 1.1.3. bei dem die allerletzte nicht verwendete Kugel die gesuchte ist, kann man entscheiden, ob die gesuchte Kugel zu leicht oder zu schwer ist. In diesem einen Fall allerdings nicht.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2.5.9 II. Runde V1961, Klasse 12

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

Aufgabe 1 - V611221
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

a) Der Ausgangspunkt war der Nordpol. Jede beliebige, geradlinige Strecke, die am Nordpol beginnt, führt Richtung Süden, und egal wie weit man in Richtung Osten oder Westen fliegt, wenn man anschließend die gleiche Streckenlänge wieder in Richtung Norden fliegt, kommt man wieder am Nordpol an. Allerdings setzt das voraus, dass man in Richtung Osten entlang eines Breitenkreises geflogen ist, und nicht geradlinig. (geradlinig heißt in diesem Zusammenhang natürlich entlang eines Großkreises).

b) Hier gilt sinngemäß das gleiche wie unter a), nämlich dass der Flug Richtung Osten entlang eines Breitenkreises erfolgt. Auf der Südhalbkugel ist die Rückkehr an den Ausgangspunkt nur möglich, wenn der Punkt, an dem von Flugrichtung Süd auf Ost gewechselt wird, derselbe ist wie der, wo die Flugrichtung von Ost auf Nord wechselt. Der Breitenkreis muss also einen Umfang von 300 km haben. Angesichts der geringen Erdkrümmung reicht eine näherungsweise Betrachtung. Der Breitenkreis muss somit $\frac{300\text{km}}{2\pi} = 47{,}75\text{km}$ vom Südpol entfernt sein.

Man kehrt mit obiger Route also genau dann zum Ausgangspunkt zurück, wenn dieser 347,75km vom Südpol entfernt ist.

Alle Punkte, die auf den die Breitenkreisen liegen, die 300 km nördlich von den Breitenkreisen mit Umfang 150 km oder 100 km oder 75 km entfernt sind, haben auch die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und ochen

Aufgabe 2 - V611222
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Der Binomialkoeffizient für nichtnegative ganze Zahlen k und n mit $n \geq k$ ist durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

definiert. Dieser ist in diesem Falle stets eine nichtnegative ganze Zahl. Es gilt $720 = 6!$. Wir bezeichnen das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit

$$n_k = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) = \prod_{j=k}^{k+5} j$$

für eine beliebige natürliche Zahl k. Mit der Definition des Binomialkoeffizienten und $720 = 6!$ folgt

$$\begin{aligned} n_k &= \prod_{j=k}^{k+5} j \\ &= 6! \cdot \frac{\left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right) \cdot \left(\prod_{j=k}^{k+5} j\right)}{6! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right)} = 6! \cdot \frac{(k+5)!}{6! \cdot (k-1)!} = 720 \cdot \binom{k+5}{k-1} \end{aligned}$$

und da der Binomialkoeffizient stets eine nichtnegative ganze Zahl ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 3 - V611223
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & \text{für } |x|>1\\ x^3 & \text{für } |x|\leq 1\end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x=-2$ und $x=2$ begrenzt wird!

1) Wir diskutieren die Funktion. Es gilt

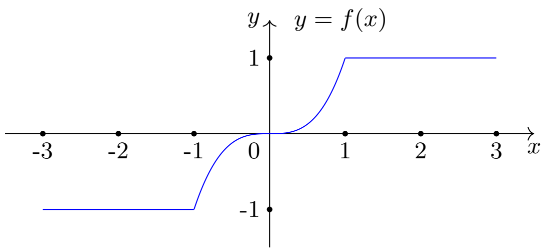
$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{für}\, x<-1,\\ x^3 & \text{für}\, -1\leq x\leq 1,\\ 1 & \text{für}\, x>1\end{cases}$$

für die Funktion. Damit ist die Funktion f für $x<-1$ konstant mit Funktionswert -1. An der Stelle $x=-1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Für $-1\leq x\leq 1$ gilt die Vorschrift $f(x)=x^3$ und somit liegt an $x=0$ ein Wendepunkt vor, da $f''(0)=6\cdot 0=0$ und $f'''(0)=6>0$ gilt. An der Stelle $x=1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Ferner ist die Funktion f für $x>1$ konstant mit Funktionswert 1.

Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da

$$-f(-x)=f(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.



2) Wegen der Punktsymmetrie kann der betrachtete Flächeninhalt nach

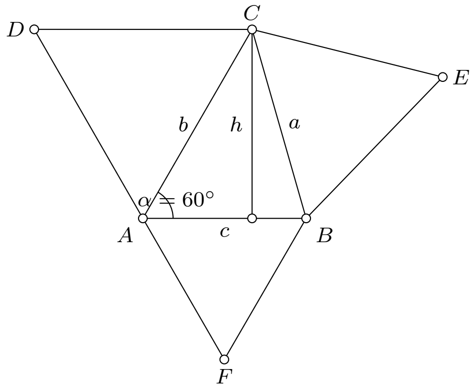
$$A_{\text{gesamt}}=2\cdot\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot\left\{\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int_1^2 1\,\mathrm{d}x\right\}$$

berechnet werden. Daher gilt

$$A_{\text{gesamt}}=2\cdot\left\{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+1\right\}=2\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{2}.$$

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V611224
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von $60\circ$ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!



Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks BEC ist

$$A_{BEC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Die anderen Flächen der gleichseitigen Dreiecke berechnen sich in gleicher Weise. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC lautet

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

Daher soll gelten:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}bc + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Laut dem Kosinussatz gilt außerdem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ$$

Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist, ist die obige Gleichung tatsächlich erfüllt. q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V611225
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

Da die vierte Potenz der Quersumme vierstellig sein soll und $5^4 < 1000$, $10^4 > 9999$ gilt, kommt für die Quersumme nur 6, 7, 8 oder 9 infrage. Es gilt weiterhin $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ und $9^4 = 6561$. Die gesuchte Zahl ist somit 2401 mit der Quersumme 7.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

2.5.10 III. Runde V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611231
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

Seien x die Bestellungen pro Jahr und die jährlichen Gesamtkosten, bestehend aus den Bestellkosten und den Lagerkosten für dieses Halbfabrikat,

$$K_G = K_B + K_L = 30x + \frac{1200}{x}$$

so ergeben sich die Kosten für a)

$$K_G = K_B + K_L = 30 \cdot 4 + \frac{1200}{4} = 420.$$

und die geringsten Gesamtkosten für b)

$$K'_G = 30 - \frac{1200}{x^2}$$
$$30x^2 - 1200 = 0$$
$$x = [\sqrt{40}] = 6$$

Für x=6 eingesetzt erhält man tatsächlich der geringsten Wert von 380. Mit $x = 5$, $x = 7$ steigen die Kosten bereits wieder an.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 2 - V611232
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Da der Zug 3000m in 180s zurücklegt, beträgt seine Geschwindigkeit $v_Z = \frac{3000\text{m}}{180\text{s}}$. Das Verhältnis der Tropfen-Fallgeschwindigkeit v_T zur Zuggeschwindigkeit muss gleich dem Verhältnis der Fensterhöhe zur -breite sein. Daher ist die Fallgeschwindigkeit:

$$v_T = \frac{85}{100} \cdot \frac{3000\text{m}}{180\text{s}} = 14{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - V611233
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Wir legen den Kreis mit dessen Sehnen in ein Koordinatensystem, sodass der Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und die Sehnen parallel zu jeweils einer der Koordinatenachsen verlaufen. Der Radius des Kreises sei mit r bezeichnet.
Der Schnittpunkt der Sehnen habe die Koordinaten (x,y), so haben die Endpunkte der einen Sehne die Koordinaten $(x, \pm\sqrt{r^2-x^2})$ und die Endpunkte der anderen Sehne die Koordinaten $(\pm\sqrt{r^2-y^2},y)$.
Die Summe der vier Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser

$$\frac{\pi}{4}(y-\sqrt{r^2-x^2})^2+\frac{\pi}{4}(y+\sqrt{r^2-x^2})^2+\frac{\pi}{4}(x-\sqrt{r^2-y^2})^2+\frac{\pi}{4}(x+\sqrt{r^2-y^2})^2=$$

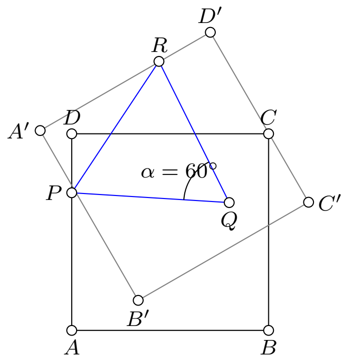
$$=\frac{\pi}{4}((y-\sqrt{r^2-x^2})^2+(y+\sqrt{r^2-x^2})^2)+\frac{\pi}{4}((x-\sqrt{r^2-y^2})^2+(x+\sqrt{r^2-y^2})^2)=$$

$$=\frac{\pi}{4}(2y^2+2(r^2-x^2))+\frac{\pi}{4}(2x^2+2(r^2-y^2))=\pi r^2$$

Das ist genau der Flächeninhalt des Kreises. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 4 - V611234
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?



Da PQR ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $\overline{QR}=\overline{QP}$. R entsteht also aus P durch Drehung des Punktes P um Q um 60° oder −60° (bildlich dargestellt ist die Drehung um −60°). Dadurch werden auch alle Punkte des Quadrates und das Quadrat als ganzes um 60° um Q gedreht. Die Kurve, die R beschreibt, ist daher das um ±60° um den Punkt Q gedrehte Quadrat.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V611235
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

Vor Wägung a ist jede der durchnummerierten Kugeln mit $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, ...{}^uK_{12}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$ (u)nbestimmt. Nur die Kugel ${}^bK_0^0$ ist als Kugel ohne Gewichtsabweichung ist (b)estimmt.

Wägung a erfolgt mit der Aufteilung links $\{{}^bK_0^0, {}^uK_6^\pm, {}^uK_8^\pm, {}^uK_{10}^\pm, {}^uK_{12}^\pm\}$ und rechts mit $\{{}^uK_5^\pm, {}^uK_7^\pm, {}^uK_9^\pm, {}^uK_{11}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$. Die Kugeln $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$ werden im Durchgang a nicht gewogen.

$$a = (+1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^+, {}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_{12}^+\}, \{{}^uK_5^-, {}^uK_7^-, {}^uK_9^-, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (-1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^-, {}^uK_8^-, {}^uK_{10}^-, {}^uK_{12}^-\}, \{{}^uK_5^+, {}^uK_7^+, {}^uK_9^+, {}^uK_{11}^+, {}^uK_{13}^+\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (\pm 0): \ \{{}^bK_0^0, {}^bK_6^0, {}^bK_8^0, {}^bK_{10}^0, {}^bK_{12}^0\}, \{{}^bK_5^0, {}^bK_7^0, {}^bK_9^0, {}^bK_{11}^0, {}^bK_{13}^0\}, \{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$$

Anmerkung: Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden jeweils nur die mit der Wägung zu untersuchenden Kugeln genannt. Die neutralen Kugeln, mit denen die Stückzahl auf zehn aufgefüllt wird, werden nicht einzeln benannt. Es sind für alle Fälle immer ausreichend bestimmte neutrale Kugeln vorhanden.

Für $a = (\pm 0)$ ist für die vier Kugeln, von denen nicht bekannt ist, welche davon im Gewicht abweicht, mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.
Wägung b, links $\{{}^uK_2^\pm, {}^uK_4^\pm\}$, rechts ${}^uK_3^\pm$, die Kugel${}^uK_1^\pm$ wird im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_2^+, {}^uK_4^+\}, {}^uK_3^-, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^+$, rechts ${}^uK_2^+$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^-$

$c = (+1): \ {}^bK_4^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0$ Formel $(0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(0+1+1)} = (+4)$
$c = (-1): \ {}^bK_2^+, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^-, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (-1): \ \{{}^uK_2^-, {}^uK_4^-\}, {}^uK_3^+, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^-$, rechts ${}^uK_2^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^+$

$c = (+1): \ {}^bK_4^0, {}^bK_1^0, {}^bK_2^-, {}^bK_3^0$
$c = (-1): \ {}^bK_2^0, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^-$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (\pm 0): \ \{{}^bK_2^0, {}^bK_4^0\}, {}^bK_3^0, {}^uK_1^\pm$

Wägung c, links ${}^uK_1^\pm$, rechts ${}^bK_0^0$

$c = (+1): \ {}^bK_1^+, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (-1): \ {}^bK_1^-, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

$c = (\pm 0):\ {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

Für $a = (1)$ ist für vier Kugeln, von denen eine möglicherweise schwerer ist und für fünf Kugeln von denen möglicherweise eine leichter ist, ist mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.

Wägung b, links $\{{}^uK_5^-, {}^uK_{12}^+, {}^uK_7^-\}$, rechts $\{{}^uK_{11}^-, {}^uK_6^+, {}^uK_{13}^-\}$, die Kugeln ${}^uK_8^+, {}^uK_9^-, {}^uK_{10}^+$ werden im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1):\ \{{}^uK_{12}^+, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}$

Wägung c, links ${}^uK_{13}^-$, rechts ${}^uK_{11}^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_{12}^+$

$c = (+1):\ {}^bK_{13}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(1+1+1)} = (-13)$
$c = (-1):\ {}^bK_{11}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1))(-1)^{(1+1-1)} = (-11)$
$c = (\pm 0):\ {}^bK_{12}^+$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0)(-1)^{(1+1+0)} = (12)$

$b = (-1):\ \{{}^uK_5^-, {}^uK_6^+, {}^uK_7^-\}$
Analog.

$b = (\pm 0):\ \{{}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_9^-\}$
Analog.

Die Behauptung stimmt und berechnet sich für $a = (-1)$ analog.

Die Auswahl der Kugeln für die Wägevorgänge ist damit auch so gewählt, dass mit der Formel

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

die abweichende Kugel zu bestimmen ist und zwar so, dass das Vorzeichen plus oder minus angibt, ob die Kugel leichter oder schwerer ist. Es sind somit für Wägung a die Werte $|n| \leq 4$ und bei Wägung b die Werte $8 \leq |n| \leq 10$ von der Wägung auszuschließen.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Anmerkung:
Dieser Text enthält alle 127 Aufgaben der Mathematik-Vorolympiade der Klassenstufen 9 bis 12 von 1960 und 1961.
Die Texte wurden aus verschiedenen Quellen zusammengetragen. Die Lösungen wurden durch Mitglieder des Mathematikforums "Matroids Matheplanet" erstellt und zum Teil aus Quellen entnommen, darunter der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha"und dem Buch "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR" von Prof. W.Engel und Prof. U.Pirl.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift der Originaltexte.
Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Die Rechtschreibung und Grammatik wurde der heutigen Form angepasst. Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst. Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.

Der einleitende Text jedes Aufgabenblattes:

> Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

wurde nicht übernommen.

Quellen:

1) Zeitschrift "alpha", Verlag Volk und Wissen 1967-1989

2) "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR", W.Engel und U.Pirl, Verlag Volk und Wissen 1975

3) Offizielle Aufgabenkommission