208 Aufgaben der Vorolympiaden der Klassenstufen 5 bis 12 der Mathematik-Olympiaden von 1960 und 1961

OJM

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben - Klassenstufe 5 **3**
1.1 Vorolympiade 1960/61 3

2 Aufgaben - Klassenstufe 6 **5**
2.1 Vorolympiade 1960/61 5

3 Aufgaben - Klassenstufe 7 **7**
3.1 Vorolympiade 1960 7
3.2 Vorolympiade 1961 10

4 Aufgaben - Klassenstufe 8 **14**
4.1 Vorolympiade 1960 14
4.2 Vorolympiade 1961 17

5 Aufgaben - Klassenstufe 9 **20**
5.1 Vorolympiade 1960 20
5.2 Vorolympiade 1961 23

6 Aufgaben - Klassenstufe 10 **26**
6.1 Vorolympiade 1960 26
6.2 Vorolympiade 1961 29

7 Aufgaben - Klassenstufe 11 **32**
7.1 Vorolympiade 1960 32
7.2 Vorolympiade 1961 36

8 Aufgaben - Klassenstufe 12 **38**
8.1 Vorolympiade 1960 38
8.2 Vorolympiade 1961 42

1 Aufgaben - Klassenstufe 5

1.1 Vorolympiade 1960/61

1.1.1 Wettbewerb V1960/61, Klasse 5

Aufgabe 1 - V00501
Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,00 DM. Ein Meter Zaun wird mit 4,00 DM berechnet.
Berechne die Fläche dieses Gartens und verwandle das Ergebnis in Hektar.

Aufgabe 2 - V00502
Nimm eine dreistellige Zahl; allerdings mit der Einschränkung, dass die erste und letzte Ziffer nicht übereinstimmen; setze die Ziffer in umgekehrter Reihenfolge darunter und stelle die Differenz fest! Schreibe die Umkehrung dieser Zahl nochmals darunter! Addiere dann Umkehrung und Differenz! Führe die Aufgabe an zwei Beispielen durch! Was stellst du fest?

Aufgabe 3 - V00503 = V00607
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält dann 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Aufgabe 4 - V00504
Die dreifache Summe der beiden Zahlen 14076 und 1009 soll um die doppelte Summe der beiden Zahlen 8072 und 496 vermehrt werden.

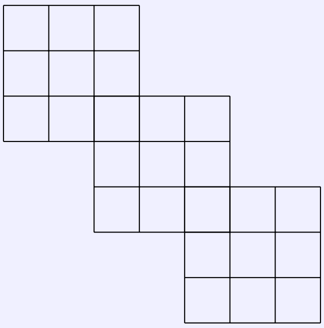
Aufgabe 5 - V00505
Wieviel Zündhölzer (5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch) lassen sich in einem Würfel von 1 m Kanten1änge unterbringen?

Aufgabe 6 - V00506
1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; usf.
Diese Zahlenfolge ist nach einem bestimmten Gesetz aufgebaut. Setze diese Zahlenfolge bis über 50 hinaus fort!

Aufgabe 7 - V00507
Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe: $\star\star\star\star - \star\star\star = 1$.

Aufgabe 8 - V00508
Drei Freunde sitzen in einer Gaststätte. Jeder hat 10 DM zu zahlen. Das sind insgesamt 30 DM. Der Wirt beauftragt jedoch den Ober, den Gästen 5 DM zurückzuzahlen.
Der Ober gibt jedem Gast aber nur 1 DM zurück, also insgesamt 3 DM, und behält 2 DM für sich. Die Freunde haben also für die Zeche zusammen 27 DM bezahlt. 2 DM hat der Ober behalten. Das sind 29 DM.
Wo ist die restliche Mark?

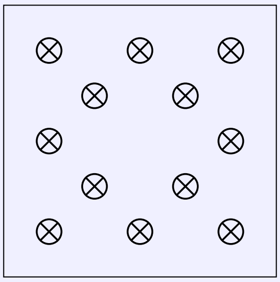
Aufgabe 9 - V00509



Setze in der Figur Zahlen zwischen 1 und 9 so ein, dass die waagerechte und senkrechte Addition stets die Summe von 18 ergibt!

Aufgabe 10 - V00510
Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm!
Schraffiere davon $\frac{4}{9}$ (vier Neuntel)!

Aufgabe 11 - V00511



In einem quadratischen Obstgarten sind 12 Obstbäume so angeordnet, wie die Zeichnung zeigt.
Der Garten soll durch zwei gerade Linien so in vier Teile zerlegt werden, dass auf jedem Stück drei Bäume stehen.

2 Aufgaben - Klassenstufe 6

2.1 Vorolympiade 1960/61

2.1.1 Wettbewerb V1960/61, Klasse 6

Aufgabe 1 - V00601
Vor dem Zusammenschluss landwirtschaftlicher Einzelbetriebe eines Dorfes zur LPG musste eine Traktorenbrigade wegen der auseinanderliegenden Felder häufig den Arbeitsplatz wechseln. Sie hatte dadurch am Tage (8 Std.) 2,3 Stunden Leerlauf je Traktor.
Nach dem Zusammenschluss konnte mit jedem Traktor ohne Unterbrechung auf dem Felde gearbeitet werden.

a) Wieviel Hektar können mit jedem Traktor je Tag zusätzlich gepflügt werden, wenn in einer Stunde 0,26 ha gepflügt werden?
b) Die Brigade arbeitet mit 5 Traktoren, ziehe die Schlussfolgerung!

Aufgabe 2 - V00602
Fünf Arbeitsgemeinschaften einer Schule kommen am 1. Juli zusammen, um ihre Ferienpläne zu beraten.
Sie beschließen, dass die Biologen jeden zweiten Tag, die Physiker jeden dritten Tag, die Geographen jeden vierten Tag, die Modellbauer jeden fünften Tag und die Elektrotechniker jeden sechsten Tag zusammenkommen. An dem Tag, an dem alle Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammenkommen, wollen sie ihre Arbeit auswerten.
Wann ist dieser Tag, wenn die Gruppen ab 1. Juli regelmäßig (auch an Sonntagen) zusammenkommen?

Aufgabe 3 - V00603
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wieviel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

Aufgabe 4 - V00604
Ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier beliebiger Zahlen stets durch ihre größten gemeinsamen Teiler teilbar? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 5 - V00605
Wieviel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

Aufgabe 6 - V00606
Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $\frac{7}{9}$ und kleiner als $\frac{8}{9}$ ist?

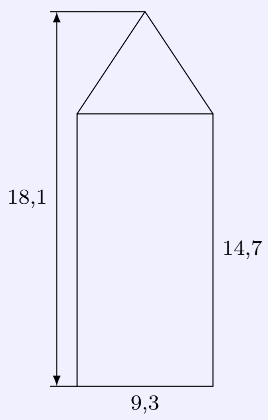
Aufgabe 7 - V00607 = V00503
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Aufgabe 8 - V00608
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe h_c mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!

Aufgabe 9 - V00609

In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m^2 Kalkanstrich!

Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.



Aufgabe 10 - V00610
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

Aufgabe 11 - V00611
Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge wird schwarz angestrichen. Dann wird er so zerschnitten, dass 27 kleinere Würfel entstehen.
Dabei entstehen Würfel mit drei schwarzen Seitenflächen, andere mit zwei, andere nur mit einer und Wieder andere, die überhaupt keine schwarzen Seitenflächen haben.
Wieviel Würfel sind in jeder Gruppe vorhanden und welche Länge haben die Kanten der 27 kleinen Würfel?

Aufgabe 12 - V00612
Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnung so flüchtig hingeschrieben, dass er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann.
Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?
(Das Zeichen ? ist anstelle der unleserlichen Ziffern gesetzt).

```
? ? 5 ? ? : ? 9 = ? ? ?
1 ? ?
-----
  1 0 ?
    ? 7
  -----
    2 ? 3
    ? ? ?
    -----
```

3 Aufgaben - Klassenstufe 7

3.1 Vorolympiade 1960

3.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 7

Aufgabe 1 - V00701
Drei Klassen halfen im NAW und putzten im Wettbewerb 9600 Ziegel ab. Die Klasse 7a putzte 840 Ziegel mehr ab als die Klasse 7b, die Klasse 7c jedoch schaffte 360 Stück mehr als die Pioniere der Klasse 7a.

Wer gewann den Wettbewerb, welche Leistungen erzielten die einzelnen Klassen (in Stück- und Prozentzahlen)?

Aufgabe 2 - V00702
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten:

```
117??? : ??3 = ???
 ??6
 ----
 187?
 ????
 -----
  ????
  ????
  ----
     0
```

Aufgabe 3 - V00703
Der zehnte Teil einer Zahl wird um 3 vermehrt. Der gleiche Wert ergibt sich, wenn man $\frac{1}{100}$ dieser Zahl um 6 vermindert!
Wie heißt sie?

Aufgabe 4 - V00704
Welche der beiden Zahlen ist die größere?

$$\frac{35}{47} \quad \text{oder} \quad \frac{23}{31}$$

Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

Aufgabe 5 - V00705

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Welche Rechenzeichen können an Stelle des Fragezeichens stehen?

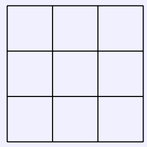
Aufgabe 6 - V00706
Für das Gehäuse einer Haushaltwaage wurde im VEB Thüringer Industriewerk Rauenstein ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm.
Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen.

Berechne die Materialeinsparung in t für eine Auflage von 100000 Stück!
(Dichte des Eisens 7,8 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)

Aufgabe 7 - V00707
Herr A fährt mit seinem PKW auf der Autobahn mit 100 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ an einer Tankstelle (T_1) vorbei. 35 km hinter T_1 muss Herr A den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (T_2) auf der Autobahn noch weitere 35 km entfernt ist, geht Herr A auf 60 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ herunter, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird Herr A die Strecke zwischen T_1 und T_2 unter diesen Bedingungen zurücklegen?

Aufgabe 8 - V00708

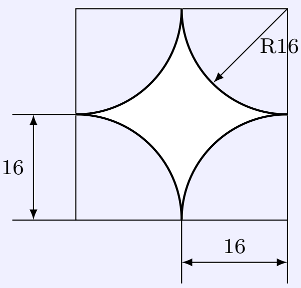
In die 9 Felder des abgebildeten Quadrats sind die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass du waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe 15 erhältst.



Aufgabe 9 - V00709
Löse folgendes Zahlenrätsel, in dem gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:

```
abb - cdb = ebd
 :     +     -
 fg *  ch = gic
---------------
 fk + cfc = cbi
```

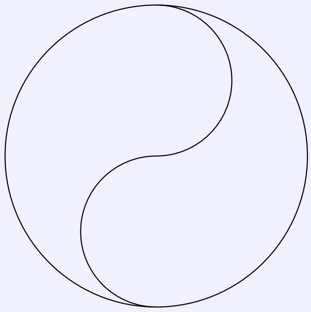
Aufgabe 10 - V00710
Berechne die Fläche des in der Abbildung dargestellten Stanzteiles in Quadratzentimetern.



Aufgabe 11 - V00711
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse (längste Seite) $c = 6$ cm beträgt und in dem der Fußpunkt der Höhe h_c vom Punkt B aus einen Abstand von 2 cm hat! Miss die Höhe h_c!

Aufgabe 12 - V00712
Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen.
Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, dass er die beiden ersten Kreise von außen berührt!
Begründe kurz die Konstruktion! Führe die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!

Aufgabe 13 - V00713
Wie kann man die nachstehende, nur aus Kreisbögen bestehende Figur durch 3 Geraden in 8 flächengleiche Teile zerlegen?
Die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Berechnung der Teilflächen zu überprüfen.



3.2 Vorolympiade 1961

3.2.1 I. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10711
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8}; \quad -0{,}66; \quad -\frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3}; \quad 3{,}52; \quad -0{,}67; \quad 3{,}5\overline{2}$$

Aufgabe 2 - V10712
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km^2. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wieviel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

Aufgabe 3 - V10713
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wieviel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

Aufgabe 4 - V10714
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

Aufgabe 5 - V10715
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!)
Wieviel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)

Aufgabe 6 - V10716
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!

3.2.2 II. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10721
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

Erzeugnis	Vorkriegsjahr	1959
Elektroenergie	84,7 Mrd. kWh	418,2 Mrd. kWh
Stahl	25,4 Mill. t	92,7 Mill. t
Zement	14,5 Mill. t	73,3 Mill. t

Um wieviel Prozent stieg die Erzeugung?

Aufgabe 2 - V10722
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.
Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

Aufgabe 3 - V10723
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

Aufgabe 4 - V10724
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.

Aufgabe 5 - V10725
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14$ cm^2.
Wieviel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen?

3.2.3 III. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10731
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: "558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt."
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wieviel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

Aufgabe 2 - V10732
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wieviel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

Aufgabe 3 - V10733
Setze für ? die entsprechenden Ziffern ein:

```
3?7 * 8?
--------
 2??? 
  ???2
--------
 ?????
```

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

Aufgabe 4 - V10734
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

Aufgabe 5 - V10735
Zeichne einen Kreis um M mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt P aus, dessen Abstand von M ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!

4 Aufgaben - Klassenstufe 8

4.1 Vorolympiade 1960

4.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 8

Aufgabe 1 - V00801
Zwei Brigaden einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8200 Transformatorspulen. Bei der Gütekontrolle müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden.
Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wieviel einwandfreie Spulen werden von jedem Kollektiv hergestellt?

Aufgabe 2 - V00802
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten?
(Jeder Punkt in der Waagerechten bedeutet eine Ziffer.)

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & . & . & . & : & . & . & 7 & = & . & . & . \\
. & . & . & 4 & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & 2 & 6 & 7 & . & & & & & & & & & \\
 & . & . & . & . & & & & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & - & & & & & & & &
\end{array}$$

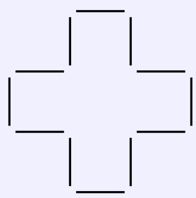
Aufgabe 3 - V00803
Ich lasse einen Ball fallen. Er springt bis zu $\frac{2}{3}$ seiner Fallhöhe. Er fällt von neuem und springt das zweite Mal $\frac{5}{8}$ der ersten Sprunghöhe.
Berechne, von welcher Höhe ich den Ball fallen ließ, wenn er das zweite Mal 45 cm weniger hoch sprang als das erste Mal!

Aufgabe 4 - V00804
Wir haben zwei Gefäße. In beide Gefäße gießen wir Wasser, und zwar in das erste $\frac{2}{5}$ seines Fassungsvermögens, in das zweite $\frac{3}{8}$ seines Fassungsvermögens.
Wenn wir die beiden Wassermengen zusammengießen, erhalten wir 8,5 Liter. Wir wissen noch, dass $\frac{4}{5}$ des Fassungsvermögens des ersten Gefäßes um 6,2 Liter größer ist als $\frac{3}{4}$ des Fassungsvermögens des zweiten Gefäßes.
Berechnet die Fassungsvermögen der beiden Gefäße!

Aufgabe 5 - V00805
Peter ist ein eifriger Lottospieler. Die Gesamtsumme seiner fünf Lottozahlen beträgt 167. Die erste Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die vierte Zahl.
Das Doppelte der ersten Zahl ergibt die zweite Zahl, die verstellt (Einer gegen Zehner vertauscht) gleich der dritten ist. Multipliziert man die zweite mit der dritten Zahl und die zweite mit der vierten Zahl, so ergibt die halbe Differenz beider Produkte die fünfte Zahl.
Wie lauten Peters Lottozahlen?
Hinweis: Beim damals üblichen Lotto wurden 5 Zahlen aus 90 möglichen getippt.

Aufgabe 6 - V00806
Fritz hat seinen Fuß auf ein 0,1 mm starkes Blatt Papier gestellt und überlegt, wie hoch er wohl stehen würde, faltete er es fünfzigmal.
Könnt ihr es ihm sagen?

Aufgabe 7 - V00807

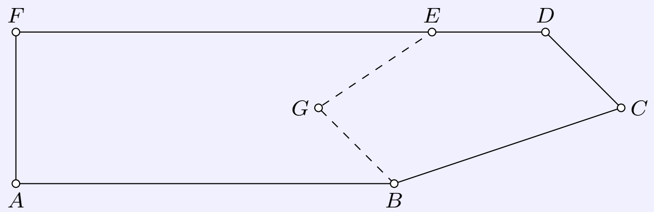


Zwölf Streichhölzchen, in der abgebildeten Form aufgelegt, schließen eine Fläche von fünf Quadraten ein, deren Seitenkante einer Streichholzlänge entspricht.
Die Streichhölzer sind so umzulegen, dass eine Fläche entsteht, die nur vier Quadraten mit gleicher Kantenlänge entspricht!
(Streichhölzer innerhalb der verlangten neuen Figur dürfen nicht gelegt werden!)

Aufgabe 8 - V00808
Knobel Knifflig erzählt: Ich bin dem Riesen aus Prag begegnet. Sein Kopf und Hals sind zusammen 30 cm lang. Seine Beine sind doppelt so lang wie Kopf, Hals und halber Rumpf, und der ganze Kerl ist genau ein Meter länger als Kopf, Hals und Beine zusammen.
Wie groß ist er?

Aufgabe 9 - V00809
Für die Einzäunung eines Stückes Weideland, das Rechteckform erhalten soll, stehen der LPG Neues Leben 400 m Weidezaun zur Verfügung.
Auf einer Arbeitsbesprechung wird der Vorschlag gemacht, die Seiten des Rechtecks von möglichst gleicher Länge zu wählen, da das Quadrat von allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat.
Versuche, diese Behauptung zu beweisen! Wie steht es mit dem Flächeninhalt, wenn die Weide kreisförmig angelegt werden würde?

Aufgabe 10 - V00810



Die Grenze zweier aneinandergrenzender Felder (vgl. Abb.) einer LPG ist eine gebrochene Linie EGB. Zur Erleichterung der Bestellung soll die Grenzlinie gradlinig führen, ohne die Größe der Einzelfelder zu verändern.
Löse die Aufgabe durch Konstruktion und begründe sie!

Aufgabe 11 - V00811
Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale.
Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten. Dadurch entstehen vier kleine Parallelogramme.
Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden und beweise das Ergebnis des Vergleichs!

Aufgabe 12 - V00812
Beweise, dass die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

Aufgabe 13 - V00813
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 6$ cm.
Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren.
Bestimme die Größe der Radien!
(Der Lösungsweg kann beliebig gewählt werden!)

Aufgabe 14 - V00814
Durch einen Würfel soll ein ebener Schnitt so geführt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck verläuft.
a) Wie muss der Schnitt geführt werden?
b) Veranschauliche den Schnitt durch ein Schrägbild!

4.2 Vorolympiade 1961

4.2.1 I. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10811
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.
Um wie viel Prozent ist das "Sitzplatzgewicht" (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

Aufgabe 2 - V10812
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

Aufgabe 3 - V10813

$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$

a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

Aufgabe 4 - V10814
Denkaufgabe:
Fritz sagt: "Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert: "Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

Aufgabe 5 - V10815
Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

4.2.2 II. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10821
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wieviel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

Aufgabe 2 - V10822
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wieviel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

Aufgabe 3 - V10823
In der Zahl .378. sind an die Stelle der beiden Punkte Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

Aufgabe 4 - V10824
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

Aufgabe 5 - V10825
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wieviel solcher Geraden gibt es?

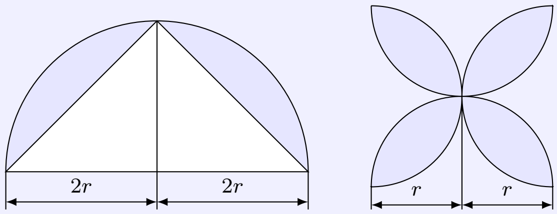
4.2.3 III. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10831
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16$ km/h.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2 - V10832
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

Aufgabe 3 - V10833
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

Aufgabe 4 - V10834



Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

5 Aufgaben - Klassenstufe 9

5.1 Vorolympiade 1960

5.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

Aufgabe 1 - V600901
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

Aufgabe 2 - V600902
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Aufgabe 3 - V600903
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhuskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

Aufgabe 4 - V600904
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{cccccccccc}
270 = & 1 \cdot 2^8 & +0 \cdot 2^7 & +0 \cdot 2^6 & +0 \cdot 2^5 & +0 \cdot 2^4 & +1 \cdot 2^3 & +1 \cdot 2^2 & +1 \cdot 2^1 & +0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & 0
\end{array}$$

Aufgabe 5 - V600905
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Aufgabe 6 - V600906
Wie tief taucht ein Würfel (a = 30 mm) aus Eisen (γ_{Fe} = 7,5 p·cm^{-3}) in Quecksilber (γ_{Hg} = 13,6 p·cm^{-3}) ein?

Aufgabe 7 - V600907
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

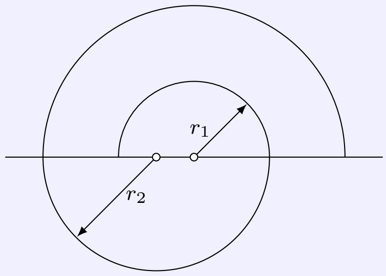
Aufgabe 8 - V600908
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Aufgabe 9 - V600909
Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Aufgabe 10 - V600910

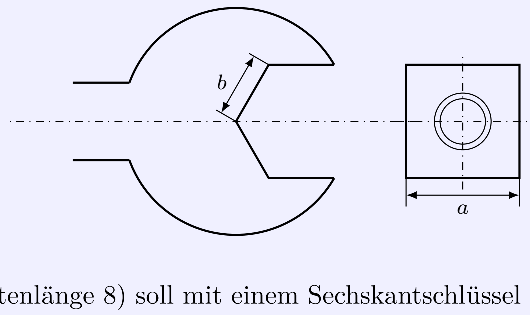


Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?

Aufgabe 11 - V600911
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a?
Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Aufgabe 12 - V600912
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2;+2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1;-3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2;+1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm $\cong$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

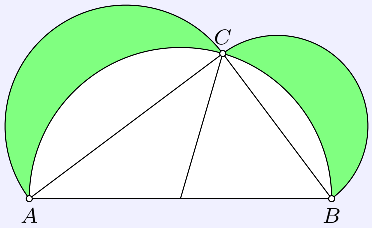
Aufgabe 13 - V600913



Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?

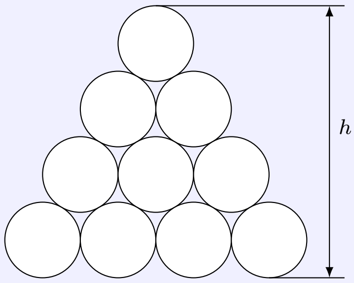
Aufgabe 14 - V600914
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Aufgabe 15 - V600915



Beweisen Sie folgenden Satz:
"Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC." (Hippokrates, 440 v.d.Zw. in Athen).

Aufgabe 16 - V600916



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?

Aufgabe 17 - V600917
In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

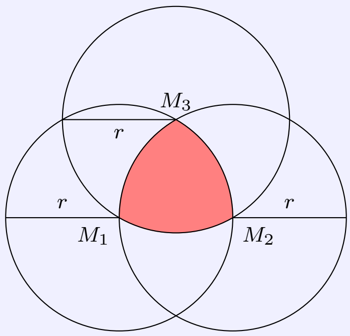
5.2 Vorolympiade 1961

5.2.1 I. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610911
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Aufgabe 2 - V610912
Wieviel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Aufgabe 3 - V610913



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p·cm^{-3}.

Aufgabe 4 - V610914
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 5 - V610915
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

5.2.2 II. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610921
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

Aufgabe 2 - V610922
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wieviel Prozent wird er 1965 betragen?

Aufgabe 3 - V610923
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Aufgabe 4 - V610924
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 5 - V610925
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

5.2.3 III. Stufe V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V610931
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade 33 Jahre alt. Wann ist er geboren?

Aufgabe 2 - V610932
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wieviel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V-V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

Aufgabe 3 - V610933
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

Aufgabe 4 - V610934
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!

Aufgabe 5 - V610935
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

6 Aufgaben - Klassenstufe 10

6.1 Vorolympiade 1960

6.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 10

Aufgabe 1 - V601001
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

Aufgabe 2 - V601002
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss die Verpflegungsbombe ausgelöst werden, damit sie ihr Ziel erreicht? ($g = 10$ m/s^2)

Aufgabe 3 - V601003
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Aufgabe 4 - V601004
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Aufgabe 5 - V601005
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

"Sie heißt III Z ... Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Aufgabe 6 - V601006
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vom streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

Aufgabe 7 - V601007
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Aufgabe 8 - V601008
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

Aufgabe 9 - V601009
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!

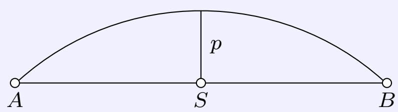
Aufgabe 10 - V601010
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Aufgabe 11 - V601011
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?

Aufgabe 12 - V601012
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?

Aufgabe 13 - V601013
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Aufgabe 14 - V601014



Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s/p)$?

Aufgabe 15 - V601015
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.
Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.

Aufgabe 16 - V601016
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

Aufgabe 17 - V601017
Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:
a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck

$$F_1 = 6\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.

6.2 Vorolympiade 1961

6.2.1 I. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611011
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Aufgabe 2 - V611012
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$a) \quad \sin x = \sin 69°$$
$$b) \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32°\right) = 1$$
$$c) \quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2$$

Aufgabe 3 - V611013
Peter sagt zu seinem Freund:
"Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis!
Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 - V611014
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47°$ und $\gamma = 55°$.
Berechnen Sie b, c und α!

Aufgabe 5 - V611015
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Aufgabe 5 - V611016
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

6.2.2 II. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611021
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

Aufgabe 2 - V611022
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm \frac{1}{2}^\circ$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

Aufgabe 3 - V611023
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

Aufgabe 4 - V611024
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611025
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

6.2.3 III. Stufe V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V611031
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

Aufgabe 2 - V611032
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?

Aufgabe 3 - V611033
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 75 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Aufgabe 4 - V611034
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611035
Unter der Zahl $n!$, gelesen "n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

7 Aufgaben - Klassenstufe 11

7.1 Vorolympiade 1960

7.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 11

Aufgabe 1 - V601101
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x;y;z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^2 + z^3 = 2xyz$$

Aufgabe 2 - V601102
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^9}$$

Aufgabe 3 - V601103
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

Aufgabe 4 - V601104
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 572 $km \cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m \cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Aufgabe 5 - V601105
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Aufgabe 6 - V601106
Gibt es einen Winkel ϵ, für den die Gleichung gilt:

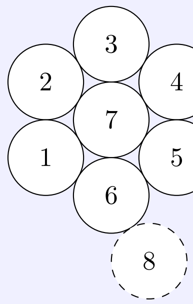
$$\sin\epsilon \cdot \cos\epsilon = 1$$

Aufgabe 7 - V601107
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

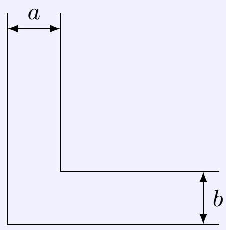
die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Aufgabe 8 - V601108



In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?

Aufgabe 9 - V601109



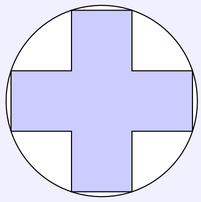
Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden. Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)

Aufgabe 10 - V601110
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\alpha = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!

Aufgabe 11 - V601111
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie größ ist die Summe aller Quadrate?

Aufgabe 12 - V601112
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.
Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.
a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 m liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?
b) Wie groß ist das Volumen?
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?

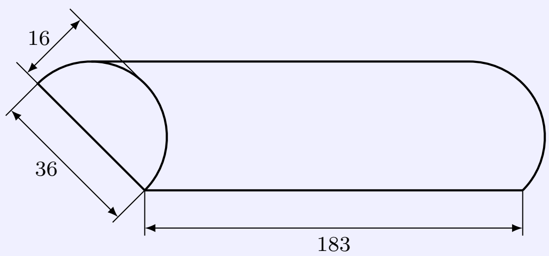
Aufgabe 13 - V601113



Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)

Aufgabe 14 - V601114
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3.

Aufgabe 15 - V601115
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

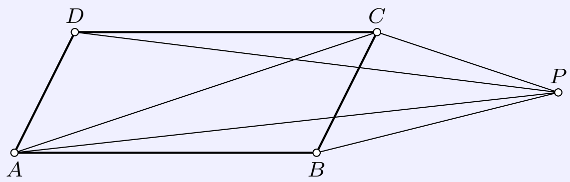
Aufgabe 16 - V601116
Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Aufgabe 17 - V601117
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis.
Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?

Aufgabe 18 - V601118
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.

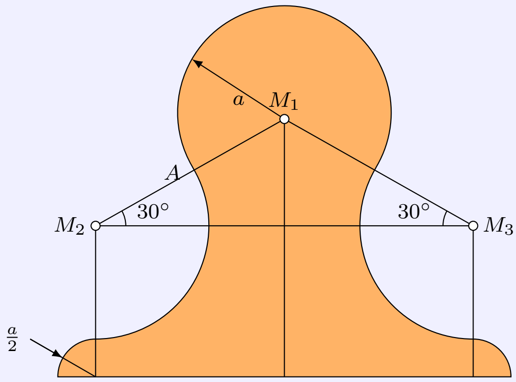
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Aufgabe 19 - V601119
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

Aufgabe 20 - V601120



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = a$ ist.

Aufgabe 21 - V601121
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,;0{,}00), B(87{,}00;54{,}40), C(153{,}60;44{,}00), D(206{,}40;25{,}00), E(303{,}50;33{,}80), F(352{,}00;0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

7.2 Vorolympiade 1961

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

7.2.1 II. Stufe V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611121
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

Aufgabe 2 - V611122
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

Aufgabe 3 - V611123
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.

Aufgabe 4 - V611124
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

Aufgabe 5 - V611125

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

7.2.2 III. Stufe V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V611131
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

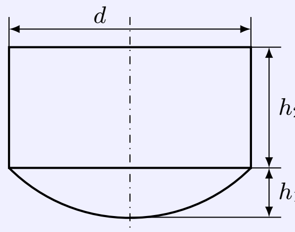
	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Aufgabe 2 - V611132



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

Aufgabe 3 - V611133
Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

Aufgabe 4 - V611134
Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 5 - V611135
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist? b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

8 Aufgaben - Klassenstufe 12

8.1 Vorolympiade 1960

8.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 12

Aufgabe 1 - V601201
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?

Aufgabe 2 - V601202
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\star\star\star 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Aufgabe 3 - V601203
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Aufgabe 4 - V601204
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad ..., \quad \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

Aufgabe 5 - V601205

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{1,5+\sqrt[4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5-0.8}}}$$

Aufgabe 6 - V601206
Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6 + 14^6 + 16^6$$

Aufgabe 7 - V601207
Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Aufgabe 8 - V601208
Ein Trugschluss "Zwei ist größer als vier!"
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 9 - V601209
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Aufgabe 10 - V601210
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Aufgabe 11 - V601211
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

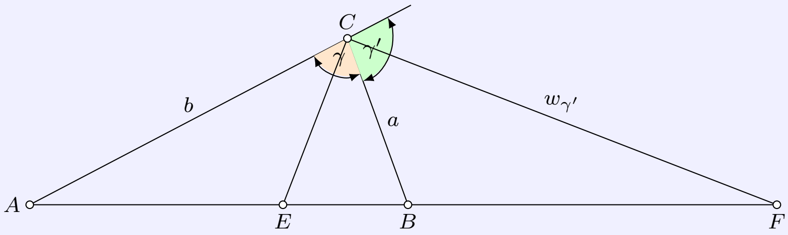
Aufgabe 12 - V601212
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Aufgabe 13 - V601213
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Aufgabe 14 - V601214
Beweisen Sie folgenden Satz:

Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

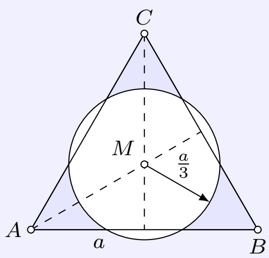
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 15 - V601215
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Aufgabe 16 - V601216



Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?

Aufgabe 17 - V601217
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Aufgabe 18 - V601218
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{10}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{40}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.

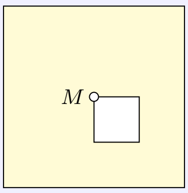
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Aufgabe 19 - V601219
Zeichnen Sie die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 20 - V601220
Berechnen Sie die innere Masse einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Aufgabe 21 - V601221
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Aufgabe 22 - V601222



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen (M = ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).

8.2 Vorolympiade 1961

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

8.2.1 II. Stufe V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611221
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 2 - V611222
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Aufgabe 3 - V611223
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

Aufgabe 4 - V611224
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60$\circ$ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 5 - V611225
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

8.2.2 III. Stufe V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V611231
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

Aufgabe 2 - V611232
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Aufgabe 3 - V611233
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Aufgabe 4 - V611234
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?

Aufgabe 5 - V611235
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder Schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

Anmerkung:
Dieser Text enthält alle 208 Aufgaben der Vorolympiaden der Mathematik-Olympiade der Klassenstufen 5 bis 12 1960 und 1961.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift der Originaltexte.
Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Die Rechtschreibung und Grammatik wurde der heutigen Form angepasst. Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst. Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.

Der einleitende Text jedes Aufgabenblattes:

> Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

wurde nicht übernommen.

Quellen:

1) "573 Mathematikaufgaben aus Olympiaden der DDR", J.Lehmann und W.Unze

OJM