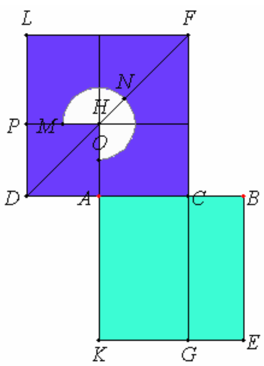
XIII. Buch
der „Elemente“ des Euklid



§ 1 (L. 1)

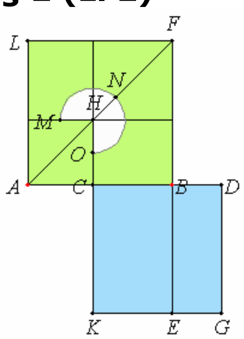
Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr größerer Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte.

Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Man setze an CA eine gerade Linie AD gerade an und mache AD = ½ AB. Ich behaupte, dass $CD^2 = 5\ DA^2$.
Man zeichne über AB, DC die Quadrate AE, DF (I, 46), zeichne in DF die (übliche, I, 43) Figur fertig und ziehe FC bis G durch. Da AB in C stetig geteilt ist, ist $AB \cdot BC = AC^2$ (VI, Definition 3; VI, 17). $AB \cdot BC$ ist CE, und AC^2 ist FH, also Parallelogramm CE = FH. Da BA = 2 AD, BA = KA, AD = AH, so ist KA = 2 AH. Nun ist KA : AH = Parallelogramm CK : CH (VI, 1), also Parallelogramm CK = 2 CH; aber auch Parallelogramm LH + HC = 2 CH (I, 43); also Parallelogramm CK = LH + HC. Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm CE = HF; also das ganze Quadrat AE = Gnomon MNO. Da BA = 2 AD, ist $BA^2 = 4\ AD^2$ (II, 4), d.h. Quadrat AE = 4 DH. Aber AE = Gnomon MNO, also Gnomon MNO = 4 AP, also das ganze Quadrat DF = 5 AP. Nun ist DF aber DC^2, und AP ist DA^2; also $CD^2 = 5\ DA^2$ - S.

§ 1a Analysis und Synthesis

Was ist eine Analysis und was eine Synthesis? Eine Analysis ist die Zugrundelegung des Gefragten als anerkannt um seiner auf anerkannt Wahres führenden Folgerungen willen. Eine Synthesis ist die Zugrundelegung des Anerkannten um seiner auf Vollendung oder Ergreifung des Gefragten führenden Folgerungen willen.
Analysis und Synthesis ohne Figur zu Satz 1.
Die Strecke AB sei in C stetig geteilt. AC sei der größere Abschnitt. Man mache AD = ½ AB. Ich behaupte, dass $CD^2 = 5\ AD^2$.
Wenn $CD^2 = 5\ AD^2$, während $CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2\ CA \cdot AD$ (II, 4), so muss sein $CA^2 + AD^2 + 2\ CA \cdot AD = 5\ AD^2$, also, getrennt, $CA^2 + 2\ CA \cdot AD = 4\ AD^2$. Aber $2\ CA \cdot AD = BA \cdot AC$, weil BA = 2 AD. Und $AC^2 = AB \cdot BC$; denn AB ist stetig geteilt (VI, Definition 3; VI, 17). Also muss sein $BA \cdot AC + AB \cdot BC = 4\ AD^2$. Aber $BA \cdot AC + AB \cdot BC = AB^2$ (II, 2). Also muss sein $AB^2 = 4\ AD^2$; und das ist richtig, weil AB = 2 AD.
Synthesis. Da $AB^2 = 4\ AD^2$ und $BA^2 = BA \cdot AC + AB \cdot BC$, ist $BA \cdot AC + AB \cdot AC = 4\ AD^2$. Aber $BA \cdot AC = 2\ DA \cdot AC$ und $AB \cdot BC = AC^2$. Also ist $AC^2 + 2\ DA \cdot AC = 4\ DA^2$, folglich $DA^2 + AC^2 + 2\ DA \cdot AC = 5\ DA^2$. Aber $DA^2 + AC^2 + 2\ DA \cdot AC = CD^2$; also $CD^2 = 5\ DA^2$ - q.e.d.

§ 2 (L. 2)



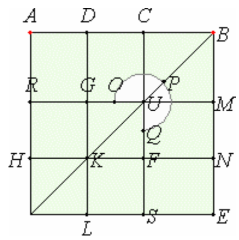
Wird quadriert eine Strecke fünfmal so groß wie ein Abschnitt von ihr, dann ist, wenn man das Doppelte des genannten Abschnittes stetig teilt, der größere Abschnitt der Rest der ursprüngliche Strecke.

Quadriert weder die Strecke AB fünfmal so groß wie ihr Abschnitt AC, und es sei 2 AV = CD. Ich behaupte, dass CB der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke CD ist.
Man zeichne über beider Strecken AB, CD die Quadrate AF, CG, zeichne in AF die Figur fertig und ziehe BE durch. Da $BA^2 = 5\ AC^2$, ist Quadrat AF = 5 AH, also Gnomon MNO = 4 AH. Da DC = 2 CA, ist $DC^2 = 4\ CA^2$,

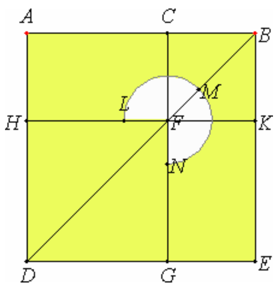
d.h. Quadrat CG = 4 AH. Wie bewiesen, ist Gnomon MNO = 4 AH; also Gnomon MNO = CG. Da DC = 2 CA und DC = CK, AC = CH also KC = 2 CH, ist Parallelogramm KB = 2 BH (VI, 1). Aber auch Parallelogramm LH + HB = 2 HB (I, 43), also Parallelogramm KB = LH + HB. Wie bewiesen, ist der ganze Gnomon MNO = dem ganzen Quadrat CG, also auch Restquadrat HF = BG. BG ist nun CD · DB, weil CD = DG, und HF ist CB^2. Also ist CD · DB = CB^2, also DC : CB = CB · BD (VI, 17). Hier ist DC > CB, also CB > BD (V, 14). C B ist also von der stetig geteilten (VI, Definition 3) Strecke CD der größere Abschnitt – S.

§ 3 (L. 3)
Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr kleinerer Abschnitt, wenn man die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts.

Eine Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt, und AC sei in D halbiert. Ich behaupte, dass $BD^2 = 5\ DC^2$.



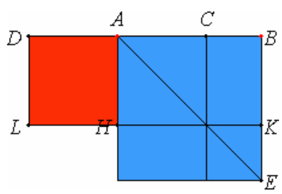
Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Doppelfigur fertig. Da AC = 2 DC, ist $AC^2 = 4\ DC^2$, d.h. Quadrat RS = 4 FG. Da AB · BC = AC^2 (VI, Definition 3; VI, 17), AB · BC aber CE ist, AC^2 dabei RS, ist Parallelogramm CE = RS. Aber Quadrat RS = 4 FG, also Parallelogramm CE = 4 FG. Ebenso ist, da AD = DC, HK = KF (I, 34), folglich Quadrat GF = Quadrat HL. Also ist GK = KL, d.h. MN = NE, folglich Parallelogramm MF = FE (I, 36). Aber Parallelogramm MF = CG (I, 43), also Parallelogramm CG auch = FE. Man füge beiderseits CN hinzu; dann ist Gnomon OPQ = CE. Wie oben bewiesen, ist aber Parallelogramm CE = 4 GF, also Gnomon OPQ = 4 GF, also Gnomon OPQ + GF = 5 GF. Gnomon OPQ + GF ist aber Quadrat DN. Und DN ist DB^2, GF ist DC^2. Also ist $DB^2 = 5\ DC^2$ - q.e.d.



§ 4 (L. 4)
Teilt man eine Strecke stetig, so werden die beiden Quadrate über der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt zusammen dreimal so groß wie das Quadrat über dem größeren Abschnitt.

Man habe eine Strecke AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass $AB^2 + BC^2 = 3\ CA^2$. Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig.
Da AB in C stetig geteilt ist, AC der größere Abschnitt, ist AB · BC = AC^2 (VI, Definition 3; VI, 17). AB · BC ist nun AK, und AC^2 ist HG; also Parallelogramm AK = HG. Hier ist Parallelogramm AF = FE (I, 43); man füge CK beiderseits hinzu. Dann ist das ganze Parallelogramm AK = dem ganzen CE, also Parallelogramm AK + CE = 2 AK. AK + CE bilden aber Gnomon LMN + Quadrat CK; also ist Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 AK. Wie oben bewiesen, ist Parallelogramm AK = HG; also Gnomon LMN + Quadrat CK = 2 HG, folglich Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = 3 Quadrat HG. Nun ist Gnomon LMN + Quadrate CK + HG = ganzes Quadrat AE + CK, d.h. $AB^2 + BC^2$, GH dabei AC^2. Also ist $AB^2 + BC^2 = 3\ AC^2$ - q.e.d.

§ 5 (L. 5)
Teilt man eine Strecke stetig und setzt ihr eine dem größeren Abschnitt gleiche an, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und größerer Abschnitt ist die Ausgangsstrecke.



Die Strecke AB sei im Punkte C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt und AD = AC. Ich behaupte, dass die Strecke DB in A stetig geteilt ist und größerer Abschnitt die Ausgangsstrecke AB.
Man zeichne über AB das Quadrat AE und zeichne die Figur fertig (wie II, 6). Da AB in C stetig geteilt ist, ist AB · BC = AC² (VI, Definition 3; VI, 17). AB · BC ist hier CE, und AC² ist CH; also Parallelogramm CE = CH. Aber Parallelogramm CE = HE (I, 43) und Quadrat HC = DH (I, 36); also Quadrat DH = HE. Man füge HB beiderseits hinzu. Dann ist das ganze Parallelogramm DK = dem ganzen AE. DK ist nun BD · DA, weil AD = DL; und AE ist AB². Also ist BD · DA = AB²; also DB : BA = BA : AD (VI, 17). Hier ist DB > BA; also auch BA > AD (V, 14). Also ist DB in A stetig geteilt, AB der größere Abschnitt – q.e.d.

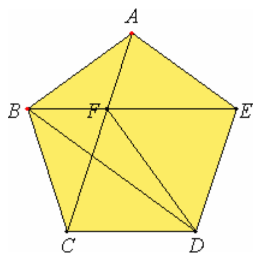
§ 6 (L. 6)

Teilt man eine rationale Strecke stetig, so wird jeder ihrer Abschnitte eine Irrationale, wie man sie Apotome nennt.

Man habe eine Rationale (X, Definition 3) AB, sie sei in C stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt. Ich behaupte, dass sowohl AC als CB eine Irrationale ist, wie man sie Apotome (X, 73: Definition) nennt. Man verlängere BA und mache AD = ½ BA.
Da die Strecke AB in C stetig geteilt ist und AC, dem größeren Abschnitt, AD = ½ AB hinzugefügt, ist CD² = 5 DA² (XIII, 1). Also verhält sich CD² zu DA² wie eine Zahl zu einer Zahl, CD² ist mit DA² kommensurabel (X, 6). Nun ist DA² rational (X, Definition 4); denn DA ist als Hälfte der Rationalen AB rational. Also ist CD² rational, also auch CD rational. Da CD² zu DA² aber kein Verhältnis hat wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (vgl. VIII, 11 Anm.), ist CD mit DA linear inkommensurabel (X, 9). CD, DA sind also nur quadriert kommensurable (X, Definition 2) rationale Strecken; also AC eine Apotome (X, 73; Definition)
Zweitens ist, da AB stetig geteilt, AC der größere Abschnitt ist, AB · BC = AC² (VI, Definition 3; VI, 17). Legt man also das Quadrat über der Apotome AC an die Rationale AB an (I; 44), so entsteht als Breite BC. Legt man aber das Quadrat einer Apotome an die Rationale an, so entsteht als Breite eine Erste Apotome (X, 97). Also ist CB eine Erste Apotome (X, 84a: Definition). Wie bewiesen, ist auch CA eine Apotome – S.

§ 7 (L. 7)

Sind in einem gleichseitigen Fünfeck drei aufeinanderfolgende oder nicht aufeinanderfolgende Winkel gleich, so muss das Fünfeck gleichwinklig sein.

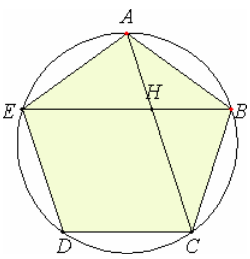


Im gleichseitigen Fünfeck ABCDE seien drei Winkel, zunächst die aufeinanderfolgenden bei A, B, C einander gleich. Ich behaupte, dass das Fünfeck ABCDE gleichwinklig ist. Man ziehe AC, BE, FD. Da zwei Seiten CB, BA zwei Seiten BA, AE entsprechend gleich sind und ∠ CBA = ∠ BAE, ist Grundlinie AC = Grundlinie BE, Δ ABC = Δ ABE, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln gleich sein, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, BCA = BEA und ABE = CAB (I, 4), so dass auch die Seite AF = Seite BF (I, 6). Wie bewiesen, sind auch die ganzen Strecken AC = BE; also Rest FC = Rest FE. Aber auch CD = DE. Zwei Seiten FC, CD sind also zwei Seiten FE, ED gleich; ferner ist ihnen die Grundlinie FD gemeinsam. Also ist ∠ FCD = ∠ FED (I, 8). Wie bewiesen, ist auch BCA = AEB; also die ganzen ∠ BCD = AED. Nach Voraussetzung ist ∠ BCD = ∠ A und ∠ B. Also auch AED = ∠ A und ∠ B. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∠ CDE = ∠ A, ∠ B, ∠ C. Fünfeck ABCDE ist also gleichwinklig.

Nunmehr seien nicht aufeinanderfolgende Winkel gleich, sondern die bei den Punkten A, C, D seien gleich. Ich behaupte, dass auch dann Fünfeck ACBDE gleichwinklig ist.
Man ziehe BD.
Da zwei Seiten BA, AE zwei Seiten BC, CD gleich sind und sie gleiche Winkel umfassen, ist Grundlinie BE = Grundlinie BD, ∆ ABE = ∆ BCD, und die übrigen Winkel müssen den übrigen gleich sein, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4), also ∠ AEB = CDB. Aber auch ∠ BED = BDE (I, 5), weil Seite BE = Seite BD. Also sind auch die ganzen ∠ AED = CDE. Nach Voraussetzung ist aber CDE = ∠ A und ∠ C; also auch ∠ AED = ∠ A und ∠ C. Aus demselben Grunde ist auch ABC = ∠ A, ∠ C, ∠ D; also ist Fünfeck ABCDE gleichwinklig – q.e.d.

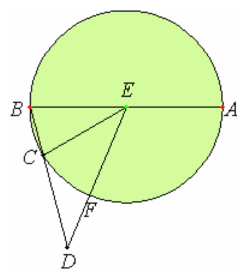
§ 8 (L. 8)
Diagonalen, die im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck zwei aufeinanderfolgenden Winkeln gegenüberliegen, teilen einander stetig; und ihr größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.

Im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck ABCDE mögen den beiden aufeinanderfolgenden Winkeln bei A und B die Diagonalen AC, BE, die einander im Punkte H schneiden, gegenüberliegen. Ich behaupte, dass sie beide im Punkte H stetig geteilt werden und dass ihre größeren Abschnitte der Fünfeckseite gleich sind.



Man beschreibe dem Fünfeck ABCDE den Kreis ABCDE um (IV, 14). Da zwei Strecken EA, AB zwei Seiten AB, BC gleich sind und sie gleiche Winkel umfassen, ist Grundlinie BE = Grundlinie AC, ∆ ABE = ∆ ABC, und die übrigen Winkel sind den übrigen Winkeln entsprechend gleich, denen gleiche Seiten gegenüberliegen (I, 4). Also ist ∠ BAC = ABE; also ∠ AHE = 2 BAH (I, 32). Aber auch EAC = 2 BAC, da Bogen EDC = 2 Bogen CB (III, 28; VI, 33). Also ist ∠ HAE = AHE, folglich Strecke HE = EA, d.h. = AB (I, 6). Da Strecke BA = AE, ist auch ∠ ABE = AEB (I, 5). Wie bewiesen, ist aber ABE = BAH; also BEA = BAH. Und ∠ ABE ist beiden Dreiecken ABE und ABH gemeinsam. Also sind auch die dritten ∠ BAE = AHB (I, 32), ∆ ABE also mit ∆ ABH winkelgleich. Also stehen in Proportion EB : BA = AB : BH (VI, 4). Aber BA = EH; also BE : EH = EH : HB. Hier ist BE > EH, also EH > HB (V, 14). B E ist also in H stetig geteilt (VI, Definition 3), und der größere Abschnitt HE ist der Fünfeckseite gleich. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch AC in H stetig geteilt ist und sein größerer Abschnitt CH der Fünfeckseite gleich – q.e.d.

§ 9 (L. 9)
Fügt man die Seiten des demselben Kreise einbeschriebenen Sechsecks und Zehnecks zusammen, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und ihr größerer Abschnitt ist die Sechseckseite.

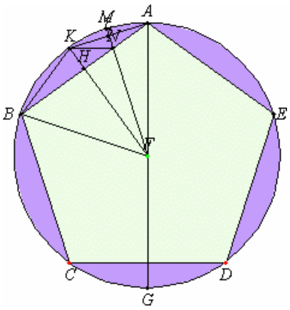


Man habe den Kreis ABC, und von den dem Kreise ABC einbeschriebenen Figuren sei BC die Seite des Zehnecks und CD die des Sechsecks, und sie mögen einander gerade fortsetzen. Ich behaupte, dass die Summenstrecke BD stetig geteilt ist, CD ihr größerer Abschnitt.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt E des Kreises, ziehe EB, EC, ED und ziehe BE nach A durch. Da BC die Seite des gleichseitigen Zehnecks ist, ist Bogen ACB = 5 Bogen BC (III, 28), also Bogen AC = 4 CB. Nun ist Bogen AC : CB = ∠ AEC : CEB (VI, 33). Also ist ∠ AEC = 4 CEB. Da ∠ EBC = ECB (I, 5), ist ∠ AEC = 2 ECB (I, 32). Da ferner Strecke EC = CD, weil beide der Seite des dem Kreise ABC einbeschriebenen Sechsecks gleich sind (IV, 15 Zusatz), ist auch ∠ CED = ∠ CDE (I, 5), also ∠ ECB = 2 EDC (I, 32). Wie oben bewiesen, ist aber AEC = 2 ECB; also AEC = 4 EDC. Wie auch schon bewiesen, ist AEC = 4 BEC; also ist EDC =

BEC. Und den beiden Dreiecken BEC, BED ist ∠ EBD gemeinsam; also auch Rest ∠ BED = ECB (I, 32), also Δ EBD dem Δ EBC winkelgleich. Also stehen in Proportion DB : BE = EB : BC (VI, 4). Nun ist EB = CD, also BD : DC = DC : CB. Hier ist BD > DC, also auch DC > CB (V, 14). Die Strecke BD ist also in C stetig geteilt (VI, Definition 3), DC ihr größerer Abschnitt – q.e.d.

§ 10 (L. 10)

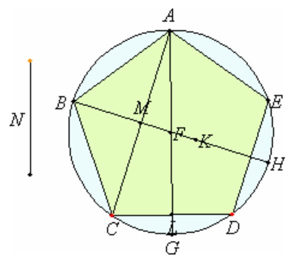
Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird quadriert die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seiten des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen.



Man habe den Kreis ABCDE; dem Kreise ABCDE sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert die Seite des Fünfecks ABCDE ebenso groß wird wie die Sehne des Sechsecks und des Zehnecks, die sich dem Kreise ABCDE einbeschreiben lassen, zusammen.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF und ziehe es durch zum Punkte G, ziehe FB, fälle von F auf AB das Lot FH und ziehe es nach K durch. Ferner ziehe man AK, KB und fälle wieder von F auf AK das Lot FL, ziehe es nach M durch und ziehe KN. Da Bogen ABCG = Bogen AEDG, hierin ABC = AED (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. CD gehört aber zum Fünfeck, CG also zum Zehneck. Da weiter FA = FB und FH das Lot, ist ∠ AFK = KFB (I, 5, 32), folglich auch Bogen AK = KB (III, 26), also Bogen AB = 2 Bogen BK, also Strecke AK die Zehneckseite. Aus demselben Grunde ist auch Bogen AK = 2 KM.
Da Bogen AB = 2 Bogen BK, während Boden CD = Bogen AB, ist auch Bogen CD = 2 Bogen BK. Aber Bogen CD ist auch = 2 CG; also Bogen CG = Bogen BK. Bogen BK ist aber = 2 KM, da KA es ist; also Bogen CG = 2 KM. Aber auch Bogen CB = 2 BK, weil Bogen CB = BA; also ist auch der Summenbogen GB = 2 BM , folglich ∠ GFB = 2 BFM (VI, 33).
Nun ist aber auch ∠ GFB = 2 FAB (I, 32), weil FAB = ABF; also ∠ BFN = FAB. Den beiden Dreiecken ABF, BFN ist aber ∠ ABF gemeinsam. Also sind die dritten ∠ AFB = BNF (I, 32). Δ ABF ist also mit Δ BFN winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke AB : BF = FB : BN (VI, 4); also ist AB · BN = BF² (VI, 17). Ebenso ist, da AL = LK und LN gemeinsam ist, dabei rechte Winkel bildet, Grundlinie KN = Grundlinie AN und ∠ LKN = LAN (I, 4). Aber ∠ LAN = KBN (III, 28; I, 5), also ist auch ∠ LKN = KBN. Und beiden Dreiecken AKB, AKN ist der Winkel bei A gemeinsam; also sind die dritten ∠ AKB = KNA (I, 32); also ist Δ KBA mit Δ KNA winkelgleich. Also stehen in Proportion Strecke BA : AK = KA : AN (VI, 4); also ist BA · AN = AK² (VI, 17). Wie oben bewiesen, ist aber AB · BN = BF². Also ist AB · BN + BA · AN, d.h. (II, 2) BA² = BF² + AK². Hier ist BA die Seite des Fünfecks, BF die des Sechsecks (IV, 15 Zusatz) und AK die des Zehnecks. Quadriert wird also die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die des Sechsecks und des Zehnecks, die demselben Kreise eingeschrieben sind, zusammen – q.e.d.

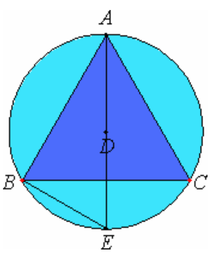
§ 11 (L. 11)

Beschreibt man einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck ein, so wird die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.



Dem Kreise ABCDE, der die Rationale (X, Definition 3) zum Durchmesser hat, sei das gleichseitige Fünfeck ABCDE einbeschrieben. Ich behaupte, dass die Seite des Fünfecks ABCDE eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76: Definition)

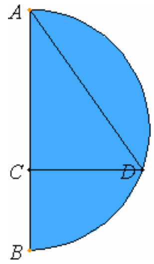
nennt.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises, ziehe AF, FB, verlängere sie zu den Punkten G, H, ziehe AC und trage FK = ¼ AF (VI, 9) ab. AF ist rational, also FK rational; auch BF ist rational; also die Summe BK rational (X, 15). Da weiter Bogen ACG = Bogen ADG und hierin ABC = AED (III, 28), sind die Restbogen CG = GD. Zieht man hier AD, so ergibt sich (I, 4), dass die Winkel bei L Rechte sind und CD = 2 CL. Aus demselben Grunde sind auch die Winkel bei M Rechte und AC = 2 CM. Da so ∠ ALC = AMF, beide Dreiecke ACL und AMF dabei ∠ LAC gemeinsam haben, sind die dritten ∠ ACL = MFA (I, 32); Δ ACL ist also mit Δ AMF winkelgleich. Also stehen in Proportion LC : CA = MF : FA (VI, 4), also auch, bei Verdoppelung der Vorderglieder, 2 LC : CA = 2 MF : FA (V, 24). Aber 2 MF : FA = MF : ½ FA (V, 15); also 2 LC : CA = MF : ½ FA (V, 11), also auch, bei Halbierung der Hinterglieder, 2 LC : ½ CA = MF : ¼ FA. Hier ist 2 LC = DC, ½ CA = CM, ¼ FA = FK; also DC : CM = MF : FK. Also ist, verbunden, (DC + CM) : CM = MK : KF (V, 18), also auch $(DC + CM)^2 : CM^2 = KM^2 : KF^2$ (VI,22).
Da nun, wenn man die zwei Seiten des Fünfecks gegenüberliegende Diagonalen, etwa AC, stetig teilt, der größere Abschnitt der Fünfeckseite, d.h. DC, gleich ist (XIII, 8), ferner der größere Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wird wie das Quadrat der Hälfte der ganzen Strecke (XIII, 1) und CM die Hälfte der ganzen Strecke AC ist, so ist $(DC + CM)^2 = 5\ CM^2$.
Wie bewiesen, ist aber $(DC + CM)^2 : CM^2 = MK^2 : KF^2$; also $MK^2 = 5\ KF^2$ (V, Definition 5). Hier ist KF^2 rational, weil der Durchmesser rational ist. Also ist auch MK^2 rational (X, 6, Definition4), also MK rational (X, Definition 3).
Da BF = 4 FK, ist BK = 5 KF; also $BK^2 = 25\ KF^2$. Aber $MK^2 = 5\ KF^2$; also $BK^2 = 5\ KM^2$. BK^2 hat also zu KM^2 kein (VIII, 11 Anmerkung) Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl. Also ist BK mit KM linear inkommensurabel (X, 9). Beide Strecken sind rational; BK, KM sind also nur quadriert kommensurable rationale Strecken. Nimmt man aber von einer rationalen Strecke eine rationale weg, die der ganzen nur quadriert kommensurabel ist, dann ist der Rest irrational, eine Apotome (X, 73). Also ist MB eine Apotome, MK ihre Ergänzung.
Ich behaupte weiter: eine Vierte Apotome (X, 84a Definition). Es sei $N^2 = BK^2 - KM^2$; BK übertrifft dann quadriert KM um N. Nun ist KF mit FB linear kommensurabel, auch, verbunden, KB mit FB linear kommensurabel (X, 15). BF ist aber BH linear kommensurabel, also BK mit BH linear kommensurabel (X, 12). Da nun $BK^2 = 5\ KM^2$, ist $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$; also, umgewendet (V, Definition 16), $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, d.h. nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (VIII, 11 Anmerkung); also ist BK mit N linear inkommensurabel (X,9). Quadriert übertrifft BK also um das Quadrat einer ihm inkommensurablen Strecke KM. Da hier die ganze Strecke BK um das Quadrat einer ihr inkommensurablen die Ergänzung KM übertrifft, während die ganze Strecke BK mit der zugrundeliegenden Rationalen BH linear kommensurabel ist, ist MB eine Vierte Apotome (C, 84 a Definition). Ein Rechteck, das von der Rationalen und einer Vierten Apotome umfasst wird, ist aber irrational und heißt eine Minor (X, 94). Da nun, wenn man AH zieht, Δ ABH mit Δ ABM winkelgleich (III, 31; VI, 8) wird, also HB : BA = AB : BM (VI, 4), ergibt AB quadriert HB · BM (VI, 17).
Also ist AB, die Fünfeckseite, eine Irrationale, wie man sie Minor nennt. – q.e.d.

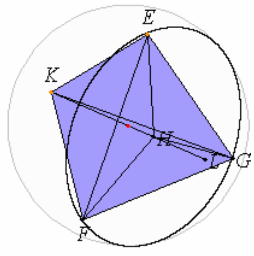


§ 12 (L. 12)
Beschreibt man einem Kreis ein gleichseitiges Dreieck ein, so wird quadriert die Dreieckseite dreimal so groß wie der Radius des Kreises.

Man habe den Kreis ABC, ihm sei das gleichseitige Dreieck ABC einbeschrieben. Ich behaupte, dass quadriert eine Seite des Δ ABC dreimal so groß wird wie der Radius des Kreises ABC.

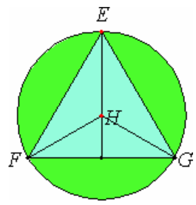
Man verschaffe sich den Mittelpunkt D des Kreises ABC, ziehe AD, verlängere es nach E und ziehe BE.
Da Δ ABC gleichseitig ist, ist Bogen BEC ein Drittel des Umfanges des Kreises ABC, Bogen BE also ein Sechstel des Kreisumfanges. Strecke BE gehört also zum Sechseck, ist also dem Radius DE gleich. Da AE = 2 DE, ist $AE^2 = 4\ ED^2$, d.h. $= 4\ BE^2$. Nun ist $AE^2 = AB^2 + BE^2$ (III, 31; I, 47), also $AB^2 + BE^2 = 4\ BE^2$; also, getrennt, $AB^2 = 3\ BE^2$. Aber BE = DE; also $AB^2 = 3\ DE^2$. Also wird quadriert die Dreiecksseite dreimal so groß wie der Radius – q.e.d.





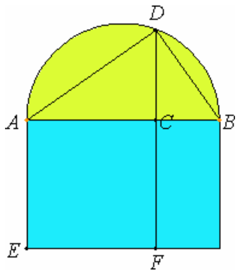
§ 13 (A. 1)
Eine Pyramide zu errichten und mit einer gegebenen Kugel zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser anderthalb so groß wird wie die Pyramidenkante.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = 2 CB (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in Punkt C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DA. Ferner lege man den Kreis EFG hin, dessen Radius = DC sei, und beschreibe den Kreis EFG das gleichseitige Dreieck EFG ein (IV, 15). Man verschaffe sich den Mittelpunkt H des Kreises und ziehe EH, HF, HG. Weiter errichte man in H auf der Ebene des Kreises EFG die Senkrechte HK (XI, 12), trage auf HK die Strecke HK = AC ab und ziehe KE, KF, KG.
Da KH auf der Ebene des Kreises EFG senkrecht steht, bildet es mit allen es treffenden geraden Linien, die in der Ebene des Kreises EFG liegen, rechte Winkel (XI, Definition 3). HE, HF, HG treffen es alle, also ist HK $\perp$ sowohl HE als HF als HG.



Da AC = HK, CD = HE und sie rechte Winkel umfassen, ist Grundlinie DA = Grundlinie KE (I, 4). Aus demselben Grund sind auch KF und KG beide = DA. KE, KF, KG sind also alle drei einander gleich. Da AC = 2 CB, ist AB = 3 BC. Aber wie hernach gezeigt werden soll (siehe Hilfssatz) $AB : BC = AD^2 : DC^2$; also ist $AD^2 = 3\ DC^2$. Aber auch $FE^2 = 3\ EH^2$ (XIII, 12) und DC = EH; also DA = EF. Wie bewiesen, ist aber DA = sowohl KE als KF als KG. Von den Strecken EF, FG, GE ist jede jeder der Strecken KE, KF, KG gleich. Die vier Dreiecke EFG, KEF, KFG, KEG sind also gleichseitig. So hat man aus vier gleichseitigen Dreiecken die Pyramide errichtet, deren Grundfläche Δ EFG und deren Spitze Punkt K ist.
Weiter soll man sie mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser 1 ½ mal so groß wird wie die Pyramidenkante. Man setze die gerade Linie HL an KH gerade an und mache HL = CB.
Da AC : CD = CD : CB (VI, 8 Zusatz), AC = KH, CD = HE, CB = HL, ist KH : HE = EH : HL, also $KH \cdot HL = EH^2$ (VI, 17). $\angle$ KHE und EHL sind dabei beide Rechte. Also muss der Halbkreis, den man über KL zeichnete, auch durch E gehen, da, wenn man EL zieht, $\angle$ LEK ein Rechter wird, weil Δ ELK sowohl mit Δ ELH als EHK winkelgleich wird (VI, 8; III, 31). Mithin muss der Halbkreis, wenn man ihn durch Herumführen, während KL fest bleibt, wieder in dieselbe Lage zurückbringt, von der er ausging (XI, Definition 14), auch durch die Punkte F, G gehen, da, wenn man FL, LG zieht, ähnlich auch die Winkel bei F und G Rechte werden. So wäre die Pyramide mit der gegebenen Kugel umschlossen. Denn der Durchmesser KL der Kugel ist = AB, dem Durchmesser der gegebenen Kugel, da man KH = AC und HL = CB gemacht hat.
Ich behaupte weiter, dass quadriert der Kugeldurchmesser 1 ½ mal so groß wird wie die Pyramidenkante.
Da AC = 2 CB, ist AB = 3 BC. Umgewendet ist also BA 1 ½ AC. Aber $BA : AC = BA^2 : AD^2$, da, wenn man DB zieht, BA : AD = DA : AC (VI, 4), weil Δ DAB ~ Δ DAC (VI, 8) und das erste Glied sich zum dritten verhält wie das Quadrat des ersten um Quadrat

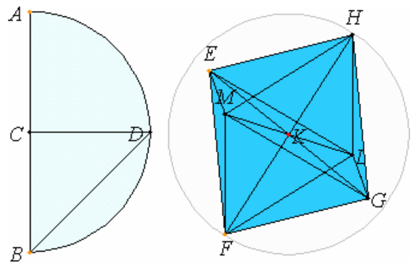
des zweiten (VI, 19 Zusatz). Also ist $BA^2 = 1\frac{1}{2} AD^2$. Hier ist BA der Durchmesser der gegebenen Kugel und AD der Pyramidenkante gleich. Also wird quadriert der Kugeldurchmesser anderthalb mal so groß wie die Pyramidenkante – q.e.d.



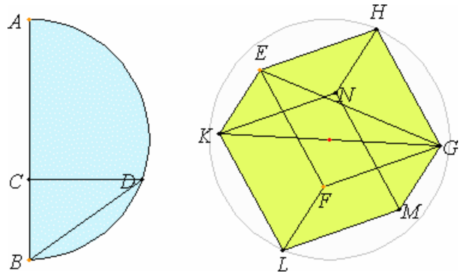
Hilfssatz: Man muss noch zeigen, dass $AB : BC = AD^2 : DC^2$.
Man gehe von der Zeichnung des Halbkreises aus, ziehe, DB, zeichne über AC das Quadrat EC und ergänze Parallelogramm FB.
Da, weil Δ DAB mit Δ DAC winkelgleich ist (VI, 8), BA : AD = DA : AC (VI, 4), ist $BA \cdot AC = AD^2$ (VI, 17). Da AB : BC = Parallelogramm EB : BF (VI, 1), hier EB aber $BA \cdot AC$ ist wegen EA = AC, BF aber $AC \cdot CB$, so ist $AB : BC = BA \cdot AC : AC \cdot CB$. Nun ist $BA \cdot AC = AD^2$, und $AC \cdot CB = DC^2$, weil das Lot DC zwischen den Abschnitten AC, CB der Grundlinie Mittlere Proportionale ist (VI, 8 Zusatz), da ∠ ADB ein Rechter (III, 31). Also ist $AB : BC = AD^2 : DC^2$ - q.e.d.

§ 14 (A. 2)

Ein Oktaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die früheren Körper zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante.



Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, halbiere ihn in C (I, 10), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB.
Ferner lege man das Quadrat EFGH hin, dessen Seiten alle = DB (I, 46), ziehe HF, EG und errichte im Schnittpunkt K auf der Ebene des Quadrats EFGH die Senkrechte KL (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als KM, trage sowohl auf KL als KM Strecken KL, KM = einer der Strecken EK, FK, GK, HK ab und ziehe LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH.
Da KE = KH und ∠ EKH ein Rechter (IV, 9), ist $HE^2 = 2\ EK^2$ (I, 47); ebenso ist, da LK = KE und ∠ LKE ein Rechter (IX, Definition 3), $EL^2 = 2\ EK^2$. Wie bewiesen, ist aber auch $HE^2 = 2\ EK^2$; also $LE^2 = EH^2$, also LE = EH. Aus demselben Grunde ist auch LH = HE, also Δ LEH gleichseitig. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten des Quadrats EFGH und deren Spitzen die Punkte L, M sind, alle gleichseitig sind. So hat man das Oktaeder, das von 8 gleichseitigen Dreiecken umfasst wird, errichtet.
Weiter soll man es mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante.

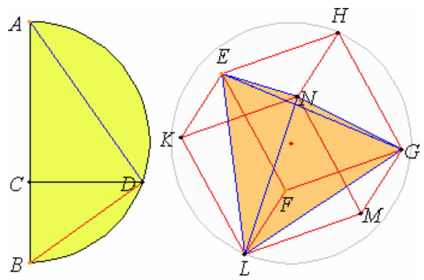


Da LK, KM, KE alle drei einander gleich sind, muss der Halbkreis, den man über LM zeichnete, auch durch E gehen. Aus demselben Grunde muss der Halbkreis, wenn man ihn durch Herumführen, während LM fest bleibt, wieder in dieselbe Lage zurückbringt, von der er ausging (XI, Definition 14), auch durch die Punkte F, G, H gehen. So wäre das Oktaeder mit einer Kugel umschlossen; ich behaupte, mit der gegebenen. Da nämlich LK = KM und KE gemeinsam ist und sie rechte Winkel umfassen, ist Grundlinie LE = Grundlinie EM (I, 4). Da ∠ LEM ein Rechter, weil er im Halbkreis liegt (III, 31), ist $LM^2 = 2\ LE^2$ (I, 47). Ebenso ist, da AC = CB, AB = 2 BC. Aber $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also ist $AB^2 = 2\ BD^2$. Wie bewiesen, ist $LM^2 = 2\ LE^2$. Auch ist $DB^2 = LE^2$, da wir EH =

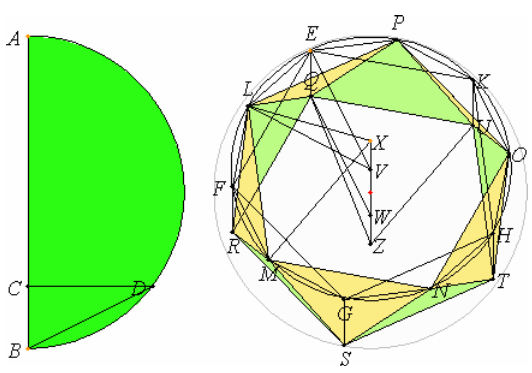
DB gemacht haben. Also ist $AB^2 = LM^2$, also AB = LM. Hier ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; also LM dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich.
Man hat also das Oktaeder mit der gegebenen Kugel umschlossen. Und nebenbei hat man bewiesen, dass quadriert der Kugeldurchmesser zweimal so groß wird wie die Oktaederkante – q.e.d.

§ 15 (A. 3)
Einen Würfel zu errichten und mit einer Kugel wie die Pyramide zu umschließen; ferner zu zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante.

Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = 2 CB (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man das Quadrat EFGH hin, dessen Seite = DB sei (I, 46), errichte in E, F, G, H auf der Ebene des Quadrats EFGH die Senkrechten EK, FL, GM, HN (XI, 12), trage auf allen geraden Linien EK, FL, GM, HN Strecken EK, FL, GM, HN, jede einer der Strecken EF, FG, GH, HE gleich, ab und ziehe KL, LM, MN, NK. So hat man den Würfel FN, der von 6 gleichen Quadraten umfasst wird, errichtet. Weiter soll man ihm mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelseite. Man ziehe KG und EG.
Da $\angle$ KEG ein Rechter, weil KE $\perp$ Ebene EG und natürlich auch $\perp$ Strecke EG (XI, Definition 3), muss der Halbkreis, den man über KG zeichnete, auch durch Punkt E gehen (III, 31). Weil ebenso GF $\perp$ sowohl FL als FE, ist GF auch $\perp$ Ebene FK (XI, 4), so dass, wenn man FK zieht, auch GF $\perp$ FK. Deshalb muss der Halbkreis, den man über GK zeichnete, ebenso auch durch F gehen; und ähnlich muss er auch durch die übrigen Würfelecken gehen. Bringt man mithin, während KG fest bleibt, den Halbkreis durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurück, von der er ausging (XI, Definition 14), so muss der Würfel mit einer Kugel umschlossen sein; ich behaupte, mit der gegebenen. Da nämlich GF = FE und der Winkel bei F ein Rechter, ist $EG^2 = 2\ EF^2$ (I, 47). Aber EF = EK; also $EG^2 = 2\ EK^2$, folglich $GE^2 + EK^2$, d.h. (I, 47) $GK^2 = 3\ EK^2$.



Da AB = 3 BC und AB : BC = $AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz), ist $AB^2 = 3\ BD^2$. Wie bewiesen, ist auch $GK^2 = 3\ KE^2$. KE haben wir aber = DB gemacht; also ist KG = AB. Hier ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; also KG dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich.
Man hat also den Würfel mit der gegebenen Kugel umschlossen. Und nebenbei hat man bewiesen, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante – q.e.d.



§ 16 (A. 4)
Ein Ikosaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die besprochenen Körper zu umschließen; ferner zu zeigen; dass die Ikosaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Minor nennt.

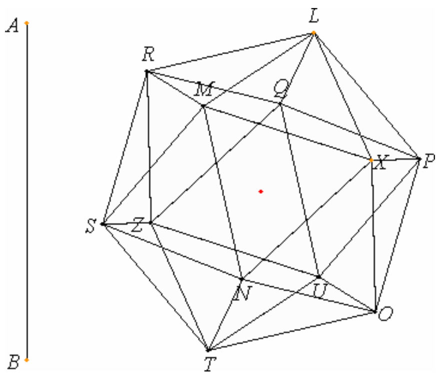
Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = 4 CB (VI, 9), zeichne über AB den Halbkreis ADB, errichte in C auf AB die Senkrechte CD (I, 11) und ziehe DB. Ferner lege man den Kreis EFGHK hin, dessen Radius = DB sei, beschreibe dem

Kreis EFGHK ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck EFGHK ein (IV, 11), halbiere den Bogen EF, FG, GH, HK, KE in den Punkten L, M, N, O, P (III, 30) und ziehe LM, MN, NO, OP, PL, EP; dann ist auch Fünfeck LMNOP gleichseitig und EP die Zehneckseite. Weiter errichte man in den Punkten E, F, G, H, K auf der Ebene des Kreises die Senkrechten EQ, FR, GS, HT, KU (XI, 12), die dem Radius des Kreises EFGHK gleich seien und ziehe QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ.

Da EQ, KU beide auf derselben Ebene senkrecht stehen, ist EQ || KU (XI, 6); ferner sind sie gleich. Strecken, welche gleich und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind aber gleich und parallel (I, 33); also ist auch QU = und || EK. Nun ist EK Seite eines gleichseitigen Fünfecks, also auch QU die Seite des dem Kreise EFGHK einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks. Aus demselben Grunde ist auch jede der Strecken QR, RS, ST, TU die Seite des dem Kreise EFGHK einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks; Fünfeck QRSTU ist also gleichseitig. Ferner ist, da QE die Sechseckseite (IV, 15 Zusatz), EP die Zehneckseite und ∠ QEP ein Rechter ist (XI, Definition 3), QP (I, 47) die Fünfeckseite; denn (XIII, 10) quadriert wird die Seite des Fünfecks ebenso groß wie die Seite des Sechsecks und des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen, zusammen. Aus demselben Grunde ist auch PU die Fünfeckseite. Und QU ist eine Fünfeckseite; also ist ∆ QPU gleichseitig. Aus demselben Grunde sind auch QLR, RMS, SNT, TOU alle gleichseitig. Da, wie bewiesen, jede der Strecken QL, QP die Fünfeckseite ist, auch LP aber eine Fünfeckseite, ist ∆ QLP gleichseitig. Aus demselben Grund sind auch ∆ LRM, MSN, NTO, OUP alle gleichseitig.

Man verschaffe sich den Mittelpunkt V des Kreises EFGHK (III, 1), errichte in V auf der Ebene des Kreises die Senkrechte VY (XI, 12), verlängere sie nach der anderen Seite als VX, trage ab eine Sechseckseite VW und Zehneckseiten sowohl VW als WY, und ziehe QY, QW, UY, EV, LV, LX, XM.

Da VW, QE beide auf der Ebene des Kreises senkrecht stehen, ist VW || QE (XI, 6); ferner sind sie gleich; also ist auch EV = und || QW (I, 33). Nun ist EV die Sechseckseite (IV, 15 Zusatz), also auch QW die Sechseckseite. Da QW die Sechseckseite und WY die Zehneckseite ist, auch ∠ QWY ein Rechter (IX, 7, Definition 3; I, 29), so ist QY die Fünfeckseite (XIII, 10). Aus demselben Grunde ist auch UY die Fünfeckseite. Denn zieht man VK, WU, so sind sie gleiche gegenüberliegende Seiten, auch ist VK als Radius der Sechseckseite gleich; also ist WU die Sechseckseite; ferner ist WY die Zehneckseite und ∠ UWY ein Rechter; also UY die Fünfeckseite. Auch QU ist eine Fünfeckseite, also ∆ QUY gleichseitig. Aus demselben Grunde sind auch die übrigen Dreiecke mit den Grundlinien QR, RS, ST, TU und der Spitze Y alle gleichseitig. Ebenso ist, da VL Sechseckseite, VX die Zehneckseite und ∠ LVX ein Rechter, LX die Fünfeckseite. Aus demselben Grund ergibt sich, wenn man MV, das die Sechseckseite ist, zieht, dass auch MX die Fünfeckseite ist. Auch LM ist eine Fünfeckseite; ∆ LMX ist gleichseitig. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Dreiecke mit den Grundlinien MN, NO, OP, PL und der Spitze X alle gleichseitig sind.



Man hat also das Ikosaeder, das von 20 gleichseitigen Dreiecken umfasst wird, errichtet.

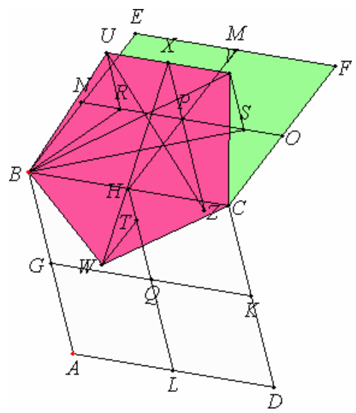
Weiter soll man es mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass die Ikosaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Minor (X, 76) nennt.

Da VW die Sechseckseite und WY die Zehneckseite ist, ist VY in W stetig geteilt, VW sein größerer Abschnitt (XIII, 9); also YV : VW = VW : WY (VI, Definition 3). Nun ist VW = VE, WY = VX; also YV : VE = EV : VX; ∠ YVE, EVX sind hier Rechte. Zieht man also Strecke EY, dann muss ∠ XEY ein Rechter sein wegen ∆ XEY ~ VEY

(VI, 6; I, 32). Aus demselben Grunde ist, da YV :VW = VW : WY, YV = XW und VW = WQ, XW : WQ = QW : WY; also muss, wenn man QX zieht, ebenso der Winkel bei Q ein Rechter sein. Der Halbkreis, den man über XY zeichnete, muss also auch durch Q gehen (III, 31). Bringt man den Halbkreis, während XY fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurück, von der er ausging (XIII, Definition 14), so muss er durch Q und die übrigen Ikosaederecken gehen, und das Ikosaeder wäre mit einer Kugel umschlossen; ich behaupte, mit der gegebenen.
Man halbiere VW in Z (I, 10). Da Strecke VY in W stetig geteilt ist, ihr kleinerer Abschnitt YW, wird YW, wenn man WZ, die Hälfte des größeren Abschnitts hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über der Hälfte des größeren Abschnitts (XIII, 3); also $YZ^2 = 5\ ZW^2$. Nun ist 2 YZ = YX, 2 ZW = VW; also $YX^2 = 5\ WV^2$. Da nun AC = 4 CB, ist AB = 5 BC. Aber $AB : BC = AB^2 : BD^2$ (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also $AB^2 = 5\ BD^2$. Wie oben bewiesen, ist auch $YX^2 = 5\ VW^2$. Nun ist DB = VW, weil beide dem Radius des Kreises EFGHK gleich sind. Also ist AB = XY. Nun ist AB der Durchmesser der gegebenen Kugel; XY also dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich, das Ikosaeder ist also mit der gegebenen Kugel umschlossen.
Weiter behaupt ich, dass die Ikosaederseite eine Irrationale ist, wie man sie Minor nennt. Da der Kugeldurchmesser die Rationale ist und er quadriert fünfmal so groß wird wie der Radius des Kreises EFGHK, ist der Radius des Kreises EFGHK rational, folglich auch sein Durchmesser rational (X, Definition 3). Wird aber einem Kreis mit rationalem Durchmesser ein gleichseitiges Fünfeck einbeschrieben, so ist die Fünfeckseite eine Irrationale, wie man sie Minor nennt (XIII, 11; X 105 Anmerkung). Die Seite des Fünfecks EFGHK ist aber die Ikosaederkante; die Ikosaederkante ist also eine Irrationale, wie man sie Minor nennt.

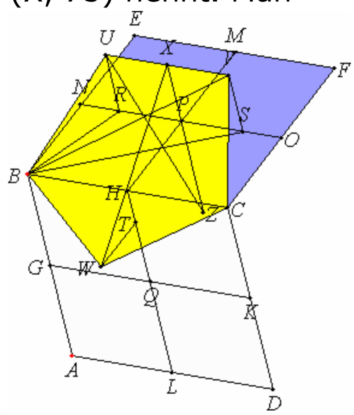
Zusatz: Hiernach ist klar, dass quadriert der Kugeldurchmesser fünfmal so groß wird wie der Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert, und dass der Kugeldurchmesser zusammengesetzt ist aus einer Seite des Sechsecks und zwei Seiten des Zehnecks, die sich demselben Kreise einbeschreiben lassen – q.e.d.

§ 17 (A. 5)
Ein Dodekaeder zu errichten und mit einer Kugel wie die besprochenen Körper zu umschließen; ferner zu zeigen; dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome nennt.



Man lege zwei aufeinander senkrechte Flächen ABCD, CBEF des besprochenen Würfels (XIII, 15) hin, halbiere alle Kanten AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC in G, H, K, L, M, N, O ziehe GK, HL, MH, NO und teile die Strecken NP, PO, HQ alle stetig in den Punkten R, S, T (VI, 30); ihre größeren Abschnitte seien RP, PS, TQ. Ferner errichte man in den Punkten R, S, T auf den Würfelflächen vom Würfel nach außen die Senkrechten RU, SV, TW (XI, 12), mache sie den Strecken RP, PS, TQ gleich und ziehe UB, BW, WC, CV, VU. Ich behaupte, dass das Fünfeck UBWCV gleichseitig ist, in einer Ebene liegt und gleichwinklig ist.
Man ziehe RB, SB, VB.
Da die Strecke NP in R stetig geteilt ist, RP der größere Abschnitt, sind $PN^2 + NR^2 = 3\ RP^2$ (XIII, 4). Hier ist PN = NB, PR = RU; also $BN^2 + NR^2 = 3\ RU^2$. Aber $BN^2 + NR^2 = BR^2$ (I, 47); also $BR^2 = 3\ RU^2$, folglich $BR^2 + RU^2 = 4\ RU^2$. Aber $BR^2 + RU^2 = BU^2$ (I, 47); also $BU^2 = 4\ UR^2$; also BU = 2 RU. Aber auch VU = 2 UR, da (I, 34) SR = 2 PR, d.h. = 2 RU. Also ist BU = UV. Ähnlich lässt sich zeigen, dass von den Strecken BW, WC, CV jede sowohl BU als UV gleich ist. Fünfeck BUVCW ist also gleichseitig.

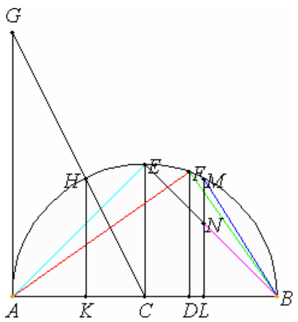
Ich behaupte weiter, dass es in einer Ebene liegt. Man ziehe durch P vom Würfel nach außen PX || RU und SV (I, 31) und ziehe XH, HW. Ich behaupte, dass die Linie XHW gerade ist. Da HQ in T stetig geteilt ist, QT sein größerer Abschnitt, ist HQ : QT = QT : TH (VI, Definition 3). Hier ist HQ = HP, QT = sowohl TW als PX; also HP : PX = WT : TH. Nun ist HP || TW, weil beide $\perp$ Ebene BD (XI, 6). Und TH || PX, weil beide $\perp$ Ebene BF. Setzt man aber zwei Dreiecke, wie XPH, HTW, in denen zwei Seiten mit zwei Seiten in Proportion stehen, mit einer Ecke so aneinander, dass ihre entsprechenden Seiten parallel sind, so müssen die letzten Strecken einander gerade fortsetzen (VI, 32). XH setzt also HW gerade fort. Jeder gerade Linie liegt aber in einer Ebene (XI, 1). Das Fünfeck UBWCV liegt also in einer Ebene (XI, 2, 7).
Ich behaupte weiter, dass es gleichwinklig ist.
Da die Strecke NP in R stetig geteilt ist, PR der größere Abschnitt und PR = PS, so ist NS in P stetig geteilt, NP der größere Abschnitt (XIII, 5); also $NS^2 + SP^2 = 3\ NP^2$ (XIII, 4). Hier ist NP = NB, PS = SV; also $NS^2 + SV^2 = 3\ NB^2$, folglich $VS^2 + SN^2 + NB^2 = 4\ NB^2$. Nun ist $SN^2 + NB^2 = SB^2$ (I, 47); also $BS^2 + SV^2$, d.h. (I, 47) BV^2 - $\angle$ VSB ist je ein Rechter (XI, Definition 3) - $= 4\ NB^2$; also VB = 2 BN. Aber auch BC = 2 BN; also BV = BC. Da hier zwei Seiten BU, UV zwei Seiten BW, WC gleich sind, auch Grundlinie BV = Grundlinie BC, ist $\angle$ BUV = $\angle$ BWC (I, 8). Ähnlich lässt sich auch zeigen, dass auch $\angle$ UVC = BWC. $\angle$ BWC, BUV, UVC sind also alle drei einander gleich. Sind aber in einem gleichseitigen Fünfeck drei Winkel einander gleich, so muss das Fünfeck gleichwinklig sein (XIII, 7); Fünfeck BUVCW ist also gleichwinklig. Wie oben bewiesen, ist es auch gleichseitig; Fünfeck BUVCW ist also gleichseitig und gleichwinklig und liegt dabei auf einer Würfelkante BC. Konstruiert man also auf jeder der 12 Würfelkanten ebenso, so muss ein Körper entstehen, der von 12 gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken umfasst wird, der Dodekaeder heißt.
Weiter soll man ihm mit der gegebenen Kugel umschließen und zeigen, dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome (X, 73) nennt. Man verlängere XP, es werde XY. PY trifft dann die Würfeldiagonale, und sie halbieren einander; dies ist nämlich im vorletzten Satz des XI. Buches (XI, 38) bewiesen. Sie mögen einander in Y schneiden; dann ist Y der Mittelpunkt der den Würfel umschließenden Kugel und YP die Hälfte der Würfelkante. Man ziehe UY.



Da die Strecke NS in P stetig geteilt ist, NP ihr größerer Abschnitt, sind $NS^2 + SP^2 = 3\ NP^2$ (XIII, 4). Hier ist NS = XY, da NP = PY und XP = PS. Aber PS = XU, da = RP; also $YX^2 + XU^2 = 3\ NP^2$. Aber $YX^2 + XU^2 = UY^2$ (I, 47); also $UY^2 = 3\ NP^2$. Aber auch der Radius der den Würfel umschließenden Kugel wird quadriert dreimal so groß wie die Hälfte der Würfelkante; denn wie man einen Würfel errichtet, ihn mit einer Kugel umschließt und zeigt, dass quadriert der Kugeldurchmesser dreimal so groß wird wie die Würfelkante, ist früher (XIII, 15) gezeigt worden; wenn dies von den Ganzen gilt, gilt es auch von den Hälften. Hier ist NP die Hälfte der Würfelkante; also ist UY dem Radius der den Würfel umschließenden Kugel gleich. Y ist der Mittelpunkt der den Würfel umschließenden Kugel; Punkt U liegt also auf der Kugelfläche. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch alle übrigen Dodekaederecken auf der Kugelfläche liegen. Man hat also das Dodekaeder mit der gegebenen Kugel umschlossen.
Weiter behaupte ich, dass die Dodekaederkante eine Irrationale ist, wie man sie Apotome nennt. Da RP der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke NP ist, PS der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke PO, ist RS der größere Abschnitt der stetig geteilten ganzen Strecke NO. Da NP : PR = PR : RN, gilt entsprechendes auch etwa von den Doppelten; denn Teile haben dasselbe Verhältnis wie Gleichvielfache (V, 15). Also ist NO : RS = RS : (NR + SO); hier ist NO > RS, also RS > (NR + SO) (V, 14); NO ist also stetig geteilt, RS der größere Abschnitt. Nun ist RS = UV, also UV der

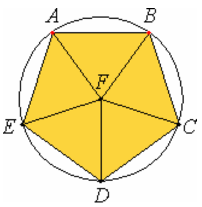
größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke NO. Da der Kugeldurchmesser die Rationale ist und quadriert dreimal so groß wie die Würfelkante (XIII, 15), ist NO als Würfelkante rational (X, Definition 3). Wird aber eine rationale Strecke stetig geteilt, so ist jeder ihrer Abschnitte irrational, eine Apotome (XIII, 6; Anmerkung). Die Strecke UV, welche die Dodekaederkante ist, ist also irrational, eine Apotome.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass die Dodekaederkante der größere Abschnitt der stetig geteilten Würfelkante ist – q.e.d.

§ 18 (A. 6)
Die Kanten der Fünf Körper darzustellen und miteinander zu vergleichen.



Man lege den Durchmesser AB der gegebenen Kugel hin, teile ihn in C so, dass AC = CB, und in D so, dass AD = 2 DB, zeichne über AB den Halbkreis AEB, errichte in C und D auf AB die Senkrechte CE, DF und ziehe AF, FB, EB.
Da AD = 2 DB, ist AB = 3 BD, also umgewendet (V, Definition 16), BA = 1 ½ AD. Aber BA : AD = $BA^2 : AF^2$, weil ∆ AFB mit ∆ AFD winkelgleich ist (VI, 8, 4, 19 Zusatz); also $BA^2 = 1 \frac{1}{2} AF^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch anderthalbmal so groß wie die Pyramidenkante (XIII, 13). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also AF der Pyramidenkante gleich.
Ebenso ist, da AD = 2 DB, AB = 3 BD; und AB : BD = $AB^2 : BF^2$, also $AB^2 = 3 BF^2$. Quadriert wird aber der Kugeldurchmesser aber auch dreimal so groß wie die Würfelkante (XIII, 15). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also BF die Würfelkante.
Ferner ist, da AC = CB, AB = 2 BC; und AB : BC = $AB^2 : BE^2$, also $AB^2 = 2BE^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch zweimal so groß wie die Oktaederkante (XIII, 14). Und AB ist der Durchmesser der gegebenen Kugel; also BE die Oktaederkante.
Weiter errichte man im Punkte A auf der geraden Linie AB die Senkrechte AG, mache AG = AB, ziehe GC und fälle von H auf AB das Lot HK. Da GA = 2 AC, weil GA = AB, und GA : AC = HK : KC (VI, 4), ist HK = 2 KC; also $HK^2 = 4 KC^2$; also $HK^2 + KC^2$, d.h. (I, 47) $HC^2 = 5 KC^2$. Hier ist HC = CB; also $BC^2 = 5 CK^2$. Da AB = 2 CB und hierin AD = 2 DB, ist auch Rest BD = 2 DC, also BC = 3 CD, also $BC^2 = 9 CD^2$. Aber $BC^2 = 5 CK^2$; also $CK^2 > CD^2$, also CK > CD.
Man lege CL = CK hin, errichte in L auf AB die Senkrechte LM und ziehe MB. Da $BC^2 = 5 CK^2$, 2 BC = AB, 2 CK = KL, ist $AB^2 = 5 KL^2$. Quadriert wird der Kugeldurchmesser aber auch fünfmal so groß wie der Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert (XIII, 16 Zusatz). Und AB ist der Kugeldurchmesser; also KL des Radius des Kreises, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert; KL ist also die Sechseckseite im genannten Kreis (IV, 15 Zusatz). Und da der Kugeldurchmesser zusammengesetzt ist aus einer Seite des Sechsecks und zwei Seiten des Zehnecks, die sich dem genannten Kreis einbeschreiben lassen (XIII, 16 Zusatz), AB aber der Kugeldurchmesser, KL Sechseckseite und AK = LB, ist sowohl AK als LB die Seite des Zehnecks, das sich dem Kreise einbeschreiben lässt, von dem aus man das Ikosaeder konstruiert. Da hier LB die Zehneckseite ist und ML die Sechseckseite – denn es ist = KL, da = HK, weil sie vom Mittelpunkt gleichweit abstehen (III, 14), und HK, KL sind beide = 2 KC – so ist MB die Fünfeckseite (XIII, 10). Die Fünfeckseite ist aber die Ikosaederkante (XIII, 16); also ist MB die Ikosaederkante. Da FB die Würfelkante ist, teile man es stetig in N, NB sei der größere Abschnitt (VI, 30); dann ist NB die Dodekaederkante (XIII, 17 Zusatz).
Da, wie bewiesen, quadriert der Kugeldurchmesser 1 ½ mal so groß wird wie die Pyramidenkante AF, 2 mal so groß wie die Oktaederkante BE und 3 mal so groß wie die Würfelkante FB, werden quadriert die Pyramidenkante 4 mal, die Oktaederkante 3 mal und die Würfelkante 2 mal so groß wie eine Größe, von der der Kugeldurchmesser

quadriert das 6fache wird. Quadriert wird also die Pyramidenkante 1 1/3 mal so groß wie die Oktaederkante und 2 mal so groß wie die Würfelkante; und quadriert wird die Oktaederkante 1 ½ mal so groß wie die Würfelkante. Die Kanten der genannten drei Körper, nämlich Pyramide, Oktaeder und Würfel, stehen zueinander in rationalen (X, Definition 3) Verhältnissen. Die beiden anderen, nämlich die Kanten von Ikosaeder und Dodekaeder stehen weder zueinander (X, 111a) noch zu den oben genannten in rationalen Verhältnissen; denn sie sind irrational, die eine eine Minor (XIII, 16), die andere eine Apotome (XIII, 17).
Dass die Ikosaederkante MB > die Dodekaederkante NB, lässt sich folgendermaßen zeigen. Da Δ FDB mit Δ FAB winkelgleich ist, stehen in Proportion DB : BF = BF : BA (VI, 8, 4). Stehen aber drei Strecken in Proportion, dann verhält sich das Quadrat über der ersten zu dem über der zweiten wie die erste Strecke zur dritten (VI, 19 Zusatz); also DB : BA = $DB^2 : BF^2$, und, umgekehrt (V, Definition 13), AB : BD = $FB^2 : BD^2$. Hier ist AB = 3 BD, also $FB^2 = 3\ BD^2$. Aber $AD^2 = 4\ DB^2$, weil AD = 2 DB. Also ist $AD^2 > FB^2$, also AD > FB, um so mehr AL > FB. Teilt man AL stetig, so ist KL der größere Abschnitt, da ja LK die Sechseckseite und KA die Zehneckseite ist (XIII, 9). Teilt man aber FB stetig, so ist NB der größere Abschnitt. Also ist KL > NB (V, 14). Nun ist KL = LM; also LM > NB. Und MB > LM (I, 19). Um so mehr ist MB, die Ikosaderkante, > NB, die Dodekaederkante.



§ 18a

Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.

Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 2/3 R. beträgt, würden die 6 zusammen = 4 R.; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen < 4 R. (XI, 21). Aus demselben Grund lässt sich auch aus mehr als 6 solchen ebenen Winkeln keine Ecke errichten. Von 3 Quadraten wird die Würfelecke umfasst; mit ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederseite umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks 1 1/5 R. beträgt, würden die 4 Winkel zusammen > 4 R.; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine verwendbare Ecke umfasst werden – S.