

---

**Benno Klotzek, Ulrich Lengtat  
Eberhard Letzel, Karin Schröter**

**kombinieren, parkettieren, färben**

1985 Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin  
MSB: Nr. 122  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2023

<https://mathematika.de>

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Propädeutische Kombinatorik</b>	<b>4</b>
1.1 Aufgaben für den Geometrieunterricht	4
1.1.1 Klasse 4	4
1.1.2 Klasse 5	6
1.1.3 Klasse 6	7
1.1.4 Klasse 7	9
1.2 Anordnen von Quadraten, Drei- und Sechsecken sowie von Würfeln	10
1.2.1 Anzahlaufgaben	10
1.2.2 Aufgaben zum Auslegen	13
1.2.3 Einige Aufgaben zum Somawürfel	16
1.3 Geometrie der „neun Nägel“	19
1.3.1 Deckungsgleichheit und Bewegungen	19
1.3.2 Vierecke und Vielecke	21
1.3.3 Zur Flächeninhaltsberechnung	22
1.4 Parkettierungen	24
1.4.1 Allgemeine Parkette	25
1.4.2 Archimedische Parkette	25
1.5 Einige Aufgaben aus der kombinatorischen Geometrie	30
1.5.1 Nachbarn einer Figur	31
1.5.2 Beleuchtung konvexer Figuren	32
1.5.3 Überdeckung mit gestauchten Bildern	34
1.5.4 Zerlegung von Figuren in Teile kleineren Durchmessers	36
<b>2 Grundlegende Begriffe der Kombinatorik</b>	<b>39</b>
2.1 Arbeiten mit Mengen	39
2.2 Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion	41
2.3 Abbildungen	43
2.4 Permutationen	44
2.5 Variationen	47
2.6 Kombinationen	49
2.7 Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	54
2.8 Figurierte Zahlen	56
<b>3 Endliche Graphen</b>	<b>59</b>
3.1 Begriff des endlichen Graphen	59
3.2 Eulersche Graphen	63
3.3 Hamiltonsche Linien	65
3.4 Die Eulersche Formel	70
3.5 Bäume	75
3.6 Färbungsprobleme	81
3.7 Isomorphismus und Automorphismus	87
<b>4 Endliche Geometrien</b>	<b>92</b>
4.1 Lateinische Quadrate	92
4.2 Blockpläne	101
4.3 Endliche Ebenen	106
4.4 Analytische Geometrie der Ebene der Ordnung 3	112

## Vorwort

Es ist schwer, den Inhalt der Kombinatorik zu umreißen, ihn von dem anderer mathematischer Disziplinen abzugrenzen. Die einstige Domäne der Unterhaltungsmathematik ist unentbehrlicher Bestandteil der Mathematik geworden. Dabei ist Kombinatorik u. a. eng mit der Zahlentheorie, mit Geometrie/Topologie und Wahrscheinlichkeitstheorie/Statistik verbunden; es gibt Querverbindungen zur Analysis und Informationstheorie.

Anwendungen aus der Zeit der Anfänge sind vor allem Anzahlbestimmungen im Zusammenhang mit Glücksspielen, Versicherungsstrategien und handelsökonomischen Problemen; Anwendungen heute in der Ökonomie, Technik, Chemie, Biologie, Medizin, Linguistik, Kriminalistik, im Sport, können durch einige Stichworte angedeutet werden:

Planung von Produktionsprozessen, Optimierung, insbesondere Transportoptimierung, Warenfluss, Netzplantechnik, Statistik, statistische Versuchsplanung, mögliche Molekül- und Kristallstrukturen, genetischer Code, Zellwachstumsprobleme, Diagnose, Entschlüsselung und Verschlüsselung, Färbungen, Turnierplanung, ...

Deshalb sollte Kombinatorik nicht nur Gegenstand der Unterhaltungsmathematik sein, sondern sie muss einen gebührenden Platz in der Allgemeinbildung einnehmen, einen gebührenden Platz im Mathematikunterricht sowie in Schülerarbeitsgemeinschaften besitzen.

Dabei kommen für die Arbeit durchaus die Vorzüge zum Tragen, die der Kombinatorik einen festen Platz in der Unterhaltungsmathematik gesichert haben und auch weiterhin sichern werden. Das vorliegende Büchlein wird daher auch dem "vorhandenen Bedürfnis nach anspruchsvollerer Unterhaltungsliteratur gerecht."

Der Inhalt der vorliegenden Sammlung von Aufgaben und Lösungen ließe sich vielleicht am besten als Propädeutik der diskreten Mathematik zusammenfassen. Dieser Name ist aber im allgemeinen noch nicht geläufig, so dass er nicht gewählt wurde.

Die Beschäftigung mit den oben genannten Problemen soll einerseits ansprechende Freizeitbeschäftigung sein und andererseits dazu beitragen, das Denken gemäß dieser modernen Richtung der Mathematik zu schulen.

Dabei wurden hauptsächlich Aufgaben aus der Geometrie ausgewählt, um so einerseits Anschaulichkeit und Fasslichkeit der Geometrie nutzen zu können und andererseits zur Bereicherung der geometrischen Allgemeinbildung beizutragen. Hierbei ging es uns um ein vielseitiges, ansprechendes und zugleich praktikables Material für Lehrer.

Auf der Grundlage vorliegender Erfahrungen wurden für die einzelnen Kapitel oder für deren Abschnitte Empfehlungen zur Arbeit mit Schülern formuliert; jede Empfehlung schließt insbesondere die Nutzung der Aufgaben in einer höheren als der angegebenen Klassenstufe ein. Es muss jedoch bemerkt werden, dass keine umfangreiche Erprobung stattgefunden hat. Wir sind deshalb für Hinweise auf Grund von eigenen Erfahrungen sehr dankbar.

Die Auswahl von Aufgaben und Lösungen zur Kombinatorik in der Geometrie wurde im WB Geometrie in der Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule "Karl Liebknecht" Potsdam entwickelt, wobei zunächst Frau K. Schröter besonders aktiv war. Die vorliegende Fassung wurde von den übrigen Autoren erarbeitet. Für viele Anregungen, Hinweise und Verbesserungsvorschläge haben wir den Herren J. Flachsmeyer und G. Geise zu danken.

Potsdam, im Herbst 1983

B. Klotzek, U. Lengtat, E. Letzel, K. Schröter

# 1 Propädeutische Kombinatorik

## 1.1 Aufgaben für den Geometrieunterricht

Mit den folgenden Vorschlägen wird der Versuch unternommen, Kombinatorik in den Geometrieunterricht einzubeziehen. Die Lösung der Aufgaben führt an kombinatorische Denk- und Arbeitsweisen heran und bereichert gleichzeitig den Geometrieunterricht der Klassen 4 bis 7. Dabei steht die systematische und vollständige Fallunterscheidung im Vordergrund.

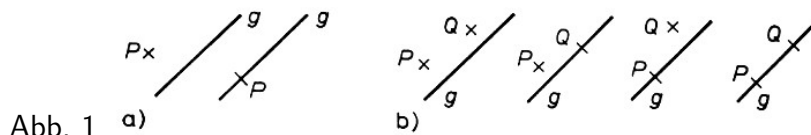
Die Anordnung geometrischer Objekte gestattet anfängliches Probieren und sollte zum systematischen Vorgehen geführt werden; das Vermuten von Anzahlformeln macht dann den dritten Schwierigkeitsgrad aus. In einer Reihe von Musterlösungen werden daneben Rekursionsformeln aufgestellt, wird mit endlich vielen geometrischen Objekten gearbeitet und das sogenannte "Und-so-weiter-Denken" vorbereitet (Propädeutik für höhere Klassenstufen).

Die Ergebnisfindung sollte durch schrittweises Vorgehen und Zurückführen auf den vorher betrachteten Fall (heuristische Hilfsmittel) gekennzeichnet sein. Bisherige Erfahrungen zeigen, dass kombinatorische Aufgaben das Bemühen um selbständiges Arbeiten stimulieren. Die in den folgenden Überschriften angegebenen Klassenstufen sind als Empfehlung aufzufassen.

### 1.1.1 Klasse 4

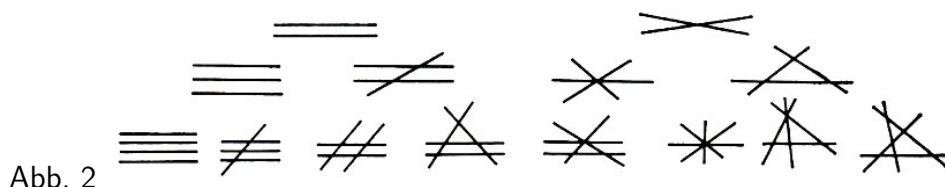
Aufgabe 1. Für die Lage von einem Punkt  $X$  und einer Geraden  $g$  unterscheide man zwei Fälle (Abb. 1a): a)  $X$  liegt auf  $g$ , b)  $X$  liegt nicht auf  $g$ .

Gegeben seien eine Gerade  $g$  und voneinander verschiedene Punkte  $P, Q, R, \dots$ . Welche und wie viele Lagemöglichkeiten von  $g$  und zwei, drei, vier, ... Punkten sind zu unterscheiden?



Lösung. Nach Abb. 1b ist 4 die gesuchte Anzahl für zwei Punkte.

Wird ein Punkt hinzugenommen, so ergeben sich aus jedem vorliegenden Fall zwei neue. Bezüglich  $g$  gibt es bei  $n$  Punkten  $\underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{n\text{-mal}} = 2^n$  Lagemöglichkeiten.



In Abb. 2 werden Lagemöglichkeiten für zwei, drei bzw. vier Geraden unterschieden.

- Aufgabe 2. a) Wie viele Lagemöglichkeiten gibt es für zwei, drei, vier, ... Geraden ?  
 b) Wie viele Lagemöglichkeiten gibt es für zwei, drei, vier, ... Geraden, von denen keine drei einen Punkt gemein haben ?  
 c) Wie viele Lagemöglichkeiten gibt es für zwei, drei, vier, ... Geraden, von denen keine drei einen Punkt oder die Richtung gemein haben?

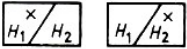
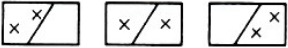
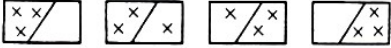
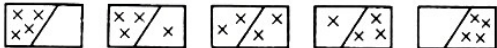
Lösung (vgl. Abb. 2):

Geraden		2	3	4	5
Möglichkeiten	a)	2	4	8	18
	b)	2	3	5	7
	c)	2	2	3	3

Aufgabe 3. Es seien  $H_1$  und  $H_2$  die Halbebenen bezüglich einer Geraden  $g$ . Welche Möglichkeiten gibt es, ein, zwei, drei, vier, ... ununterscheidbare Punkte auf diese Halbebenen zu verteilen? Dabei gehöre kein Punkt von  $g$  zu einer der Halbebenen.

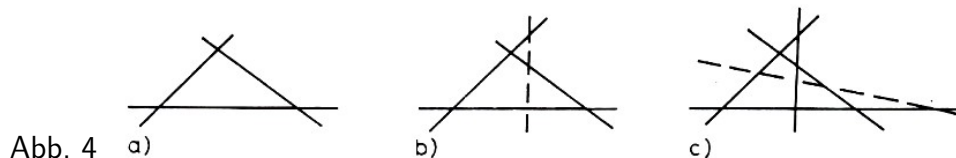
Lösung: Beim systematischen Vorgehen kann man die Anzahl der Punkte in  $H_2$  von null auf ein, zwei, ... Punkte erhöhen (Abb. 3). Bei  $n$  Punkten gibt es  $n + 1$  Möglichkeiten.

Abb. 3

Anzahl der Punkte		Anzahl der Möglichkeiten
1		2
2		3
3		4
4		5

Aufgabe 4. Wie viele Strecken ohne Schnittpunkte im Innern werden durch die Schnittpunkte von drei, vier, fünf, ... paarweise sich schneidenden Geraden gebildet, wenn keine drei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen?

Lösung: Von drei Geraden werden die drei Seiten eines Dreiecks gebildet (Abb. 4a). Eine vierte Gerade ergibt auf diesen Geraden drei weitere Strecken und auf sich zwei (Abb. 4b), insgesamt  $3 + (3 + 2) = 8 = 4 \cdot 2$ .




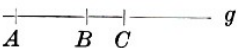
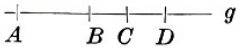
Ähnliches gilt für eine fünfte Gerade (Abb. 4c):  $8 + (4 + 3) = 15 = 5 \cdot 3$  usw.

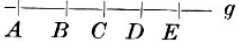
Die Vermutung für die Anzahl  $A_n$  bei  $n$  Geraden lautet:

$$A_n = A_{n-1} + (n - 1) + (n - 2) = n(n - 2)$$

Aufgabe 5. Wie viele Strecken werden von zwei, drei, vier, ... Punkten auf einer Geraden  $g$  gebildet, wenn die Strecken (im Gegensatz zur Aufgabe 4) gemeinsame innere Punkte besitzen dürfen?

Lösung: Wegen  $\overline{PQ} = \overline{QP}$  gilt zunächst:

Anzahl der Punkte	gebildete Strecken	Anzahl der Strecken
	$\overline{AB}$	1
	$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$	$3 = 1 + 2 = (3 \cdot 2) : 2$
	$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}$	$6 = 1 + 2 + 3 = (4 \cdot 3) : 2$

Anzahl der Punkte	gebildete Strecken	Anzahl der Strecken
5		10 = 1 + 2 + 3 + 4 = (5 · 2) : 2

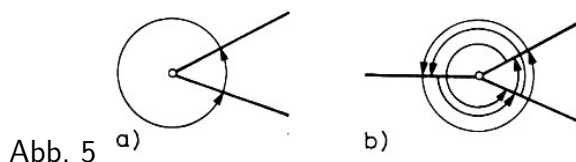
Bei der Hinzunahme eines  $(n + 1)$ -ten Punktes kommen die mit ihm gebildeten  $n$  Strecken hinzu, so dass sich die Anzahl der Strecken als Summe der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ergibt. Andererseits gehört jeder der  $n + 1$  Punkte zu  $n$  Strecken; um die gesuchte Anzahl zu erhalten, ist  $(n + 1)n$  wegen  $\overline{PQ} = \overline{QP}$  durch 2 zu dividieren.

### 1.1.2 Klasse 5

Man löse nochmals Aufgabe 5.

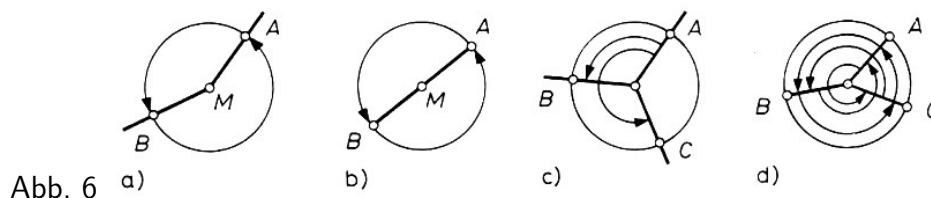
Aufgabe 6. Von einem Punkt  $P$  gehen zwei, drei, vier, fünf, ... Strahlen aus. Wie viele Winkel mit voneinander verschiedenen Schenkeln werden gebildet ?

Lösung: Da je zwei Strahlen zwei Winkel bilden, gibt es zwei (Abb. 5a), sechs (Abb. 5b), 12, 20, ... Winkel. Bei  $n + 1$  Strahlen beträgt die gesuchte Anzahl nach der Lösung der Aufgabe 5 schließlich  $(n + 1)n$ .



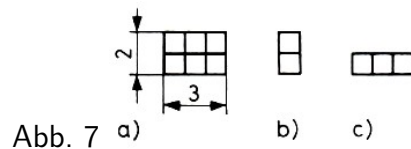
Aufgabe 7. Auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  seien zwei, drei, vier, ... Punkte gegeben. Wie viele Drehungen um  $M$ , bei denen wenigstens ein gegebener Punkt Bild eines der anderen ist, gibt es?

Lösung: Zur Bestimmung der gesuchten Drehungen sind nur deren Drehwinkel zu finden. Geeignete Winkel werden von  $M$  und den gegebenen Punkten gebildet (Abb. 6a). Für zwei Punkte  $A$  und  $B$  kann es zwei Drehungen mit  $A \rightarrow B$  bzw.  $B \rightarrow A$  geben (Abb. 6a), aber auch nur eine, falls  $M$  Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$  ist (Abb. 6b). Die Aufgabe lässt sich folglich nicht nur in Abhängigkeit von der Anzahl der gegebenen Punkte lösen, es können aber eine Mindestanzahl und eine Höchstanzahl gefunden werden:



Ist  $A$  einer der gegebenen Punkte, dann kann er in jeden der übrigen gedreht werden; bei  $n + 1$  regelmäßig gelegenen Punkten gibt es außer den schon bestimmten  $n$  Drehungen keine weitere (Abb. 6c). Die Höchstanzahl ergibt sich aus der Anzahl der gebildeten Winkel; sie beträgt für  $n + 1$  Punkte nach der Lösung der vorigen Aufgabe  $(n + 1)n$  (vgl. Abb. 6a, d).

Aufgabe 8. Wie viele Rechtecke sind in Abb. 7a zu erkennen? Man unterscheide dabei die Rechtecke nach Umfang  $U$  und Flächeninhalt  $A$ , wenn die Grundbausteine Einheitsquadrate sind.



- Lösung: a) Es gibt sechs Einheitsquadrate mit  $U = 4 \text{ cm}$  und  $A = 1 \text{ cm}^2$ .  
 b) Für Rechtecke, die von zwei Einheitsquadraten gebildet werden (Abb. 7b), gilt  $U = 6 \text{ cm}$  und  $A = 2 \text{ cm}^2$ . Von dieser Sorte existieren sieben.  
 c) Zwei Rechtecke werden von drei Einheitsquadraten gebildet (Abb. 7c). Für sie gilt  $U = 8 \text{ cm}$  und  $A = 3 \text{ cm}^2$ .  
 d) Vier Einheitsquadrate ergeben ein Quadrat mit  $U = 8 \text{ cm}$  und  $A = 4 \text{ cm}^2$ . Abb. 7a enthält zwei davon.  
 e) Alle Einheitsquadrate ergeben ein Rechteck vom Umfang  $U = 10 \text{ cm}$  und vom Flächeninhalt  $A = 6 \text{ cm}^2$ . Insgesamt sind  $6 + 7 + 2 + 2 + 1 = 18$  Rechtecke erkennbar.  
 Die Aufgabe 8 lässt sich mannigfach variieren. Schon im Fall  $2 \times 4$  genügt  $A$  allein nicht mehr zur Kennzeichnung der Sorten.

### 1.1.3 Klasse 6

Wenn zwei Dreiecke kongruent (deckungsgleich) sind,  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , dann sind entsprechende Seiten und Winkel kongruent, d.h.

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'},$$

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C', \quad \angle BCA \cong \angle B'C'A', \quad \angle CAB \cong \angle C'A'B'$$

Die folgende Aufgabe zielt auf die Umkehrung ab:

Aufgabe 9. Sind Dreiecke kongruent, wenn drei von den obigen sechs Kongruenzen für Seiten und Winkel gelten ?

Lösung: Es werden alle wesentlichen Fälle untersucht.

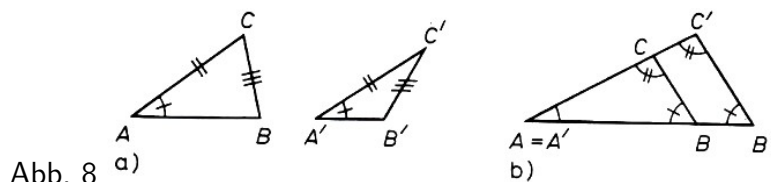
a) Es gelten die drei Streckenkongruenzen. Nach sss ist  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

b) Es gelten zwei Strecken- und eine Winkelkongruenz.

Fall 1: Eingeschlossener Winkel. Es gilt  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  nach SWS.

Fall 2: Gegenwinkel der längeren Seite. Dann ist  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  nach ssw.

Fall 3: Gegenwinkel der kürzeren Seite. Es kann  $\triangle ABC \not\cong \triangle A'B'C'$  sein, obwohl  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  und  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  gilt (Abb. 8a).



c) Es gelten eine Strecken- und zwei Winkelkongruenzen.

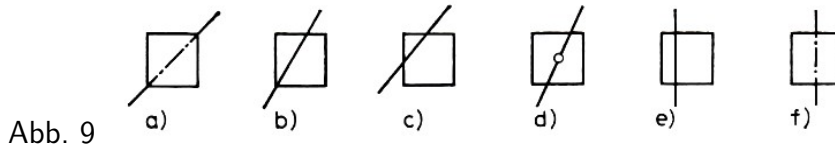
Fall 1: Anliegende Winkel. Nach wsw gilt  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

Fall 2: Ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel. Nach dem Satz über die Innenwinkel muss auch die dritte Winkelkongruenz bestehen, so dass  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  nach wsw folgt.

d) Es gelten die drei Winkelkongruenzen. In Abb. 8b ist diese Voraussetzung wegen  $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$  nach dem Stufenwinkelsatz erfüllt, dennoch gilt  $\triangle ABC \not\cong \triangle A'B'C'$ .

Aufgabe 10. Welche Figuren entstehen, wenn ein Quadrat von einer Geraden geschnitten wird?

Lösung: Die Gerade kann zwei, einen oder keinen Eckpunkt enthalten. Im ersten Fall entstehen zwei bezüglich der Geraden symmetrische und damit kongruente Dreiecke (Abb. 9a), im zweiten ein Dreieck und ein Trapez (Abb. 9b). Schneidet die Gerade  $g$  im dritten Fall benachbarte Seiten, dann entstehen ein rechtwinkliges Dreieck und ein Fünfeck (Abb. 9c); trifft sie jedoch gegenüberliegende Seiten, dann werden zwei Trapeze gebildet.

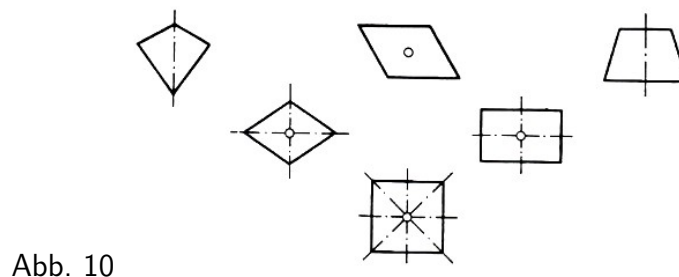


Die Trapeze sind speziell kongruent, wenn die Gerade den Mittelpunkt enthält (Abb. 9d); die Teile sind Rechtecke, wenn  $g$  zu einer Seite parallel oder senkrecht verläuft (Abb. 9e); schließlich entstehen sogar kongruente Rechtecke, wenn  $g$  eine Symmetrieachse ist (Abb. 9f). (Diese Aufgabe kann schon in der 4. Klasse gestellt und z. T. gelöst werden.)

Vierecke können eine Symmetrieachse oder ein Symmetriezentrum (Mittelpunkt) besitzen. Bei der Spiegelung an einer Symmetrieachse wird das Viereck auf sich abgebildet. Dasselbe trifft bei der Drehung um den Mittelpunkt um  $180^\circ$  zu.

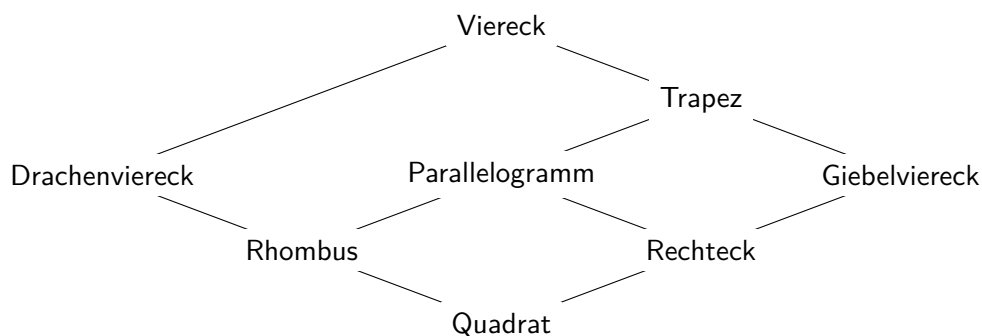
Aufgabe 11. Man ermittle für alle konvexen Vierecke die Symmetrien und ordne sie auf dieser Grundlage.

Lösung: Eine Symmetrieachse eines Vierecks kann Diagonale oder Mittelsenkrechte einer Seite sein; das Viereck ist dann ein Drachen- bzw. Giebelviereck (Abb. 10).



Da ein Symmetriezentrum nur Mittelpunkt der Diagonalen sein kann, ist ein zentralsymmetrisches Viereck stets ein Parallelogramm. Zwei Symmetrieachsen besitzen Rechteck und Rhombus. (Abb. 10); der Schnittpunkt der Symmetrieachsen ist dabei Mittelpunkt.

Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen und einen Mittelpunkt. Die Symmetrien sind für die genannten Vierecksformen kennzeichnend. Sie können folgendermaßen geordnet werden:



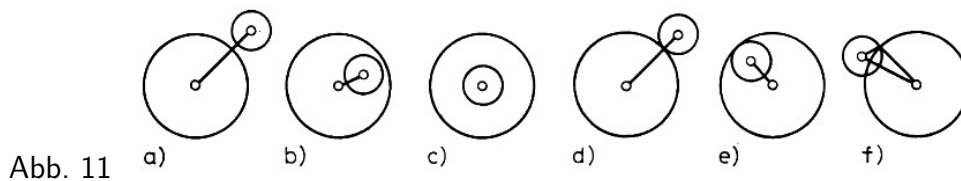


Um das Trapez herauszustellen, können Schiefsymmetrien betrachtet werden; dann lässt sich in der Übersicht die Lücke zwischen "Drachenviereck" und "Viereck" durch den "Schiefdrachen" schließen (vgl. etwa [18]).

### 1.1.4 Klasse 7

Aufgabe 12. Welche Möglichkeiten gibt es für die Lage zweier Kreise  $k_1$  und  $k_2$  einer Ebene? Man versuche, die Fälle mit Hilfe der Radien  $r_1$  und  $r_2$  ( $\geq r_1$ ) sowie des Abstandes  $a$  der Mittelpunkte zu beschreiben.

Die Lösung ist Abb. 11 zu entnehmen: a) Es gibt keine gemeinsamen Punkte. Dann gilt  $r_1 + r_2 < a$  oder  $a + r_1 < r_2$ , d.h.  $a < r_2 - r_1$ . (Abb. 11a, b).



Im Fall  $M_1 = M_2$  sind  $k_1$  und  $k_2$  speziell konzentrisch (Abb. 11e).

b) Für einen (Berührungs-) Punkt ist  $a = r_1 + r_2$  oder  $a = r_2 - r_1$  kennzeichnend (Abb. 11d, e).

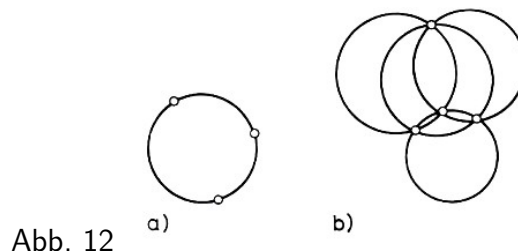
c) Liegen zwei Schnittpunkte vor, dann gilt  $r_2 - r_1 < a < r_1 + r_2$  (Abb. 11f).

Es gilt der für die Lösung von Konstruktionsaufgaben wichtige Sachverhalt:  $k_1$  und  $k_2$  schneiden sich genau dann, wenn  $a, r_1, r_2$  der Dreiecksungleichung genügen.

Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen genau einen Kreis. Sein Mittelpunkt ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Aufgabe 13. Gegeben seien drei, vier, fünf, ... Punkte, von denen keine drei in einer Geraden und keine vier in einer Kreislinie liegen. Wieviel Kreise gibt es, die durch drei der gegebenen Punkte gehen?

Lösung: Für drei bzw. vier Punkte ist die Lösung Abb. 12 zu entnehmen; es gibt einen Kreis bzw. vier Kreise. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus den gegebenen Punkten drei auszuwählen.



Bei  $n$  gegebenen Punkten kann das folgendermaßen geschehen:

Für den ersten Punkt gibt es  $n$  Möglichkeiten, für den zweiten nur noch  $n - 1$  und für den dritten nur noch  $n - 2$ , insgesamt also  $n(n - 1)(n - 2)$  Möglichkeiten. Dabei gibt es aber jeweils verschiedene Punkttupel, die ein und denselben Kreis bestimmen, beispielsweise  $PQR$ ,  $PRQ$ ,  $QPR$ ,  $QRP$ ,  $RPQ$ ,  $RQP$ . Somit lautet die Lösung  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ .

## 1.2 Anordnen von Quadraten, Drei- und Sechsecken sowie von Würfeln

Die folgenden Aufgaben zielen auf die Entwicklung von Fähigkeiten zum

- Anordnen und Verteilen mathematischer Objekte,
- Lösen von Anzahlproblemen.

Im Vordergrund steht auch hier die vollständige Fallunterscheidung. Da die meisten Aufgaben auf der Stufe manueller Handlungen ausgeführt werden können, ist ihre Lösung bereits mit Schülern von 4. und 5. Klassen möglich.

Dazu müssten Applikationen (Quadrate, regelmäßige Drei- bzw. Sechsecke, Würfel) vorhanden sein oder gebastelt werden, mit denen die Schüler Anordnungen experimentell gewinnen, die dann noch zu zeichnen sind. Inhaltlich wird bei Schülern in solchen Klassenstufen der Kongruenzbegriff vorbereitet (Propädeutik der Begriffe "deckungsgleich" und "deckungsverschieden"). Bei der Behandlung in höheren Klassenstufen wird dieser Begriff gefestigt, vertieft bzw. wiederholt. Für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens sind die Aufgaben mit den Würfeln besonders wertvoll.

Bei den Übungen kann und sollte der Schüler von manuellen zu geistigen Handlungen geführt werden. Bei den Musterlösungen werden diesbezügliche Vorschläge gemacht, die insbesondere zu einer systematischen und vollständigen Fallunterscheidung führen.

### 1.2.1 Anzahlaufgaben

Aufgabe 1. Es seien  $n$  Einheitsquadrate in Form von Plättchen gegeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sie derart an eine Wand zu schichten, dass sie jeweils durch eine gemeinsame Seite verbunden sind?

Lösung: Man beginne mit  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  und gehe dabei so vor, dass die erste Schicht ein, dann zwei usw. Plättchen enthält. Man ermittle jeweils alle Möglichkeiten, die sich aus einer Anordnung ergeben, wenn ein weiteres Plättchen hinzugenommen wird (Abb. 13).

$n$	Schichtung der Plättchen	Anzahl $A_n$
1		1
2		$2 = 2^1$
3		$4 = 2^2$
4		$8 = 2^3$
5		$16 = 2^4$
$n$		$A_n = 2^n$

Abb. 13

Welche Vermutung lässt sich hinsichtlich der Anzahl  $A_n$  auf Grund der Werte  $A_1, A_2, \dots, A_5$  aussprechen ?

Ebene Figuren, die durch Aufeinanderlegen zur Deckung gebracht werden können, heißen deckungsgleich. Ist das nicht möglich, so sind sie deckungsverschieden.

Aufgabe 2. Wie viele deckungsverschiedene Figuren gibt es, die aus  $n = 1, 2, \dots, 6$  längs Seiten

zusammenhängenden Einheitsquadraten bestehen ?

Lösung. Man versuche, für jedes  $n$  die Anzahl der deckungsverschiedenen Figuren herauszufinden, indem jeweils die Lage eines Quadrates verändert und geprüft wird, ob die erhaltene Figur zu einer bereits vorhandenen deckungsgleich ist. Um alle Fälle zu ermitteln, bilde man wieder Ausgangsschichten mit beispielsweise für  $n = 4$  vier, drei, zwei Einheitsquadraten (Abb. 14).

$n$	Deckungsverschiedene Figuren	Anzahl $A_n$
1,2,3		1,1,2
4		5
5		12
6		35

Abb. 14

Aufgabe 3. Wie viele deckungsverschiedene Figuren gibt es, die aus  $n = 1, 2, \dots, 7$  längs Seiten zusammenhängenden Einheitsdreiecken bestehen?

Die Lösung erfolgt analog der Lösung der vorigen Aufgabe (Abb. 15).

$n$	Deckungsverschiedene Figuren	Anzahl $A_n$
1		1
2		1
3		1
4		3
5		4
6		12
7		24

Abb. 15

Aufgabe 4. Wie viele deckungsverschiedene Figuren gibt es, die aus  $n = 1, 2, \dots, 5$  regelmäßigen, längs Seiten zusammenhängenden "Einheitssechsecken" bestehen?

Lösung. Man gehe so wie bei der Lösung von Aufgabe 2 und 3 vor (Abb. 16).



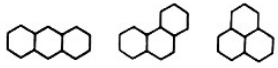

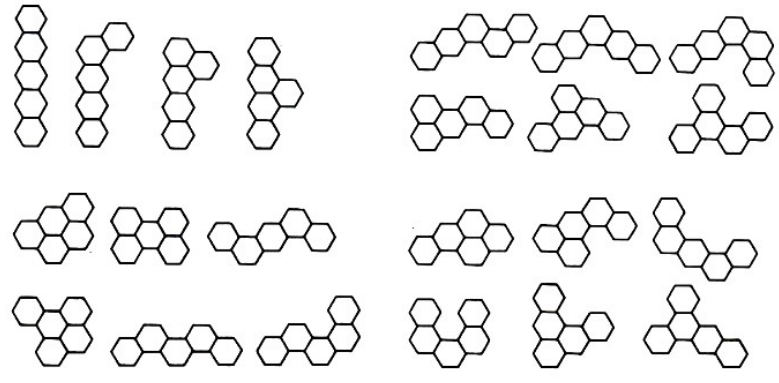
$n$	Deckungsverschiedene Figuren	Anzahl $A_n$
1		1
2		1
3		3
4		7
5		22

Abb. 16

Aufgabe 5. In Aufgabe 2 hängen die Einheitsquadrate in den Figuren an jeweils einer Seite zusammen. Welche Figuren kommen noch hinzu, wenn das Zusammenhängen an einem Eckpunkt zugelassen wird? Die Seiten sollen dabei stets senkrecht oder parallel zueinander sein.

Die Lösung für  $n = 2, 3, 4$  ist Abb. 17 zu entnehmen.


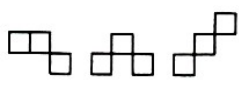
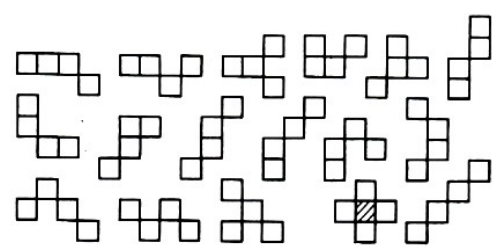
$n$	Figuren	Anzahl $A_n$
2		1
3		3
4		17

Abb. 17

Aufgabe 6. Wie viele aus Einheitsdreiecken bestehende Figuren kommen noch hinzu, wenn der Zusammenhang an einem Eckpunkt zugelassen wird? Man prüfe die Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  unter der Voraussetzung, dass je zwei Dreiecke parallele Seiten besitzen (Abb. 18).

Aufgabe 7. Es seien  $n = 1, 2, \dots, 5$  Einheitswürfel gegeben. Wie viele deckungsverschiedene Körper, die aus diesen Einheitswürfeln bestehen und in jeweils einer Würfel­fläche zusammenhängen, gibt es?

Kann durch eine Bewegung ein Körper in den anderen übergeführt werden, so sind diese als deckungsgleich anzusehen.

Lösung: Man erfasse alle Körper, indem die Lage eines Würfels verändert und dieser so erhaltene Körper mit den übrigen verglichen wird (Abb. 19).

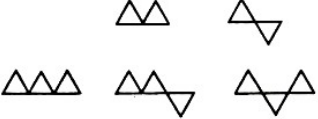

$n$	Figuren	Anzahl $A_n$
2		2
3		10

Abb. 18



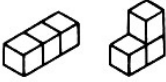
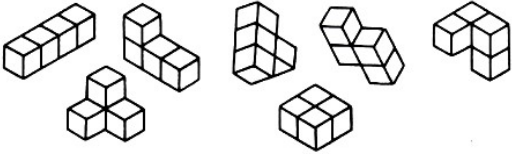

$n$	Figuren	Anzahl $A_n$
1		1
2		1
3		2
4		7
5		23

Abb. 19

Aufgabe 8. Wie viele aus Einheitswürfeln bestehende Körper kommen hinzu, wenn der Zusammenhang über eine Kante und über einen Eckpunkt zugelassen ist Man gebe alle Möglichkeiten für  $n = 2$  und  $n = 3$  unter der Voraussetzung an, dass die Würfelflächen senkrecht oder parallel zueinander sind (Abb. 20).

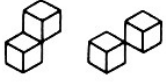
$n$	Figuren	Anzahl $A_n$
2		2

Abb. 20

### 1.2.2 Aufgaben zum Auslegen

In diesem Abschnitt werden wir hauptsächlich mit den Figuren, die bei der Lösung der Aufgabe 2 des vorigen Abschnittes ermittelt wurden (Abb. 14), andere Figuren auslegen. Deshalb ist es ratsam, dass sich die Schüler einen "Vorrat an Bausteinen" schaffen. Das macht wenig Mühe, wenn kariertes Papier verwendet wird. Um eine schnelle Verständigung zu ermöglichen,

werden wir je nach Anzahl der Teilquadrate von Einern, Zweiern (Domino), Dreiern, Vierern usw. sprechen.

Offenbar lässt sich jedes Schachbrett mit 64 Einheitsquadraten mit Einern bzw. Zweiern auslegen.

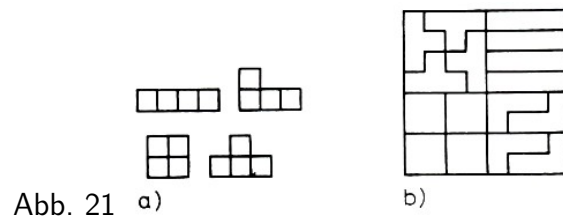
Aufgabe 9. Man prüfe, ob jedes Schachbrett mit Dreieren ausgelegt werden kann.

Lösung: Der Misserfolg beim Experiment führt zu der Vermutung, dass die Bedingung nicht erfüllt werden kann. Der Beweis ist indirekt möglich:

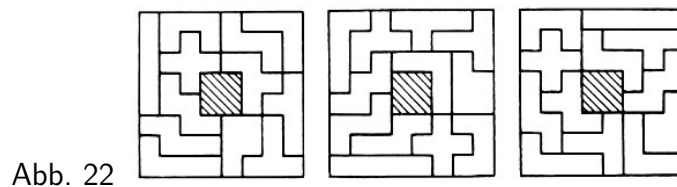
Jede mit Dreieren auslegbare Figur hat eine Anzahl von Einheitsquadraten, die durch 3 teilbar ist. Folglich kann das Schachbrett nicht mit Dreieren ausgelegt werden, weil 64 nicht durch 3 teilbar ist.

Bei den folgenden Aufgaben ist die Lösung den entsprechenden Abbildungen zu entnehmen.

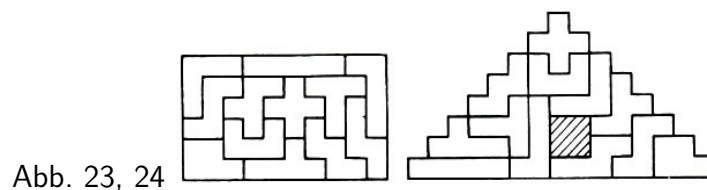
Aufgabe 10. Man prüfe, ob das Schachbrett mit Vierern der Abb. 21a auslegbar ist, wenn von jeder Sorte vier Bausteine verwendet werden dürfen (Abb. 21b).



Aufgabe 11. Man gebe verschiedene Möglichkeiten an, das Schachbrett so mit Fünfern auszuliegen, dass die vier Einheitsquadrate im Zentrum frei bleiben. Man versuche, alle Fünfer genau einmal zu benutzen (Abb. 22).

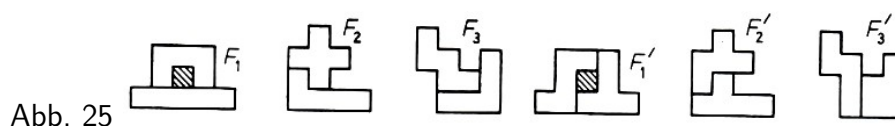


Aufgabe 11'. Man bilde mit den zwölf Fünfern ein 6 · 10-Rechteck (Abb. 23).

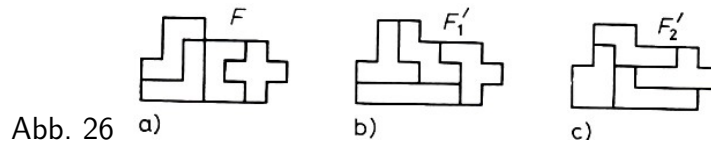


Aufgabe 11''. Man fülle mit den zwölf Fünfern das "Dreieck mit dem Loch" aus Abb. 24 so aus, dass das schraffierte Quadrat frei bleibt.

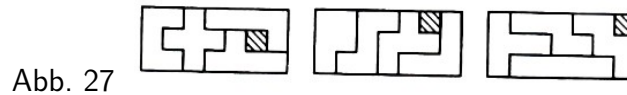
Aufgabe 12. Man wähle zwei Fünfer aus und setze sie zu einer Figur  $F$  zusammen. Man versuche dann, aus zwei weiteren Fünfern eine zu  $F$  deckungsgleiche Figur  $F'$  zu bilden. Man gebe mehrere Lösungen an (Abb. 25).



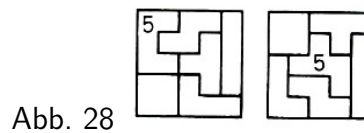
Aufgabe 13. Gegeben sei eine Figur  $F$ , die aus vier Fünfern besteht (Abb. 26a). Man bilde aus den übrigen acht Fünfern zwei solche Gruppen, dass aus jeder eine zu  $F$  deckungsgleiche Figur gebildet werden kann (Abb. 26b und c).



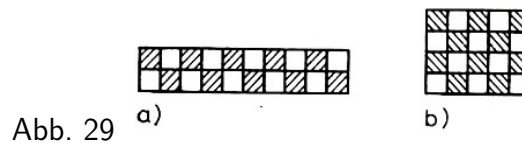
Aufgabe 14. Man ordne die zwölf Fünfer auf drei Rechtecken aus je 21 Einheitsquadraten so an, dass jeweils ein Einheitsquadrat frei bleibt (Abb. 27).



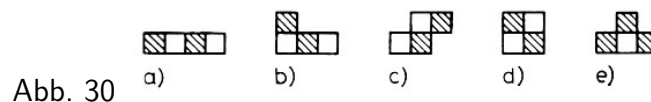
Aufgabe 15. Man fülle ein Quadrat aus 25 Einheitsquadraten mit Hilfe eines Fünfers und den fünf Vierern aus (Abb. 28).



Aufgabe 16. Man versuche, die Rechtecke aus Abb. 29 mit den fünf Vierern auszulegen.



Lösung: Nach Probieren vermuten wir, dass sich die fünf Vierer weder zu  $2 \cdot 10$ - noch zu  $4 \cdot 5$ -Rechtecken zusammensetzen lassen. Um zu einem Beweis der Vermutung zu gelangen, nehmen wir für die Vierer ebenfalls eine Schwarz-Weiß-Färbung vor (Abb. 30).



Die entscheidende Erkenntnis besteht in der Feststellung, dass die Figuren sowohl in Abb. 29 als auch in Abb. 30a bis d gleich viele schwarze und weiße Einheitsquadrate enthalten, während Abb. 30e einen Überschuss an schwarzen Einheitsquadraten besitzt, der bei Umfärbung in einen Überschuss von weißen Einheitsquadraten übergeht.

Gäbe es eine Auslegung von Abb. 29a bzw. Abb. 29b mit den fünf Vierern, dann könnten wir die Rechtecke in Vierer zerschneiden und erhielten einen Satz von fünf Vierern mit gleich vielen schwarzen und weißen Einheitsquadraten, aber das ist unmöglich. Folglich ist die Aufgabe nicht lösbar.

Aufgabe 17. Man lege die Tafel der Abb. 31 mit den 35 Sechsern so aus, dass das Kreuz frei bleibt. Dabei sind die Seiten des Kreuzes drei Einheiten lang; der Abstand des Kreuzes von Ober- und Unterkante beträgt je vier, der von den Seitenkanten je drei Einheiten.

Aufgabe 18. Welche Sechser sind Würfelnetze?

Lösung: Die in Abb. 31 mit einem Punkt gekennzeichneten Sechser sind Würfelnetze. Es gibt davon elf Stück.

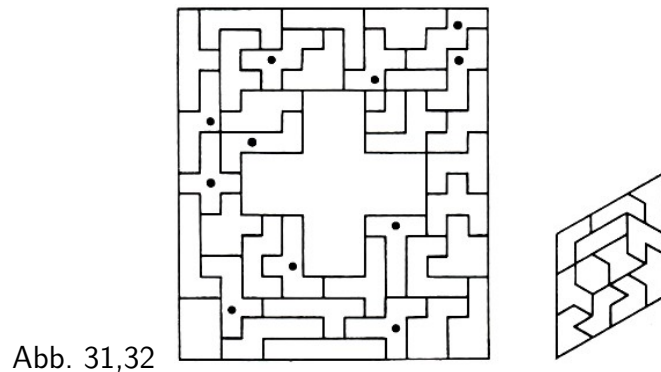


Abb. 31,32

Aufgabe 19. In Abb. 15 gibt es zwölf Figuren, die aus sechs Dreiecken bestehen. Man schneide sie aus und stelle damit einen Rhombus zusammen (Abb. 32).

### 1.2.3 Einige Aufgaben zum Somawürfel

In Aufgabe 7 (Abschnitt 1.2.1) wurden u.a. aus vier Einheitswürfeln Körper hergestellt (Abb. 19). Im folgenden dienen die Körper  $T_1, T_2, \dots, T_7$  (Abb. 33) als Bausteine; dabei besteht lediglich  $T_4$  aus drei Einheitswürfeln. Für die Lösung der Aufgaben ist außerdem bedeutsam, dass  $T_5$  aus  $T_3$  durch Spiegelung an einer Ebene gewonnen wurde.

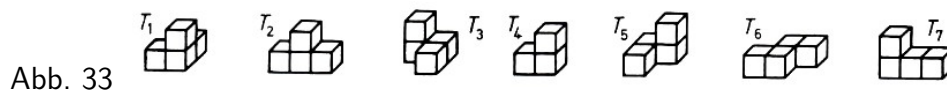


Abb. 33

Das eigentliche Ziel dieses Abschnittes ist die Lösung der Aufgabe 20. Man stelle aus den Körpern  $T_1$  bis  $T_7$  einen Würfel her. Um eine Lösung gut beschreiben zu können, werden zunächst einige Bezeichnungen festgelegt. Da  $T_1, \dots, T_7$  insgesamt  $6 \cdot 4 + 3 = 27$  Einheitswürfel enthalten, muss eine Lösung ein  $3 \cdot 3 \cdot 3$ -Würfel sein, dessen 27 Grundbausteine gemäß Abb. 34a nummeriert werden. Die drei Schichten werden mit I, II und III bezeichnet.

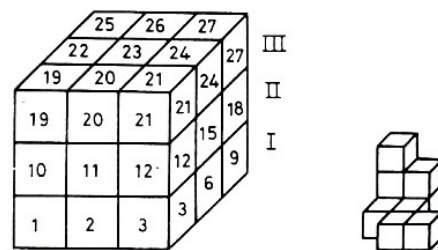
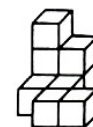


Abb. 34 a)



b)

Musterlösung der Aufgabe 20:

A) Wir belegen zunächst durch  $T_6$  die Plätze 2, 3, 4 und 5 (Abb. 34a, b) und stellen  $T_2$  gemäß Abb. 34b, d. h., dass die Plätze 7 in I, 16 und 17 in II sowie 25 in III besetzt sind. Das kann übersichtlich in einer Tabelle erfasst werden:

	I	II	III
2	.	2	2
6	6	.	.
.	6	6	.

Die Belegung der Schichten wird durch



2	22	2
66		
66		

noch kürzer festgehalten.

B) Wählen wir  $T_5$  um den Platz 1 zu belegen, dann werden in II zwangsläufig die Plätze 10, 13 und 14 besetzt:

2	22	2
66	55	
566	5	

C) Wir wollen den Platz 8 so belegen, dass die Lage des verwendeten Körpers dadurch bereits eindeutig bestimmt ist. Nach Probieren finden wir eine Realisierung mit Hilfe von  $T_1$ :

211	221	2
661	55	
566	5	

D) Nun soll die Lücke 15 mit  $T_3$  geschlossen werden. Es müssen verschiedene Möglichkeiten beachtet werden: Von  $T_3$  liegen

- drei Würfel in der Schicht III: Werden die Plätze 15, 24, 26, 27 oder 15, 20, 23, 24 belegt, so kann der Würfel mit den verbleibenden Körpern nicht ausgefüllt werden.
- zwei Würfel in der Schicht II:

211	221	2
661	553	
566	5 3	33

Dann kann aber der Platz 11 nicht mehr belegt werden.

- drei Würfel in der Schicht II:

211	221	2
661	553	3
566	533	

Damit können wir die Belegung fortsetzen.

E) Wir betrachten jetzt den Platz 21: Werden die Plätze 20, 21, 23, 26 mit  $T_7$  belegt, so kann Platz 27 nicht mehr ausgefüllt werden. Belegt  $T_7$  die Plätze 19, 20, 21, 22,

211	221	2
661	553	7 3
566	533	777

so können die verbliebenen Plätze mit  $T_4$  belegt werden:

211	221	244
661	553	743
566	533	777

Wir sind bei der Musterlösung stets so vorgegangen, dass beim Belegen eines Platzes ein passender Körper ausgewählt wurde. Tritt der Fall ein, dass sich ein Platz überhaupt nicht belegen lässt, so ist es notwendig, einen Schritt zurückzugehen und die vorherige Belegung abzuändern.

Das Problem der Angabe aller Lösungen wurde international bearbeitet. Hierzu vergleiche man [15] mit der Angabe von 240 nichtisomorphen Lösungen; unter Berücksichtigung von Drehungen und Spiegelungen gibt es insgesamt 11520 Lösungen, nämlich  $240 \cdot 48$  (vgl. die Lösung der Aufgabe 6).

Aufgabe 21. Welche Fälle können für die Einordnung des Körpers  $T_2$  unterschieden werden, wenn durch

	66	
	66	

die Lage von  $T_6$  festgelegt ist?

Lösung: Welche Fälle lassen sich zunächst unterscheiden? Der Körper  $T_2$  liegt in einer, in zwei oder in drei Schichten.

Fall 1:  $T_2$  liegt in der Schicht I oder III. Es gibt je acht Möglichkeiten:

222	2		2	2	2		2
2	22	2	22	222	22	222	22
	2	222	2		2	2	2

Fall 2:  $T_2$  liegt in zwei Schichten.

2			222	2				2
2	662			66			662	2
2	66			66			66	2
	2	222	2	222			222	2
	66			66			66	
	66			66			66	

Fall 3:  $T_2$  liegt in drei Schichten.

2	22	2	2	22	2	2	22	2
	66			66			662	2
	66			66			66	2
2	2	2	2	2	2		2	
	66			662		2	662	2
	66			66			66	

Als Vorübung zur Lösung der Aufgabe 20 lassen sich analog der Aufgabe 21 noch zahlreiche Aufgaben formulieren.

Aufgabe 22. Man setze aus den Körpern  $T_1$  bis  $T_7$ , die "Mauer", das "Schloss", das "Glashaus" und das "Bassin" (Abb. 35a, b, c bzw. d) zusammen.

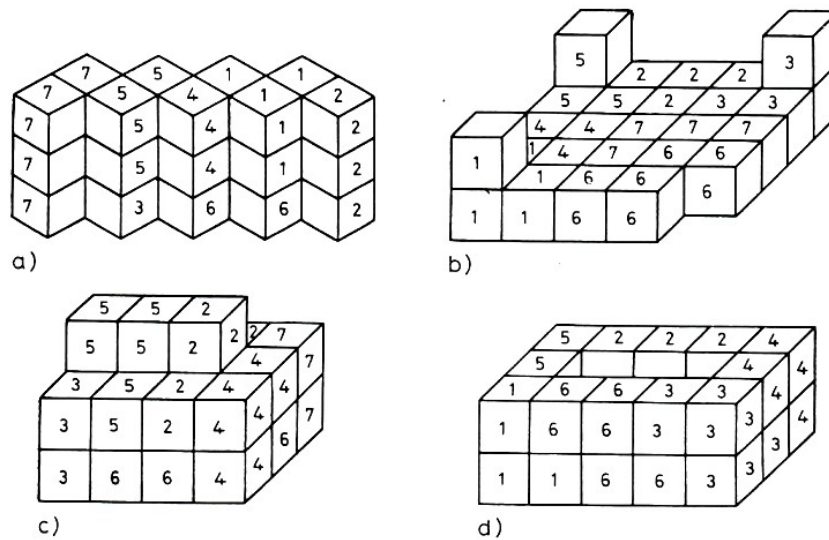


Abb. 35

### 1.3 Geometrie der „neun Nägel“

Es liege ein Brett vor, auf dem regelmäßig im Quadratraster  $3 \times 3$  Nägel eingeschlagen sind (Abb. 36). Wir veranschaulichen uns die neun Nägel durch neun Punkte auf kariertem Papier.

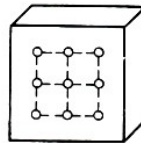
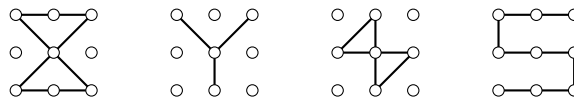


Abb. 36

Mit kleinen Gummiringen lassen sich auf diesem Brett vielfältige Figuren durch Umspannen der Nägel herstellen (Abb. 37).



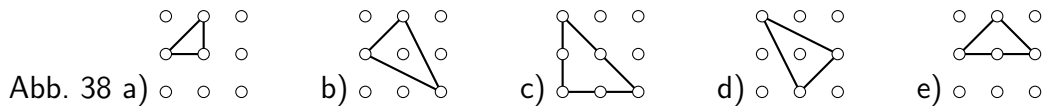
Da als Eckpunkte nur die neun "Nägel" in Frage kommen, ergeben sich interessante Anzahlaufgaben. Beispielsweise kann gefragt werden, wie viele deckungsverschiedene Vierecke existieren. Soll diese Aufgabe von Schülern der Unterstufe gelöst werden, so wird man auffordern, möglichst viele Vierecke zu finden. In höheren Klassenstufen kann natürlich durch "wieviel" nach der größten Anzahl gefragt werden.

Der Teilabschnitt zur Flächeninhaltsberechnung in der Geometrie der "neun Nägel" ist so aufgebaut, dass er auch vor der Behandlung der Inhaltslehre im Mathematikunterricht bearbeitet werden kann. Er setzt dann die Propädeutik zur Deckungsgleichheit des vorigen Abschnittes fort.

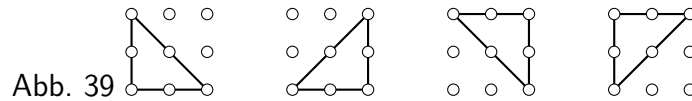
Die Geometrie der "neun Nägel" lässt vielfältige Verallgemeinerungen zu. Beispielsweise können "größere rechteckige Teilgitter" der Ebene zugrunde gelegt werden.

#### 1.3.1 Deckungsgleichheit und Bewegungen

Aufgabe 1. Man gebe mindestens fünf verschiedene Dreiecke durch Umspannen an. Beispiele: Abb. 38.



Aufgabe 2. Wie viele Dreiecke gibt es, die zu dem Dreieck aus Abb. 38c deckungsgleich sind ?



Lösung: Es gibt vier Dreiecke (Abb. 39).

Aufgabe 3. Wie viele Dreiecke lassen sich finden, die zu dem Dreieck aus Abb. 38a deckungsgleich sind? (Hinweis: Man wende auf das Dreieck Bewegungen an.)

Lösung: Im "linken oberen" Feld gibt es zum gegebenen Dreieck drei von ihm verschiedene deckungsgleiche Dreiecke. Auf jedes dieser Dreiecke lassen sich jeweils vier Verschiebungen anwenden (einschließlich der identischen Verschiebung). Also gibt es auf dem Brett  $4 \cdot 4 = 16$  verschiedene zum gegebenen Dreieck deckungsgleiche Dreiecke (Abb. 40).

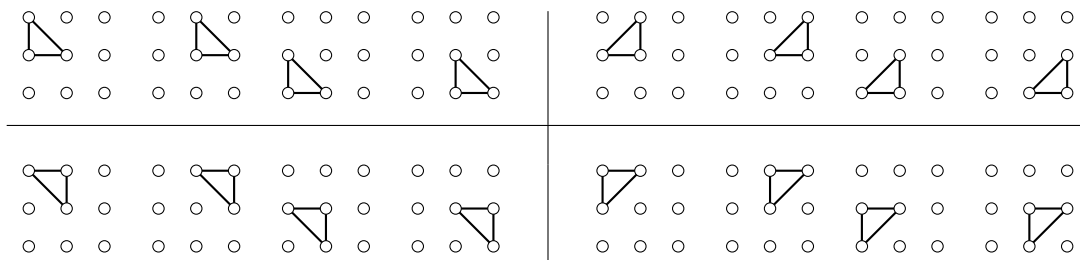


Abb. 40

Aufgabe 4. Man finde möglichst viele deckungsverschiedene Dreiecke. Lösung: Abb. 41.

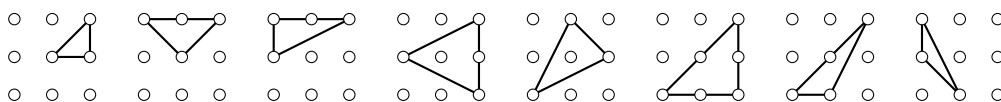


Abb. 41

Aufgabe 5. Man entscheide, ob die Figuren in Abb. 42 zueinander deckungsgleich sind.

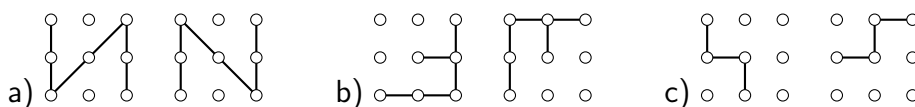


Abb. 42

Lösung: a) Die Figuren sind deckungsgleich, da sie durch Spiegelung auseinander hervorgehen.  
 b) Die Spiegelung an der Achse von "links unten nach rechts oben" bildet die Figuren aufeinander ab, sie sind daher deckungsgleich.  
 c) Auch in diesem Fall sind die Figuren deckungsgleich, da sie durch eine Drehung (um den mittleren Nagel) ineinander übergeführt werden können.

Aufgabe 6. Gegeben seien sechs Figuren  $F_1$  bis  $F_6$  (Abb. 43). Man untersuche, welche der Figuren nur durch Drehung und Verschiebung aufeinander abgebildet werden können.

Lösung: Beim systematischen Vergleich der Figuren erhalten wir letztlich die beiden Mengen  $\{F_1, F_2, F_3, F_5\}$  und  $\{F_4, F_6\}$  mit folgenden Eigenschaften: Sind  $F$  und  $F'$  aus einer Menge, dann können sie im Sinne

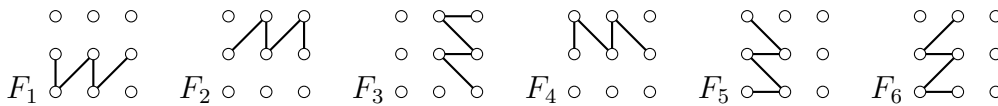
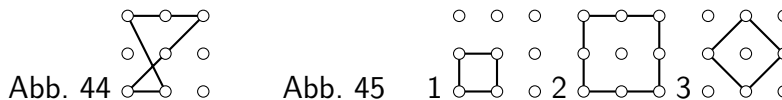


Abb. 43

der Aufgabenstellung aufeinander abgebildet werden; anderenfalls ist das nicht möglich.

### 1.3.2 Vierecke und Vielecke

Die im folgenden betrachteten Vierecke und Vielecke setzen wir als einfach voraus; solche Vielecke zerlegen die Ebene in zwei Teile: das Innere und das Äußere. Nicht einfach sind z. B. das Viereck in Abb. 44 und die Vielecke in Abb. 49.



Aufgabe 7. Wie viele deckungsverschiedene Quadrate gibt es? Lösung: Abb. 45.

Aufgabe 8. Man gebe möglichst viele deckungsverschiedene Vierecke an.

Lösung: In Abb.45 sind die Quadrate angegeben: alle weiteren Vierecke sind in Abb. 46 eingezeichnet.

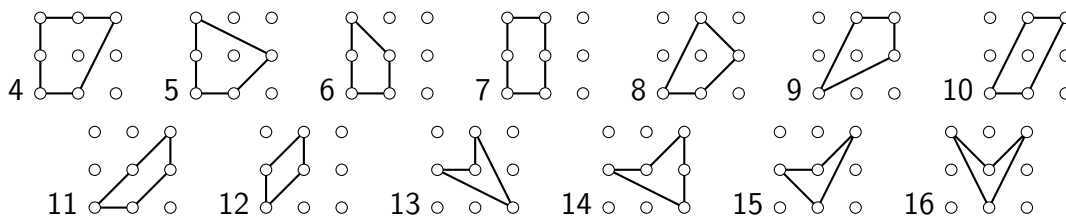


Abb. 46

Die ersten zwölf Vierecke sind konvex, die restlichen vier konkav. (Ein Viereck - allgemeiner Vieleck - heißt konkav, wenn es eine "ingesprungene" Ecke besitzt. Ist keine solche Ecke vorhanden, dann ist es konvex.)

Aufgabe 9 (vgl. Abb. 45 und 46).

- Wie viele Vierecke sind darunter, deren Seiten alle gleichlang sind?
- Wie viele Vierecke sind darunter, deren gegenüberliegende Seiten gleichlang, alle vier Seiten aber nicht gleichlang sind ?
- Wie viele Vierecke gibt es, bei denen genau zwei benachbarte Seiten gleichlang sind ?
- Wie viele Vierecke mit genau zwei Paaren gleichlanger benachbarter Seiten gibt es?
- Wie viele Vierecke lassen sich finden, bei denen genau zwei gegenüberliegende Seiten gleichlang sind ?
- Welche Vierecke haben sämtlich verschieden lange Seiten?

Die Lösung ergibt sich aus folgenden Angaben: a) 1, 2, 3; b) 7, 10, 12; c) 4, 6, 8; d) 9, 13, 16; e) 11, 15; f) 5, 14.

Aufgabe 10. Welche deckungsverschiedene konvexe Fünfecke und Sechsecke kann man bilden?

Lösung: Abb. 47.

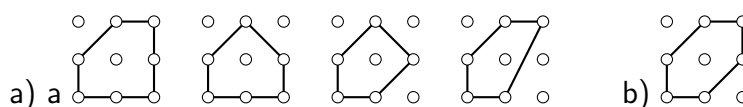


Abb. 47

Aufgabe 11. Man gebe sämtliche deckungsverschiedene konkave Fünf- bzw. Siebenecke an. (Hinweis: Man beginne mit der "eingesprungenen Ecke" und vervollständige zu einem Fünf- bzw. Siebeneck.)

Lösung: Abb. 48.

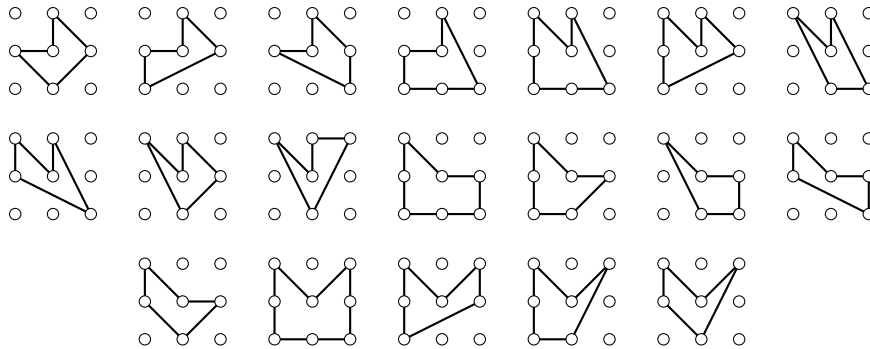


Abb. 48 a

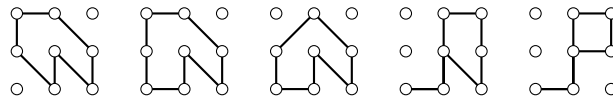


Abb. 48 b

Aufgabe 12. Ist es möglich, ein Achteck oder ein  $n$ -Eck mit mehr als acht Seiten zu bilden ?

Lösung: Da sich die Seiten der  $n$ -Ecke nicht überschlagen dürfen, ist es nicht möglich, ein  $n$ -Eck mit  $n \geq 8$  einzuzichnen. Beispielsweise sind die Vielecke in Abb. 49 keine  $n$ -Ecke.

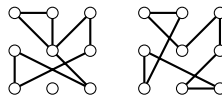


Abb. 49

### 1.3.3 Zur Flächeninhaltsberechnung

Im folgenden gehen wir von einem Zentimeterquadratraster, in den Abbildungen verkleinert dargestellt, aus.

In Abb. 50a ist ein "Einheitsquadrat" dargestellt. Sein Flächeninhalt beträgt  $1 \text{ cm}^2$ .

Der Flächeninhalt eines Dreiecks wie in Abb. 50b beträgt  $1/2 \text{ cm}^2$ , da zwei dieser Dreiecke zu einem Quadrat mit dem Flächeninhalt  $1 \text{ cm}^2$  zusammengesetzt werden können.

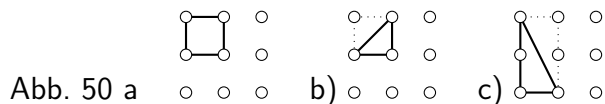
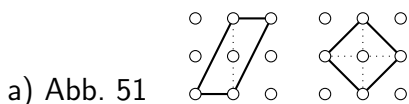


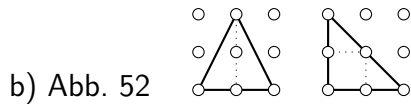
Abb. 50 c zeigt zwei Dreiecke, die zu einem Rechteck zusammengesetzt wurden. Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von  $2 \text{ cm}^2$ . Folglich hat ein Dreieck dieser Gestalt (wie das Quadrat in Abb. 50a) einen Flächeninhalt von  $1 \text{ cm}^2$ .

Aufgabe 13. Durch Zerlegen der in Abb. 51 bis 53 gegebenen Figuren in Dreiecke bzw. Quadrate ist ihr Flächeninhalt zu ermitteln:

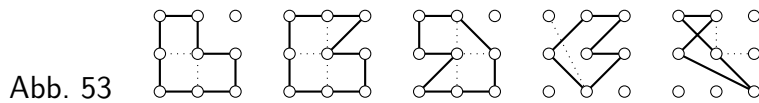


a) Abb. 51

$$A_1 = (1 + 1) \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2, A_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$



$$A_1 = (1 + 1) \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2; A_2 = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2$$

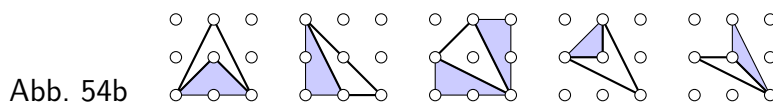
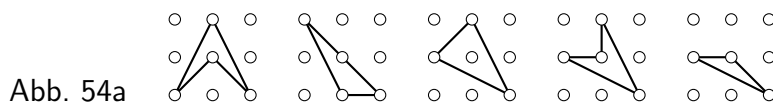


$$A_1 = 3 \text{ cm}^2; A_2 = 3\frac{1}{2} \text{ cm}^2; A_3 = 3 \text{ cm}^2; A_4 = 2 \text{ cm}^2; A_5 = 1\frac{1}{2} \text{ cm}^2$$

Aufgabe 14. Man bestimme den Flächeninhalt der Figuren aus Abb.54a, indem man durch Figuren bekannten Inhalts zu Figuren ergänzt, deren Inhalt leicht zu ermitteln ist.

Lösung: 1. Wir ergänzen das gegebene Viereck durch das schraffierte Dreieck zu einem Dreieck mit dem Flächeninhalt  $2 \text{ cm}^2$  (Abb. 54b). Das Viereck hat somit einen Flächeninhalt von  $A_1 = (2 - 1) \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$ .

Analog verfahren wir bei den Figuren 2 bis 5 (Abb. 54c bis f):



$$A_2 = (2 - 1) \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2; A_3 = (3\frac{1}{2} - 1 - 1) \text{ cm}^2 = 1\frac{1}{2} \text{ cm}^2; A_4 = (1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2; A_5 = 1 \text{ cm}^2 : 2 = \frac{1}{2} \text{ cm}^2;$$

Es gibt Vielecke auf unserem Nagelbrett mit einem "inneren" Punkt (Abb. 55), während andere Vielecke keinen solchen Punkt besitzen (Abb. 56). Offenbar kann nur der mittlere Nagel innerer Punkt eines Vielecks sein. Wir wollen im folgenden den Flächeninhalt von Vielecken mit innerem Punkt bzw. ohne inneren Punkt berechnen.

Mit  $n$  bezeichnen wir die Anzahl der Punkte (Nägel), die auf dem Rand des Vielecks liegen.



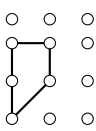



Figur (Abb. 55)  $n$  Flächeninhalt  $A$  in  $\text{cm}^2$

	3	$1\frac{1}{2}$
	4	2
	5	$2\frac{1}{2}$
	6	3
	8	4

Aufgabe 15. In Abhängigkeit von  $n$  ist der Flächeninhalt von Vielecken a) mit innerem Punkt, b) ohne inneren Punkt zu bestimmen.

Lösung: a) Wir betrachten zunächst Vielecke mit innerem Punkt und stellen obige Tabelle auf (die man leicht durch weitere Vielecke ergänzen kann); sie enthält Abb. 55a bis e.

Man vermutet anhand dieser Tabelle, dass der Flächeninhalt stets halb so groß ist wie die Anzahl der Punkte auf dem Rand der gewählten Figuren. Es gilt  $A = \frac{n}{2}$  weil eine Zerlegung in  $n$  Dreiecke mit dem inneren Punkt als gemeinsamer Ecke und dem Inhalt existiert.

Figur (Abb. 56)	$n$	Flächeninhalt $A$ in $\text{cm}^2$
	3	$\frac{1}{2}$
	4	1
	5	$1\frac{1}{2}$
	6	2
	7	$2\frac{1}{2}$
	8	3

b) Wir verfahren ebenso mit Vielecken ohne inneren Punkt (Abb. 56a bis f):

Der Zusammenhang zwischen  $n$  und  $A$  wird in diesem Fall durch die Formel  $A = \frac{n}{2} - 1$  beschrieben. Die Lösung der Aufgabe 15 kann zur Formel  $A = \frac{n}{2} + i - 1$ ,  $i$  Anzahl der inneren Gitterpunkte eines Gitterpolygons verallgemeinert werden (Satz von Pick).

## 1.4 Parkettierungen

Der folgende Aufgabenkomplex hat das Anordnen von Vielecken zu Parketten zum Inhalt. Dabei sollten Lehrer wie Schüler einen Satz von ausgeschnittenen Vielecken zur Verfügung haben, um mit ihnen auf dem Polylux bzw. auf dem eigenen Platz experimentieren zu können; sie können auch bei der Anfertigung von Skizzen helfen.

Insgesamt sollte das sinnvolle Probieren im Vordergrund stehen, wenn etwa die Aufgaben 1, 2 und 3 in der Unterstufe bearbeitet werden. In der Mittelstufe wird die zeichnerische Komponente ausgebaut, wobei mit der Forderung, sämtliche oder möglichst viele Parkette zu realisieren, die selbständige, schöpferische Arbeit eingeleitet werden sollte.

In Abhängigkeit von der zur Verfügung stehenden Zeit können mehr oder weniger Aufgaben vollständig gelöst werden. Auf jeden Fall sollte die Funktion der notwendigen Bedingung (\*) für die Realisierbarkeit archimedischer Parkette herausgestellt werden; in diesem Zusammenhang sind indirekte Beweise oft nicht zu umgehen.

Dagegen kann unter der Voraussetzung von (\*) ein entsprechendes Parkett meist experimentell gefunden werden; hier steht die vollständige Fallunterscheidung im Vordergrund.

Die Selbständigkeit kann durch die Bearbeitung analoger Aufgaben bzw. noch ausstehender Fälle als Hausaufgaben gefördert werden. Die abschließende Suche nach Parketten, die nicht



sämtliche Eigenschaften eines archimedischen Parketts besitzen, soll Phantasie und Schöpfer-  
tum wecken. Bei einer Behandlung der Parkette in der Oberstufe wird der Vollständigkeit einer  
Lösung besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

### 1.4.1 Allgemeine Parkette

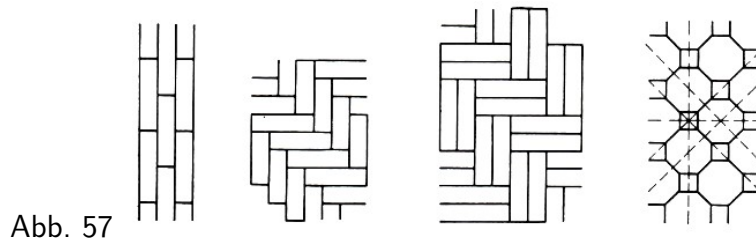
Ein Parkett ist eine vollständige, überlappungsfreie Überdeckung der Ebene durch Vielecke.  
Diese Definition soll anhand folgender Aufgabe erarbeitet werden.

Aufgabe 1. a) Man gebe Parkette an, die nur aus Rechtecken bestehen. (Man denke dabei an  
Säle, Treppenaufgänge, Wohnungen u. ä.)

b) Welche anderen Parkette gibt es, die aus verschiedenen Vielecken bestehen? Man gebe  
Beispiele dafür an.

c) Wie sind die Figuren in einem Parkett angeordnet ?

d) Aus welchen Sorten von Figuren bestehen die Parkette in Abb. 57, und wie viele Symme-  
trieachsen können in diesen Parketten angegeben werden ?

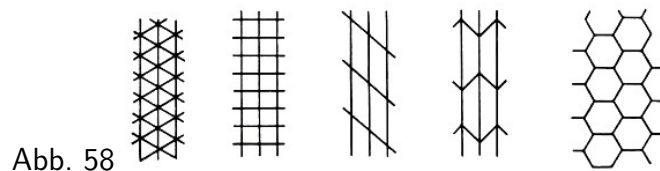


Einige Antworten zu a), b) und d) enthält Abb. 57. Bezüglich c) werden folgende Ergebnisse  
angestrebt:

- Die Figuren überdecken die gesamte Ebene.
- Es gibt keine Überlappungen von Figuren.
- Es gibt keine Lücken zwischen den Figuren.

Aufgabe 2. Man gebe ein Parkett an, das nur aus a) regelmäßigen Dreiecken, b) Quadraten, c)  
Parallelogrammen, d) Trapezen (symmetrischen), e) regelmäßigen Sechsecken besteht. Dabei  
sollen zwei Vielecke (im Gegensatz zu Abb. 57a, b, c) entweder genau eine Seite oder genau  
einen Eckpunkt oder keinen Punkt gemeinsam haben.

Mögliche Antworten enthält Abb. 58.



### 1.4.2 Archimedische Parkette

Aufgabe 3. Ein Fliesenleger soll eine Wand kacheln. Er hat aber nur dreieckige und quadra-  
tische Fliesen mit derselben Seitenlänge zur Verfügung. Welche Muster kann der Fliesenleger  
verwenden, wenn an jeder Ecke die gleiche positive Anzahl von Dreiecken und Quadraten zu-  
sammenstoßen soll und die Bedingungen aus Aufgabe 2 erfüllt werden ?

Lösung: Es werden folgende Teilaufgaben gelöst:

a) Welche Möglichkeiten gibt es, mit den Dreiecken und Quadraten einen Vollwinkel zu bilden? Die Anzahl  $p$  der Dreiecke kann weder 1 noch 2 sein, für drei Dreiecke und zwei Quadrate gibt es zwei Möglichkeiten (Abb. 59a), schließlich gilt  $p \neq 4, 5, 6$ .

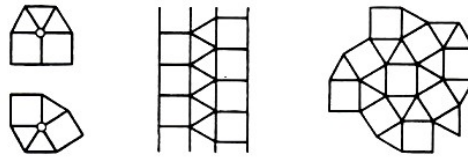


Abb. 59 a) b) c)

b) Man bilde Parkette. (Vgl. Abb. 59b, c.)

Aufgabe 4. Gibt es Drehungen, Verschiebungen oder Spiegelungen, die die Parkette in Abb. 57d bzw. Abb. 59b, c auf sich abbilden?

Ein Parkett heißt genau dann archimedisch, wenn es folgende Eigenschaften besitzt (Abb. 57d, 59b, c):

1. Es enthält zwei oder mehr Sorten regelmäßiger Vielecke.
2. An jeder Ecke gibt es von jeder Vieleckssorte die gleiche Anzahl.
3. Jede Seite eines Vielecks ist Seite eines weiteren Vielecks; insbesondere sind alle Seiten gleichlang.
4. Zu je zwei Ecken  $P$  und  $Q$  des Parketts gibt es Drehungen, Verschiebungen oder Spiegelungen, die  $P$  auf  $Q$  und das Parkett auf sich abbilden.

Aufgabe 5. Man suche ein archimedisches Parkett, das aus Dreiecken, Quadraten und Sechsecken besteht.

Lösung: a) Man bilde einen Vollwinkel mit regelmäßigen Vielecken der drei Sorten. Da jede Sorte vorkommen muss, verbleibt vom Vollwinkel  $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 90^\circ$ . Es gibt nur zwei Möglichkeiten (Abb. 60a, b).

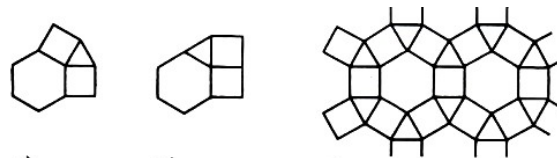


Abb. 60 a) b) c)

b) Man versuche, von Abb. 60a, b ausgehend, Parkette zu zeichnen. In Abb. 60c erscheint nur Abb. 60a; in Abb. 61 sind Abb. 60a und b zu finden. Man überprüfe speziell, ob für Abb. 60c und Abb. 61 alle Eigenschaften eines archimedischen Parkettes nachgewiesen werden können. Es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass es noch weitere archimedische Parkette gibt. Wir wollen uns im folgenden die Aufgabe stellen, alle archimedischen Parkette herauszufinden. Um dabei Vollständigkeit zu erreichen, werden wir uns noch weitere Kenntnisse verschaffen.

Aufgabe 6. Man gebe die Größe der Innenwinkel der regelmäßigen Vielecke an (vgl. Abb. 62).

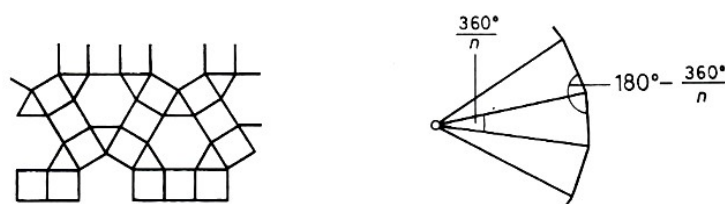


Abb. 61,62

Lösung:

Anzahl $n$ der Ecken	Größe der Innenwinkel $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$
3	$60^\circ$
4	$90^\circ$
5	$108^\circ$
6	$120^\circ$
7	$\approx 128,6^\circ$
8	$135^\circ$
9	$140^\circ$
10	$144^\circ$
11	$\approx 147,3^\circ$
12	$150^\circ$

Aufgabe 7. Man ersetze den Lösungsschritt a) beiden Aufgaben 3 und 5 durch eine Rechnung und verallgemeinere den Lösungsansatz.

Lösung: Zu Aufgabe 3:  $3 \cdot 60^\circ + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ ;

zu Aufgabe 5:  $1 \cdot 60^\circ + 2 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ .

Sind  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$  die Größen der Innenwinkel eines regelmäßigen Dreiecks, Vierecks usw. und  $n_3, n_4, \dots$  die Anzahlen der Vielecke der jeweiligen Sorte in einer Ecke, dann gilt

$$n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4 + n_5\alpha_5 + \dots = 360^\circ \quad (*)$$

als notwendige Bedingung für ein archimedisches Parkett.

Aufgabe 8. Ist es möglich, dass in einer Ecke eines archimedischen Parketts vier oder mehr Vieleckssorten vorhanden sind?

Lösung: Schon für  $n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 1$  gilt

$$1 \cdot 60^\circ + 1 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 108^\circ + 1 \cdot 120^\circ = 378^\circ$$

Diese Summe übertrifft bei Vergrößerung der Anzahl der Ecken der Vielecke erst recht  $360^\circ$ . Folglich gibt es nur archimedische Parkette mit zwei oder mit drei Vieleckssorten.

Zur Untersuchung der angegebenen notwendigen Bedingung hat sich die Bezeichnung (|) eingebürgert. Dabei werden in die erste Spalte die Eckenzahl  $k$  der vorkommenden Vielecke und rechts daneben  $n_k$  eingetragen.

Beispielsweise gehört  $\left( \begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{array} \right)$  zu Abb. 57d,  $\left( \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{array} \right)$  zu Abb. 59b,c und  $\left( \begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{array} \right)$  zu Abb.

60c. Nach Abb. 59b, c ist ein Parkett durch die Angabe von (|) noch nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 9. Wie viele Vielecke können in einer Ecke eines archimedischen Parkettes aufeinanderstoßen ?

Lösung: Diese Anzahl ergibt sich als Summe der rechten Spalte; die obigen Beispiele liefern  $1 + 2 = 3$ ,  $3 + 2 = 5$  und  $1 + 2 + 1 = 4$ . Sie ist mindestens 3 und höchstens 5, denn für  $n_3 = 5$  und  $n_4 = 1$  gilt schon  $5 \cdot 60^\circ + 1 \cdot 90^\circ = 390^\circ$ .

Aufgabe 10. Welche Möglichkeiten für (|) gibt es, wenn in jeder Ecke vier Vielecke aufeinanderstoßen; wann gehört dazu ein archimedisches Parkett ?

Lösung: Es kommt erst einmal darauf an, 4 in zwei oder drei Summanden zu zerlegen:  $4 = 1+3$ ;  $4 = 2 + 2$ ;  $4 = 1 + 1 + 2$ .

Das ergibt für  $2 < k < l < m$  die Fälle

$$1. \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad 4. \begin{pmatrix} k \\ l \\ l \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad 5. \begin{pmatrix} k \\ l \\ l \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad 6. \begin{pmatrix} k \\ l \\ l \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Es ist jetzt herauszufinden, zu welchem (I) ein archimedisches Parkett gehört.

Fall 1. Schon für  $k = 3, l = 4, m = 5$  gilt

$$1 \cdot 60^\circ + 1 \cdot 90^\circ + 2 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

In diesem Fall existiert kein archimedisches Parkett.

Fall 2. Dazu gehört die Lösung von Aufgabe 5.

Fall 3. a) Zu  $k = 3$  und  $l = 4$  kann wegen  $360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 1 \cdot 90^\circ = 150^\circ$  nach der Aufgabe 6 nur  $m = 12$  gehören.

Beim Versuch, von einem regelmäßigen Zwölfeck ausgehend, ein archimedisches Parkett aufzubauen, ergibt sich zwangsläufig ein "Kranz" von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten (Abb. 63); in den Punkten  $P$  und  $Q$  müssten sich regelmäßige Zwölfecke anschließen, wobei bei  $R$  ein Widerspruch entstände. Es existiert zu  $k = 3, l = 4$  und  $m = 12$  kein archimedisches Parkett.

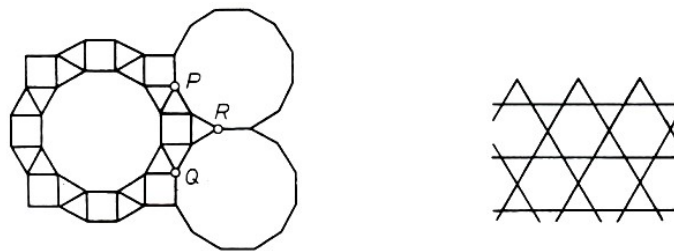


Abb. 63,64

b) Zu  $k = 3$  lassen sich keine  $l, m > 4$  so bestimmen, dass die notwendige Bedingung (\*) erfüllt ist. Wegen  $2 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 108^\circ + 1 \cdot 120^\circ = 408^\circ$  gilt (\*) für  $k > 3$  nicht.

Im Fall 3 existiert wie schon im Fall 1 kein archimedisches Parkett.

Fall 4. Aus  $360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ = 2 \cdot 120^\circ$  folgt  $k = 3$  und  $l = 6$ ; Abb. 64 zeigt ein zugehöriges Parkett. Dagegen lässt sich (\*) mit  $k, l > 3$  nicht erfüllen.

Fall 5. Weder zu  $k = 3$  noch zu  $k > 3$  gibt es ein  $l$  derart, dass (\*) erfüllt ist. Es kann somit kein archimedisches Parkett existieren.

Fall 6. Weder mit  $k = 3$  noch mit  $k > 3$  lässt sich die notwendige Bedingung für die Existenz eines archimedischen Parkettes erfüllen.

Aufgabe 11. Welche Möglichkeiten für (I) gibt es, wenn in jeder Ecke drei Vielecke aufeinandertreffen; wann existieren unter dieser Voraussetzung archimedische Parkette ?

Lösung: Wegen  $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2$  sind die Fälle

$$1. \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} k \\ l \\ l \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} k \\ l \\ l \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ möglich.}$$

Fall 1. Die Werte  $k = 4$ ,  $l = 6$  und  $m = 12$  erfüllen (\*) und gehören zu einem archimedischen Parkett (Abb. 65). Weitere Möglichkeiten werden in der folgenden Bemerkung diskutiert.

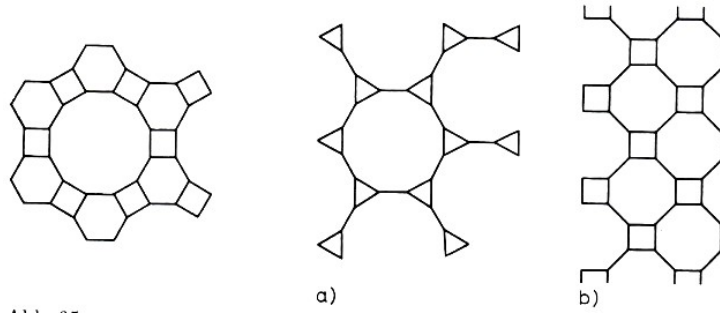


Abb. 65,66 ...

Fall 2. Sowohl  $k = 3$  und  $l = 12$  als auch  $k = 4$  und  $l = 8$  führen zu (\*). Dazu gibt es jeweils ein archimedisches Parkett (Abb. 66a, b). Zu keinem  $k > 4$  existiert ein (\*) erfüllendes  $l$ .

Fall 3. Wenn ein entsprechendes Parkett existierte, dann müssten um ein  $k$ -Eck abwechselnd  $k$ - und  $l$ -Ecke liegen, d. h., dass  $k$  gerade wäre.

a)  $k = 4$ . Wegen  $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$  kann dieser Fall nicht eintreten.

b)  $k = 6$ . Hier ergäbe  $360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$  den Widerspruch  $6 = k < l = 6$ .

Es gibt kein entsprechendes Parkett, weil  $k > 6$  erst recht unmöglich ist.

Bemerkung. Ergänzung der Lösung im Fall 1. Die notwendige Bedingung (\*) lautet

$$360^\circ = \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{k}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{l}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{m}\right)$$

woraus über

$$\frac{360^\circ}{k} + \frac{360^\circ}{l} + \frac{360^\circ}{m} = 180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

eine äquivalente Gleichung für Stammbrüche folgt:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \quad (**)$$

Wegen  $2 < k < l < m$  und  $\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{l}$  gibt es folgende Lösungen

Nr.	1	2	3	4	5	6
$k$	3	3	3	3	4	4
$l$	7	8	9	10	5	6
$m$	42	24	18	15	20	12

aber auch keine weiteren (warum?).

Schließlich kann festgestellt werden, dass lediglich die sechste Lösung zu einem archimedischen Parkett gehört (vgl. Abb. 65), denn um jedes Vieleck müssen sich die Vielecke der anderen Sorten abwechseln (vgl. Aufgabe 11, Fall 3), d. h.,  $k$ ,  $l$  und  $m$  müssen gerade sein.

Aufgabe 12. Man bestimme alle Möglichkeiten für (I), wenn in jeder Ecke fünf Vielecke aufeinandertreffen. Wann existieren unter dieser Voraussetzung archimedische Parkette?

Lösung: Von  $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$  ausgehend, ergeben sich die Fälle

$$1. \left( \begin{array}{c|c} k & 1 \\ \hline l & 4 \end{array} \right), 2. \left( \begin{array}{c|c} k & 2 \\ \hline l & 3 \end{array} \right), 3. \left( \begin{array}{c|c} k & 3 \\ \hline l & 2 \end{array} \right), 4. \left( \begin{array}{c|c} k & 4 \\ \hline l & 1 \end{array} \right), 5. \left( \begin{array}{c|c} k & 1 \\ \hline l & 1 \\ \hline m & 3 \end{array} \right), 6. \left( \begin{array}{c|c} k & 1 \\ \hline l & 3 \\ \hline m & 1 \end{array} \right),$$

7.  $\left( \begin{array}{c|c} k & 3 \\ l & 1 \\ m & 1 \end{array} \right)$ , 8.  $\left( \begin{array}{c|c} k & 1 \\ l & 2 \\ m & 2 \end{array} \right)$ , 9.  $\left( \begin{array}{c|c} k & 2 \\ l & 1 \\ m & 2 \end{array} \right)$ , 10.  $\left( \begin{array}{c|c} k & 2 \\ l & 2 \\ m & 1 \end{array} \right)$ . Fall 1. Wegen  $1 \cdot 60^\circ + 4 \cdot 90^\circ = 420^\circ$  lässt sich (\*) nicht erfüllen.

Fall 2. Wegen  $2 \cdot 60^\circ + 3 \cdot 90^\circ = 390^\circ$  kann in diesem Fall kein archimedisches Parkett existieren.

Fall 3. Zunächst gilt  $3 \cdot 60^\circ + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ , und entsprechende Parkette enthält Abb. 59b, c.

Fall 4. Mit  $k = 3$  ist wegen  $360^\circ - 4 \cdot 60^\circ = 120^\circ$  nur  $l = 6$  verträglich; dazu existiert ein archimedisches Parkett (Abb. 67).

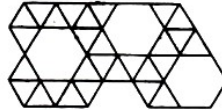


Abb. 67

In den Fällen 5 bis 10 kann (\*) nicht gelten, denn es ist bereits

$$1 \cdot 60^\circ + 1 \cdot 90^\circ + 3 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

$$1 \cdot 60^\circ + 3 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

$$3 \cdot 60^\circ + 1 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

$$1 \cdot 60^\circ + 2 \cdot 90^\circ + 2 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

$$2 \cdot 60^\circ + 1 \cdot 90^\circ + 2 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

$$2 \cdot 60^\circ + 2 \cdot 90^\circ + 1 \cdot 108^\circ > 360^\circ$$

Aufgabe 13. Man versuche, Parkette zu finden, die von den Forderungen an archimedische Parkette lediglich die zweite nicht erfüllen. Lösungsbeispiele enthält Abb. 68.

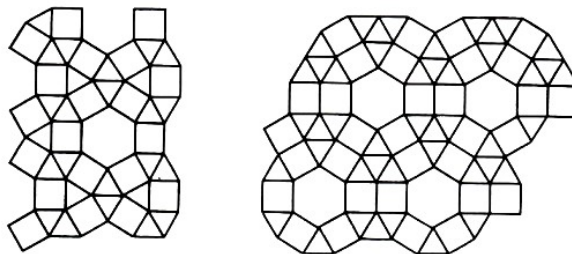


Abb. 68 a)

b)

Abschließend kann festgestellt werden, dass unter Berücksichtigung der drei Fälle für eine Sorte (Abb. 58) die Bedingung (\*) in 17 Fällen erfüllt ist, dass drei (reguläre) Parkette mit einer Sorte, sechs mit zwei und zwei mit drei Sorten regulärer  $n$ -Ecke existieren; in ihnen sind alle Eckenkonfigurationen deckungsgleich (vgl. [4]).

Auch sei bemerkt, dass Parkette einer Sorte regulärer  $n$ -Ecke selbst regulär genannt werden.

## 1.5 Einige Aufgaben aus der kombinatorischen Geometrie

Der abschließende Aufgabenkomplex zur propädeutischen Kombinatorik umfasst Anzahlaufgaben im Zusammenhang mit Nachbarn, mit der Beleuchtung konvexer Figuren und ihrer Überdeckung mit gestauchten Bildern sowie das berühmte Problem der Zerlegung von Figuren in Teile kleineren Durchmessers.

Angestrebt wird eine erste Bekanntschaft mit Problemen, deren allgemeine Lösung nicht bekannt ist, die zu den ungelösten Problemen der kombinatorischen Geometrie gehören. Vorliegende Lösungen für die ebene Geometrie sind in der angegebenen Literatur enthalten, werden aber hier nicht dargestellt.

Wir begnügen uns mit der Formulierung von einigen Aufgaben bezüglich bekannter Figurenklassen, bezüglich der Vielecke und Kreise bzw. Polyeder, Kegel, Zylinder und Kugeln. Bei der Lösung der Aufgaben sollten die Schüler anfangs ermuntert werden, mit ausgeschnittenen Figuren zu experimentieren. Die Lösung wird stets Zeichnungen umfassen. Die logische Absicherung kann oft nach gewissen Mustern erfolgen.

Der erste Teilabschnitt setzt im wesentlichen den Verschiebungsbegriff voraus und kann zu dessen Vertiefung bzw. Wiederholung genutzt werden. Die Beleuchtungsaufgaben gehören zur Anordnungslehre, und der Durchmesser einer beliebigen Figur verallgemeinert den Begriff des Kreisdurchmessers.

Die Lösung der Aufgaben zur Überdeckung einer Figur mit gestauchten Bildern setzt die Ähnlichkeitslehre voraus. Sämtliche Aufgaben wurden im Kreisklub Junger Mathematiker mit Schülern der 4. bis 8. Klasse gelöst.

Stillschweigende Voraussetzung bei der Betrachtung "beliebiger Figuren" ist deren Abgeschlossenheit und Beschränktheit: Eine abgeschlossene Figur enthält alle Begrenzungspunkte; sie bilden deren Rand. (Nicht abgeschlossen ist z. B. das Innere eines Kreises, weil die begrenzende Kreislinie nicht zum Inneren gehört.)

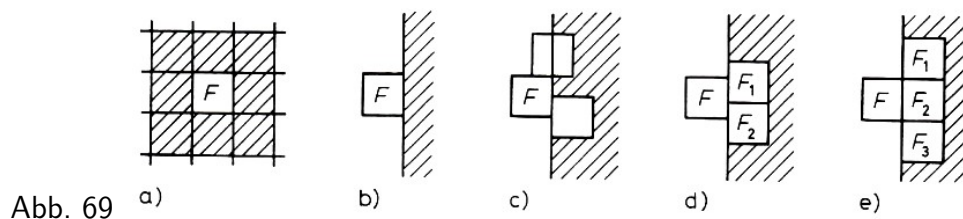
Eine Figur der Ebene oder des Raumes ist beschränkt, wenn sie im Inneren eines Kreises bzw. einer Kugel enthalten ist.

### 1.5.1 Nachbarn einer Figur

Bei einem karierten Blatt gehen die Karos auseinander durch Verschiebung hervor; weiterhin besitzt jedes Karo acht Nachbarn (Abb. 69a).

In diesem Abschnitt nennen wir eine Figur  $F'$  genau dann einen Nachbar der Figur  $F$ , wenn

1.  $F'$  Bild von  $F$  bei einer Verschiebung ist,
2.  $F'$  und  $F$  gemeinsame Punkte, aber nur gemeinsame Randpunkte besitzen.



Die Anzahl von Nachbarn eines Quadrates, die untereinander höchstens Randpunkte gemeinsam haben, lässt sich nicht vergrößern: Dazu wird durch eine Seite von  $F$  eine Gerade gelegt und diejenige (randlose) Halbebene betrachtet, die keinen Punkt von  $F$  enthält (in Abb. 69b schraffiert). Sie wird höchstens drei Nachbarn der geforderten Art treffen (Abb. 69c, d, e).

Da in Abb. 69a für jede Seite genau drei Nachbarn existieren, kann insgesamt die Anzahl 8 nicht übertroffen werden.

Aufgabe 1. Man zeichne als Figur  $F$  a) ein Rechteck, b) ein gleichseitiges Dreieck, c) ein rechtwinkliges Dreieck, d) ein Parallelogramm, e) ein konvexes Fünfeck, f) ein regelmäßiges Sechseck, g) einen Kreis und ermittle möglichst viele Nachbarn, die untereinander höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

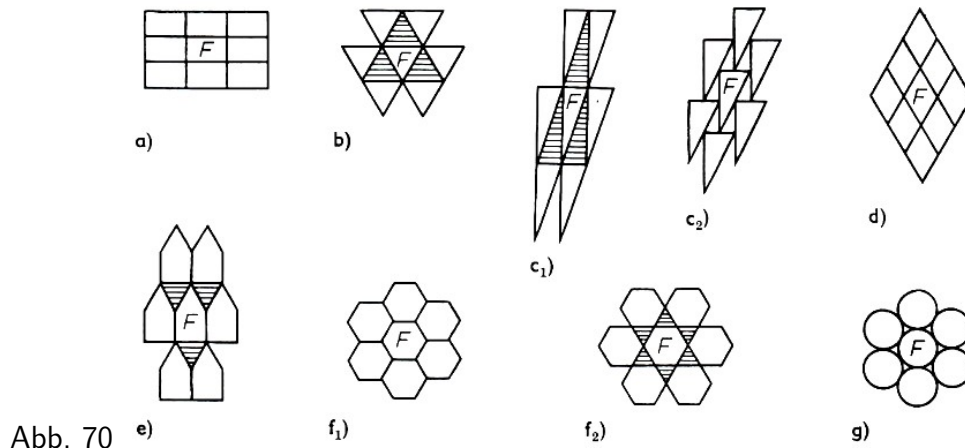


Abb. 70 enthält Lösungsbeispiele.

Aufgabe 2. a) Man fasse die Ergebnisse der Aufgabe 1 in einer Tabelle zusammen und stelle eine Vermutung für die jeweils größte Anzahl auf.

b) Man beweise die Vermutung für Parallelogramme, wozu insbesondere die Rechtecke (und Quadrate) gehören.

c) Wie lässt sich die Vermutung für Kreise begründen ?

Lösung: a) Für Parallelogramme vermuten wir 8 als größtmögliche Anzahl, sonst 6.

b) Die eingangs für Quadrate ausgeführte Überlegung lässt sich auf beliebige Parallelogramme übertragen.

c) Ist  $M$  der Mittelpunkt des Kreises  $F$  und sind  $M_1, M_2$  die Mittelpunkte zweier Nachbarn, dann hat der Winkel  $\angle M_1 M M_2$  eine Größe von mindestens  $60^\circ$ . Somit kann es wegen  $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$  höchstens sechs Nachbarn geben. Diese Anzahl wird erreicht (Abb. 70g).

Aufgabe 3. Wie viele Nachbarn, die untereinander höchstens Randpunkte gemeinsam haben, lassen sich für a) einen Würfel, b) einen Quader finden ? c) Man gruppiere möglichst viele Nachbarn um eine Kugel.

Lösung: a) Es lassen sich 26 Nachbarn der geforderten Eigenschaft angeben (vgl. die Abbildungen zum Somawürfel). Zur Begründung können in Verallgemeinerung der Überlegungen für Quadrate oder gar Parallelogramme hier Halbräume bezüglich einer Seitenfläche betrachtet werden.

b) Vgl.a).

c) Auf einem Tisch können um eine Kugel sechs Nachbarn gelegt werden (Abb. 70g). Dann lassen sich noch drei obere und drei untere Nachbarn hinzufügen. Diese Lösung ist Teil der bekannten dichtesten "ebenen" Lagerung. Geht man jedoch von keiner Ebene aus, dann lässt sich mit einigem Aufwand zeigen, dass man um eine Kugel keine 14 Nachbarn legen kann.

Uns ist nicht bekannt, ob ein befriedigender Beweis für die Vermutung existiert, dass sich um eine Kugel keine 13 Nachbarn lagern lassen (vgl. jedoch [8], S. 177ff.).

Bemerkung. Für räumliche Figuren gibt es kaum gesicherte Ergebnisse.

### 1.5.2 Beleuchtung konvexer Figuren

Die zweckmäßige Beleuchtung ist ein im Alltag oft zu lösendes Problem. Bei festlichen Anlässen werden abends die Fassaden bedeutender Gebäude einer Stadt mit mehreren Scheinwerfern ausgeleuchtet, um den optischen Eindruck durch unerwünschte Schatten nicht zu verfälschen.



Bei der folgenden Behandlung des Problems wird stets vorausgesetzt, dass die Figuren konvex sind und dass der gesamte Rand aus möglichst wenigen Richtungen beleuchtet werden soll.

Doch wann heißt ein Randpunkt  $P$  einer Figur  $F$  bezüglich einer Geraden  $l$  (mit einem ausgezeichneten Durchlaufsinn - beachte die Pfeilspitze in Abb. 71) beleuchtet? Das sei hier genau dann der Fall, wenn

1. die zu  $l$  parallele Gerade  $g$  durch  $P$  noch einen inneren Punkt  $Q$  von  $F$  enthält und
2.  $P$  (bezüglich des zum Durchlaufsinne von  $l$  äquivalenten Durchlaufsinnes von  $g$ ) der erste Punkt von  $F$  innerhalb von  $g$  ist.

Folglich gelten in Abb. 71 die Punkte  $B$  und  $P$  und alle inneren Punkte der Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  als beleuchtet, aber weder  $A$  noch  $C$ , geschweige denn die "im Schatten" liegenden Punkte  $D$  und  $E$  bzw.  $X$  und  $Y$ .

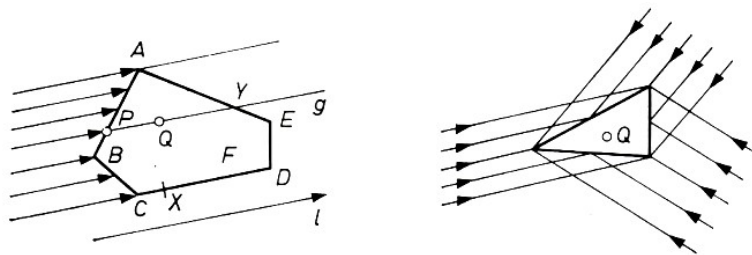


Abb. 71,72

Die obige Definition lässt sich auch auf räumliche Figuren anwenden, jedoch ist zu beachten, dass dann ein innerer Punkt einer Figur  $F$  Mittelpunkt einer ganz in  $F$  liegenden Kugel ist. Die folgenden Aufgaben beziehen sich mit Ausnahme der letzten auf die ebene Geometrie.

Aufgabe 4. Wie viele Richtungen reichen zur Beleuchtung eines Dreiecks aus? Welches ist die kleinste derartige Anzahl?

Lösung: Ist  $Q$  ein Punkt im Inneren des Dreiecks  $ABC$ , dann kann  $ABC$  mit Hilfe der Geraden  $g_{AQ}$ ,  $g_{BQ}$  und  $g_{CQ}$  beleuchtet werden (Abb. 72). Dagegen können zwei Richtungen nicht ausreichen, da von keiner Richtung zwei Ecken beleuchtet werden. Die gesuchte kleinste Anzahl beträgt folglich 3.

Aufgabe 5. Man versuche, eine möglichst kleine Anzahl von Richtungen zur vollständigen Beleuchtung a) eines Quadrats, b) eines Rechtecks, c) eines Parallelogrammes, d) eines Trapezes mit einem Paar nichtparalleler Seiten, e) eines Sechsecks, f) eines Achtecks, g) eines Kreises zu finden. Man gebe die Lösung in einer Zeichnung an und begründe, weshalb eine geringere Anzahl von Beleuchtungsrichtungen nicht ausreicht.

Lösung: Weder beim Quadrat noch beim Rechteck noch beim Parallelogramm können aus einer Richtung zwei Ecken beleuchtet werden, so dass die gesuchte kleinste Anzahl größer als 3 sein muss; andererseits lässt sich die Beleuchtung aus vier Richtungen vornehmen, etwa in Richtung der Geraden  $g_{AM}$ ,  $g_{BM}$ ,  $g_{CM}$  und  $g_{DM}$ , wobei  $M$  Mittelpunkt ist (Abb. 73a, b, c).

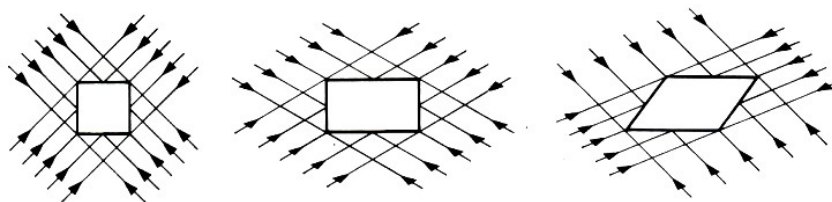
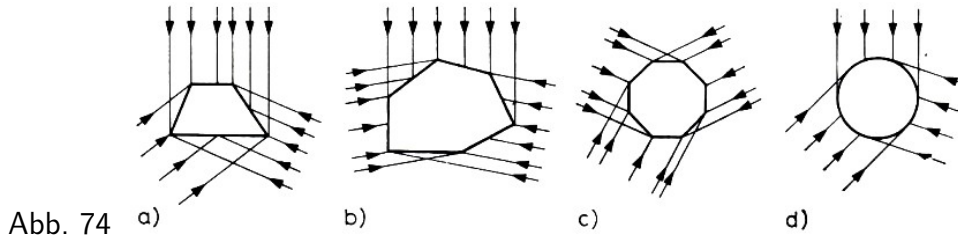


Abb. 73 a)

b)

c)

Bei den Teilaufgaben d) bis f) gelingt es, wenigstens zwei Ecken aus einer Richtung zu beleuchten (Abb. 74a, b, c), ja es reichen sogar nur drei Richtungen zur Beleuchtung aus; hier ist 3 die gesuchte kleinste Anzahl. Auch im Fall des Kreises sind drei Richtungen ausreichend (Abb. 74d).



Aufgabe 6. Man stelle die Ergebnisse der Aufgabe 5 in einer Tabelle zusammen und stelle eine Vermutung für die kleinste, zur Beleuchtung einer konvexen Figur  $F$  der Ebene ausreichende Anzahl von Richtungen auf.

Lösung:

Figur $F$	Anzahl der Beleuchtungsrichtungen
Dreieck	3
Quadrat	4
Rechteck	4
Parallelogramm	4
Trapez, kein Parallelogramm	3
Sechseck	3
Achteck	3
Kreis	3

Die Vermutung lautet: Die kleinste zur Beleuchtung einer konvexen Figur ausreichende Anzahl von Richtungen ist für Parallelogramme 4, sonst stets 3. (Bezüglich eines Beweises vgl. [1].)

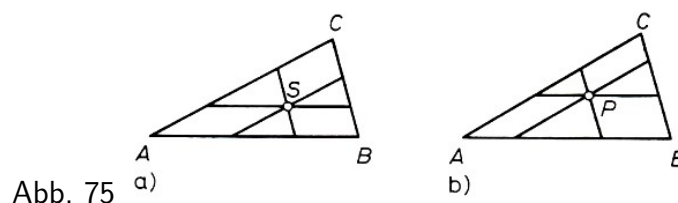
Aufgabe 7. Man ermittle die kleinste zur Beleuchtung a) einer Kugel, b) eines Kegels, c) eines Zylinders, d) eines Würfels ausreichende Anzahl von Richtungen.

Lösung: Die gesuchten Anzahlen sind 4, 4, 6 bzw. 8.

### 1.5.3 Überdeckung mit gestauchten Bildern

Eine zentrische Streckung  $(P, k)$  mit einem positiven Streckungsfaktor  $k < 1$  heißt Stauchung. Dabei erhält jede Figur  $F$  ein gestauchtes Bild  $F'$ .

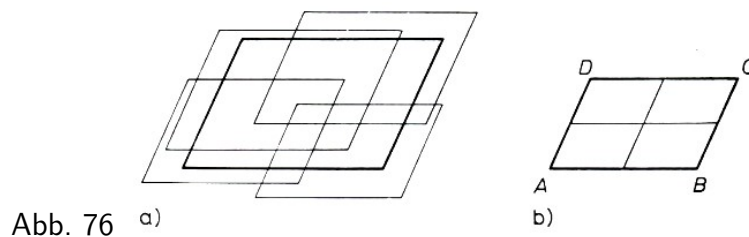
Um eine Dreiecksfläche mit gestauchten Bildern zu überdecken, können deren Ecken als Stauchungszentren und  $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{2}{3}$  gewählt werden, denn die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt  $S$ , der sie innen im Verhältnis 2 : 1 teilt (Abb. 75a). Andererseits kann eine Dreiecksfläche von zwei gestauchten Bildern noch nicht überdeckt werden, da kein gestauchtes Bild zwei Ecken enthalten kann.



Es können auch ein beliebiger Punkt  $P$  im Inneren von  $ABC$  gewählt und dann  $k_A, k_B, k_C$  so bestimmt werden, dass das Bild von  $ABC$  bei den Stauchungen  $(A, k_A), (B, k_B)$  bzw.  $(C, k_C)$  noch den Punkt  $P$  enthält (Abb. 75b).

Aufgabe 8. Wie viele gestauchte Bilder werden zur Überdeckung einer Parallelogrammfläche benötigt?

Die Lösung kann analog den obigen Ausführungen für Dreiecke erfolgen: Kein gestauchtes Bild überdeckt zwei Ecken, so dass wenigstens vier gestauchte Bilder notwendig sind; vier gestauchte Bilder können je eine Ecke und einen Punkt  $P$  im Inneren enthalten und damit die Parallelogrammfläche überdecken (Abb. 76a). Die Überdeckung gemäß Abb. 76b ergibt sich bei den Stauchungen  $(A, \frac{1}{2}), (B, \frac{1}{2}), (C, \frac{1}{2})$  und  $(D, \frac{1}{2})$ .



Aufgabe 9. Man überdecke eine Kreisfläche  $F$  mit gestauchten Bildern.

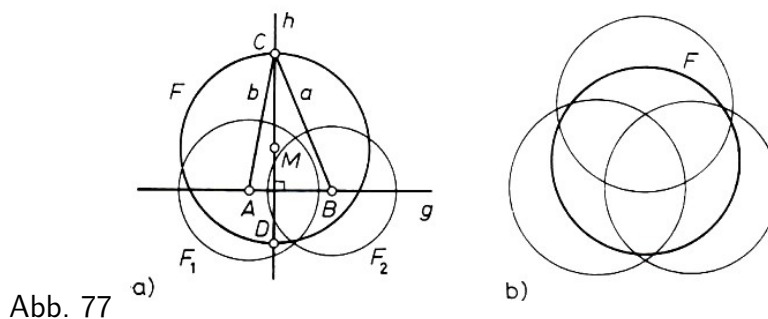
Lösung: Der Misserfolg,  $F$  mit zwei gestauchten Bildern zu überdecken, kann als unausweichlich erkannt werden: Es sei  $M$  der Mittelpunkt und  $r$  der Radius von  $F$ . Für die Radien  $r_1$  und  $r_2$  zweier gestauchter Bilder  $F_1$  bzw.  $F_2$  von  $F$  gilt

$$r_1 < r \quad r_2 < r$$

Wir legen eine Gerade  $g$  durch die Mittelpunkte  $A$  und  $B$  von  $F_1$  bzw.  $F_2$  und fällen von  $M$  das Lot  $h$  auf  $g$ . Es seien  $C$  und  $D$  die Schnittpunkte von  $h$  mit dem Rand von  $F$ , wobei etwa  $C$  von  $g$  einen Abstand  $l \geq r$  habe (Abb. 77a). Da die Hypotenuse stets die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist, gilt

$$a \geq l \geq r > r_2 \quad , \quad b \geq l \geq r > r_1$$

d. h., dass  $C$  weder zu  $F_1$  noch zu  $F_2$  gehört.



Dagegen gelingt eine Überdeckung von  $F$  mit drei gestauchten Bildern (etwa mit  $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ ), vgl. Abb. 77b.

Aufgabe 10. Wie viele gestauchte Bilder sind nötig, um jeden Punkt a) eines Tetraeders, b) eines Würfels,; c) eines Zylinders, d) einer Kugel zu erfassen? Man nutze bei der Lösung dieser Aufgabe Ergebnisse und Erfahrungen bei der Überdeckung ebener Figuren mit gestauchten

Bildern aus.

Lösung: Die gesuchten Anzahlen sind 4, 8, 6 bzw. 4.

Bemerkung. Die gesuchte Anzahl beträgt für jedes Parallelepiped 8, während sie nach einer Vermutung von Hadwiger für alle anderen konvexen Körper kleiner als  $8 = 2^3$  sein soll. Das Überdeckungsproblem ist in einem gewissen Sinne äquivalent zum Beleuchtungsproblem von Boltjanski (vgl. [1]), so dass die Übereinstimmung der in Aufgabe 7 und 10 ermittelten Anzahlen sich aus dem allgemeinen Zusammenhang ergibt und ein Beweis der Hadwigerschen Vermutung über die Lösung des Beleuchtungsproblems gewonnen werden könnte.

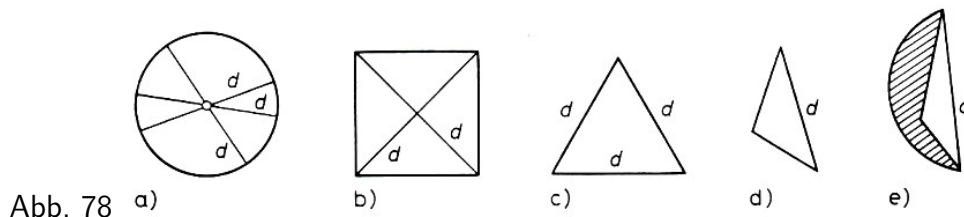
### 1.5.4 Zerlegung von Figuren in Teile kleineren Durchmessers

Für eine beliebige Figur  $F$  ist  $d$  deren Durchmesser genau dann, wenn

1.  $F$  zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit dem Abstand  $d$  besitzt und
2. der Abstand für zwei beliebige Punkte  $X$  und  $Y$  der Figur  $F$  kleiner oder gleich  $d$  ist.

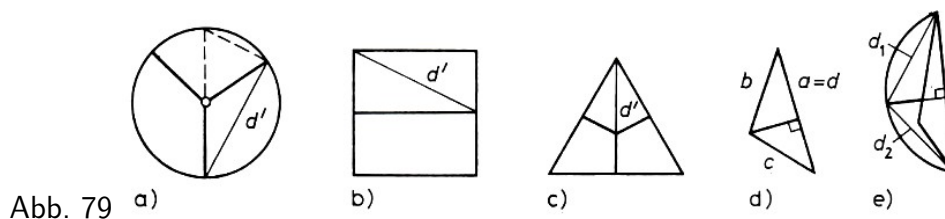
Jede beliebige Figur besitzt einen eindeutig bestimmten Durchmesser.

Aufgabe 11. Man bestimme den Durchmesser eines Kreises, eines Quadrats, eines gleichseitigen und eines stumpfwinkligen Dreiecks.



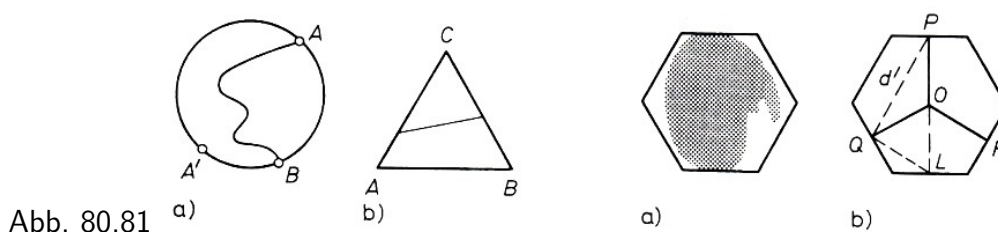
Lösung: Abb. 78a-d.

Aufgabe 12. Man zerlege die Figuren von Abb. 78 in Teile kleineren Durchmessers. Ist es möglich, a) einen Kreis, b) ein gleichseitiges Dreieck in zwei Teile kleineren Durchmessers zu zerlegen?



Lösung: In Abb. 79a bis e haben die Teile kleineren Durchmesser, weil in einem Dreieck dem größeren Winkel die längere Seite gegenüberliegt. (Bei a), b) bzw. c) gilt genauer  $d' = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ ,  $d' = \frac{d}{4}\sqrt{10}$  bzw.  $d' = \frac{d}{3}\sqrt{3}$ .

Bei einer Zerlegung des Kreises in zwei Teile (Abb. 80a) enthält wenigstens ein Teil diametrale Punkte  $A$  und  $A'$ , hat also ein Teil den Durchmesser  $d$ .



Bei einer Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks in zwei Teile hat wenigstens ein Teil den Durchmesser  $d$ , weil er zwei der Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  enthält (Abb. 80b).

Der Ungar Imre Pal hat gezeigt, dass sich jede ebene Figur mit dem Durchmesser  $d$  in ein regelmäßiges Sechseck einschließen lässt, dessen gegenüberliegende Seiten den Abstand  $d$  haben (Abb. 81a).

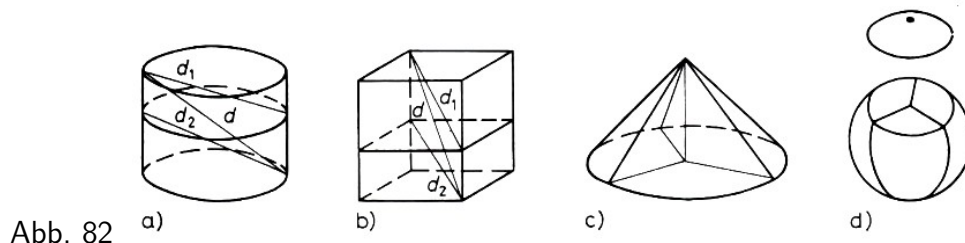
Aufgabe 13. Man beweise mit Hilfe des Palschen Satzes, dass sich jede ebene Figur  $F$  in drei Teile kleineren Durchmessers zerlegen lässt.

Lösung: Zunächst wird  $F$  in ein regelmäßiges Sechseck eingeschlossen, dessen gegenüberliegende Seiten den Abstand  $d$  besitzen. Für die Sechseckfläche existiert eine Zerlegung in drei Teile vom Durchmesser  $d' < d$  ( $d'^2 + \frac{d'^2}{4} = d^2$  nach Abb. 81b d.h.  $d' = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ ).

Die Teilung der Sechseckfläche ergibt eine Zerlegung von  $F$  in drei Teile kleineren Durchmessers.

Aufgabe 14. Man suche Körper, für die Zerlegungen a) in zwei, b) in drei, aber nicht in zwei, c) in vier, aber nicht in drei Teile kleineren Durchmessers existieren.

Lösungsbeispiele: a) Gerade Zylinder und Prismen lassen sich in zwei Teile kleineren Durchmessers zerlegen (Abb. 82a, b).



b) Für einen geraden Kegel mit  $h = r$  gibt es eine Zerlegung in drei Teile kleineren Durchmessers, aber bei jeder Zerlegung in zwei Teile hat ein Teil den Durchmesser des Kegels (Abb. 82c).

c) Für ein regelmäßiges Tetraeder kann es keine Zerlegung in drei Teile kleineren Durchmessers geben, aber es kann leicht eine Zerlegung in vier Teile kleineren Durchmessers gefunden werden. Letzteres gilt auch für eine Kugel (Abb. 82d), dagegen ist es relativ schwer zu beweisen, dass für sie keine Zerlegung in drei Teile kleineren Durchmessers existiert (vgl. [1]).

Bemerkung. Im Jahre 1933 formulierte der polnische Mathematiker Borsuk die Vermutung, dass jeder Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes in  $n + 1$  Teile kleineren Durchmessers zerlegt werden kann. Erst 1955 bzw. 1957 wurde von Eggleston bzw. Grünbaum gezeigt, dass die Vermutung im Anschauungsraum richtig ist (vgl. [1]). In ihrer Allgemeinheit ist die Vermutung weder bestätigt noch widerlegt worden.

## Literatur

[1] Boltjanski, W.G., und I.Z. Gochberg, Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

[2] Gilde, W., Gespiegelte Welt, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1979.

[3] Golomb, S. W., Polyominoes, Charles Scribner's & Sons, New York 1965 (russ. Übers. Mir, Moskau 1975).

[4] Steinhaus, H., Kaleidoskop der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Englischen und Polnischen).

[5] Varga, T., Mathematik, Teil 1 und 2, Akademiai Kiadó, Budapest, EST, Játsszunk matematikát, 1976.

#### Zusatzliteratur

[6] Boltjanski, W.G., u P.S. Soltan, Kombinatorische Geometrie konvexer Mengen, (Russisch); Kischinow 1978

[7] Dynkin, E.B., und W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).

[7b] Dynkin, E.B., und W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen, 2. Aufl, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1983/1. (Übersetzung aus dem Russischen).

[8] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1953.

[9] Fejes Toth, L., Reguläre Figuren, Akademiai Kiado, Budapest/ B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965 (Übersetzung aus dem Englischen).

[10] Flachsmeier, J., Kombinierte Figuren aus Quadraten und Dreiecken, alpha 14 (1980) 3, 55.

[11] Fraedrich, A.M., Mathematische Aktivitäten am ebenen Gitter, Der Mathematikunterricht 26 (1980) 3, 5-59.

[12] Gardner, M., Zusammensetzspiel mit sieben Teilen eines Würfels der Größe 3, in: Gardner, M., Mathematische Rätsel und Probleme, Friedr. Vieweg u. Sohn, Verlagsgesellschaft, Braunschweig 1966.

[13] Glaser, H., Symmetrieauffassungen und das Lösen von Anzahlproblemen, Der Mathematikunterricht 24 (1978) 2, 76- 104.

[14] Golowina, L.I., und I.M. Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).

[14b] Sominskij, I.S., L. I. Golowina und I. M. Jaglom, Die vollständige Induktion, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Übersetzung aus dem Russischen).

[15] Gronau, H.-D., und H. H. Larisch, On the SOMA-cube-puzzle, Beiträge zur Algebra und Geometrie 12 (1982), 93- 95.

[16] Hodi, E. (Hrsg.), Mathematisches Mosaik, Urania-Verlag, Leipzig- Jena-Berlin (Übersetzung aus dem Ungarischen).

[17] Ignatjew, E.I., Mathematische Spielereien, Mir, Moskau/Urania- Verlag, Leipzig- Jena-Berlin 1982 (Übersetzung aus dem Russischen).

[18] Klotzek, B., Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

[19] Odier, M., und Y.Roussel, Troiker mathematisch gespielt, Friedr. Vieweg u. Sohn, Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig Wiesbaden 1979.

[20] Türke, W., Welche und wieviele Möglichkeiten gibt es ? alpha 5 (1971) 6, 128-129; 6 (1972) 2, 32 -33; 6 (1972) 3, 57 -58.

[21] Türke, W., Phantasie und Schöpfertum, Mathematik in der Schule 17 (1979) 12, 641-644.

## 2 Grundlegende Begriffe der Kombinatorik

Die Begriffe Permutation, Variation und Kombination nehmen in der Kombinatorik einen zentralen Platz ein, sie sind auch für die folgenden Kapitel unentbehrlich. Inwieweit jedoch Teile der "Endlichen Graphen" bzw. "Endlichen Geometrie" mit geringerer Voraussetzung als dem ganzen zweiten Kapitel entwickelt werden können, wird dort genau ausgewiesen.

Hier werden Permutation, Variation und Kombination im Rahmen der Mengenlehre erklärt, so dass zwei Abschnitte über Mengenalgebra bzw. Abbildungen zur Wiederholung und Vertiefung der im Mathematikunterricht erworbenen Kenntnisse vorgesehen sind. Darüber hinaus wird das Beweisverfahren der vollständigen Induktion bereitgestellt.

Somit können nicht nur zahlreiche Aufgaben vollständig gelöst, sondern auch allgemeine Aussagen über Fakultäten und Binomialkoeffizienten hergeleitet werden.

Andererseits kann bei der Lösung einiger Aufgaben auf vollständige Induktion verzichtet werden, weil andere Lösungsmöglichkeiten bestehen, können Zielstellungen, die für die "Propädeutische Kombinatorik" formuliert wurden, in einem "breiten Induktionsanfang" realisiert werden, d. h., dass auf der Grundlage des Aufgabenmaterials auch bedeutende Bildungsziele ohne vollständige Induktion erreicht werden können, wenn man auf der Stufe des "Und-so-weiter-Denkens" stehenbleibt.

Dieses Kapitel wird zur Behandlung in einer Arbeitsgemeinschaft von Schülern der 9. und 10. Klasse empfohlen, da es in diesen Klassenstufen schon erfolgreich unterrichtet wurde. Möglicherweise kann es den Inhalt einer Arbeitsgemeinschaft in der 8. Klasse bilden, denn Teile hiervon und der folgenden Kapitel konnten im Kreisklub Junger Mathematiker u.a. in Gruppen mit Schülern von 5. und 6. Klassen realisiert werden.

### 2.1 Arbeiten mit Mengen

Im Mathematikunterricht wurde der Begriff Menge schon oft verwendet. Es lassen sich leicht Beispiele angeben:

- die Menge der Städte eines Staates,
- die Menge der gebrochenen Zahlen,
- die Menge der Ecken eines Quadrats,
- die Menge der Diagonalen eines n-Ecks.

Ist das Objekt  $x$  in der Menge  $M$  enthalten, dann schreibt man  $x \in M$  und nennt  $x$  Element der Menge  $M$ . Gehört  $x$  nicht der Menge  $M$  an, so wird  $x \notin M$  geschrieben.

Beispiele. Jeder Schüler ist Element seiner Klasse. Die Elemente der Menge der natürlichen Zahlen sind  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Die Elemente einer Geraden sind ihre Punkte.

Die Menge, die kein Element enthält, ist die leere Menge  $\emptyset$ .

Beispiele. Die Menge der gemeinsamen Punkte von Grund- und Deckfläche eines Würfels ist leer.

Die Lösungsmenge der Gleichung  $x + 2 = 0$  ist im Bereich der natürlichen Zahlen leer.

Mengen  $M$  und  $N$  sind genau dann gleich, wenn jedes Element von  $M$  auch zu  $N$  gehört und umgekehrt.

Beispiel. In jedem gleichseitigen Dreieck ist die Menge  $M$  der Seitenhalbierenden gleich der

Menge  $N$  der Mittelsenkrechten:  $M = N$ . /Wenn jedes Element einer Menge  $M$  auch in der Menge  $N$  liegt, dann ist  $M$  Teilmenge von  $N$ , in Zeichen:  $M \subseteq N$  (Abb. 83a). Insbesondere gilt  $\emptyset \subseteq M$  und  $M \subseteq M$  für jede Menge  $M$ . Es besteht folgende Äquivalenz:

$$M \subseteq N \quad \text{und} \quad N \subseteq M \Leftrightarrow M = N$$

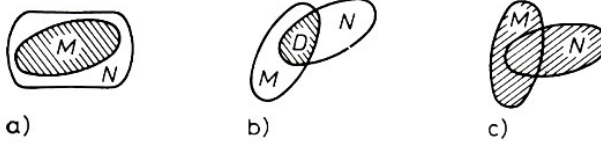


Abb. 83 a)

b)

c)

Beispiele. (1) Es gilt  $\overline{AB} \subseteq g_{AB}$ , d. h., die Verbindungsstrecke zweier Punkte  $A, B$  ist Teilmenge der Verbindungsgeraden der Punkte  $A, B$ .

(2) Die Quadrate bilden eine Teilmenge der Menge aller Vierecke.

(3) Die Menge  $M = \{0, 1, 2\}$  hat  $2^3 = 8$  Teilmengen:  $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}$ .

Die Menge aller Elemente  $x$ , für die  $x \in M$  und  $x \in N$  gilt, heißt der Durchschnitt  $D$  der Mengen  $M$  und  $N$ , in Zeichen:  $D = M \cap N$  (Abb. 83b).

Beispiele. (1)  $\{0, 1, 2\} \cap \{0, 2, 4, 6\} = \{0, 2\}$ .

(2) Der Durchschnitt der Menge der Primzahlen und der der geraden Zahlen ist die einelementige Menge 2.

Die Menge aller Elemente  $x$ , für die  $x \in M$  oder  $x \in N$  gilt, heißt die Vereinigung  $V$  der Mengen  $M$  und  $N$ , in Zeichen:  $V = M \cup N$  (Abb. 83c).

Beispiel. Für die Buchstaben des Alphabets gilt

$$(\{a,b,c\} \cup \{a,b,d\}) \cup \{b,c,d,e\} = \{a,b,c,d\} \cup \{b,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$$

Ist  $M$  eine  $m$ -elementige und  $N$  eine  $n$ -elementige Menge und gilt  $m < n$ , so hat  $M \cap N$  höchstens  $m$  Elemente, während  $M \cup N$  mindestens  $n$  und höchstens  $m+n$  Elemente besitzt.

Aufgabe 1. Auf einem Tisch liegen zwölf Rechtecke und neun Rhomben; sie bilden eine 17elementige Vereinigung. Wie viele Quadrate befinden sich auf dem Tisch?

Lösung: Jedes Viereck, das sowohl Rechteck als auch Rhombus ist, muss ein Quadrat sein (Abb. 84a). In  $12 + 9$  werden gerade die Quadrate doppelt gezählt. Folglich enthält die Vereinigung  $(12 + 9) - 17 = 4$  Quadrate.

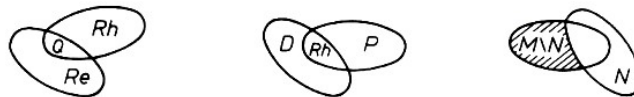


Abb. 84 a)

b)

c)

Aufgabe 2. Auf einem Tisch liegen nur Parallelogramme und Drachenvierecke, insgesamt 20 Stück. Es sind genau elf Drachenvierecke und fünf Rhomben darunter. Wie viele Parallelogramme liegen auf dem Tisch ?

Lösung: Die Rhomben bilden den Durchschnitt; sie werden demzufolge in  $p + 11$  doppelt gezählt, wenn  $p$  die gesuchte Anzahl bezeichnet (Abb. 84b). Somit gilt

$$(p + 11) - 20 = 5, \quad p + 11 = 25, \quad p = 14$$



Die Vereinigung enthält also 14 Parallelogramme.

Aufgabe 3. Gegeben sind eine  $m$ - und eine  $n$ -elementige Menge  $M$  bzw.  $N$ , deren Durchschnitt  $d$  und deren Vereinigung  $v$  Elemente besitzen. Es ist

$$m + n = d + v$$

zu beweisen.

Beweisbeispiele. (1) In  $m + n$  werden die Elemente von  $M \cap N$  doppelt gezählt, also gilt  $m + n - v = d$  und folglich die behauptete Gleichung.

(2) In  $M$  liegen  $m - d$  Elemente, die nicht zu  $N$  gehören, also gilt  $(m - d) + n = v$  und somit die behauptete Gleichung.

Im zweiten Beweis wurde die Menge  $M \setminus N$  der Elemente von  $M$  gebildet, die nicht in  $N$  liegen (Abb. 84c).  $M \setminus N$  heißt die Differenz von  $M$  und  $N$ .

Ist  $M$  eine  $m$ - und  $N$  eine  $n$ -elementige Menge, so hat  $M \setminus N$  höchstens  $m$  Elemente. Unter der Voraussetzung  $N \subseteq M$  besitzt  $M \setminus N$  genau  $m - n$  Elemente. Das haben wir oben benutzt.

Unter dem Produkt  $M \times N$  versteht man die Menge der Paare  $(a, b)$  mit  $a \in M$  und  $b \in N$ :

$$M \times N = \{(a, b) : a \in M \text{ und } b \in N\}$$

Gilt beispielsweise  $M = \{a_1, a_2\}$  und  $N = \{b_1, b_2, b_3\}$ , dann können die Elemente von  $M \times N$  in einer Tabelle angegeben werden:

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	$(a_1, b_1)$	$(a_1, b_2)$	$(a_1, b_3)$
$a_2$	$(a_2, b_1)$	$(a_2, b_2)$	$(a_2, b_3)$

Das Produkt einer  $m$ - und einer  $n$ -elementigen Menge hat  $m \cdot n$  Elemente.

## 2.2 Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Aufgabe 1. Wie viele Teilmengen besitzt eine  $n$ -elementige Menge ?

Lösung: Die Aufgabe wird schrittweise gelöst.

a) Um zu einer Vermutung zu gelangen, werden wir zunächst Mengen mit einer einfach zu überblickenden Anzahl von Elementen betrachten. Die Anzahl der Teilmengen der einelementigen Menge  $\{1\}$  soll mit  $a(1)$  bezeichnet werden. Da  $\emptyset$  und  $\{1\}$  sämtliche Teilmengen von  $\{1\}$  sind, gilt  $a(1) = 2$ .

Nun wird  $\{1, 2\}$  untersucht; die gesuchte Anzahl sei  $a(2)$ . Wir wissen nach den obigen Ergebnissen, dass  $\{1\} = \{1, 2\} \setminus \{2\}$  die Teilmengen  $\emptyset$  und  $\{1\}$  hat. Jede dieser Mengen können wir mit der Menge  $\{2\}$  vereinigen, um mit  $\{2\}$  und  $\{1, 2\}$  neue Teilmengen von  $\{1, 2\}$  zu erhalten. Da  $\{1, 2\}$  keine weiteren Teilmengen besitzt, erhalten wir  $a(2) = 2 \cdot a(1) = 2^2$ .

Dieses Vorgehen kann nun folgendermaßen auf die Menge  $\{1, 2, 3\}$  (vgl. Beispiel (3)) übertragen werden: Die Differenz  $\{1, 2, 3\} \setminus \{3\}$  hat  $4 = 2^2$  Teilmengen. Die Vereinigung jeder dieser vier Teilmengen mit  $\{3\}$  ergibt vier weitere Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$ , nämlich  $\{3\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ . Nun lässt sich  $a(3) = 2a(2) = 2^3$  erkennen.

Die bisherigen Ergebnisse ordnen wir in einer Tabelle:

$n$	Menge	Teilmengen	$a(n)$
1		$\{1\}$	$\emptyset, \{1\}$
2		$\{1,2\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$
3		$\{1,2,3\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$
$n$		$\{1,2,3,\dots,n\}$	$2^n$ Vermutung

b) Wie kann man sich von der Richtigkeit der Vermutung überzeugen?

Selbst nach der Beantwortung der Frage bis  $n = 100$ , die schon viel Zeit in Anspruch nähme, bleibt zu überprüfen, ob die Vermutung auch für alle folgenden Zahlen gilt. Zu diesem Zweck überlegen wir, was allen Teilschritten unter a) gemeinsam war.

Wir erkannten bereits die Anzahlen  $a(1)$  und  $a(k)$  und haben dann auf die Anzahl  $a(k+1)$  geschlossen. Wenn es uns gelingt, zu beweisen, dass dieser Schluss für ein beliebiges  $k$  aus dem Bereich der natürlichen Zahlen gilt, dann ist unsere Vermutung für 1, dann für 2, dann für 3, dann für 4 usw. richtig, d. h. für alle natürlichen Zahlen.

Unter der Voraussetzung, dass  $a(k) = 2^k$  für  $k$ -elementige Mengen gilt, wollen wir  $a(k+1) = 2^{k+1}$  für  $(k+1)$ -elementige Mengen beweisen:

Die Differenz

$$\{1,2,\dots,k,k+1\} \setminus \{k+1\} = \{1,2,\dots,k\}$$

hat  $2^k$  Teilmengen. Werden diese Teilmengen mit  $\{k+1\}$  vereinigt, dann gibt es wegen  $k+1 \notin \{1,2,\dots,k\}$  sofort  $2^k$  weitere Teilmengen der ursprünglichen  $(k+1)$ -elementigen Menge  $M$ . Da jede Teilmenge von  $M$  zu einer der beiden betrachteten Sorten gehört, gilt

$$a(k+1) = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Unser Beweisprinzip baute sich auf folgenden Schritten auf: Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  richtig, wenn

a) die Aussage für  $n = 1$  richtig ist und

b) aus der Richtigkeit der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl  $n = k$  die Richtigkeit für  $n = k+1$  folgt.

Eine Aussage über natürliche Zahlen ist richtig, wenn der Beweis beider Teile erbracht wird. Dass beide Teile unbedingt des Beweises bedürfen, zeigen die folgenden Gegenbeispiele:

Aussage I. Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $n^2 = n$ . Diese Aussage erfüllt a) wegen  $1^2 = 1$ , ist aber falsch, denn es gilt  $2^2 \neq 2$ . (Hier lässt sich b) nicht beweisen.)

Aussage II. Für alle natürlichen Zahlen gilt  $n+1 = n$ . Diese Aussage erfüllt b), denn unter der Voraussetzung, dass  $k+1 = k$  richtig ist, folgt, dass  $(k+1)+1 = k+1$  ebenfalls richtig ist. Aber für  $n = 1$  gilt die Aussage nicht, da  $1+1 \neq 1$  ist. Die Aussage II ist ebenfalls falsch.

Damit haben wir uns mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion bekannt gemacht.

Aufgabe 2. Man beweise: Die Anzahl der Diagonalen von einem  $n$ -Eck beträgt.

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Lösung durch vollständige Induktion.

a) Da es weder ein Ein- noch ein Zweieck gibt, ist die erste sinnvolle Aussage für  $n = 3$  möglich:  $\frac{3 \cdot 0}{2} = 0$  Diagonalen. In einem Viereck gibt es  $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$  Diagonalen.

b) Für  $n = k > 2$  sei die Aussage richtig. Es ist zu zeigen, dass sie auch für  $n = k + 1$  gilt. In einem  $(k + 1)$ -Eck verbinden wir die erste mit der  $k$ -ten Ecke und lassen zunächst die  $(k + 1)$ -te Ecke unberücksichtigt (Abb. 85); das erhaltene  $k$ -Eck hat  $\frac{k(k-3)}{2}$  Diagonalen. Zum  $(k + 1)$ -ten Eckpunkt führen zwei Seiten und  $k - 2$  Diagonalen; außerdem wird die  $P_1$  und  $P_k$  verbindende Seite des  $k$ -Ecks nun zu einer Diagonale. Wir erhalten

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + \frac{2(k-1)}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Diagonalen.

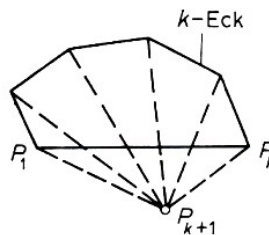


Abb. 85

Nach a) und b) gilt die Behauptung für alle n-Ecke.

## 2.3 Abbildungen

Ordnet man jedem Element einer Menge  $M$  genau ein Element aus der Menge  $N$  zu, dann nennt man diese Zuordnung eine Abbildung  $f$  der Menge  $M$  in die Menge  $N$ . Wird durch die Abbildung  $f$  einem Element  $x$  ein Element  $y$  zugeordnet, so schreibt man  $f(x) = y$  und nennt

- $f(x)$  Bild des Elementes  $x$  bei der Abbildung  $f$ ,
- $x$  Original des Bildes oder Urbild des Bildes  $y = f(x)$ ,
- $M$  Definitionsbereich der Abbildung  $f$ ,
- $f(M)$  Wertebereich der Abbildung  $f$ .

Eine Abbildung  $f$  heißt eineindeutig, wenn jedes Bild bei der Abbildung  $f$  genau ein Original hat. Im Fall  $F(M) = N$  sagen wir Abbildung auf  $N$ .

Beispiele. Vgl. Abb. 86 a) Abbildung, b) eineindeutige Abbildung

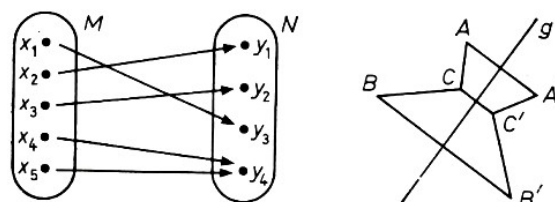


Abb. 86 a)

b)

Mit diesen Begriffen wird festgelegt: Eine Menge  $M$  heißt genau dann endlich, wenn es eine natürliche Zahl  $n$  derart gibt, dass die aus natürlichen Zahlen gebildete Teilmenge  $\{k : k < n\}$  eineindeutig auf  $M$  abgebildet werden kann. Dabei ist  $n$  die Anzahl  $|M|$  der Elemente von  $M$ . Nicht endliche Mengen heißen unendlich.

Endliche Mengen können stets durch Angabe ihrer Elemente aufgeschrieben werden; z. B. ist

$\{a, b, c\}$  die Menge mit den drei Elementen  $a, b, c$ , d.h. insbesondere  $a \neq b \neq c \neq a$ .

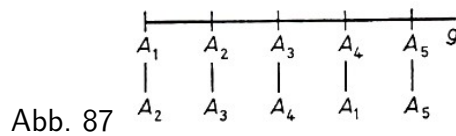
Offenbar ist  $|\{a_1, a_2, a_3\}| = 3$ ,  $|\{b_1, b_2, b_3, b_4\}| = 4$  und  $|\emptyset| = 0$ . Ist  $f$  eine eindeutige Abbildung einer endlichen Menge  $M$  auf eine Menge  $N$ , dann ist auch  $N$  endlich, und es gilt  $|M| = |N|$ .

Eine Aufgabe der Kombinatorik ist die Anzahlbestimmung bei endlichen Mengen, die gewisse Eigenschaften besitzen.

## 2.4 Permutationen

Aufgabe 1. Gegeben seien  $n$  verschiedene Punkte einer Geraden  $g$ . Auf wieviel verschiedene Arten können die Punkte mit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  bezeichnet werden ?

Beispiel. Für  $n = 5$  enthält Abb. 87 zwei Bezeichnungsweisen.



Lösung: Jeder der  $n$  gegebenen Punkte erhält genau eine der  $n$  Bezeichnungen  $A_n$ . Überlegt man sich eine weitere Bezeichnungsmöglichkeit, so werden die gleichen Bezeichnungen für evtl. andere Punkte verwendet. Bei jeder Bezeichnungsweise wird demnach die Menge der Bezeichnungen eindeutig auf sich abgebildet.

Alle Bezeichnungsweisen aufzufinden heißt also, die Menge aller eindeutigen Abbildungen einer  $n$ -elementigen Menge auf sich zu finden.

Abb. 87 zeigt für  $n = 5$  Punkte zwei Möglichkeiten der Bezeichnung. Sicherlich sind das nicht alle, die man für fünf Punkte finden kann. Um zu einer allgemeinen Aussage zu gelangen, geht man systematisch vor.

$n$	Bezeichnungsweisen	Anzahl
1	$A_1$	1
2	$A_1A_2, A_2A_1$	$2 = 1 \cdot 2$
3	$A_1A_2A_3, A_1A_3A_2, A_2A_1A_3, A_2A_3A_1, A_3A_1A_2, A_3A_2A_1$	$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$
4	$A_1A_2A_3A_4, A_1A_2A_4A_3, A_1A_3A_2A_4, A_1A_3A_4A_2, A_1A_4A_2A_3, A_1A_4A_3A_2, A_2A_1A_3A_4, A_2A_1A_4A_3, \dots$	$24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
5		$120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
$n$		$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

Es gibt vermutlich  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  verschiedene Bezeichnungsweisen der  $n$  Punkte. Für das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  schreibt man kurz  $n!$  (sprich:  $n$  Fakultät). Später wird auch  $1! = 1$  und  $0! = 1$  benutzt. Unsere Vermutung können wir mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen.

- a) Für  $n = 1$  gilt unsere Vermutung.
- b) Wir wollen annehmen, dass es für  $k$  Punkte genau  $k!$  Bezeichnungsweisen gibt, und beweisen, dass es für  $k + 1$  Punkte genau  $(k + 1)!$  Bezeichnungsweisen gibt. Fassen wir unsere Bezeichnungsweisen aus  $k + 1$  Elementen in Gruppen zusammen wie in der Tabelle, so dass in jeder Gruppe ein bestimmtes Element an erster Stelle steht, dann erhalten wir  $k + 1$  Gruppen. In jeder einzelnen Gruppe kommen so viele Bezeichnungsweisen vor, wie

es Möglichkeiten gibt, die verbleibenden  $k$  Elemente anzuordnen. Das sind aber nach unserer Voraussetzung  $k!$  Stück.

Insgesamt gibt es also  $(k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$  Bezeichnungen. Damit ist der Beweis erbracht.

Eine Abbildung, die eine endliche Menge eineindeutig auf sich abbildet, nennt man Permutation. Gleichwertig damit kann man wie oben eine Permutation als eine der  $n!$  möglichen Anordnungen bzw. Bezeichnungen von  $n$  Elementen einer Menge auffassen.

Es sollen alle Permutationen von vier Elementen in einer anderen Schreibweise, in der sogenannten Permutationsschreibweise, notiert werden:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, & s_2 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix}, & s_3 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}, \\
 s_4 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix}, & s_5 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix}, & s_6 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}, \\
 s_7 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}, & s_8 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}, & s_9 &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}, \\
 s_{10} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}, & s_{11} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}, & s_{12} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix}, \\
 s_{13} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix}, & s_{14} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & D & B \end{pmatrix}, & s_{15} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}, \\
 s_{16} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix}, & s_{17} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}, & s_{18} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & B & A \end{pmatrix}, \\
 s_{19} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}, & s_{20} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix}, & s_{21} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix}, \\
 s_{22} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}, & s_{23} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & A & B \end{pmatrix}, & s_{24} &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

Beispielsweise besagt  $s_4$ : A wird auf D, B auf C, C auf B und D auf A abgebildet. Damit haben wir eine Möglichkeit gewonnen, gewisse Deckabbildungen  $f$  einer Figur  $F$ , d.h. Bewegungen  $f$  mit  $f(F) = F$ , zu beschreiben.

Es sei etwa ein Rechteck mit den Eckpunkten  $A, B, C, D$  gegeben, das an der Symmetrieachse, die parallel zur Seite  $AB$  ist, gespiegelt wird. Dabei werden  $A, D$  und  $B, C$  jeweils vertauscht. Folglich lässt sich diese Deckabbildung durch  $s_{24}$  beschreiben.

Die Bezeichnungen  $s_k$  sollen auch im folgenden benutzt werden.

Aufgabe 2. Welche und wie viele Deckabbildungen gibt es für: jede einzelne Vierecksklasse ?

Wir betrachten im folgenden Vierecke  $ABCD$ .

Figur	Deckabbildungen $\neq s_1$
Giebelviereck (gleichschenkliges Trapez)	$s_8$ bzw. bei anderer Bezeichnung $s_{24}$ , (Spiegelung an der Symmetrieachse)
Parallelogramm	$s_{17}$ (Drehung um $2R$ )
Drachenviereck	$s_6$ bzw. $s_{15}$ (Spiegelung an der Symmetrieachse)
Rechteck	$s_{17}; s_8, s_{24}$ (Drehung um $2R$ ; Spiegelung an den Symmetrieachsen)
Rhombus	$s_{17}; s_6, s_{15}$ (Drehung um $2R$ ; Spiegelung an den Symmetrieachsen)
Quadrat (Abb. 88a)	$s_{10}, s_{17}, s_{19}; s_6, s_{15}, s_8, s_{24}$ (Drehung um $R, 2R, 3R$ ; Spiegelung an den Symmetrieachsen)

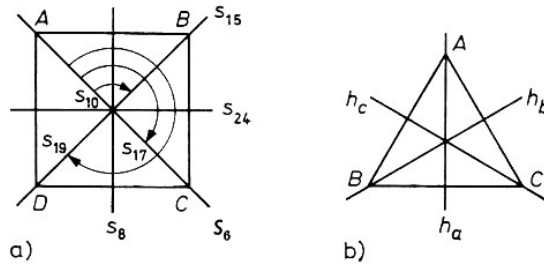


Abb. 88 a)

b)

Aufgabe 3. Man beschreibe durch Permutationen dreier Elemente die Deckabbildungen a) eines gleichseitigen Dreiecks und b) eines gleichschenkligen, aber nicht gleichseitigen Dreiecks.

Lösung: Man gebe zunächst sämtliche Permutationen dreier Elemente an, also

$$s_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, \quad s_6 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix},$$

Man überlege, welche Bewegung bei den einzelnen Abbildungen ausgeführt wird (Abb. 88b):

a)  $s_1$ : identische Abbildung,  $s_2$ : Spiegelung an  $h_A$ ,  $s_3$ : Spiegelung an  $h_C$ ,  $s_4$ : Drehung um  $120^\circ$ ,  $s_5$ : Drehung um  $240^\circ$ ,  $s_6$ : Spiegelung an  $h_B$ .

b)  $s_1$  und ( $s_2$  oder  $s_3$  oder  $s_6$ ), d. h. identische Abbildung und Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis.

Aufgabe 4. Man gebe die Anzahl der Deckabbildungen eines regelmäßigen  $n$ -Ecks an. Durch welche Bewegungen können sie gewonnen werden ?

Lösung: Man untersuchte zunächst Drehungen. Man erhält  $n$  Deckabbildungen, die durch Drehung um den Mittelpunkt mit den Winkeln  $0^\circ$ ,  $\frac{1}{n} \cdot 360^\circ$ ,  $\frac{2}{n} \cdot 360^\circ$ , ...,  $\frac{n-1}{n} \cdot 360^\circ$  entstehen.

Man beachte nun noch die Symmetrieachsen. Dabei soll zunächst der Fall " $n$  ungerade" dann der Fall " $n$  gerade" betrachtet werden:

Ist  $n$  ungerade, so geht eine Symmetrieachse stets durch einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der ihm gegenüberliegenden Seite; ist  $n$  gerade, so geht solche Achse entweder durch gegenüberliegende Eckpunkte oder gegenüberliegende Seitenmittelpunkte.

Es werden also  $n$  Deckabbildungen durch Drehungen und weitere  $n$  durch Spiegelungen an Geraden gewonnen.

Unsere Betrachtungen sollen nun auf den Raum ausgedehnt werden.

Betrachtet man ein regelmäßiges Tetraeder, so kann man seine vier Eckpunkte  $A, B, C, D$  durch Bewegungen im Raum, d.h. auch durch Drehungen und Spiegelungen im Raum, auf sich abbilden. Man führe Bewegungen gegebenenfalls mit einem Modell aus.

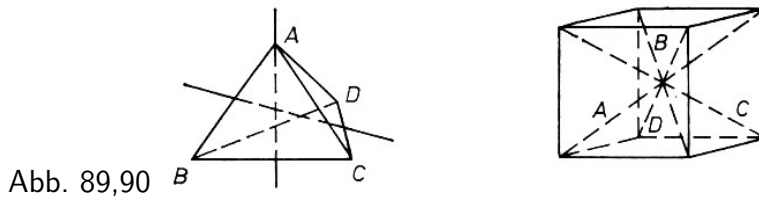
Aufgabe 5. Welche und wie viele Deckabbildungen eines regelmäßigen Tetraeders auf sich gibt es?

Lösung: Dazu werden wieder die Permutationen von vier Elementen genutzt. Zunächst soll festgestellt werden, welche Bewegungen das Tetraeder auf sich abbilden. Man betrachte dazu die Drehachsen bzw. Symmetrieebenen und beschreibe ihre Lage bezüglich des Tetraeders (Abb. 89):

1. Drehung um die Achsen, die durch jeweils einen Eckpunkt und den Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche gehen.

2. Drehung um die Symmetrieachsen, die jeweils gegenüberliegende Kantenmittelpunkte miteinander verbinden (z.B. in Abb. 89 die Mittelpunkte von  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ ).
3. Spiegelung an einer Ebene durch eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante.
4. Nacheinanderausführungen von Drehungen und Spiegelungen.

Zusammenfassung: Jede Permutation der Ecken lässt sich durch Deckabbildung realisieren. Da sich die Permutationen der Ecken und die Deckabbildungen eineindeutig entsprechen, gibt es  $4! = 24$  Deckabbildungen.



Bisher wurden Punkte abgebildet. Betrachtet man einen Würfel, so stellt man fest, dass dieser vier Raumdiagonalen besitzt (Abb. 90).

Diese bezeichnen wir mit  $A, B, C, D$ , um die Bezeichnungen von S. 45 benutzen zu können. Wird der Würfel bewegt, so bewegen sich seine Diagonalen gleichfalls mit. Genauer gilt: Die Drehungen des Würfels und die Permutationen der Diagonalen entsprechen sich eineindeutig.

Aufgabe 6. Man gebe die Anzahl und die verschiedenen Deckabbildungen eines Würfels mit Hilfe der Permutationen seiner vier Raumdiagonalen an.

Lösung: Bei der Lösung gehe man wie in Aufgabe 5 vor. Man betrachte die Symmetrieachsen des Würfels näher und führe mit ihrer Hilfe Bewegungen aus.

1. Drehung um die drei Symmetrieachsen, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Würfel­flächen miteinander verbinden:

$s_{10}, s_{17}, s_{19}; s_{11}, s_{24}, s_{14}; s_{23}, s_8, s_{18}$ .

2. Drehung um die vier Raumdiagonalen:

$s_4, s_5; s_{16}, s_{21}; s_{12}, s_{20}; s_9, s_{13}$ .

3. Drehung um die Symmetrieachsen, die jeweils gegenüberliegende Kantenmittelpunkte miteinander verbinden:

$s_2, s_3, s_6, s_7, s_{15}, s_{22}$ .

4. Identische Abbildung:  $s_1$ .

Die Permutationen  $s_1, \dots, s_{24}$  lassen sich bereits durch die Drehungen des Würfels auf sich (einschließlich der identischen) beschreiben. Man erhält die übrigen 24 Deckabbildungen des Würfels, indem nach jeder Drehung noch die Spiegelung am Mittelpunkt ausgeführt wird.

## 2.5 Variationen

Aufgabe 1. Gegeben seien die Namen von  $n$  Städten. Es sollen Reiserouten zwischen  $k$  ( $k < n$ ) Städten festgelegt werden. Bei  $k = 1$  denke man an eine Stadtrundfahrt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, solche Routen auszuwählen, bei der jede Stadt höchstens einmal vorkommt.

Um eine Vermutung aufstellen zu können, soll zunächst für den Fall  $n = 4$  eine Tabelle aufgestellt werden, wobei die Städte mit  $A, B, C, D$  bezeichnet seien.

$k$	Reiserouten	Anzahl
1	A B C D	4
2	AB BA CA DA AC BC CB DB AD BD CD DC	$4 \cdot 3 = 12$
3	ABC BAC CAB DBA ABD BAD CAD DAC ACB BCA CBA DAB ACD BCD CBD DBC ADB BDA CDA DCA ADC BDC CDB DCB	$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
4	alle Permutationen von vier Elementen	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Aus der letzten Spalte der Tabelle lässt sich die Vermutung aufstellen:

Es gibt  $n(n - 1) \dots (n - (k - 1))$  verschiedene Reiserouten.

Betrachten wir die Menge der Städte als  $n$ -elementige Menge, so haben wir soeben bei jeder Reiseroutefestlegung eine eindeutige Abbildung einer Menge mit  $k$  Elementen in eine  $n$ -elementige Menge vorgenommen. Diese Abbildungen heißen Variationen.

Als  $k$ -elementige Menge kann stets  $\{1, \dots, k\}$  gewählt werden. Damit erweist sich eine Variation als ein  $k$ -Tupel aus voneinander verschiedenen Elementen der  $n$ -elementigen Menge (vgl. obige Tabelle).

Wir behaupten jetzt:

Bei gegebenen natürlichen Zahlen  $k$  und  $n$  mit  $k < n$  beträgt die Anzahl der Variationen  $n(n - 1) \dots (n - (k - 1))$ .

Beweis. Jede Variation ordnet  $k$  Elemente (vgl. die Tabelle). Die restlichen  $n - k$  Elemente bleiben unberücksichtigt. Diese ließen sich jedoch auf  $(n - k)!$  verschiedene Weisen anordnen, um je eine Permutation aller  $n$  Elemente zu erhalten. Da jede Permutation so gewonnen werden kann, ergibt das  $(n - k)!$ -fache der Anzahl der Variationen die Anzahl  $n!$  der Permutationen aller  $n$  Elemente. Folglich gibt es

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n(n - 1) \dots (n - (k - 1))$$

Variationen. Das Resultat bestätigt unsere Vermutung.

Welche Zusammenhänge bestehen zwischen Permutationen und Variationen ?

Man vergleiche dazu die aufgestellten Tabellen zur Anzahlermittlung. Man vergleiche die gefundenen Formeln zur Bestimmung der Anzahl der Variationen und Permutationen.

In welchen Fällen treten bei Variationen Permutationen auf?

Ist  $k = n$ , so erhält man bei der Ermittlung der Variationen sämtliche Permutationen von  $n$  Elementen (letzte Zeile der Tabelle). Die Gleichung zur Anzahlbestimmung lautet in diesem Fall:

$$n(n - 1) \dots (n - n + 1) = n(n - 1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

Jede Permutation ist eine Variation.

Aufgabe 2. Als Anfangs- bzw. Endpunkt von Pfeilen (gerichteten Strecken) dienen  $n$  Punkte einer Geraden. Wie viele solcher Pfeile gibt es, bei denen Anfangs- und Endpunkt voneinander verschieden sind?

1. Lösung: Von jedem der  $n$  Punkte geht ein Pfeil zu jedem weiteren Punkt; folglich gibt es  $n(n - 1)$  Pfeile.



2. Lösung: Man betrachte die Pfeile als Paare, deren Anfangs- bzw. Endpunkt zur  $n$ -elementigen Punktmenge auf der Geraden gehören. Gesucht ist die Anzahl der eindeutigen Abbildungen einer Zweiermenge in eine  $n$ -elementige Menge.

Man erhält für  $k = 2$  wieder  $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$  verschiedene Pfeile.

Aufgabe 3. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine Anzahl von  $k$  Punkten auf  $n$  punktfremden Geraden festzulegen ?

Lösung: Wir verdeutlichen uns die Aufgabenstellung für den Fall  $n = 2$ . Gegeben sind die parallelen Geraden  $g, h$  mit  $g \neq h$ .

$k$	Punkte auf $g$	Punkte auf $h$	Anzahl	
1	A	—	$g$	$2 = 2^1$
	—	A	$h$	
2	AB	—	$gg$	$4 = 2^2$
	A	B	$gh$	
	B	A	$hg$	
	—	AB	$hh$	
3	ABC	—	$ggg$	$8 = 2^3$
	AB	C	$ggh$	
	AC	B	$ghg$	
	A	BC	$ghh$	
	BC	A	$hgg$	
	B	AC	$hgh$	
	C	AB	$hhg$	
	—	ABC	$hhh$	
$k$				$2^k$

Bei dieser Aufgabe wurde nur eine (eindeutige) Abbildung einer  $k$ -elementigen Menge in eine  $n$ -elementige Menge vorgenommen. In den Bildmengen ist zu erkennen, dass die Elemente wiederholt vorkommen.

Diese Abbildungen nennt man Variationen mit Wiederholung. Sie können stets als  $k$ -Tupel gedeutet werden.

Der Beweis der Vermutung  $n^k$  für die gesuchte Anzahl für beliebiges  $n$  und  $k$  wird durch vollständige Induktion geführt.

Beweis. Die Zahl  $n$  sei als beliebige natürliche Zahl gegeben.

a) Für  $k = 1$  gilt: Es gibt  $n = n!$  verschiedene Abbildungen eines Elementes in eine  $n$ -elementige Menge.

b) Wenn die Anzahl der  $k$ -Tupel  $n^k$  beträgt, dann ist die Anzahl der  $(k+1)$ -Tupel  $n^{k+1}$ : Aus jedem  $k$ -Tupel erhält man, indem an die  $(k+1)$ -te Stelle noch eines der  $n$  Elemente der gegebenen Menge gesetzt wird, ein  $(k+1)$ -Tupel. Es gibt also wie behauptet  $n^k \cdot n = n^{k+1}$  Variationen mit Wiederholung in Form von  $(k+1)$ -Tupeln.

Insgesamt gibt es  $n^k$  Möglichkeiten für die Verteilung der Punkte auf die Geraden.

## 2.6 Kombinationen

Jede  $k$ -elementige Teilmenge einer  $n$ -elementigen Menge heißt Kombination (zur  $k$ -ten Klasse).

Beispiel. Für  $\{A, B, C, D\}$  und  $k = 3$  gibt es folgende Kombinationen:  $\{A, B, C\}$ ,  $\{A, B, D\}$ ,  $\{A, C, D\}$ ,  $\{B, C, D\}$ .

Um bei gegebenen Zahlen  $n$  und  $k$  ( $< n$ ) die Anzahl der Kombinationen zu bestimmen, bilden wir zunächst von jeder Kombination sämtliche  $k$ -Tupel ohne Wiederholungen und erhalten auf diese Weise alle  $n(n-1)\dots(n-(k-1))$  Variationen.

Da zu jeder  $k$ -elementigen Menge genau  $k!$  solcher  $k$ -Tupel gehören, ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

die Gesamtanzahl der Kombinationen. Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  wird "n über k" gelesen: er kommt auch bei der Berechnung "binomischer" Potenzen  $(a+b)^n$  vor und gibt auch für  $k > n$  die Anzahl 0 der Kombinationen an. Beispielsweise ist

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 2 = 10 \quad , \quad \binom{2}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0$$

Binomialkoeffizienten sind natürliche Zahlen; deshalb können alle Faktoren des Nenners gekürzt werden.

Aufgabe 1. Wie viele Verbindungsgeraden gibt es zwischen  $n$  Punkten, von denen keine drei auf einer Geraden liegen sollen?

Lösung: Je zwei Punkte haben genau eine Verbindungsgerade (Abb. 91). Für einen Punkt existiert keine Verbindungsgerade, jedoch für zwei genau eine. Nimmt man einen dritten Punkt hinzu, so entstehen noch seine zwei Verbindungsgeraden zu den beiden bereits vorhandenen Punkten.

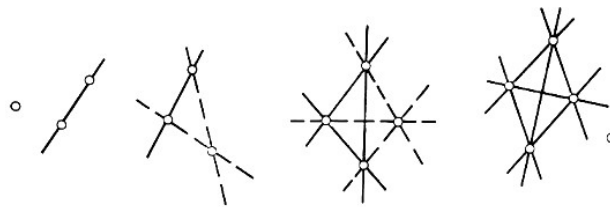


Abb. 91

Kommt ein vierter Punkt hinzu, so erhalten wir weitere drei Verbindungsgeraden zu den schon vorhandenen Punkten. Das lässt sich beliebig weiterführen, wobei entscheidend ist, dass bei  $n+1$  Punkten zu den schon ermittelten Verbindungsgeraden  $n$  weitere dazukommen, nämlich diejenigen, die den  $(n+1)$ -ten Punkt mit allen anderen  $n$  Punkten verbinden.

$n$	Anzahl der Verbindungsgeraden
1	$A_1 = 0$
2	$A_2 = 1$
3	$A_3 = A_2 + 2 = 3$
4	$A_4 = A_3 + 3 = 6$
5	$A_5 = A_4 + 4 = 10$
...	...
$n$	$A_n$
$n+1$	$A_{n+1} = A_n + n$

Bis jetzt können wir lediglich die Anzahl  $A_{n+1}$  aus  $A_n$  ermitteln:  $A_{n+1} = A_n + n$ , eine sogenannte rekursive Bildungsvorschrift. Das genügt uns noch nicht. Doch wie lassen sich die bereits erworbenen Kenntnisse anwenden?

Gegeben sind  $n$  Elemente (die Punkte), gefragt wird indirekt nach der Anzahl der verschiedenen zweielementigen Teilmengen, es werden Kombinationen gesucht.

Für  $k = 2$  gibt es  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  Kombinationen und damit ebenso viele Verbindungsgeraden. (Jeder der  $n$  Punkte hat eine Verbindungsgerade zu den anderen  $n - 1$  Punkten. Da aber  $g_{AB} = g_{BA}$  ist, erhält man, wie oben angegeben,  $\frac{n(n-1)}{2}$ .)

Aufgabe 2. Wie viele Diagonalen hat ein  $n$ -Eck ?

Lösung: Für die ersten  $n$  erhält man

$n$	3	4	5	6	7
$D_n$	0	2	5	9	14

Um eine Aussage über alle  $n$ -Ecke machen zu können, überprüfe man, ob sich die Lösung von Aufgabe 1 verwenden lässt. Es gibt zwischen  $n$  nicht kollinearen Punkten  $\binom{n}{2}$  Verbindungsstrecken. Welche dieser Verbindungsstrecken sind keine Diagonalen des  $n$ -Ecks?

Ein  $n$ -Eck hat  $n$  Seiten. Man hat also genau

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n \cdot 2}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Diagonalen.

Aufgabe 3. Wie groß ist die Anzahl der Verbindungsgeraden von  $n$  Punkten, wenn man die Bedingung der Nichtkollinearität von Aufgabe 1 unberücksichtigt lässt ?

Lösung: In diesem Fall muss die Anzahl ab  $n = 3$  kleiner als  $\binom{n}{2}$  sein. In einer ersten Geraden  $g_1$  mögen  $n_1 > 2$  der gegebenen Punkte liegen; sie bestimmen statt  $\binom{n_1}{2}$  Geraden nur  $g_1$  usw. Schließlich gebe es eine  $r$ -te Gerade  $g_r$  mit  $n_r > 2$  der gegebenen Punkte, während keine weitere Gerade mehr als zwei der gegebenen Punkte enthalte. Somit ist die gesuchte Anzahl

$$\binom{n}{2} - \left[ \binom{n_1}{2} - 1 \right] - \dots - \left[ \binom{n_r}{2} - 1 \right] = \binom{n}{2} - \binom{n_1}{2} - \dots - \binom{n_r}{2} + r$$

Beispiel. Wie viele Geraden können durch sechs Punkte gelegt werden, von denen jeweils drei in einer von drei Geraden liegen ?

Lösung: Abb. 92a,  $n = 6, n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3, r = 3$ :

$$\binom{6}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} + r = 15 - 3 \cdot 3 + 3 = 9$$

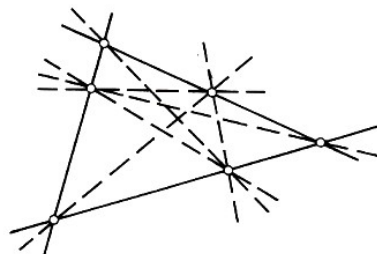
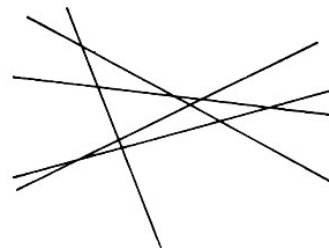


Abb. 92 a)



b)

Aufgabe 4. Wie viele Dreiecke können  $n > 3$  Geraden einer Ebene bilden ? Dabei mögen keine drei der Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei zueinander parallel sein.

Lösung:

$n$	3	4	5
Dreiecksanzahl	1	4	10

(vgl. Abb. 92b).

Unter den angegebenen Bedingungen bestimmen je drei Geraden ein Dreieck. Man formuliere das Problem, indem die geometrischen Objekte (die Geraden) als Elemente einer Menge aufgefasst werden. Es ist die Anzahl der dreielementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge herauszufinden.

Es gibt folglich  $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$  verschiedene Dreiecke.

Wir erklären uns das Resultat noch auf eine andere Weise:

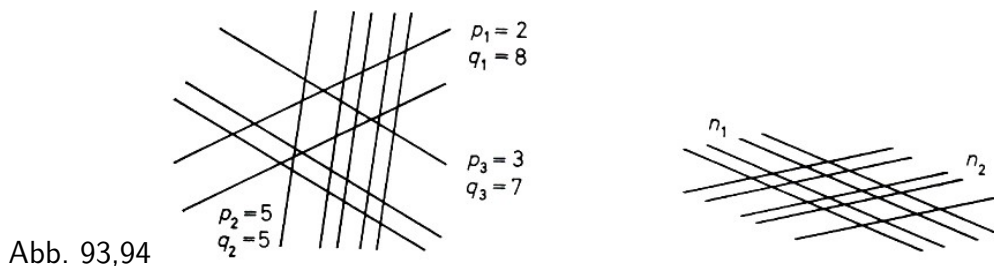
- a) Aus  $n$  gegebenen Geraden lässt sich für ein Dreieck auf  $n$  verschiedene Weisen eine Gerade auswählen.
- b) Hat man sich für eine entschieden, so bleiben für die zweite
- c) Hat man sich für die zweite Gerade entschieden, so bleiben für die dritte nur noch  $n - 2$  zur Auswahl. Insgesamt hätte man  $n(n - 1)(n - 2)$  Dreiecke erhalten.

Aber es kommt bei einem Dreieck nicht auf die Reihenfolge der Geraden an. Drei Elemente lassen sich auf  $3!$  verschiedene Arten vertauschen; damit erhält man  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  verschiedene Möglichkeiten, aus  $n$  Geraden Dreiecke zu bilden.

Aufgabe 5. Wie viele Dreiecke werden durch  $n \geq 3$  Geraden einer Ebene gebildet, wenn die in Aufgabe 4 gemachten Einschränkungen wegfallen?

Lösung: Haben wir eine ähnliche Aufgabe gelöst? Man beachte das Vorgehen in Aufgabe 3.

- a) Es mögen durch einen ersten Punkt  $n_1$ , durch einen weiteren  $n_2$  usw. bis durch einen  $r$ -ten Punkt  $n_r$  der gegebenen Geraden gehen, während kein weiterer Punkt mehr als zweien davon angehört.
- b) Außerdem mögen von den gegebenen Geraden  $p_1$  einem ersten Parallelenbüschel angehören,  $p_2$  einem zweiten, ...,  $p_s$  einem  $s$ -ten. Jedes Parallelenbüschel wird von  $q_1, \dots, q_s$  Geraden geschnitten (Abb. 93), wobei  $q_i = n - p_i$  gilt.



Die für die Aufgabe 4 ermittelte Anzahl verringert sich folgendermaßen:

$$\binom{n}{3} - \binom{n_1}{3} - \binom{n_2}{3} - \dots - \binom{n_r}{3} - \binom{p_1}{3} - \binom{p_2}{3} - \dots - \binom{p_s}{3} - \binom{p_1}{2}q_1 - \dots - \binom{p_s}{2}q_s = \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^r \binom{n_i}{3} - \sum_{j=1}^s \left[ \binom{p_j}{3} + \binom{p_j}{2}q_j \right]$$

Aufgabe 6. In einer Ebene seien  $n_1$  Geraden eines Parallelenbüschels und  $n_2$  Geraden eines zweiten Parallelenbüschels gegeben. Wie viele Parallelogramme entstehen dabei ?

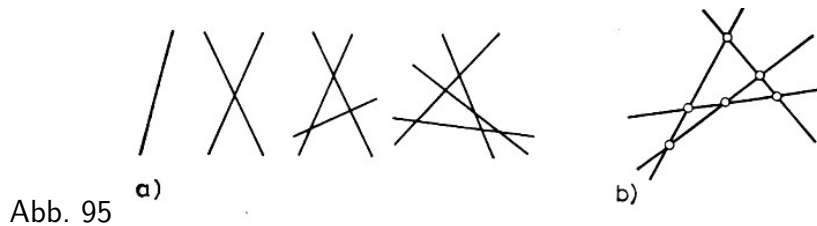
Lösung: Für ein Parallelogramm benötigen wir aus jedem Büschel zwei parallele Geraden. Die

Frage lautet jetzt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus jedem der Büschel zwei Parallelen auszuwählen?

Die Anzahl der zweielementigen Teilmengen einer  $n_1$ -elementigen ist  $\binom{n_1}{2}$ . Jedes der  $\binom{n_1}{2}$  Parallelenpaare des ersten Büschels kann mit jeweils zwei Parallelen aus dem zweiten Büschel ein Parallelogramm bilden. Es gibt folglich  $\binom{n_1}{2}\binom{n_2}{2}$  Parallelogramme (Abb. 94).

Aufgabe 7 (Zerlegungsproblem von Jacob Steiner (1796-1863), Schweizer Mathematiker). In wie viele Teile wird die Ebene durch  $n$  Geraden zerlegt, wenn keine drei der Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei der Geraden parallel sind?

1. Lösung: Die Anzahl der Ebenenteile wächst beim Hinzunehmen einer  $n$ -ten Geraden um  $n$  (Abb. 95a):



Anzahl der Geraden	1	2	3	4	...	N
Anzahl der Teile	2	2+2	2+2+3	2+2+3+4	...	2+2+3+...+n

Dabei gilt  $2 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Durch vollständige Induktion kann noch  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  bewiesen werden (vgl. auch S. 89/90), d.h.  $1 + \frac{n(n+1)}{2}$  ist die gesuchte Anzahl.

2. Lösung: Auf unserem Blatt unterscheiden wir "oben" und "unten" und setzen voraus, dass keine Gerade "horizontal" verläuft (Abb. 95b). Dann gibt es Ebenenteile mit einem "untersten" Punkt.

Da sich in einem solchen Punkt zwei der  $n$  Geraden schneiden, gibt es  $\binom{n}{2}$  unterste Punkte, zu denen ebenso viele Ebenenteile mit unterstem Punkt gehören. Außerdem gibt es "nach unten offene" Ebenenteile.

Bei einer einzigen Geraden gehören beide Teile dazu. Bei Hinzunahme einer  $k$ -ten Gerade entstehen  $k$  neue Ebenenteile, wovon  $k - 1$  Teile einen untersten Punkt haben. Folglich gibt es bei  $n$  Geraden  $n + 1$  nach unten offene Ebenenteile. Insgesamt gibt es

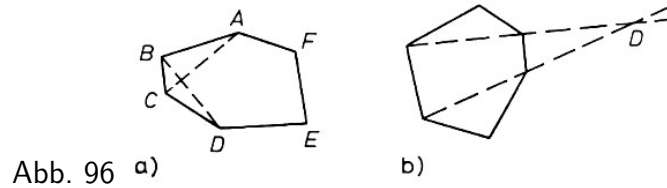
$$\binom{n}{2} + (n + 1) = \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot 2}{2} + 1 = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}$$

Ebenenteile.

Künftig wollen wir Diagonalen als Geraden auffassen.

Aufgabe 8. Wie viele Diagonalschnittpunkte gibt es im Inneren eines konvexen  $n$ -Ecks, bei dem sich nie drei Diagonalen in einem Punkt schneiden ?

Lösung: Ein Schnittpunkt im Inneren wird durch seine vier Diagonalenendpunkte festgelegt. (Beispielsweise legen die Eckpunkte  $A, C, D, B$  aus Abb. 96a den Schnittpunkt der Diagonalen  $AC$  und  $DB$  eindeutig fest.)



Da das  $n$ -Eck konvex ist, können durch je vier Ecken zwei Diagonalen stets so gelegt werden, dass sie sich im Inneren schneiden.

Zu welchem kombinatorischen Problem sind wir jetzt gekommen?

Die Ecken bilden eine  $n$ -elementige Menge, aus der zur Bestimmung eines Diagonalenschnittpunktes eine vierelementige Menge ausgewählt wird (vierelementige Kombination). Wie viele dieser Kombinationen lassen sich finden?

Es sind  $\binom{n}{4}$ , und das ist die Anzahl der Diagonalenschnittpunkte im Inneren eines konvexen  $n$ -Ecks.

Aufgabe 9. Wie viele Diagonalenschnittpunkte hat ein  $n$ -Eck in der gesamten Ebene, wenn keine zwei Diagonalen parallel zueinander sind und keine drei Diagonalen durch einen Punkt gehen ?

Lösung: Wie viele Diagonalen hat ein  $n$ -Eck ?

Nach Aufgabe 2 gibt es  $\frac{n(n-3)}{2}$  Diagonalen. Jeweils zwei Diagonalen bestimmen genau einen Schnittpunkt (Abb. 96b). Wie viele Diagonalenschnittpunkte gibt es?

Es werden die zweielementigen Teilmengen einer  $\frac{n(n-3)}{2}$ -elementigen Menge gesucht:

$$\binom{n \cdot (n-3) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} [n(n-3)] \cdot [n(n-3) - 2] = \frac{1}{8} (n^4 - 6n^3 + 7n^2 + 6n)$$

ist die Anzahl der Diagonalenschnittpunkte.

## 2.7 Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1. Wie oft kann im folgenden Buchstabenrechteck (Abb. 97a) das Wort "Kombinatorik" gelesen werden ?

Abb. 97	K	O	M	B	I	N	1	1	1	1	1	1
	O	M	B	I	N	A	1	2	3	4	5	6
	M	B	I	N	A	T	1	3	6	10	15	21
	B	I	N	A	T	O	1	4	10	20	35	56
	I	N	A	T	O	R	1	5	15	35	70	126
	N	A	T	O	R	I	1	6	21	56	126	252
	A	T	O	R	I	K	1	7	28	84	210	462

Lösung. Für jedes Feld notieren wir die Anzahl der Lesewege bis zum entsprechenden Buchstaben, wobei die offensichtliche Tatsache ausgenutzt werden kann, dass die gesuchte Zahl Summe der Anzahlen für den linken und den oberen Nachbarn ist:

	$l$
$k$	$k + l$

Diese Anzahlen wurden in Abb. 97b systematisch ermittelt; in der ersten Zeile bzw. Spalte erscheint stets eine "1". Somit kommen wir zu 462 als der gesuchten Anzahl, die bestimmt die zunächst geschätzte Zahl übertrifft.

Aufgabe 2. In einem Stadtviertel, in dem sich alle Straßen rechtwinklig treffen, gibt es meist mehrere gleichwertige kürzeste Wege von einer Stelle *A* zu einer anderen *B* (Abb. 98a). Wieviel kürzeste Wege führen von *A* nach *B*?

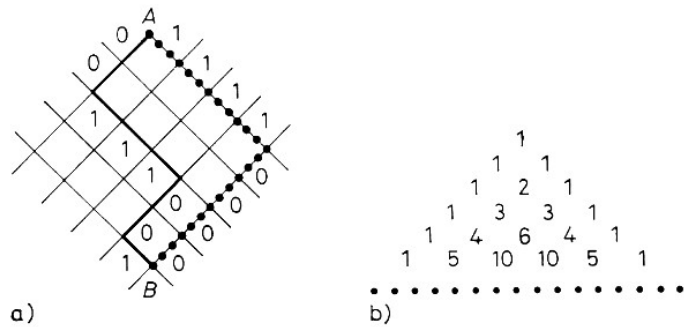


Abb. 98 a)

Lösung. Die Aufgabe ist äquivalent der vorigen; hier hat man für jede zu passierende Kreuzung die Anzahl zu notieren (Abb. 98b). Sie ergibt sich hier als Summe der "oberen Nachbarn".

Die Aufgabe lässt sich auf beliebig viele jeweils parallele Querstraßen verallgemeinern. Wie die Lösungen der Aufgaben zeigen, kann unser bisheriges Lösungsverfahren mühselig werden, wenn die Anzahlen der Querstraßen mehrstellig sind. Wir suchen deshalb eine Berechnungsformel, bei der nicht die Werte für Kreuzungen ermittelt werden müssen.

Wir geben zunächst für einen Weg einen "Code" an (vgl. Abb. 98a): "0" bedeute stets fortschreiten in der einen Richtung, "1" entsprechend in der anderen. Demzufolge sind die beiden Wege in Abb. 98a durch **00 111 001** bzw. **1111 0000** zu kennzeichnen. Allgemein wird eine zulässige Folge mit  $n = j + k$  Ziffern  $j$ -mal die 0 und  $k$ -mal die 1 enthalten. Es kommt also darauf an, die Anzahl derartiger Folgen zu ermitteln. Hätten wir  $n$  verschiedene Ziffern, so kämen die  $n!$  Permutationen als die Folgen in Frage; werden in den Permutationen  $j$  Ziffern durch 0 und  $k$  Ziffern durch 1 ersetzt, dann gibt es nur noch

$$\frac{n!}{j!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Folgen; es sind Kombinationen der  $k$ -ten Klasse.

Damit kann die bereits vorher ermittelte Zahl, die an jedem Kreuzungspunkt steht, mit einem Binomialkoeffizienten ausgedrückt werden:

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ & \dots & \binom{n}{k} & \dots & & & \end{matrix}$$

Bei den Aufgaben 1 und 2 gilt  $j = 6, k = 5$  bzw.  $j = k = 4$ , d.h., es war

$$\binom{11}{5} = 462 \quad \text{bzw.} \quad \binom{8}{4} = 70$$

zu ermitteln.

Das bei der Lösung erhaltene Schema lässt sich zu einem Dreieck vervollständigen, das in der  $n$ -ten Zeile die Binomialkoeffizienten von  $\binom{n}{0}$  bis  $\binom{n}{n}$  enthält.

Dieses Dreieck heißt Pascalsches Dreieck. Es wurde nach dem französischen Mathematiker Blaise Pascal (1623-1662) benannt, der die Binomialkoeffizienten untersuchte. Betrachtet man den Aufbau des Pascalschen Dreiecks, so erkennt man folgende Eigenschaften:

1. Das Dreieck ist symmetrisch aufgebaut: In der  $n$ -ten Zeile gilt  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Das bedeutet, die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge ist gleich der Anzahl ihrer  $(n - k)$ -elementigen Teilmengen.

2. Aus der Lösung der Aufgabe war zu erkennen, dass  $\binom{n}{k}$  durch Summenbildung ermittelt werden konnte:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

3. Die Summe der Binomialkoeffizienten in der  $n$ -ten Zeile ist  $2^n$ : Es gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

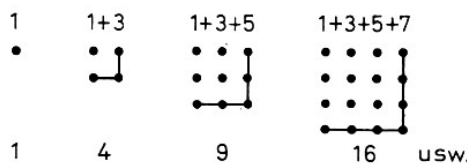
denn in der  $n$ -ten Zeile werden die Anzahlen der null-, ein-, zwei-, ...,  $n$ -elementigen Teilmengen einer Menge mit  $n$  Elementen angegeben. Ihre Summe ist die Anzahl aller Teilmengen, nämlich  $2^n$  (vgl. Aufgabe 1 von 2.2.).

## 2.8 Figurierte Zahlen

Folgende Aussagen sollen zunächst in der Ebene durch eine bestimmte Anordnung von Punkten veranschaulicht werden:

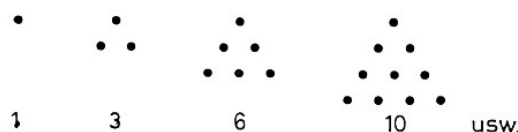
- a) Die Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen ist  $n^2$ .
- b) Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen ist  $\frac{1}{2}(n+1)n$ .

Zu a). Durch Hinzunahme der nächstfolgenden ungeraden Anzahl von Punkten erhält man folgende quadratisch aufgebaute Figurationen:



Für die ersten  $n$  ungeraden Zahlen erhält man ein Quadrat aus  $n$  mal  $n$  Punkten.

Zu b). Jede Teilsumme soll ebenfalls durch eine Figuration dargestellt werden:



Wegen der Anordnung in Dreiecken heißen diese Zahlen Dreieckszahlen.

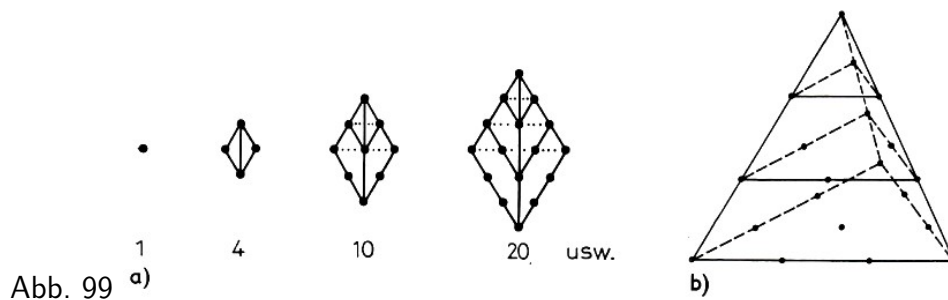


Man vervollständige das "Dreieck" zu einem "Rhombus" mit  $n^2$  Punkten, indem am Mittelpunkt einer "Seite" gespiegelt wird. Dabei wird eine "Diagonale" mit ihren  $n$  Punkten auf sich abgebildet, d. h., die gesuchte Anzahl der Punkte des Ausgangsdreiecks beträgt

$$\frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n + 1)n}{2} = \binom{n + 1}{2}$$

Die Dreieckszahlen sind folglich die Binomialkoeffizienten

$$\binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{n + 1}{2}$$



c) Auch die Binomialkoeffizienten der Form  $\binom{n}{3}$  lassen sich durch eine Figuration darstellen (Abb. 99a). Auf Grund der Anordnungsmöglichkeit auf einem Tetraeder heißen die Zahlen Tetraederzahlen. Ein anschaulicheres Bild zeigt für  $n = 6$  die Abb. 99b).

Die erfolgreiche Untersuchung von figurierten Zahlen ist uns aus den frühen Zeiten der Pythagoreer bekannt.

## Literatur

- [1] Dembowski, P., Kombinatorik, BI Mannheim 1970.
- [2] Flachsmeier, J., Kombinatorik, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- [3] Golowina, L.I., und I.M. Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [4] Sominskij, I. S., L. I. Golovina und I. M. Jaglom, Die vollständige Induktion, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Übersetzung aus dem Russischen).
- [4] Hader, H.-R., und W. Heise, Einführung in die Kombinatorik, Hanser Verlag, München-Wien 1976.
- [5] Jeger, M., Einführung in die Kombinatorik, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1972.
- [6] Lovasz, L., und K.L. Vesztergombi, J. Pelikan, Kombinatorik, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977 (Übersetzung aus dem Ungarischen).
- [7] Sominski, I.S., Die Methode der vollständigen Induktion, 13. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982 (Übersetzung aus dem Russischen); vgl. auch [3].

## Zusatzliteratur

- [8] Aigner, M., Kombinatorik, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.
- [9] Domorjad, A.P., Logisch-kombinatorische Aufgaben; Teil 1, Mathematik in der Schule 9 (1971) 12, 773- 776; Teil 2, ibid. 10 (1972) 3, 177- 180.

- [10] Gnedenko, B. W., und I. G. Shurbenko, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, *Mathematik in der Schule* 7 (1969) 3, 170- 284; 7 (1969) 4, 284- 295.
- [11] Lopovok, L. M., Logisch-kombinatorische Aufgaben, Teil 3, *Mathematik in der Schule* 10 (1972) 8/9, 49- 6505 .
- [12] Lüneburg, H., *Kombinatorik*, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart 1971.
- [13] Netto, E., *Lehrbuch der Combinatorik*, B. G. Teubner, Leipzig 1901.
- [14] Pelikan, J., *Aus der Kombinatorik*, *alpha* 10 (1976) 5, 101- 103.
- [15] Siemon, H., *Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zahlentheorie und Kombinatorik*, Klett Studienbücher, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1981.
- [16] Stowasser, R., und B. Monry, *Rekursive Verfahren der Mathematikgeschichte*, *Der Mathematikunterricht* 28 (1977) 1, 5-41.
- [17] Stowasser, R., und B. Monry, *Rekursive Verfahren. Ein problemorientierter Eingangskurs*, Schroedel, Hannover 1978.
- [18] Vilenkin, N., *Combinatorial Mathematics for Recreation*, Mir Publ., Moscow 1972.

## 3 Endliche Graphen

In diesem Kapitel erfolgt mit Hilfe zahlreicher Beispiele eine Einführung in die Theorie der endlichen Graphen. Sämtliche Teile wurden bereits mit ausgewählten Schülern der 6. Klasse im Kreisklub Potsdam erprobt.

Bis auf den letzten Abschnitt (Isomorphismus und Automorphismus), der erst in höheren Klassenstufen (etwa ab Klasse 9) behandelt werden sollte, verlief diese Erprobung recht erfolgreich. Dadurch, dass teils spielerische, teils schöpferische Elemente in die Erarbeitung einfließen, wurde das Interesse der Schüler wachgehalten. Meist konnten Lösungen selbständig gefunden werden.

Die zu führenden Untersuchungen sind teils Anzahlbestimmungen (über Knoten, Kanten, Knotengrade, Hamiltonsche Linien, Bäume, Automorphismen), teils Existenzuntersuchungen (über Eulersche und Hamiltonsche Linien, Automorphismen, Färbungen). Meist wird von realen Objekten (wie z. B. von Landkarten, geometrischen Körpern, Verkehrsnetzen, Schaltplänen, Molekülen) ausgegangen, um ihnen dann einen endlichen Graphen zuzuordnen.

Der dabei zu vollziehende Abstraktionsprozess sollte den Schülern stets deutlich gemacht werden und sie zu der Einsicht führen, dass die Mathematik ihren Ursprung in der objektiven Realität hat, ihr Gegenstand jedoch abstrakte Objekte sind, die bestimmte wesentliche Eigenschaften aufweisen.

Fast alle Abschnitte dieses Kapitels sind gegenüber den anderen relativ abgeschlossen. Nur die in 3.5. zu betrachtenden Bäume und deren Eigenschaften finden bei Färbungsproblemen in 3.6. weitere Verwendung.

Bei den Lösungen der Aufgaben über Anzahlbestimmungen steht neben der vollständigen und systematischen Fallunterscheidung das Beweisverfahren der vollständigen Induktion im Vordergrund. Bei der Lösung von Existenzproblemen sind dagegen die Schüler eingehend mit der Beweismethode des indirekten Beweises vertraut zu machen.

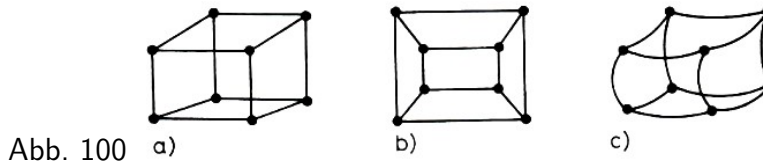
Das schöpferische Arbeiten der Schüler kann in vielen Fällen durch sinnvolles Probieren: angeregt und gefördert werden. Bei der Lösung gleichartiger Aufgaben sollte auch dem Analogieprinzip Aufmerksamkeit geschenkt werden. Inwieweit Teile von Kapitel 2 Verwendung finden, zeigt die folgende Übersicht:

- 3.2. Eulersche Graphen: 2.6. Kombinationen
- 3.4. Die Eulersche Formel: 2.2. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion
- 3.5. Bäume: 2.2. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion, 2.6. Kombinationen
- 3.6. Färbungsprobleme: 2.2. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion
- 3.7. Isomorphismus und Automorphismus: 2.3. Abbildungen

### 3.1 Begriff des endlichen Graphen

Man stelle sich das Kantenmodell eines Würfels vor. Wir nehmen an, dass der Körper anstelle der Kanten Gummibänder habe, die an den Eckpunkten miteinander verknotet sind. Auf Grund der Bauweise des Modells ist man in der Lage, das Modell zu deformieren, es sogar in die Ebene zu drücken.

Wir könnten dann etwa Abb. 100a als Bild in der Ebene erhalten. Zieht man vier Knoten geeignet auseinander, so könnte sich auch das in Abb. 100b gezeigte Bild ergeben.



Bei einer weiteren Deformation sind die Gummibänder nicht mehr gestrafft. Die Bilder der Kanten werden dann durch Bogen dargestellt (vgl. Abb. 100c).

Ähnliche Darstellungen findet man bei Schaltkreisen, in denen verschiedene Bauelemente auf unterschiedliche Weise miteinander verbunden sind, oder auch in Plänen für Telefonverbindungen und in Karten für Flugverbindungen.

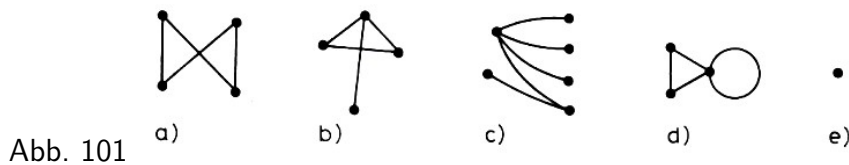
Bei all diesen Darstellungen sind folgende Eigenschaften nicht mehr entscheidend (die jedoch beim Würfel wichtig sind):

Längenbeziehungen, Winkeleigenschaften, Parallelität, Geradlinigkeit.

Erhalten geblieben sind jedoch all jene Beziehungen, die darüber Auskunft geben, welche Knoten miteinander durch Kanten verbunden sind. Es ist also eine bestimmte Menge  $P$  von Knoten gegeben, die durch Kanten, Elemente einer Menge  $K$ , miteinander verbunden sind. Damit haben wir einen Graphen  $G$  erhalten.

Wir betrachten Abb. 100 und bestimmen die Anzahl  $|P|$  der Knoten und die Anzahl  $|K|$  der Kanten sowie ihre Zuordnung. Für alle drei Graphen gilt  $|P| = 8$ ,  $|K| = 12$ , und zu jedem Knoten führen genau drei Kanten.

Weitere Beispiele enthält Abb. 101.



Welche Unterschiede bestehen in der Zuordnung der Kanten zu den Knoten in Abb. 101? In den Graphen a), b) und c) sind jeder Kante genau zwei Knoten zugeordnet. Das ist bei d) nicht der Fall. Hier tritt eine sogenannte Schlinge auf, die genau einem Knoten zugeordnet ist. Im letzten Fall ist nur ein isolierter Knoten angegeben, die Menge  $K$  der Kanten ist leer.

Wir wollen für die nächsten Untersuchungen von Graphen Schlingen und isolierte Knoten ausschließen.

Jetzt ist alles bekannt, um für den Begriff des Graphen eine Definition anzugeben.

Definition. Ein (schlingenfreier) Graph  $G$  (ohne isolierte Knoten) ist ein Tripel  $(P, K, f)$ , wobei  $P$  eine nichtleere Menge von Knoten,  $K$  eine nichtleere Menge von Kanten und  $f$  eine Abbildung ist, die jeder Kante aus  $K$  genau zwei Knoten aus  $P$  zuordnet.

Ein Graph heißt endlich, wenn die Mengen  $P$  und  $K$  endlich sind.

Wir werden uns im folgenden nur mit endlichen Graphen beschäftigen. Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind - etwa auf Grund einer vorliegenden Abbildung - werden wir Graphen kürzer mit  $(P, K)$  bezeichnen.

Die Anzahl der Kanten, die zu einem Knoten  $p$  führen, heißt Grad des Knotens und wird mit  $s$  bezeichnet.

Ist  $s_i$  der Grad von  $p_i$ , dann gilt in Abb. 102

- $G_1 : s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 4$   
 $G_2 : s_1 = s_4 = 1, s_2 = s_3 = 2$   
 $G_3 : s_1 = 2, s_2 = s_3 = s_4 = 4, s_5 = s_6 = 3$   
 $G_4 : s_1 = 4, s_2 = s_3 = 2$

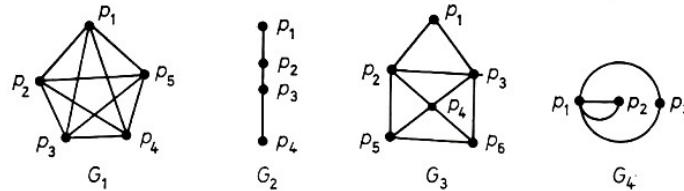


Abb. 102

Ein Graph  $G$  heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch einen Kantenzug (eine Linie) verbunden werden können, der ganz zu  $G$  gehört.

In Abb. 102 sind  $G_1$  bis  $G_4$  zusammenhängend, in Abb. 103 jedoch nur  $G_5$ .

Schließlich nennen wir einen Graphen  $G$  einfach, wenn je zwei Knoten durch höchstens eine Kante verbunden sind.  $G_1, G_2, G_3, G_5, G_6$  sind demnach einfache Graphen,  $G_4$  und  $G_7$  dagegen nicht.

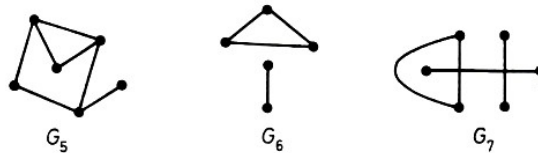


Abb. 103

Aufgabe 1. Es sind die  $k$  Kanten und  $n$  Knoten sowie die Knotengrade  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  eines Graphen  $G$  gegeben. Wie groß ist die Summe der Knotengrade von  $G$ ? (Man probiere zunächst an einem Beispiel.)

Lösung: Gesucht ist  $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=1}^n s_i$ .

Jede Kante lässt sich durch zwei Halbkanten ersetzen, von denen jede zu genau einem Knoten führt. Hat der Knoten  $p_i$  den Grad  $s_i$ , so führen zu ihm genau  $s_i$  Halbkanten. Daraus folgt, dass die Summe aller Knotengrade gleich der Anzahl der Halbkanten und deshalb gleich der doppelten Kantenzahl ist:

$$\sum_{i=1}^n s_i = 2k$$

Folgerung. Die Summe der Knotengrade ist also stets eine gerade Zahl.

Durch die nächsten Aufgaben sollen weitere Zusammenhänge zwischen den Knotengraden und der Anzahl der Knoten aufgedeckt werden.

Aufgabe 2. Gegeben ist ein Graph  $G$ , der auch Knoten ungeraden Grades hat. Ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades eine gerade oder ungerade Zahl?

Lösung: Es wird die Summe der Knotengrade von  $G$  in zwei Summen zerlegt:  $\sum_{i=1}^n s_i = S_g + S_u$ .

Dabei ist

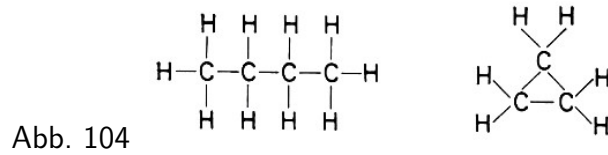
- $S_g$  die Summe der Knotengrade der Knoten mit geradem Grad,
- $S_u$  die Summe der Knotengrade der Knoten mit ungeradem Grad.

$S_g$  ist eine Summe gerader Zahlen und damit selbst eine gerade Zahl. Da  $\sum_{i=1}^n s_i$  eine gerade Zahl ist (Aufgabe 1), muss auch  $S_u$  gerade sein.  $S_u$  hat nur ungerade Summanden, deshalb

kann  $S_u$  nur gerade sein, wenn es aus einer geraden Anzahl von Summanden besteht.

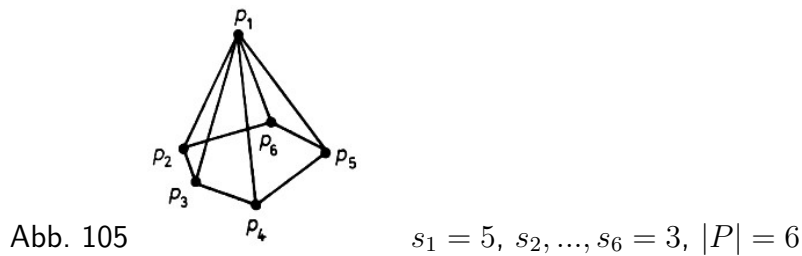
Folgerung. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist eine gerade Zahl.  
Diese Aussage lässt sich in anderen Bereichen anwenden:

1. Jedes Kohlenwasserstoffmolekül enthält geradzahlig viele Wasserstoffatome (Abb. 104).



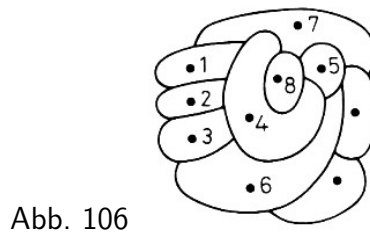
Wir betrachten das Molekül als Graphen, in dem die Atome die Knoten und die Bindungen die Kanten darstellen. Wasserstoff ist einwertig, kann also als Knoten ungeraden Grades betrachtet werden; davon gibt es stets geradzahlig viele.

2. Ein Körper, von dessen Eckpunkten eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht (vgl. Tetraeder, Dodekaeder, Ikosaeder und Abb. 105), hat geradzahlig viele Eckpunkte.

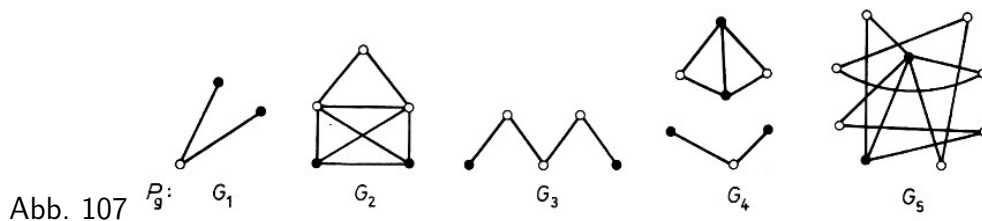


3. Die Anzahl der Menschen, die einer ungeradzahlig Anzahl von Personen (z. B. in einer Klasse, Schule usw.) die Hand geschüttelt hat, ist eine gerade Zahl.

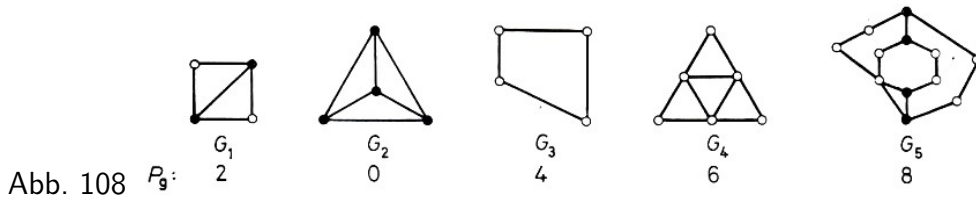
4. Die Anzahl der Länder, die eine ungerade Anzahl von Grenzen zu anderen Ländern haben, ist gerade. Denn nehmen wir die Hauptstädte als Knoten und kennzeichnen die Existenz einer gemeinsamen Grenze durch eine Kante, so haben wir einen Graphen, für den die bewiesene Aussage ebenfalls gilt. Die Anzahl der Länder mit ungeradzahlig vielen Grenzen ist in Abb. 106 gleich 8.



5. a) In Abb. 107 sind Graphen mit ungerader Knotenzahl gegeben. Man bestimme die Anzahl  $P_g$  der Knoten geraden Grades.



b) In Abb. 108 sind Graphen mit gerader Knotenzahl gegeben. Man bestimme die Anzahl der Knoten geraden Grades.



Welche Vermutung lässt sich daraus ablesen?

- a) Ein Graph  $G$  mit ungerader Knotenzahl hat stets ungeradzahlig viele Knoten geraden Grades.
  - b) Ein Graph  $G$  mit gerader Knotenzahl hat stets geradzahlig viele Knoten geraden Grades.
- Aufgabe 3. Man beweise diese beiden Aussagen.

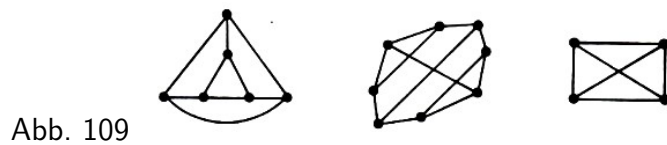
Beweis. a) Ist eine ungeradzahlige Knotenzahl gegeben, so ergibt sich die Zahl der Knoten geraden Grades aus der Differenz einer ungeraden Zahl und einer geraden Zahl (nach Aufgabe 2). Diese Zahl ist stets ungerade.

b) Ist eine gerade Anzahl von Knoten gegeben, so ist die Anzahl der Knoten geraden Grades die Differenz zweier gerader Zahlen (nach Aufgabe 2). Man erhält eine gerade Zahl.

Aufgabe 4. a) Man gebe Graphen an, bei denen jeder Knoten den Grad 3 hat.

b) Man begründe, weshalb es unmöglich ist, in einem solchen Graphen, der aus  $n$  Knoten besteht, einen Graphen mit  $n - 1$  Knoten vom Grade 3 anzugeben.

Lösung: a) Beispiele zeigt Abb. 109.

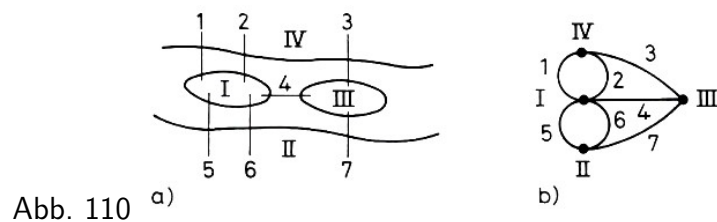


b) Solche Graphen haben geradzahlig viele Knoten (nach Aufgabe 2). Deshalb wäre  $n - 1$  eine ungerade Zahl. Ein Graph kann aber (nach Aufgabe 1) niemals eine ungerade Anzahl von Knoten mit dem Grad 3 besitzen.

### 3.2 Eulersche Graphen

Einen Anstoß zur Entwicklung der Theorie der Graphen gab 1735 der bekannte Mathematiker Leonhard Euler<sup>1</sup> in seinem "Königsberger Brückenproblem":

Die Stadt Königsberg hatte vier Stadtteile, die durch einen Fluss getrennt, aber durch sieben Brücken erreichbar waren (Abb. 110a). Diese vier Stadtteile sollen auf einer Route so durchlaufen werden, dass jede der sieben Brücken genau einmal benutzt wird.



<sup>1</sup>1707 in Basel geboren, 1785 in St. Petersburg gestorben. Er wirkte an den Akademien in Petersburg und Berlin.

Dazu müsste man im ungünstigsten Fall alle Anordnungen der Zahlen 1 bis 7, d.h.  $7! = 5040$  verschiedene Wege überprüfen. Um diesen Aufwand zu ersparen, nutzen wir die bereits erlangten Kenntnisse über Graphen.

Stellt man sich jeden Stadtteil als Knoten und jede Brücke als Kante vor, so erhält man einen Graphen, aus dem man alle weiteren Informationen entnehmen kann (Abb. 110b). Der so erhaltene Graph stellt nur die Verbindungen der einzelnen Teile dar; das ist auch das Wesentliche für die Aufgabe.

Jetzt gilt es, diesen Graphen in einem Zuge zu durchlaufen, ohne eine Kante zweimal zu benutzen. Dieses Problem können wir lösen, wenn wir Bedingungen kennen, unter welchen man in Graphen eine Linie finden kann, die sämtliche Knoten und Kanten enthält, so dass dabei jede Kante genau einmal durchlaufen wird. Eine solche Linie nennt man Eulersche Linie.

Aufgabe 1. Man untersuche als Beispiele die Graphen in Abb. 111.

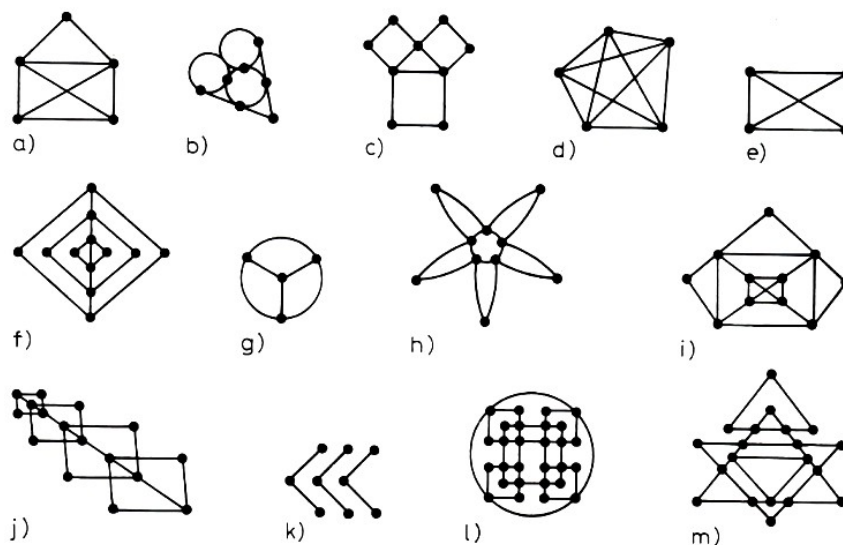


Abb. 111

Welche Graphen lassen sich in einem Zuge durchlaufen? Man betrachte bei diesen Graphen die Knotengrade. Welchen Knotengrad haben die Anfangs- und Endknoten?

Lösung: Die Graphen a) bis d), f), h), i), j), l), m) in Abb. 111 besitzen eine Eulersche Linie.

Aufgabe 2. Welche Einsichten vermitteln uns die Beispiele?

Lösung: 1. Es ist offensichtlich, dass der Graph zusammenhängend sein muss, da sonst von vornherein keine geschlossene Linie geforderter Art zu finden wäre.

2. Wollen wir einen Knoten, der weder Anfangs- noch Endknoten ist, über eine Kante erreichen, so müssen wir ihn über eine andere wieder verlassen. Gelangt man über zwei Kanten zu ihm, so muss man ihn über zwei andere wieder verlassen usw.

Das heißt, die Anzahl der Kanten eines solchen Knotens muss gerade sein, um unsere Bedingung zu erfüllen.

3. Bei einem Graphen kann die Linie dort enden, wo sie begonnen hat. Das muss aber nicht immer der Fall sein. Dann haben Anfangs- und Endknoten als einzige Knoten einen ungeraden Grad.

Es gilt sogar folgender

Satz. Ein Graph  $G$  besitzt genau dann eine Eulersche Linie, wenn



1.  $G$  zusammenhängend ist und
2.  $G$  entweder keinen Knoten ungeraden Grades oder genau zwei Knoten ungeraden Grades hat.

Ein solcher Graph  $G$  heißt Eulerscher Graph.

Kehren wir zum "Brückengraphen" zurück und wenden die erarbeiteten Kriterien an, so stellen wir fest, dass die im Satz genannte Bedingung 2 nicht erfüllt ist. Das bedeutet, dass dieser Graph keine Eulersche Linie hat und dass man deshalb die Brücken nicht genau einmal benutzen kann.

Aufgabe 3. Wie könnte eine weitere "Brücke" angelegt werden, um einen solchen Weg doch noch zu ermöglichen ?

Lösung: Es könnte eine Kante von IV nach II hinzugefügt werden, dann gäbe es genau zwei Knoten (I, III), die einen ungeraden Grad haben.

### 3.3 Hamiltonsche Linien

Aufgabe 1. In Abb. 112 ist eine Karte der Flugverbindungen von neun Städten gegeben. Ein Reisender möchte alle Städte genau einmal bereisen und dann zu seinem Ausgangsort, der Stadt 1, zurückkehren. Ist eine solche Reise möglich ? Wenn ja, ist die Anzahl der Reiserouten anzugeben.

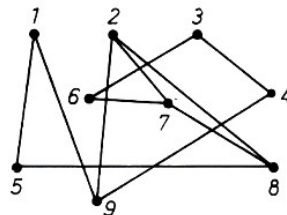


Abb. 112

Lösung: Betrachtet man diesen Plan als Graphen, so sind die Städte seine Knoten und die Flugverbindungen seine Kanten. Sollen die gestellten Bedingungen realisiert werden, dann müssen alle Kanten genutzt werden, die zu einem Knoten vom Grad 2 führen; das sind die Knoten 1, 3, 4, 5, 6.

Damit erhalten wir die Teilgraphen mit den Knoten 8, 5, 1, 9 bzw. 9, 4, 3, 6, 7.

Gehen von einem Knoten dieser Teilgraphen mehr als zwei Kanten aus, so können nur zwei davon zur Reise gehören. Damit fällt zunächst die Verbindung 92 und schließlich auch 78 heraus, damit 2 in der Reiseroute verbleibt. Wir erhalten dann einen Graphen, der alle Knoten genau einmal enthält.

Damit sind zwei Reiserouten gegeben, nämlich 1943672851 bzw. 1582763491. Weitere Reiserouten gibt es nicht, und die beiden gefundenen Reiserouten unterscheiden sich nur im Durchlaufsinne. In den graphentheoretischen Betrachtungen werden diese beiden Routen (Wege) als gleichwertig angesehen und nicht unterschieden.

Wir haben in einem Graphen  $G$  eine Linie gesucht, die jeden Knoten genau einmal enthält. Nach W. R. Hamilton (1805-1865) heißen diese Linien Hamiltonsche Linien. Sind sie geschlossen (wie in Aufgabe 1), so werden sie geschlossene Hamiltonsche Linien genannt.

Eine geschlossene Hamiltonsche Linie eines Graphen  $(P, K)$  erweist sich als Teilgraph  $(P, K')$ , für den jeder Knoten den Grad 2 hat.

Aufgabe 2. Man gebe in den Graphen der Abb. 113 eine Hamiltonsche Linie an. Für welche Graphen ist das nicht möglich?

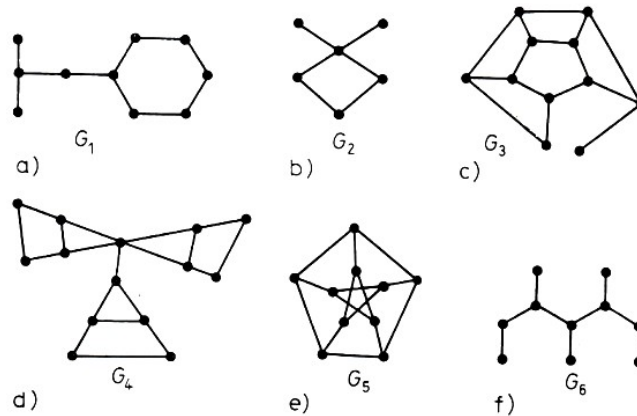
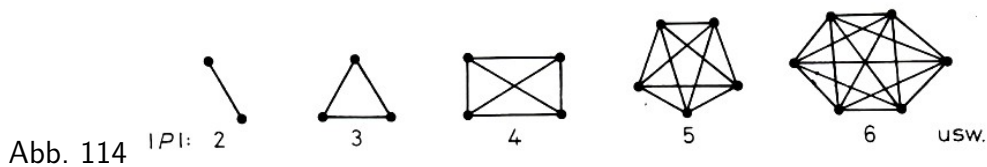


Abb. 113

Lösung: In den Graphen  $G_3$  und  $G_5$  lassen sich Hamiltonsche Linien finden, in den übrigen dagegen nicht.



Die Graphen in Abb. 114, bei denen jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden ist, haben stets eine Hamiltonsche Linie. Solche Graphen heißen vollständige Graphen.

Aufgabe 3. In Abb. 115a ist ein Eisenbahnliniennetz gegeben. Ein Reisender will auf dem Wege von A nach Z alle verzeichneten Städte genau einmal besuchen. Ist das möglich?

Lösung: Wir wollen das Netz als Graph auffassen, der 24 Knoten besitzt, und suchen eine Hamiltonsche Linie von A nach Z. Wir können leicht nachprüfen, dass sich die Knoten des Graphen so mit zwei Farben färben lassen, dass benachbarte Knoten stets verschiedene Farben haben (Abb. 115b).

Angenommen, man könnte von A nach Z alle Städte genau einmal besuchen. Der Reisende aus A müsste 23 fremde Städte besuchen, die Farbe somit auch 23mal wechseln. Das heißt aber, da 23 eine ungerade Zahl ist, dass A und Z verschieden gefärbt sein müssten. Das ist nicht der Fall.

Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass es in diesem Graphen keine Hamiltonsche Linie gibt und deshalb der Reisende die gewünschte Reise nicht durchführen kann.

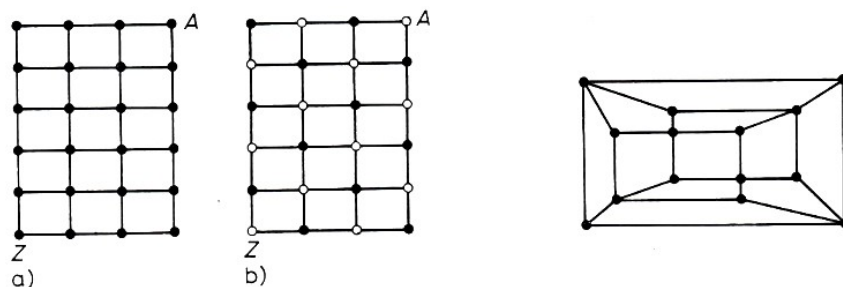


Abb. 115,116

Aufgabe 4. Ist in dem durch Abb. 116 gegebenen Eisenbahnliniennetz eine Rundreise möglich, die jede Haltestelle genau einmal enthält ?

Lösung: Wir betrachten das Eisenbahnnetz als Graphen, in dem jeder Knoten eine Haltestelle ist, und suchen im gegebenen Graphen eine Hamiltonsche Linie. Angenommen, es gäbe eine solche. Wir stellen fest, dass von zwei benachbarten Knoten stets einer den Grad 3 und der andere den Grad 4 hat.

Damit müssten sich auch in der Hamiltonschen Linie die Knotengrade 3 und 4 abwechseln. Der Graph hat aber acht Knoten mit dem Grad 3 und sechs Knoten mit dem Grad 4. Eine Abwechslung ist also nicht möglich. Mit diesem Widerspruch ist gezeigt, dass es keine Hamiltonsche Linie gibt.

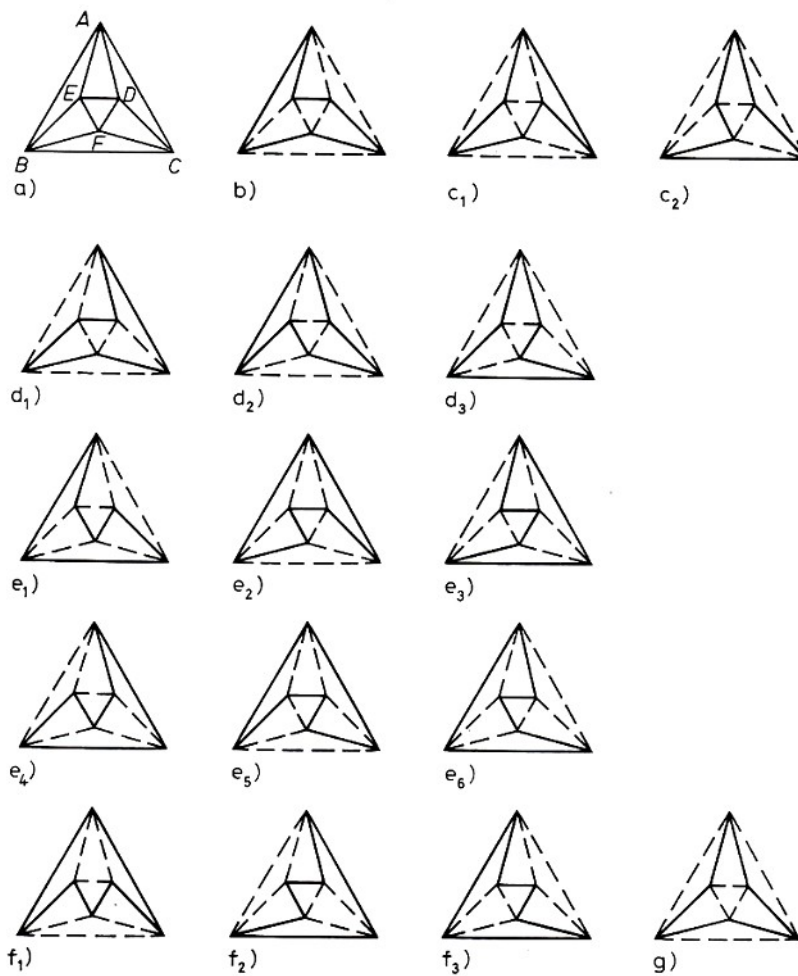


Abb. 117

Aufgabe 5. In Abb. 117a ist das Busliniennetz einer Stadt dargestellt. Jede Linie soll geschlossen sein und jede der sechs Haltestellen genau einmal enthalten. Man ermittle möglichst viele verschiedene Buslinien.

Lösung: Wir betrachten das Busliniennetz als Graphen und die Haltestellen als Knoten des Graphen.<sup>2</sup> Es kommt also darauf an, in ihm möglichst viele geschlossene Hamiltonsche Linien zu finden.

1. Man versuche, eine solche Linie zu finden (Abb. 117b).
2. Man gebe von dieser Linie ausgehend weitere an, indem diese innerhalb des Graphen gedreht wird. Warum ist das möglich? (Vgl. Abb. 117c.)

<sup>2</sup>Es sei bemerkt, dass der Graph in Abb. 117a auch als Graph eines Oktaeders aufgefasst werden kann.

3. Davon ausgehend, sind weitere Hamiltonsche Linien mit Hilfe von Spiegelungen anzugeben (Abb. 117d).
4. Man suche weitere geschlossene Hamiltonsche Linien (Abb. 117e, g) und gebe davon ausgehend durch Spiegelung und Drehung weitere voneinander verschiedene Hamiltonsche Linien an (Abb. 117e<sub>1</sub>, g).

Nachbemerkung zur Lösung. Es gibt im obigen Graphen genau 16 Hamiltonsche Linien.

Beweis. Die Lösung der Aufgabe schloss die Erzeugung neuer Linien durch Drehungen und Spiegelungen der Grundfigur ein. Es kommt hier zunächst darauf an, alle möglichen Hamiltonschen Linien bis auf Kongruenz herauszufinden.

Fall 1. Zwei der Kanten  $AB, BC, CA$  gehören zur Hamiltonschen Linie. Wir dürfen nach der Vorbemerkung  $ABC$  als Anfang voraussetzen.

- a) Fortsetzung mit  $CD$ . Hier kann nur zu  $ABCDFEA$  (Abb. 117e<sub>1</sub>) ergänzt werden.
- b) Fortsetzung mit  $OF$ . Die Ergänzung kann nur  $ABCFDEA$  (Abb. 117f<sub>3</sub>) oder  $ABCFEDA$  (Abb. 117e<sub>6</sub>) lauten.

Fall 2. Zur Hamiltonschen Linie gehört genau eine der Kanten  $AB, BC, CA$ , etwa  $AB$ .

- a) Fortsetzung  $BE$ . Hier ist nur  $ABEFCDA$  (Abb. 117d<sub>2</sub>) möglich.
- b) Fortsetzung  $BF$ . Es gibt nur die Ergänzung  $ABFCDEA$  (Abb. 117b).

Fall 3. Keine der Kanten  $AB, BC, CA$  gehört zur Hamiltonschen Linie, so dass sie nur  $ADCFBEA$  (Abb. 117g) sein kann.

Alle übrigen Hamiltonschen Linien gehen aus den ermittelten durch Drehung oder Spiegelung hervor. Da die Hamiltonschen Linien unserer Fallunterscheidung in Abb. 117 enthalten sind, lässt sich keine weitere finden; d. h., Abb. 117 enthält bereits die 16 möglichen Hamiltonschen Linien.

Aufgabe 6. Es liegt eine Übersicht eines Gebäudes mit 20 Räumen vor (Abb. 118a). Ist ein Rundgang, bei dem alle Räume genau einmal besucht werden, möglich?

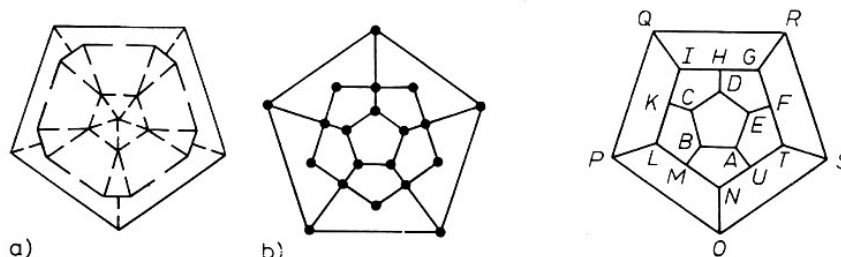


Abb. 118, 119 a)

b)

c)

Lösung: Um diese Aufgabe zu lösen, schaffen wir uns einen zugehörigen Graphen. Er soll so beschaffen sein, dass seine Knoten die 20 Räume darstellen und seine Kanten die Verbindungsmöglichkeiten durch eine Tür. Dann erhalten wir den Graphen der Abb. 118b.

In diesem Graphen gibt es keine Hamiltonsche Linie, da im mittleren "Kreis" nur jeder zweite Knoten mit dem inneren "Kreis" durch eine Kante verbunden ist. Ein Knoten vom Grad 2 wird deshalb nicht oder mehr als einmal erfasst.

Aufgabe 7. a) Gegeben sei ein Dodekaeder. Kann man entlang seiner Kanten eine "Rundreise" machen, so dass alle seine Ecken genau einmal besucht werden? (Hamilton, 1859)

Lösung: Wir projizieren das Dodekaeder geeignet in die Ebene (Abb. 119) und erhalten einen Graphen, bei dem jeder Eckpunkt einen Knoten und jede Kante des Körpers eine Kante des

Graphen darstellt. Formuliert man die Aufgabe um, so sind in diesem Graphen geschlossene Hamiltonsche Linien gesucht.

$ABCDEFGHIJKLMNQRSTUA$  ist eine geschlossene Hamiltonsche Linie.

b) Man gebe weitere geschlossene Hamiltonsche Linien an, die mit  $AB$  beginnen und mit  $UA$  enden. Lösungsbeispiele sind:

$ABMLPQRGHIKCFDEFTSONUA$ ,  $ABCKIHDEFGRQPLMNOSTUA$ ,  
 $ABCDEFTSOPQRGHIKLMNUA$

c) Wie können aus diesen Hamiltonschen Linien weitere gewonnen werden, die mit  $AE$  beginnen und wieder mit  $UA$  enden?

Lösung: Durch Spiegelung an  $AU$  geht z. B. die unter a) genannte Linie in  $AEDCBMLKIHGFSTRQPONUA$  über.

Es soll nun ein Verfahren erläutert werden, wie man Hamiltonsche Linien auffinden kann, wenn der Graph solche überhaupt enthält. Dazu soll das folgende Beispiel dienen:

Gegeben sei der Graph  $(P, K)$ , in dem man zwei Teilgraphen  $(P_1, K_1)$  und  $(P_2, K_2)$  angeben kann, die in sich geschlossen und nicht verbunden sind sowie alle Knoten von  $P$  enthalten (Abb. 120a).

Indem wir aus  $K_1 \cup K_2$  die Kanten  $AD$  und  $EF$  entfernen und die Kanten  $AF$  und  $DE$  hinzunehmen, erhalten wir eine Hamiltonsche Linie (Abb. 120b).

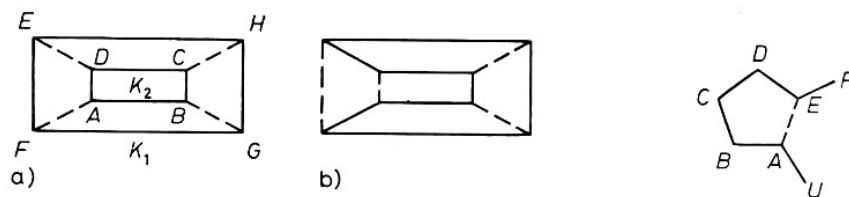


Abb. 120, 121

Aufgabe 8. Es ist mit Hilfe dieses Verfahrens eine Hamiltonsche Linie im Dodekaeder anzugeben.

Lösung: Wir betrachten die geschlossenen Linien

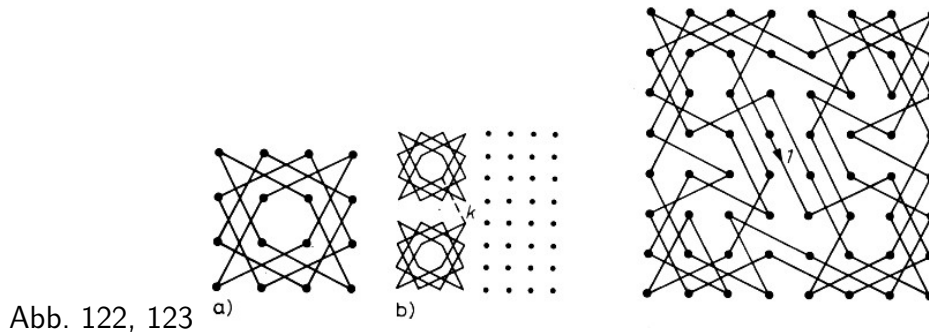
$K_1 : ABCDEA$ ,  $K_2 : FGHIKLMNUTF$ ,  $K_3 : OPQRSO$ .

Damit kann das beschriebene Verfahren angewendet werden. Beispielsweise ließen sich die Kante  $AE$  aus  $K_1$ , und  $FT$  aus  $K_2$  entfernen und die Verbindungen  $EF$  und  $AU$  schaffen (Abb. 121). Es können nun  $OS$  und  $NU$  entfernt und  $NO$ ,  $ST$  hinzugenommen werden. Damit haben wir eine Hamiltonsche Linie erhalten.

Aufgabe 9. a) Auf einem "Schachbrett" mit  $4 \times 4$  Feldern operiert ein Springer. Es sind vier Folgen von je vier Zügen, die in sich geschlossen sind, derart anzugeben, dass dabei alle 16 Felder erreicht werden.

Lösung: Die vier Folgen bilden einen Graphen  $G$  (Abb. 122a) mit  $|P| = 16$  (Anzahl der Felder) und  $|K| = 16$  (Anzahl der Züge), der in vier Teilgraphen  $G_i$  mit  $|P_i| = |K_i| = 4$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) zerfällt, die nicht miteinander verbunden sind.

b) Man finde auf einem Schachbrett eine Folge von Springerzügen, bei der auf jedes der 64 Felder genau einmal gesetzt wird (L. Euler).



Lösung: Das "Schachbrett" aus a) wird nun verwendet, um eines aus  $8 \times 8$  Feldern zusammenzusetzen (Abb. 122b). Wir haben damit einen Graphen erhalten, der aus 16 Teilgraphen besteht, die alle in sich geschlossen und nicht miteinander verbunden sind. Alle 64 Felder werden genau einmal benutzt, und jeder Knoten ist vom Grad 2. Es sind demnach alle Voraussetzungen für das oben genannte Verfahren gegeben, eine Hamiltonsche Linie zu finden. Jeder Teilgraph muss mit einem anderen durch Kanten verbunden werden, die erlaubte Züge eines Springers darstellen (z. B. die Kante  $k$  in Abb. 122b).

Durch geeignetes Verbinden und Weglassen der Kanten erhält man den Graphen in Abb. 123.

Es soll noch folgendes vermerkt werden: Wenn man die Züge - wie im Graphen angedeutet - der Reihe nach mit 1, 2, ..., 64 nummeriert, erhält man die quadratische Anordnung dieser Zahlen in acht Zeilen und acht Spalten, so dass alle Zeilensummen und alle Spaltensummen gleich sind. Hier beträgt die Summe 260 (Jaenisch, 1862).

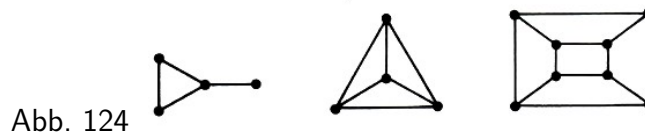
Ein allgemeines Kriterium (mit einer hinreichenden und notwendigen Bedingung) für die Existenz von Hamiltonschen Linien hat man noch nicht gefunden.

Aufgabe 10. Es ist zu untersuchen, ob man mit einem Springer alle  $7 \cdot 7 = 49$  Felder eines "Schachbretts" durchlaufen kann, so dass auf jedes Feld genau einmal gesetzt wird und der letzte Zug auf einem dem Ausgangsfeld benachbarten Feld endet.

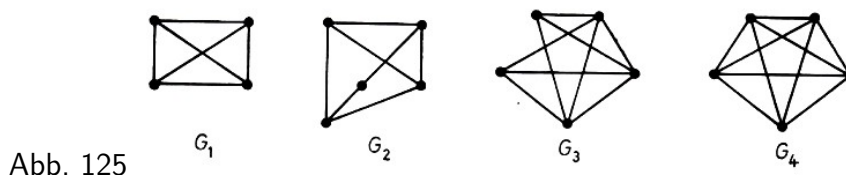
Lösung: Die Felder des Brettes können abwechselnd mit zwei Farben gefärbt werden. Bei jedem Zug des Springers wechselt die Farbe des Feldes. Da 48 Züge auszuführen sind, müssen das erste und 49. Feld die gleiche Farbe haben. Das ist für benachbarte Felder nicht der Fall, d. h., dass die gestellten Forderungen nicht erfüllt werden können.

### 3.4 Die Eulersche Formel

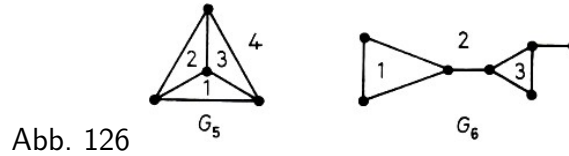
Ein einfacher, zusammenhängender Graph  $G$  heißt planar, wenn er in der Ebene so dargestellt werden kann, dass sich keine Kanten schneiden (Abb. 124).



Aufgabe 1. Man stelle die Graphen in Abb. 125 so dar, dass die Eigenschaft, planar zu sein, erkennbar wird.



Bemerkung.  $G_1, G_2, G_3$  sind planare Graphen.  $G_4$  lässt sich in der Ebene nicht so darstellen, dass zwei Kanten einander nicht schneiden. Der Beweis erfolgt nach weiteren Betrachtungen in Aufgabe 3. Da sich Kanten eines planaren Graphen nicht schneiden, wird die gesamte Ebene in Teile zerlegt, die wir Flächen nennen (Abb. 126). Unter  $|F|$  verstehen wir die Anzahl der Flächen.



Der Graph  $G_5$  teilt die Ebene in vier Flächen. Der Graph  $G_6$  teilt die Ebene in drei Flächen. Stets ist eine der Flächen unbegrenzt.

Aufgabe 2. a) Man erfasse  $|P|$ ,  $|F|$  und  $|K|$  für die planaren Graphen  $G_i$  in Abb. 125 und 126 in einer Tabelle.

b) Welcher Zusammenhang von  $|P|$ ,  $|F|$  und  $|X|$  ist zu vermuten?

Lösung:

Graph	$ P $	$ F $	$ K $
$G_1$	4	4	6
$G_2$	5	4	7
$G_3$	5	6	9
$G_4$	4	4	6
$G_5$	7	3	8
Vermutung:	$ P  +  F  =  K  + 2$		

Diese Aussage soll nun mit Hilfe der Beweismethode der vollständigen Induktion bewiesen werden. Dazu werden vorher noch folgende Vereinbarungen getroffen:  $|P| = e$ ,  $|K| = k$ ,  $|F| = f$ .

Satz. Für planare Graphen gilt  $e + f = k + 2$ .

Beweis. 1. Ist  $k = 1$ , so gilt  $f = 1$  und  $e = 2$ . Die Formel  $e + f = k + 2$  ist für diesen Fall richtig.

2. Es wird nun vorausgesetzt, dass die Formel für beliebige Graphen mit  $n$  Kanten gilt:  $e' + f' = n + 2$ . Es soll gezeigt werden, dass sie auch für einen Graphen mit  $n + 1$  Kanten gilt, der  $f$  Flächen und  $e$  Knoten aufweist:  $e + f = (n + 1) + 2$ .

Man unterscheide dabei zwei Fälle:

a) In einem Graphen  $G$  mit  $n+1$  Kanten existiert zwischen je zwei Knoten genau ein Kantenzug (vgl. Abb. 127a). Dann gibt es aber keinen in sich geschlossenen Kantenzug, d. h., es gilt  $f = 1$ . Da nur endlich viele Knoten gegeben sind, gelangt man stets von einem beliebigen Knoten zu einem äußeren Knoten. Entfernt man einen äußeren Knoten zusammen mit der dazugehörigen Kante, so erhalten wir einen neuen Graphen  $G'$  mit  $e' = e - 1$  Knoten und  $n$  Kanten, der zusammenhängend bleibt.

Für den Graphen  $G'$  gilt nach Voraussetzung  $e' + f' = n + 2$ . Danach erhält man  $e - 1 + f = n + 2$  und damit  $e + f = (n + 1) + 2$ .

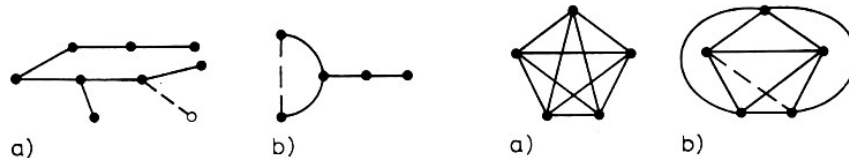


Abb. 127,128 a)

b) Der Graph  $G$  mit  $n + 1$  Kanten hat zwei Knoten, die durch mindestens zwei Kantenzüge verbunden sind, d.h., durch diese Knoten existiert ein in sich geschlossener Kantenzug (vgl. Abb. 127b).

Entfernt man aus diesem Kantenzug eine Kante, so erhält man einen neuen Graphen  $G'$  mit  $e' = e$ ,  $k' = n + 1 - 1$  und  $f' = f - 1$ , der zusammenhängend bleibt. Nach Voraussetzung gilt für diesen Graphen mit  $n$  Kanten  $e' + f' = n + 2$ .

Daraus erhält man  $e + f - 1 = n + 2$  und somit  $e + f = (n + 1) + 2$ . Damit haben wir die Eulersche Formel  $e + f = k + 2$  bewiesen.

Diese Formel, die schon R. Descartes (1596-1650) als Polyederformel bekannt war, soll uns bei der Lösung der nächsten Aufgaben helfen.

Aufgabe 3. Es ist zu beweisen, dass ein vollständiges Fünfeck (Abb. 128) nicht planar ist.

Beweis. a) Angenommen, der Graph des vollständigen Fünfecks wäre planar. Dann würde für ihn die Eulersche Formel gelten, d.h.  $5 + f = 10 + 2$  bzw.  $f = 7$ . Jede dieser Flächen muss von mindestens drei Kanten begrenzt sein. Deshalb müsste  $k > \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5$  ( $> 10$ ) gelten. Da nur zehn Kanten vorhanden sind, ist das ein Widerspruch. Damit haben wir den Beweis erbracht.

Aufgabe 4. Ist der Graph in Abb. 129a planar?

Lösung: Für diesen Graphen gilt  $e = 6$ ,  $k = 9$ . Wäre der Graph planar, so gälte nach der Eulerschen Formel  $f = 5$ . Jede Fläche hätte in diesem Graphen wenigstens vier Kanten. Ein Beispiel dafür ist in Abb. 129b angegeben. Deshalb müsste  $a = 10$  gelten. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Dieser Graph ist nicht planar.

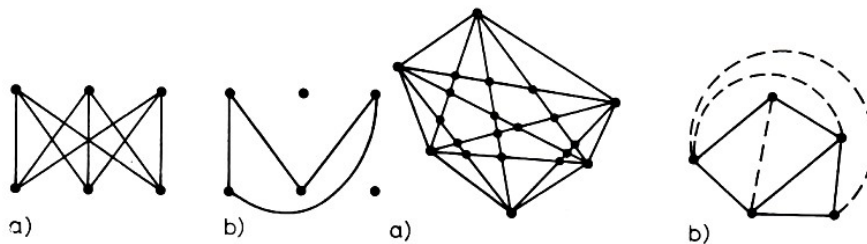


Abb. 129,130 a)

Aufgabe 5. In wie viele Ebenenteile wird ein konvexes  $n$ -Eck durch seine Diagonalen geteilt? Dabei sollen niemals drei Diagonalen durch einen Punkt gehen (Abb. 130a).

Lösung: Arbeiten wir mit den Begriffen der Graphentheorie, so stellt das  $n$ -Eck mit seinen Seiten, Diagonalenabschnitten, Eckpunkten und Diagonalschnittpunkten einen Graphen dar. Ein solcher Graph ist planar (vgl. Abb. 130b). Da nur das Innere des  $n$ -Ecks von Interesse ist, wird  $f - 1$  gesucht. Die Anzahl der Knoten ist  $e = n + \binom{n}{4}$ , nämlich gleich der Anzahl der Eckpunkte und der Schnittpunkte der Diagonalen (vgl. Aufgabe 8 in 2.6.).

Von jeder Ecke des  $n$ -Ecks gehen  $n - 1$  und von jedem Schnittpunkt der Diagonalen vier Kanten aus; dabei wurde aber jede Kante doppelt gezählt, d.h.

$$k = \frac{1}{2} \left[ n(n - 1) + \binom{n}{4} \cdot 4 \right] = \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{4}$$



Für diesen planaren Graphen gilt  $e + f = k + 2$ . Somit ist

$$f - 1 = -e + k + 1 = -n - \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} - 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - n + 1$$

die Anzahl der Ebenenteile, die durch die Diagonalen im Inneren eines konvexen  $n$ -Ecks entstehen.

Aufgabe 6. Wie viele Kanten kann ein planarer Graph mit  $e$  Knoten höchstens besitzen?

Lösung: Wir gehen von einem planaren Graphen mit  $e$  Knoten aus. Es lässt sich ein planarer Graph mit einer größeren Anzahl von Kanten finden, solange eine Fläche mehr als drei Kanten besitzt.

Wir gehen nun zu einem neuen planaren Graphen mit denselben Knoten über, der die alten Kanten und neue Kanten derart besitzt, dass jede Fläche genau drei Kanten hat (Abb. 130b); für ihn gilt  $e' = e$  und  $k' = \frac{3f'}{2}$  bzw.  $f' = \frac{2k'}{3}$ . Nach der Eulerschen Formel ist  $e + \frac{2k'}{3} = k' + 2$  und folglich  $k \leq k' = 3(e - 2)$ .

Aufgabe 7. Gibt es planare Graphen, deren Knotengrade alle größer als 5 sind ?

Lösung: Angenommen, es gäbe einen planaren Graphen, von dessen Knoten keiner einen Grad kleiner als 6 hat. Dann gilt (vgl. Aufgabe 1 in 3.1.)

$$2k = \sum_{i_1}^e s_i \geq 6e$$

Aus Aufgabe 6 ist  $k \leq 3e - 6$  bekannt. Damit folgt

$$2k \geq 6e \geq 2k + 12$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass ein planarer Graph mindestens einen Knoten vom Grad kleiner 6 besitzen muss.

Aufgabe 8. Welche Beziehung besteht zwischen der Anzahl  $e$  der Ecken,  $k$  der Kanten und  $f$  der Flächen eines Tetraeders, Hexaeders, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders ?

Lösung:

	$e$	$k$	$f$
Tetraeder	4	6	4
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

Für diese Körper gilt ebenfalls die Eulersche Formel. Wo liegt der Grund dafür? Übertragen wir die Begriffe der Graphentheorie auch auf konvexe Polyeder, so kann man folgende Überlegungen anstellen.

Wir blasen einen Körper auf - indem wir uns vorstellen, er wäre aus Gummi -, so dass aus ihm eine Kugel wird. Auf dieser Kugel wählen wir außerhalb der Kanten einen Punkt und ziehen von dort aus den Gummiball solange auseinander, bis man ihn in die Ebene ausbreiten kann. Haben wir die Kanten auf dem Gummi markiert, so können wir nun in der Ebene einen Graphen betrachten. Die Flächen sind dann auch die Flächen aus der Graphentheorie, die Ecken sind

Knoten und die Kanten des Körpers sind zu Kanten des Graphen geworden. Dieser Graph ist planar, also gilt für ihn die Eulersche Formel.

In Aufgabe 8 haben wir die sogenannten platonischen Körper betrachtet.

Für sie gibt es natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ , so dass

1. der Grad jedes Knotens gleich  $m$  und
2. die Anzahl der Kanten jeder Fläche gleich  $n$  ist.

Aufgabe 9. Man ermittle für die platonischen Körper die Zahlen  $m$  und  $n$ .

Lösung:

	$m$	$n$
Tetraeder	3	3
Würfel	3	4
Oktaeder	4	3
Dodekaeder	3	5
Ikosaeder	5	3

Aufgabe 10. Man betrachte die Angaben aus Aufgabe 8 und 9. Welche Beziehungen zwischen  $m$ ,  $n$  und  $k$ ,  $e$ ,  $f$  lassen sich erkennen?

Lösung:  $2k = em = fn$ .

Aufgabe 11. Kann es außer den platonischen Körpern noch weitere regelmäßige Polyeder mit den Eigenschaften 1 und 2 geben?

Lösung: Da  $m > 3$  und nach Aufgabe 7 auch  $m < 6$  gelten muss, haben wir nur die Fälle  $m = 3, 4, 5$  zu betrachten.

$m = 3$ : Hier kommt für  $n$  nur 3 (Tetraeder), 4 (Würfel) und 5 (Dodekaeder) in Frage. Es scheiden alle  $n > 6$  aus, da dann die Größe  $\alpha_n$  der Innenwinkel dieser regelmäßigen  $n$ -Ecke  $\geq 120^\circ$  ist und bereits drei dieser  $n$ -Ecke wegen  $3 \cdot \alpha_n \geq 360^\circ$  keine körperliche Ecke mehr bilden können.

$m = 4$ : Hier kommt nur  $n = 3$  (Oktaeder) in Frage, denn schon vier Quadrate bilden wegen  $m \cdot \alpha_n = 4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$  keine körperliche Ecke mehr.

$m = 5$ : Auch hier scheidet bereits  $n = 4$  aus, weil  $m \cdot \alpha_n = 5 \cdot 90^\circ > 360^\circ$  ist.

Aufgabe 12. Gibt es ein konvexes Polyeder, das sieben Kanten hat ?

Lösung: Der Körper lässt sich als planarer Graph darstellen, für den  $k + 2 = 7 + 2 = 9 = e + f$  gilt. Welche Fälle ergeben sich daraus für  $e$  und  $f$  (vgl. Abb. 131)?

Fall 1.  $e = 6$ ,  $f = 3$ . Es gibt kein Polyeder mit drei Flächen.

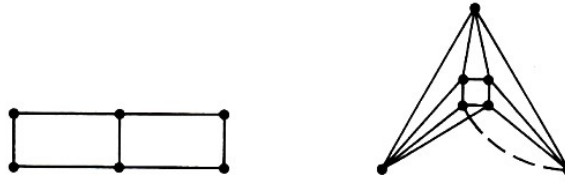
Fall 2.  $e = 5$ ,  $f = 4$ . Ein Körper mit vier Flächen ist ein Tetraeder das aber vier Eckpunkte besitzt.

Fall 3.  $e = 4$ ,  $f = 5$ . Das Tetraeder mit vier Eckpunkten besitzt aber vier Flächen.

Weitere Fälle sind nicht möglich, da drei Eckpunkte höchstens eine Ebene aufspannen können. Es gibt also keinen Körper mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 13. Gibt es ein konvexes Polyeder mit sieben Eckpunkten, von denen jeweils vier Kanten ausgehen?

Abb. 131,132



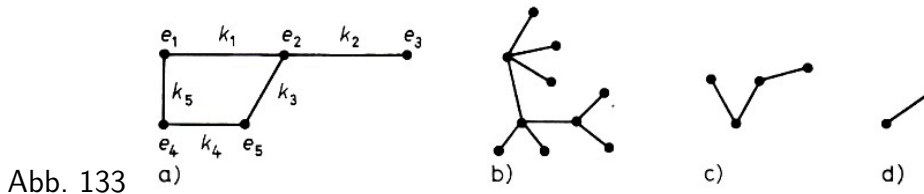
Lösung: Angenommen, es gäbe einen solchen Körper. Wie viele Kanten hätte er?  
 Wegen  $s_1 + \dots + s_7 = 28 = 2k$ , d.h.  $k = 14$ , wäre nach dem Eulerschen Satz  $f = k + 2 - e = 9$ .  
 Als Körperflächen kommen nur ein Viereck und acht Dreiecke in Frage. Man überprüfe, ob es einen planaren Graphen mit drei "Dreiecken" und einem "Viereck" gibt, bei dem jeder Knoten vom Grad 4 ist. Diese Forderungen können nicht erfüllt werden, weil dabei stets ein nicht planarer Graph entsteht (vgl. Abb. 132).

### 3.5 Bäume

Wir betrachten einen beliebigen Graphen, z. B. den, der in der Abb. 133a angegeben ist. Im Graphen betrachten wir den Kantenzug  $(e_1, k_1, e_2, k_2, e_3)$ .  
 Kommt keine Kante doppelt vor, so heißt dieser zusammenhängende Teil des Graphen Kette. Gilt  $e_1 \neq e_{n+1}$  für eine Kette  $(e_1, k_1, \dots, e_n, k_n, e_{n+1})$  mit dem Anfangsknoten  $e_1$  und dem Endknoten  $e_{n+1}$ , dann heißt die Kette offen. Gilt  $e_1 = e_{n+1}$ , dann heißt die Kette geschlossen bzw. ein Kreis.

Aufgabe 1. Man gebe im Graphen  $G$  in Abb. 133a eine geschlossene Kette an.

Lösung:  $(e_1, k_1, e_2, k_3, e_5, k_4, e_4, k_5, e_1)$  ist eine geschlossene Kette in  $G$ .  
 Die Anzahl der Kanten einer Kette gibt ihre Länge an. Die geschlossene Kette in Abb. 133a hat die Länge 4.



Es sollen nun Graphen betrachtet werden, die keine geschlossenen Ketten besitzen.

Beispiele. a) Vgl. Abb. 133b-d.

b) Stammbaum aus der Schweizer Mathematikerfamilie Bernoulli (Abb. 134).

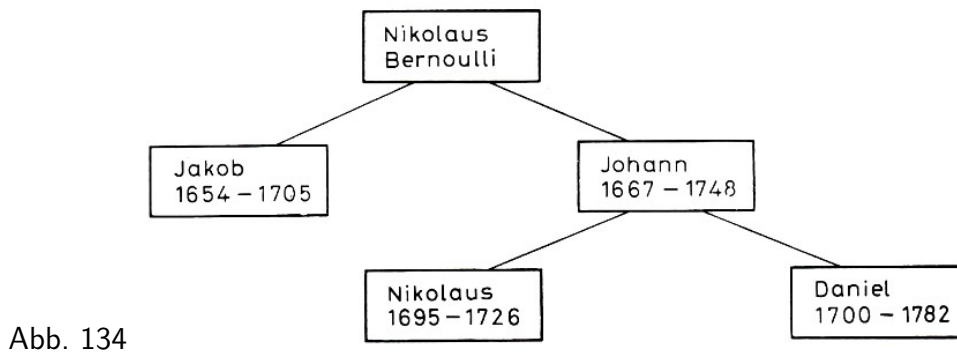


Abb. 134

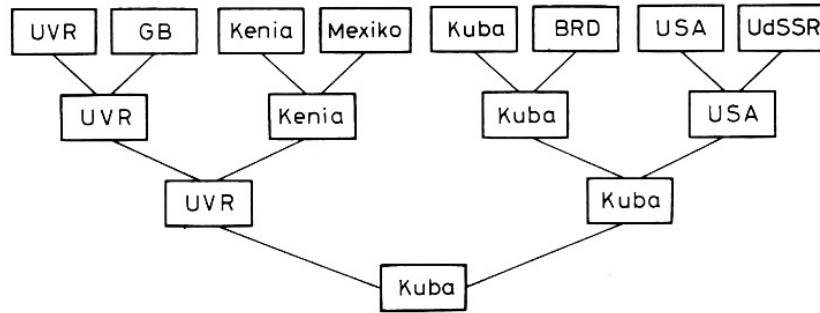


Abb. 135

- c) "K.O.-System" beim Boxturnier der Olympischen Spiele 1972 im Weltergewicht (Abb. 135).  
 d) Wie viele Teilmengen  $M$  hat die Menge  $\{1, 2, 3\}$ ? (Vgl. Abschnitt 2.2.)

Für ein Element  $x$  aus der gegebenen Menge gibt es auf die Frage  $x \in M$  nur zwei Antworten: ja oder nein (Abb. 136).

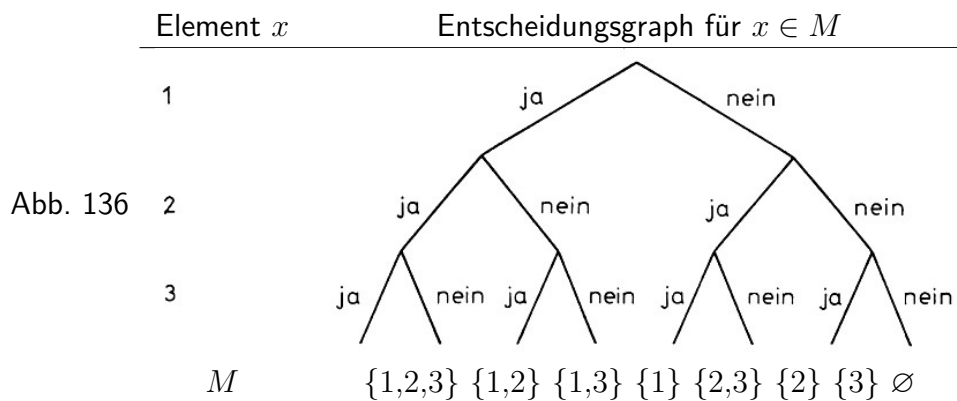


Abb. 136

Man sieht, dass sich die Anzahl der Teilmengen verdoppelt, wenn ein weiteres Element hinzugenommen wird. Folglich hat eine  $n$ -elementige Menge  $2^n$  Teilmengen.

Ein zusammenhängender Graph  $G$  heißt Baum, wenn er keine geschlossenen Ketten enthält. Es sollen nun die Eigenschaften eines Baumes näher untersucht werden. An den zuvor angegebenen Beispielen lässt sich ablesen:

Eigenschaft 1.: Ein Baum besitzt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.

Aufgabe 2. Wie lässt sich die Anzahl der Kanten eines Baumes aus der Anzahl der Knoten bestimmen?

- a) Man stelle dazu eine Vermutung mit Hilfe der gegebenen Beispiele auf.  
 b) Man beweise die Vermutung durch vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten.

Lösung: a)

Abb.	$ K $	$ P $	Bemerkung
133b	9	10	$9 = 10 - 1$
133c	3	4	$3 = 4 - 1$
133d	1	2	$1 = 2 - 1$
134	4	5	$4 = 5 - 1$
135	14	15	$14 = 15 - 1$

Vermutung:  $|K| = |P| - 1$ .

b) Beweis durch vollständige Induktion. Ist  $|K| = 1$ , so hat diese eine Kante zwei Knoten, und es gilt  $|K| = 1 = 2 - 1 = |P| - 1$ .

Vorausgesetzt wird nun: Für  $|X| = n$  gilt  $|K| = |P| - 1$ . Es ist zu zeigen, dass diese Beziehung auch für  $n + 1$  Kanten gilt.

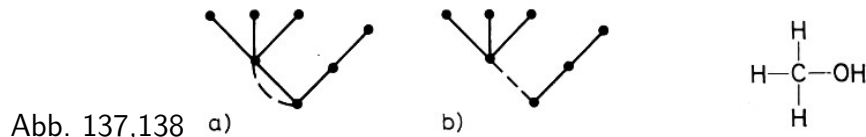
Gegeben sei ein Baum  $B_1$  mit  $n + 1$  Kanten. Wegen der Eigenschaft 1 können wir in  $B_1$ , einen Knoten  $x$  vom Grad 1 angeben. Entfernen wir  $x$  und die zu  $x$  gehörige Kante aus  $B_1$ , so erhalten wir einen neuen Graphen  $B_2$ , der zusammenhängend bleibt. Da  $B_2$  keine geschlossene Kette enthalten kann, ist  $B_2$  ein Baum mit  $n$  Kanten, für den  $|K_2| = |P_2| - 1$  gilt.

Wegen  $|P_1| = |P_2| + 1$  und  $|K_1| = |K_2| + 1$  folgt  $|K_1| = |K_2| + 1 \implies |P_1| = |P_2| - 1$  für einen Baum  $B_1$  mit  $n + 1$  Kanten.

Eigenschaft 2.: Für Bäume gilt  $|K| = |P| - 1$ .

Aus dieser Eigenschaft folgt unmittelbar:

- Fügt man zu einem Baum eine neue Kante hinzu und verändert die Knotenanzahl nicht, dann enthält der neue Graph eine geschlossene Kette (Abb. 137a).
- Entfernt man aus einem Baum eine Kante und verändert die Knotenzahl nicht, dann ist der neue Graph nicht mehr zusammenhängend (Abb. 137b).



Für die nächsten Betrachtungen wollen wir uns ein interessantes Beispiel auswählen. Das Beispiel stammt aus der Geschichte der chemischen Erforschung der Alkohole und demonstriert die enge Verflechtung mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschung.

Bei der Betrachtung der Strukturformel der Alkohole  $C_nH_{2n+1}OH$  stellt man fest, dass diese einen Baum darstellt (Knoten: Atome, Kanten: Bindungen), z. B.  $CH_3OH$  (Abb. 138).

A. Cayley (1821-1895) wusste bereits 1874 auf Grund mathematischer Überlegungen, dass es acht Alkohole mit der Formel  $C_5H_{11}OH$  gibt. Es waren jedoch nur zwei bekannt.

Später, im Jahre 1901, sagte auch der deutsche Mathematiker Ahrens die Existenz der acht verschiedenen Alkohole voraus. Damals waren schon sieben davon bekannt. Die neuen Chemiebücher zeigen alle acht Alkohole der Zusammensetzung  $C_5H_{11}OH$ .

Man gebe alle acht verschiedenen Bäume durch die Strukturformel an. Dabei sollen Bäume "gleicher Bauart" (vgl. Abschnitt 3.7 über Isomorphie) als nicht (wesentlich) verschieden voneinander angesehen werden.

Isomere des Pentanols zeigt Abb. 139.

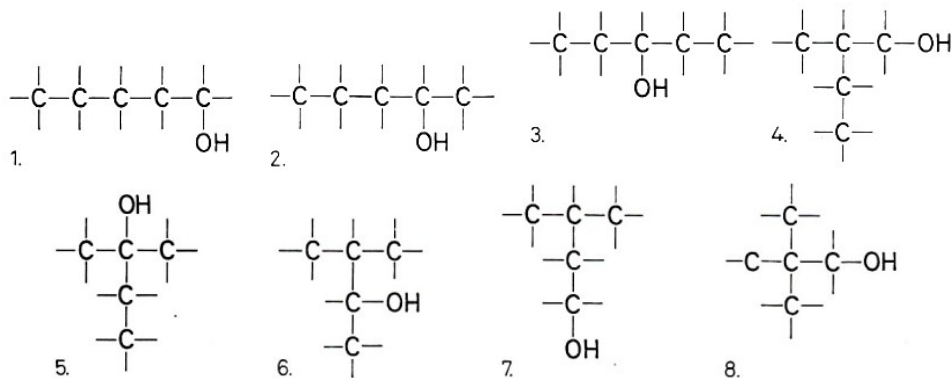
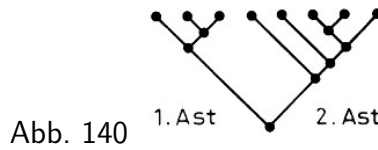


Abb. 139

Wir betrachten jetzt einen Baum, der genau einen Knoten vom Grad 2 hat. Diesen Knoten nennt man Wurzel. Es wird weiter gefordert, dass mit Ausnahme der Wurzel und der Endknoten alle Knoten des Baumes den Grad 3 haben. Ein solcher Baum ist ein Catalanscher Baum. Die von der Wurzel ausgehenden beiden Teilgraphen heißen Äste (Abb. 140).



Aufgabe 3a). Man gebe alle Catalanschen Bäume mit  $n = 2, 3, 4, 5$  Endknoten an. Zwei Catalansche Bäume sind nur dann als nicht verschieden voneinander anzusehen, wenn sich die beiden ersten und die beiden zweiten Äste gleichen (oben/unten sowie rechts/links beachten).  
Lösung: Abb. 141.

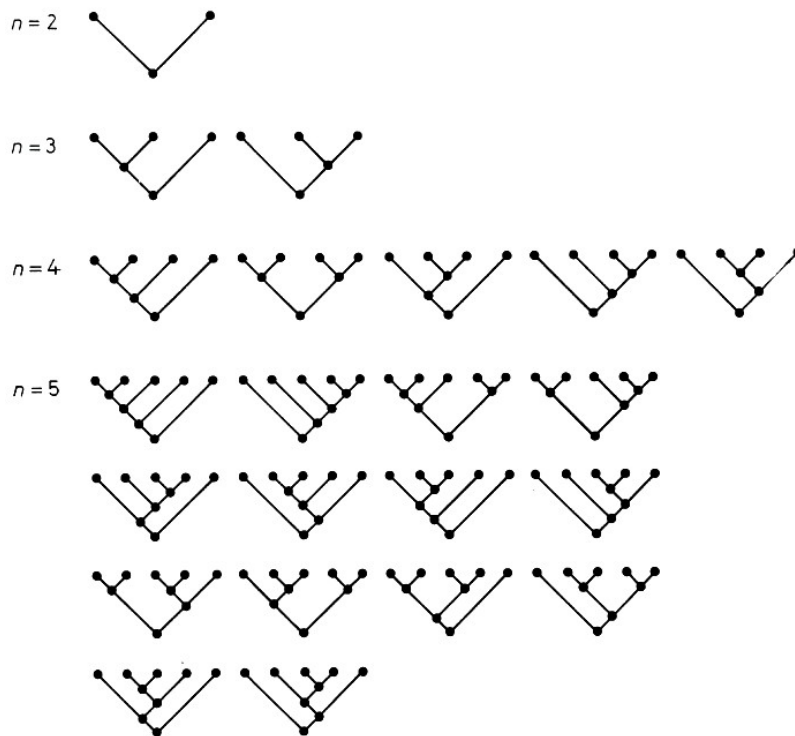


Abb. 141

Bezeichnen wir die Anzahl der Catalanschen Bäume für  $n$  Endknoten mit  $C(n)$ , dann erhalten wir  $C(2) = 1$ ,  $C(3) = 2$ ,  $C(4) = 5$ ,  $C(5) = 14$ .  $C(n)$  heißt Catalansche Zahl.

Aufgabe 3b). Welche Resultate erhält man, wenn man aus einem Catalanschen Baum die Wurzel und die zugehörigen Kanten entfernt ?

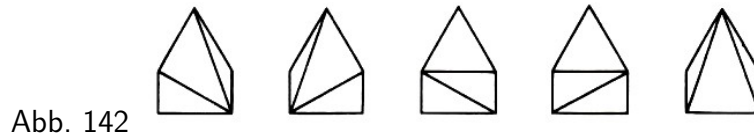
Lösung: Man erhält entweder  $\alpha$ ) zwei Knoten,  $\beta$ ) einen Catalanschen Baum und einen Knoten oder  $\gamma$ ) zwei Catalansche Bäume. Interessant ist, dass die Catalanschen Zahlen  $C(n)$  noch auf andere Art interpretiert werden können.

1. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein Produkt von  $n$  Faktoren zu klammern ?  
Beispiel.  $n = 4$ :

$$((x_1x_2)x_3)x_4, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1(x_2x_3))x_4, x_1(x_2(x_3x_4)), x_1((x_2x_3)x_4)$$

2. Man gebe die Anzahl aller Möglichkeiten für die Teilung eines konvexen  $(n + 1)$ -Ecks in Dreiecke an, die durch sich im Innern des  $(n + 1)$ - Ecks nicht schneidende Diagonalen erfolgen soll.

Beispiel.  $n = 4$ : Fünfeck (Abb. 142).



3. Zwei Kandidaten  $A, B$  erhalten bei einer Stimmenauszählung je  $n - 1$  Stimmen. Wie viele Reihenfolgen der Stimmenauszählung gibt es, bei der  $A$  während der Auszählung nie weniger Stimmen als  $B$  hat?

Beispiel.  $n = 4$ :

	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	2	0	2	0	1	1	1	1	1
3	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	3	1	2	2	2	2	2	2	2
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Die Lösungen von 1. - 3. sind die Catalanschen Zahlen  $C(n)$ .

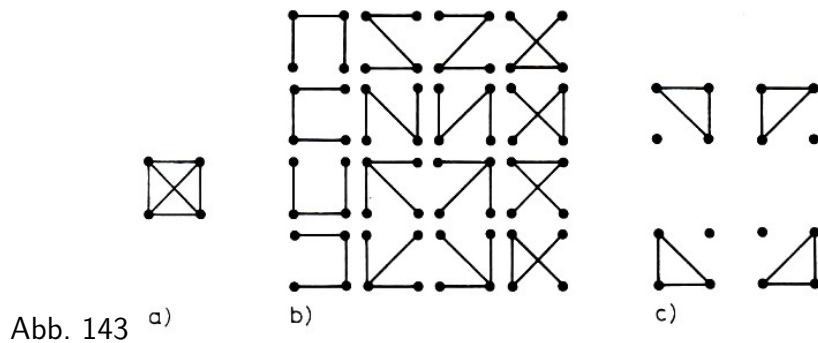
Aufgabe 4. Gegeben sei. ein zusammenhängender Graph  $G$  mit  $|P|$  Knoten und  $|K|$  Kanten. Wie viele Kanten müssen aus  $G$  entfernt werden, damit aus  $G$  ein Baum mit denselben Knoten entsteht ?

Lösung: Ist aus  $G$  durch Entfernen von Kanten ein Baum mit denselben Knoten entstanden, dann hat dieser wie der Graph  $G$  noch  $|P|$  Knoten. Wegen der zweiten Eigenschaft der Bäume hat er  $|P| - 1$  Kanten. Deshalb ist die Anzahl der zu entfernenden Kanten  $|K| - (|P| - 1) = |K| - |P| + 1$ .

Die Anzahl  $Z(G)$  der Kanten, die aus einem zusammenhängenden Graphen  $G$  zu entfernen sind, um aus diesem einen Baum mit denselben Knoten entstehen zu lassen, heißt zyklomatische Zahl. Nach den Vorüberlegungen aus Aufgabe 4 gilt  $Z(G) = |K| - |P| + 1$ .

Aufgabe 5a). Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus dem in Abb. 143a angegebenen Graphen  $G$  durch Beseitigung von Kanten einen Baum mit denselben Knoten zu schaffen?

Lösung: Es müssen  $Z(G) = |K| - |P| + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$  Kanten entfernt werden, damit ein Baum mit denselben Knoten entsteht.

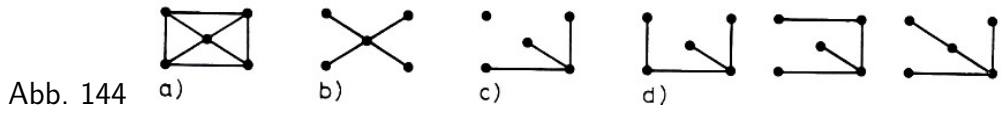


Man gebe mit Hilfe von Drehung und Spiegelung alle Möglichkeiten an (vgl. Abb. 143b).

Wir konnten 16 Bäume angeben. Es bleibt noch zu zeigen, dass es keine weiteren außer den

angegebenen Bäumen gibt. Um drei Kanten aus den sechs Kanten des Graphen  $G$  auszuwählen, haben wir  $\binom{6}{3} = 20$  Möglichkeiten. Darunter befinden sich auch die vier Fälle, bei denen die drei Kanten ein Dreieck der Abb. 143c, aber keinen Baum darstellen.

Aufgabe 5b). Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus dem in Abb. 144a gegebenen Graphen  $G$  durch Beseitigung von Kanten einen Baum mit denselben Knoten zu schaffen ?



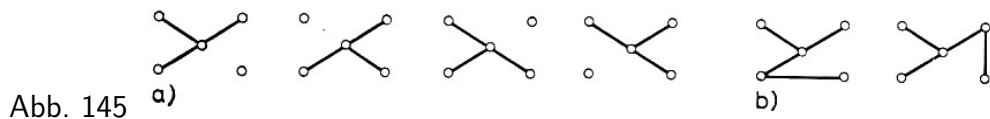
Lösung: Wegen  $Z(G) = |K| - |P| + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$  müssen vier Kanten entfernt werden. Wir unterscheiden folgende Fälle:

Fall 1. Wie viele Bäume gibt es, die genau einen Knoten vom Grad 4 haben? Es gibt genau eine Möglichkeit (Abb. 144b).

Fall 2. Wie viele Bäume gibt es, die genau einen Knoten vom Grad 3 haben ?

a) Der Knoten vom Grad 3 ist ein äußerer Knoten. Es gibt genau vier Möglichkeiten (Abb. 144c). Jede kann auf drei verschiedene Weisen vervollständigt werden (Abb. 144d). Damit erhält man zwölf Bäume.

b) Der Knoten vom Grad 3 ist der mittlere Knoten. Es gibt dafür vier Möglichkeiten (Abb. 145a). Wie können diese Graphen zu einem Baum vervollständigt werden ? Es gibt dafür zwei Möglichkeiten (Abb. 145b). Damit erhält man acht Bäume.



Fall 3. Alle Knoten des Baumes sind vom Grad 2. Diese Bäume haben keine "Verzweigungen". Um alle Möglichkeiten herauszufinden, sollen die fünf Knoten nacheinander festgelegt werden (Abb. 146).

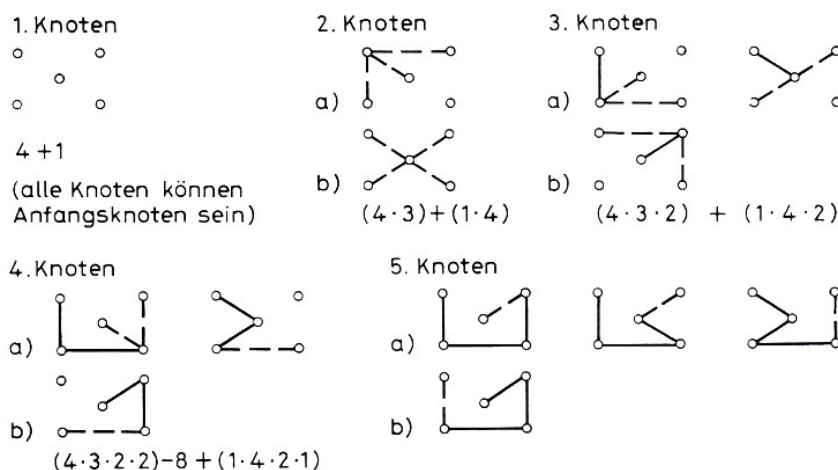


Abb. 146

Da es bei den Bäumen nicht auf die Bestimmung von Anfangs- und Endknoten ankommt, haben wir jeden Baum doppelt gezählt. Im Fall 3 erhält man  $4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 + 4 = 24$  Bäume. Insgesamt erhält man  $1 + 12 + 8 + 24 = 45$  verschiedene Bäume.

Zum Abschluss sollen die Aussagen über die zyklomatische Zahl auf nichtzusammenhängende



Graphen erweitert werden. Jeder beliebige Graph setzt sich aus Zusammenhangskomponenten zusammen. Die Knoten und Kanten des Graphen, die sich durch eine Kette verbinden lassen, gehören zu einer Zusammenhangskomponente.

In Abb. 147 besteht  $G_1$  aus einer,  $G_2$  aus zwei und  $G_3$  aus vier Zusammenhangskomponenten.

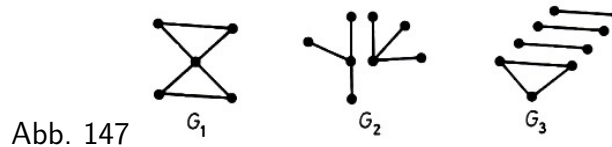


Abb. 147

Aufgabe 6. Wie viele Kanten sind aus einem Graphen  $G$  mit  $p$  Zusammenhangskomponenten zu entfernen, damit  $p$  Bäume mit denselben Knoten entstehen ?

Lösung: Ist  $p$  die Anzahl der Komponenten von  $G$ , dann zerfällt  $G$  in  $p$  durchschnittsfremde Teilgraphen, die zusammenhängend sind. Man ermittle von jedem einzelnen Teilgraphen  $G_i(P_i, K_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , die zyklomatische Zahl.

Aus jedem dieser Graphen  $G_i(P_i, K_i)$  müssen  $|K_i| - |P_i| + 1$  geeignete Kanten entfernt werden, um aus ihnen einen Baum mit denselben Knoten werden zu lassen. Die Gesamtzahl der zu beseitigenden Kanten beträgt dann

$$\sum_{i=1}^p (|K_i| - |P_i| + 1) = \sum_{i=1}^p |K_i| - \sum_{i=1}^p |P_i| + p = |K| - |P| + p$$

Die zyklomatische Zahl  $Z(G) = |K| - |P| + p$  gibt die Anzahl der Kanten an, die aus einem Graphen  $G$  mit  $p$  Zusammenhangskomponenten zu entfernen sind, um aus  $G$  ohne Veränderung der Knotenzahl  $p$  Bäume zu erhalten.

### 3.6 Färbungsprobleme

Fragen, bei denen man sich Gedanken über die unterschiedlichen Möglichkeiten der Farbgebung machen muss, treten beim Einfärben von Landkarten auf. Um eine politische Karte übersichtlich zu gestalten, werden zwei darauf eingezeichnete Länder, die eine gemeinsame Grenze haben, meist mit unterschiedlichen Farben gefärbt. Da es früher relativ schwierig war, mit mehreren Farben Drucke auszuführen, ergab sich das Problem, herauszufinden, wie viele Farben man mindestens benötigt, um die genannten Färbungsbedingungen zu erfüllen.

Damit wir bekannte Aussagen anwenden können, betrachten wir zunächst eine Landkarte und ordnen jedem Land einen Knoten zu. Haben zwei Länder eine gemeinsame Grenze, die aus mehr als einem Punkt besteht, so werden die ihnen zugeordneten Knoten mit einer Kante verbunden.

Durch diese Vorschrift erhält man einen Graphen, auf den die Färbungsprobleme übertragen werden können. Der Färbung der Länder entspricht jetzt die Färbung der Knoten. Deshalb soll festgestellt werden:

Ein Graph ist mit  $k$  Farben gut färbbar genau dann, wenn je zwei Knoten einer Kante stets mit unterschiedlichen Farben gefärbt werden können. Vorausgesetzt sei zunächst, dass der zugeordnete Graph einer Karte ein Baum ist (Beispiel in Abb. 148a).

Es soll nun herausgefunden werden, wie viele Farben mindestens nötig sind, um einen Baum gut färbbar zu machen. Mit einer Farbe ist das sicher nicht möglich. Versucht man es mit zwei Farben bei einem beliebigen Baum, so kann man wie folgt vorgehen:

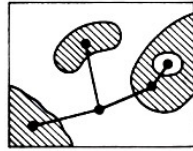
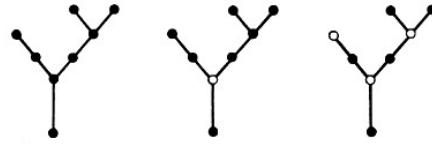


Abb. 148 a)



b)

Man wählt einen beliebigen Knoten des Baumes und färbt ihn mit einer Farbe. Alle Knoten, die mit ihm durch eine Kante verbunden sind, werden mit der anderen Farbe gefärbt. Das wird fortgesetzt, indem abwechselnd gefärbt wird, bis alle Knoten eine Farbe erhalten haben vgl. (Abb. 148b).

Auf diese Weise lässt sich der Baum mit zwei Farben gut färben. Wir vermuten, dass dies für jeden Baum möglich ist.

Aufgabe 1. Man beweise durch vollständige Induktion, dass jeder Baum mit zwei Farben gut färbbar ist.

Lösung: 1. Da ein Baum mit genau einer Kante zwei Knoten hat, lassen sich diese unterschiedlich färben.

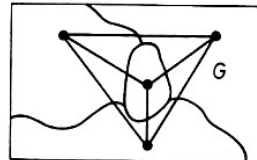
2. Vorausgesetzt sei, dass ein Baum mit  $n$  Knoten mit zwei Farben gut färbbar ist. Zu beweisen ist, dass das auch für einen Baum mit  $n + 1$  Knoten gilt.

In einem Baum mit  $n + 1$  Knoten gibt es nach der Eigenschaft 1 für Bäume (Abschnitt 3.5) mindestens zwei Knoten ersten Grades. Wir wählen einen von ihnen aus, bezeichnen ihn mit  $x$  und die dazugehörige Kante mit  $xy$ . Entfernt man  $x$  und die Kante  $xy$ , so erhalten wir einen neuen Baum mit  $n$  Knoten, der nach Voraussetzung mit zwei Farben gut färbbar ist. (Der Zusammenhang wurde nicht gestört.)

Der Knoten  $x$  erhält die zur Farbe des Knotens  $y$  entgegengesetzte Farbe, und der Baum mit  $n + 1$  Knoten ist somit mit zwei Farben gut färbbar (Beispiel Abb. 149a).



Abb. 149 a)



b)

Es kann aber nicht jeder Karte ein Baum zugeordnet werden. Außerdem treten auch Fälle auf, bei denen die Karte nicht mehr mit zwei Farben gut färbbar ist (Abb. 149b). Der Graph  $G$ , der dieser Karte mit vier Ländern zugeordnet wurde, lässt sich nicht mit zwei Farben gut färben.

Aufgabe 2. Woran liegt es, dass die Zweifärbung des Graphen  $G$  in Abb. 149b nicht möglich ist ?

Lösung: Betrachtet man den Bau des Graphen  $G$ , so stellt man fest, dass er geschlossene Ketten enthält. Diese enthalten jeweils drei Knoten, die nicht abwechselnd mit zwei Farben so gefärbt werden können, dass benachbarte Knoten unterschiedlich gefärbt sind.

In Abb. 149b liegen Ketten der Länge 3 vor, die eine gewünschte Zweifärbung verhindern.

Aufgabe 3. Sind die Graphen der Abb. 150 mit zwei Farben gut färbbar ? Man untersuche dazu die Kettenlängen der Graphen näher.

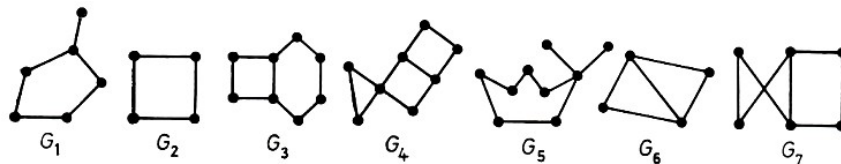


Abb. 150

Lösung:  $G_1, G_4, G_5$  und  $G_6$  lassen sich nicht mit zwei Farben gut färben; bei allen anderen ist es möglich.

Aufgabe 4. Man beweise, dass ein Graph  $G$  genau dann mit zwei Farben gut färbbar ist, wenn er keine geschlossenen Ketten ungerader Länge enthält.

Beweis. a) Die Graphen, die mit zwei Farben gut färbbar sind, enthalten keine geschlossenen Ketten ungerader Länge.

b)  $G$  habe nur geschlossene Ketten gerader Länge. Durch Induktion nach der Anzahl  $k$  der geschlossenen Ketten ist zu zeigen, dass  $G$  mit zwei Farben gut färbbar ist.

1. Ist  $k = 0$ , so ist der Graph ein Baum, und die Behauptung gilt nach Aufgabe 1.

2. Vorausgesetzt wird, dass jeder Graph  $G'$  mit höchstens  $k$  geschlossenen Ketten gerader Länge mit zwei Farben gut färbbar ist. Zu beweisen ist, dass das auch für einen beliebigen Graphen  $G$  mit  $k + 1$  geschlossenen Ketten gerader Länge gilt.

Wir wählen aus dem gegebenen Graphen  $G$  eine geschlossene Kette gerader Länge aus und bezeichnen sie mit  $T$ . Aus  $T$  entfernen wir eine Kante  $xy$  und erhalten einen zusammenhängenden Graphen  $G'$  mit nur  $k$  geschlossenen Ketten gerader Länge, der nach Voraussetzung mit zwei Farben gut färbbar ist.

$G'$  ist von gerader Länge; deshalb ist nach Entfernen der Kante  $xy$  eine Kette entstanden, die eine gerade Anzahl von Knoten enthält. Damit sind  $x$  und  $y$  in  $G'$  von unterschiedlicher Färbung. Setzt man nun die Kante  $xy$  wieder ein, so bleibt die Färbung von  $G'$  in  $G$  erhalten, und  $G$  ist mit zwei Farben gut färbbar. (Ein Beispiel zeigt Abb. 151.)

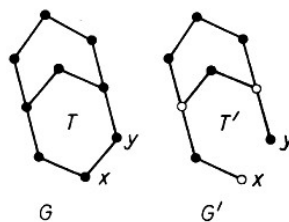


Abb. 151

Aufgabe 5. Die gesamte Ebene soll durch beliebige Kreise in Ebenenteile zerlegt sein; es sollen die Ebenenteile, die einen gemeinsamen Kreisbogen besitzen, unterschiedlich gefärbt werden. Es ist zu beweisen, dass die Ebene, die durch  $n$  Kreise in Ebenenteile zerlegt wurde, sich mit zwei Farben gut färben lässt.

Beweis durch vollständige Induktion. Ist  $r = 1$ , so wird die Ebene in zwei Teile geteilt, von denen jeder eine der beiden Farben erhält.

Wir setzen voraus, dass sich die Ebene, die durch  $n$  Kreise in Ebenenteile zerlegt wurde, mit zwei Farben gut färben lässt. Die Behauptung wird nun für  $n + 1$  Kreise nachgewiesen.

Wir lassen zunächst einen Kreis unbeachtet, so dass sich die Ebenenteile bezüglich der übrigen  $n$  Kreise mit zwei Farben gut färben lassen (Abb. 152a). Färbt man alle im Inneren des  $(n + 1)$ -ten Kreises gelegenen Ebenenteile um, so erhält man die gewünschte Färbung mit zwei Farben (Abb. 152b).

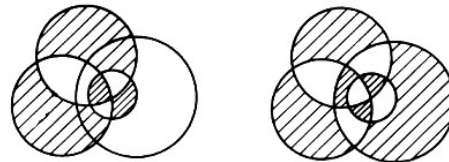


Abb. 152

Aufgabe 6. Man beweise, dass sich die Ebene, die durch  $n$  Geraden zerlegt wurde, mit zwei Farben gut färben lässt.

Lösungshinweis: Man verwende dazu die Aussage aus Aufgabe 4 oder das Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

Aufgabe 7. Es seien  $e_1, e_2, \dots, e_n$  gerade Landstraßen, die ins "Unendliche" führen. Die Straßen sollen modernisiert werden, und jede Kreuzung soll genau eine Über- und eine Unterführung erhalten. Das soll aber so ausgeführt werden, dass entlang jeder Straße die Über- und die Unterführungen einander abwechseln. Kann man diese Bedingung stets realisieren, falls man voraussetzt, dass sich jeweils nur zwei Straßen an einer Stelle kreuzen?

Lösung: Betrachtet man das Land als Ebene und darin die Straßen als Geraden, so teilen die Geraden die Ebene in Ebenenteile. Die Ebenenteile lassen sich nach der Lösung der Aufgabe 6 mit zwei Farben gut färben.

Statt der Einfärbung mit zwei Farben könnte man Getreide und Blumen aussäen, ohne dass längs einer Straße auf beiden Seiten die gleiche Bodenkultur zu sehen ist. Aus diesen Grunde kann man eine Vorschrift für den Bau der Über- und Unterführungen erlassen (vgl. Abb. 153a). Wie könnte diese lauten ?

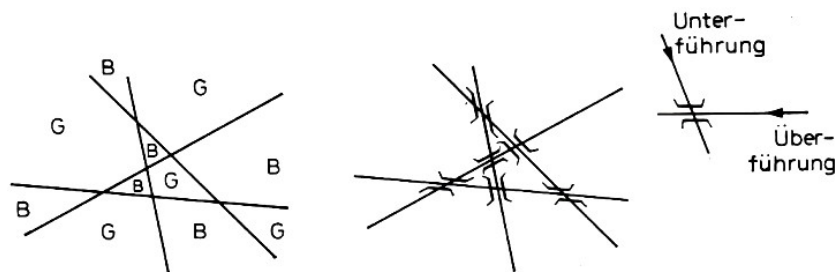


Abb. 153

1. Nähert man sich einer Kreuzung und es stehen auf der rechten Seite Blumen, dann soll eine Überführung gebaut werden.
2. Steht auf der rechten Seite Getreide, dann soll die Straße durch eine Unterführung geleitet werden (Abb. 153b).

Da sich Blumen und Getreide längs einer Straßenseite abwechseln, wird die Straße auch abwechselnd eine Über- und eine Unterführung haben.

Aufgabe 8. In der Ebene sollen Dreiecke so aneinander grenzen, dass zwei Dreiecke genau eine Seite oder genau einen Eckpunkt oder keinen Punkt gemeinsam haben (Abb. 154).

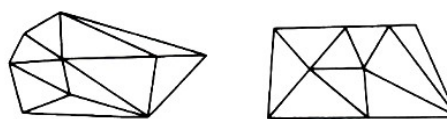


Abb. 154

Eine Anordnung dieser Art nennt man Triangulation.

a) Ist jede Triangulation der Ebene so mit zwei Farben färbbar, dass Dreiecke, die eine gemeinsame Seite haben, mit verschiedenen Farben gefärbt werden ?

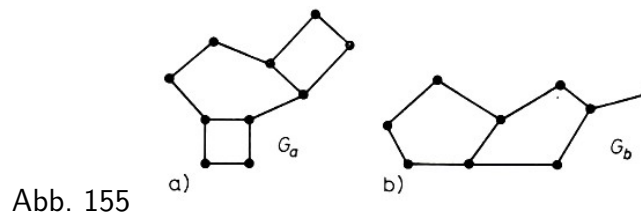
b) Welchen Bedingungen muss die Triangulation genügen, um die unter a) genannte Färbung zu ermöglichen ?

Lösung: a) Wir ordnen jeder Triangulation nach der folgenden Vorschrift einen Graphen zu:

- Jedem Dreieck wird ein Knoten zugeordnet.

- Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Dreiecke eine gemeinsame Seite haben.

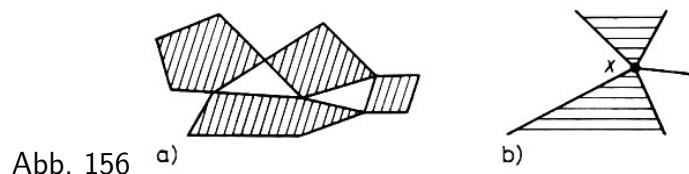
Wir erhalten dann z. B. aus Abb. 154a, b die in Abb. 155a, b angegebenen Graphen.



Jetzt kann das Problem auf die Graphen übertragen werden. Nach Aufgabe 4 ist  $G_a$  mit zwei Farben gut färbbar,  $G_b$  dagegen nicht, da  $G_b$  geschlossene Ketten ungerader Länge enthält. Es lässt sich also nicht jede Triangulation in der gewünschten Art mit zwei Farben gut färben.

b) Hat der zugehörige Graph keine geschlossenen Ketten ungerader Länge, dann ist folglich die Triangulation mit zwei Farben gut färbbar, denn sie hat keine ungerade Anzahl von Dreiecken, die einen gemeinsamen Eckpunkt haben.

Aufgabe 9. Die Flächen eines Graphen seien mit zwei Farben gut färbbar. Es ist zu beweisen, dass dann alle Knoten des Graphen von geradem Grad sind. (Beispiel Abb. 156a.)



Lösung (indirekter Beweis): Angenommen, es gäbe in diesem Graphen einen Knoten  $x$ , der von ungeradem Grad ist (Abb. 156b). Dann könnten die an ihn angrenzenden Flächen - im Widerspruch zur Voraussetzung - nicht mit zwei Farben gut gefärbt werden. Dieser Widerspruch bestätigt die zu beweisende Aussage. (Man übertrage diese Aussage auf Landkarten.)

Aufgabe 10. Es sei  $G$  ein Graph, dessen Knoten alle den Grad 3 haben. Man beweise:

a) Sind die Flächen des Graphen  $G$  mit drei Farben gut färbbar, so ist die Anzahl der Ecken jeder Fläche von  $G$  gerade.

b\*) Ist die Anzahl der Ecken jeder Fläche von  $G$  gerade, so sind die Flächen von  $G$  mit drei Farben gut färbbar.

Lösung: a) Wir führen den Beweis indirekt. Hätte eine Fläche  $F$  des Graphen eine ungerade Eckenzahl, so müsste die Anzahl der Flächen um  $F$  ebenfalls ungerade sein (Abb. 157).

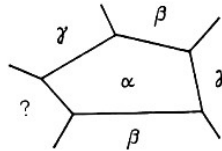


Abb. 157

Wählen wir für  $F$  die Farbe  $\alpha$ , so müssen die angrenzenden Flächen die Farbe  $\beta$  oder  $\gamma$  haben. Wegen der ungeraden Anzahl ist eine abwechselnde Färbung  $\beta, \gamma, \beta, \gamma, \dots, \beta, \gamma$  nicht möglich.

b\*) Diese Umkehrung von a) kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Der Beweis ist jedoch recht aufwendig und soll hier nicht geführt werden. Der interessierte Leser findet ihn z.B. in [10'], § 2, Beispiel 13 (Dreifarbensatz).

In vielen Fällen ist es nötig, bei der Färbung von Landkarten vier Farben zu benutzen. Für alle Landkarten, die man bis jetzt gezeichnet hat, waren vier Farben stets ausreichend, um die angestrebte Färbung zu erreichen.

Aus diesem Grunde vermuteten die Mathematiker über lange Zeit, dass für jede nur mögliche Landkarte vier Farben genügen. Diese Vierfarbenvermutung konnte lange Zeit nicht bewiesen werden.

Die langjährigen Bemühungen um den Beweis des Vierfarbensatzes haben viele Impulse gegeben, die Theorie über Graphen weiter auszuarbeiten und eine Reihe von Anwendungen aufzufinden. Die Vermutung, dass man bei jeder nur denkbaren Landkarte mit vier Farben auskommen kann, ist wohl zuerst vom Londoner Mathematikstudenten Francis Guthrie ausgesprochen worden, aber erst 1878 durch eine Anfrage auf einer Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft richtig bekannt geworden.

Bereits 1879 und 1880 gaben daraufhin P. Kempe bzw. P. Tait je einen "Beweis", jedoch wurden in beiden (bei Kempe erst 1890 durch P.J. Heawood) Fehler nachgewiesen. Heawood konnte aber nachweisen, dass fünf Farben stets ausreichend sind.

Trotz vieler Versuche blieb das "Guthriesche Problem" noch rund ein Jahrhundert ungelöst. Nach Vorarbeiten von H. Heesch konnten Wolfgang Haken und Kenneth Appel im Jahre 1976 mit Hilfe aufwendiger Computerrrechnung (mehr als 1000 Rechnerstunden!) an der Universität von Illinois in Urbana (USA) diese Vermutung bestätigen.

Der vollständige Beweis umfasst 56 Seiten Text und 114 Seiten Abbildungen (mit durchschnittlich mehr als 30 Abbildungen pro Seite). Die Suche nach einem "computerunabhängigen" Beweis des "Satzes von Kempe-Heesch-Appel-Haken" geht jedoch weiter.

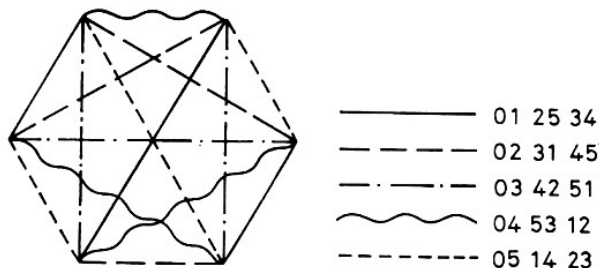
Aufgabe 11. Es ist zu beweisen, dass sich die Kanten eines vollständigen Graphen mit  $2n$  Knoten mit  $2n - 1$  Farben gut färben lassen.

Lösung: Insgesamt können  $\binom{2n}{2} = n(2n - 1)$  verschiedene Kanten angegeben werden. Die  $2n$  Knoten werden im folgenden mit  $0, 1, 2, \dots, 2n - 1$  bezeichnet. Eine Kante wird dann durch ein entsprechendes Zahlenpaar dargestellt.

Durch geschickte Notierung kann man alle Zahlenpaare so in Zeilen anordnen, dass in jeder Zeile jeder der  $2n$  Knoten genau einmal vorkommt:

$$\begin{array}{cccccc}
 (0,1) & (2,2n-1) & (3,2n-2) & \dots & (n,n+1) \\
 (0,2) & (3,1) & (4,2n-1) & \dots & (n+1,n+2) \\
 (0,3) & (4,2) & (5,1) & \dots & (n+2,n+3) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (0,2n-1) & (1,2n-2) & (2,2n-3) & \dots & (n-1,n)
 \end{array}$$

In den  $2n - 1$  Zeilen kommt jedes Zahlenpaar genau einmal vor. Es sind alle  $\binom{2n}{2}$  Kanten erfasst worden. Jede Zeile gibt die Färbung mit einer der  $2n - 1$  Farben an.



Beispiel.  $n = 3$  (Abb. 158).

### 3.7 Isomorphismus und Automorphismus

Bei komplizierten Schaltungen, Netzplänen oder verzweigten chemischen Verbindungen ist es oft von großer Bedeutung zu entscheiden, ob zwei diesbezügliche Modelle von gleicher "Bauart" sind. Diese können auch als Graphen betrachtet werden.

Wir wollen jetzt die Frage stellen, wann zwei Graphen von gleicher "Bauart" sind und sich nur durch ihre Darstellung voneinander unterscheiden. Diese Graphen heißen dann zueinander isomorph.

Zwei einfache Graphen  $G_1(P_1, K_1)$  und  $G_2(P_2, K_2)$  heißen genau dann zueinander isomorph, wenn es eine eindeutige Abbildung  $f$  gibt, die folgender Bedingung genügt:

Sind  $x, y \in P_1$  und  $f(x) = x' \in P_2, f(y) = y' \in P_2$ , dann gibt es eine Kante  $x'y' \in K_2$  genau dann, wenn es eine Kante  $xy \in K_1$  gibt. Die Abbildung  $f$  heißt Isomorphismus.

Existiert zwischen zwei Graphen kein Isomorphismus, dann sind beide nicht isomorph zueinander.

Aufgabe 1. Man überprüfe, ob die in Abb. 159a-c angegebenen Graphen isomorph zueinander sind.

Lösung. a) Bezeichnet man die Knoten in  $G_1$  mit  $a$  bis  $f$  und die in  $G_2$  mit  $a'$  bis  $f'$  wie in Abb. 159a und legt fest, dass  $a$  auf  $a', b$  auf  $b'$  usw. abgebildet wird, so erfüllt man die Bedingungen für einen Isomorphismus.

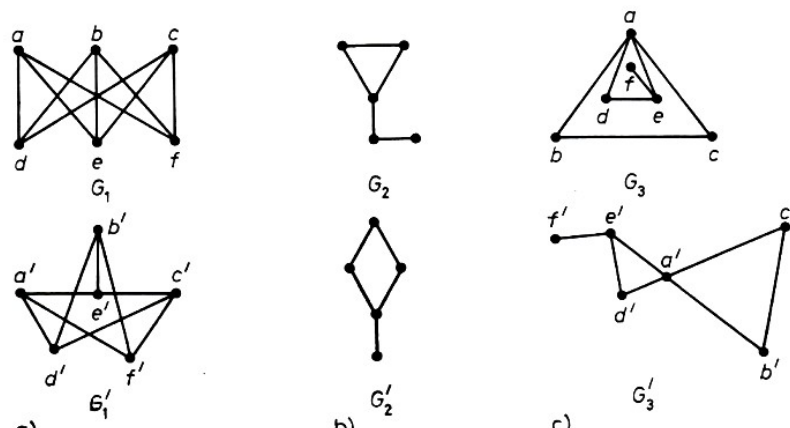


Abb. 159 a)

Den Isomorphismus kann man wie folgt beschreiben:  $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix}$ . Die Abbildung  $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ d' & e' & f' & a' & b' & c' \end{pmatrix}$  ist ebenfalls ein Isomorphismus.  $G_1$  und  $G'_1$  sind zueinander

isomorph.

b) Die Graphen  $G_2$  und  $G'_2$  enthalten jeweils fünf Knoten.  $G_2$  enthält eine geschlossene Kette der Länge 3,  $G'_2$  eine der Länge 4. Deshalb kann es keinen Isomorphismus geben.

c) Bezeichnet man die Knoten von  $G_3$  und  $G'_3$  mit  $a$  bis  $f$  bzw. mit  $a'$  bis  $f'$  wie in Abb. 159c, so ist die Abbildung  $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix}$  ein Isomorphismus. Ein anderer Isomorphismus ist  $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & c' & b' & d' & e' & f' \end{pmatrix}$ .

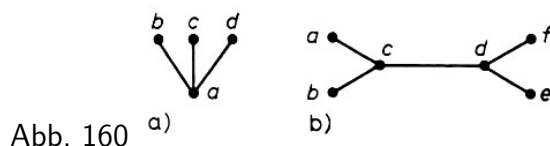
Aus den Beispielen können weitere Isomorphieeigenschaften abgeleitet werden. Wir betrachten dazu die geschlossenen Ketten und die Knotengrade isomorpher Graphen:

1. Sind die Graphen  $G$  und  $G'$  isomorph zueinander und hat  $G$  eine geschlossene Kette der Länge  $l$ , dann enthält auch  $G'$  eine geschlossene Kette der Länge  $l$ .
2. Sind die Graphen  $G$  und  $G'$  isomorph zueinander, dann bleiben bei jedem Isomorphismus die Grade der Knoten erhalten, d.h., jeder Knoten hat den gleichen Grad wie sein Bild bei der Abbildung  $f$ .

Besondere Bedeutung haben die Isomorphieuntersuchungen für die organische Chemie. Mit Hilfe der Kenntnisse über endliche Graphen werden Strukturformeln von Verbindungen untersucht. Sind die zugeordneten Graphen zweier Verbindungen nicht isomorph, dann sind diese als verschieden voneinander anzusehen (vgl. hierzu das Beispiel der Isomere des Pentanols in 3.5.).

Eine isomorphe Abbildung  $f$  von  $G$  auf  $G'$  heißt Automorphismus von  $G$ , wenn  $G = G'$  ist. Ein Automorphismus von  $G(P, K)$  kann durch eine geeignete Permutation von  $P$  beschrieben werden.

Aufgabe 2. Man gebe alle Automorphismen des Graphen  $G$  der Abb. 160a an.



Lösung: Automorphismen sind

$$f_0 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ (das ist der identische Automorphismus),}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$$

Haben wir damit bereits alle Automorphismen angegeben? Der Knoten  $a$  hat als einziger den Grad 3. Er kann deshalb nur auf sich abgebildet werden. Es lassen sich die übrigen drei Knoten vom Grad 2 auf ebenso viele Arten aufeinander abbilden, wie man Permutationen mit drei Elementen angeben kann. Das sind genau  $3! = 6$  Permutationen.

Aufgabe 3. Man gebe alle Automorphismen des Graphen  $G$  der Abb. 160b an. Welche der  $6!$  Permutationen beschreiben einen Automorphismus?

Lösung: Automorphismen sind



$$\begin{aligned}
 f_0 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}, & f_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & c & d & e & f \end{pmatrix}, & f_2 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & f & e \end{pmatrix}, \\
 f_3 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & c & d & f & e \end{pmatrix}, & f_4 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & f & d & c & a & b \end{pmatrix}, & f_5 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & f & d & c & b & a \end{pmatrix}, \\
 f_6 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & a & b \end{pmatrix}, & f_7 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Können noch weitere Automorphismen angegeben werden? Werden die Knoten  $c$  und  $d$  zunächst festgelassen, so können zwei Elemente ( $f, e$  bzw.  $a, b$ ) auf zwei Arten permutiert werden; es gibt vier Permutationen. Da nur  $c$  und  $d$  den Grad 3 haben, gibt es keine weiteren Permutationen.

Aufgabe 4. Zwei Automorphismen  $f_1, f_2$  werden miteinander verknüpft, indem die beiden Automorphismen nacheinander ausgeführt werden.

Jeder Bildpunkt des Automorphismus  $f_1$  wird zum Originalpunkt für  $f_2$ . Welche Resultate erhält man, wenn jeder der gefundenen Automorphismen von Aufgabe 3 mit jedem anderen verknüpft wird?

Lösung: Die Nacheinanderausführung von zwei beliebigen Automorphismen  $f_0, \dots, f_7$  ergibt wieder einen Automorphismus aus der Menge  $\{f_0, \dots, f_7\}$ . Das kann in Form einer Tabelle dargestellt werden, aus der man die Verknüpfung von  $f_i$  mit  $f_j$  (in Zeichen:  $f_i \circ f_j$ ) aus der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte ablesen kann.

Beispielsweise gilt  $f_4 \circ f_6 = f_2$ , denn bei  $f_4$  wird  $a$  auf  $e$  und  $e$  bei  $f_6$  auf  $a$  abgebildet, also insgesamt  $a$  auf  $a, \dots, f$  wird bei  $f_6$  auf  $b$  und  $b$  bei  $f_4$  auf  $e$ , also insgesamt  $f$  auf  $e$  abgebildet.

$\circ$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$f_0$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$f_1$	$f_1$	$f_0$	$f_3$	$f_2$	$f_6$	$f_7$	$f_4$	$f_5$
$f_2$	$f_2$	$f_3$	$f_0$	$f_1$	$f_5$	$f_4$	$f_7$	$f_6$
$f_3$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$f_0$	$f_7$	$f_6$	$f_5$	$f_4$
$f_4$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_5$	$f_5$	$f_4$	$f_7$	$f_6$	$f_2$	$f_3$	$f_0$	$f_1$
$f_6$	$f_6$	$f_7$	$f_4$	$f_5$	$f_1$	$f_0$	$f_3$	$f_2$
$f_7$	$f_7$	$f_6$	$f_5$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$f_0$

Welche Merkmale sind der Tabelle zu entnehmen?

1. Die Nacheinanderausführung zweier Automorphismen hängt im allgemeinen von der Reihenfolge ab, ist also nicht kommutativ.

Beispiel:  $f_4 \circ f_6 = f_2, f_6 \circ f_4 = f_1$

2.  $f_0 \circ f_i = f_i \circ f_0 = f_i, i = 0, \dots, 7$

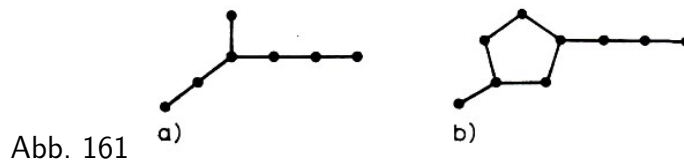
3. Es gilt das Assoziativgesetz

$$(f_i \circ f_j) \circ f_k = f_i \circ (f_j \circ f_k), i, j, k = 0, \dots, 7$$

(an Beispielen zu überprüfen).

4. Zu jedem Automorphismus gibt es genau einen weiteren, so dass die Verknüpfung beider  $f_0$  ergibt.

Aufgabe 5. a) Man gebe Graphen an, die nur den identischen Automorphismus besitzen. Beispiele zeigt Abb. 161.



b) Man gebe mindestens zwei Beispiele für Bäume an, die 1. neun Knoten haben, 2. zueinander nicht isomorph sind und 3. nur einen - den identischen - Automorphismus haben. Beispiele zeigt Abb. 162.

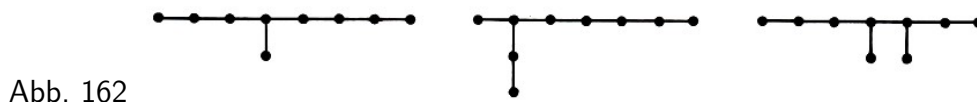


Abb. 162

$n$	Bäume mit $n$	Knoten Automorphismen $\neq f_0$
2		$f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
3		$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$
4		vgl. Aufgabe 2, $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$
5		$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & b & a & d & e \end{pmatrix}$
6		$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & b & a & d & e & f \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & c & d & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & d & c & b & e & f \end{pmatrix}$
		$120=5! \text{ Automorphismen}$

Abb. 163

c) Man zeige, dass alle Bäume mit weniger als sieben Knoten wenigstens einen nicht identischen Automorphismus besitzen (in Abb. 161a haben wir dagegen einen Baum mit sieben Knoten kennengelernt, der nur den identischen Automorphismus besitzt).

Lösung: Abb. 163.

### Literatur

[1] Lovasz, L., K.L. Vesztergombi und J. Pelikan, Kombinatorik, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977 (Übersetzung aus dem Ungarischen).  
 [2] Sedlacek, J., Einführung in die Graphentheorie, 2. Aufl., BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972 (Übersetzung aus dem Tschechischen).

Zusatzliteratur

- [3] Berge, C., und A. Ghouila-Houri, Programme, Spiele, Transportnetze, 2. Aufl., B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969 (Übersetzung aus dem Französischen).
- [4] Bigalke, H.G., Graphentheorie im Unterricht?, Der Mathematikunterricht 20 (1974) 4, 5-10.
- [5] Bruns, M., Hamiltonsche Linien, Der Mathematikunterricht 24 (1978) 3, 41-52.
- [6] Bruns, M., und G. Schmitz, Planare Graphen, Der Mathematikunterricht 24 (1978) 3, 100-112.
- [7] Collatz, L., G. Meinardus und H. Werner (Hrsg.), Numerische Methoden bei graphentheoretischen und kombinatorischen Problemen, Tagung in Oberwolfach v. 1.- 7.12.1974, Birkhäuser Verlag, Basel- Stuttgart 1975.
- [8] Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [9] Golowina, L.J., Graphen und ihre Anwendung, Mathematik in der Schule 5 (1967) 10, 728-749.
- [10] Golowina, L.I., und I.M. Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [10'] Sominski, I.S., L. I. Golovina und I.M. Jaglom. Die vollständige Induktion, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Übersetzung aus dem Russischen).
- [11] Hess, M., und H. Hess, Hamiltonsche Linien, Der Mathematikunterricht 24 (1978) 3, 5-40.
- [12] Klose, K.-D., Netze und Landkarten, Der Mathematikunterricht 24 (1978) 3, 53- 9.
- [13] König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig 1936.
- [14] Maske, K., Über Elemente der Graphentheorie im Mathematikunterricht der Oberschule, Dissertation A, Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR, Berlin 1974.
- [15] Pieper, H., Der Vierfarbensatz, alpha 12 (1978) 5, 97-99.
- [16] Polya, G., Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta mathematica, Uppsala, 68 (1937), 14- 5254 .
- [17] Porath, G., Färbungsprobleme in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft, Mathematik in der Schule 15 (1977) 5, 273- 279.
- [18] Ringel, G., Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.
- [19] Sachs, H., Graphentheorie, Mathematik in der Schule 8 (1970) 3, 18- 3197.
- [20] Vogel, W., Optimierung von Netzwerken, Der Mathematikunterricht 23 (1977) 4, 5-18.
- [21] Voss, W., Graphentheorie, alpha 8 (1972) 6, 126-127; 9 (1973) 1, 8-9; 9 (1973) 2, 36-37; 9 (1973) 4, 88- 89.
- [22] Wagner, K., Zu einem Beweis des Vierfarbensatzes von Appel und Haken, Praxis der Mathematik 19 (1977), 70- 72.
- [23] Wagner, K. u. a., über das Ringelsche Sechsfarbenproblem. Praxis der Mathematik 25 (1983), 35- 335 6.

## 4 Endliche Geometrien

Der umfangreiche Komplex der endlichen Geometrien bietet eine Fülle reizvoller kombinatorischer Aufgaben. In 4.1. wird mit den lateinischen Quadraten ein klassischer (schon auf Euler zurückgehender) Gegenstand der frühen Unterhaltungsmathematik behandelt. Er ist heute u.a. zu einer wichtigen Methode der systematischen Versuchsplanung geworden.

Das Arbeiten mit lateinischen Quadraten wird durchsichtiger, wenn man sich einer "geometrischen Sprache" bedient. Dabei steht nicht die bloße Verwendung geometrischer Termini im Vordergrund, sondern die Tatsache, dass eine geometrische Sprache die angemessene Sprache zur Beschreibung lateinischer Quadrate ist.

Wenn der Schüler erkennt, dass  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der gleichen Ordnung  $n$  den Keim einer geometrischen Struktur in sich bergen, dann ist auch eine gute Grundlage für das Verständnis axiomatischer Vorgehensweisen in der Mathematik gelegt.

Systeme solcher Quadrate liefern Modelle für eine endliche (affine) Ebene der Ordnung  $n$  und zugleich Beispiele für spezielle Blockpläne.

Damit wird ein Bogen geschlagen zu den Abschnitten 4.3 und 4.2, wo endliche Ebenen bzw. Blockpläne eine genauere Behandlung erfahren. Blockpläne besitzen vielfache Anwendungen; hier wurden jedoch solche Aufgaben ausgewählt, die Schülern leicht zugänglich sind, u.a. ein Turnierplan für einen Wettkampf mit gewissen Nebenbedingungen. Der zweite Abschnitt wird mit Aufgaben über Steinersysteme, spezielle Blockpläne, abgeschlossen.

Im folgenden Abschnitt werden hauptsächlich Anzahlaussagen über Punkte und Geraden in endlichen Ebenen gemacht, aber auch über Dreiecke und Parallelogramme. Darüber hinaus wird der Zusammenhang zu den lateinischen Quadraten hergestellt.

Umfangreicher und tiefer wird die endliche Ebene der Ordnung 3 untersucht, indem Koordinaten zur Beschreibung von Sachverhalten und Lösung von Aufgaben eingeführt werden. Diese Überlegungen können sowohl der Propädeutik als auch der Vertiefung der analytischen Geometrie dienen; sie geben insbesondere einen Anlass zur Wiederholung des Bewegungsbegriffes. Der Reiz und der Nutzen der Beschäftigung mit endlichen Ebenen bestehen in der Überprüfung von Aussagen der Geometrie des Anschauungsraumes unter neuen Voraussetzungen. Somit wird die Schulgeometrie wiederholt, und sie dient als heuristisches Mittel. Da gewohnte Aussagen in der endlichen Geometrie falsch sein können, wird das Beweisbedürfnis in hohem Maße gefördert.

Dieses Kapitel wird zur Behandlung in einer Arbeitsgemeinschaft von Schülern der 9. und 10. Klasse empfohlen. Der Stoff ist schon Schülern der Mittelstufe zugänglich, denn im Vordergrund steht systematisches Probieren, etwa bei der Aufstellung eines Paares orthogonaler lateinischer Quadrate. Diese Erfahrung konnte bei der Realisierung größerer Teile dieses Kapitels im Kreisklub Junger Mathematiker u.a. in Gruppen mit Schülern von 5. und 6. Klassen gewonnen werden.

### 4.1 Lateinische Quadrate

Dem Buch [2] entnehmen wir folgende Aufgabe: Auf einem Versuchsfeld soll die Verträglichkeit von drei unterschiedlichen Sorten Getreide mit je einer von drei unterschiedlichen Düngersorten getestet werden. Um zu exakten Ergebnissen zu kommen, um jede Getreidesorte mit jeder Düngersorte zu testen, wird das Versuchsfeld in  $3 \times 3$  kleinere Felder aufgeteilt, so dass drei

Zeilen und drei Spalten entstehen (Abb. 164a).



Zunächst soll für die Untersuchung folgende Bedingung gelten:

(A) In jeder Zeile und jeder Spalte soll jede Getreidesorte genau einmal auftreten.

Um zu einer Verteilung zu kommen, die dieser Bedingung genügt, bezeichnen wir die drei Getreidesorten mit 1, 2, 3 und verteilen sie in der ersten Zeile und in der ersten Spalte so, dass jede Sorte genau einmal auftritt. Das kann z. B. wie in Abb. 164 b geschehen.

Hat man sich für diese Verteilung entschieden, dann ist zu untersuchen, wie die noch leeren Felder zu belegen sind. Wir unterscheiden zwei Fälle hinsichtlich der Belegung des zweiten Feldes der zweiten Zeile.

Fall 1: Wird das zweite Feld der zweiten Zeile mit 3 belegt, dann ergibt sich für das dritte Feld dieser Zeile notwendig die 1 usw. Die Bedingung (A) kann erfüllt werden:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Fall 2: Wird das zweite Feld der zweiten Zeile mit 1 belegt, dann muss das dritte Feld dieser Zeile mit 3 belegt werden. Das widerspricht aber der Bedingung (A).

Allgemein gilt, dass unser Quadrat durch die erste Zeile und das erste Element der zweiten Zeile bereits vollständig bestimmt ist. Zahlenquadrate vom Format  $n \times n$ , bei denen in jeder Zeile und jeder Spalte jede der  $n$  Zahlen genau einmal vorkommt, nennt man lateinische Quadrate.<sup>3</sup> Die Zahl  $n$  heißt die Ordnung des Quadrates.

Aufgabe 1. a) Wie viele lateinische Quadrate der Ordnung 3 gibt es?

Lösung: Die drei Elemente in der ersten Zeile können auf  $3! = 6$  verschiedene Weisen angeordnet werden:

1	2	3	1	3	2	2	1	3	2	3	1	3	1	2	3	2	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Wie wir oben gesehen haben, ist ein lateinisches Quadrat der Ordnung 3 nach Vorgabe der ersten Zeile durch das erste Element der zweiten Zeile bereits eindeutig bestimmt. Es gibt jeweils zwei Möglichkeiten, den durch die zweite Zeile und erste Spalte bestimmten Platz mit Elementen der Menge  $\{1,2,3\}$  zu belegen. Man erhält somit  $6 \cdot 2 = 12$  lateinische Quadrate der Ordnung 3, und zwar:

1	2	3	1	3	2	2	1	3	2	3	1	3	1	2	3	2	1
2	3	1	2	1	3	1	3	2	1	2	3	1	2	3	1	3	2
3	1	2	3	2	1	3	2	1	3	1	2	2	3	1	2	1	3

<sup>3</sup>Der Name erklärt sich dadurch, dass früher in der quadratischen Anordnung nicht Zahlen, sondern die Buchstaben des lateinischen Alphabets verwendet wurden.

1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1
3 1 2	3 2 1	3 2 1	3 1 2	2 3 1	2 1 3
2 3 1	2 1 3	1 3 2	1 2 3	1 2 3	1 3 2

Aufgabe 2. Wie viele lateinische Quadrate gibt es, wenn man zwei Quadrate als nicht verschieden voneinander ansieht, die durch eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3 auseinander hervorgehen ?

Lösung: Ist z. B. die Permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  gegeben, dann sind die beiden Quadrate

1 2 3	3 1 2
2 3 1	1 2 3
3 1 2	2 3 1

gleich. Es gibt  $3! = 6$  verschiedene Permutationen von drei Elementen. Das bedeutet, dass sechs lateinische Quadrate jeweils untereinander gleich sind. Insgesamt gibt es also  $\frac{12}{6} = 2$  voneinander verschiedene lateinische Quadrate der Ordnung 3.

Kehren wir noch einmal zum einleitenden Beispiel zurück. Für den Versuch soll nun auch die zweite dort genannte Bedingung beachtet werden:

(B) In jeder Zeile und jeder Spalte soll jede Düngersorte genau einmal auftreten, und auf dem gesamten Versuchsfeld soll jede Zusammenstellung von je einer Getreidesorte und einer Düngersorte genau einmal vorkommen.

Aufgabe 3. Ist es möglich, zu einer Verteilung der Getreide- und Düngersorten unter Beachtung der Bedingungen (A) und (B) zu kommen ?

Lösung: Um die Frage zu beantworten, wollen wir die Düngersorten ebenfalls mit den Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen. Außerdem wollen wir voraussetzen, dass die Aussaat des Getreides durch das lateinische Quadrat

1	2	3
2	3	1
3	1	2

gegeben ist. Jedes Feld können wir durch ein Zahlenpaar  $(x, y)$  beschreiben, wobei  $x \in \{1,2,3\}$  Getreidesorte und  $y \in \{1,2,3\}$  Düngersorte sei. Das Paar  $(x, y)$  werde hier kurz mit  $xy$  bezeichnet.

Der Bedingung (B) entnimmt man: Jedes Zahlenpaar  $(x, y)$  soll in dem durch Abb. 164a, b gegebenen Schema genau einmal auftreten.

Wir haben alle  $x$ -Werte bereits verteilt und können die Verteilung der  $y$ -Werte (Düngersorten) 1, 2, 3 in der ersten Zeile z. B. wie folgt vornehmen:

11	22	33
2	3	1
3	1	2

Wie muss die erste Spalte weiter ausgefüllt werden, um die Bedingung (B) zu erfüllen ? Im zweiten Feld der ersten Spalte kann nicht 22 stehen, da das Paar  $(2, 2)$  schon vorhanden ist. Man erhält daher:

11	22	33
23	3	1
32	1	2

Das zweite Feld der zweiten Spalte darf wegen (B) nicht 33 und nicht 32 enthalten; es enthält also 31, und folglich steht im dritten Feld 13. Daraus erhält man sofort die Paare der dritten Spalte, und die Bedingung (B) ist erfüllt:

11	22	33
23	31	12
32	13	21

Dieses Schema stellt einen Plan dar, wie die Aussaat und das Düngerstreuen zu erfolgen haben. Alle ersten Glieder und alle zweiten Glieder der Paare bilden je ein lateinisches Quadrat:

	1	2	3		1	2	3
$L_1$ :	2	3	1	$L_2$ :	3	1	2
	3	1	2		2	3	1

Entstehen zwei lateinische Quadrate so wie  $L_1, L_2$ , dann heißen sie zueinander orthogonal. Wir erklären gleich allgemeiner:

Zwei lateinische Quadrate der gleichen Ordnung  $n$  heißen zueinander orthogonal, wenn durch "Übereinanderlegen" der Quadrate ein Schema von  $n^2$  Feldern entsteht, in dem jedes Paar  $xy$  mit  $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$  genau einmal vorkommt.

Für weitere Überlegungen ist die folgende Bemerkung nützlich:

Sind  $L_1, L_2$  zueinander orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$ , dann sind auch die Quadrate  $L'_1, L'_2$ , die aus  $L_1$  bzw.  $L_2$  durch Permutation der Elemente  $1, 2, \dots, n$  hervorgehen, zueinander orthogonal (hierbei muss nicht die Permutation, die  $L_1$  in  $L'_1$  überführt, mit der Permutation übereinstimmen, die  $L_2$  in  $L'_2$  überführt).

Denn nimmt man an, dass beim Übereinanderlegen von  $L'_1$  und  $L'_2$  zwei gleiche Paare entstehen, dann müssten durch Rückgängigmachen der Permutationen beim Übereinanderlegen von  $L_1$  und  $L_2$  ebenfalls zwei gleiche Paare vorkommen (was aber wegen der Orthogonalität von  $L_1$  und  $L_2$  nicht sein kann).

Aufgabe 4. Gibt es ein von  $L_2$  verschiedenes lateinisches Quadrat, das zu  $L_1$  orthogonal ist? (Quadrate, die durch eine Permutation der Elemente auseinander hervorgehen, sollen als nicht verschieden angesehen werden, siehe Aufgabe 2).

Lösung: Wir nehmen an, es gäbe ein weiteres zu  $L_1$  orthogonales lateinisches Quadrat  $L_3$ , das durch keine Permutation der Zahlen  $1, 2, 3$  aus  $L_2$  hervorgeht. Nach der obigen Bemerkung können wir diese Zahlen aber so permutieren, dass sie in der ersten Zeile in der "natürlichen" Reihenfolge  $1, 2, 3$  stehen.

Wir überlegen uns nun, durch welche Ziffer der erste Platz in der zweiten Zeile belegt werden müsste. Diese Ziffer muss folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. Sie muss ungleich 1 sein, da 1 schon in dieser Spalte in der ersten Zeile auftritt.
2. Sie muss ungleich 2 sein, da sonst das Zahlenpaar 22 auftreten würde, das bereits vorhanden ist.
3. Sie muss ungleich 3 sein, da sonst  $L_3 = L_2$  wäre.

Alle diese Voraussetzungen können nicht gleichzeitig erfüllt werden. Folglich gibt es kein weiteres von  $L_2$  "wesentlich verschiedenes" lateinisches Quadrat, das zu  $L_1$  orthogonal ist.

Aufgabe 5. Man konstruiere sämtliche zum lateinischen Quadrat der Ordnung 4

$$L_1 : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

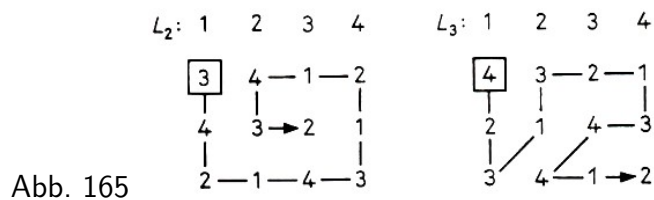
orthogonalen lateinischen Quadrate. (Zwei Quadrate, die durch Permutation der Ziffern auseinander hervorgehen, sehen wir wieder als "gleich" an.)

Lösung: Für die zu konstruierenden Quadrate können wir in der ersten Zeile die Ziffernreihenfolge 1, 2, 3, 4 wählen:

$$\begin{matrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 2x & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Bezeichnet man das erste Element in der zweiten Zeile mit  $x$ , dann kann nur die Belegung von  $x$  mit 3 oder 4 ein zu  $L_1$  orthogonales lateinisches Quadrat liefern (denn  $x = 1$  würde kein lateinisches Quadrat ergeben, und im Fall  $x = 2$  bekäme man das schon vorhandene Paar 22). Wenn  $x = 3$  gewählt wird, dann sind die weiteren Elemente des zu konstruierenden Quadrates bereits eindeutig festgelegt. Dasselbe gilt für  $x = 4$ .

Dass man in diesen Fällen (unter Beachtung der Bedingungen (A) und (B)) "bis zum Schluss" weiter konstruieren kann, beweist die Existenz von zwei zu  $L_1$  orthogonalen lateinischen Quadraten. Wie nach Wahl von  $x = 3$  oder  $x = 4$  die weiteren Elemente zu konstruieren sind, zeigen die beiden "gerichteten Graphen" der Abb. 165. (Natürlich kann man zu  $L_2$  und  $L_3$  noch auf anderen als den hier angegebenen Wegen gelangen.)



Folglich sind  $L_2$  und  $L_3$  die beiden einzigen zu  $L_1$  orthogonalen lateinischen Quadrate. Aber auch  $L_2$  und  $L_3$  sind zueinander orthogonal. Man überzeugt sich leicht davon durch Übereinanderlegen dieser Quadrate.

Die Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  sind also paarweise orthogonal. Gibt es ein weiteres zu  $L_1, L_2, L_3$  orthogonales Quadrat? Die Antwort lautet: Nein. Denn ein solches wäre insbesondere zu  $L_1$  orthogonal und fiel daher mit  $L_2$  oder  $L_3$  zusammen.

Wir werden später im Zusammenhang mit einer anderen Fragestellung auf unsere drei soeben konstruierten lateinischen Quadrate zurückkommen. Einige Eigenschaften dieser Quadrate wollen wir schon jetzt festhalten. Dazu betrachten wir die  $4 \times 4 = 16$  Felder des "Grundquadrates"  $Q$ , auf dem die zueinander orthogonalen Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  konstruiert wurden.

Gewisse Mengen von Feldern wollen wir Linien nennen, und zwar sollen es die folgenden sein: die Zeilen von  $Q$ , die Spalten von  $Q$  und für jedes der lateinischen Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  die gleichbezeichneten Felder. Damit haben wir fünf Linienscharen erhalten.



Wir wollen über Linien einige einfache Behauptungen notieren; die Felder werden hier Punkte genannt:

- (1) Jede Linie enthält vier Punkte.
- (2) Zwei (verschiedene) Linien einer Schar enthalten keinen gemeinsamen Punkt. (Wir nennen Linien ein und derselben Schar deshalb auch parallel.)
- (3) Durch jeden Punkt geht genau eine Linie einer vorgegebenen Schar.
- (4) Durch jeden Punkt gehen insgesamt fünf Linien.
- (5) Durch zwei (verschiedene) Punkte geht genau eine Linie.
- (6) Zwei Linien  $k, l$ , die verschiedenen Scharen angehören, haben genau einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 6. Man beweise die Eigenschaften (1) bis (6).

Lösung: Die ersten vier Eigenschaften sind leicht einzusehen. Man hat dabei nur zu beachten, dass Linien entweder Zeilen oder Spalten oder die gleichbezeichneten Felder eines der Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  sind.

Schwieriger ist der folgende Beweis von (5) und (6), und man muss in der konkreten Situation entscheiden, ob er mit den Schülern erarbeitet wird oder nicht.

Wir beweisen zunächst, dass es durch zwei Punkte  $P, Q$  nicht mehr als eine Linie gibt. Das ist klar, wenn  $P, Q$  einer Zeile oder einer Spalte angehören. Es seien nun  $P, Q$  nicht gemeinsam in einer Zeile oder Spalte gelegen. Durch  $P, Q$  können dann nur Linien gehen, die durch die Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  definiert werden.

Wir schließen indirekt und nehmen an, dass durch diese Punkte zwei Linien  $l, k$  gehen. Es mögen etwa die mit 2 bezeichneten Felder von  $L_1$  die Linie  $l$  und die mit 4 bezeichneten Felder von  $L_2$  die Linie  $k$  ergeben.

Durch "Übereinanderlegen" der Quadrate  $L_1, L_2$  entsteht dann auf den beiden durch  $P, Q$  bestimmten Feldern das Elementepaar 24, im Widerspruch zur Orthogonalität von  $L_1, L_2$ . Damit ist auch klar, dass zwei Linien höchstens einen gemeinsamen Punkt haben.

Wir zeigen nun, dass Linien  $k$  und  $l$  aus verschiedenen Scharen einen Punkt gemeinsam haben. Das ist klar, falls sich unter  $k$  und  $l$  eine Zeile oder Spalte befindet. Andernfalls liegt jeder der vier Punkte von  $k$  auf genau einer der vier Linien der Schar von  $l$ , weil sonst  $k$  und eine Linie der Schar von  $l$  im Widerspruch zur Orthogonalität der lateinischen Quadrate zwei Punkte gemeinsam hätten. Insbesondere schneiden sich  $k$  und  $l$ .

Abschließend ist noch zu zeigen, dass je zwei Punkte eine Verbindungslinie besitzen. Das trifft offensichtlich zu, falls  $P$  und  $Q$  in einer Zeile liegen. Sind jedoch die Zeilen von  $P$  und  $Q$  voneinander verschieden, dann müssen von den fünf Linien durch  $P$  nach (6) vier die Zeile von  $Q$  in ihren vier Punkten treffen, d. h., dass eine der Linien durch  $P$  den Punkt  $Q$  enthalten muss, was zu beweisen war.

Bemerkung. Liegen  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  vor, dann kann man leicht die zu (1) bis (6) analogen Eigenschaften beweisen. Es sind hierzu keine prinzipiell neuen Überlegungen erforderlich. Es ist aber zu beachten, dass es nicht zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq 3$  stets  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  gibt (vgl. die Bemerkung im Anschluss an die Lösung der folgenden Aufgabe).

Aufgabe 7. Gibt es zu dem angegebenen lateinischen Quadrat  $L$  ein orthogonales ?

$$L: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Lösung: Angenommen, es gäbe ein zu  $L$  orthogonales lateinisches Quadrat  $L'$ . Für  $L'$  können wir wie oben in der ersten Zeile wieder die Ziffernreihenfolge 1, 2, 3, 4 wählen.

Der erste Platz der zweiten Zeile von  $L'$  kann nur mit den Ziffern 3 oder 4 belegt werden. Wählen wir für diesen Platz zunächst die 3. Wie oben konstruieren wir unter Beachtung von (A) und (B) die weiteren Elemente von  $L'$ .

Gelingt eine solche Konstruktion "bis zum Schluss", dann existiert ein zu  $L$  orthogonales lateinisches Quadrat, bleiben wir unterwegs irgendwo "stecken" (d.h., lassen sich (A) und (B) nicht mehr erfüllen), dann gibt es kein zu  $L$  orthogonales Quadrat, das auf dem ersten Platz der zweiten Zeile eine 3 trägt. Wir geben in Abb. 166 eine mögliche Konstruktion wieder durch einen gerichteten Graphen an.

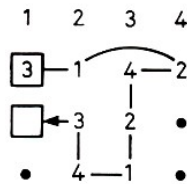


Abb. 166

Jede Belegung des ersten Platzes in der dritten Zeile durch die Ziffern 1, 2, 3, 4 führt auf einen Widerspruch: Bei der Belegung mit 1, 2 oder 3 entsteht kein lateinisches Quadrat; die Belegung mit 4 widerspricht der Orthogonalitätsbedingung, denn das in diesem Fall entstehende Paar 34 ist in unserer Konstruktionskette bereits vorhanden.

Ebenso führt die Belegung des ersten Platzes der zweiten Zeile mit 4 auf einen Widerspruch. Aus der Untersuchung sämtlicher Möglichkeiten ergibt sich, dass es zu dem gegebenen Quadrat kein orthogonales gibt.

Das historisch gesehen erste Problem, das auf die Konstruktion zweier orthogonaler lateinischer Quadrate hinausläuft, wurde von Euler im Jahre 1779 gestellt. Es ist das berühmte Problem von den 36 Offizieren:

36 Offiziere aus sechs verschiedenen Regimentern und mit sechs verschiedenen Dienstgraden sollen so in einem Quadrat vom Format  $6 \times 6$  angeordnet werden, dass in jeder Zeile bzw. in jeder Spalte jeder Dienstgrad und jedes Regiment genau einmal vorkommen. Ist es möglich, eine solche Aufstellung anzugeben?

Wie lässt sich die Aufgabe mit mathematischen Begriffen umformulieren? Die sechs Regimenter bzw. sechs Dienstgrade müssen offenbar so angeordnet werden, dass sie lateinische Quadrate der Ordnung 6 ergeben.

Außerdem muss jedes Paar (Dienstgrad, Regiment) genau einmal auftreten. Anders gesagt: Die Quadrate müssen orthogonal sein. Dieses Problem ist unlösbar. Der Beweis dieser Behauptung ist recht kompliziert. Er konnte erst 1900 durch Tarry erbracht werden.

Ist dagegen  $n$  eine Primzahlpotenz (insbesondere also eine Primzahl), dann gibt es stets  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$ . In 4.3. kommen wir auf diese Behauptung zurück. Die Untersuchungen über orthogonale lateinische Quadrate sind noch nicht abgeschlossen.

Es ist z. B. gelungen, zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 22 anzugeben. Einige Paare orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung 10 wurden gefunden. Man kennt

jedoch noch nicht die genaue Anzahl.

Eine bereits bewiesene Aussage lautet: Ist  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$  die Primzahlzerlegung von  $n \in \mathbb{N}$ , dann gibt es wenigstens  $q$  orthogonale lateinische Quadrate, wobei  $q$  das Minimum der  $m$ -elementigen Menge  $\{p_1^{a_1} - 1, p_2^{a_2} - 1, \dots, p_m^{a_m} - 1\}$  ist.

Schon vor mehr als 2000 Jahren haben sich die Gelehrten mit auffälligen und sonderbaren Eigenschaften von Zahlenquadraten beschäftigt. Bekannt ist sicherlich das Quadrat vom Format  $3 \times 3$ , in dem alle  $3 \cdot 3 = 9$  Ziffern so angeordnet sind, dass alle Zeilensummen und alle Spaltensummen gleich sind:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{array}$$

Eine alte Legende aus China, die etwa aus der Zeit 2200 v. u. Z. stammt, besagt, dass sich dieses Quadrat auf dem Panzer einer Meeresschildkröte befunden habe. Es soll etwa so ausgesehen haben wie in Abb. 167 dargestellt.

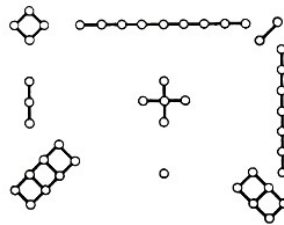


Abb. 167

Quadrate vom Format  $n \times n$  mit  $n^2$  verschiedenen Ziffern, bei denen alle Zeilensummen und alle Spaltensummen gleich sind, heißen magische Quadrate. Mitunter wird die gleiche Summe auch noch für die Diagonalen verlangt.

Da in früheren Zeiten Araber diesen Quadraten Zauberkräfte zusprachen, hat sich der Name "magisch" erhalten. Ein magisches Quadrat vom Format  $4 \times 4$  befindet sich auf dem von Albrecht Dürer gefertigten Kupferstich "Melancholia" (1514).

Es soll im folgenden untersucht werden, ob es einen Zusammenhang von lateinischen und magischen Quadraten vom Format  $n \times n$  gibt.

Wir betrachten die zueinander orthogonalen lateinischen Quadrate  $L_1$  und  $L_2$  der Aufgabe 5 und ersetzen die 4 durch die 0. Damit ändern wir nichts an den Eigenschaften der Quadrate:

$$L_1: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \quad L_2: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Durch "Übereinanderlegen" der Quadrate von  $L_1$  und  $L_2$ , entstehen  $n^2$  verschiedene Zahlenpaare.

Jedem Paar  $xy$  können wir die Zahl  $4x + y$  zuordnen (im vieradischen Positionssystem ist  $y$  die Anzahl der "Einer" und  $x$  die Anzahl der "Vierer"). Die 16 Zahlen, die auf diese Weise entstehen, stellen wir im folgenden zusammen:

1. Spalte	2. Spalte	3. Spalte	4. Spalte
$1 \cdot 4 + 1$	$2 \cdot 4 + 2$	$3 \cdot 4 + 3$	$0 \cdot 4 + 0$
$2 \cdot 4 + 3$	$1 \cdot 4 + 0$	$0 \cdot 4 + 1$	$3 \cdot 4 + 2$
$3 \cdot 4 + 0$	$0 \cdot 4 + 3$	$1 \cdot 4 + 2$	$2 \cdot 4 + 1$
$0 \cdot 4 + 2$	$3 \cdot 4 + 1$	$2 \cdot 4 + 0$	$1 \cdot 4 + 3$

5	10	15	0
11	4	1	14
12	3	6	9
2	13	8	7

In jeder Spalte und jeder Zeile treten die Zahlen 0, 1, 2, 3 genau einmal als Faktor von 4 und genau einmal als Summand auf. Jede der 16 höchstens zweistelligen vieradischen Zahlen  $xy$  ( $= 4x + y$ ) ist also genau einmal aufgeschrieben. Die Summe jeder Zeile und jeder Spalte beträgt

$$(1 + 2 + 3 + 0) \cdot 4 + (1 + 2 + 3 + 0) = 30$$

Folglich haben wir ein magisches Quadrat erhalten.

Aufgabe 8. Man gebe nach dem eben beschriebenen Verfahren das zu den orthogonalen lateinischen Quadraten

1	2	3	1	2	3
2	3	1	3	1	2
3	1	2	2	3	1

gehörige magische Quadrat an.

Lösung: Wird die 3 durch die 0 ersetzt, dann erhält man die lateinischen Quadrate

1	2	0	1	2	0
2	0	1	0	1	2
0	1	2	2	0	1

die wieder zueinander orthogonal sind. Durch Übereinanderlegen dieser Quadrate gewinnt man neun paarweise verschiedene Zahlen  $xy$  im triadischen System:

$$xy = 3x + y, \quad x, y = 0, 1, 2$$

Aus diesen Zahlen entsteht das magische Quadrat

4	8	0
6	1	5
2	3	7

mit der Zeilen- bzw. Spaltensumme 12.

Allgemein gilt: Den  $n^2$  verschiedenen Zahlenpaaren  $(x, y)$  aus zwei zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  lassen sich  $n^2$  Zahlen  $xy$  im  $n$ -adischen Positionssystem zuordnen:

$$xy = nx + y, \quad x, y = 0, 1, \dots, n - 1$$

Diese Zahlen sind paarweise verschieden, und in jeder Zeile bzw. jeder Spalte tritt jede der Zahlen  $0, 1, \dots, n - 1$  genau einmal als Faktor von  $n$  und genau einmal als Summand auf. Die Zeilen- und Spaltensummen sind somit konstant. Wir können sie sofort berechnen:

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) \cdot n + (1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2} \cdot n + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - 1)n$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die konstanten Zeilen- und Spaltensummen eines beliebigen  $n$ -reihigen magischen Quadrates (unabhängig von seiner "Herkunft" etwa über orthogonale lateinische Quadrate) stets gleich dem eben berechneten Wert sein müssen.

In einem solchen Quadrat tritt nämlich jede der Zahlen  $0, 1, 2, \dots, n^2 - 1$  genau einmal auf. Da die Zeilensummen (ebenso wie die Spaltensummen) jeweils gleich sind, braucht man nur die Summe

$$0 + 1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{1}{2}(n^2 - 1)n^2$$

durch  $n$  zu dividieren.

Es ergibt sich nun die Frage, ob man durch Umkehrung unseres oben dargestellten Verfahrens aus einem magischen Quadrat wieder zwei zueinander orthogonale lateinische Quadrate erhalten kann. Dazu stellen wir die folgende

Aufgabe 9. Gegeben sei das magische Quadrat

$$M : \begin{array}{cccc} 15 & 10 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 14 & 11 \\ 8 & 13 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{array}$$

Lässt sich  $M$  aus zwei zueinander orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 4 gewinnen?

Lösung: Jede der Zahlen  $0, 1, 2, \dots, 15$  kann man eindeutig im vieradischen Positionssystem in der Form  $4x + y$ ,  $x, y = 0, 1, 2, 3$ , darstellen. Beispielsweise folgt aus dem Ansatz

$$4x + y = 15, \quad x, y = 0, 1, 2, 3$$

notwendig  $x = y = 3$ . Auf diesem Wege kann man jedem der  $n^2$  Felder des Quadrats genau einen  $x$ - und genau einen  $y$ -Wert aus der Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  zuordnen. Man erhält die beiden Quadrate

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Das zweite ist aber kein lateinisches Quadrat. Die gestellte Frage ist also zu verneinen.

## 4.2 Blockpläne

Den nun folgenden neuen Begriff wollen wir uns anhand von Beispielen klarmachen.

Aufgabe 1. Für ein Busliniennetz werden in einer Stadt sieben Bushaltestellen eingerichtet. Diese Haltestellen seien wie folgt zu einem Schema angeordnet:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \circ & \\ & & \\ 2 & \circ & 4 \quad \circ & 6 \\ & \circ & & \\ \circ & \circ & \circ & \\ 3 & 5 & 7 & \end{array}$$

Auf Grund der örtlichen Gegebenheiten soll das Liniennetz folgende Forderungen erfüllen:

1. Jede Buslinie soll genau drei Haltestellen haben.
2. Jede Haltestelle gehört zu genau drei Buslinien.
3. Je zwei beliebige Haltestellen sollen durch genau eine Linie verbunden sein.

Wie muss das Busliniennetz unter diesen Bedingungen aussehen?

Lösung: Wir versuchen zunächst, Forderung 1 zu erfüllen. Derartige (Bus-)Linien sind z. B. in Abb. 168a dargestellt.

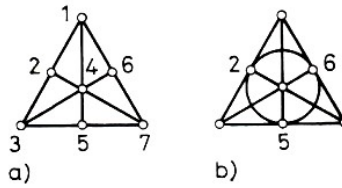


Abb. 168

Die zweite Forderung ist dagegen noch nicht erfüllt: Die Haltestellen 2, 5 und 6 gehören erst zu zwei Linien. Auch die dritte Forderung ist nicht erfüllt. Beispielsweise gibt es keine Linie, die die Haltestellen 2 und 5 miteinander verbindet.

Führen wir eine weitere Buslinie ein, die durch die Haltestellen 2, 5 und 6 verläuft, dann erhalten wir ein Liniennetz, das den Bedingungen 1 bis 3 genügt (Abb. 168b).

Aufgabe 2. In einem Stadion wird ein Motorradrennen veranstaltet. Zum Wettkampf haben sich 16 Sportler angemeldet, von denen jeweils vier an den Start gehen sollen. Um einen fairen Wettstreit zu gewährleisten, ist folgende Bedingung einzuhalten:

Jeder Fahrer muss gegen jeden anderen genau einmal antreten. Gibt es mögliche Startreihenfolgen, die dieser Bedingung genügen? Wie oft muss jeder einzelne Fahrer an den Start gehen? In welchen Anordnungen starten die Fahrer ?

Lösung: Wir denken uns die Fahrer mit den Startnummern 1 bis 16 versehen und benutzen diese Nummern auch zur Bezeichnung der Fahrer. Ihre Grundstellung sei

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Wenn die Aufgabe lösbar ist, muss jeder Fahrer fünfmal an den Start gehen, denn in jedem Rennen ist er mit drei der übrigen 15 Fahrer zusammen. Mit dieser Feststellung ist noch nicht viel für eine mögliche Startreihenfolge gewonnen.

Fahrer 1 kann z. B. mit 2, 3 und 4 starten, die übrigen dann "zeilenweise". Weiter kann 1 etwa mit 5, 9 und 13 starten, die übrigen dann "spaltenweise". Wenn so verfahren wird, kann 1 z. B. nicht mit 6, 7, 8 starten, denn diese Fahrer sind schon zusammen mit 5 in einer Vierergruppe gewesen. Um die Aufgabe zu lösen, muss man aber noch drei weitere Rennen mit jeweils vier Startergruppen bilden. Ein schwieriges Problem ?

Schauen wir uns noch einmal die einzuhaltende Bedingung an. Ein wenig umformuliert lautet sie: Zwei beliebige Fahrer müssen genau einer Startergruppe angehören. Erinnern wir uns an dieser Stelle der drei paarweise orthogonale lateinischen Quadrate der Ordnung 4, die wir in 4.1. konstruiert haben. Die dort genannte Bedingung (5) lautet:

Durch zwei Punkte geht genau eine Linie. Wir machen Linien zu Startergruppen und erkennen, dass die gestellte Aufgabe bereits gelöst ist. Zu den oben genannten, aus den Zeilen und Spalten des Fahrerfeldes gebildeten acht Startergruppen treten noch zwölf weitere:

Jedem der lateinischen Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  (siehe Aufgabe 5 in 4.1.) entsprechen vier Startergruppen. Die folgende Aufstellung zeigt die 20 sich daraus ergebenden Startergruppen:

	1 2 3 4		1 5 9 13		1 6 11 16
(1)	5 6 7 8	(2)	2 6 10 14	(3)	2 5 12 15
	9 10 11 12		3 7 11 15		3 8 9 14
	13 14 15 16		4 8 12 16		4 7 10 13
			1 7 12 14		1 8 10 15
		(4)	2 8 11 13	(5)	2 7 9 16
			3 5 10 16		3 6 12 13
			4 6 9 15		4 5 11 14

Wir wollen jetzt die Aufgaben 1 und 2 miteinander vergleichen und zugleich in der folgenden Tabelle von den Besonderheiten dieser Aufgaben abstrahieren (Spalte 3):

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Modell
7 Haltestellen	16 Fahrer	$v$ Punkte
7 Buslinien	20 Startergruppen	$b$ Linien
Jede Haltestelle gehört zu 3 Linien.	Jeder Fahrer gehört zu 5 Startergruppen.	Jeder Punkt gehört zu $r$ Linien.
3 Haltestellen in einer Linie	4 Fahrer in einer Startergruppe	Jede Linie enthält $k$ Punkte.
Je 2 Haltestellen werden durch eine einzige Linie verbunden.	Je 2 Fahrer gehören zu genau einer Startergruppe.	Je 2 Punkte werden durch $\lambda$ ( $= 1$ ) Linien verbunden.

Verallgemeinernd stellen wir fest: Aus einer  $v$ -elementigen Menge werden gewisse  $k$ -elementige Teilmengen gebildet, die wir Blöcke nennen. Durch jedes Element gehen  $r$  Blöcke. Insgesamt sind  $b$  Blöcke vorhanden. Je zwei Elemente gehören genau  $\lambda$  Blöcken an.

Mengen mit einem ausgezeichneten System von Teilmengen (den Blöcken), die diesen Bedingungen genügen, heißen Blockpläne<sup>4</sup>, genauer  $(v, b, r, k, \lambda)$ -Blockpläne. Wir nennen das 5-Tupel  $(v, b, r, k, \lambda)$  auch Typ des Blockplans. Die Blockpläne in den Aufgaben 1 und 2 haben die Typen  $(7, 7, 3, 3, 1)$  bzw.  $(16, 20, 5, 4, 1)$ .

Aufgabe 3. Man gebe ein Modell für einen  $(9, 12, 4, 3, 1)$ -Blockplan an.

Lösung: Wir veranschaulichen die neun Elemente des Blockplans wieder durch ein Punktegitter (Abb. 169a) und fassen jeweils drei kollineare Punkte zu einem Block zusammen (Abb. 169b). Die weitere Konstruktion ist damit bereits eindeutig festgelegt.

Da  $r = 4$  ist, müssen durch jeden Punkte genau vier Blöcke gehen. Beispielsweise gehen durch den Punkt 1 erst drei Blöcke. Dieser Punkt kann mit keinem der Punkte 2, 3, 4, 5, 7, 9 in einem weiteren vierten Block liegen. Dann erhielte man nämlich jeweils zwei Punkte, durch die zwei verschiedene Blöcke gehen (im Widerspruch zu  $\lambda = 1$ ). Also bilden die Punkte 1, 6, 8 einen Block.

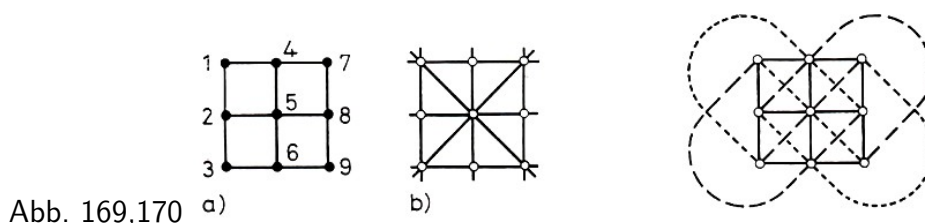


Abb. 169,170 a)

<sup>4</sup>Die Benennung Blockplan stammt aus der Statistik; ebenso die Bezeichnungen  $v$  (Varietät, Gesamtheit),  $r$  (Replikation, Wiederholung) und  $b$  (Block).

Auf die gleiche Weise überlegt man sich, dass die Mengen  $\{2,4,9\}$ ,  $\{3,4,8\}$ ,  $\{2,6,7\}$  Blöcke sind, die wir durch Linien veranschaulichen (Abb. 170).

Man mache sich klar, dass alle geforderten Bedingungen erfüllt sind.

Die Lösung der Aufgabe 2 führte uns auf drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 4. Auch im vorliegenden Fall der Aufgabe 3 hätte ein Blick auf die zueinander orthogonalen lateinischen Quadrate  $L_1, L_2$  sofort zu einer Lösung geführt. Die Menge der gleichbezeichneten Felder jedes dieser Quadrate liefert (neben den Zeilen und Spalten des Neunerfeldes) jeweils einen Block.

Dass durch zwei Punkte genau ein Block geht, folgt wieder aus der Orthogonalität von  $L_1, L_2$ .

Allgemeiner gilt folgendes: Aus  $n - 1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $r$  kann man einen  $(n^2, n^2 + n, n + 1, n, 1)$ -Blockplan konstruieren. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt sofort aus der Bemerkung im Anschluss an die Aufgabe 6 in 4.1.

Wir wissen aber, dass es nicht zu jeder natürlichen Zahl  $n$  einen Blockplan des angegebenen Typs gibt (nach dem Resultat von Tarry gibt es einen solchen z. B. für  $n = 6$  nicht). Ist dagegen  $n$  eine Primzahlpotenz, dann gibt es stets einen Blockplan dieses Typs.

Die Zahlen  $v, b, r, k, \lambda$  eines  $(v, b, r, k, \lambda)$ -Blockplans sind durch zwei Gleichungen miteinander "gekoppelt". Um die erste dieser Gleichungen aufzustellen, zählen wir die Menge aller Paare  $(P, g)$ , bei denen das Element  $P$  zum Block  $g$  gehört, auf zwei Arten ab.

Durch jeden Punkt gehen  $r$  Blöcke, also gibt es  $v \cdot r$  Paare dieser Art. Zum anderen enthält jeder Block genau  $k$  Elemente. Da es  $b$  Blöcke gibt, gibt es auch  $b \cdot k$  Paare der geforderten Art. Damit haben wir die folgende Beziehung zwischen den Zahlen  $b, k, v, r$  erhalten:

$$b \cdot k = v \cdot r \quad (I)$$

Um die zweite Gleichung abzuleiten, wählen wir ein festes Element  $P$  und fragen nach der Anzahl der Möglichkeiten,  $P$  mit allen anderen Elementen durch einen Block zu verbinden. Der Blockplan enthält außer  $P$  noch  $v - 1$  weitere Elemente. Durch diese Elemente und  $P$  gehen jeweils  $\lambda$  Blöcke. Also gibt es  $\lambda(b - 1)$  Möglichkeiten,  $P$  mit allen anderen Elementen durch einen Block zu verbinden.

Zu einer zweiten Berechnung dieser Anzahl kommen wir durch folgende Überlegung: Durch  $P$  gehen  $r$  Blöcke, die sämtliche  $v$  Elemente erfassen müssen. Alle diese Blöcke enthalten außer  $P$  noch  $k - 1$  weitere Elemente. Damit ist die zu bestimmende Anzahl auch gleich  $r(k - 1)$ . Damit haben wir eine zweite Gleichung gewonnen:

$$\lambda(v - 1) = r(k - 1) \quad (II)$$

Aufgabe 4. Man zeige, dass die Daten in den Aufgaben 1, 2 und 3 die Gleichungen (I) und (II) erfüllen.

Aufgabe 5. Ist es möglich, in einer Schule von 450 Schülern Arbeitsgemeinschaften mit je acht Mitgliedern so einzurichten, dass jeder Schüler Mitglied von genau drei Arbeitsgemeinschaften ist ?

Lösung: Eine Aufgabenstellung dieser Art führt zwar i. allg. nicht auf einen Blockplan, aber man kann auch hier die Größen  $v, b, k, r$  im oben angegebenen Sinne deuten und sich leicht überlegen, dass für diese Größen (unter der Annahme, es gäbe eine Lösung der Aufgabe) Gleichung (I) gelten muss.



Mit  $v = 450$ ,  $r = 3$ ,  $k = 8$  hätte man dann für  $b$  (= Anzahl der Arbeitsgemeinschaften):

$$b = \frac{v \cdot r}{k} = \frac{450 \cdot 3}{8}$$

Da  $b$  nicht ganzzahlig ist, muss die in Aufgabe 5 gestellte Frage verneint werden.

Aufgabe 6. Jeden Tag gehen neun Mädchen in Dreierreihen spazieren.

Jedes Mädchen möchte, dass es mit jedem anderen einmal in einer Reihe gegangen ist. Wieviel Tage müssen sie miteinander spazieren gehen, damit dieser Wunsch erfüllt werden kann?

Man gebe die Aufstellung der Mädchen für jeden Spaziergang an.

Lösung: Wir stellen zunächst fest, dass mindestens  $(9 - 1) : 2 = 4$  Tage erforderlich sind, um dem Wunsch der Mädchen zu entsprechen (vgl. dazu die Lösung der Aufgabe 2). Die geringste Anzahl von Tagen erhalte man sicher dann, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass kein Mädchen zweimal mit einem anderen in einer Reihe geht.

Fasst man unter dieser Bedingung die Dreierreihen als Blöcke auf, dann ist nach der Existenz eines Blockplans gefragt, für den  $v = 9$ ,  $k = 3$  und  $\lambda = 1$  ist. Für diesen wäre dann  $r = 4$  und  $b = 12$ , wie man den Gleichungen (II) und (I) entnimmt.

Die Aufgabe lautet also mit anderen Worten: Gibt es einen  $(9, 12, 4, 3, 1)$ -Blockplan? Wir haben aber einen Blockplan dieses Typs bereits angegeben (Abb. 170).

Er enthält vier Parallelenscharen (= Spaziergänge) mit je drei Blöcken (= Dreierreihen). Wird die Spaziergangsordnung nach diesem Blockplan eingerichtet, dann kann dem Wunsch der Mädchen entsprochen werden, wenn an vier Tagen spazieren gegangen wird.

Bezeichnet man die Mädchen mit den Nummern 1, ..., 9 (vgl. Abb. 169a), dann gibt die folgende Aufstellung eine mögliche Spaziergangsordnung an:

1. Tag	2. Tag	3. Tag	4. Tag
123	147	249	159
456	258	357	267
789	369	168	843

Aufgabe 7 (Kirkmanproblem). Wie sind 15 Mädchen in Dreierreihen anzuordnen, wenn jedes an jedem Tag mit einem anderen spazieren gehen möchte? Wieviel Tage sind notwendig, um das zu erfüllen?

Der Mathematiker Kirkman stellte diese Aufgabe 1850.

Es ist sehr kompliziert, eine Lösung dafür zu finden. Natürlich sieht man wieder sofort, dass die gestellte Bedingung nur dann erfüllt werden kann, wenn die Mädchen an mindestens  $(15 - 1) : 2 = 7$  Tagen spazieren gehen.

Dass sieben Tage auch tatsächlich ausreichen, zeigt die folgende Lösung des Problems (die Mädchen wurden durch die 15 Buchstaben A, B, ..., O bezeichnet):

1.Tag	2.Tag	3.Tag	4.Tag	5.Tag	6.Tag	7.Tag
AFK	ABE	ALM	ADO	AGN	AHJ	ACI
BGL	CNO	BOF	BIK	BDJ	BMN	BHO
CHM	DFL	DEH	CJL	CEK	CDG	DKM
DIN	GHK	GIO	EGM	FMO	EFT	ELN
EJO	IJM	IKN	FHN	HIL	KLO	FGI

Aufgabe 8. Man gebe wenigstens zwei Blockpläne an, die ebenso viele Elemente wie Blöcke enthalten.

Lösung: Abb. 171a, b sind Beispiele für  $v = b = 3$  und  $v = b = 4$ ; dabei sind die Blöcke zwei- bzw. dreielementige Mengen. Nach den Gleichungen (I) und (II) gilt für Abb. 171a außerdem  $r = k = 2$  und  $\lambda = 1$  sowie  $r = k = 3$  und  $\lambda = 2$  für Abb. 171b.

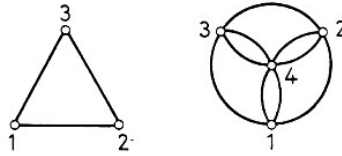


Abb. 171 a) b)

In beiden Fällen gibt es zu jedem Element genau einen Block, dem es nicht angehört.

Mit dieser Aussage als Forderung lässt sich aus jeder  $n$ -elementigen Menge mit  $n \geq 3$  ein Blockplan konstruieren: Die  $n$  Teilmengen mit  $n - 1$  Elementen seien die Blöcke, und wir erhalten einen  $(n, n, n - 1, n - 1, n - 2)$ -Blockplan, was leicht zu bestätigen ist.

Eine wesentlich andere Lösung stellt Abb. 168b mit  $v = b = 7$  dar. Mit der Lösung des Kirkmanproblems (vgl. Aufgabe 7) ist es gelungen, einen  $(15, 35, 7, 3, 1)$ -Blockplan anzugeben. Blockpläne, für die  $k = 3$  und  $\lambda = 1$  gilt, heißen Steinersysteme (nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner). Offenbar sind auch die in den Lösungen zu den Aufgaben 1 und 6 konstruierten Blockpläne Steinersysteme.

Aufgabe 9. Welche natürlichen Zahlen  $v$  kommen für Steinersysteme in Frage ?

Lösung: Die Gleichungen (I) und (II) lauten für ein Steinersystem

$$3b = v \cdot r \quad , \quad 2r = v - 1$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass  $v$  ungerade sein muss. Aus beiden Gleichungen leitet man leicht her, dass

$$b = \frac{v(v - 1)}{6}$$

ist, d. h., dass 6 ein Teiler von  $v(v - 1)$  sein muss. Da  $v$  ungerade ist, lässt  $v$  bei der Division durch 6 nur die Reste 1, 3 oder 5. Folglich besitzt  $v$  die Darstellung  $6k + 1$ ,  $6k + 3$  oder  $6k + 5$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). In den ersten beiden Fällen ist  $v(v - 1)$  ein Vielfaches von 6:

$$v(v - 1) = 6k(6k + 1) \quad \text{bzw.} \quad v(v - 1) = 6(2k + 1)(3k + 1)$$

Ist dagegen  $v = 6k + 5$ , dann folgt

$$v(v - 1) = 2(6k + 5)(3k + 2)$$

In diesem Fall ist aber keiner der rechts stehenden Faktoren durch 3, also  $v(v - 1)$  auch nicht durch 6 teilbar.

Für  $v$  kommen nur die natürlichen Zahlen in Frage, die bei der Division durch 6 den Rest 1 oder 3 lassen:  $v = 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, \dots$

Man kann zeigen, dass für diese Zahlen tatsächlich Steinersysteme existieren.

### 4.3 Endliche Ebenen

Wir betrachten das Modell in Abb. 172 und wollen es geometrisch interpretieren. Es sind Punkte gegeben, deren "Verbindungsgeraden"  $g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{41}, g_{13}, g_{24}$  genau zwei Punkte enthalten. (Sie sind als zweielementige Punktmengen aufzufassen.)

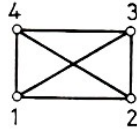


Abb. 172

Wir wollen anhand der folgenden Fragestellungen die uns gewohnte (ebene) euklidische Geometrie mit der "Geometrie" vergleichen, für die uns in Abb. 172 ein Beispiel gegeben ist.

	Euklidische Ebene	Modell
Wie viele Punkte gibt es?	unendlich viele	4
Wie viele Geraden existieren ?	unendlich viele	6
Wie viele Geraden gehen durch einen Punkt?	unendlich viele	3
Wie viele Punkte hat eine Gerade ?	unendlich viele	2
Wie viele Geraden gehen durch zwei Punkte ?	1	1
Wie viele Parallelen gibt es zu einer Geraden durch einen Punkt ?	1	1

Geraden  $g$  und  $h$  heißen parallel (in Zeichen:  $g \parallel h$ ), wenn  $g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$  ist. Nach dieser Erklärung sind die Geraden  $g_{14}$  und  $g_{23}$  im Modell parallel. Das trifft z. B. auch für die Geraden  $g_{13}$  und  $g_{24}$  zu.

Damit haben wir Eigenschaften einer endlichen Ebene untersucht. Eine endliche Ebene wird durch die folgenden Axiome beschrieben:

- A1. Zu je zwei beliebigen Punkten existiert genau eine Verbindungsgerade.
- A2. Zu jeder beliebigen Geraden  $g$  und zu jedem Punkt  $P$  gibt es genau eine Parallele zu  $g$  durch  $P$ .
- A3. Es gibt drei nicht kollineare Punkte, d. h. drei Punkte, die auf keiner Geraden liegen.
- A4 Die Ebene enthält nur endlich viele Punkte.

Aus A2 folgt eine wichtige Eigenschaft der Parallelität: Sind die Geraden  $f, g$  zu einer dritten Geraden  $h$  parallel, dann sind sie auch untereinander parallel.

Nach A1 haben zwei nicht parallele Geraden genau einen gemeinsamen Punkt, ihren Schnittpunkt.

Aufgabe 1. Man zeige, dass sämtliche Geraden einer endlichen Ebene gleich viele Punkte enthalten.

Lösung: Gegeben seien zwei Geraden  $g$  und  $h$  sowie Punkte  $P \in g \setminus h$  und  $Q \in h \setminus g$ . Um die Behauptung zu beweisen, bilden wir die Punkte von  $g$  eineindeutig auf die Punkte von  $h$  ab. Dazu führen wir die Verbindungsgerade  $f$  von  $P$  und  $Q$  ein (Abb. 173a).

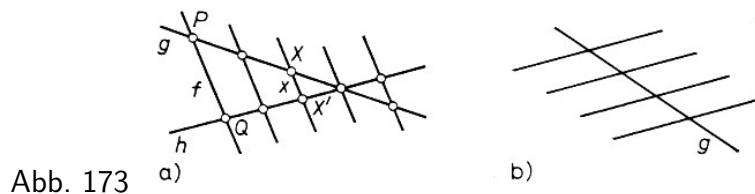


Abb. 173

Durch jeden Punkt  $X$  von  $g$  gibt es nach A2 genau eine Parallele  $x$  zu  $f$ . Die Gerade  $x$  schneidet  $h$  in einem Punkt  $X'$ . Durch dieses Verfahren haben wir eine Abbildung von  $g$  in  $h$  hergestellt. Die Abbildung hat folgende Eigenschaften:

(1) Verschiedenen Punkten  $X, Y$  auf  $g$  entsprechen verschiedene Punkte  $X', Y'$  auf  $h$ . Denn aus  $X' = Y'$  folgt  $x = y$  nach A2 (zwei verschiedene Parallele kann es durch einen Punkt zu einer Geraden nicht geben). Dann wäre aber auch  $X = Y$ .

(2) Zu jedem Punkt  $Z$  auf  $h$  kann man einen Punkt angeben, der auf  $Z$  abgebildet wird. Die Parallele durch  $Z$  zu  $f$  schneidet  $g$ . Der Schnittpunkt ist offenbar Originalpunkt von  $Z$ .

Auf Grund von (1) und (2) bildet unsere Abbildung die Punkte von  $g$  eineindeutig auf die Punkte von  $h$  ab. Liegen also auf  $g$  genau  $n$  Punkte, dann auch auf  $h$ .

Ist  $E$  eine endliche Ebene, dann heißt die Anzahl der Punkte, die auf einer Geraden liegen, die Ordnung von  $E$ .

Die Aufgabe 1 zeigt, dass diese Erklärung wirklich unabhängig von der ausgewählten Geraden ist.

Die Menge aller Geraden, die zu einer festen Geraden parallel sind, heißt Parallelenbüschel.

Aufgabe 2. Für eine endliche Ebene der Ordnung  $n$  bestimme man die Anzahl a) der Geraden eines Parallelenbüschels, b) der Geraden durch einen Punkt, c) aller Punkte, d) aller Parallelenbüschel, e) aller Geraden.

Lösung: a) Wir wählen eine Gerade  $g$ , die dem gegebenen Büschel nicht angehört. Jede Büschelgerade ist dann nicht parallel zu  $g$ , schneidet also  $g$  in einem Punkt.

Umgekehrt geht durch jeden Punkt von  $g$  (nach A2) auch genau eine Büschelgerade (Abb. 173b). Daher enthält das Büschel genauso viele Geraden, wie es Punkte auf  $g$  gibt, also genau  $n$  Geraden.

b) Um die Geraden durch einen Punkt  $P$  abzuführen, wählen wir eine Gerade  $g$ , die  $P$  nicht enthält. Jede Gerade durch  $P$  geht dann entweder durch einen Punkt von  $g$ , oder sie ist zu  $g$  parallel (Abb. 174a).

Umgekehrt kann man jeden Punkt von  $g$  nach A1 mit  $P$  durch genau eine Gerade verbinden. Es gibt also eine eineindeutige Abbildung von der Menge der  $g$  schneidenden Geraden durch  $P$  auf die Menge der Punkte von  $g$ . Auf  $g$  liegen  $n$  Punkte, also gehen durch  $P$  insgesamt  $n + 1$  Geraden.

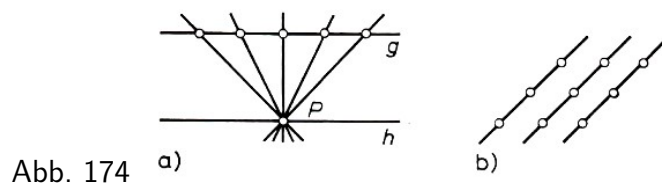


Abb. 174 a)

b)

c) Ein Parallelenbüschel enthält sämtliche Punkte der Ebene (warum?). Auf jeder der  $n$  Geraden des Büschels liegen  $n$  Punkte. Die endliche Ebene der Ordnung  $n$  enthält also  $n^2$  Punkte (Abb. 174b).

d) Es sei  $P$  ein beliebiger Punkt. Jeder Geraden  $g$  durch  $P$  können wir genau ein Parallelenbüschel zuordnen, nämlich die Menge der zu  $g$  parallelen Geraden der Ebene. Zwei verschiedene Geraden  $g, h$  durch  $P$  erzeugen auch verschiedene Büschel (denn für Geraden  $g, h \neq g$  durch  $P$  gilt  $g \nparallel h$ ).

Ist umgekehrt ein beliebiges Parallelenbüschel gegeben, dann geht nach A2 genau eine Büschelgerade durch  $P$ . Es gibt also so viele Parallelenbüschel, wie es Geraden durch einen Punkt gibt, folglich  $n + 1$  Parallelenbüschel

e) Jede Gerade gehört genau einem Parallelenbüschel an. Zwei verschiedene Büschel enthalten

keine Gerade gemeinsam. Da es  $n + 1$  Büschel gibt, die nach a) je  $n$  Geraden enthalten, gibt es insgesamt  $n(n + 1)$  Geraden.

Wir haben zu Beginn dieses Abschnitts ein Modell für eine endliche Ebene der Ordnung 2 kennengelernt. Gelingt es, auch für höhere Ordnungen endliche Ebenen zu konstruieren?

Es sei an dieser Stelle gleich vor einem Trugschluss gewarnt: Wir haben zwar Aussagen über beliebige Ebenen der Ordnung  $n$  gemacht (vgl. Aufgabe 2), aber diese Aussagen hatten alle die logische Form: Wenn  $E$  eine endliche Ebene der Ordnung  $n$  ist, dann gilt für  $E$  ...

Daraus folgt keineswegs, dass es für jede natürliche Zahl  $n > 2$  eine Ebene der Ordnung  $n$  gibt (das gilt beispielsweise nicht für  $n = 6, 14, 21$ ). Wir haben aber bereits endliche Ebenen der Ordnung 3 bzw. 4 kennengelernt. Um das einzusehen, brauchen wir nur zwei bereits gelöste Aufgaben "umzudeuten".

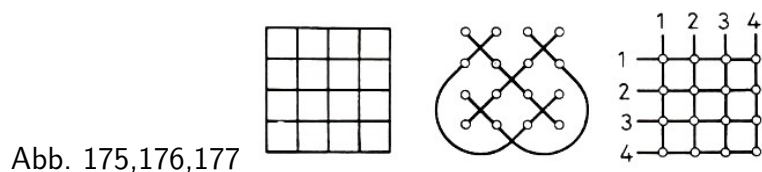
**Aufgabe 3.** Man zeige, dass drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 4 eine endliche Ebene der Ordnung 4 definieren. Dazu fasse man die 16 Felder eines vierreihigen Quadrates  $Q$  (vgl. Abb. 175) als Punkte und folgende Mengen als Geraden auf: die Zeilen von  $Q$ , die Spalten von  $Q$  und für jedes der drei lateinischen Quadrate die gleichbezeichneten Felder.

**Lösung:** Wir haben in 4.1. (vgl. dort Aufgabe 5) drei paarweise orthogonale lateinische Quadrate  $L_1, L_2, L_3$  der Ordnung 4 konstruieren können. Zur besseren Orientierung seien sie hier noch einmal angegeben:

$L_1 :$	<table style="border: none; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	4	2	1	4	3	3	4	1	2	4	3	2	1	$L_2 :$	<table style="border: none; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	3	4	3	4	1	2	4	3	2	1	2	1	4	3	$L_3 :$	<table style="border: none; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	1	2	3	4	4	3	2	1	2	1	4	3	3	4	1	2
1	2	3	4																																																		
2	1	4	3																																																		
3	4	1	2																																																		
4	3	2	1																																																		
1	2	3	4																																																		
3	4	1	2																																																		
4	3	2	1																																																		
2	1	4	3																																																		
1	2	3	4																																																		
4	3	2	1																																																		
2	1	4	3																																																		
3	4	1	2																																																		

Die Lösung der Aufgabe ist leicht, wenn man sich auf die im Anschluss an die Lösung der Aufgabe 5 in 4.1. angegebenen Eigenschaften (1) bis (6) der Linienscharn (= Geradenscharn) stützt. Wir haben uns davon zu überzeugen, dass die vier Axiome A1 bis A4 für unsere 16 Punkte und  $4 \cdot 5 = 20$  Geraden erfüllt sind.

Axiom A1 folgt sofort aus (5). Es sei nun  $P$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade. Liegt  $P$  auf  $g$ , dann ist offenbar  $g$  einzige Parallele durch  $P$  zu  $g$ . Im Fall  $P \notin g$  betrachte man die durch  $g$  erzeugte Geradenschar. Nach (2) geht durch  $P$  genau eine Gerade  $h$  dieser Schar;  $g$  und  $h$  sind punktfremd, also parallel.



Eine weitere Parallele durch  $P$  zu  $g$  kann es nicht geben, denn nach (6) schneidet jede Gerade aus einer anderen Schar die Gerade  $g$  in einem Punkt. Damit ist A2 bewiesen.

Es ist auch leicht, drei nicht kollineare Punkte anzugeben. Man betrachte z. B. die ersten beiden Felder der ersten Zeile und das erste Feld der zweiten Zeile von  $Q$ . Durch diese drei Punkte geht keine von uns als Gerade ausgezeichnete Punktmenge. Dass A4 erfüllt ist, ist klar.

Das von dem lateinischen Quadrat  $L_1$  erzeugte Parallelenbüschel wurde in Abb. 176 dargestellt. Man entwerfe analoge Bilder für die durch  $L_2$  und  $L_3$  definierten Geradenscharn.

Beachten wir die Bemerkung im Anschluss an Aufgabe 6 in 4.1., dann kann man die Behauptung in Aufgabe 3 verallgemeinern:

$n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  definieren eine endliche Ebene der Ordnung  $n$ .

Punkte und Geraden sind auch im allgemeinen Fall so zu definieren, wie in Aufgabe 3 für  $n = 4$  angegeben. Der Beweis der Eigenschaften A1 bis A4 erfordert keine neuen Überlegungen.

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass auch die Umkehrung der obigen Behauptung richtig ist; der Beweis ist aufwendig.

Aufgabe 4. Man zeige: Jeder endlichen Ebene  $E$  der Ordnung  $n$  kann man  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  zuordnen.

Lösung: Wir zeichnen zwei Parallelenbüschel der Ebene als System von Zeilen bzw. Spalten aus und nummerieren sie der Reihe nach; in Abb. 177 ist das für  $n = 4$  veranschaulicht.

Es sei nun  $B$  ein drittes Parallelenbüschel, das von den beiden gegebenen verschieden ist. Auch die Geraden von  $B$  nummerieren wir willkürlich von 1 bis  $n$ .

Die nummerierten Geraden von  $B$  seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Da  $B$  von den beiden gegebenen Büscheln verschieden ist, schneidet jede Gerade  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) jede Zeile und jede Spalte in genau einem Punkt.

Durch jeden der  $n^2$  Punkte muss auch genau eine Gerade des Büschels  $B$  gehen. Die Punkte, durch die die Gerade  $x_i$  geht, bezeichnen wir mit  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Diese Konstruktion liefert ein lateinisches Quadrat  $L$ .

Beispielsweise tritt in der ersten Zeile von  $L$  jede der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  genau einmal auf, denn jede der Geraden  $x_1, \dots, x_n$  schneidet die erste Zeile, und zwar (nach dem Axiom A2) in verschiedenen Punkten. Dasselbe trifft für die anderen Zeilen und auch für die Spalten zu.

Wir wählen nun ein viertes, von den ersten drei verschiedenes Büschel  $B'$ . Ebenso wie  $B$  liefert  $B'$  ein lateinisches Quadrat  $L'$ . Wir zeigen die Orthogonalität von  $L$  und  $L'$ .

Dazu nehmen wir an, es gäbe Punkte  $P, Q \neq P$ , denen dasselbe Zahlenpaar, etwa  $(1, 3)$  zugeordnet sei. Das bedeutet: Durch die Punkte  $P, Q$  geht die mit 1 bezeichnete Gerade des Büschels  $B$  und die mit 3 bezeichnete Gerade des Büschels  $B'$ . Diese Geraden stimmen aber nach dem Axiom A1 überein, da wir  $P \neq Q$  angenommen hatten.

Die Büschel  $B, B'$  hätten eine gemeinsame Gerade, was aber wegen der Verschiedenheit von  $B$  und  $B'$  nicht möglich ist. Daher ist die Annahme falsch, d. h., jedes Paar  $(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , kommt genau einmal vor. Damit ist die Orthogonalität von  $L, L'$  bewiesen und zugleich folgendes gezeigt:

Zeichnet man von den  $n + 1$  Parallelenbüscheln einer endlichen Ebene der Ordnung  $n$  zwei aus, dann liefern die übrigen Büschel  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate.

Es gibt also einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen endlichen Ebenen der Ordnung  $n$  und Systemen von  $n - 1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$ . Das Resultat von Tarry kann jetzt folgendermaßen gedeutet werden:

Es gibt keine endliche Ebene der Ordnung 6.

Bemerkung. Ist  $n$  eine Primzahlpotenz, dann kann man stets eine endliche Ebene der Ordnung  $n$  konstruieren (und zwar auf analytischem Wege über einen Körper mit  $n$  Elementen statt des Körpers der reellen Zahlen). Solcher Ebene kann man nun nach dem obigen Verfahren  $n - 1$

paarweise orthogonale lateinische Quadrate zuordnen. Das ergibt:

Zu jeder Primzahlpotenz  $n$  (insbesondere zu jeder Primzahl) gibt es stets  $n - 1$  paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung  $n$ .

Aufgabe 5. Man zeige, dass jede endliche Ebene  $E$  als Blockplan (mit den Geraden von  $E$  als Blöcken) aufgefasst werden kann.

Lösung: Die Geraden einer endlichen Ebene können genau dann als Blöcke eines Blockplans gedeutet werden, wenn folgende Bedingungen gelten: a) Durch jeden Punkt geht die gleiche Zahl von Geraden, b) alle Geraden enthalten gleich viele Punkte, c) durch je zwei Punkte gehen gleich viele Geraden.

Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade, d.h., c) ist eine unmittelbare Folge aus A1. Dass auch a) und b) richtig sind, haben wir bereits bei der Lösung von Aufgabe 2 gezeigt. Dieser Aufgabe entnimmt man auch, dass eine endliche Ebene der Ordnung  $n$  als  $(n^2, n(n + 1), n + 1, n, 1)$ -Blockplan aufgefasst werden kann:

$n$	$v$	$b$	$r$	$k$	$\lambda$
2	4	6	3	2	1
3	9	12	4	3	1
4	16	20	5	4	1
5	25	30	6	5	1
6	-	-	-	-	-
7	49	56	8	7	1
$n$	$n^2$	$n(n + 1)$	$n + 1$	$n$	1

Aufgabe 6. Wie viele Dreiecke gibt es in einer endlichen Ebene der Ordnung  $n$ ? (Ein Dreieck fassen wir als dreielementige Punktmenge auf, deren Punkte nicht auf einer Geraden liegen.)

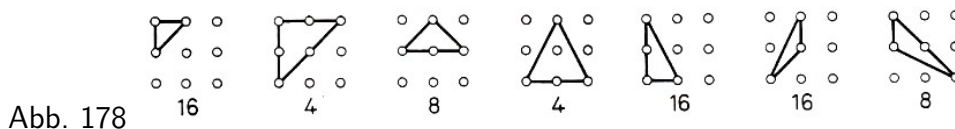
Lösung: Wir subtrahieren von der Anzahl aller Dreiermengen die Anzahl der "kollinearen Dreiermengen" (das sind dreielementige Punktmenge, die kein Dreieck bilden). Es gibt  $n^2$  Punkte, insgesamt also  $\binom{n^2}{3}$  dreielementige Teilmengen.

Es gibt  $n(n + 1)$  Geraden; auf jeder Geraden lassen sich  $\binom{n}{3}$  dreielementige Punktmenge auswählen, d.h.,  $n(n + 1)\binom{n}{3}$  dreielementige Punktmenge bilden keine Dreiecke.

Man erhält daher die Anzahl der Dreiecke zu

$$\binom{n^2}{3} - n(n + 1)\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n^3(n^3 - n^2 - n + 1)$$

Beispielsweise existieren in der 9-Punkte-Ebene  $\binom{9}{3} - 12 = 72$  Dreiecke (Abb. 178).



Ein Parallelogramm ist eine vierelementige Punktmenge  $ABCD$ , für die  $g_{AB} \parallel g_{CD}$  und  $g_{BC} \parallel g_{AD}$  gilt.

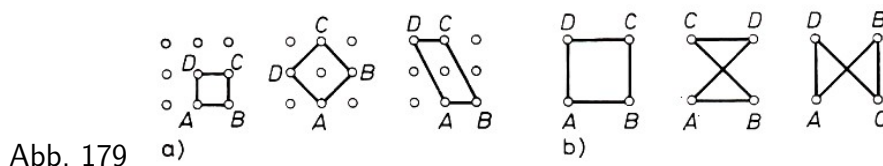


Abb. 179a zeigt einige Parallelogramme der 9-Punkte-Ebene und Abb. 179b sämtliche Parallelogramme der 4-Punkte-Ebene. Man lasse sich durch die letzten beiden Figuren der Abb. 179 b nicht irritieren, auch in diesem Fall sind die Geraden  $g_{AB}$  und  $g_{CD}$  sowie  $g_{AD}$  und  $g_{BC}$  als zweielementige Punktmenge parallel.

Aufgabe 7. Wie viele Parallelogramme gibt es in einer endlichen Ebene der Ordnung  $n$ ?

Lösung: Wir betrachten zwei verschiedene Parallelenbüschel  $B_1, B_2$ .

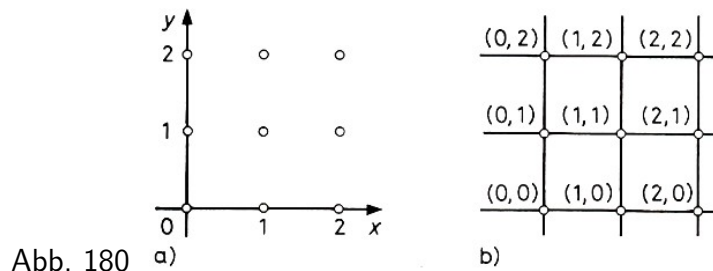
Wählt man aus  $B_1$  bzw.  $B_2$  je ein Parallelenpaar aus, dann bestimmen diese beiden Paare genau ein Parallelogramm. Da jedes Büschel  $n$  Geraden enthält, lassen sich  $\binom{n}{2}$  Parallelenpaare für jedes Büschel bilden. Zwei Büschel erzeugen somit  $\binom{n}{2} \cdot \binom{n}{2}$  Parallelogramme. Da  $n + 1$  Parallelenbüschel vorhanden sind, lassen sich daraus  $\binom{n+1}{2}$  Parallelenbüschelpaare auswählen. Insgesamt gibt es also

$$\binom{n}{2}^2 \binom{n+1}{2} = \frac{1}{8} n^3 (n-1)^2 (n+1) = \frac{1}{8} n^3 (n^3 - n^2 - n + 1)$$

Parallelogramme.

### 4.4 Analytische Geometrie der Ebene der Ordnung 3

Das Modell einer endlichen Ebene der Ordnung 3 ist bereits dargestellt worden (vgl. Abb. 170). Für die neun Punkte wollen wir Koordinaten einführen. Dazu zeichnen wir zwei Geraden als  $x$ - bzw.  $y$ -Achse aus (Abb. 180a).



Jetzt kann jedem Punkt ein Koordinatenpaar  $(x, y)$  zugeordnet werden (Abb. 180b); es gilt  $x, y \in \{0, 1, 2\}$ . Um mit Koordinaten rechnen zu können, benötigen wir eine Neufestlegung der Addition und der Multiplikation, die aus diesem Bereich nicht herausführt.

Beispielsweise lässt sich die Addition  $2 + 2$  nach der bis jetzt bekannten Vorschrift nicht ausführen, da  $4 \notin \{0, 1, 2\}$  ist. Es ist uns also nicht möglich, in der üblichen Weise zu rechnen; darum stellen wir eine für unsere Zwecke abgeänderte Additions- und Multiplikationstabelle auf.

Beide Rechenoperationen werden mit Hilfe der "Division durch 3 mit Rest" festgelegt.

Addition: Man addiert aus  $\{0, 1, 2\}$  zwei Elemente und dividiert die Summe durch 3. Der dabei auftretende Rest sei das Ergebnis der Rechenoperation  $+$ . Er ist Element aus  $\{0, 1, 2\}$ .

Multiplikation: Man multipliziert zwei Elemente aus  $\{0, 1, 2\}$  und dividiert das Produkt durch 3. Der dabei auftretende Rest sei das Ergebnis der Rechenoperation  $\cdot$ . Er ist Element aus  $\{0, 1, 2\}$ .

Additionstabelle:	Multiplikationstabelle:	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>+</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	+	0	1	2	0	0	1	2	1	1	2	0	2	2	0	1	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td><math>\cdot</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	$\cdot$	0	1	2	0	0	0	0	1	0	1	2	2	0	2	1
+	0	1	2																																
0	0	1	2																																
1	1	2	0																																
2	2	0	1																																
$\cdot$	0	1	2																																
0	0	0	0																																
1	0	1	2																																
2	0	2	1																																



Wir haben allen Punkten Koordinatenpaare zugeordnet.

Aufgabe 1. Man versuche, die Punkte einer Geraden durch Gleichungen für ihre Koordinaten zu beschreiben.

Lösung: a) Wir betrachten zunächst im Koordinatensystem (Abb. 180b) die Parallelen zu den Achsen und wählen eine Gerade, die parallel zur  $y$ -Achse verläuft. Die  $x$ -Koordinaten der Punkte einer solchen Geraden sind stets gleich. Die  $y$ -Koordinaten nehmen die Werte 0,1,2 an. Für diese drei Geraden erhalten wir die Gleichungen (Abb. 181a)

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$$

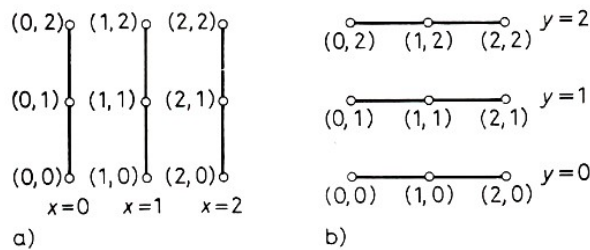


Abb. 181 a)

b) Wir betrachten jetzt die Geraden, die parallel zur  $x$ -Achse verlaufen. Die  $y$ -Koordinaten aller Punkte einer Parallelen zur  $x$ -Achse sind stets gleich. Die  $x$ -Koordinaten nehmen die Werte 0, 1, 2 an. Für diese drei Geraden erhält man die Gleichungen (Abb. 181 b)

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$$

Die bekannte Form der Geradengleichung  $y = mx + n$  lässt sich aus den soeben aufgestellten Gleichungen bereits ablesen. Hier gilt  $m = 0$  und  $n = 0$ ,  $m = 0$  und  $n = 1$  bzw.  $m = 0$  und  $n = 2$ .

Es liegt nun nahe zu untersuchen, ob sich die übrigen Geraden auch mit Hilfe dieser Gleichung beschreiben lassen. Darüber hinaus werden wir feststellen, dass es nützlich war, für unseren endlichen Bereich Rechenvorschriften neu festzulegen.

c) Wir wählen  $m = 1$  und  $n = 0$ , d.h.  $y = x$ . Dieser Gleichung genügen die Punkte (0, 0), (1,1), (2,2), die Punkte einer Geraden des Modells.

Insgesamt erhält man für  $m = 1$  folgende Ergebnisse:

$m$	$n$	Gleichung	Erfüllungsmenge	Bemerkung
1	0	$y = x$	(0, 0), (1,1), (2,2)	Diese drei Geraden sind untereinander parallel (Abb.182a).
1	1	$y = x + 1$	(0,1), (1,2), (2,0)	
1	2	$y = x + 2$	(0, 2), (1,0), (2,1)	

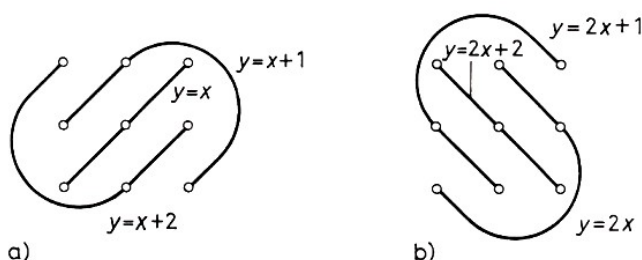


Abb. 182 a)

d) Analoge Ergebnisse erhält man für  $m = 2$  (Abb. 182b).

Weitere Möglichkeiten für die Wahl von  $m$  und  $n$  gibt es nicht. Es ist uns gelungen, alle zwölf im Modell vorhandenen Geraden durch eine Gleichung zu beschreiben. Diese sollen abschließend noch einmal in einer tabellarischen Übersicht angegeben werden:

Gleichung		Bemerkung
a)	$x = 0$ $x = 1$ $x = 2$	Parallelen zur $y$ -Achse
	$m$ $n$ $y = mx + n$	
b)	$0$ $0$ $y = 0$ $1$ $1$ $y = 1$ $2$ $2$ $y = 2$	Parallelen zur $x$ -Achse
c)	$1$ $0$ $y = x$ $1$ $1$ $y = x + 1$ $2$ $2$ $y = x + 2$	Parallelenbüschel
d)	$2$ $0$ $y = 2x$ $1$ $1$ $y = 2x + 1$ $2$ $2$ $y = 2x + 2$	Parallelenbüschel

Bislang wurde nur die Parallelität von Geraden betrachtet. Es soll nun untersucht werden, ob sich auch die Orthogonalität von Geraden in geeigneter Weise auf unser Modell übertragen lässt; dabei bezeichne  $g \perp h$  die Orthogonalität von  $g$  und  $h$ .

In unserem Koordinatensystem soll die  $x$ -Achse orthogonal zur  $y$ -Achse sein, deshalb auch jede Parallele zur  $x$ -Achse orthogonal zu jeder Parallelen zur  $y$ -Achse (Abb. 183a).

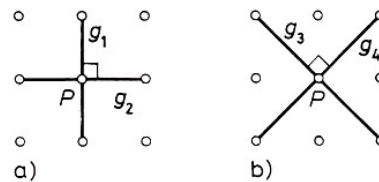


Abb. 183

Außerdem legen wir für die beiden übrigen Parallelenbüschel fest, dass jede Gerade des einen Büschels orthogonal zu jeder Geraden des anderen Büschels ist (Abb. 183b).<sup>5</sup> Daraus ergibt sich, dass durch jeden beliebigen Punkt zwei Paare orthogonaler Geraden gehen. Die Abb. 184 zeigt das für noch zwei weitere Punkte.

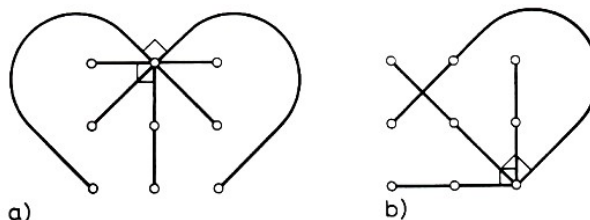


Abb. 184

<sup>5</sup>In der 11. Klasse wird in der analytischen Geometrie der Ebene die Orthogonalitätsbestimmung für zwei Geraden mit den Anstiegen  $m_1$  und  $m_2$  wie folgt angegeben:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Diese Bedingung trifft auch für unsere Geometrie zu. Durch Umformung erhält man  $m_1 m_2 = -1 = 2$ . Diese Gleichung wird von den beiden Parallelenbüscheln, die nicht parallel zu den Achsen verlaufen, erfüllt.

Eine zu einer Geraden  $g$  orthogonale Gerade  $h$  heißt auch ein Lot auf  $g$ . Aus unseren Festsetzungen über die Orthogonalität von Geraden ergibt sich: Durch jeden Punkt gibt es zu jeder Geraden genau ein Lot.

Wir geben einige Beispiele für rechtwinklige Dreiecke an:

$$A_1(0,0); B_1(0,1); C_1(1,0) \qquad A_2(0,0); B_2(1,1); C_2(2,0)$$

In 4.3., Aufgabe 6, ist schon ermittelt worden, dass es insgesamt 72 verschiedene Dreiecke gibt.

Aufgabe 4. Wie viele von den 72 Dreiecken sind rechtwinklig?

Lösung: Gegeben sei ein beliebiges Dreieck  $ABC$ . Die Verbindungsgerade von  $A, C$  sei  $g$ , die von  $B, C$  sei  $h$  und die von  $A, B$  sei die Gerade  $i$ . Da  $ABC$  ein Dreieck ist, gehören die Geraden  $g, h, i$  verschiedenen Parallelenbüscheln an. Es gibt aber nur zwei Paare zueinander orthogonaler Parallelenbüschel.

Ein Seitenpaar des Dreiecks  $ABC$  muss daher aus solch einem orthogonalen Büschelpaar stammen. Man erhält also stets ein rechtwinkliges Dreieck. Alle 72 Dreiecke sind rechtwinklig.

Wählt man im Anschauungsraum zwei beliebige Punkte  $A, B \in g$ , so lässt sich stets der Mittelpunkt  $M(A, B)$  ermitteln. Die Koordinaten von  $M(A, B)$  lassen sich berechnen. Ihre allgemeine Form lautet für  $M(A, B)$  mit  $A(x_1, y_1)$  und  $B(x_2, y_2)$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

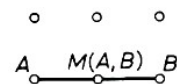
In der Ebene der Ordnung 3 suchen wir die Lösung der Gleichungen

$$2x_M = x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad 2y_M = y_1 + y_2$$

Aufgabe 5. Man bestimme rechnerisch den Mittelpunkt zweier Punkte  $A, B$  und zeichne ihn im Modell ein.

Lösungsbeispiele (Abb. 185).

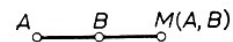
a)  $A(0,1), B(2,1)$



$$2x_M = 0 + 2, x_M = 1; \quad 2y_M = 1 + 1, y_M = 1; \quad M(A,B) = (1,1)$$



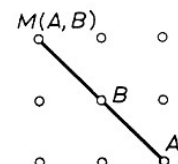
b)  $A(0,1), B(1,1)$



$$2x_M = 0 + 1, x_M = 0.5; \quad 2y_M = 1 + 1, y_M = 1; \quad M(A,B) = (0.5, 1)$$



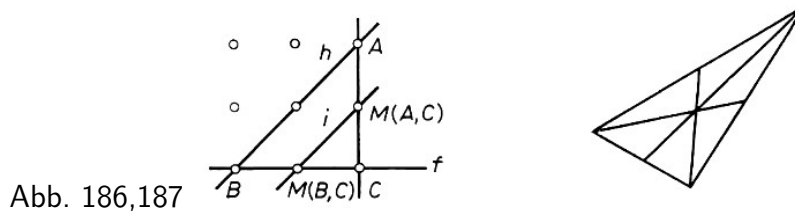
c)  $A(2,0), B(1,1)$



$$2x_M = 2 + 1 = 3, x_M = 1.5; \quad 2y_M = 0 + 1, y_M = 0.5; \quad M(A,B) = (1.5, 0.5)$$

Wie wir an einigen Beispielen gesehen haben, ist der Mittelpunkt zweier beliebiger Punkte auf einer Geraden  $g$  der dritte Punkt auf  $g$ . Diese Aussage gilt allgemein.

Aufgabe 6. Es sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck. Welche Lagebeziehung hat die Verbindungsgerade  $i$  von  $M(A,C)$  und  $M(B,C)$  zu der Verbindungsgeraden  $h$  von  $A$  und  $B$  (Abb. 186)?

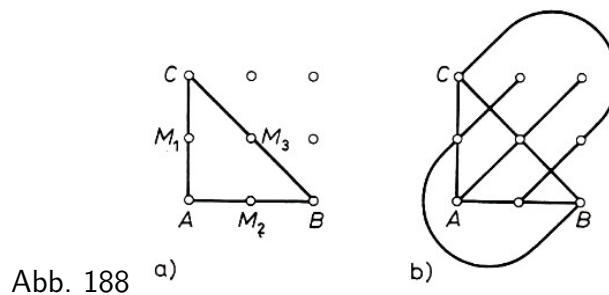


Lösung: Die Parallele  $j$  zu  $h$  durch  $M = M(B,C)$  muss  $g_{AC}$  in einem Punkt  $S$  schneiden. Es gilt  $S \neq C$  wegen  $f \neq h$  und  $S \neq A$ , denn sonst folgte  $A, B, M, C \in h$ . Somit gilt  $S = M(A,C)$  und  $i = j \parallel h$ .

In der euklidischen Ebene schneiden sich in einem beliebigen Dreieck die Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt  $S$  (Abb. 187).

Aufgabe 7. Man überprüfe, ob diese Aussage auch für die endliche Ebene der Ordnung 3 gültig ist.

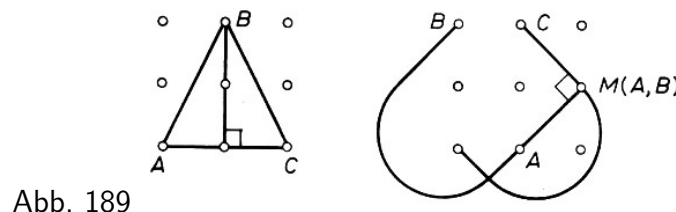
Lösung: Wir betrachten etwa das Dreieck mit den Eckpunkten  $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(0,2)$  und den Mittelpunkten  $M_1, M_2, M_3$  (Abb. 188a). Die Verbindungsgeraden der Seitenmittelpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten sind in Abb. 188b eingezeichnet.



Sie gehören einem Parallelenbüschel an. Folglich gilt die obige Aussage nicht für die endliche Ebene der Ordnung 3, da ein Gegenbeispiel gefunden wurde. (Die Seitenhalbierenden jedes Dreiecks unserer Ebene sind parallel.)

Aus dem Geometrieunterricht ist uns folgende Beziehung bekannt:

Geht in einem Dreieck  $ABC$  die Höhe durch  $C$  und den Mittelpunkt  $M(A,B)$ , dann sind die Seiten  $AC$  und  $BC$  gleichlang. (Das Dreieck ist gleichschenkelig.)



Wir wollen diese Aussage in der endlichen Ebene der Ordnung 3 untersuchen und betrachten dazu das in Abb. 189a gegebene Dreieck. In diesem Dreieck ist der Mittelpunkt von  $A, C$  mit dem Punkt  $B$  verbunden worden. Diese Verbindungsgerade, die Seitenhalbierende von  $AC$ , ist

gleichzeitig Höhe auf  $AC$ . Würde die obige Aussage gelten, so müssten die Seiten  $BA$  und  $CB$  gleichlang sein.

Um die Vermutung zu bestätigen oder zu widerlegen, müssen wir entscheiden können, wann Strecken  $AB$  und  $CD$  gleichlang sind. Das gelingt mit Hilfe der Koordinaten von  $A, B, C, D$ . Gilt etwa  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ , dann definieren wir:

Die Strecken  $AB$  und  $CD$  der endlichen Ebene der Ordnung 3 heißen gleichlang, wenn

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$$

gilt. (Bei dieser Erklärung haben wir uns natürlich von den Ergebnissen der analytischen Geometrie des Anschauungsraumes leiten lassen.)

Aufgabe 8. a) Man prüfe, ob für  $A(1,0), B(0,2)$  und  $C(1,2)$  die Verbindungsgerade von  $M(A, B)$  und  $C$  senkrecht auf  $g_{AB}$  steht, indem man die Geraden im Modell veranschaulicht.  
b) Sind  $AC$  und  $BC$  gleichlang?

Lösung: a) Vgl. Abb. 189b.

b) Man erhält

$$\overline{AC} : (1 - 1)^2 + (2 - 0)^2 = 0 + 4 = 4 \quad , \quad \overline{BC} : (1 - 0)^2 + (2 - 2)^2 = 1 + 0 = 1$$

Aufgabe 9. Gegeben ist eine beliebige Gerade  $g$  mit den drei Punkten  $A, B$  und  $C$ . Man überprüfe, ob die Strecken  $AB$  und  $AC$  gleichlang sind.

Lösung: Wir nehmen an, dass  $g$  keine Parallele zur  $y$ -Achse ist;  $g$  kann dann durch eine Gleichung der Form  $y = mx + n$  dargestellt werden. Man erhält sämtliche Punkte auf  $g$ , wenn man in dieser Gleichung für  $x$  die Werte  $0, 1, 2$  einsetzt:

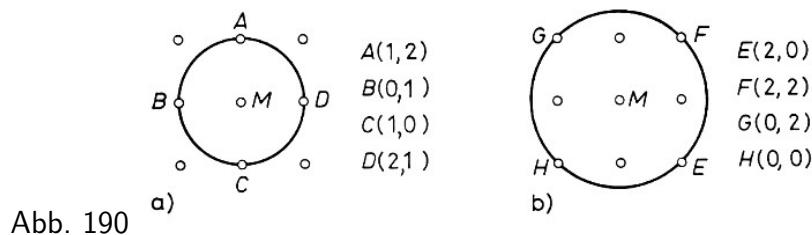
$$A(0, n), \quad B(1, m + n), \quad C(2, 2m + n)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{AB} &: (1 - 0)^2 + (m + n - n)^2 = 1^2 + m^2 = 1 + m^2 \\ \overline{AC} &: (2 - 0)^2 + (2m + n - n)^2 = 2^2 + 2^2 m^2 = 4 + 4m^2 = 4(1 + m^2) \end{aligned}$$

Man erhält dasselbe Resultat, wenn  $g$  eine Parallele der  $y$ -Achse ist, d. h., die Strecken einer beliebigen Geraden sind gleichlang.

In unserer endlichen Ebene der Ordnung 3 lassen sich auch Kreise definieren. Wir erklären: Ein beliebiger Punkt  $X$  gehört dem Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  durch den Punkt  $A$  genau dann an, wenn die Strecken  $AM$  und  $XM$  gleichlang sind. Die Menge dieser Punkte bildet den Kreis.



Als Beispiel geben wir in Abb. 190 zwei Kreise mit dem Mittelpunkt  $M(1,1)$  an. Durch Nachrechnen überzeugt man sich leicht davon, dass jeweils die Strecken  $MA, MB, MC, MD$  gleichlang sind.

Auf dem Kreis um  $M$  durch  $A$  liegt außer den Punkten  $A, B, C, D$  kein weiterer Punkt; alle weiteren Punkte bilden den Kreis um  $M$  durch  $E$ . Es gibt also genau zwei Kreise mit dem Mittelpunkt  $M(1,1)$ .

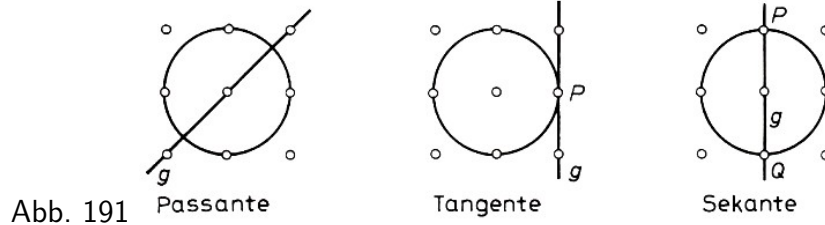
Aufgabe 10. Man beweise, dass es um jeden Punkt als Mittelpunkt genau zwei Kreise gibt.

Lösung: Das gewünschte Resultat ergibt sich aus der folgenden Tabelle für  $P(x,y)$  und  $M(x_M, y_M)$ :

$x - x_M$	$y - y_M$	$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2$	
0	0	$0^2 + 0^2 = 0$	d.h. $P = M$
	1	$0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1$	
	2	$0^2 + 2^2 = 0 + 4 = 4$	
1	0	$1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$	
	1	$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$	
	2	$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$	
2	0	$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$	
	1	$2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$	
	2	$2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$	

Man veranschauliche sich für  $M \neq P(1, 1)$  diese Kreise. Jeder Kreis enthält genau vier Punkte.

Es sei  $k$  ein Kreis. Eine Gerade  $g$  heißt Passante von  $k$ , wenn auf  $g$  kein Punkt von  $k$  liegt (wenn also  $k \cap g = \emptyset$  ist). Enthält  $g$  genau einen Punkt von  $k$ , dann heißt  $g$  Tangente von  $k$ . Schließlich heißt  $g$  Sekante von  $k$ , wenn auf  $g$  genau zwei Punkte von  $k$  liegen (Abb. 191).



Aufgabe 11. Gegeben sei ein Kreis  $k$ .

- Wie viele Tangenten gibt es?
- Wie viele Sekanten hat der Kreis?
- Wie viele Passanten existieren ?
- Welche Lagebeziehung haben zwei beliebige Tangenten eines Kreises zueinander ?

Lösung: Wir überlegen uns zunächst, dass je drei Punkte  $A, B, C$  eines Kreises  $k$  nicht auf einer Geraden liegen können. Da  $k$  genau vier Punkte enthält, muss auf der Verbindungsgeraden zweier dieser Punkte der Punkt  $M$  liegen. Würden  $A, B, C$  auf einer Geraden liegen, dann gäbe es auf dieser Geraden vier Punkte, was aber in unserer Ebene unmöglich ist.

a) Es sei nun  $P$  ein Punkt von  $k$ . Außer  $P$  enthält  $k$  noch drei weitere Punkte  $Q, R, S$ . Die Geraden  $g_{PQ}, g_{PR}, g_{PS}$  sind nach dem eben Festgestellten paarweise verschieden. Die vierte durch  $P$  gehende Gerade muss dann Tangente an den Kreis sein. Durch jeden Kreis- punkt geht also genau eine Tangente. Insgesamt gibt es vier Tangenten.

b) Wir wissen, dass je drei Punkte eines Kreises nicht auf einer Geraden liegen. Zwei Kreis- punkte bestimmen also genau eine Sekante. Die Anzahl der zweielementigen Teilmengen von  $k$  ist daher auch gleich der Anzahl der Sekanten von  $k$ .

Nun enthält eine vierelementige Menge genau  $\binom{4}{2} = 6$  zweielementige Teilmengen. Der Kreis  $k$  hat also sechs Sekanten.

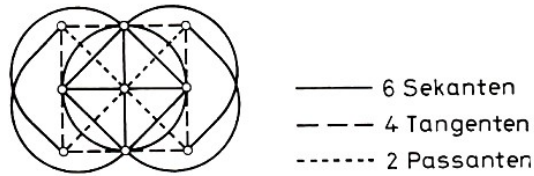


Abb. 192

c) In unserer Ebene gibt es insgesamt zwölf Geraden (Abb. 192). In Bezug auf  $k$  sind von diesen Geraden vier Tangenten und sechs Sekanten. Deshalb sind die übrigen zwei Geraden Passanten. Auf diese Weise haben wir alle Geraden bezüglich eines Kreises in Klassen eingeteilt. Beide Passanten sind orthogonal zueinander und schneiden sich im Kreismittelpunkt.

d) Je zwei beliebige Tangenten sind orthogonal oder parallel zueinander.

Wir wissen, wie man in der euklidischen Geometrie Bildpunkte bei Verschiebungen konstruiert. Abb. 193a zeigt die möglichen Fälle bei einer durch die Punkte  $A, B$  gegebenen Verschiebung.

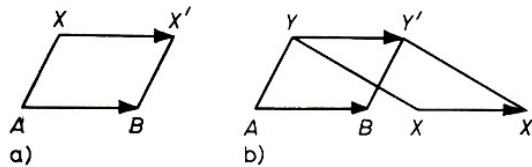


Abb. 193

Die Bildpunkte gewinnt man also allein durch das Ziehen von Parallelen. Daraus entwickeln wir nun für die 9-Punkte-Ebene eine konstruktive Beschreibung für den Bildpunkt  $X'$  von  $X$  bei einer Verschiebung  $A \rightarrow B$ :

$A, B$  seien zwei (verschiedene) Punkte unserer Ebene, und  $X$  sei ein beliebiger Punkt. Liegt  $X$  nicht auf der durch  $A, B$  gehenden Geraden  $g$ , dann ist  $X'$  der vierte Eckpunkt des durch  $X, A, B$  bestimmten Parallelogramms.

Ist dagegen  $X$  ein Punkt von  $g$ , dann wird  $X'$  mit einem Hilfspunkt  $Y \notin g$  so wie in Abb. 193b konstruiert.

$X'$  ist - was sich aus späteren Überlegungen ergibt - im zweiten Fall unabhängig von der Wahl des Punktes  $Y \notin g$ . Weiter legen wir fest, dass die Abbildung, die jeden Punkt fest lässt, ebenfalls eine Verschiebung sein soll. Zu beliebigen Punkten  $A, B$  gibt es also stets genau eine Verschiebung, die  $A$  auf  $B$  abbildet.

Wir wollen die Punkte unserer Ebene wieder durch Koordinaten darstellen (vgl. Abb. 180b).

Aufgabe 12. Man konstruiere das Bild  $X'$  des Punktes  $X$  bei der durch  $A, B$  gegebenen Verschiebung.

- a)  $A(1,0), B(0,1), X(2,1)$ ,      b)  $A(0,0), B(2,2), X(1,0)$ ,  
 c)  $A(0,0), B(1,1), X(1,1)$ ,      d)  $A(0,0), B(1,1), X(2,2)$ .

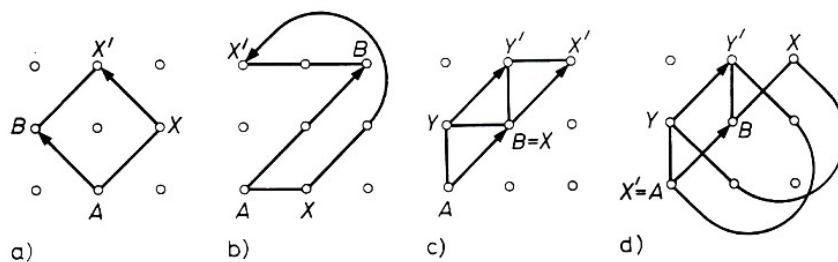


Abb. 194

Durch ein Koordinatenpaar  $(a, b)$  ist genau eine Verschiebung festgelegt, nämlich die Verschiebung, die den Punkt  $O(0,0)$  auf den Punkt  $A(a, b)$  abbildet. Dabei gilt: Der Punkt  $P(x', y')$  ist Bild von  $P(x, y)$  genau dann, wenn  $(x + a, y + b) = (x', y')$  ist.

Es gibt neun Möglichkeiten, dem Punkt  $O(0,0)$  Bildpunkte zuzuweisen, also gibt es auch genau neun Verschiebungen unserer Ebene.

Aus dieser Darstellung folgt, dass die Nacheinanderanwendung von zwei Verschiebungen stets wieder eine Verschiebung ist. Denn sind zwei Verschiebungen durch  $(a, b)$  und  $(a', b')$  gegeben, dann wird ein beliebiger Punkt  $P(x, y)$  bei diesen Verschiebungen folgendermaßen abgebildet:

$$P(x, y) \xrightarrow{1. \text{ Verschiebung}} P(x + a, y + b) \xrightarrow{2. \text{ Verschiebung}} P((x + a) + a', (y + b) + b')$$

Man erhält den gleichen Bildpunkt, wenn man auf  $P(x, y)$  die durch  $(a + a', b + b')$  bestimmte Verschiebung anwendet.

Aufgabe 13. Wie viele Verschiebungen längs einer Geraden  $g$  gibt es?

Lösung: Ist  $g$  nicht zur  $y$ -Achse parallel, dann hat  $g$  eine Gleichung der Form  $y = mx + n$ . Zwei ihrer Punkte  $P_1(x_1, mx_1 + n)$ ,  $P_2(x_2, mx_2 + n)$  bestimmen genau eine Verschiebung. Diese Verschiebung wird durch  $(x_2 - x_1, m(x_2 - x_1))$  festgelegt. Da für  $x_2 - x_1$  nur die Werte 0, 1, 2 in Frage kommen, ergeben sich genau die durch  $(0, 0)$ ,  $(1, m)$ ,  $(2, 2m)$  bestimmten Verschiebungen.

Es gibt also genau drei Verschiebungen längs einer Geraden; denn dass diese Behauptung auch für die Parallelen zur  $y$ -Achse gilt, ist ebenso klar.

Wir wissen, dass es genau neun Verschiebungen gibt. Die durch  $(0, 0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,2)$  festgelegten Verschiebungen bezeichnen wir der Reihe nach mit  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_8$ . Die Nacheinanderanwendung zweier Verschiebungen führt wieder auf eine Verschiebung.

Aufgabe 14. Man fertige eine "Produkttafel" für die Verschiebungen  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_8$  an.

Lösung: Um z.B. die Verschiebungen  $V_2$  und  $V_5$  zu verknüpfen, braucht man nur die Paare, die diese Verschiebungen festlegen, nämlich die Paare  $(0,2)$  und  $(1, 2)$  koordinatenweise zu addieren (s. o.). Man erhält folgende Tafel:

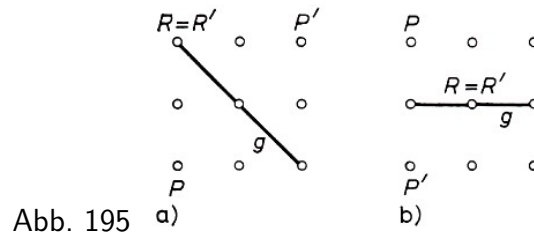
	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$
$V_0$	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$
$V_1$	$V_1$	$V_2$	$V_0$	$V_4$	$V_5$	$V_3$	$V_7$	$V_8$	$V_6$
$V_2$	$V_2$	$V_0$	$V_1$	$V_5$	$V_3$	$V_4$	$V_8$	$V_6$	$V_7$
$V_3$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_0$	$V_1$	$V_2$
$V_4$	$V_4$	$V_5$	$V_3$	$V_7$	$V_8$	$V_6$	$V_1$	$V_2$	$V_0$
$V_5$	$V_5$	$V_3$	$V_4$	$V_8$	$V_6$	$V_7$	$V_2$	$V_0$	$V_1$
$V_6$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_0$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$
$V_7$	$V_7$	$V_8$	$V_6$	$V_1$	$V_2$	$V_0$	$V_4$	$V_5$	$V_3$
$V_8$	$V_8$	$V_6$	$V_7$	$V_2$	$V_0$	$V_1$	$V_5$	$V_3$	$V_4$

Die Überlegungen dieses Abschnitts lassen sich auf endliche Ebenen verallgemeinern, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist. Das ist bei Ebenen mit Primzahlordnung noch relativ einfach. Man übertrage obige Überlegungen auf solche Ebenen, bei denen die Ordnung  $n$  eine nicht zu große Primzahl ist, z. B.  $p = 5$ .



### Anhang. Spiegelungen in der Ebene der Ordnung 3

Wir gehen zunächst davon aus, dass die in Abb. 195 dargestellten Punktabbildungen Spiegelungen an einer Geraden sind. Betrachten wir die angegebene Zuordnung, so stellen wir fest, dass die Ausführung der Geradenspiegelung von unseren bisherigen Vorstellungen nicht abweicht.



Ausgehend von dieser anschaulichen Überlegung definieren wir: Eine Spiegelung an einer Geraden  $g$  soll eine eineindeutige Abbildung der Menge der Punkte auf sich sein, für die die Bildpunkte folgendermaßen zu konstruieren sind:

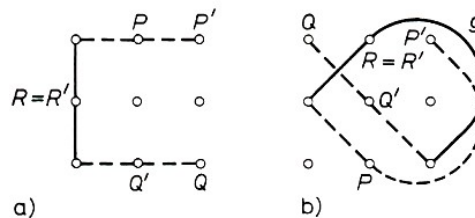
1. Für  $X \in g$  sei  $X' = X$ .
2. Für  $X \notin g$  werde  $X'$  wie folgt bestimmt:  $X, X' \in h \perp g$ ,  $X' \neq X$  und  $X' \notin g$ , d.h., der Fußpunkt des Lotes von  $X$  auf  $g$  ist Mittelpunkt von  $X$  und  $X'$ .

Diese "konstruktive Erklärung" zeigt zugleich, dass es an jeder Geraden genau eine Spiegelung gibt. Sie zeigt außerdem, dass die Nacheinanderanwendung einer Geradenspiegelung mit sich selbst die identische Abbildung auf der 9-Punkte-Ebene ist. Den Bildpunkt von  $X$  bei der Spiegelung an  $g$  bezeichnen wir mit  $X^g$ .

Weiter gilt: Die Spiegelung an einer Geraden  $g$  vertauscht die beiden übrigen Geraden des Parallelenbüschels, dem  $g$  angehört. Die drei zu  $g$  orthogonalen Geraden werden auf sich abgebildet. Sind  $B, B'$  die beiden restlichen Büschel, dann wird jede Gerade von  $B$  auf eine Gerade von  $B'$  abgebildet und umgekehrt (kurz:  $B$  und  $B'$  werden vertauscht). Insbesondere folgt: Geradenspiegelungen bilden Geraden wieder auf Geraden ab.

Aufgabe 15. Man spiegele die Punkte  $P, Q, R$  der Abb. 196 an der  $y$ -Achse bzw. an der Geraden  $g$ .

Abb. 196 zeigt zugleich die Lösungen.

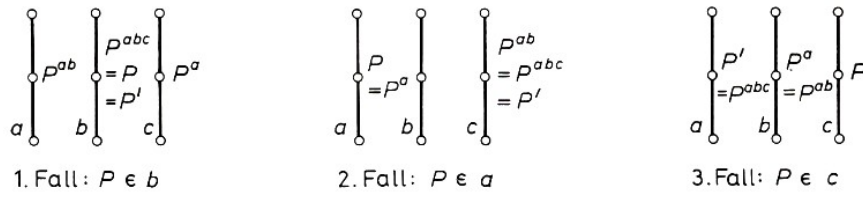


Aufgabe 16. Wie viele verschiedene Geradenspiegelungen gibt es in der endlichen Ebene der Ordnung 3?

Lösung: An jeder Geraden gibt es genau eine Spiegelung. Deshalb gibt es zwölf Geradenspiegelungen.

Aufgabe 17. Es seien  $a, b, c$  die (voneinander verschiedenen) Geraden eines Parallelenbüschels. Man zeige: Die Nacheinanderanwendung der Spiegelungen an  $a, b$  und  $c$  ist gleich der Spiegelung an  $b$ .

Die Lösung geht aus der oben angegebenen Konstruktion für die Bildpunkte und aus Abb. 197 hervor.



Ausgehend von anschaulichen Vorstellungen könnte man die in Abb. 198a dargestellte Punktabbildung als Spiegelung am Punkt  $P$  ansehen.

Wir erklären: Eine Spiegelung am Punkt  $P$  ist eine eindeutige Abbildung aller Punkte auf sich, für die folgendes gilt:

1.  $P$  wird auf sich abgebildet.
2. Ist  $X \neq P$ , dann ist  $P$  der Mittelpunkt von  $X$  und seinem Bildpunkt  $X'$ .

Aus dieser Erklärung geht hervor, dass es an jedem Punkt  $P$  genau eine Spiegelung gibt. Wir schreiben  $X^P$  für den Bildpunkt von  $X$  bei der Spiegelung an  $P$ . Die Nacheinanderanwendung einer Punktspiegelung mit sich selbst ist (ebenso wie bei Geradenspiegelungen) die identische Abbildung der 9-Punkte-Ebene.

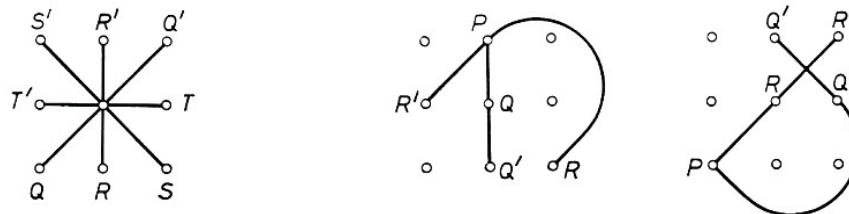


Abb. 198,199

Aufgabe 18. Man spiegele die Punkte  $Q, R$  der Abb. 199 am Punkt  $P$ . Abb. 199 zeigt zugleich die Lösung.

Aufgabe 19. a) Wie viele Punktspiegelungen gibt es in der endlichen Ebene der Ordnung 3?  
b) Man stelle alle Punktspiegelungen durch Permutationen dar.

Lösung: a) Da es an jedem Punkt genau eine Punktspiegelung gibt, hat man insgesamt neun Punktspiegelungen.

b) Werden die neun Punkte der Reihe nach mit den Zahlen  $1, \dots, 9$  bezeichnet, dann erhält man folgende Permutationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20. Man zeige, dass jede Punktspiegelung eine Gerade auf eine parallele Gerade abbildet.

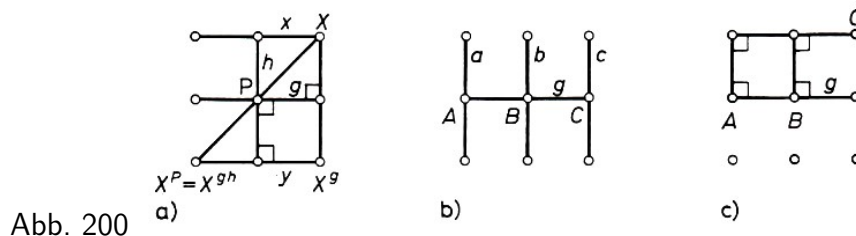
Lösung: Es sei  $P$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade. Im Fall  $P \in g$  gilt  $g^P = g$  und damit auch  $g^P \parallel g$ . Wir setzen nun  $P \notin g$  voraus. Das durch  $g$  bestimmte Parallelenbüschel enthält außer  $g$  noch zwei weitere Geraden  $a$  und  $b$ . Von diesen geht genau eine durch  $P$ , etwa  $a$ .

Aus der Definition der Punktspiegelung folgt dann, dass die Bildpunkte der Punkte auf  $g$  weder auf  $g$  noch auf  $a$  liegen können, also auf  $b$  liegen müssen. Da sie auch paarweise verschieden sind, gilt  $g^P = b$ .

Insbesondere folgt aus diesem Ergebnis, dass Punktspiegelungen Geraden stets wieder auf Geraden abbilden.

Aufgabe 21. Man zeige: Jede Spiegelung an einem Punkt  $P$  lässt sich als Produkt von Spiegelungen an Geraden  $g$  und  $h$  darstellen, wenn  $P \in g, h$  und  $g \perp h$  ist.

Lösung: Wir müssen beweisen, dass stets  $X^{gh} = X^P$  ist. Das gilt sicher, wenn  $X$  auf  $g$  oder  $h$  liegt. Es sei nun  $X$  ein Punkt, der auf keiner dieser Geraden liegt. Wir verbinden  $X$  mit  $P$ . Der dritte Punkt auf dieser Verbindungsgeraden ist  $X^P$  (Abb. 200a).



Wird die Parallele durch  $X$  zu  $g$  mit  $x$  bezeichnet, dann ist sowohl  $x^P$  als auch  $x^g$  die dritte Gerade  $y$  des durch  $g$  bestimmten Parallelenbüschels, und es gilt

$$X^P, X^g (\neq X^P) \in y, \quad y \perp h$$

Hieraus folgt  $X^{gh} = X^P$ . Ebenso folgt natürlich  $X^{hg} = X^P$ .

Aufgabe 22. Es ist zu zeigen, dass die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an Punkten  $A, B, C$  wieder eine Punktspiegelung ist.

Lösung: Falls  $A = B$  oder  $B = C$  gilt, ist die Behauptung offensichtlich richtig: Wir erhalten die Spiegelung an  $C$  bzw. an  $A$ . Wir betrachten nun die weiteren Möglichkeiten.

Fall 1:  $A, B, C$  sind die drei Punkte einer Geraden  $g$  (Abb. 200b).

Nach der vorigen Aufgabe lassen sich die Spiegelungen an den drei Punkten durch die Spiegelung an  $g$  und den drei Geraden  $a, b, c$ , die in  $A, B$  bzw.  $C$  auf  $g$  senkrecht stehen, wie folgt ersetzen.

Es sind nacheinander auszuführen die Spiegelungen an  $a, g; g, b; c, g$ . Das "Produkt" der ersten fünf Geradenspiegelungen verkürzt sich zunächst auf die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an  $a, b$  und  $c$ ; und nach Aufgabe 17 ist dieses Dreierprodukt gar nur die Spiegelung an  $b$ .

Es verbleibt, an den Geraden  $b$  und  $g$  zu spiegeln, d. h. nach Aufgabe 21 am Punkt  $B$ .

Fall 2:  $A \neq B$ , aber  $A = C$ .

Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an  $A, B, C (= A)$  lässt sich durch das "Produkt" der Spiegelungen an  $A, B, P, P, A$  ersetzen, wobei  $P$  den dritten Punkt der Geraden  $g_{AB}$  bezeichne.

Nach zweimaliger Anwendung des Falles 1 verkürzt sich diese "Folge" auf  $B, P, A$  und dann auf die Spiegelung an  $P$ .

Fall 3:  $A, B, C$  liegen auf keiner Geraden (Abb. 200c).

Es seien  $g$  die Verbindungsgerade von  $A$  und  $B$ ,  $h$  ihre Parallele durch  $C$  und  $a, b$  die Lote in  $A$  bzw.  $B$  auf  $g$ .

Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an  $A, B, C$  lässt sich dann ersetzen durch das "Produkt" der Spiegelungen an  $a, g, g, b, C$  bzw.  $a, b, C$  bzw.  $a, h, h, b, C$ . Das ergibt nach den obigen Überlegungen die Spiegelung an einem Punkt von  $h$ .

Bekanntlich ist die Spiegelung an einem Punkt Spezialfall einer Drehung.

Für die endliche Ebene der Ordnung 3 ließen sich Drehungen als geraden- und abständeerhaltende eineindeutige Abbildungen mit genau einem Fixpunkt oder als Nacheinanderausführung von Spiegelungen an zwei Geraden durch einen Punkt einführen. Dann ist es möglich, wieder interessante Aufgaben zu formulieren.

## Literatur

- [1] Karteszi, F., Introduction to Finite Geometries, Budapest 1976.
- [2] Lovasz, L., K.L. Vesztergombi und J. Pelikan, Kombinatorik, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977 (Übersetzung aus dem Ungarischen).
- [3] Pickert, G., Einführung in die endliche Geometrie, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1974.

### Zusatzliteratur

- [4] Botsch, O., Zur Darstellung von Zauberquadraten, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 19 (1966/67) 7, 224-225.
- [5] Botsch, O., Spiel mit Zahlenquadraten. Eine Einführung in Zahlentheorie und Kombinatorik, Salle Verlag, Frankfurt 1967.
- [6] Botsch, O., Zahlenquadrate und Vektorräume, Der Mathematikunterricht 19 (1973) 5, 28-39.
- [7] Denes, J., und A.D. Keedwell, Latin Squares and Their Applications, Akademiai Kiadó, Budapest 1974.
- [8] Kowalewski, G., Alte und neue mathematische Spiele, Teubner, Leipzig- Berlin 1930
- [9] Pickert, G., Von einer kombinatorischen Fragestellung zur räumlichen Geometrie, Potsdamer Forschungen, Reihe B, Heft 3 (1974), 157 - 186.
- [10] Ryser, H.J., Combinatorial Mathematics, Mathematical Association of America 1963.
- [11] Siemon, H., Kollineationsgruppen in der 9-Punkte-Ebene, Der Mathematikunterricht 23 (1977) 6, 48- 68.
- [12] Siemon, H., Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zahlentheorie und Kombinatorik, Klett Verlag, Stuttgart 1981.