

Einfache Aufgaben zur Bestimmung von Extrempunkten

1) Sächsisches Mathematik-Grundkursabitur 2006

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2)$

Geben Sie von der Funktion f den größtmöglichen Definitionsbereich. Berechnen Sie Näherungswerte für die Koordinaten des lokalen Extrempunkts. Geben Sie die Art des lokalen Extrempunkts an.

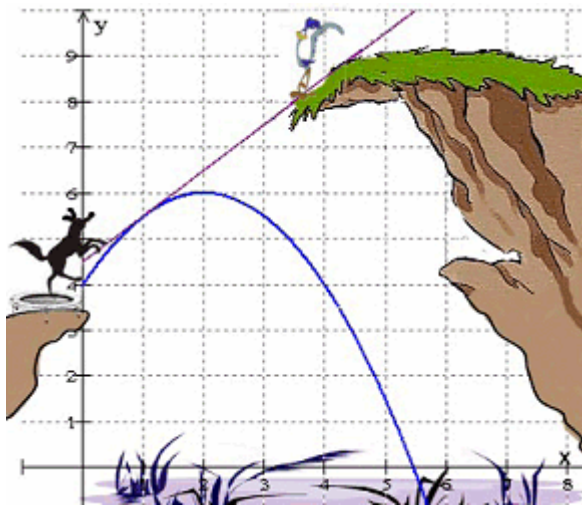
2) Sächsisches Mathematik-Leistungskursabitur 2006

Betrachtet wird die Funktion

$$f_1(x) = (x^3 + x)/(x^2 - 1)$$

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich dieser Funktion an.

Geben Sie Näherungswerte für die Koordinaten der beiden lokalen Extrempunkte an.



3) In der US-amerikanischen Trickfilmserie "Wile E. Coyote and the Road Runner" versucht der Coyote mit allen technischen Hilfsmitteln und mathematisch-physikalischen Verfahren den Road Runner zu fangen. Dass dabei nahezu alle Gesetze der Physik außer Kraft gesetzt werden, ist gerade das Interessante.

In einer Folge will er mit einem Trampolin den Road Runner erreichen. Allerdings ist das Trampolin zu schwach und er bewegt sich auf einer Wurfparabel mit der Gleichung $y = -1/2 (x - 2)^2 + 6$

Aufgaben:

- Welche maximale Höhe erreicht der Coyote, wenn jede Einheit gleich 10 Fuß ist?
- Wie tief ist der Coyote unter Wasser, wenn sein Fall erst bei $x = 7$ gestoppt wird?
- Ersetzt der Coyote das Trampolin durch eine Rakete, so bewegt er sich längs einer Geraden, die die Wurfparabel berührt? Wie lautet die Gleichung der Tangenten?
- Wie weit ist der Coyote ($x = 0$) von dem Road Runner ($y = 8$) entfernt, wenn beide auf der Tangente stehen?

4) Diskutieren Sie die Funktion $y = (x^2 - 3x + 2) / x^2$.
(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema)

5) Diskutieren Sie die Funktion $y = x \ln x$.
(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema)

6) Gegeben ist die Kurvenschar $f_t(x) = 8(x-t) / x^2$

- Wie groß muss man t wählen, damit die Kurve an der Stelle $x=1$ ein Extremum hat?
- Berechnen Sie für die Funktion $f_1(x)$ Asymptoten, Achsenschnittpunkte und Extrempunkte.
- Eine Tangente vom Ursprung an die Kurve zu $f_1(x)$ berührt diese im Punkt $B(u | f(u))$. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und die Gleichung der Tangente.

Lösungen

1) $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, $P(2,72; -1)$, lokales Minimum

$$f' = 2 \ln x / x - 2 / x$$

$$f'' = 4/x^2 - 2 \ln x / x^2$$

2) $D_{f_1} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1\}$; $P_{E_1}(-2,058; -3,3)$, $P_{E_2}(2,058; 3,3)$

$$f' = (x^4 - 4x^2 - 1) / (x^2 - 1)^2$$

$$f'' = 4x(x^2+3) / (x^2 - 1)^3$$

3) a) $f'(x) = -x + 2$; Maximum (2; 6); Höhe 60 Fuß;

b) -65 Fuß

c) $t(x) = x + 4,5$

d) Coyoten-Ort (0; 4,5); Road-Runner-Ort (3,5; 8); Entfernung 49,5 Fuß

4) $y = (x^2 - 3x + 2) / x^2 = 1 - 3/x + 2/x^2$

$$y' = 3/x^2 - 4/x^3$$

$$y'' = -6/x^3 + 12/x^4$$

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen $x^2 - 3x + 2 = 0 \dots x_1 = 1, x_2 = 2$

Extrema $3x - 4 = 0 \dots x = 4/3$ und $y = -1/8$

für $x < 4/3$ ist y' negativ, für $x > 4/3$ ist y' positiv ... relatives Minimum

5) $f'(x) = \ln x + x \cdot 1/x = \ln x + 1$

$$f''(x) = 1/x$$

Nullstelle $x = 1$

Extremstelle $x = 1/e$ Minimum (1/e; -1/e)

6) $f'_t(x) = 8(2t-x)/x^3$

für $x = 1$ ergibt sich mit $f'_t(x) = 0$ der Wert $t = 1/2$.

b) $f''_1(x) = 8(2-x)/x^3$

$$f'''_1(x) = 16(x-3) / x^4$$

Nullstelle $x = 1$; Maximum (2 | 2); Wendepunkt (3 | 16/9)

Asymptoten: $x = 0$; $y = 0$

c) $B(u \mid 8(u-1)/u^2)$

$u = 3/2$; $f'(u) = 32/27 \dots$ Tangente $y = 32/27 x$