# Aufgabensammlung

zum Stoffgebiet "Zahlenfolgen und Grenzwerte" an Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung

Zusammengestellt und bearbeitet von
Prof.Dr.K.Rosenbaum (PH Erfurt/Mühlhausen) und
Dr.B.Licht (Spezialschule Erfurt)

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält im wesentlichen Aufgaben von mittlerem und höherem Schwierigkeitsgrad, die über das Lehrbuch[1)] hinausgehen. Sie ist als Ergänzung zum Buch gedacht, das sich vornehmlich auf elementare, aber ausreichend viele und geschickt zusammengestellte Beispiele beschränkt.
Bei der Reihenfolge der Aufgaben haben wir uns an die folgende am Lehrplan orientierte Gliederung gehalten:



---

[1)] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 11, 1985

## 5.1 Grundbegriffe und Eigenschaften von Zahlenfolgen

### 5.11 Einführung

1. Setzen Sie die folgenden Zahlenfolgen jeweils um vier Glieder fort!

   a) $1;3;5;7;9;\dots$ b) $7;4;1;-2;-5;\dots$

   c) $0;3;8;15;24;\dots$ d) $2\frac{2}{3};1\frac{1}{3};0;-1\frac{1}{3};-2\frac{2}{3};\dots$

   e) $1;2;4;7;11;\dots$ f) $3;5;1;7;-1;\dots$

   g) $2\log_2(\frac{2}{3});\log_2(\frac{4}{3});2;\log_2 12;2\log_2 6;\dots$

   h) $-\sqrt{2};-\sqrt{3};-\sqrt{6};3-\sqrt{2};6-\sqrt{3};\dots$

2. Bestimmen Sie jeweils ein Bildungsgesetz für die Folgen:

   a) $1;3;5;7;9;\dots$ c) $1;\frac{3}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{4};\frac{9}{5};\dots$

   b) $-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{3};1;\frac{5}{3};\dots$ d) $0;\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\dots$

3. Gegeben sind die Zuordnungsvorschriften:

   a) $a_1 = 1;\ a_{k+1} = a_k + k$

   b) $a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$ (Fibonacci-Folge)

   c) $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_{k+2} = a_k \cdot a_{k+1}$

   d) $a_1 = 1;\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$.

   Bilden Sie jeweils die ersten sechs Glieder (im Fall d) Näherungswerte)!

4. Vereinfachen Sie die Brüche in den folgenden Zahlenfolgen und geben Sie jeweils eine Bildungsvorschrift an!

   a) $\frac{2}{2};\ \frac{3}{2+4};\ \frac{4}{2+4+6};\ \frac{5}{2+4+6+8};\ \dots$

   b) $\frac{2}{3};\ \frac{2+4}{3+5};\ \frac{2+4+6}{3+5+7};\ \frac{2+4+6+8}{3+5+7+9};\ \dots$

   c) $\frac{1}{1};\ \frac{1+2}{1+3};\ \frac{1+2+3}{1+3+5};\ \frac{1+2+3+4}{1+3+5+7};\ \dots$

5. Für jedes $n = 1,2,3,\dots$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$. Ferner seien $I_1, I_2, I_3, I_4$ die abgeschlossenen Intervalle $I_1 = [1;2]$; $I_2 = [0{,}53;0{,}531]$; $I_3 = [0{,}509;0{,}51]$ und $I_4 = [0{,}4;0{,}5]$.

Untersuchen Sie für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge liegen. Ist dies der Fall, so ermitteln Sie jeweils die Indizes n aller Glieder $a_n$ in dem betreffenden Intervall.

## 5.12 Arithmetische Folgen

6. Bestimmen Sie in den arithmetischen Folgen
   a) $7;10;13;16;\ldots$
   b) $7;4;1;-2;\ldots$
   c) $2\frac{2}{3};1\frac{1}{3};0;-1\frac{1}{3};\ldots$
   jeweils die Differenz d sowie das 5., 10. und das k-te Glied.

7. In einem in Kahun, südlich der Pyramide von Illahun, gefundenen Papyrusfragment, das in das 2.Jahrtausend vor der Zeitrechnung gehört, findet sich eine 10-gliedrige arithmetische Folge, deren erste Glieder $13\frac{3}{4}$ und $12\frac{11}{12}$ lauten. Wie heißen die anderen Glieder?

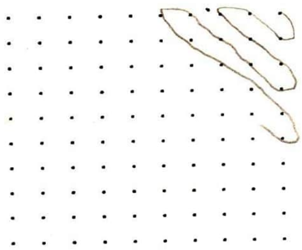
8. Das Anfangsglied einer endlichen arithmetischen Folge ist 0, die Differenz 5, das letzte Glied 30. Wie viele Glieder hat die Folge, wie groß ist die Summe aller Glieder?

r9. Leiten Sie anhand von Abb.1 das von Iamblichus (Anfang des 4.Jahrhunderts n.d.Z.) gefundene Resultat ab, wonach

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 + 9 + \ldots + 3 + 2 + 1 = 10^2$$

ist. Die Punkte sind in Parallelen zu einer Diagonalen zusammenzufassen.

Abb.1



10.a) Gehen Sie in Abb.1 von einem Eckpunkt aus. Fassen Sie danach die ihn umgebenden drei Punkte, dann wieder die diese umgebenden fünf Punkte zusammen usw. und zeigen Sie damit

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 19 = 10^2 .$$

b) Zeigen Sie allgemein, daß sich jede Quadratzahl als Summe der mit 1 beginnenden Folge der ungeraden Zahlen darstellen läßt. Wie heißt die letzte ungerade Zahl dieser Folge?

11. Von einer arithmetischen Folge sind gegeben: $a_4 + a_7 = 100$ und $a_{17} + a_{29} = 800$. Bestimmen Sie das Anfangsglied $a_1$ und die Differenz d!

12. Es sind $a^2$, $b^2$ und $c^2$ aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge. Beweisen Sie, daß dann auch die Zahlen $\frac{1}{b+c}$ ; $\frac{1}{c+a}$ und $\frac{1}{a+b}$ Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge sind!

13. In einem rechtwinkligen Dreieck bilden die drei Seiten eine endliche arithmetische Folge. Sein Flächeninhalt beträgt 150 $cm^2$. Wie groß sind die drei Seiten?

14. Die Raumdiagonale eines Quaders ist 7m. Die Höhe ist das harmonische Mittel zwischen Länge und Breite. Die Summe aller drei Kanten ist 11m. Wie groß sind die drei Kanten?

15. Zwischen die beiden Zahlen 6 und 20 sind 15 Zahlen so dazwischenzuschalten, daß eine arithmetische Folge entsteht. Bestimmen Sie die Differenz d und die Summe aller 17 Folgeglieder!

16. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Die Summe aller Glieder beträgt 30, die Summe ihrer reziproken Werte $\frac{25}{36}$ . Bestimmen Sie die Glieder der Folge!

17. Wie groß ist die Summe aller dreiziffrigen Zahlen?

18. Aus Diophants Schrift über Polygonalzahlen (um 300 v.d.Z.): Beweisen Sie folgenden Satz: Sind p,q,r drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge so ist

$$p^2 + 8qr = (2q + r)^2.$$

19. Aus der Abhandlung "Anaphorikos" von Hypsikles ( 170 v.d.Z.): Beweisen Sie, daß in einer arithmetischen Folge von gerader Gliederzahl die Summe der zweiten Hälfte der Glieder die der ersten Hälfte um ein Vielfaches des Quadrates der halben Gliederzahl übertrifft!

20. Auf Grund von Beobachtungen über die Eigenwärme der Erde wurde festgestellt, daß die Wärme der Erde in 25m Tiefe mit der mittleren Jahrestemperatur des Beobachtungsortes übereinstimmt und von hier ab um je $1^{\circ}C$ mit je 32m Tiefe zunimmt. Wie hoch müßte demnach bei einer mittleren Jahrestemperatur von $10^{\circ}C$ die Temperatur der Erde in einer Tiefe von
a) 345m  b) 14m  c) 20km  sein?

21. Beweisen Sie: Jedes Glied einer arithmetischen Folge ist das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder!

22. Aus dem Papyrus Rhind des Achmes (um 1700 v.d.Z.): 10 Maß Getreide sollen unter 10 Personen so aufgeteilt werden, daß jede folgende Person $\frac{1}{8}$ Maß weniger erhält als die vorhergehende.

23. Beweisen Sie: Wenn die positiven reellen Zahlen a, b, c eine arithmetische Folge bilden, so bilden auch die Zahlen

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} ; \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} ; \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

eine arithmetische Folge.

24. Beweisen Sie: Wenn die positiven reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine arithmetische Folge bilden, so gilt

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} .$$

25. Beweisen Sie:
a) Wenn die von Null verschiedenen reellen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ eine arithmetische Folge bilden, so ist

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n} . \qquad (*)$$

b) Wenn eine Folge $(a_n)$ für alle $n \geq 3$ der Bedingung (*) genügt, dann ist sie eine arithmetische Folge.

26. Zeigen Sie, daß für jede arithmetische Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ gilt:

$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$$
$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0$$
$$a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0 \quad ,$$

allgemein

$$a_1 - \binom{n}{1}a_2 + \binom{n}{2}a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n + (-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1} = 0$$

27. Die Folge 1;4;10;19;... hat die Eigenschaft, daß die Differenzenfolge 3;6;9;... eine arithmetische Folge ist. Geben Sie das n-te Glied der ursprünglichen Folge und die Summe der ersten n Glieder dieser Folge an!

## 5.13 Geometrische Folgen

28. In den geometrischen Folgen
 a) 2;6;18;54;...
 b) $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots$
 c) 1;-3;9;-27;...
 sind jeweils der Quotient q, das fünfte Glied und das allgemeine Glied zu bestimmen.

29. Wie ändert sich der Quotient einer endlichen geometrischen Folge, wenn man ihre Glieder in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt?

30. Ein Papier von 0,1 mm Stärke wird einmal gefaltet. Die entstehende Doppellage wird wieder gefaltet usw. bis das Papier 20 mal gefaltet ist. Wie stark ist die Lage?

31. Beweisen Sie: Jedes Glied einer geometrischen Folge ist das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder.

32. Drei Zahlen, deren Summe 39 ist, bilden eine endliche geometrische Folge. Vermindert man die größte der drei Zahlen um 9, so entsteht eine endliche arithmetische Folge. Wie heißen die drei ursprünglichen Zahlen?

33. Was für eine Folge bilden die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Folge?

34. Was für eine Folge bilden die Zahlen, deren Logarithmen eine arithmetische Folge bilden?

35. Aufgabe von Isaak Newton:

a) Eine geometrische Folge hat drei Glieder. Die Summe dieser Glieder ist 19, und die Summe ihrer Quadrate ist 133. Bestimmen Sie die Glieder der Folge!

b) Eine geometrische Folge hat vier Glieder. Die Summe der beiden äußeren Glieder ist 13, die Summe der beiden mittleren ist 4. Bestimmen Sie die Glieder der Folge!

36. In einer endlichen geometrischen Folge aus drei Gliedern ist die Summe dieser Glieder 35. Die Summe ihrer Quadrate ist 525. Bestimmen Sie die Glieder der Folge!

37. In einer geometrischen Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots$ sei $a_{n+m} = A$ und $a_{n-m} = B$. Bestimmen Sie hieraus $a_n$ und $a_m$. Dabei sei $A \neq 0$.

38. Zwischen je zwei Gliedern der geometrischen Folge 1;2;4;8;... ist noch ein Glied einzuschalten, so daß wieder eine geometrische Folge entsteht. Wie lautet die neue Folge?

39. Zwischen $a^8$ und $b^8$ sollen 7 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine endliche geometrische Folge entsteht. Wie lautet diese?

40. Der Erfinder des Schachspiels erbat sich als Belohnung die Summe der Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn legt, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das vierte 8 usw., auf jedes folgende der 64 Felder immer doppelt so viel als auf das vorhergehende. Das Wievielfache einer Welternte an Weizen (1985 520 Millionen Tonnen) müßte man aufbringen, eine Dezitonne zu 3000000 Körner gerechnet?

41. Jemand erzählt eine Neuigkeit zwei Bekannten. Von diesen erzählt jeder es wieder zwei Bekannten usw.. Man nehme an, daß das Weitersagen jeweils in der nächsten Viertelstunde ge-

schieht und daß außerdem die Neuigkeit stets anderen Menschen, die von ihr nichts wissen, auf diese Weise mitgeteilt wird. Wann werden die 220000 Einwohner der Stadt Erfurt die Neuigkeit wissen, wenn sie um 7 Uhr die Runde zu machen beginnt?

42. Es sei $S_n$ die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Zahlenfolge und $\bar{S}_n$ die Summe der Inversen dieser Glieder. Geben Sie das Produkt $P_n$ der ersten n Glieder der Folge in Abhängigkeit von $S_n$ und $\bar{S}_n$ an.

43. Geben Sie die Summe $1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots11$ an, wobei der letzte Summand eine n-stellige Zahl aus lauter Ziffern 1 ist.

44. Zeigen Sie, daß es eine monoton fallende geometrische Folge $1;\ q;\ q^2;\ \ldots;\ q^n;\ \ldots$ gibt, in der jedes Glied sich von der Summe aller folgenden Glieder um einen konstanten Faktor k unterscheidet. Für welche k ist diese Aufgabe lösbar?

45. Eine unendliche Folge $(a_n)$ mit $a_1 = 0$ genügt der Bedingung
$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2$.
Zeigen Sie, daß $(a_n)$ eine geometrische Folge ist.

## 5.14 Sonstige Folgen

46. Für eine Zahlenfolge $(a_n)$ gelte

$$a_1 = 2\ ;\qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1}\qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

a) Berechnen Sie $a_2$ und $a_3$ und zeigen Sie, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$ gilt.

b) Beweisen Sie, daß die Folge $(a_n)$ streng monoton fallend ist.

47. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} = \frac{1}{3}\,(x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{99})\ .$$

48. Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ die durch $a_n = 3n - 2$, $b_n = a_n^2$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ definierten Zahlenfolgen. Beweisen Sie, daß dann die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ eine arithmetische Zahlenfolge ist.

49. Gegeben ist die Folge $(a_n)$ mit $a_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, die für $n \geqq 1$ mit $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ definiert ist.

a) Bestimmen Sie die ersten vier Glieder der Folge.

b) Zeigen Sie, daß alle Glieder der Folge positive ganze Zahlen sind, die der Rekursionsgleichung $a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$ genügen (vergl. Aufgabe 3b).

50. Aus einer babylonischen Keilschrift:
10 Brüder besitzen $1\frac{2}{3}$ Silberminen. Bei der Teilung wird gleichmäßig abgestuft. Um welchen Betrag müssen die Anteile geringer werden, wenn der achte 6 Schekel erhält? Wieviel bekommt jeder der Brüder? ($1\frac{2}{3}$ Silbermine = 100 Schekel)

51. Aus einem indischen Rechenbuch von Bakhshali (300 bis 400 n.d.Z.):
Ein Reisender legt am 1.Tag 2 Wegeinheiten zurück, an jedem folgenden Tag 3 mehr. Ein zweiter Reisender legt am 1.Tag 3 Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 2 mehr. Wann holt der erste den zweiten Reisenden ein?

## 5.2 Partialsummen

### 5.21 Partialsummen und Summenformeln

52. In den folgenden Zahlenfolgen $(a_n)$ ist jeweils die Partialsummenfolge $(s_n)$ zu bilden, eine explizite Bildungsvorschrift für $s_n$ zu formulieren und zu beweisen:

a) $a_n = \frac{12}{(n + 3)(n + 4)}$

b) $a_n = \frac{1}{2n(n + 1)}$

c) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

d) $a_n = \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)}$

e) $a_n = \frac{1}{(n + 2)(n + 3)}$

f) $a_n = \frac{1}{(n + 1)(n + 2)}$

53. Gegeben ist die Partialsummenfolge $(s_n)$ der Zahlenfolge $(a_n)$ durch $s_n = \frac{n}{2(n + 1)}$ $(n \geqq 1)$. Geben Sie die Glieder $a_1; a_2; a_3$ der Zahlenfolge $(a_n)$ an und ermitteln Sie die explizite Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge $(a_n)$.

54. Zeigen Sie, daß die Partialsummenfolge der Folge $(a_n)$ mit $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geqq 0$, beschränkt ist.

55. In die identische Gleichung $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ setze man der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ ein und addiere die erhaltenen Gleichungen. Durch passende Umformung des Ergebnisses ist die Formel $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ herzuleiten. (Archimedes, um 287 – 212 v.d.Z.)

56. Unter Benutzung der Formel für $(n-1)^4$ ist nachzuweisen, daß sich die Summe der ersten $n$ Kubikzahlen zu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

ergibt. (Nicomachus, etwa 100 n.d.Z.)

57. Zeigen Sie, daß die $n$-te Partialsumme der Folge $1; 3; 6; 10; 15; \ldots; \frac{(k-1)k}{2}; \frac{k(k+1)}{2}; \ldots$ gleich $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ist.

58. Zeigen Sie, daß die $n$-te Partialsumme der Folge $0; 2; 6; 12; \ldots; (k-1)k; \ldots$ gleich $\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ ist.

## 5.22 Partialsummen arithmetischer Folgen

59. Gegeben sind die Folgen $a_1; a_2; \ldots; a_n; a_{n+1}; \ldots; a_{2n}; a_{2n+1}; \ldots; a_{3n}; a_{3n+1}; \ldots$ und $s_1; s_2; s_3; \ldots$ . Zwischen beiden Folgen sollen folgende Beziehungen bestehen:

$s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$s_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}$
$s_3 = a_{2n+1} + a_{2n+2} + \ldots + a_{3n}$
................

Beweisen Sie: Wenn die Folge $(a_n)$ eine arithmetische Folge ist, dann ist auch die Folge $(s_n)$ eine arithmetische Folge.

60. Es sei $(a_n)$ eine arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz $d$. Wir betrachten die Partialsummenfolgen $(s_n)$ und $(z_n)$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{und} \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k .$$

a) Ermitteln Sie $a_1$ und $d$ so, daß $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.
b) Zeigen Sie, daß für beliebige $a_1$, $d$ und alle $n = 1, 2, \ldots$ $z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3} d\right)$ gilt.

61. Es sei $(a_n)$ eine Zahlenfolge und $(s_n)$ die Partialsummenfolge. Ermitteln Sie die ersten 5 Glieder der Folge $(a_n)$, wenn $(a_n)$ eine arithmetische Zahlenfolge ist, für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 225$ gilt.

## 5.23 Partialsummen geometreischer Folgen

62. Es sei $(a_n)$ eine Zahlenfolge und $(s_n)$ die Partialsummenfolge. Ermitteln Sie die ersten fünf Glieder der Folge $(a_n)$, wenn $(a_n)$ eine geometrische Zahlenfolge ist, für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt.

63. Bestimmen Sie jeweils die n-te Partialsumme der geometrischen Folgen $(a_n)$ für $x \neq 1$:

a) $a_n = x^n$ , $n = 0,1,2,\ldots$

b) $a_n = (-\sqrt{x})^n$ , $n = 0,1,2,\ldots$

c) $a_n = x^{2n+1}$ , $n = 0,1,2,\ldots$

64. In einer geometrischen Folge $(a_n)$ betrachten wir die ersten 20 Glieder $a_1$; $a_2$; ... ; $a_{20}$. Die Summe der geradzahligen Glieder sei a, die Summe der ungeradzahligen Glieder sei b. Wie heißen das erste Glied und der Quotient der Folge?

65. Bestimmen Sie die n-te Partialsumme der Folge
$1;\ 2x;\ 3x^2;\ 4x^3;\ \ldots;\ (n+1)x^n;\ \ldots$ .
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 63a).

66. Bestimmen Sie die n-te Partialsumme der Folge
$\frac{1}{2};\ \frac{3}{2^2};\ \frac{5}{2^3};\ \ldots;\ \frac{2n-1}{2^n};\ \ldots$ .

67. Drei Zahlen, deren Summe 217 ist, können als drei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge oder auch als das 2., 9. und 44. Glied einer arithmetischen Folge betrachtet werden. Wieviel Glieder dieser arithmetischen Folge muß man nehmen, um eine Summe von 820 zu erhalten?

68. Ermittle die fünf ersten Glieder der geometrischen Folge, in der das zweite Glied 16 und die Summe der drei ersten Glieder 56 ist!

## 5.3 Konvergenz von Zahlenfolgen

### 5.31 Schranke und Grenze

69. Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie, und geben Sie jeweils eine obere und eine untere Schranke von $(a_n)$ an!

a) $a_n = \dfrac{\cos 3n}{3 \cos n}$  b) $a_n = \dfrac{2\sqrt{n^2 + 8}}{3n + 1}$

c) $a_n = \dfrac{\log_4 n + 5}{\log_2 n + 1}$  d) $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2n^2 + 18n}$

e) $a_n = \dfrac{\sin 8n}{\sin 2n \cdot \cos 2n}$  f) $a_n = \dfrac{n^2 - 40n + 300}{n^2 - 30n + 400}$

g) $a_n = (-1)^{[\frac{2n}{3}]} \dfrac{24n - 4}{6n - 3}$

70. Geben Sie jeweils die untere und obere Grenze der Folge $(b_n)$ an!

a) $b_n = \dfrac{3n^2 + 27n + 42}{2n^2 + 16n + 14}$  b) $b_n = \dfrac{\log_2 n + 1}{\log_4 n}$

c) $b_n = \dfrac{5n^2 + 2n - \sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+1} + 20}{(n + 1)(n + 3)}$

d) $b_n = 5 - \dfrac{1}{\sqrt{n+8}} + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}$  e) $b_n = \dfrac{\sin 5n}{n}$

f) $b_n = \dfrac{\cot n}{\tan 2n} - \dfrac{\cot^2 n}{2}$

71. Untersuchen Sie die Zahlenfolge $(a_n)$ auf Monotonie und Beschränktheit!

a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n + k}$  b) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$  c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

72. Man zeige, daß die Zahl 3 eine obere Schranke der Folge $(c_n)$ ist!

a) $c_n = \dfrac{3 \sin 5n}{5 \sin n}$  b) $c_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  c) $c_n = (20-n)n - 97$

73. Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß $x_1 = 5$ und für alle $n = 1,2,\ldots,999$ $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 16}{2x_n}$ gelten soll. Beweisen Sie, daß für jedes $n = 1,2,\ldots,1000$ die Ungleichung $4 \leqq x_n \leqq 5$ gilt!

74. Für jede reelle Zahl b sei $(a_n)$ diejenige Zahlenfolge, die durch $a_n = \frac{3n+b}{2n-1}$ $(n = 1,2,\ldots)$ (1)

definiert ist. Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \qquad (2)$$

erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder $a_n$ an, die (2) erfüllen.

## 5.32 Bestimmung von Grenzwerten

75. Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen!

a) $a_n = \frac{1000n}{n^2+1}$

b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

c) $c_n = \frac{\sqrt{18n+5} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{8n-3}}$

d) $d_n = \left(1 - \frac{5}{n+1}\right)^{n-2}$

e) $e_n = \sqrt{3n^2+7} - \sqrt{3n^2+2n}$

f) $f_n = \left(\frac{n+18}{n+11}\right)^{n-5}$

g) $g_n = (-1)^n \frac{(n+3)(4-n)}{(8n+1)(n-5)}$

h) $h_n = \cos n\pi \frac{(n+4)(2-n)}{(3n^2+n-1)(n-3)}$

i) $i_n = \sin \frac{(3+n^2)\pi}{(1+2n)(5+2n)}$

j) $j_n = \left(\frac{n^2-n-2}{n^2+2n-8}\right)^{n-3}$

k) $k_n = \cos 3n\pi \frac{(n+2)(7-3n)}{(8-4n)(n+18)}$

l) $l_n = 2\sqrt{n^4-3n^3+2n^2-4n} - 2n^2 + 3n + 1$

m) $m_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

n) $n_m = \frac{(-2)^m + 3^m}{(-2)^{m+1} + 3^{m+1}}$.

76. Zeigen Sie die Konvergenz der Zahlenfolgen mittels $\varepsilon$-Definition!

a) $a_n = \frac{n^2-9}{9n-n^3}$

b) $b_n = \frac{n^2+4n+3}{21n+7n^2}$

c) $c_n = \frac{n^2-3n-10}{15n^2-60}$

d) $d_n = \frac{8n^3-4n^2-24n}{28n^3+84n^2+63n}$

e) $e_n = \frac{n^2-2n+3}{2n^2+4n-4}$

f) $f_n = \frac{1+\log_7 2n}{\log_{49} n}$

77. Bilden Sie die ersten acht Glieder der Folgen und bestimmen Sie eine $\varepsilon$-Umgebung, so daß die gebildeten acht Glieder als einzige außerhalb dieser Umgebung liegen!

a) $a_n = \frac{3}{n^2} \quad (n>0)$

b) $b_n = \frac{n+1}{n-1} \quad (n>1)$

c) $c_n = \frac{n^2+1}{1-n^2} \quad (n>1)$

d) $d_n = \frac{n^2-2n+1}{2n^2+n-3} \quad (n>1)$

e) $e_n = \sqrt{7n^2+8} - \sqrt{7n^2+3n}$

f) $f_n = (\frac{n+5}{n+3})^n$

78. Welcher Index gehört jeweils zu dem Glied $a_n$ der Zahlenfolge $(a_n)$, das als erstes innerhalb der Umgebung mit $\varepsilon = 0{,}01$ liegt?

a) $a_n = \frac{2n}{n^2}$

b) $a_n = \frac{1-2n}{n-1}$

c) $a_n = \frac{n+3}{n-2}$

d) $a_n = \frac{n+2}{n} - 2$

e) $a_n = \frac{3n^2+4n-7}{7n^2-3n+1}$

f) $a_n = \frac{3+\log_2 3n}{\log_8 n}$

79. Ermitteln Sie die Grenzwerte der Folgen!

a) $a_n = \frac{\log_a n}{n} \quad (a>1)$

b) $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$

c) $a_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}$

d) $a_n = \sqrt[3]{n^4} - \sqrt[3]{(n^2-1)^2}$

e) $a_n = \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$

f) $a_n = \frac{3^{2n+1}-7}{9^n+4}$

80. Man zeige, daß die Zahlenfolge $(a_n)$ mit den rekursiv definierten Folgegliedern $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ den Grenzwert $\frac{2}{3}$ besitzt!

## 5.33 Konvergenz von Reihen

81. Bestimme den Grenzwert!

a) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2})$

b) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3})$

c) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{(2n-1)^2}{n^3})$

d) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2})$

82. Zeigen Sie für folgende Reihen an Hand der Definition, daß sie konvergieren, und bestimmen Sie ihre Summe!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

83. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe des Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{3^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$

84. Stellen Sie mit dem Quotientenkriterium fest, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10 \cdot 11 \cdots (10+n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ \ldots\ (1+x^n)}$ ; $(x \neq -1)$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

85. Stellen Sie mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz bzw. Divergenz folgender Reihen fest!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3 - \frac{1}{n}\right)^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n\left(\frac{2}{n}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+3^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

86. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

87. Gegeben sind die Folgen

a) $\frac{1}{1\cdot 2}$ ; $\frac{1}{2\cdot 3}$ ; $\frac{1}{3\cdot 4}$ ; ... ; $\frac{1}{n(n+1)}$ ; ...

b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ ; $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$ ; $\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$ ; ... ; $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ; ... .

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folgen für $n \to \infty$ zu ?

88. Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die beiden ersten Glieder einer Zahlenfolge $(a_n)$. Ferner sei $a_n$ für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder. Man berechne den Grenzwert der Folge der Partialsummen.

89. Es sei $(x_n)$ diejenige Folge von reellen Zahlen, für die $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1}$ $(n = 1,2,\ldots)$ gilt. Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

90. Gegeben sei eine Zahlenfolge $(x_n)$ durch die Rekursionsgleichung $x_{n+1} = x_n(2-x_n)$ mit $0 < x_0 < 1$. Untersuchen Sie $(x_n)$ auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

91. Gegeben ist die Folge $(a_n)$ mit $a_2 = 1$, $a_{n+1} = -\sqrt{2+a_n}$ für alle $n \geqq 1$.

a) Bestimmen Sie $a_{100}$.

b) Ist die Folge konvergent?

92. Für eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen seien folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent zum Wert a.

(2) $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ für alle $n \geqq 1$.

Bestimmen Sie die Glieder der Folge $(a_n)$.

93. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Summe der Reihe an!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}$  b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})$  c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

g) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

## 5.4 Komplexe Übungen

### 5.41 Aufgaben zur Einbeziehung des Computers

94. Das BASIC-Programm

```
10 S=0
20 N=1
30 S=S+N
40 PRINT S
50 N=N+2
60 IF N<=19 THEN 30
70 END
```

druckt eine Zahlenfolge. Bestimmen Sie diese Folge durch das Ausführen des Programms.

95. Durch $a_k = \sqrt{24k+1}$ ist eine Zahlenfolge definiert. Schreiben Sie ein Programm, das die ersten 10 ganzzahligen Glieder dieser Folge samt Index druckt. Formulieren Sie eine Vermutung und beweisen Sie diese.

96. Das Programm

```
10 N=0:C=0
20 A=1:B=1
30 D=6
40 PRINT A
50 N=N+1
60 C=C+D
70 B=B+C
80 A=A+B
90 IF N<=10 THEN 40
100 END
```

druckt eine Zahlenfolge. Ermitteln Sie diese durch Ausführung des Programms.

97. Wenn $k$ von 1 bis $n^2$ läuft, dann läuft $f(k) = [k + \sqrt{k} + \frac{1}{2}]$ bis $n^2 + n$ und überspringt daher genau n Zahlen. Schreiben Sie ein Programm, das die übersprungenen Zahlen druckt. Formulieren Sie eine Vermutung und beweisen Sie diese.

98. Wenn $k$ die Zahlen 1,2,3,4,... durchläuft; welche Zahlen überspringt dann die Funktion $f(k) = [k + \sqrt{2k} + \frac{1}{2}]$ ?

99. Das arithmetisch-harmonische Mittel
Es seien $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$. Wir definieren die Folgen

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \quad ; \quad b_{k+1} = \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k} .$$

a) Schreiben Sie ein Programm, das $(a_k, b_k)$ für $k = 0,1,2,...$ druckt.

b) Experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten $a_0$, $b_0$ und versuchen Sie, $\lim_{k \to \infty} a_k$ und $\lim_{k \to \infty} b_k$ durch $a_0$ und $b_0$ auszudrücken.

c) Beweisen Sie die in b) durch Probieren gefundenen Ergebnisse.

100. Es seien $a_{k-1}$; $a_k$; $a_{k+1}$ drei aufeinanderfolgende Glieder der Fibonacci-Folge. Schreiben Sie ein Programm, das $a_k - a_{k-1}a_{k+1}$ druckt. Formulieren Sie eine Vermutung und beweisen Sie diese.

## 5.42 Anwendungen

101. Nach den Gesetzen der Physik fällt ein Körper im luftleeren Raum in der 1.Sekunde etwa 4,9m, in jeder folgenden Sekunde um 9,8m mehr als in der vorhergehenden. Welchen Raum durchfällt danach ein Körper in 12 Sekunden, und wieviel Meter fällt er in der 12.Sekunde?

102. Eine Zentrifuge läuft mit einer Drehzahl von $a_0$ Umdrehungen pro Minute. Nach Abstellen des Stromes verringert sich die Drehzahl und nimmt nach einer Sekunde den Wert $a_1$ Umdrehungen pro Minute an, nach k Sekunden den Wert $a_k$ Umdrehungen pro Minute.

a) Die Zahlen $a_0; a_1; a_2; ...; a_k; ...$ sind Glieder einer geometrischen Folge. Berechnen Sie die Glieder $a_2$ und $a_3$ dieser Folge für den Fall, daß $a_0 = 1250$ und $a_1 = 1000$ gilt.

b) Die Drehzahl y Umdrehungen pro Minute nach t Sekunden kann beschrieben werden durch eine Exponentialfunktion der Form $y = f(x) = 1250\, e^{-ct}$ mit reellen Zahlen $t \geqq 0$ und $c > 0$. Berechnen Sie c für den Fall, daß $f(1) = 1000$ gilt. Geben Sie in diesem Fall $f(3)$ an.

103. In einem geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h seien Kugeln so einbeschrieben, daß die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen. Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius $r_n$ der n-ten Kugel aus den gegebenen Längen r und h. Weisen Sie insbesondere nach, daß die Folge $(r_n)$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = \frac{h-2r}{h}$ ist.

104. Die Summe einer unendlichen fallenden geometrischen Folge sei 6. Die Summe ihrer ersten vier Glieder ist $5\frac{5}{8}$. Wie heißt das erste Glied dieser Folge?

105. Eine bestimmte Kultur von Bakterien braucht eine Stunde, um sich um ein Prozent zu vergrößern. Wie lange muß man warten, bis sich die Kultur verdoppelt hat?

106. Ein Gefäß von 50l Inhalt ist mit 80-prozentigem Spiritus gefüllt. Wieviel Liter an reinem Spiritus sind noch in dem Gefäß, nachdem man 20 mal 1l der vorhandenen Flüssigkeit ausgeschöpft und dafür jedesmal 1l Wasser hineingegossen hat (Von den durch die chemischen Vorgänge bedingten Volumenänderungen soll abgesehen werden.)?

107. Fünf Bauelemente haben die elektrischen Widerstände $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ und $R_5$. Ihre Zahlenwerte bilden eine geometrische Zahlenfolge. Es sei $R_1 = 10\,\Omega$ und $R_5 = 160\,\Omega$.

a) Berechnen Sie den Quotienten q dieser geometrischen Folge!

b) Berechnen Sie den elektrischen Widerstand R für den Fall, daß die 5 Widerstände in Reihe geschaltet sind!

c) Schaltet man zwei verschiedene dieser 5 Widerstände in Reihe, so erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand. Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich auf diese Weise herstellen?

d) Auch bei Reihenschaltung von je 3 oder je 4 verschiedenen dieser 5 Widerstände erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand. Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich dann insgesamt erzeugen, wenn man alle möglichen Schaltungen von 2 und von 3 und von 4 verschiedenen Widerständen herstellt?

108. Die Maßzahlen des Inkreisradius und der Seiten seien bei einem Dreieck ganzzahlige Glieder einer arithmetischen Folge. Wie groß sind sie, wenn sie so klein wie möglich sind?

109. Man bestimme alle Glieder der Folge $a_k = \sum_{i=0}^{k} 9\cdot 10^i$, die man als Summe aus drei Quadraten natürlicher Zahlen $x, y, z$ darstellen kann!

110. In ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge a wird ein größtmögliches Quadrat so einbeschrieben, daß zwei Quadratseiten auf den Katheten des Dreiecks liegen. Analog werden in den verbleibenden Restflächen jeweils wieder größtmögliche Quadrate einbeschrieben.

a) Wie lang sind die Seiten des ersten so einbeschriebenen Quadrates?

b) Wie oft muß man die Konstruktion wiederholen, damit der Flächeninhalt der verbleibenden Restflächen höchstens 1% des Dreieckinhaltes beträgt?

c) Wie groß ist der Inhalt der Restfläche bei n Wiederholungen der Konstruktion?

111. Wenn $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ eine arithmetische Folge bilden, dann ist $n^2 = (k\cdot n)^{\log_k m}$. Beweisen Sie dieses!

112. Von einer arithmetischen Reihe sei bekannt:

1. $a_1 = 10a + b = x$ ; $a, b \in N$; $1 \leqq a \leqq 9$; $0 \leqq b \leqq 9$
2. $a_{40} = 10c + d = y$ ; $c, d \in N$; $0 \leqq c \leqq 9$; $0 \leqq d \leqq 9$
3. $s_{40} = \sum_{i=1}^{40} a_i = 1000a + 100b + 10c + d.$

Man ermittle $s_{40}$.

113. Man bestimme alle reellen Werte des Parameters a, so daß die Gleichung $16x^4 - ax^3 + (2a+17)x^2 - ax + 16 = 0$ genau vier

verschiedene reelle Wurzeln hat, die eine geometrische Folge bilden.

114. Sei $(a_n)$ eine unendliche Zahlenfolge mit $a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}$; $n = 1,2,3,\ldots$ . Man zeige, daß für $n = 1,2,3,\ldots$ gilt:

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geqq \frac{a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n}}{n} .$$

115. Von einer geometrischen Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ sei bekannt, daß alle Glieder natürliche Zahlen sind, wobei die ersten 3 Glieder vierstellig, die nächsten 2 Glieder 5-stellig, die nächsten drei Glieder 6-stellig und die letzten drei Glieder 7-stellig sind. Man bestimme diese Folge!

116. Die positiven Zahlen $a_{m,n}$; $m = 1,2,\ldots$ ; $n = 1,2,\ldots$ mögen für alle $m$ und $n$ den Bedingungen

1. $a_{m,1} = 1$
2. $a_{m+1,n+1} = \frac{2}{3} a_{m,n} + \frac{1}{3} a_{m+1,n}$
3. $a_{1,n} > a_{1,n+1}$ und $\lim_{n \to \infty} a_{1,n} = 0$

genügen. Man beschreibe das Verhalten der Folgen $(a_{k,n})$, $(a_{n+k,k})$ und $(a_{m,k})$ für $k \to \infty$.

117. Gegeben ist die Folge $(a_n)$, $n = 1,2,3,\ldots$ mit $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = 18a_n - a_{n-1}$. Man beweise, daß alle Zahlen $5a_n^2 - 1$ Quadratzahlen sind.

118. Die Folge $(x_n)$ sei durch $x_0 = 1000$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ gegeben. Man beweise, daß $|x_{30} - \sqrt{2}| < 10^{-6}$ ist.

119. T sei eine Tabelle. Die u-te Zeile bestehe aus den Elementen $a_{u,k}$, mit $1 \leqq k \leqq u$, die gemäß folgender Bildungsvorschrift definiert sind:

$a_{u,1} = \frac{1}{u}$ für $u = 1$

$a_{u,k+1} = a_{u-1,k} - a_{u,k}$ für $u \geqq 2$, $1 \leqq k \leqq u-1$.

Man bestimme das harmonische Mittel der Elemente der 1985-ten Zeile.

120. Man bestimme eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ positiver reeller Zahlen so, daß $a_0 = 1$ und $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ für $n = 0,1,2,\ldots$ ist.

121. $n>3$ natürliche Zahlen seien so auf einem Kreis verteilt, daß für jede dieser Zahlen a der Quotient aus der Summe ihrer beiden Nachbarn und der Zahl a selbst eine natürliche Zahl ist. Man beweise, daß die Summe aller dieser Quotienten
a) nicht kleiner als 2n, b) nicht größer als 3n ist.

122. Beweisen sie, daß in der Partialsummenfolge der harmonischen Reihe kein einziges Glied $s_n$ mit $n \geqq 2$ eine ganze rationale Zahl ist!

## 5.43 Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker

123.(51234)

Die Paare $(x_n, y_n)$ reeller Zahlen $x_n$, $y_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ seien wie folgt definiert: $x_0 = 1$ ; $y_0 = 0$ ; $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ ; $y_{n+1} = x_n + y_n$ für $n \geqq 0$. Man beweise, daß für alle n N die Gleichung $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$ gilt.

124.(171022)

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $a_1, d, b_1, q$ für die folgende Aussage gilt:

(1) Wenn $a_1$ das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge $(a_n)$ ist und

(2) wenn $b_1 = 0$ das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge $(b_n)$ ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften

(3) $a_1 = -3b_1$ (4) $a_2 = 2b_2$ (5) $a_3 = b_3$

(6) d ist eine ganze Zahl.

125.(171245)

Es sei $f_1$, $f_2$, ... eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$f_1(x) = -\sqrt{x^2 + 48}$ ; $f_{k+1}(x) = -\sqrt{x^2 + 6f_k(x)}$ für $k = 1,2,\ldots$

Man ermittle für jedes $n = 1,2,\ldots$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 2x$ sind.

(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge $(a_n)$ beträgt $\frac{13}{2}$ .

131.(251042)

Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \quad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d.h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von $n$ so darstellt, daß zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von $n$ abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).

132.(251245)

Es sei $(p_n)$ die Folge der Primzahlen, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... . Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

133.(251046)

Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festlegungen (1),(2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge (1,9,8,6).

(2) Für jedes $n \geqq 5$ ist $a_n$ die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied $a_n$ in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und (1,9,8,6) lautet.

134.(261242)

Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen $(a_n)$, $n = 1,2,\ldots$, die die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllen:

(1) Für alle ganzen Zahlen $m,n$ mit $n > m > 0$ gilt
$a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$ .

(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$ .

# A u f g a b e n s a m m l u n g

zu den Stoffgebieten 6.1. und 6.2.
"Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit von Funktionen"

zusammengestellt und bearbeitet von einem Autorenkollektiv
an der Spezialschule "Carl Zeiss", Jena

# 6. Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit

## 6.1.1. Wiederholung des Funktionsbegriffes

Es sind die Graphen folgender Funktionen zu zeichnen, und ihre Definitionsbereiche sind anzugeben!

a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x + 2 & \text{für } x < -1 \\ x^2 & \text{für } |x| < 1 \\ 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

e) $y = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{für } x \leq 2 \\ 4x - x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

g) $y = \dfrac{|x|}{x}$

h) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$

i) $y = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

k) $y = \dfrac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

## 6.1.2. Zur Grenzwertdefinition mittels Zahlenfolgen (nach Heine)

### 6.1.2.1.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der jeweils gegebenen Stelle $x_0$ einen Grenzwert haben!

a) $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $\qquad x_0 = 1$

b) $y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1$

c) $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{für } x \leq 2 \\ 4x - x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 2$

d) $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ $\qquad$ für $x_0 = 1$

### 6.1.2.2.

Es ist zu untersuchen, ob die Funktion

$$f(x) = \frac{x - a}{bx - 2} \qquad (b \neq 0)$$

an der Stelle $x_0 = \frac{1}{b}$ den Grenzwert $a - \frac{1}{b}$ hat!

### 6.1.2.3.

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 3 & \text{für } x > 4 \\ mx + n & \text{für } x \leq 4 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie m und n so, daß $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existiert und $f(-2) = 2$ ist!

b) Wie groß müßten m und n sein, wenn man verlangt, daß die Kurve in $x_0 = 4$ keinen Knick aufweist?

### 6.1.3. Zur Grenzwertdefinition nach Cauchy

#### 6.1.3.1.

Es ist zu überprüfen, ob folgende Gleichungen gelten!

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 1) = 17$

d) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2) = 10$

#### 6.1.3.2.

Beweisen Sie, daß $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$ ist. Für eine gegebene Zahl $\varepsilon > 0$ ist eine solche größte Zahl $\delta > 0$ zu ermitteln, daß für beliebiges x aus der $\delta$-Umgebung der Zahl 3 der Funktionswert 2x - 1 in der $\varepsilon$-Umgebung der Zahl 5 liegt. Erläutern Sie das graphisch!

#### 6.1.3.3.

Beweisen Sie, daß $\lim\limits_{x \to -1} (3 - 2x - x^2) = 4$ ist.

Aus welcher größten $\delta$-Umgebung der Zahl -1 ist der Wert x zu nehmen, damit sich der Wert der Funktion $(3 - 2x - x^2)$ von deren Grenzwert um weniger als $\varepsilon = 0{,}0001$ unterscheidet?

### 6.1.4. Grenzwerte für unbeschränkt wachsendes Argument

#### 6.1.4.1.

Berechnen Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}})$

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2})$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x)$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 (\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$

6.1.4.2.

Man bestimme $\lambda$ und $\mu$ aus der Bedingung

$$\lim_{x\to} (\sqrt[3]{1 - x^3} - \lambda x - \mu) = 0$$

## 6.1.5. Grenzwertsätze

6.1.5.1.

Es sind die Grenzwerte der folgenden Funktionen an der jeweiligen Stelle $x_o$ zu berechnen!

a) $y = f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 10}{2x^2 + x - 10}$ $\qquad x_o = 2$

b) $y = f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ $\qquad x_o = 4$

c) $y = f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 9x + 20}$ $\qquad x_o = 5$

d) $y = f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 + 3x + 2}$ $\qquad x_o = -2$

e) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 2x - 15}$ $\qquad x_o = 5$

## 6.1.5.2.

Folgende Grenzwerte sind zu berechnen!

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

g) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sqrt{1 - \tan x} - \sqrt{1 + \tan x}}{\sin 2x}$

j) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

m) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + mx} - 1}{x}$

o) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

p) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

q) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{5x - 1}}$

r) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

### 6.1.6. Spezielle Grenzwerte

Folgende Grenzwerte sind zu berechnen!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a \cdot \sin bx}{cx}$ ; $c \neq 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \frac{\cos 2x \cdot \tan^2 x}{x \cdot \sin x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

j) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin (x + h) - \sin (x - h)}{h}$

k) $\lim\limits_{x \to 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10}$

l) $\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$

n) $\lim\limits_{x \to c} \frac{a^x - a^c}{x - c}$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x + x^2) + \ln (1 - x + x^2)}{x^2}$

p) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln \frac{2a + x}{a + x}$

## 6.2. Stetigkeit von Funktionen

### 6.2.1. Stetigkeitsuntersuchungen mittels $\varepsilon/\delta$-Technik

#### 6.2.1.1.

Man diskutiere mittels $\varepsilon/\delta$-Technik die Stetigkeit der Funktion f (x) für alle $x_0 \in D(f)$.

a) $f(x) = 2x + 3$  b) $f(x) = x^2$  c) $f(x) = x^{-1}$

d) $f(x) = \sin x$  e) $f(x) = [x]$  f) $f(x) = \sqrt{x}$

### 6.2.2. Klassifikation der Unstetigkeiten

#### 6.2.2.1.

Man begründe die Unstetigkeit der Funktionen an der jeweiligen Stelle $x_0$, charakterisiere die Art der Unstetigkeit und skizziere den Graphen der Funktion!

a) $f(x) = x^0$ ; $x_0 = 0$  b) $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ ; $x_0 = 0$

c) $f(x) = x - [x]$; $x_0 = 0$  d) $f(x) = x \cdot [x]$ ; $x_0 \in \mathbb{Z}$

e) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ ; $x_0 = 0$  f) $f(x) = \ln|x|$ ; $x_0 = 0$

g) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ; $x_0 = 0$  h) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ ; $x_0 = 0$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 3 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

k) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

l) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^3}}$ ; $x_0 = 1$

m) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-a}}$ ; $x_0 = 0$

n) $f(x) = e^{-x^2}$ ; $x_0 = 0$

o) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ; $x_0 = 0$

p) $f(x) = x \cdot \ln x$ ; $x_0 = \frac{1}{2}$

q) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

r) $f(x) = \sin(x^2)$ ; $x_0 = 2$

s) $f(x) = 2^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ ; $x_0 = 1$

t) $f(x) = \frac{x}{x} + \frac{1}{x-2}$ ; $x_{01} = 0$, $x_{02} = 2$

u) $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ ; $x_0 = 0$

v) $f(x) = \frac{1}{2 + e^{\frac{1}{x}}}$ ; $x_0 = 0$

w) $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$ ; $x_0 = \pi$

x) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$ ; $x_0 = -1$

y) $f(x) = \frac{16 - x^2}{x - 1}$ ; $x_0 = 1$

## 6.2.3. Stetigkeit in einem Intervall

### 6.2.3.1.

Für welchen Wert von a ist die durch die folgenden Gleichungen gegebene Funktion

$$y = \begin{cases} x \cdot \ln(x^2) & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in einem Intervall $(-\infty; +\infty)$ stetig?

### 6.2.3.2.

Man ermittle diejenigen Werte von x, für die die Funktion $y = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ eine Unstetigkeitsstelle besitzt!

6.2.3.3.

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ |x| & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ ist hinsichtlich Stetigkeit vollständig zu diskutieren, und alle Aussagen sind zu beweisen!

6.2.3.4.

Für welche Werte von x besitzen die folgenden Funktionen Unstetigkeitsstellen?

a) $f(x) = \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

c) $f(x) = \ln \ln (1 + x^2)$

d) $f(x) = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^2 (x - 1)}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

## 6.2.4. Stetigkeit rationaler Funktionen

Ist $x_0$ eine r-fache Nullstelle ($r \in N$; $r \neq 0$) des Nennerpolynoms und eine s-fache Nullstelle ($s \in N$) des Zählerpolynoms einer gebrochenen rationalen Funktion, so liegt

- im Falle $r > s$ eine Polstelle und
- im Falle $r \leq s$ eine hebbare Unstetigkeit vor.

## 6.2.5. Sätze über stetige Funktionen

6.2.5.1.

Beweisen Sie, daß folgende Funktionen f im angegebenen Intervall I eine Nullstelle haben!

a) $f(x) = x^2 - 3;$ $\quad I = \langle 0; 2 \rangle$

b) $f(x) = x^3 + 2x - 8;$ $\quad I = \langle 1; 2 \rangle$

c) $f(x) = x^7 - 12;$ $\quad I = \langle 1; 2 \rangle$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3$ ; $I = \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ Lb. Kl. 11 S. 120

6.2.5.2.

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen im angegebenen Intervall ein Maximum und ein Minimum haben, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls!

a) $f(x) = 5 - x$ ; $\langle 5; 7 \rangle$

b) $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$ ; $(-1; \sqrt{2})$

Lb. Kl. 11 S. 120

c) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ $\langle 0; 5 \rangle$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ ; $\langle 0; 4 \rangle$

# A u f g a b e n s a m m l u n g

für Spezialschulen mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung

Mathematik Kl. 11

## 7.1. Einführung in die Differentialrechnung

zusammengestellt und bearbeitet von Dr. Dieter Kertzsch, Spezialschule Riesa

Inhalt



Anmerkung:
Die Aufgaben sind in Aufgabenblöcken zusammengestellt. Jeder Aufgabenblock enthält Aufgaben in drei Niveaustufen, wobei die Anforderungen von Stufe 1 zu Stufe 3 zunehmen.

Berechnungen von Ableitungen unter Nutzung der Definition
(Aufgaben 1 bis 3)

Berechnen Sie die 1. Ableitung an der Stelle $x_o$, stellen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_o\ (x_o,\ y_o)$ an die Funktion auf, und skizzieren Sie die Funktionen mit ihren Tangenten!

1.1. $f(x) = 2x^2$ $\quad P_o\ (1;\ y_o)$

1.2. $f(x) = 3x - 4x^2$ $\quad P_o\ (1;\ y_o)$

1.3. $f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2$ $\quad P_o\ (1;\ y_o)$

2.1. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1$ $\quad P_o\ (0;\ y_o)$

2.2. $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ $\quad P_o\ (0;\ y_o)$

2.3. $f(x) = -5\ (x^2 - 1)^2 + 3\ (x^2 - 1)$ $\quad P_o\ (0;\ y_o)$

3.1. $f(x) = -\frac{2}{x}$ $\quad P_o\ (1;\ y_o)$

3.2. $f(x) = +x + \frac{1}{x}$ $\quad P_o\ (2;\ y_o)$

3.3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x}$ $\quad P_o\ (1;\ y_o)$

Formales Differenzieren
(Aufgaben 4 bis 16)

Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender trigonometrischer Funktionen!

4.1. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ $\quad (x \neq 0,\ x \in R)$

4.2. $f(x) = \frac{\sin 2x}{(2x-1)^2}$ $\quad (x \neq \frac{1}{2},\ x \in R)$

4.3. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin (x+1)^2}{\cos (x+1)^2}}$ $\quad ((x + 1)^2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k)$

5. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung folgender Funktionen!

5.1. $f(x) = x \cdot \sin x + \cos 2x$

5.2. $f(x) = -2\sqrt{1 + \cos 3x}$

5.3. $f(x) = \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right)$

6. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung folgender Funktionen, und machen Sie die Nenner rational!

6.1. $f(x) = x\sqrt{x}$ $(x \geq 0,\ x \in R)$

6.2. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ $(x \geq 0,\ x \in R)$

6.3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}}$ $(x > 1,\ x \in R)$

7. Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen!

7.1.1. $f(x) = 2 \cdot \sqrt{\sin 2x}$

7.1.2. $f(x) = \frac{-1}{3} \ln \tan 2x$ $(\tan 2x > 0)$

7.2.1. $f(x) = e^{\frac{-1}{\sin x}}$ $(x \neq \pi k)$

7.2.2. $f(x) = \ln\left(\sqrt{4e^{2x} + 4} + 2e^{x}\right)$

7.3.1. $f(x) = a^{\frac{1}{\ln \frac{1}{x}}}$ $(x > 0)$

7.3.2. $f(x) = (\log_a x)^{\frac{-1}{x}}$ $(x,\ a > 0,\ x,\ a \in R)$

8. Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen!

8.1.1. $f(x) = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0,\ x \in R)$

8.2.2. $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}^{\sqrt{a^2 + x^2}}$

8.3.1. $f(x) = \left(\frac{x^x - 1}{x^x}\right)^{\frac{x^x - 1}{x^x}}$ $(x \geq 1,\ x \in R)$

9. Berechnen Sie die erste Ableitung!

9.1.1. $f(x) = 2\sin x^2 + \frac{1}{2}\sin^2 x$

9.1.2. $f(x) = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}$ $(x \neq \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k)$

9.2.1. $f(x) = x \cdot \sin 3x - \frac{x}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k)$

9.2.2. $f(x) = \ln(\tan \frac{x}{2})$ $(x \in (2k\ ,\ (2k+1)\pi)$

9.3.1. $f(x) = \frac{\sin^2 (2x + 1)^2}{2x + 1}$ $(x \neq -\frac{1}{2})$

9.3.2. $f(x) = -x \cdot \cot x + \ln(\sin x) - \frac{x^2}{2}$

$(x \neq \pi k,\ x \in (2\ k,\ (2k + 1)\pi)$

10. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung!

10.1.1. $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x} - \sqrt{2x}}$ $(x > 0)$

10.1.2. $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ $(x > 0)$

10.2.1. $f(x) = \frac{x - \sqrt{\frac{1}{x}}}{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}$ $(x > 0)$

10.2.2. $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$

10.3.1. $f(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x}}{\frac{x}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x}}$ $(x > 0, \quad x \neq 1)$

10.3.2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}}$ $(x > 1)$

11. Berechnen Sie die 1. Ableitung!

11.1.1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ $(x \leq -2, \quad x \geq -1)$

11.1.2. $f(x) = x\sqrt{2 - 3x}$ $(x \leq \frac{2}{3})$

11.2.1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{a + bx}}{x}$ $(x \neq 0, \; a + bx \geq 0)$

11.2.2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a + bx}}$ $(a + bx > 0)$

11.3.1. $f(x) = (-3a + 2bx) \cdot \sqrt[3]{(a + bx)^2}$ $(a, b, \quad x \in R)$

11.3.2. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x^4 + 1}}$ $(x \in R)$

12. Berechnen Sie die 1. Ableitung!

12.1.1. $f(x) = \ln(\tan 2x)$ $x \in (\frac{\pi k}{2}, \; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2})$

12.1.2. $f(x) = e^{\frac{-1}{x}} \cdot \ln x^2$ $(x \neq 0)$

12.2.1. $f(x) = e^{\ln 2x} + e^{\ln \frac{1}{2x}}$ $(x > 0)$

12.2.2. $f(x) = \dfrac{1}{e^{\ln \frac{1}{x}}}$ $(x > 0)$

12.3.1. $f(x) = \frac{\ln (ax)^2}{e^{\ln^2(ax)}}$ $(ax > 0)$

12.3.2. $f(x) = \ln (\sqrt{4e^{2x} + 3} - 2e^{x})$ $(x \in R)$

13. Berechnen Sie die 1. Ableitung!

13.1.1. $f(x) = \sin (2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

13.1.2. $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$

13.2.1. $f(x) = \frac{a^x}{e^x (\ln a - 1)}$ $(a > 0)$

13.2.2. $f(x) = a^{\tan x} \cdot \tan a^{x}$ $(a > 0)$

13.3.1. $f(x) = e^{\sin\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$ $(x \geq -1)$

13.3.2. $f(x) = (1 + x) \ln (1 + x) + (1 - x) \ln (1 - x)$ $(-1 < x < 1)$

14. Berechnen Sie die 1. Ableitung!

14.1. $f(x) = x^{\sin x}$ $(x > 0)$

14.2. $f(x) = (x)^{\sqrt{a^2 + x^2}}$ $(x > 1)$

14.3. $f(x) = \ln (\frac{x^x - 1}{x^x})$ $(x > 1)$

15. Berechnen Sie die 1. Ableitung!

15.1. $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ $(x > 0)$

15.2. $f(x) = \sin x^{\tan x}$ $(x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

15.3. $f(x) = \left(\frac{x^x - 1}{x^x}\right)^{\frac{x^x - 1}{x^x}}$ $(x > 1)$

16. Berechnen Sie die erste Ableitung!

16.1. $f(x) = (x \cdot \cos x)^{x + \cos x}$ $(x \cdot \cos x > 0)$

16.2. $f(x) = (x + \cos x)^{x \cdot \cos x}$ $(x + \cos x > 0)$

16.3. $f(x) = \left(\frac{x^x - 1}{x^x}\right)^{\frac{x^x}{x^x - 1}}$ $(x > 1)$

Ableitungen höherer Ordnungen (Aufgaben 17 bis 18)

Bilden Sie die 1., 2., 3. und 4. Ableitung!
Stellen Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung auf, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion!

17.1. $f(x) = \ln x$ $(x > 0, \quad x \in R)$

17.2. $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$ $(x \neq \frac{-1}{2}, \; x \in R)$

17.3. $f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$ $(a \neq 0, \; x, \; a \in R)$

18.1. $f(x) = \sin x$

18.2. $f(x) = e^{\frac{-x}{a}}$

18.3. $f(x) = \cos^2 x$

Implizites Differenzieren (Aufgaben 19 bis 20)

19.1. Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung!

$x^2 + y^2 - a^2 = 0$

19.2. Bilden Sie y' (1; 1) und y'' (1; 1)!

$x^2 + xy + y^2 - 6 = 0$

19.3. Bilden Sie y' (4; 2)!

$x^y - y^x = 0$ $\qquad (x, y > 0, \quad x, y \in R)$

20.1. Bilden Sie y' und y''!

$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$

20.2. Bilden Sie y' (0; 0)!

$e^x \cdot \sin y - e^{-y} \cdot \cos x = 0$

20.3. Bilden Sie y' $(1; \frac{\pi}{2})$!

$x^2 \sin y - \cos y + \cos^2 y = 0$

Zeigen Sie, daß f die folgenden Differentialgleichungen erfüllt! (Aufgaben 21 bis 22)

21.1. $f(x) = e^x \cdot \cos x$ erfüllt $y^{(4)} + 4y = 0$

21.2. $f(x) = x \cdot e^{\frac{-1}{x}}$ erfüllt $x^3 \cdot \underbrace{y''}_{(-x \cdot y')} + y = 0$ $\qquad (x \neq 0)$

21.3. $f(x) = \frac{x - e^{-x^2}}{2x^2}$ erfüllt $x \cdot y' + 2y = e^{-x^2} + \frac{1}{2x}$

$(x \neq 0)$

22.1. $f(x) = x - \frac{4}{x}$ erfüllt $x^2 \cdot y'' + xy' - y = 0$

$(x \neq 0)$

22.2. $f(x) = e^{-x} - \frac{x}{2} e^{-x}$ erfüllt $y'' - y = e^{-x}$

$(x \neq 0)$

22.3. Suchen Sie eine Funktion f, die die Differentialgleichung $y^4 + 3y' + 2y = 0$ erfüllt!

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
(Aufgaben 23 bis 26)

23. Mittelwertsatz der Differentialrechnung zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten

($f(x + x) \approx f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$, falls $\Delta x$ relativ klein)

23.1.1. $\sqrt{25,04}$

23.1.2. $\frac{1}{\sqrt{4,02}}$

23.2.1. $\sqrt[3]{126}$

23.2.2. $\frac{1}{\sqrt[3]{0,996}}$

23.3. Geben Sie eine brauchbare obere und untere Schranke für den Näherungswert $\sqrt[5]{40}$ an!

24. Mittelwertsatz der Differentialrechnung als Beweismittel

Beweisen Sie, daß gilt:

24.1. $e^x > 1 + x \qquad (x \neq 0,\ x \in R)$

24.2. $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x \qquad (x > 0,\ x \in R)$

24.3. $nb^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1}$

$(a > b > 0,\ a, b \in R)\ ;\ (n > 1,\ n \in N)$

25.1. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3$, $g(x) = 2^x$ und $h(x) = \ln \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie im Intervall $\langle 1, 2 \rangle$ die Abszissen der Punkte, in denen die Tangente parallel zu der Sekante durch die Punkte $P_1\ (1;\ f(1))$, $P_2\ (2;\ f(2))$ verläuft.

25.2. Beweisen Sie, daß für jede Parabel der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt: die Abszisse des Berührungspunktes einer Tangente liegt stets in der Mitte zwischen den Abszissen der Endpunkte einer zur Tangente parallelen Sehne.

25.3. Beweisen Sie folgende Sätze:

- Wenn eine Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$ definiert, in (a, b) differenzierbar und für alle $x \in (a, b)$ die Ableitung Null hat, so ist die Funktion f in diesem Intervall konstant.
- Wenn die beiden Funktionen $f_1$ und $f_2$ in einem Intervall (a, b) gleiche Ableitungen besitzen, dann unterscheiden sich die beiden Funktionen nur um eine additive Konstante.

26. Gegeben sei die Funktion f im Intervall $\langle a, b \rangle$. Bestimmen Sie die Abszisse des Berührungspunktes der Tangente, die parallel zur Sehne durch die Punkte $P_1$ (a; f (a)), $P_2$ (b; f (b)) verläuft!

26.1. $f(x) = |\sin x|$ $\quad\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$; $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

26.2. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ $\quad\langle -1; +1 \rangle$ ; $\langle 0; 1 \rangle$

26.3. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 2 \\ 1, & |x| \geq 2 \end{cases}$ $\quad\langle 0; 2 \rangle$ ; $\langle 0; 1 \rangle$

Anwendungen der Differentialrechnung (Aufgaben 27 bis 37)

27. Monotonieuntersuchungen von Funktionen

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten folgender Funktionen:

27.1. $f(x) = \frac{1}{3}(4x - x^2)$; $\quad x \in R$

27.2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; $\quad (a \neq 0;\ a, b, c \in R)$

27.3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ in dem größtmöglichen Definitionsbereich ($x \in R$)

Benutzen Sie dazu sowohl die Differentialrechnung als auch elementare Verfahren!

28. Kurvendiskussionen von Funktionen

Benutzen Sie effektive Kriterien und beziehen Sie auch globale Extrema ein!

28.1. $f(x) = x^x$ ($x > 0$; $x \in R$)

28.2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$; $x \in R$)

28.3. $f(x) = x^{\frac{\ln x}{x}}$ ($x > 0$; $x \in R$)

29. Extremwerte von Funktionen

29.1. Ermitteln Sie die lokalen und globalen Extrema für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + 1 \qquad (x \in R)$$

29.2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

($a \neq 0$; $a, b, c \in R$).

Wie müssen $(a, b, c) \in R$ gewählt werden, damit f

a) 3 lokale Extrema

b) nur ein lokales Extremum

hat?

29.3.1. Kann die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

($a \neq 0$; $a, b, c \in R$)

für $x = 1$ ein lokales Extremum haben, wenn gilt:

$f(0) = f(2) = 1$ ?

29.3.2. Kann für $x_1$ ein lokales Extremum existieren, wenn gilt: $f(0) = f(x_2) = 1$ und $x_2 > x_1 > 0$ ist?

30. Extremwerte von Funktionen

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f auf Extremwerte an den Stellen $x_0$, an denen sie nicht differenzierbar sind. Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen!

30.1. $f(x) = |x - 1|$ $\qquad x_0 = ?$

30.2. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad x_0 = ?$

30.3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{1 - x^2}$ $\qquad x_0 = ?$

Extremwertaufgaben (Aufgaben 31 bis 35)

31. Einer Kugel vom Radius R soll ein gerader Kreiskegel (r, h) einbeschrieben werden.

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{h}{r}$, damit

31.1. das Volumen des Kreiskegels maximal wird.

31.2. die Mantelfläche des Kreiskegels maximal wird.

31.3. die Oberfläche des Kreiskegels maximal wird.

32. Einer Kugel vom Radius R soll ein gerader Kreiskegel (r, h) umschrieben werden.

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{h}{r}$, damit

32.1. das Volumen des Kreiskegels minimal wird.

32.2. die Mantelfläche des Kreiskegels minimal wird.

32.3. die Oberfläche des Kreiskegels minimal wird.

33. Einer Halbkugel, Radius R, soll ein gerader Kreiskegel (r, h) umschrieben werden.

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{h}{r}$, damit

33.1. das Volumen des Kreiskegels minimal wird.

33.2. die Mantelfläche des Kreiskegels minimal wird.

33.3. die Oberfläche des Kreiskegels minimal wird.

34. Einer Kugel, Radius R, soll ein gerader Kreiszylinder (r, h) einbeschrieben werden.

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{h}{r}$, damit

34.1. das Volumen des Kreiszylinders maximal wird.

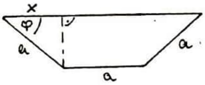
34.2. die Mantelfläche des Kreiszylinders maximal wird.

34.3. die Oberfläche des Kreiszylinders maximal wird.

34.4. die Oberfläche des Kreiszylinders maximal wird.

35.1. Welcher unter allen geraden Kreiskegeln mit konstanter Oberfläche hat das größte Volumen?

35.2. Der Querschnitt einer oben offenen Rinne ist ein gleichschenkliges Trapez. Berechnen Sie x bzw. $\varphi$ für den Fall, daß der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird!




35.3. Aus einem Silberdraht der Länge a soll ein Ohrgehänge angefertigt werden, welches aus einem Kreis mit angelötetem Quadrat besteht. Wie verhält sich der Durchmesser des Kreises zur Seitenlänge des Quadrates, wenn die Summen der Flächeninhalte von Kreis und Quadrat möglichst klein sein soll?

36. Anwendungen der Differentialrechnung
- Beweise -

36.1. Diskutieren Sie das Monotonieverhalten von Funktionen dritten Grades! (Fallunterscheidung)

Die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + a \quad (a \in R)$ hat für keine reelle Zahl a drei verschiedene reelle Nullstellen.

36.2. Beweisen Sie diese Behauptung mit Hilfe der Differentialrechnung!

36.3. Beweisen Sie diese Behauptung ohne Verwendung der Differentialrechnung!
Versuchen Sie, mindestens zwei unterschiedliche Lösungswege zu realisieren!

37. Anwendungen der Differentialrechnung in der Physik

Die Gleichung der Flugbahn eines Geschosses im luftleeren Raum lautet:

$$f(x) = x \cdot \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$v_0$ ..... Anfangsgeschwindigkeit
$\alpha$ ..... Abschußwinkel
$g$ ..... Erdbeschleunigung

37.1. Berechnen Sie die Schußweite für horizontales Gelände, wenn $v_0 = 350 \frac{m}{s}$

$\alpha = 35^0$ betragen.

37.2. Berechnen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes dieser Flugbahn und die Geschwindigkeit des Geschosses im Gipfelpunkt. (Werte aus 37.1. benutzen)

37.3. Leiten Sie die Gleichung der Flugbahn des Geschosses her!

38. Oszillierende Funktionen

38.1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$! Graph!

38.2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$. Zeigen Sie, daß f' an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig ist! Skizze!

38.3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$. Zeigen Sie, daß f' für $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist!

## Ermittlung von Stammfunktionen (Aufgaben 39 bis 56)

### Integration durch Substitution

39.1. $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$

39.2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$

39.3. $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x + 1}{x}}$ $(x > \frac{1}{e})$

40.1. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

40.2. $f(x) = \tan x$

40.3. $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^2 x}$

41.1. $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ $(x > 0)$ $(x \neq 1)$

41.2. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

41.3. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

42.1. $f(x) = \frac{x}{7 + 9x^2}$

42.2. $f(x) = \frac{x \cdot e^{x^2}}{a}$ $(a \in R,\ a \neq 0)$

42.3. $f(x) = (3x^4 + 8x)^7 \cdot (3x^3 + 2)$

Lösen Sie durch partielle Integration!

43.1. $f(x) = x \cdot \cos x$

43.2. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ $(x > 0)$

43.3. $f(x) = \sin^2 x$

44.1. $f(x) = x \cdot e^x$

44.2. $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$

44.3. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

45.1. $f(x) = x \cdot e^{-x}$

45.2. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

45.3. $f(x) = e^x \cdot \sin x$

Lösen Sie durch Partialbruchzerlegung!

46.1. $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ $(x \neq \pm 1)$

46.2. $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

46.3. $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}$

47.1. $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}$

47.2. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x \cdot (x - 1)^3}$

47.3. $f(x) = \frac{4x^4 - x^3 - 46x^2 - 20x + 153}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$

48.1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

48.2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{(x - 2)^3}$

48.3. $f(x) = \dfrac{3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 34x + 1}{(x - 2)^3 (x + 3)^2}$

Wenden Sie verschiedene Integrationsmethoden an!

49.1. $f(x) = x \sqrt{x^2 + a}$ $(a \in R)$

49.2. $f(x) = x \cdot a^x$ $(a > 0, \quad a \in R)$

49.3. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2x}}$

50.1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

50.2. $f(x) = \cos^2 x$

50.3. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

51.1. $f(x) = \dfrac{2 - x}{24x}$

51.2. $f(x) = x^n \cdot \ln x$ $(x > 0, \quad n \in N)$

51.3. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^4 x}$

52.1. $f(x) = \dfrac{1}{5x + 1}$

52.2. $f(x) = e^x \cdot \cos(e^x)$

52.3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

53.1. $f(x) = x^n \cdot \ln x$ $(x > 0, \quad n \in N)$

53.2. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ $(\sin x > 0)$

53.3. $f(x) = \sin^5 x$

54.1. $f(x) = x^{-2} \ln x \qquad (x > 0)$

54.2. $f(x) = \dfrac{\cdot\, x}{ax + b} \qquad (x \neq -\frac{b}{a})$

54.3. $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^n}$

55.1. $f(x) = \dfrac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x}$

55.2. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \qquad (x > 0)$

55.3. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^4 x}$

56.1. $f(x) = \sin\sqrt{x} \qquad (x > 0)$

56.2. $f(x) = (x^2 + x) \cdot \ln(x + 1) \qquad (x > -1)$

56.3. $f(x) = e^x (\sin x + \cos x)$

# A u f g a b e n s a m m l u n g

zum Stoffgebiet 7.2.

"Einführung in die Integralrechnung"

zusammengestellt und bearbeitet durch ein Autorenkollektiv
an der Spezialschule "C. F. Gauß", Frankfurt (O)

## 1. Formale Beispiele zum unbestimmten Integral

a) $\int \sqrt[n]{ax + b}\, dx$

b) $\int (4x - 2)^{-3}\, dx$

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x + 1)^3}}$

d) $\int (x^3 + x^2 - 2x + 2)\cdot(3x^2 + 2x - 2)\, dx$

e) $\int \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\int (\sin \frac{2\pi}{n}t + \cos \frac{2\pi}{n}t)\, dt$

g) $\int (\sin x - \frac{1}{\sin^2 x})\, dx$

h) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

i) $\int (\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx$

j) $\int (2^x + x^2)\, dx$

k) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x + 3}\, dx$

l) $\int \frac{5x + 11}{x^2 - 3x - 10}\, dx$

m) $\int \frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 - 3x^2 - 4}\, dx$

n) $\int \frac{x + 4}{x^2 - 4}\, dx$

o) $\int \frac{6x + 9}{x^2 + 3x - 7}\, dx$

p) $\int \frac{-x^2 - 20x - 24}{x^3 - 2x^2 - 24x}\, dx$

q) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

## 2. Beispiele zum bestimmten Integral

a) $\int_{100}^{101} \frac{1}{5}x^3\, dx$

b) $\int_{-1}^{1} (1 - x^3 \cdot \frac{1}{3})\, dx$

c) $\int_{0}^{2\pi} (1 + \sin x)\, dx$

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx$

e) $\int_{1/a}^{a} \log_a x\, dx$

f) $\int_{0}^{3} \frac{x}{e^3}\, dx$

g) $\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

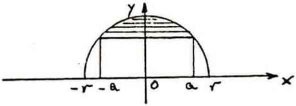
## 3. Aufgaben insbesondere zum Abschnitt 7.2.3.

a) Stelle die Folge $(A_n)$ der Inhalte der Flächen zwischen den Bildern der Funktionen $y = f(x) = x^n$ und $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N,\ n \geq 1,\ x \geq 0)$ auf, und berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ !

b) Die Fläche, die vom Graphen der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$ und der x-Achse im Intervall von 1 bis a $(a > 1)$ eingeschlossen wird, rotiere um die x-Achse. Für $a \to \infty$ gilt $A \to \infty$. Wie groß wird das Rotationsvolumen?

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines "Kugelrings"!

Hinweis:




d) Bestimmen Sie in der Funktion $y = f(x) = x^2 + a$ den Parameter a so, daß sich die Graphen von f und $\bar{f}$ berühren! Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch x-Achse, y-Achse und die Graphen der Funktionen f und $\bar{f}$ vollständig eingeschlossen wird!

e) Berechnen Sie den Inhalt des Parabelsegments, das durch

$y = f(x) = x^2$ und $y = f(x) = x + 2$ gebildet wird!

Überprüfen Sie, ob für dieses Parabelsegment die folgende Flächenformel gilt, wobei s die Sehnenlänge und h die Höhe des Segments senkrecht zur Sehne ist:

$$A = \frac{2}{3} s \cdot h .$$

f) Bestimmen Sie a so, daß die Graphen der Funktionen

$y = f(x) = a^x$ und $y = g(x) = \log_a x$

genau einen Punkt gemeinsam haben!

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen werden!

g) Gegeben sei eine Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$, der y-Achse und der Geraden $y = c$ $(c > 0)$ eingeschlossen wird. Bestimmen Sie die Geraden g und h, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen und jeweils die Fläche halbieren!

h) Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x- bzw. der y-Achse im Intervall $\langle 0; a \rangle$ erzeugt bei Rotation um die Koordinatenachsen das Volumen $V_x$ bzw. $V_y$. Berechnen Sie a so, daß $V_x = V_y$ gilt!

i) Berechnen Sie das Volumen des stromlinienförmigen Körpers, der durch Rotation eines parabolischen Blattes um die x-Achse entsteht!
(Hinweis: Gleichung des parabolischen Blattes laute $9y^2 = x(3 - x)^2$.)