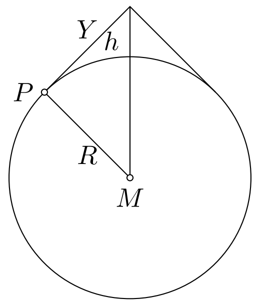
Seil-Paradoxon

Eine berühmte Aufgabe, das Seil-Paradoxon, mit einer verblüffenden Lösung, ist:

Man spannt ein Seil ganz straff um die Erde und verlängert es um 1 Meter. Wie weit kann das Seil dann in einer Richtung nach oben gezogen werden?



Das Seil tangiert im Punkt P die Erdkugel. Damit ist die Strecke vom Mittelpunkt M nach P senkrecht zum Seilstück Y und das entsprechende Dreieck ist rechtwinklig. Aus dem Satz des Pythagoras folgt:

$$Y = \sqrt{(R+h)^2 - R^2)}$$

Außerdem hat der zugehörige Kreissektor A die Bogenlänge

$$b = R \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

Da das Seil genau 1 Meter länger als der Erdumfang ist, gilt

$$Y - \frac{1}{2} = b$$

und damit die allgemeine Lösung mit einer Seilverlängerung um a für die erreichbare Höhe h:

$$\sqrt{(R+h)^2 - R^2} - \frac{1}{2} = R \cdot \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

Die Gleichung ist analytisch nicht auflösbar. Mit einem Näherungsverfahren ergibt sich für die Erde ($R = 6378$ km) eine Höhe $h = 121{,}505$ m !!!

Weitere Höhen h sind für weitere Radien:

Radius	Höhe in m	Radius	Höhe in m
1 m	0,78	2 m	0,93
10 m	1,47	100 m	3,07
1 km	6,56	10 km	14,11
100 km	30,12	1000 km	65,52
10000 km	141,16	100000 km	304,11
1 Million km	655,19	10 Million km	1411,55

Es ist paradox. Es vergrößert sich die maximal erreichbare Höhe, wenn der Radius der umschlossenen Kugel größer wird.

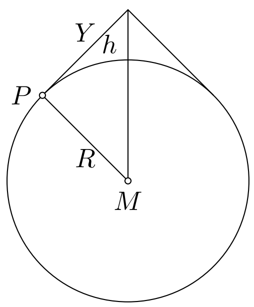
Delphi-Quelltext zur näherungsweisen Lösung der Gleichung:

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
const r=6378000.0; //hier Radius eingeben
var  x,dx:extended;
function funktion(x:extended):extended;
begin
  result:=1/2+r*arccos(r/(r+x))-sqrt(sqr(r+x)-sqr(r));
end;
begin
```

```
  x:=1;
  dx:=1;
  repeat
    dx:=0.01*funktion(x)/(funktion(x+0.01)-funktion(x));
    x:=x-dx;
    listbox1.items.add(floattostr(x)+#9+floattostr(funktion(x)));
  until abs(funktion(x)) < 1e-6;
end;
```

Anmerkung: Für ein Quadrat mit dem Umfang der Erde (40000 km) führt die gleiche Aufgabenstellung zu einer Seilhöhe von rund $\sqrt{5}$ km über einer der Quadratseiten !!!

Weitere Lösungsmöglichkeit



Durch Hans-Jürgen Caspar wurde eine sehr schöne, alternative Lösung ohne Verwendung eines Programms zur Bestimmung der Näherungslösung vorgeschlagen. Für die Höhe h wird

$$h = \sqrt{(R^2 + Y^2)} - R \qquad (*)$$

Für den Kreisbogen zwischen den Tangentialpunkten ergibt sich

$$b_o = 2R \cdot \arctan \frac{Y}{R}$$

für den verbleibenden, unteren Kreisbogen

$$b_u = 2\pi r - 2R \cdot \arctan \frac{Y}{R}$$

Die Gesamtseillänge ist

$$l = 2\pi r - 2R \cdot \arctan \frac{Y}{R} + 2Y = 2\pi r + 1m$$

und da 1 m länger als der Umfang der Kugel, somit

$$Y - R \cdot \arctan \frac{Y}{R} = 0{,}5m$$

Anwendung der Taylorreihe für den Arkustangens bis zur 2.Näherung ergibt

$$Y - R\left(\frac{Y}{R} - \frac{Y^3}{3R^3}\right) = 0{,}5m$$

$$Y^3 = \frac{3}{2}R^2 \cdot 1m$$

Damit kann aus dem Radius das Tangentialstück Y und anschließend über (*) die Höhe berechnet werden.

Die einfachere Aufgabe, da mit Schulmathematik lösbar, ist:

Wie weit steht das Seil ab, wenn es überall gleichweit von der Äquatorlinie entfernt sein soll? Passt unter dem Seil eine Maus durch?

Aus $u = 2\pi r$ wird $u + 1 = 2\pi(r + h)$, d.h. $1 = 2\pi h$ und somit eine Höhe von rund 16 cm. Da passt auch eine Katze durch!

c.: Steffen Polster, Dezember 2019