Gleichung $a^3 + b^4 = c^5$

Gesucht ist die Lösung der diophantischen Gleichung

$$a^3 + b^4 = c^5$$

in positiven, natürlichen Zahlen a, b und c.

Teillösung:
Es sei $a = 2^{4n}$, $b = 2^{3n}$, $c = 2^t$ für natürliche Zahlen $n, t \geq 0$, d.h.

$$2^{12n} + 2^{12n} = 2^{5t} \quad \text{oder} 2^{12n+1} = 2^{5t}$$

Dann muss für n gelten: $12n + 1 = 0 \pmod 5$, $n = 2 \pmod 5$, d.h. also $n = 2 + 5k$ für beliebiges natürliches $k \geq 0$. Damit wird

$$2^{12(2+5k)+1} = 2^{25+60k} = 25t$$

und für die Exponenten $t = 5 + 12k$. Eine allgemeine Lösung ist somit

$$\begin{aligned} a &= 2^{4n} = 2^{8+20k} \\ b &= 2^{3n} = 2^{6+15k} \\ c &= 2^t = 2^{5+12k} \end{aligned}$$

Zum Beispiel für ausgewählte k

k	Lösungen
0	$a = 256$; $b = 64$; $c = 32$
1	$a = 268435456$; $b = 2097152$; $c = 131072$

Ist (a, b, c) eine Lösung der Gleichung, so ist dies nach Christian Hercher auch jedes Tripel $(a \cdot k^{20}; b \cdot k^{15}; c \cdot k^{12})$.
Durch Computereinsatz ist nachweisbar, dass es weitere Lösungen gibt, z.B.

$$a = 9375 = 3 \cdot 5^5, \quad b = 625 = 5^4, \quad c = 250 = 2 \cdot 5^3$$

Dr. Stefan Schwarz hat drei weitere Lösungen veröffentlicht:

$$\begin{aligned} a &= 209952 = 2^5 \cdot 3^8, \quad & b &= 11664 = 2^4 \cdot 3^6, \quad & c &= 1944 = 2^3 \cdot 3^5 \\ a &= 268912 = 2^4 \cdot 7^5, \quad & b &= 19208 = 2^3 \cdot 7^4, \quad & c &= 2744 = 2^3 \cdot 7^3 \\ a &= 839808 = 2^7 \cdot 3^8, \quad & b &= 23328 = 2^5 \cdot 3^6, \quad & c &= 3888 = 2^4 \cdot 3^5 \end{aligned}$$

Beliebig viele Lösungen kann man mit folgendem Verfahren ermitteln: a und b seien natürliche Zahlen. Dann gilt

$$(a \cdot p^5)^3 + (p^4)^4 = (c \cdot p^3)^5 \quad \text{mit} \quad a^3 + p = c^5$$

d.h. zum Beispiel mit $a = 50$, $c = 13$ und somit $p = 344293$:

$$(30 \cdot 344293^5)^3 + (344293^4)^4 = (13 \cdot 344293^3)^5$$

Durch Dr. Stefan Schwarz wurden weitere ähnliche Varianten angegeben:

$$(a \cdot x^8, b \cdot x^6, x^5) \quad \text{mit} \quad a^3 + b^4 = x$$

$$(x^7, b \cdot x^5, c \cdot x^4) \quad \text{mit} \quad x = c^5 - b^4$$

Die drei genannten Ansätze lassen sich zusammenführen (Schwarz 2017): Wenn

$$a^3 \cdot x + b^4 \cdot y = c^5 \cdot \frac{z^3}{u^2}$$

gilt, dann ist

$$(ax^7y^5z^4u^4, bx^5y^4z^3u^3, cx^4y^3z^3u^2)$$

eine Lösung der diophantischen Gleichung.

Die drei bereits erwähnten Typen ergeben sich mit den Setzungen

1. $a = 1$, $y = 1$, $z = u = 1$
2. $x = 1$, $b = 1$, $z = u = 1$
3. $x = 1$, $y = 1$, $c = 1$, $z = u$

Die nachfolgende Tabelle enthält alle von Dr. Schwarz gefundenen Lösungen, bei denen die dritte Komponente kleiner 10^7 ist. Es können mehrere verschiedene Tupel (a, b, c, x, y, z, u) zur selben Lösung führen.

a	b	c	x	y	z	u	$c \cdot x^4 \cdot y^3 \cdot z^3 \cdot u^2$
1	1	1	1	1	2	2	32
3	1	2	1	5	1	1	250
1	1	1	1	2	3	3	1944
1	1	1	1	7	2	1	2744
1	1	1	2	1	3	3	8888
1	1	1	7	1	2	1	19208
1	1	1	1	3	4	4	27648
5	1	2	1	3	4	4	55296
2	1	1	1	1	9	9	59049
1	1	2	1	31	1	1	59582
1	1	2	3	5	1	2	81000
1	1	1	3	1	4	4	82944
1	1	1	2	2	4	4	131072
1	1	1	5	3	2	1	135000
2	1	1	1	19	3	1	185193
1	1	1	1	4	5	5	200000
1	2	1	11	1	3	1	395307
1	1	1	1	26	3	1	474552
2	1	1	2	11	3	1	574992
1	1	1	4	1	5	5	800000
1	2	3	3	15	1	1	820125
3	5	1	3	2	11	1	862488
1	1	2	2	30	1	1	864000
1	1	1	1	5	6	6	972000
3	1	1	2	10	4	1	1024000
1	1	1	2	3	5	5	1350000
1	2	1	1	1	17	17	1419857
1	1	2	31	1	1	1	1847042
1	1	1	3	2	5	5	2025000
3	1	1	1	37	4	1	3241792
1	1	1	1	6	7	7	3630312
1	1	2	3	29	1	1	3951018
2	1	1	1	3	11	11	4348377
1	1	1	5	1	6	6	4860000
5	1	3	1	118	1	1	4929096
1	1	1	2	25	3	1	6750000
2	1	1	1	16	6	3	7962624

Die vollständige Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$a^3 + b^4 = c^5$$

ist extrem anspruchsvoll und übersteigt die Möglichkeiten der Schulmathematik gewaltig. siehe u.a.

`https://arxiv.org/abs/1103.1979`
`https://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/Fermatlectures.pdf`
`https://homepages.warwick.ac.uk/~maseap/papers/bealconj.pdf`

c.: Steffen Polster, Dezember 2019