1 Abiturähnliche Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

1.1 Aufgaben LK (01)

Aufgabe A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = -e^{2ax} + 4e^{ax} + 5 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a) Geben Sie von der Funktion $f_{\frac{1}{2}}$ Näherungswerte für die Nullstelle, die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und dessen Art sowie eine Gleichung der Asymptote an.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion f_a genau eine Nullstelle bei $x_0 = \frac{\ln 5}{a}$ besitzt. Der Graph der Funktion f_a besitzt genau einen Extrem- und genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und weisen Sie seine Art nach.
Begründen Sie, dass für jedes a der Graph der Funktion f_a den gleichen Wendepunkt hat.

c) Der Graph der Funktion f_a und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

d) Die Tangente und die Normale an den Graphen der Funktion f_a im Schnittpunkt des Graphen der Funktion f_a mit der Ordinatenachse bilden mit der Abszissenachse ein Dreieck. Es existiert genau ein Wert a, für den dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Berechnen Sie diesen Wert a.

e) Der Graph der Funktion $f_{\frac{1}{2}}$ und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Betrachtet werden Kreise, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und die diese Fläche vollständig enthalten.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Radius des kleinstmöglichen dieser Kreise zu ermitteln, und geben Sie einen Näherungswert für diesen Radius an.

f) Für jedes n ($n \in \mathbb{R}$) ist eine Gerade g_n mit der Gleichung

$$g_n(x) = (2e – e^2) \cdot x + n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben.
Ermitteln Sie den Wert n, für den die Gerade g_n Tangente an den Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{2}}$ ist.

Aufgabe B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6|1|0)$, $B(6|6|\frac{15}{4})$, $D(2|1|0)$ und $S_t\left(4|\frac{7}{2} + \frac{3}{5}t|\frac{15}{8} - \frac{4}{5}t\right)$ ($t \in \mathbb{R}, t > 0$) gegeben.

Für jedes t sind die Punkte A, B, C, D und S_t Eckpunkte einer Pyramide mit der rechteckigen Grundfläche $ABCD$.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, in der die Grundfläche jeder dieser Pyramiden liegt.
Treffen Sie eine Aussage zur Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
Weisen Sie nach, dass jede dieser Pyramiden gerade ist.
Zeigen Sie, dass t die Höhe jeder dieser Pyramiden ist und geben Sie deren Volumen in Abhängigkeit von t an.

b) Es existiert genau eine Pyramide $ABCDS_t$, für die die Seitenfläche ABS_t mit der Grundfläche einen Neigungswinkel von 45° bildet. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert t.

c) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt der Seitenfläche ABS_t stets größer als $\frac{24}{5}$ ist.
Berechnen Sie den Wert t, für den der Flächeninhalt der Seitenfläche ABS_t $\frac{65}{4}$ beträgt.

d) Stellen Sie die Pyramide $ABCDS_5$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
Eine Ebene F enthalte die Punkte A und D und halbiere die Höhe der Pyramide $ABCDS_5$.
Die Schnittfigur zwischen der Ebene F und der Pyramide $ABCDS_5$ ist ein Viereck.

Geben Sie die Art dieses speziellen Vierecks an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Ermitteln Sie, in welchem Verhältnis die Ebene F die Seitenkante BS_5 teilt.

Aufgabe C: Stochastik

Eine Produktionsstätte zur Herstellung von Hochleistungsakkus für Handys und Laptops wird aufgebaut. Beim Probebetrieb werden der Produktion Stichproben entnommen, um die Qualität der Erzeugnisse zu untersuchen. Dabei wird nach festen Kriterien zwischen Qualität I, Qualität II und Ausschuss unterschieden.

a) Es wurden folgende sechs Stichproben durchgeführt:

Nummer der Stichprobe	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Akkus in der Stichprobe	20	25	20	30	35	25
Anzahl der Akkus mit der Qualität I	16	21	18	24	27	20
Anzahl der Akkus mit der Qualität II	3	4	1	3	4	3

Geben Sie auf der Grundlage dieser Stichproben einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt Ausschuss ist.
Nach Anlauf der Produktion beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt die Qualitätsstufe I besitzt, 86% und dafür, dass es die Qualitätsstufe II besitzt, 12%.

b) Jeweils 50 Akkus werden in einer Kiste verpackt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Eine zufällig ausgewählte Kiste enthält mehr als 45 Akkus der Qualitätsstufe I.

Ereignis B: Mindestens 8, aber weniger als 12 Akkus einer zufällig ausgewählten Kiste besitzen die Qualitätsstufe II oder sind Ausschuss.

Ereignis C: Unter fünf zufällig ausgewählten Kisten gibt es mehr als zwei, die kein Ausschussstück enthalten.

c) Von der Endkontrolle weiß man, dass Akkus der Qualität I zu 95% als solche erkannt und zu 5% fälschlicherweise der Qualität II zugeordnet werden.
Akkus der Qualität II werden zu 85% als solche erkannt, zu 5% aber fälschlicherweise der Qualitätsstufe I und zu 10% fälschlicherweise dem Ausschuss zugeordnet.
Ausschussstücke werden mit 92% als solche erkannt, zu 8% aber fälschlicherweise der Qualitätsstufe II zugeordnet.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffener und überprüfter Akku richtig eingestuft wurde.
Ermitteln Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein der Qualität II zugeordneter Akku tatsächlich dieser Qualitätsstufe angehört.

d) Betrachtet wird die Zufallsgröße W, die die bei der Produktion auftretenden Ausschussakkus zählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 1000 produzierten Akkus der Wert der Zufallsgröße W um weniger als 3 von dem zu erwartenden Wert abweicht.

Aufgabe D: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}, t > 0$) ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = \ln(2t - x) - x^2 \qquad (x \in D_{ft})$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t und eine Gleichung der Asymptote an.
Der Graph der Funktion f_t besitzt genau einen lokalen Extrempunkt. Berechnen Sie die Extremstelle.

b) Zeigen Sie durch Integration, dass für alle reelle Zahlen $x > 0$ gilt:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x – x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Der Graph der Funktion f_t ($t > \frac{1}{2}$), der Graph der Funktion g mit $g(x) = -x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) und die Ordinatenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Wert t, für den der Inhalt dieser Fläche 1 ist.

c) Es gibt genau einen Wert t, für den die Funktion f_t genau eine Nullstelle besitzt.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für t.

Aufgabe E: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind für jedes a ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) die Punkte $A_a(a|0|0)$, $B_a(0|a|0)$ und $C_a(0|0|a)$ sowie der Punkt $D_a(a|a|a)$ gegeben. Das Dreieck $A_aB_aC_a$ ist gleichseitig.

a) Zeigen Sie, dass der Körper $A_aB_aC_aD_a$ ein reguläres Tetraeder (ein Körper, der von genau vier gleichseitigen Dreiecksflächen begrenzt wird) ist.
Außer dem Punkt D_a existiert ein weiterer Punkt, der Eckpunkt eines regulären Tetraeders mit der Seitenfläche $A_aB_aC_a$ ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes.

b) Es gibt genau einen Punkt P_a, der von jedem Eckpunkt des regulären Tetraeders $A_aB_aC_aD_a$ den gleichen Abstand hat.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Abstand $3\sqrt{3}$ beträgt.

c) Von einem regulären Tetraeder $A_aB_aC_aD_a$ werden durch parallel zu den Seitenflächen führende Schnitte vier zueinander kongruente Tetraeder abgetrennt, deren Kantenlängen $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Tetraederkantenlänge beträgt.
Berechnen Sie den Wert a, für den bei dieser Zerlegung das Volumen des Restkörpers 207 beträgt.

1.2 Aufgaben LK (02)

Aufgabe A: Analysis

Für jedes a ($a \in \mathbb{R}; a > 0$) ist eine Funktion f_a durch

$$f_a(x) = (2x - 1) \cdot e^{ax}$$

gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_a mit den Koordinatenachsen und die Koordinaten der lokalen Extrempunkte (einschließlich der Art der Extrema).

Die Graphen der Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}; a_1, a_2 > 0; a_1 \neq a_2$) besitzen gemeinsame Punkte.
Zeigen Sie, dass genau zwei solcher Punkte existieren.
Geben Sie eine Gleichung der achsenparallelen Asymptote und den Wertebereich der Funktion f_a an.

b) Zeigen Sie, dass für jedes a der Graph der Funktion f_a genau einen Wendepunkt besitzt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, auf deren Graph alle diese Wendepunkte liegen, und geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion g an.

c) Bestimmen Sie $\int f_a(x)dx$.
Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F_a an, für die gilt: $F_a(0) = 0$.

In den folgenden Teilaufgaben wird nur die Funktion f_2 betrachtet.

d) Für jedes b ($b \in \mathbb{R}; b < 0$) begrenzen der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen sowie die Gerade mit der Gleichung $x = b$ eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ dieser Fläche.
Ermitteln Sie $A(-2)$, $A(-10)$ und $A(-100)$ und geben Sie eine Vermutung für den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} A(b)$ an.

e) Der Graph der Funktion f_2, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ begrenzen eine Fläche vollständig. Diese erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers.

f) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}; u < 0$) sind der Punkt $P_u(u|f_2(u))$, der Koordinatenursprung und der Punkt $Q_u(u|0)$ Eckpunkte eines Dreiecks.
Ermitteln Sie den Wert u, für den das zugehörige Dreieck den größten Flächeninhalt aller so gebildeten Dreiecke besitzt.
Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an.

Aufgabe B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade h mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (u \in \mathbb{R})$$

und für jedes t ($t \in R, t \neq 0$) eine Gerade g_t mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) Jede Gerade g_t schneidet die x-y-Ebene in einem Punkt D_t.
Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes D_t, der vom Koordinatenursprung den minimalen Abstand besitzt.
Geben Sie diesen Abstand an.

b) Alle Geraden g_t liegen in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form.
Die Koordinatenebenen, die Ebene E und eine weitere Ebene begrenzen ein dreiseitiges gerades Prisma mit dem Volumen 112,5.
Berechnen Sie die Größe des Oberflächeninhaltes des Prismas.

c) Es gibt genau zwei Geraden g_{t_1} und g_{t_2} , die die x-y-Ebene unter einem Winkel von 60° schneiden.
Ermitteln Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung.

d) Es gibt genau eine Gerade g_t, die die Gerade h schneidet. Für diesen Fall existieren Vierecke, deren Diagonalen auf beiden Geraden liegen.
Zeigen Sie, dass es unter all diesen Vierecken Quadrate geben kann.
Unter diesen Quadraten gibt es genau eins mit dem Flächeninhalt 8,5. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses speziellen Quadrates, die auf der Geraden h liegen.

Aufgabe C: Stochastik

Bei einem Pop-Konzert werden u.a. einfarbige Tassen, Feuerzeuge und Plüschherzen als Fanartikel verkauft. Diese drei Artikel stehen in den Farben Blau, Rot, Orange und Gelb in jeweils gleicher Anzahl zur Verfügung.
Ein "Fan-Set" besteht aus einem Beutel, der genau eine Tasse, genau ein Feuerzeug und genau ein Plüschherz enthält. Die Sets werden durch Schüler zusammengestellt, wobei die Auswahl der Farbe des jeweiligen Gegenstandes zufällig sein soll.

a) Geben Sie die Anzahl verschiedenartiger Sets an, die jeweils Fanartikel in drei verschiedenen Farben enthalten.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig herausgegriffenes Set Fanartikel in drei verschiedenen Farben enthält.

b) Betrachtet werden 100 Sets. Darunter sind genau 37, die Fan-Artikel in drei verschiedenen Farben enthalten. Zehn Sets werden zufällig für den Verkauf entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen entnommenen Sets keins mit Artikeln in drei verschiedenen Farben befindet.

Es sind 8% der Feuerzeuge, 5% der Tassen und 3% der Plüschherzen fehlerhaft. Die Sets werden ohne Prüfung zusammengestellt.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Set kein fehlerhaftes Teil enthält.

Ein Set gilt als mangelhaft, wenn es mindestens ein fehlerhaftes Teil enthält. Täglich werden 1200 Sets verpackt. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl mangelhafter Sets, die an einem Tag verpackt werden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 1200 Sets wenigstens 158 und höchstens 207 mangelhafte befinden.
Ermitteln Sie, wie viele Sets ein Kontrolleur mindestens öffnen muss, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens ein mangelhaftes Set findet?

d) Ein Fanartikelverkäufer behauptet, dass die Ereignisse

Ereignis A: "Unter fünf Feuerzeugen ist genau eines fehlerhaft." und
Ereignis B: "Unter vier Feuerzeugen sind genau eines oder genau zwei fehlerhaft."

mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Fehlerwahrscheinlichkeit p für die Feuerzeuge gibt, für die die Aussage des Verkäufers wahr ist.
Ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit bzw. begründen Sie, dass es eine solche Wahrscheinlichkeit nicht geben kann.

Aufgabe D: Analysis

Gegeben sind ganzrationale Funktionen dritten Grades, deren Graphen durch den Punkt $P(0|-3)$ gehen und im Punkt $Q(2|1)$ ein lokales Extremum haben.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion f mit der Gleichung

$$y = f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

eine solche Funktion ist.
Es existiert genau eine weitere Funktion g mit den oben genannten Eigenschaften, für die zusätzlich gilt: $g'(-1) = 0$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für alle derartigen Funktionen mit den anfangs genannten Eigenschaften. Unter diesen Funktionen gibt es genau eine Funktion, die an ihrer Wendestelle den Funktionswert 32 hat.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Funktion.

Aufgabe E: Geometrie / Algebra

Eine Straße verläuft von einem Punkt A geradlinig zu einem Punkt S und von diesem geradlinig zu einem Punkt B, wobei A, S und B Punkte auf der Mittelmarkierung der Straße sind.
Die Lage der Strecken AS und SB kann in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Einer Längeneinheit entsprechen 10 Meter, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über NN.

Die Punkte haben die Koordinaten $A(-5|11|0{,}6)$, $S(2|4|0)$ und $B(-5|-3|0{,}4)$.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Straßenabschnitten AS und SB.

Da der Punkt S in einer Senke liegt und die Straßenabschnitte AS und SB geradlinig aufeinander stoßen, ist dieser Bereich ein Unfallschwerpunkt. Zu seiner Entschärfung sind verschiedene Baumaßnahmen geplant.

b) Im ersten Bauabschnitt soll der Punkt S in Richtung der z-Achse in eine zur x-Achse parallele, durch die Punkte A und B verlaufende Ebene angehoben werden.
Berechnen Sie, um wie viele Meter der Punkt S angehoben wird.

Als Punkt, in dem die beiden Straßenabschnitte aufeinander stoßen, wird nun der Punkt $S^*(2|4|0{,}5)$ angenommen.

c) Im zweiten Bauabschnitt soll der Übergang von einem Straßenabschnitt in den anderen durch ein Bogenstück b eines Kreises k erfolgen. Die Geraden, auf denen die Strecken AS^* bzw. S^*B liegen, sind Tangenten an diesen Kreis k.
Die Berührungspunkte mit dem Kreis k sind jeweils 66 m vom Punkt S^* entfernt.
Ermitteln Sie die Länge des Kreisbogens b.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k.

1.3 Aufgaben LK (03)

Aufgabe A: Analysis

Für jedes a (a $\in R$) ist eine Funktion f_a durch

$$f_a(x) = 2x \cdot \ln x - a \cdot x \ (x \in D_{f_a})$$

gegeben.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_a an.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen der Funktion f_a mit der Abszissenachse sowie des lokalen Extrempunktes und weisen Sie die Art der Extremums nach.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_a keine Wendepunkte besitzt.
Geben Sie die Monotonieintervalle und die Art der Monotonie der Funktion f_a in den jeweiligen Intervallen an.

b) Die Graphen der Funktion f_3 und ihrer Ableitungsfunktion f_3' schließen eine Fläche vollständig ein. Bestimmen Sie deren Inhalt.

c) Der Graph der Funktion f_2 soll im Intervall $0{,}1 \leqq x \leqq 1{,}9$ durch die Graphen der Funktionen g_1 bzw. g_2 näherungsweise beschrieben werden.
Die Funktion g1 ist gegeben durch:

$$g_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{2}{3} \ (x \in R)$$

Die Funktion g_2 ist quadratisch und ihr Graph verläuft durch die Punkte

$$P_1(0{,}1|f_2(0{,}1)), P_2(1|f_2(1)) \text{ und } P_3(1{,}9|f_2(1{,}9)).$$

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g_2.
Bestimmen Sie jeweils die maximale Abweichung der Funktionswerte $g_1(x)$ von $f_2(x)$ und der Funktionswerte $g_2(x)$ von $f_2(x)$ im vorgegebenen Intervall.

d) Im Punkt $P(z|f_2(z))$ mit $z > 1$ wird an den Graphen der Funktion f_2 die Tangente t gelegt, die zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck bildet.
Bestimmen Sie den Wert z, für den der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks ein lokales Extremum besitzt.
Geben Sie den extremen Flächeninhalt sowie die Art des Extremums an.

e) Für jedes u ($u \in R, u > e^{1,5}$) begrenzen der Graph der Funktion f_3, die Gerade mit der Gleichung x = u und die Abszissenachse im Intervall $[e^{1,5}; u]$ eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Wert u, für den der Inhalt dieser Fläche $0{,}5 \cdot e^3$ beträgt.

Aufgabe B: Geometrie / Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O sind die Ebene E durch die Gleichung

$$-2x + 8y - 16z - 1 = 0$$

und für jedes a ($a \in R, a > 0$) ein Punkt $P_a(-1| - a| - 3a)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass kein Punkt P_a in der Ebene E liegt.
Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen zum Aufstellen einer Gleichung derjenigen Ebene, die den Koordinatenursprung O und den Punkt P_3 enthält sowie senkrecht auf der Ebene E steht.
Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an.

b) Zeigen Sie, dass alle Punkte P_a auf ein und derselben Geraden liegen. Untersuchen Sie die Lage dieser Geraden zu den Koordinatenebenen.

c) Durch den Punkt P_2 verläuft genau eine Gerade s, die bei der Spiegelung an der Ebene E eine durch den Punkt $Q(3|1|-5)$ verlaufende Bildgerade ergibt. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und die Größe des Schnittwinkels zwischen der Original- und Bildgeraden an.

d) Die senkrechte Parallelprojektion des Punktes P_a in jede der drei Koordinatenebenen ergibt jeweils genau einen Bildpunkt. Alle drei Bildpunkte liegen in einer Ebene E_a.
Ermitteln Sie den Wert a, für den der Punkt P_a von der zugehörigen Ebene E_a den Abstand $\frac{1}{11}\sqrt{11}$ besitzt.

Aufgabe C: Stochastik

Adam hat für seinen GTR ein Spaßprogramm geschrieben, das (in Anlehnung an bekannte Bildschirmschoner) den Anfangsbuchstaben 'A' seines Namens an zufällig gewählte Stellen des Displays schreibt.
Das Display seines GTR hat 8 Zeilen mit je 16 Feldern. In jedem Feld kann genau ein Zeichen dargestellt werden. Sein Programm startet stets mit leerem Display.

Danach wird per Zufallsgenerator ein Feld ausgewählt und in dieses der Buchstabe 'A' geschrieben. Dieser Versuch wird insgesamt 10-mal durchgeführt.
Wird ein F ermittelt, in dem bereits 'A' steht, ergibt sich keine Änderung auf dem Bildschirm. Es können also bis zu 10 Buchstaben 'A' nach Programmende auf dem Display stehen.

a) Nach einer Ausführung des Programms stehen 10 Buchstaben 'A' auf dem Display. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Anordnungen dieser 10 Buchstaben 'A' auf dem Display möglich sind.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende in der ersten Zeile wenigstens einmal ein 'A' steht. Ermitteln Sie, wie oft das Programm durchschnittlich ein Feld in der ersten Zeile auswählt.

c) Das Programm wird jetzt so verändert, dass es nicht nach 10 Versuchen abbricht.
Ermitteln Sie, wie viele Versuche notwendig sind, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal ein Buchstabe 'A' in der ersten Zeile steht.

d) In einer weiteren Form des Programms werden drei Versuche durchgeführt.
Wird dabei ein Feld ermittelt, in dem bereits ein 'A' steht, wird dieser Buchstabe gelöscht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach Programmende genau einmal der Buchstabe 'A' auf dem Display steht.

Adam arbeitet in einer Firma, die einen GTR-Typ zusammenbaut.
Die Zulieferfirmen F_1 und F_2 liefern unabhängig voneinander ein bestimmtes Bauteil für diesen GTR. Andere Hersteller für dieses Bauteil gibt es nicht.
4% der Bauteile der Firma F_1 und 6% der Bauteile der Firma F_2 sind fehlerhaft. Zwei Drittel aller fehlerhaften Bauteile sind von der Firma F_1.

e) Ermitteln Sie für beide Zulieferfirmen jeweils den prozentualen Anteil an der Gesamtlieferung dieses Bauteils.

f) Bei einer Lieferung von 2000 Stück dieses Bauteils, die alle von derselben Zulieferfirma kommen, ist durch einen Verlust des Lieferscheines nicht mehr feststellbar, welche der beiden Zulieferfirmen der Produzent war.
Folgende Entscheidungsregel wird getroffen:

Sind mehr als 99 Teile fehlerhaft, wird die Lieferung der Firma F_2 zugeordnet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung fälschlicherweise der Firma F_2 zugeordnet wird, obwohl sie in Wirklichkeit von der Firma F_1 kommt.

Aufgabe D: Analysis

Für jedes t ($t \in R, t > 0$) ist eine Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{x}{t} - 2 + \sin\frac{x}{t} \ (x \in R)$$

gegeben. Außerdem ist eine Funktion g durch $g(x) = \cos\frac{1}{\sqrt{|x|+1}}$ $(x \in R)$ gegeben.

a) Geben Sie für die Funktion g die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse an. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie.

b) Für jedes t schließen der Graph der Funktion f_t, die y-Achse und der Graph der Funktion g genau eine Fläche vollständig ein.
Beschreiben Sie einen allgemein gültigen Weg, wie man überprüfen kann, ob die x-Achse diese Fläche halbiert. Führen Sie diese Untersuchung für t = 0,5 durch.

c) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Monotonie.
Ermitteln Sie den größten und den kleinsten Anstieg, den die Funktion f_t hat.
Es gibt genau eine Funktion $f_1^{'}$ für die der maximale Anstieg 0,4 beträgt. Ermitteln Sie das kleinste Argument x ($x > 0$), für das gilt: $f_{t_1}^{'}(x) = 0{,}4$.

Aufgabe E: Geometrie / Algebra

Beim Bau eines Pumpspeicherwerkes sollen die Punkte A am unteren und B am oberen Staubecken durch einen Tunnel verbunden werden. Aus technologischen Gründen sind zwei geradlinig verlaufende Tunnelabschnitte erforderlich, die sich in genau einem Punkt treffen.
Die Tunnelabschnitte können in einem kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch Geradenstücke beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht zehn Meter, die z-Koordinate beschreibt die Höhe über NN.

Die Punkte A und B haben die Koordinaten A(0 | 0 | 3) und B(-8 | 12 | 19). Die Geradenstücke haben vom Punkt A aus die Richtung des Vektors $\vec{a}$ und vom Punkt B aus die Richtung des Vektors

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für dieses Projekt werden verschiedene Varianten diskutiert.

a) In einem Projektentwurf sind für den Vektor $\vec{a}$ die Koordinaten $a_x = 1$ und $a_z = 5$ festgelegt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem die beiden Tunnelabschnitte aufeinander treffen. Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem die beiden Abschnitte aufeinander treffen.

b) Bei einem anderen Projektentwurf darf die Gesamtlänge beider Tunnelabschnitte nicht größer als 250 m sein. Ermitteln Sie die Mindesthöhe über NN, in der die beiden Tunnelabschnitte aufeinander treffen.

c) Bei einem weiteren Projektentwurf sollen beide Tunnelabschnitte das gleiche Gefälle haben (Unter Gefälle versteht man den Neigungswinkel gegenüber der x-y-Ebene.). Der Richtungsvektor $\vec{a}$ hat die y-Koordinate $a_y = 1$.
Berechnen Sie für diesen Fall die übrigen Koordinaten des Vektors $\vec{a}$.

1.4 Aufgaben LK (04)

Aufgabe A: Analysis

Für jede reelle Zahl t ($t > 0$) ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x - 2t)\sqrt{x} \qquad (x \in D_{f_t})$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f_t an.
Weisen Sie nach, dass für die zweite Ableitung der Funktion f_t gilt:

$$f_t''(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{3x + 2t}{4x\sqrt{x}}\right)$$

Die Funktion f_t besitzt genau einen lokalen Extrempunkt P_t.
Zeigen Sie, dass für diesen Punkt P_t gilt:

$$P_t\left(\frac{2}{3}t; -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}t}\right)$$

Untersuchen Sie die Art dieses Extremums.
Begründen Sie, dass die Funktion f_t keinen Wendepunkt besitzt.

b) Der lokale Extrempunkt jeder Funktion f_t liegt auf dem Graphen ein und derselben Funktion. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion.
Es gibt genau einen Wert t, für den der Abstand des lokalen Extrempunktes der Funktion f_t vom Koordinatenursprung $\frac{1}{12}\sqrt{73}$ beträgt.
Ermitteln Sie diesen Wert t.

c) Der Graph jeder Funktion f_t begrenzt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig. Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht jeweils ein Körper.
Ermitteln Sie das Volumen dieses Körpers für $t = 2$.
Berechnen Sie den Wert t, für den das Volumen dieses Körpers 108π beträgt.

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f_t im Punkt $R_t(2t; f_t(2t))$ und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Wert t, für den der Flächeninhalt des Dreiecks 1 beträgt.
Berechnen Sie den Wert t, für den das Dreieck gleichschenklig ist.

e) Der Graph der Funktion f_2 und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Für jedes b ($b \in \mathbb{R}; 0 < b < 4$) teilt die Gerade mit der Gleichung $x = b$ diese Fläche in zwei Teilflächen.
Es gibt Werte b, für die der Inhalt einer Teilfläche doppelt so groß ist wie der Inhalt der anderen Teilfläche.
Ermitteln Sie einen Näherungswert (eine Stelle nach dem Komma) für einen solchen Wert b.

Aufgabe B: Algebra / Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

und für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) eine Gerade h_a durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix}$$

sowie für jedes k ($k \in \mathbb{R}$) eine Ebene E_k durch $(6k–3) \cdot x + 2y + (2k - 1) \cdot z = 6$ gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g senkrecht schneidet.
Es existiert genau ein Wert k, für den die Gerade g in der Ebene E_k liegt. Ermitteln Sie diesen Wert k.
Zeigen Sie, dass für jeden anderen Wert k die Ebene E_k parallel zur Geraden g liegt.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h_a in Abhängigkeit vom Parameter a.

c) Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Schnittwinkel zwischen der Geraden h_a und der x-y-Ebene 60° beträgt.

d) Die Geraden g und h_{-4} verlaufen windschief zueinander.
Es existiert genau eine Gerade, die durch den Punkt $A(2; 3; 16)$ verläuft und die Geraden g und h_{-4} senkrecht schneidet.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

e) Die Ebene E_k schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten S_{xk}, S_{yk} und S_{zk}. Diese drei Punkte und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.
Ermitteln Sie alle Werte k ($k > \frac{1}{2}$), für die das Volumen dieser Pyramide $\frac{3}{2}$ beträgt.

Aufgabe C: Stochastik

Für die Behandlung einer speziellen Krankheit werden Tabletten verwendet, die die Form gerader Kreiszylinder besitzen. Bei jeder Tablette ist auf genau einer der beiden Kreisflächen ein Firmenlogo eingeprägt. Zur Vermeidung von Einnahmefehlern bei der gängigen "Dreiwochentherapie" erstellt der Produzent jeweils Packungen mit 21 Tabletten.

Bei der Herstellung werden die Tabletten in einen Plaststreifen eingelegt, der Vertiefungen in zwei Reihen enthält.
In der ersten Reihe befinden sich 10 solcher Vertiefungen, in der zweiten 11. Die Bestückung der Vertiefungen mit stets 21 Tabletten erfolgt zufällig.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Tablette das Firmenlogo sichtbar ist, beträgt 0,5.

a) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Bestückungen an, bei denen das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist.
Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Bestückungen möglich sind, bei denen das Firmenlogo in jeder der beiden Reihen mindestens viermal, insgesamt jedoch genau zehnmal sichtbar ist.

b) Berechnen Sie für eine Tablettenpackung die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist und dafür, dass das Firmenlogo höchstens viermal sichtbar ist.

In einer Klinik werden ausschließlich Patienten mit dieser Erkrankung behandelt. Dabei werden nur diese Tabletten eingesetzt. In 90% aller Fälle ist die Behandlung mit diesem Medikament erfolgreich.
Die Patientenkartei ist alphabetisch angelegt, unter dem Aspekt "Heilung" oder "Nichtheilung" folglich zufällig.

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Karteikarten, die der Patientenkartei mindestens entnommen werden müssen, damit sich unter den entnommenen Karten mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine von einem Patienten befindet, bei dem das Medikament keine Heilung bewirkte.

Die Zufallsgröße Z gibt die Masse des wirksamen Bestandteils jeder Tablette in Milligramm an. Der Produzent gibt an, dass Z normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von 100 mg und einer Standardabweichung von 2 mg.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse des wirksamen Bestandteils je Tablette mindestens 95 mg und höchstens 103 mg beträgt.

Neuere Studien haben ergeben, dass Nebenwirkungen enorm ansteigen, wenn die Masse des wirksamen Bestandteils je Tablette 101 mg überschreitet. Der Hersteller entschließt sich daher, die Technologie zu ändern.
In Abhängigkeit von einem wählbaren Parameter a ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) kann man erreichen, dass die wirksame Masse normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $100a$ Milligramm und der Standardabweichung $2a$ Milligramm.

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse des wirksamen Bestandteils 101 mg übersteigt, soll höchstens ein Tausendstel betragen.
Ermitteln Sie, wie groß der Parameter a dabei höchstens sein darf.

Aufgabe D: Analysis

Betrachtet wird das Wachstum von Maispflanzen, die nach der ersten Woche (vom Aufgehen der Saat gerechnet) eine Höhe von 5,0 cm haben und nach ca. 25 Wochen geerntet werden.

a) Die durchschnittliche Pflanzenhöhe w (in cm) kann durch die Zahlenfolge (w_n) mit der Zuordnungsvorschrift

$$w_{n+1} = w_n \cdot (1{,}44\text{–}0{,}002 \cdot w_n) \quad ; \quad w_1 = 5{,}0$$

beschrieben werden. Dabei sei n die Anzahl der Wachstumswochen.
Geben Sie Näherungswerte für die Folgeglieder w_2, w_3 und w_4 an.

Die allgemeine Zuordnungsvorschrift für derartige Wachstumsprozesse hat die Formel

$$w_{n+1} = w_n + q \cdot w_n \cdot (G - w_n) \qquad (G, q \in \mathbb{R}; q > 0)$$

(G und q sind die Maßzahlen wachstumsbestimmender Parameter.)
Zeigen Sie, dass sich die Zuordnungsvorschrift der Zahlenfolge (w_n) in dieser Form schreiben lässt.
Geben Sie die Werte G und q für den speziellen Wachstumsprozess an.

Für jeden Wert der Parameter a bzw. b soll dieser Wachstumsprozess nun durch die stetige Wachstumsfunktion h mit

$$w = h(t) = \frac{220}{1 + b \cdot e^{-at}} \qquad (t \in \mathbb{R}, 1 \leq t \leq 25)$$

beschrieben werden, wobei $h(t)$ der Pflanzenhöhe der Maispflanze zur Zeit t (in Wochen) entspricht.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion h folgender Gleichung genügt:

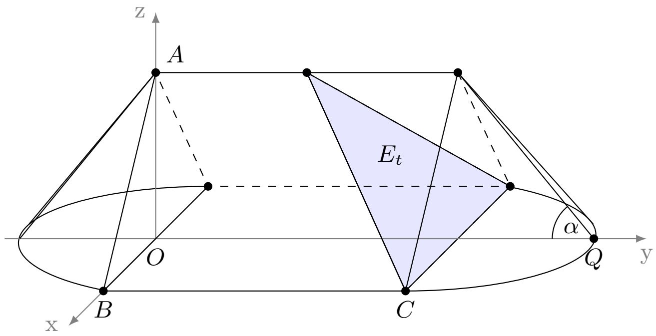
$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{a}{220} \cdot h(t) \cdot (220 - h(t))$$

Dabei ist $\frac{d}{dt}h(t)$ die erste Ableitung der Funktion $h(t)$ nach t. Sie beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze.

c) Für einen Wachstumsprozess gelte $h(5) = 20{,}4$ und $h(10) = 92{,}9$.
Berechnen Sie Näherungswerte für die Parameter a und b (drei Stellen nach dem Komma).
Berechnen Sie für diesen Prozess die Wachstumshöhe nach 25 Wochen.

d) Für einen Wachstumsprozess werden die Parameter $a = 0{,}4$ und $b = 70$ angenommen.
Eine Woche vor dem Zeitpunkt, bei dem die Pflanze die größte Wachstumsgeschwindigkeit hat, soll sie gedüngt werden. Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen etwa die Düngung erfolgen muss.

Aufgabe E: Algebra / Geometrie



Eine Halde hat die geometrische Form eines dreiseitigen geraden Prismas mit zwei angesetzten geraden halben Kreiskegeln. Ihre Lage in einem kartesischen Koordinatensystem wird durch die Punkte $A(0; 0; 12)$, $B(18; 0; 0)$ und $C(18; 40; 0)$ beschrieben (siehe nicht maßstäbliche Skizze). 1 Einheit entspricht 1 Meter.

a) Ermitteln Sie die Größe des Böschungswinkels α.
Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der gesamten Halde. (Die Fläche in der x-y-Koordinatenebene gehört nicht zur Haldenoberfläche.)

b) Ein Bagger trägt die Halde schichtweise vom Punkt Q aus ab.
Dabei liegt nach dem Abtragen einer vollständigen Schicht der neu entstandene Teil der Oberfläche in einer Ebene E_t mit der Gleichung

$$2y + 3z = 116 - 2t \qquad (t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 40)$$

Berechnen Sie das Volumen des abgebaggerten Materials, wenn der Punkt C in einer dieser Ebenen E_t liegt.

c) Vom Punkt $P(48; 20; 0)$ aus war ein Teil der Oberfläche der ursprünglichen Halde einsehbar.
Ermitteln Sie den Inhalt dieses Teils der Oberfläche.

1.5 Aufgaben LK (05)

Aufgabe A: Analysis

Für jedes k ($k \in \mathbb{R}; k > 0$) ist eine Funktion f_k durch

$$f_k(x) = \left(\frac{1}{2}x - k\right) \cdot e^{\frac{1}{k}x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und deren zweite Ableitungsfunktion f_k'' durch

$$f_k''(x) = \frac{x}{2k^2} \cdot e^{\frac{1}{k}x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion f_2, die Koordinaten des lokalen Extrempunktes und die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f_2 an.
Der Graph der Funktion f_2 und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht ein Körper.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für das Volumen dieses Körpers.

b) Der Graph jeder Funktion f_k besitzt genau einen lokalen Extrempunkt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g, auf deren Graph die lokalen Extrempunkte aller Funktionen f_k liegen.

c) Ermitteln Sie alle Werte k, für die sich die Graphen der Funktion f_k und der Ableitungsfunktion f_k' nicht schneiden.

d) Zeigen Sie durch Integration, dass die Funktion F_k mit der Gleichung

$$F_k(x) = \frac{k}{2}(x - 3k) \cdot e^{\frac{1}{k}x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

eine Stammfunktion der Funktion f_k ist.
Der Graph der Funktion f_k und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Wert k, für den der Inhalt dieser Fläche $\frac{2}{9}(e^2 - 3)$ beträgt.

Der Graph jeder Funktion f_k besitzt genau einen Wendepunkt W_k.
Die Wendetangente sei t_k. Die Senkrechte zur Wendetangente im Punkt W_k sei s_k.

e) Begründen Sie, dass alle Tangenten t_k parallel zueinander verlaufen.
Die Geraden t_k und s_k sowie die Abszissenachse begrenzen eine Dreiecksfläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

f) Der Graph der Funktion f_2 hat den lokalen Extrempunkt P_{E_2}.
Geben Sie eine Gleichung einer trigonometrischen Funktion an, deren Graph den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P_{E_2} berührt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe B: Algebra / Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-2|0|2)$, $B(2|1|4)$, $P(-2|-4|4)$ und $D(-2|-4\sqrt{2}|2+2\sqrt{2})$ gegeben.
Die Strecke AB ist die Höhe eines geraden Kreiskegels. Sein Grundkreis k um den Punkt A mit dem Radius $\sqrt{20}$ liegt in der Ebene E.

a) Begründen Sie, dass $4x + y + 2z = -4$ eine Gleichung der Ebene E ist.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt D in der Ebene E liegt.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes D vom Grundkreis k.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt P auf dem Grundkreis k liegt.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Öffnungswinkel dieses Kreiskegels an der Spitze B.

c) Beschreiben Sie eine Möglichkeit, um die Koordinaten eines von P verschiedenen Punktes zu ermitteln, der auf dem Grundkreis k liegt.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines solchen Punktes.

d) Für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ist ein Punkt $C_a(-a|8\text{–}2a|-6+3a)$ gegeben.
Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Punkt C_a innerhalb des Grundkreises k liegt.
Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes C_a an, der vom Grundkreismittelpunkt den kleinstmöglichen Abstand hat.

e) Es gibt genau eine zur Grundkreisebene E parallele Ebene E_1, die das Volumen des Kreiskegels halbiert.
Weisen Sie nach, dass die Ebene E_1 vom Punkt B einen Abstand von $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt[3]{2}}$ haben muss.
Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E_1.

Aufgabe C: Stochastik

Bei der maschinellen Herstellung von Wurfpfeilen (Darts) in einer Firma sind 95% aller Pfeile fehlerfrei. Fehler treten nur als Material- oder Montagefehler auf.
Am Ende des Produktionsprozesses werden die Wurfpfeile zufällig in Sets zu je drei Pfeilen verpackt.

a) Der laufenden Produktion werden zufällig 60 Wurfpfeile entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

Ereignis A: Von den entnommenen Wurfpfeilen sind mindestens 50, aber höchstens 55 fehlerfrei.
Ereignis B: Von den entnommenen Wurfpfeilen sind mehr fehlerfrei, als man erwarten kann.

Wie viele Wurfpfeile müssen der laufenden Produktion entnommen werden, damit darunter genau 6 fehlerhafte Wurfpfeile zu erwarten sind?

b) Berechnen Sie, wie viele Sets ein Kontrolleur mindestens der Produktion entnehmen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens ein Set mit mindestens einem fehlerhaften Wurfpfeil zu erhalten.

c) Bei der Produktion treten Materialfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% und Montagefehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% auf.
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Wurfpfeil Material- und Montagefehler besitzt, 1% beträgt.
Weisen Sie nach, dass die beiden Fehlerarten stochastisch abhängig sind.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wurfpfeil mit Materialfehler auch Montagefehler besitzt.

Die Masse der von der Firma hergestellten Wurfpfeile sei normalverteilt mit $\mu = 18$ g und $\sigma = 0{,}5$ g.
Bei offiziellen Wettbewerben darf die Masse eines Wurfpfeils 18,9 g nicht überschreiten.

d) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Wurfpfeil der Firma bei diesen Wettbewerben nicht verwendet werden darf.

Aufgabe D: Analysis

Ein Gleisplan einer ebenen Modellbahnanlage wird auf der Grundlage eines kartesischen Koordinatensystems erstellt. Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.
Die beiden geradlinig verlaufenden Gleisabschnitte zwischen den Punkten $A(-10|0)$ und $B(0|0)$ sowie zwischen den Punkten $C(7|7)$ und $D(14|11)$ sind bereits festgelegt.
Zwischen den Punkten B und C soll ein Übergangsbogen so eingepasst werden, dass jeder Übergang zwischen den Schienenstücken ohne Knick erfolgt.
Die Lage der Schienen wird vereinfacht durch ihre Mittellinie bestimmt.

a) Tim schlägt vor, die Lage dieses Übergangsbogens durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion zu ermitteln.
Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades dazu geeignet ist. Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Funktion.
Zeigen Sie, dass auch die Funktion p mit

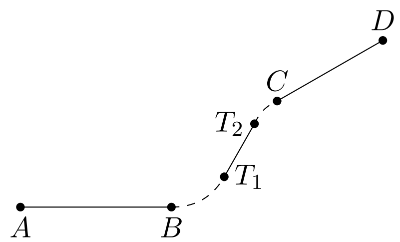
$$p(x) = \frac{-17}{2401}x^4 + \frac{24}{343}x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 7)$$

die Bedingungen für einen solchen Übergangsbogen erfüllt.
Die Länge eines Kurvenstückes des Graphen einer Funktion f bezeichnet man als Bogenlänge L_f.
Die Maßzahl von L_f kann im Intervall $a \leq x \leq b$ mit der Formel

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

berechnet werden.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Maßzahl der Bogenlänge L_p des Graphen der Funktion p zwischen den Punkten B und C.

b) Tom möchte den Übergangsbogen durch zwei kreisförmige Schienenstücke mit einem Radius von je $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ dm und einem eingeschlossenen geradlinigen Schienenstück herstellen.
Die nebenstehende Skizze zeigt einen Ausschnitt aus einem Gleisplan.



Das eingeschlossene geradlinige Schienenstück verläuft zwischen den Punkten T_1 und T_2. Der Punkt T_1 ist durch die Näherungswerte seiner Koordinaten $T_1(3{,}5|2{,}0)$ gegeben.
Ermitteln Sie Näherungswerte für die Koordinaten des Punktes T_2.

Aufgabe E: Algebra / Geometrie

Die Lage eines alten Abwasserkanals kann bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems in einem bestimmten Abschnitt näherungsweise als Teil einer Geraden mit der Gleichung

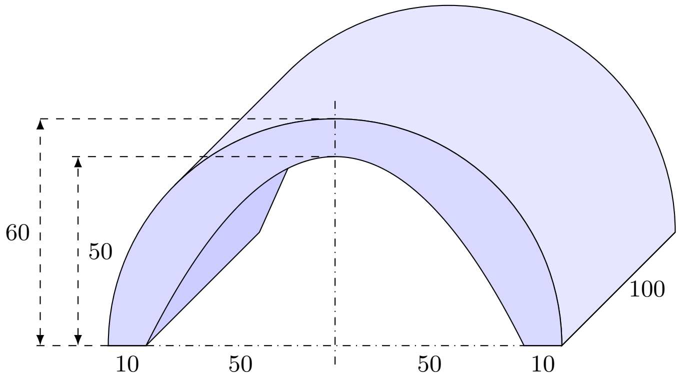
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (r \in \mathbb{R})$$

beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.
Ein neuer Kanal muss aus bautechnischen Gründen parallel zum alten Kanal in einem Abstand von 7 m verlaufen.

Der neue Kanal soll in einer Ebene E mit der Gleichung $18x + 5y – 22z = 75$ liegen.

a) Zeigen Sie, dass auch der alte Kanal in der Ebene E liegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die eine mögliche Lage des neuen Kanals beschreibt.

Für den Bau des neuen Kanals werden Fertigelemente verwendet. Sie besitzen eine konstante Querschnittsfläche, die durch einen Halbkreis (außen), durch einen parabelförmigen Bogen (innen) sowie zwei Strecken begrenzt werden (siehe Abbildung).



Ein solches Fertigelement hat eine Länge von 1 m und besteht aus Beton mit der Dichte $\rho = 2{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
b) Ermitteln Sie die Masse eines Fertigelementes in Kilogramm.

c) Das Fertigelement soll senkrecht zum Halbkreis der Querschnittsfläche an einer Stelle durchbohrt werden, wo die Wandstärke am größten ist.
Ermitteln Sie diese maximale Wandstärke.

1.6 Aufgaben LK (06)

Aufgabe A: Analysis

Für jedes t ($t \in \mathbb{R}$; $t > 0$) ist eine Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{1}{t^3} - x^2\right) \qquad (x \in D_{f_t})$$

gegeben.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_t.
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf Symmetrie.
Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_t in Abhängigkeit von t.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion f_t.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_t keine Wendepunkte besitzt.
Geben Sie den Wertebereich der Funktion f_t an.

Betrachtet wird im Folgenden die Funktion $f_{\frac{1}{e}}$.

c) Der Graph der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ und die Abszissenachse begrenzen eine Fläche vollständig. Durch Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht ein Körper.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für das Volumen dieses Körpers.

d) Der Graph einer quadratischen Funktion p hat mit dem Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ den Extrempunkt und die Schnittpunkte mit der Abszissenachse gemeinsam.
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion p mit der Gleichung

$$p(x) = -\frac{3e}{e^3 - 1}x^2 + 3e \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die beschriebenen Bedingungen erfüllt.
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten den Inhalt der vom Graphen der Funktion p und der Abszissenachse vollständig eingeschlossenen Fläche.

e) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}$; $0 < u < \sqrt{e^3 - 1}$) sind der Koordinatenursprung und die Punkte

$$P_u\left(u|f_{\frac{1}{e}}(u)\right) \qquad \text{und} \qquad P_{-u}\left(-u|f_{\frac{1}{e}}(-u)\right)$$

Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.
Ermitteln Sie einen Näherungswert für den Parameter u, so dass das Verhältnis der Länge der Basis zur Länge eines Schenkels dieses gleichschenkligen Dreiecks $1 : 2$ beträgt.

f) Auf dem Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ existiert genau ein Punkt A, für den der Anstieg der Senkrechten zur Tangente an den Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{e}}$ im Punkt A den Wert -1 hat.
Ermitteln Sie ohne Verwendung von Näherungswerten die Abszisse des Punktes A.

Aufgabe B: Algebra / Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|2|-3)$ und $B(-2|6|4)$ sowie für jedes a ($a \in \mathbb{R}$) ein Punkt $P_a(2a|-a|a)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass alle Punkte P_a auf ein und derselben Geraden g liegen.
Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P'_a der vom Punkt B den kleinstmöglichen Abstand hat.

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der x-y-Koordinatenebene.

b) Die Punkte A, B und P_a sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Es gibt genau zwei Werte a, für die die Seite AB Hypotenuse dieses Dreiecks ist. Ermitteln Sie die beiden Werte a.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass für jedes a durch die Punkte A, B und P_a eindeutig eine Ebene E_a festgelegt wird.
Die Ebene E_a lässt sich durch die Gleichung

$$(11a + 26)x + (16a + 6)y + (-6a + 4)z = 50a$$

beschreiben.
Es gibt Werte a, für die die Ebene E_a vom Koordinatenursprung den Abstand $\frac{50}{\sqrt{953}}$ hat.
Ermitteln Sie alle diese Werte a.

d) Es existieren genau zwei Werte a, für die der Punkt P_a ein Spiegelpunkt des Punktes B bei Spiegelung an einer durch A verlaufenden Ebene ist.
Berechnen Sie diese Werte a.

Aufgabe C: Stochastik

Falk bekommt zum Geburtstag eine Spielesammlung geschenkt, in der sich u.a. genau 6 reguläre, ideale Tetraeder befinden.
Fünf Tetraeder sind vom Typ A (Die vier Begrenzungsflächen sind mit den Zahlen 1,2, 3 bzw. 4 bedruckt.) und ein Tetraeder ist vom Typ B (Genau 2 Begrenzungsflächen sind mit der Zahl 1, genau eine mit der Zahl 2 und genau eine mit der Zahl 3 bedruckt).
Es gilt die Zahl als "gewürfelt", die auf der Begrenzungsfläche gedruckt ist, auf der das Tetraeder liegt.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Falk beim achtmaligen "Würfeln" mit einem Tetraeder vom Typ A mindestens viermal die Zahl 1 "würfelt".

b) Falk wählt aus den sechs Tetraedern zufällig eines aus und "würfelt" damit zweimal nacheinander die Zahl 1.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses Ereignis eintritt.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das dabei verwendete Tetraeder vom Typ B ist.

c) In seiner Spielesammlung findet Falk eine Anleitung zum Spiel „Hin und Her“ für ein Tetraeder vom Typ A.
Bei diesem Spiel werden auf einem Blatt Papier die Ziffern 1 bis 4 untereinander geschrieben.
Die geworfene Zahl wird durchgestrichen.
Ist die Zahl bereits gestrichen, muss sie wieder neu aufgeschrieben werden.
Das Spiel ist beendet, wenn alle Zahlen durchgestrichen sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel bereits nach viermaligem "Würfeln" beendet ist.

Falk hat nur noch die Augenzahl 2 auf seinem Blatt stehen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bis zum Spielende nur noch maximal dreimal "würfeln" muss.

d) Falk vereinbart mit seiner Schwester Carola folgendes Spiel:

Je ein Tetraeder vom Typ A und B wird geworfen und die jeweilige Zahl festgestellt.
Carola gewinnt, wenn beide Zahlen verschieden sind. Sie erhält den Betrag der Differenz dieser Zahlen als Punkte gut geschrieben.
Sind dagegen die Zahlen gleich, so erhält Falk n Punkte ($n \in \mathbb{N}$).

Ermitteln Sie den Wert für n, für den das Spiel fair ist.

Aufgabe D

Max und seine Schwester Maria spielen am Hang hinter dem Haus mit einem Ball. Der Hang kann in einem kartesischen Koordinatensystem näherungsweise durch eine Ebene E mit der Gleichung

$$10x - 2y + 13z = 10$$

beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Hinter dem Haus befindet sich in der x-y-Ebene ein kreisförmiger Gartenteich mit einem Durchmesser von 5 Metern und dem Mittelpunkt $M(8|1|0)$.

a) Ermitteln Sie die prozentuale Steigung des Hanges bzgl. der x-y-Ebene.

b) Maria lässt den Ball vom Punkt $P(-3|6|z_p)$ $(z_p \in \mathbb{R})$ des Hanges aus der Ruhe losrollen. Der Ball rollt den Hang geradlinig hinab.
Es wird angenommen, dass er anschließend mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig in der x-y-Ebene weiter rollt.
Untersuchen Sie, ob der Ball bezüglich seiner Bewegungsrichtung in den Gartenteich rollen kann.

c) Auf dem Hang befindet sich lotrecht zur x-y-Ebene ein 7,50 m hoher Baum mit dem Fußpunkt $F(-3{,}6|16|6)$. Sonnenstrahlen mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$ erzeugen von diesem Baum auf dem Hang einen Schatten. Untersuchen Sie, ob der Schatten des Baumes vollständig auf dem Hang liegt.

Der 1,50 m große Max möchte lotrecht vollständig in diesem Schatten stehen.
Ermitteln Sie die Menge aller Punkte des Hanges, in denen er sich dafür aufstellen kann, wenn man sowohl Max als auch den Baum als Strecken betrachtet.

Aufgabe E

In der y-z-Koordinatenebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems sind für jedes a $(a \in \mathbb{R};\ a > 0)$ und jedes b $(b \in \mathbb{R};\ b > 0)$ eine Funktion $f_{a;b}$ durch

$$z = f_{a;b}(y) = -ay^2 + b$$

und für jedes c $(c \in \mathbb{R};\ c > 0)$ eine Funktion g_c durch $z = g_c(y) = cy^{-2}$ gegeben.

a) Berechnen Sie alle Werte für a, b und c so, dass sich die zugehörigen Funktionen fa;b und gc im Schnittpunkt der Geraden z = y und z = 2 berühren. Erreichbare BE-Anzahl: 4

b) Die Graphen der Funktionen $f_{\frac{1}{2};4}$ und g_8 sowie die Gerade $z = 20$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Bei Rotation dieser Fläche um die z-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Dieser Körper wird durch eine zur x-y-Koordinatenebene parallele Ebene geschnitten. Ein entstehender Teilkörper hat das Volumen von 12π.
Bestimmen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten eine Gleichung einer solchen Ebene in allgemeiner Form.

c) Es existieren Ebenen, in denen die beiden gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen $f_{\frac{1}{2};4}$ und g_8 liegen.
Es gibt genau zwei Ebenen dieser Art, die vom Punkt $A(0|0|1)$ den Abstand $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ besitzen.
Ermitteln Sie, unter welchem Winkel sich diese beiden Ebenen schneiden.

1.7 Aufgaben LK (14)

Aufgabe 1

In Deutschland befindet sich eine Erzlagerstätte, welche große Mengen an Kupfererz enthält. Seit mehreren Jahren werden Untersuchungen der Erzlagerstätte durchgeführt.
Im Folgenden wird ein vereinfachtes mathematisches Modell zur Bestimmung der Förderquote von Kupfererz betrachtet.

In den ersten 5 Jahren wird die Förderquote durch die Funktion f_a mit

$$f_a(t) = a \cdot \left(-\frac{2}{125}t^3 + \frac{3}{25}t^2\right) + 1 \qquad (t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 5)$$

beschrieben. Dabei gilt:
t ... Zeitpunkt nach Beginn der Förderung (in Jahren)
a ... Parameter($a \in \mathbb{R}, 1 \leq a \leq 2$)
$f_a(t)$ ... Förderquote zum Zeitpunkt t (in Millionen Tonnen pro Jahr)

1.1. Zunächst gilt $a = 1{,}6$.
Ermitteln Sie die Förderquote, welche 2 Jahre nach Beginn der Förderung erreicht wird.
Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Förderquote den Wert 2 Millionen Tonnen pro Jahr erstmals übersteigt.
Die Förderquote steigt innerhalb der ersten 5 Jahre zu einem bestimmten Zeitpunkt am stärksten. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt.

1.2. Untersuchen Sie, ob der Parameter a die Förderquote zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 5$ beeinflusst.

Zeigen Sie: Der Zeitpunkt innerhalb der ersten 5 Jahre, zu dem die Förderquote am stärksten steigt, ist vom Parameter a unabhängig.

In den Jahren 5 bis 30 nach Beginn der Förderung wird die Förderquote durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}2 - \cos(0{,}4 \cdot \pi \cdot t) + 2{,}4 \qquad (t \in \mathbb{R}, 5 \leq t \leq 30)$$

beschrieben. Dabei gilt:

t ... Zeitpunkt nach Beginn der Förderung (in Jahren)
$g(t)$ Förderquote zum Zeitpunkt t (in Millionen Tonnen pro Jahr)

1.3. Zeigen Sie, dass im Zeitraum $5 < t < 30$ die höchste von der niedrigsten Förderquote um 400000 Tonnen pro Jahr abweicht.

1.4. Betrachtet wird der Zeitraum $0 \leq t \leq 30$ und es gilt $a = 1{,}6$.
Bestimmen Sie die gesamte Masse von Kupfererz in Millionen Tonnen, die im Zeitraum $5 \leq t \leq 30$ gefördert wird.

1.5. In den Jahren 30 bis 40 nach Beginn der Förderung soll die Förderquote durch eine ganzrationale Funktion h dritten Grades modelliert werden. Dabei gilt:
t ... Zeitpunkt nach Beginn der Förderung (in Jahren)
$h(t)$ ... Förderquote zum Zeitpunkt t (in Millionen Tonnen pro Jahr)

Die Funktion h soll folgende Eigenschaften besitzen:

1. Zum Zeitpunkt $t = 30$ gehen die Graphen der Funktionen g und h tangential ineinander über.

2. Zum Zeitpunkt $t = 40$ beträgt die Förderquote 0 und die Änderungsrate der Förderquote 0.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion h.

1.6. Geologiestudenten untersuchen während ihres Studiums Erze, welche die Minerale Chalkosin oder Bornit enthalten können.
Erfahrungsgemäß wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Chalkosin richtig erkannt.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 26 % wird genau eines dieser beiden Minerale richtig erkannt.
Die richtige Bestimmung von Chalkosin und Bornit erfolgt dabei unabhängig voneinander.

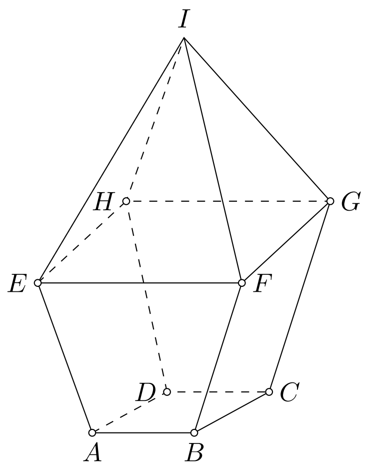
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit beide Minerale richtig erkannt werden.

1.7. Geologen entnahmen einer Gesteinsschicht Bohrproben gleicher Masse. Sie ermittelten die Masse m reinen Kupfers, die sich in jeder dieser Bohrproben befand.
Die Geologen stellten fest, dass m annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 30{,}0$ g und der Standardabweichung $\sigma = 7{,}59$ ist.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse m an reinem Kupfer einer zufällig ausgewählten Bohrprobe im Intervall $25{,}0 \text{ g} \leq m \leq 35{,}0$ g liegt.
2% der untersuchten Bohrproben besaßen einen Kupfergehalt, der über einer bestimmten Masse m_1 lag.
Bestimmen Sie diese Masse m_1.

Aufgabe 2

In einem Baumarkt werden Lampen für den Außenbereich angeboten. Eine dieser Lampen kann annähernd durch den Lampenkörper $ABCDEFGHI$ beschrieben werden, der sich aus einer geraden quadratischen Pyramide $EFGHI$ und einem Teil einer weiteren geraden quadratischen Pyramide $ABCDEFGH$ zusammensetzt (siehe Abbildung).



Der Lampenkörper kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Zentimeter) dargestellt werden.

Es gilt: $A(-5/5/-15)$, $B(-5/25/-15)$, $C(-25/25/-15)$, $E(0/0/0)$, $F(0/30/0)$, $G(-30/30/0)$.

Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene.
Die Gesamthöhe des Lampenkörpers beträgt 35 cm.

2.1. Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.
Begründen Sie, dass der Punkt I die Koordinaten $I(-15/15/20)$ besitzt.

2.2. Untersuchen Sie, ob die Ebene, in der das Viereck $BCGF$ liegt, parallel zu einer Koordinatenachse verläuft.
Weisen Sie nach, dass das Viereck $BCGF$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

2.3. Auf der Strecke, die vom Punkt I und dem Mittelpunkt des Quadrates $EFGH$ begrenzt wird, liegt ein Punkt K.
Dieser Punkt K hat von der Ebene, welche die Fläche FGI enthält, den Abstand 9 cm.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K.

2.4. Die Fläche $ABCD$ ist lichtundurchlässig. Alle anderen Seitenflächen des Lampenkörpers sind lichtdurchlässig.
Im Mittelpunkt des Quadrates $EFGH$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.
Eine Ebene verläuft parallel und in einem Abstand von 60 cm zur Fläche $ABCD$. Durch die Lichtquelle entsteht in dieser Ebene eine quadratische Schattenfläche der Fläche $ABCD$.

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Schattenfläche.

2.5. Der Hersteller der Lampen möchte das Aussehen des Lampenkörpers so verändern, dass sich das Volumen der geraden quadratischen Pyramide $EFGHI$ zum Volumen des Körpers $ABCDEFGH$ wie 2 : 3 verhält.
Dies soll ausschließlich durch Veränderung der Höhe des Punktes I über der Fläche $EFGH$ erreicht werden.

Ermitteln Sie, welche Höhe des Punktes I über der Fläche $EFGH$ gewählt werden muss.

Als Lichtquellen der Lampen werden Energiesparlampen genutzt.
Der Hersteller gibt an, dass bei der Produktion dieser Energiesparlampen zwei Fehler unabhängig voneinander auftreten können.
Erfahrungsgemäß besitzt eine von 15 dieser Energiesparlampen einen fehlerhaften Glaskörper.
Bei einer von 14 Energiesparlampen tritt erfahrungsgemäß eine fehlerhafte Beschichtung auf.
Liegt mindestens einer der beiden Fehler vor, so wird die Energiesparlampe als Ausschuss deklariert.

2.6. Ermitteln Sie, wie viele Energiesparlampen der laufenden Produktion des Herstellers mindestens entnommen werden müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine als Ausschuss deklarierte darunter befindet.

2.7. Nach einer Produktionsumstellung behauptet der Hersteller, dass nur noch $\frac{1}{10}$ der produzierten Energiesparlampen als Ausschuss deklariert werden.

Diese Behauptung soll in einem Testverfahren überprüft werden.

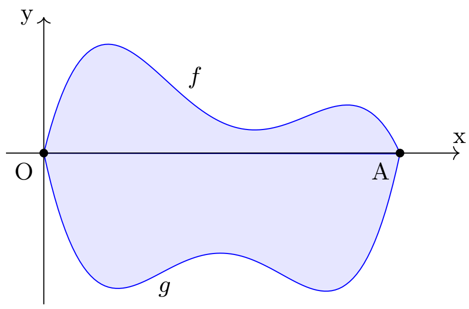
Dabei soll die Nullhypothese "Der Anteil der als Ausschuss deklarierten Energiesparlampen beträgt $\frac{2}{15}$." gegen die Alternativhypothese "Der Anteil der als Ausschuss deklarierten Energiesparlampen beträgt $\frac{1}{10}$." getestet werden.

Dazu sollen der laufenden Produktion des Herstellers zufällig 100 Energiesparlampen entnommen und geprüft werden, wie viele davon als Ausschuss deklariert werden.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl die Alternativhypothese zutrifft, soll höchstens 4 % betragen.
Bestimmen Sie den zugehörigen Annahmebereich der Nullhypothese.

1.8 Aufgaben LK (15)

Aufgabe 1

Eine Spielzeugfabrik stellt Puppenwagen her. Die beiden zueinander kongruenten Seitenteile eines solchen Puppenwagens bestehen aus Holzplatten.



Die Außenfläche eines dieser Seitenteile kann in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 1 Dezimeter) dargestellt werden (siehe Abbildung 1).

Die obere Begrenzungslinie der Außenfläche zwischen den Punkten O und $A(x_A/0)$ kann durch den Graphen der Funktion f und die untere Begrenzungslinie zwischen den Punkten O und $A(x_A/0)$ durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden.
Die Funktionen f und g sind durch die Gleichungen

$$f(x) = -0{,}106 \cdot x^4 + 1{,}082 \cdot x^3 - 3{,}602 \cdot x^2 + 4{,}039 \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq x_A) \quad \text{und}$$

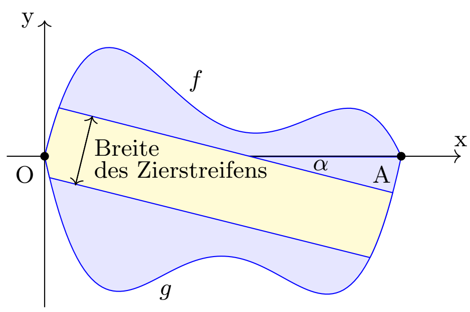
$$g(x) = 0{,}135 \cdot x^4 - 1{,}269 \cdot x^3 + 3{,}962 \cdot x^2 - 4{,}618 \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq x_A)$$

gegeben.

1.1. Begründen Sie, dass die Strecke OA näherungsweise die Länge 4,71 dm besitzt.
Jedes Seitenteil des Puppenwagens wird aus einer rechteckigen Holzplatte ausgesägt. Die Strecke OA verläuft dabei parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten dieser Rechtecksfläche.
Ermitteln Sie Mindestlänge und Mindestbreite der rechteckigen Holzplatte.

1.2. Jedes 0,5 cm dicke Seitenteil des Puppenwagens soll vollständig (Außenfläche, Innenfläche und Randfläche) mit einem für Kleinkinder gefahrlosen Speziallack überzogen werden.
Ermitteln Sie den Inhalt der zu lackierenden Fläche eines Seitenteils des Puppenwagens.

1.3. Jedes Seitenteil soll auf der Außenfläche mit einem Zierstreifen beklebt werden.
Die parallelen Begrenzungen des Zierstreifens sollen dabei vollständig auf der Außenfläche des Seitenteils zu sehen und unter einem Winkel von $\alpha = 15°$ gegenüber der Abszissenachse geneigt sein (siehe Abbildung 2).
Bestimmen Sie die maximal mögliche Breite des Zierstreifens.



1.4. Für die Befestigung des Haltegriffes am Puppenwagen wird eine Metallstrebe verwendet. Zwischen den Punkten A und $B(5{,}25/y_B)$ kann die Metallstrebe durch einen Teil des Graphen einer linearen Funktion h beschrieben werden. Im Punkt A geht der Graph der Funktion h tangential in den Graphen der Funktion g über.
Bestimmen Sie die Länge der Metallstrebe zwischen den Punkten A und B.

Puppenwagen aus der laufenden Produktion können Oberflächen- oder Farbgestaltungsfehler besitzen.
Erfahrungsgemäß werden bei 3,0% aller produzierten Puppenwagen Oberflächenfehler festgestellt. Bei 1,0% aller produzierten Puppenwagen werden erfahrungsgemäß Farbgestaltungsfehler und keine Oberflächenfehler festgestellt. Oberflächen- und Farbgestaltungsfehler treten bei einem produzierten Puppenwagen erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 2,5% auf.

1.5. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein der Produktion zufällig entnommener Puppenwagen keinen der beiden Fehler aufweist.

1.6. Nach einer Veränderung des Produktionsablaufes wird von Seiten der Spielzeugfabrik behauptet, dass von den produzierten Puppenwagen statt bisher 4% nun weniger fehlerhaft sind.
In einem Test mit 100 der Produktion zufällig entnommenen Puppenwagen soll die Nullhypothese

"Der Anteil der fehlerhaften Puppenwagen beträgt mindestens 4%."

einem Signifikanzniveau von 15% überprüft werden.
Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese für den beschriebenen Test.

Aufgabe 2

In einem Wald ist ein Baumwipfelpfad geplant.
Er soll vier Aussichtsplattformen besitzen. Die Aussichtsplattformen sind in der Planung untereinander durch Brücken verbunden, welche jeweils in einer Aussichtsplattform beginnen bzw. enden. Die Aussichtsplattformen werden als Punkte, die Brücken als Strecken angenommen.

Der geplante Baumwipfelpfad kann in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter).
Drei der Aussichtsplattformen sollen sich in den Punkten $A(30{,}0/5{,}0/15{,}0)$, $B(0{,}0/0{,}0/25{,}0)$ und $D(0{,}0/50{,}0/30{,}0)$ befinden.
Die vierte Aussichtsplattform ist in Abhängigkeit von h ($h \in \mathbb{R}; 15{,}0 \leq h \leq 35{,}0$) im Punkt $C_h(-15{,}0/45{,}0/h)$ geplant. Die Punkte A, B und D liegen in einer Ebene E.
Der ebene Waldboden liegt in der x-y-Koordinatenebene.

2.1. Begründen Sie, dass die Aussichtsplattformen in den Punkten A, B und D in der Ebene mit E: $7 \cdot x - 2 \cdot y + 20 \cdot z = 500$ liegen.
Ermitteln Sie die Gesamtlänge der drei Brücken, welche die Aussichtsplattformen in den Punkten A, B und D untereinander verbinden sollen.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Brücke zwischen den Aussichtsplattformen in den Punkten A und B gegenüber dem ebenen Waldboden.

2.2. Die Brücken, die von der Aussichtsplattform im Punkt C_h ($h \in \mathbb{R}; 15{,}0 \leq h \leq 35{,}0$) zu den Aussichtsplattformen in den Punkten A, B und D führen, sollen in einer Planvariante I ebenfalls in der Ebene E liegen.
Ermitteln Sie dafür den Wert von h.

2.3. Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes auf der Brücke zwischen den Aussichtsplattformen in den Punkten B und D, der den geringsten Abstand zum Punkt A besitzt.

Die Brücke zwischen den Aussichtsplattformen in den Punkten B und D liegt auf der Geraden i. Die Brücke zwischen den Aussichtsplattformen in den Punkten A und C_h ($h \in \mathbb{R}; 15{,}0 \leq h \leq 35{,}0$) liegt auf der Geraden g_h. Der Abstand d der Geraden i und g_h beträgt

$$d(h) = \frac{|60 \cdot h - 2085|}{\sqrt{4h^2 - 152 \cdot h + 9625}}$$

Es gibt einen Wert von h ($h \in R; 15{,}0 \leq h \leq 35{,}0$), für den der Abstand der Geraden i und g_h maximal ist.
Bestimmen Sie diesen Wert von h und geben Sie den maximalen Abstand an.

2.4. In der Planungsvariante II soll der Wert von h ($h \in R; 15{,}0 \leq h \leq 35{,}0$) so gewählt werden, dass für den zugehörigen Punkt C_h folgende Bedingungen gelten:

(A) Der Abstand der Aussichtsplattform im Punkt C_h zur Ebene E soll höchstens 7,0 m betragen.

(B) Die Brücken von der Aussichtsplattform im Punkt C_h zu den Aussichtsplattformen in den Punkten B und D sollen einen Winkel von mindestens 90° einschließen.

Bestimmen Sie gemäß dieser Bedingungen alle möglichen Werte von h.

2.5. Ausgehend von den Aussichtsplattformen sollen geradlinige Sicherungsseile gespannt werden.
Ein Sicherungsseil soll vom Punkt D so zum Waldboden gespannt werden, dass es unter einem Winkel von 60° auf dem Waldboden auftrifft.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines möglichen Auftreffpunktes dieses Sicherungsseiles auf dem Waldboden.

Alle Punkte in der x-y-Koordinatenebene, die als Auftreffpunkte dieses Sicherungsseiles auf dem Waldboden in Frage kommen, schließen eine Fläche vollständig ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

2.6. Die Reißfestigkeit der vorgesehenen Sicherungsseile ist annähernd normalverteilt.
Der Hersteller der Seile gibt an, dass der Erwartungswert für die Reißfestigkeit dieser Seile bei 145,0 kN liegt. Außerdem gibt der Hersteller an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Sicherungsseil bei einer Belastung von mehr als 140,0 kN reißt, bei ca. 97,3 % liegt.

Bestimmen Sie auf der Grundlage dieser Angaben, mit welcher Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden muss, dass ein Sicherungsseil bei einer Belastung zwischen 142,0 kN und 150,0 kN reißt.

2.7. Es wird erwartet, dass ca. 65,0% der zukünftigen Besucher des Baumwipfelpfades aus der näheren Umgebung kommen. Außerdem wird erwartet, dass der Anteil von Kindern unter den zukünftigen Besuchern, die nicht aus der näheren Umgebung kommen, bei ca. 55,0% liegen wird. Der Gesamtanteil der Kinder unter allen zukünftigen Besuchern wird mit ca. 48,5 % prognostiziert.
An Ferientagen werden pro Tag ca. 100 Kinder aus der näheren Umgebung als zukünftige Besucher erwartet.

Ermitteln Sie, mit welcher Gesamtbesucherzahl an einem Ferientag geplant wird.

1.9 Aufgaben LK (16)

Aufgabe 1

Die Fahrbahn einer Autorennstrecke kann in einem Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 100 Meter) dargestellt werden. Ihr Verlauf kann im betrachteten Teilstück durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{6}{x^2+3} \; (x \in R; -5{,}00 \leq x \leq 5)$$

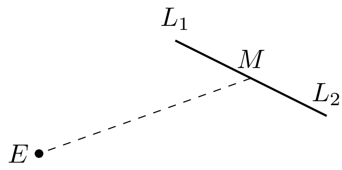
näherungsweise beschrieben werden.
Die Breite der Fahrbahn wird vernachlässigt. Die Punkte A, B, C und D liegen auf dieser Fahrbahn.
Im gegebenen Koordinatensystem besitzen diese Punkte die Koordinaten
$A(-3{,}00|-1{,}00), B(3{,}00|2{,}00), C(-1{,}00|f(-1{,}00))$ und $D(1{,}00|f(1{,}00))$.

1.1. Der Graph der Funktion f besitzt genau zwei Wendepunkte.
Zeigen Sie, dass die Punkte C und D diese beiden Wendepunkte sind. Zwischen den Punkten C und D existiert ein geradliniger Verbindungsweg.
Weisen Sie nach, dass dieser Weg etwa 224 m lang ist.

1.2. Ein Rennwagen benötigt für die Fahrt auf der Fahrbahn zwischen den Punkten A und B eine Zeit von 17 Sekunden.
Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Rennwagens zwischen den Punkten A und B in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.3. Zum Schutz der Rennfahrer wird eine Auslaufzone gebaut.
In der Auslaufzone soll ein Rennwagen, welcher von der Fahrbahn abkommt, stark abgebremst werden. Die Auslaufzone wird im Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion p mit $p(x) = -0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 2{,}1$ $(x \in R)$ und den Graphen der Funktion f vollständig begrenzt.
Die Auslaufzone ist mit einer 25 cm dicken Kiesschicht belegt.
Bestimmen Sie das Volumen dieser Kiesschicht.

Wenn ein Rennwagen von A in Richtung B fährt und im Punkt $E(0{,}00|2{,}00)$ tangential die Fahrbahn verlässt, dann trifft er bei geradliniger Fahrt nach etwa 56 m im Punkt M auf die Leitplanke (siehe Abbildung).
Ein Endpunkt der Leitplanke ist $L_1(0{,}30|2{,}30)$. Die Dicke der Leitplanke wird vernachlässigt.



1.4. Zeigen Sie, dass der Punkt M näherungsweise die Koordinaten $M(0{,}50|2{,}25)$ besitzt.
Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Leitplanke. Bestimmen Sie die Koordinaten des Endpunktes L_2 der Leitplanke. Ermitteln Sie die minimale Entfernung der Fahrbahn der Autorennstrecke vom Mittelpunkt der Leitplanke.

1.5. Es gibt einen Bereich der Fahrbahn der Autorennstrecke, für den gilt:
Wenn ein Rennwagen in diesem Bereich bei der Fahrt von C nach D tangential von der Fahrbahn abkommt und geradlinig weiterfährt, dann trifft er auf die Leitplanke L_1L_2.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P der Fahrbahn, in dem dieser Bereich von C ausgehend beginnt.

Eine Firma stellt Teile für die Leitplanke her. Jedes Teil wird zunächst zu einem Profil gebogen und danach beschichtet.
Die Firma gibt bezüglich der Produktion dieser Teile an:
∘ 4,0% aller Teile sind fehlerhaft im Profil,
∘ 8,0% aller Teile sind fehlerhaft in der Beschichtung,
∘ 91,2% aller Teile sind fehlerfrei, d. h., sie besitzen keinen Fehler im Profil und keinen Fehler

in der Beschichtung.

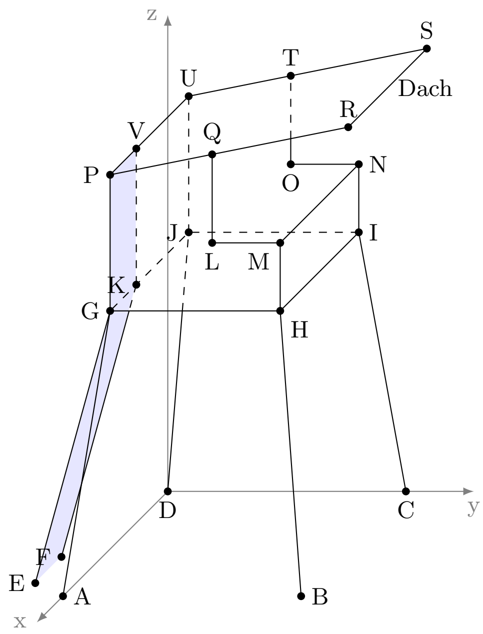
1.6. Der Produktion der Firma werden 70 Teile zufällig entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mehr fehlerfreie Teile sind, als zu erwarten ist.

1.7. Ein der Produktion der Firma zufällig entnommenes Teil besitzt keinen Fehler in der Beschichtung.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Teil fehlerhaft im Profil ist.

Aufgabe 2

Zur Tierbeobachtung wird ein Hochstand errichtet (siehe Abbildung)
Der geplante Hochstand besteht aus einer Kanzel, die von einem Kanzelbock getragen wird, einer Leiter und einem Dach.
Der Kanzelbock besteht aus den Balken AG, BH, CI und DJ. Die Punkte A, B, C und D bilden ein Rechteck.

Auf die Kanzel $GHMLQPJINOTU$, welche die Form eines geraden Prismas besitzt, ist das rechteckige Dach $PRSU$ aufgesetzt.
Die rechteckige Leiter $EFKG$ führt vom Boden zum rechteckigen Einstieg $GKVP$ in die Kanzel.
Der geplante Hochstand kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden. Der ebene Boden liegt dabei in der xy-Koordinatenebene.



Folgende Punktkoordinaten sind gegeben:

$$A(4{,}0|0{,}0|0{,}0), C(0{,}0|3{,}5|0{,}0), D(0{,}0|0{,}0|0{,}0), G(3{,}5|0{,}5|4{,}0), I(0{,}5|3{,}0|4{,}0),$$

$$J(0{,}5|0{,}5|4{,}0), M(3{,}5|3{,}0|5{,}0), L(3{,}5|2{,}0|5{,}0), P(3{,}5|0{,}5|6{,}0), S(0{,}5|4{,}0|6{,}7)$$

Materialdicken werden vernachlässigt.

2.1. Geben Sie die Koordinaten des Punktes O an.

2.2. Bestimmen Sie den Neigungswinkel eines Balkens des Kanzelbocks gegenüber dem Boden.

2.3. Die Leiter ist gegenüber dem Boden um etwa 76° geneigt.
Ermitteln Sie den Abstand des Punktes E vom Punkt A.

2.4. Die Kante QL verläuft parallel zur z-Achse.
Begründen Sie, dass der Punkt Q die Koordinaten $Q(3{,}5|2{,}0|6{,}3)$ besitzt.

Zur Stabilisierung des Hochstandes sollen zwischen den Balken des Kanzelbocks geradlinige Streben angebracht werden.

2.5. Parallel zum Boden soll in einer Höhe von 1,0 m eine Strebe zwischen den Balken AG und DJ angebracht werden.
Ermitteln Sie die Länge dieser Strebe.

2.6. Von einem Punkt des Balkens DJ sollen zwei Streben so an den Endpunkten des Balkens CI befestigt werden, dass diese Streben einen rechten Winkel bilden. Untersuchen Sie, ob dies möglich ist.

2.7. Zum Verbinden der Teile des Hochstandes werden Nägel verwendet.
Die Länge dieser Nägel ist annähernd normalverteilt. Es wurde festgestellt, dass in 1% aller Fälle die Länge dieser Nägel geringer als 85 mm und in 1% aller Fälle die Länge dieser Nägel größer als 99 mm sind.
Berechnen Sie aus diesen Angaben den Erwartungswert der Länge dieser Nägel und die Standardabweichung.

2.8. Zur Einweihung des Hochstandes bereitet dessen Besitzer für Kinder ein Spiel vor vor. Für dieses Spiel stellt er drei Gefäße A, B und C bereit.
In den drei Gefäßen befinden sich gleichartige Lose mit je einem Bild.
Folgende Lose befinden sich in den Gefäßen:

Gefäß A: 3 Lose mit einem Reh, 4 Lose mit einem Kuckuck
Gefäß B: 1 Los mit einem Reh, 2 Lose mit einem Kuckuck
Gefäß C: 5 Lose mit einem Reh

Als Spielregeln sollen gelten:
Ein Kind zieht zufällig ein Los aus Gefäß A und legt es in Gefäß B.
Danach zieht dieses Kind zufällig ein Los aus Gefäß B und legt es in das Gefäß C. Befindet sich anschließend im Gefäß C ein Los mit einem Kuckuck, gewinnt das Kind.
Ermitteln sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Kind bei diesem Spiel gewinnt.

1.10 Aufgaben LK (17)

Aufgabe 1

Die Grundfläche einer Multifunktionsarena kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden. Der positive Teil der Abszissenachse zeigt nach Osten; der positive Teil der Ordinatenachse zeigt nach Norden.
Die nördliche Begrenzungslinie der Grundfläche der Multifunktionsarena kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10000 - x^2}, (x \in D_f)$$

beschrieben werden.

1.1. Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an.
Zeigen Sie, dass der Punkt $P(100|0)$ auf den Graphen der Funktionen f und g liegt.
Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur Ordinatenachse verläuft.
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich in einem geeigneten Koordinatensystem.

1.2. Bestimmen Sie die größte Nord-Süd-Ausdehnung der Grundfläche der Multifunktionsarena.

1.3. Unter der gesamten Grundfläche der Multifunktionsarena befindet sich als Fundament eine 0,8 m dicke Bodenplatte aus Beton. Ermitteln Sie das Volumen der Bodenplatte.

1.4. Im Fundament der Grundfläche befinden sich Versorgungskanäle. Der Verlauf eines Versorgungskanals kann durch einen Teil des Graphen einer quadratischen Funktion h beschrieben werden.
Der Graph dieser Funktion h verläuft durch den Punkt $Q(50|0)$ und trifft im Punkt $R(80|f(80))$ senkrecht auf die nördliche Begrenzungslinie der Grundfläche.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion h.

Die Multifunktionsarena hat eine vollständig geschlossene Dachfläche, welche sich direkt an die Grundfläche anschließt.
Diese Dachfläche kann durch Rotation des Graphen von f um die Abszissenachse beschrieben werden. Die Dachfläche und die Grundfläche begrenzen einen kuppelförmigen Raum.

1.5. Bestimmen Sie das Volumen des kuppelförmigen Raumes.

1.6. Jeder zur Abszissenachse senkrechte Schnitt durch die Dachfläche ergibt einen Halbkreis. Die sieben Träger der Dachfläche verlaufen entlang solcher Halbkreise. Benachbarte Träger besitzen jeweils den gleichen Abstand.
Die Träger werden von West nach Ost mit Träger 1 bis Träger 7 bezeichnet. Die Träger 1 und 7 besitzen jeweils eine Länge von 68,5 m. Ermitteln Sie die Länge des Trägers 3.

Zur Verkleidung der Dachfläche werden Lichtpaneele geliefert.

1.7. Aus Erfahrung sind folgende zwei Aussagen bekannt:
(1) 85% der gelieferten Lichtpaneele können sofort eingebaut werden.
(2) 70% der gelieferten Lichtpaneele, die nicht sofort eingebaut werden können, können nach einer Überarbeitung eingebaut werden.

Ermitteln Sie den Anteil der gelieferten Lichtpaneele, die eingebaut werden können.
Ein eingebautes Lichtpaneel wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Lichtpaneel überarbeitet wurde.

1.8. Es wurden 18000 Lichtpaneele eingebaut. Die Funktionsdauer der eingebauten Lichtpaneele ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 8 Jahren und einer Standardabweichung von

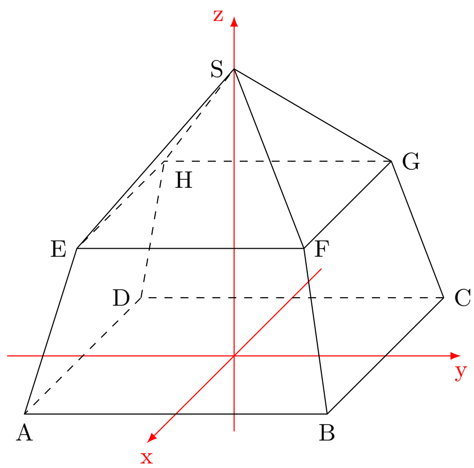
9 Monaten.
Ermitteln Sie, bei wie vielen der eingebauten 18000 Lichtpaneele mit einer Funktionsdauer von höchstens 6 Jahren zu rechnen ist.

Aufgabe 2

Die altägyptische Knickpyramide in Dahschur hat eine einzigartige Form. Diese Form entstand, nachdem in drei Phasen jeweils der geplante Bau geändert wurde. Die erste Phase wurde erfolglos abgebrochen.
In der zweiten Phase wurde mit dem Bau einer geraden quadratischen Pyramide begonnen. Die Grundfläche $ABCD$ befand sich im ebenen Gelände.
Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche betrug 188,0 m. Die entstandenen Seitenflächen waren um 54,0° gegenüber dem ebenen Gelände geneigt.

2.1. Berechnen Sie, welche Höhe diese Pyramide nach Fertigstellung erreicht hätte.

In einer Bauhöhe von 49,0 m traten Stabilitätsprobleme auf.
In der dritten Phase wurde auf den 49,0 m hohen Pyramidenteil $ABCDEFGH$ eine weitere gerade quadratische Pyramide $EFGHS$ gebaut. So entstand die noch heute erhaltene Form der Knickpyramide ABCDEFGHS mit einer Gesamthöhe von 105,0 m.



Diese Knickpyramide kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) dargestellt werden (siehe Abbildung).
Das ebene Gelände liegt in der x-y-Koordinatenebene. Der Mittelpunkt der Fläche $ABCD$ liegt im Koordinatenursprung. Die Seitenkanten AD und BC verlaufen parallel zur x-Achse.

2.2. Begründen Sie, dass der Punkt B die Koordinaten $B(94{,}0|94{,}0|0{,}0)$ besitzt.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der die Punkte E, F, G und H liegen.
Weisen Sie nach, dass der Punkt E die Koordinaten $E(58{,}4|-58{,}4|49{,}0)$ besitzt.

2.3. Bestimmen Sie das Volumen der Knickpyramide.

In der Seitenfläche $ABFE$ gibt es einen Zugang in das Innere der Knickpyramide. Von diesem Zugang aus führt ein geradliniger Gang zu den Grabkammern.
Der Punkt Z ist Mittelpunkt des Zugangs und besitzt die Koordinaten $Z(85{,}3|0{,}0|12{,}0)$.
Die Mittellinie des Ganges ist 74,0 m lang und verläuft vom Punkt Z in Richtung des Vektors
$\vec{x} = \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0{,}0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}$.

2.4. Bestimmen Sie, in welcher Tiefe unter dem ebenen Gelände die Mittellinie des Ganges endet.

2.5. Mithilfe der Videokamera einer Drohne soll in den Gang zu den Grabkammern hineingefilmt werden.

Beim Start der Drohne befindet sich der Mittelpunkt des Objektivs der Videokamera im Punkt (104,0|30,0|0,1). Die Drohne soll nach dem Start zunächst senkrecht zum ebenen Gelände nach oben steigen.
Danach soll die Drohne in Richtung des Vektors $\vec{BE}$ fliegen, bis sich der Mittelpunkt des Objektivs der Videokamera auf der Geraden befindet, auf der auch die Mittellinie des Ganges zu den Grabkammern liegt.
Ermitteln Sie, welche Strecke die Drohne nach dem Start senkrecht zum ebenen Gelände nach oben steigen muss.

Jedes Jahr besuchen sehr viele Urlauber die Knickpyramide. Darunter stammen erfahrungsgemäß 28% aus Deutschland.

2.6. Beim Besuch der Knickpyramide werden 25 Urlauber zufällig ausgewählt und befragt, woher sie stammen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Unter den befragten Urlaubern stammt keiner aus Deutschland.
Ereignis B: Der zwölfte befragte Urlauber ist der fünfte, der aus Deutschland stammt.

2.7. Ein Reiseveranstalter hat eine große Werbekampagne für den Besuch der Knickpyramide durchgeführt. Daraufhin vermutet er, dass der Anteil der aus Deutschland stammenden Urlauber, welche die Knickpyramide besuchen, gestiegen ist.

In einem Test mit 100 zufällig ausgewählten und befragten Besuchern der Knickpyramide soll die Nullhypothese
"Der Anteil der aus Deutschland stammenden Urlauber, welche die Knickpyramide besuchen, liegt höchstens bei 28%."
getestet werden.

Von den 100 zufällig ausgewählten und befragten Urlaubern stammen 33 aus Deutschland.
Untersuchen Sie, ob aus diesen Daten auf einem Signifikanzniveau von 5% die Vermutung des Reiseveranstalters bestätigt werden kann.

1.11 Aufgaben LK (18)

Aufgabe 1

Canopy ist eine Touristenattraktion. Dabei werden in großer Höhe Stahlseile angebracht, an denen man auf Rollen entlang gleitet.
Für jeden Wert für t ($t \in \mathbb{R}$, $t > 0$) beschreibt der Graph der Funktion f_t mit

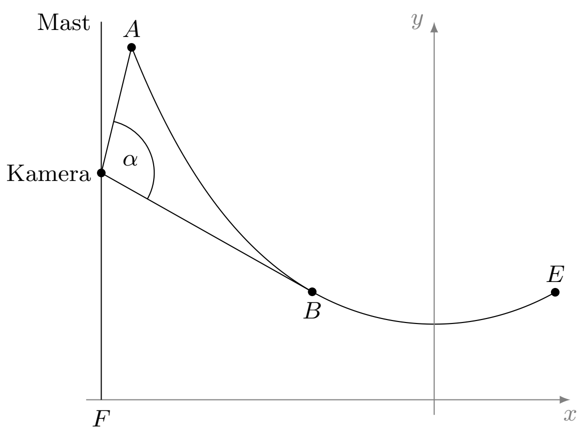
$$y = f_t(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{t}} + e^{-\frac{x}{t}}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

in einem kartesischen Koordinatensystem den Verlauf eines solchen Stahlseiles.

1.1 Begründen Sie, dass die Funktion f_t keine Nullstelle besitzt.
Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion durch die Gleichung

$$f_t'(x) = \frac{5}{2t} \cdot \left(e^{\frac{x}{t}} + e^{-\frac{x}{t}}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

beschrieben werden kann.
Der Wert für den Parameter t beeinflusst Eigenschaften der Funktion bzw. des Graphen der Funktion f_t. Nennen Sie eine durch den Parameter t beeinflusste und eine nicht beeinflusste Eigenschaft.



Die nebenstehende Abbildung (nicht maßstäblich) zeigt für $t = 90$ das Stahlseil einer Canopy-Tour zwischen dem Startpunkt $A(-200{,}0|f_{90}(-200{,}0))$ und dem Endpunkt $E(80{,}0|f_{90}(80{,}0))$ in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter).
Die Profillinie des ebenen Geländes liegt auf der Abszissenachse.
Die Funktionswerte der Funktion f_{90} geben die jeweilige Höhe des Stahlseils über dem Gelände in Meter an.

1.2 Bestimmen Sie den Höhenunterschied zwischen Start- und Endpunkt.
Geben Sie die Höhe des tiefsten Punktes des Stahlseils an.
Ermitteln Sie das Gefälle des Stahlseils im Startpunkt A.

1.3 Bestimmen Sie, um wie viel sich die Länge des Stahlseils reduziert, wenn man es zwischen den Punkten A und E straff spannen würde.

Zur Kontrolle: Die Länge des nicht straff gespannten Stahlseils zwischen den Punkten A und E beträgt $l \approx 281{,}4$ m.

Ermitteln Sie den größten Höhenunterschied, den das straff gespannte Seil zum tatsächlichen Verlauf hätte.

1.4 Mit einer Kamera sollen Teile der Canopy-Tour überwacht werden. Der Fußpunkt eines lotrechten Mastes besitzt die Koordinaten $F(-220{,}00|0{,}00)$.
An diesem Mast wird in 15,00 m Höhe die Kamera angebracht. Von der Kamera aus kann man einen Teil des Stahlseils von unten sehen. Ein Schenkel des Winkels α (siehe Abbildung) liegt auf der gedachten Tangente von der Kamera an das Seil.
Zeigen Sie, dass diese Tangente das Seil im Punkt $B(-80{,}60|7{,}14)$ berührt.

Hinweis: Die Koordinaten des Punktes B sind als Näherungswerte angegeben.

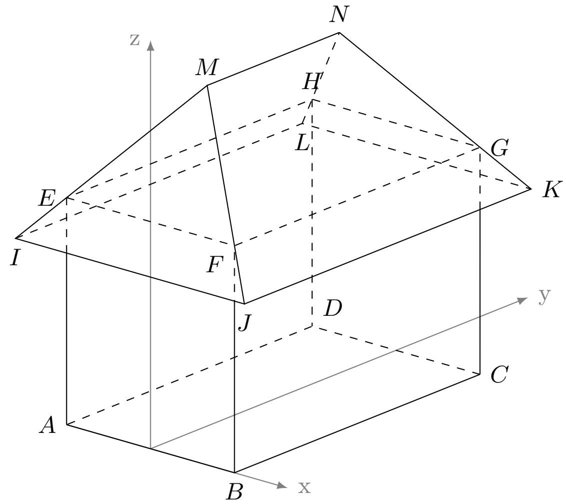
Bestimmen Sie die Größe des Winkels α (siehe Abbildung), unter dem das Stahlseil von der Kamera aus von unten gesehen wird.

1.5 Man legt fest, dass die Masse eines Touristen, der an diesem Stahlseil die Canopy-Tour absolvieren möchte, höchstens 100 kg betragen darf.
Bei der Herstellung des Stahlseils wird eine Sicherheitsgröße m_s so berücksichtigt, dass die Belastbarkeit des Stahlseils normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ kg $+m_s$ und der Standardabweichung 20 kg ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stahlseil bei einer Belastung von weniger als 100 kg reißt, soll höchstens 0,01 % betragen.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen den Mindestwert für m_s.

Aufgabe 2

Ein Vereinshaus besteht aus einem quaderförmigen Gebäudekörper und einem darauf aufgesetzten Dach (siehe Abbildung).



Die Grundfläche $ABCD$ des Gebäudekörpers liegt in der x-y-Koordinatenebene eines kartesischen Koordinatensystems (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter).
Die Deckfläche des Gebäudekörpers ist $EFGH$.
Das Vereinshaus ist symmetrisch zur y-z-Koordinatenebene.

Der Koordinatenursprung 0 befindet sich im Mittelpunkt der Kante AB. Der Eckpunkt B befindet sich auf dem positiven Teil der x-Achse.
Es gilt: $AB = 5{,}50$ m, $BC = 8{,}50$ m, $AE = 5{,}00$ m und $MN = 4{,}50$ m.

Das Dach wird durch zwei zueinander kongruente Dreiecke und zwei zueinander kongruente Trapeze dargestellt. Die Kanten IM, JM, KN und LN verlaufen durch die Eckpunkte der Fläche $EFGH$.
Die Kante JK ist 1,00 m von der Ebene entfernt, in der die Fläche $BCGF$ liegt. Die Gesamthöhe des Hauses beträgt 7,50 m.

2.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte A und G an.

2.2 Begründen Sie, dass der Punkt M die Koordinaten $M(0{,}00|2{,}00|7{,}50)$ besitzt.
Ermitteln Sie die Größe des Winkels, unter dem jede Dreieckfläche des Daches zur Fläche $EFGH$ geneigt ist.
Weisen Sie nach, dass der Punkt J die Koordinaten $J\left(\frac{15}{4}|-\frac{8}{11}|\frac{45}{11}\right)$ besitzt.

2.3 Die Dachfläche $JKNM$ soll mit Sonnenkollektoren bestückt werden. Berechnen Sie die

Größe dieser Dachfläche.

Hinweis: Nutzen Sie dabei die Koordinaten der Punkte M und J aus Aufgabenteil 2.2.

2.4 Für das Anbringen von Sonnenkollektoren ist es erforderlich, den Neigungswinkel α des Daches zur Deckfläche des Gebäudekörpers zu kennen.
Die Neigung der Dachfläche $JKNM$ kann durch die Veränderung der Höhe des Dachfirstes MN variiert werden.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M in Abhängigkeit vom Winkel α.

2.5 Zum Vereinsfest ist eine Lotterie geplant. Dabei darf ein Mitspieler aus einer von genau drei Lostrommeln, die in den Farben rot, gelb und blau jeweils einfarbig angestrichen wurden, genau ein Los ziehen.

Sowohl die Auswahl der Lostrommel als auch das Ziehen des Loses erfolgen jeweils zufällig.
Das Los wird nach der Auswertung noch vor dem Ziehen des nächsten Loses wieder in die entsprechende Trommel zurückgelegt.
In der roten Lostrommel befinden sich 8 Lose, darunter genau 5 Gewinnlose. In der gelben Lostrommel sind genau 75 % Gewinnlose enthalten. 35 aller Lose in der blauen Trommel sind Gewinnlose.

Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.

Ereignis A: Ein Mitspieler zieht ein Gewinnlos.
Ereignis B: Bei 50 Ziehungen werden mehr Gewinnlose gezogen als zu erwarten sind.
Ereignis C: Ein zur Auswertung vorgelegtes Gewinnlos stammt aus der roten Lostrommel.

2 Aufgaben ohne Hilfsmittel

2.1 Aufgaben oH (01)

1. In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Für jede reelle Zahl a $(a \geq 0)$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = \ln(a \cdot x), (x \in D_{f_a})$ gegeben. Die erste Ableitungsfunktion f_a' von f_a wird beschrieben durch:

◯ $f_a'(x) = \frac{\ln a}{x}$ $(x \in D_{f_a'})$
◯ $f_a'(x) = \frac{a}{x}$ $(x \in D_{f_a'})$
◯ $f_a'(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in D_{f_a'})$
◯ $f_a'(x) = \frac{1}{ax}$ $(x \in D_{f_a'})$
◯ $f_a'(x) = \ln a$ $(x \in D_{f_a'})$

1.2 Für die Funktion f mit $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)\cdot(x-1)}, x \in D_f$ gilt:

◯ Die Funktion f besitzt an der Stelle $x = -2$ einen Funktionswert.
◯ Die Funktion f besitzt an der Stelle $x = -2$ zwei Funktionswerte.
◯ Die Funktion f besitzt an der Stelle $x = -2$ eine Nullstelle.
◯ Die Funktion f besitzt an der Stelle $x = -2$ eine Polstelle.
◯ Die Funktion f besitzt an der Stelle $x = -2$ einen Grenzwert.

1.3 In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Ebene E mit $E: 3y - 4z = 7$ gegeben. Die Ebene E verläuft

◯ parallel zur y-z-Koordinatenebene
◯ parallel zur Ebene F mit $F: 3y + 4z = 10$
◯ senkrecht zur x-Achse
◯ parallel zur x-Achse
◯ durch den Koordinatenursprung

1.4 Für das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

◯ $\vec{a} \times \vec{b} = c$ $(c \in R)$
◯ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$
◯ $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
◯ $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a},\vec{b})$
◯ $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 1$

1.5 Bei einer Eignungsprüfung werden in einem Test vier Fragen gestellt. Zu jeder Frage werden drei Antworten vorgegeben, von denen jeweils genau eine richtig ist.
Eine Person wählt in diesem Test bei jeder Frage genau eine Antwort zufällig aus und kreuzt diese an.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person keine richtige Antwort ankreuzt, beträgt:

◯ $\frac{1}{81}$ ◯ $\frac{16}{81}$ ◯ $\frac{1}{4}$ ◯ $\frac{2}{3}$ ◯ $\frac{3}{4}$

2. Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x - a)$ $(x \in R; a \in R, a > 0)$.

2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a an.

2.2 Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den

$$\int_0^a f_a(x)dx = \frac{8}{3}$$

3. Gegeben sind die Ebene E mit $E: 2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

3.1 Zeigen Sie, dass die Gerade durch den Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.

3.2 Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.

4. Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.
Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW\}$.

4.1 Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

4.2 Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

5. Für jeden Wert von a ($a \in R$,$a > 0$) ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ ($x \in R$).
Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1|f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.

5.1 Weisen Sie nach, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung

$$y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$$

beschrieben werden kann.

5.2 Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a.

2.2 Aufgaben oH (02)

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ $(x \in R)$. Eine Gleichung ihrer ersten Ableitungsfunktion f' lautet:

○ $f'(x) = 2 \cdot x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$ $(x \in R)$
○ $f'(x) = 2 \cdot x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x$ $(x \in R)$
○ $f'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos x$ $(x \in R)$
○ $f'(x) = -2 \cdot x \cdot \cos x$ $(x \in R)$
○ $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x$ $(x \in R)$

1.2 Für welche Funktion f mit $x \in R$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$?

○ $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ○ $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ○ $f(x) = -\frac{1}{x}$ ○ $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x}$ ○ $f(x) = \frac{1+x}{1-x^2}$

1.3 Für welchen Wert von a $(a \in R)$ gilt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$?

○ $a = -\frac{1}{3}$ ○ $a = \frac{1}{3}$ ○ $a = 1$ ○ $a = 3$ ○ $a = 9$

1.4 Welcher Punkt C liegt auf der Strecke AB mit $A(0|0|0)$ und $B(6|-9|12)$?

○ $C(-2|3|-4)$ ○ $C(2|-4|6)$ ○ $C(2|-3|4)$ ○ $C(5|-8|11)$ ○ $C(8|-12|16)$

1.5 Ein idealer Würfel wird zweimal jeweils zufällig geworfen und die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen gebildet.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Die Augensumme ist größer als 8." beträgt:

○ $\frac{2}{9}$ ○ $\frac{5}{18}$ ○ $\frac{11}{36}$ ○ $\frac{1}{3}$ ○ $\frac{4}{9}$

2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ $(x \in R)$ gegeben.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

2.2 Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

3 Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 3$.

3.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ besitzt.

3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Volumen der Pyramide $ABCD$ gleich 25 ist.

4 Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

4.1 Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

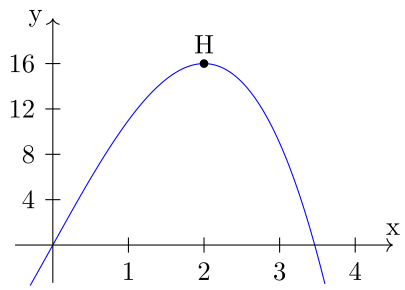
4.2 Das Glücksrad wird zehnmal gedreht.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

4.3 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%.
Felix hat 100 Drehungen des Glücksrades beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen worden ist, deutlich geringer als 50% war.
Er folgert:

"*Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor gefroren wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein.*"

Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

5 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12 \cdot x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.



5.1 Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen im Bereich $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

5.2 Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen im Bereich $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der y-Achse.

2.3 Aufgaben oH (03)

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-3}$ $(x \in D_f)$ besitzt bei $x = 3$:

◯ eine Nullstelle
◯ eine Extremstelle
◯ eine Wendestelle
◯ keinen Funktionswert
◯ die erste Ableitung Null

1.2 Der Anstieg m der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x}$ $(x \in D_f)$ an der Stelle $x = 1$ beträgt:

◯ $m = 3e^2$ ◯ $m = \frac{3}{2}e^2$ ◯ $m = \frac{3}{4}e^2$ ◯ $m = \frac{3}{2}e$ ◯ $m = 3e$

1.3 Die Punkte $A(1|2|0)$, $B(1|1|0)$ und $C(5|1|0)$ sind Eckpunkte eines Rechtecks $ABCD$.
Der Punkt S ist die Spitze einer geraden Pyramide mit dem Rechteck $ABCD$ als Grundfläche und der Höhe $h = 7$.
Eine mögliche Spitze der Pyramide hat die Koordinaten:

◯ $S(3|-0{,}5|7)$
◯ $S(3|1{,}5|7)$
◯ $S(2|-0{,}5|-1)$
◯ $S(-0{,}5|2{,}5|-1)$
◯ $S(-0{,}5|2{,}5|7)$

1.4 Eine Zufallsgröße X hat die in der Tabelle gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_i	0	4	8	12	16
$P(X = x_i)$	c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	d

$(c, d \in \mathbb{R})$. Für welchen Wert für d beträgt der Erwartungswert dieser Zufallsgröße $E(X) = 7$?

◯ $d = \frac{5}{8}$ ◯ $d = \frac{1}{8}$ ◯ $d = 0{,}1$ ◯ $d = \frac{1}{8} + c$ ◯ $d = c$

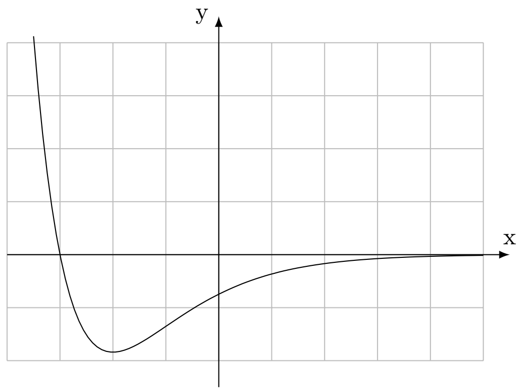
1.5 Eine Menge enthält genau die stetigen Funktionen f, die im Intervall I mit $a \leq x \leq b$ $(a, b \in \mathbb{R}; a < b)$ jeweils folgende Eigenschaften besitzen:

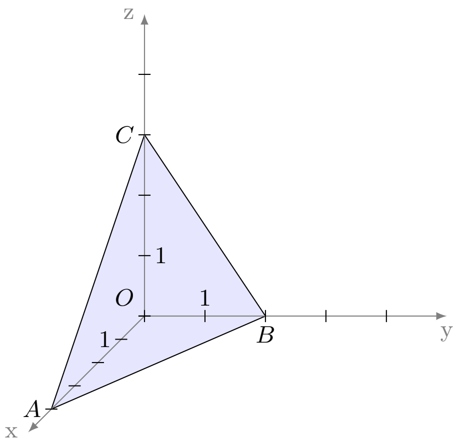
(1) Keine dieser Funktionen ist im Intervall I konstant.
(2) Jede dieser Funktionen besitzt im Intervall I eine Stammfunktion.
(3) Für jede dieser Funktionen f gilt: $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Welche Aussage ist unter diesen Voraussetzungen für jede Funktion f dieser Menge wahr?

◯ Der Graph von f ist im Intervall I achsensymmetrisch zur Ordinatenachse.
◯ Die Funktion f ist im Intervall I streng monoton steigend.
◯ Der Graph von f verläuft im Intervall I auf der Abszissenachse.
◯ Die Funktion f besitzt im Intervall I mindestens eine Nullstelle.
◯ Der Graph von f schließt im Intervall I mit der Abszissenachse mindestens drei Flächen vollständig ein.

2 Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion f in dasselbe Koordinatensystem den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion F im dargestellten Intervall.
Begründen Sie Ihre Darstellung des Graphen von F mit einem charakteristischen Zusammenhang zwischen den Graphen von f und F.





3 In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C eindeutig bestimmt ist, in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem dargestellt.
Die Punkte A, B und C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.

3.1 Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an.

3.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(3|\frac{1}{2}|0)$ in der Ebene E liegt.

4 Die Hälfte aller Studenten einer Seminargruppe ist höchstens 1,75 m groß.
Davon sind 60 % Frauen.
60 % aller Studenten dieser Seminargruppe sind Männer.
Ermitteln Sie den Anteil der Studenten dieser Seminargruppe, die Männer und größer als 1,75 m sind.

5 Ein idealer Würfel wird genau zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: "Es werden zwei gleiche Augenzahlen oder zwei Primzahlen geworfen."

3 Lösungen LK

3.1 Lösungen LK (01)

Aufgabe A

a) mit GTR: Nullstelle: $x_0 \approx 3{,}22$, Koordinaten des Extrempunktes: $P_{Ext}(1{,}39|9)$. Gleichung der Asymptote: $y = 5$

b) Ansatz für Nullstelle:

$$f_a(x_0) = -e^{2ax_0} + 4e^{ax_0} + 5 = 0$$

Substitution: $z = e^{ax_0} \Rightarrow 0 = -z^2 + 4z + 5 \Rightarrow z_{1/2} = 2 \pm 3$.
Nachweis der Einzigkeit: für $z_2 = -1$ gibt es keine Lösung, jedoch für z_1 mit $x_0 = \frac{\ln 5}{a}$

1. Ableitung: $f_a'(x) = -2ae^{2ax} + 4ae^{ax}$ 2. Ableitung: $f_a''(x) = -4a^2e^{2ax} + 4a^2e^{ax}$

Extremstelle: $f_a'(x_E) = 0$ ergibt $x_E = \frac{\ln 2}{a}$
Nachweis des lokalen Maximums: $f''a(x_E) = -8a^2 < 0$
Koordinaten des Extrempunktes: $P_{max}(\frac{\ln 2}{a}; 9)$
Begründung für Wendepunkt: Wegen $f_a''(0) = -4a^2e^0 + 4a^2e^0 = 0$ ist der Wendepunkt unabhängig von a bei $W(0|8)$.

c) Ansatz für Fläche:

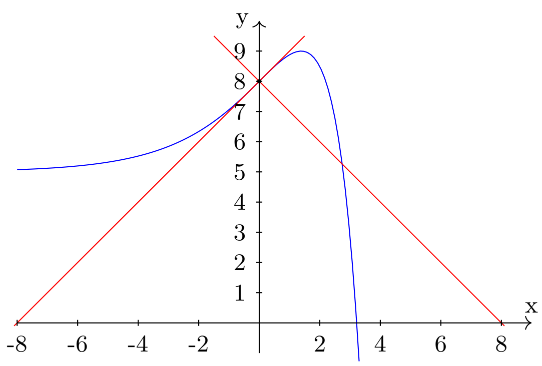
$$A = \int\limits_0^{\frac{\ln 5}{a}} f_a(x)dx$$

Stammfunktion:

$$A = \left[-\frac{1}{2a}e^{2ax} + \frac{4}{a}e^{ax} + 5x\right]_0^{\frac{\ln 5}{a}}$$

Umformungen: Insbesondere ist $e^{\frac{a \ln 5}{a}} = 5$ und $e^{\frac{2a \ln 5}{a}} = 25$
Inhalt der Fläche: $A = \frac{1}{a}(4 + 5\ln 5) \approx \frac{12{,}047}{a}$

d) Das Dreieck (siehe Abbildung) muss rechtwinklig sein und ist nach Voraussetzung gleichschenklig.



Somit ergibt sich für α: $\alpha = 45°$. Damit ist auch der Anstieg der Tangente $m_t = \tan 45° = 1$.
Aus $1 = f'a(0)$ folgt $1 = 2a$ und $a = \frac{1}{2}$.

e) Der Radius ergibt sich aus: Maximum für Abstand der Kurvenpunkte $P(x|f_a(x))$ zum Koordinatenursprung im Intervall $[0, x_0]$ suchen.
$r^2 = d^2(x) = x^2 + y^2$
mit GTR: $fMax(X^2 + f_{\frac{1}{2}}^2(X)$,$X$,0,3.22$) \Rightarrow x_{Max} = 1{,}463$ und $r^2 = 83{,}03$. Radius $r \approx 9{,}11$.

f) Ansatz für die Abszisse mit dem gesuchten Anstieg:

$$f'_{\frac{1}{2}}(x_s) = -e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} = 2e - e^2$$

offensichtlich ist $x = 2$. Abszisse mit dem gesuchten Anstieg: $x = 2$
Ansatz für Wert n: gemeinsamer Punkt $x_s = 2$ und $y_s = f_{\frac{1}{2}}(2) = g_n(2) \Rightarrow n = f_{\frac{1}{2}}(2)–4e + 2e^2$.
Wert n: $n = e^2 + 5$

Aufgabe B

Offensichtlich ist mit S_t eine Halbgerade ($t > 0$) gegeben:

$$S_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 47 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} + \frac{t}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Ansatz für die Koordinaten des Punktes C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$
Koordinaten des Punktes C: $C(2|6|\frac{15}{4})$
Gleichung der Ebene E mit GTR: E: $3y–4z = 3$ ($x \in \mathbb{R}$) oder

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r^* \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r, s, r^*, s^* \in \mathbb{R}$. Ebene E ist parallel zur x-Achse.
Koordinaten des Mittelpunktes der Grundfläche: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CD}}{2}$.

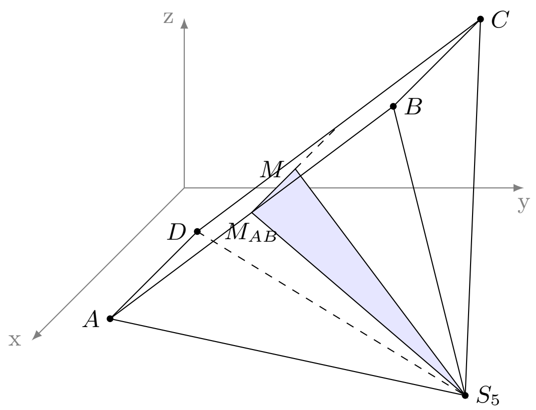
Ansatz für Nachweis für die gerade Pyramide, z.B., $S_0 = M$ und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

von E ist parallel zur Richtung S_t

Nachweis für Höhe, z.B., der Richtungsvektor von S_t hat die Länge 1, d.h. $\left| \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 1.$

Damit ist t die Höhe in Längeneinheiten.

$$V_t = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot t = \frac{25}{3} t$$



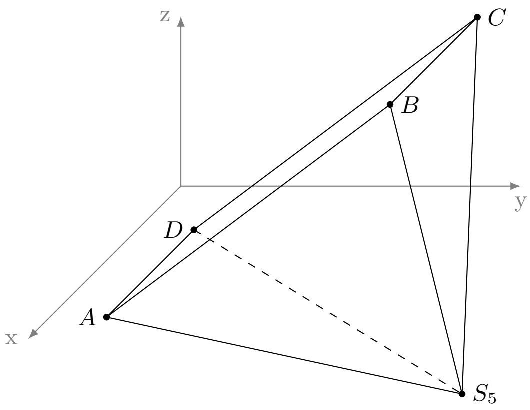
b) Im Dreiecke $\triangle MS_tM_{AB}$ ist $M_{AB}M = \frac{|\vec{AD}|}{2} = a = 2$ und der Winkel bei M_{AB} gleich 45°, also $\tan 45° = \frac{t}{a} = \frac{t}{2} = 1$, d.h. $t = 2$.

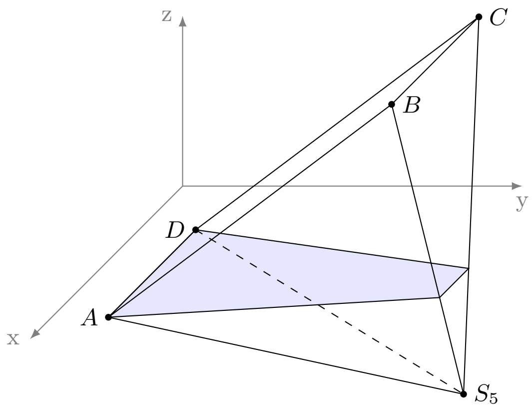
c) für $t \to 0$ wird die Fläche ABS_t minimal:
ABS_0 mit GTR: Dreieck, Fläche = 6.25 $\Rightarrow \frac{24}{5} < 6{,}25 < F_{ABS_t}$
Höhe im Dreieck: $h^2 = t^2+a^2 = t^2+4$ mit $|\overrightarrow{AB}| = \frac{25}{4}$

$$F_{ABS_t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot \sqrt{t^2 + 4} \qquad (t > 0)$$

$$\frac{65}{4} = \frac{25}{8}\sqrt{t^2 + 4} \Rightarrow t = \frac{24}{5}$$

d) Zeichnerische Darstellung (siehe linke Abbildung)
Art des speziellen Vierecks: Trapez (siehe rechte Abbildung)





Begründung für Art des speziellen Vierecks:
$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$ und $|\overrightarrow{AD}| \neq |\overrightarrow{B'C'}|$ mit $B' = E_{BCS_5} \cap g_{BS_5}$
Gleichung der Ebene F: $F_{ADS_{2,5}} : y + 32z = 1$
Koordinaten des Teilungspunktes für $\overrightarrow{BS_5}$:

$$F_{ADS_{2,5}} \cap g_{BS_5} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{19}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Teilungsverhältnis für BS_5: z.B. 2:1

Aufgabe C

a) Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit: $p \approx 0{,}071$

							Σ
Anzahl in der Stichprobe	20	25	20	30	35	25	155
Anzahl Qualität I	16	21	18	24	27	20	
Anzahl Qualität II	3	4	1	3	4	3	
Anzahl Ausschuss	1	0	1	3	4	2	11

b) Ansatz für Wahrscheinlichkeit $P(A)$

$$P(A) = B_{50,0.86}(k > 45) = 1–B50{,}0.86(k \leq 45)$$

GTR: Wahrscheinlichkeit $P(A) \approx 0{,}1528$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit $P(B)$: $P(B) = B_{50,0.14}(8 \leq k \leq 11)$
GTR: Wahrscheinlichkeit $P(B) \approx 0{,}3608$
Wahrscheinlichkeit, dass eine Kiste kein Ausschussstück enthält: $p = 0.98^{50} \approx 0.3642$.
Ansatz für Wahrscheinlichkeit $P(C)$: $P(C) = B_{5,p}(k > 2) = 1–B5{,}p(k \leq 2)$
Wahrscheinlichkeit $P(C) \approx 0{,}2576$

c) Analyse der Aufgabe (z.B. mittels Baumdiagramm)
Die Zufallsgröße X beschreibe die tatsächliche Qualität mit den Werten I, II und A. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Zuordnung des Akkus zur Qualitätsstufe I, II und A.
Die gegebenen Werte in der Notation $P(X)$ bzw. $P_X(Y)$:

$P(I) = 0.86$; $P(II) = 0.12$; $P(A) = 0.02$; $P_I(I) = 0.95$; $P_I(II{,}A) = 0.05$; $P_{II}(I) = 0.05$; $P_{II}(II) = 0.85$; $P_{II}(A) = 0.1$; $P_A(A) = 0.92$; $P_A(II) = 0.08$

Ansatz für Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku richtig eingestuft wurde, mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(I) \cdot P_I(I) + P(II) \cdot P_{II}(II) + P(A) \cdot P_A(A) = P(X = Y)$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku richtig eingestuft wurde: $p \approx 0{,}9374$

Ansatz für Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku dieser Qualitätsstufe angehört mit bedingter Wahrscheinlichkeit:

$$P_{Y=II}(X = II) = \frac{P_{X=II}(Y = II)}{P(X = Y)} \approx 0{,}6958$$

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $B_{1000,0.02}(18 \leq k \leq 22)$
Wahrscheinlichkeit: z.B.:
$p \approx 0{,}4275$ (unter Verwendung der Binomialverteilung)
GTR: sum(binompdf(1000,.02,18,19,20,21,22) ... 0.4275
$p \approx 0{,}4277$ (unter Verwendung der Normalverteilung mit Korrekturglied)
GTR: normalcdf(17.5,22.5,20,4.42) ... 0.4277
$p \approx 0{,}3486$ (unter Verwendung der Normalverteilung ohne Korrekturglied)
GTR: normalcdf(18,22,20,4.42) ... 0.3486

Aufgabe D

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_{f_t} = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 2t\}$
Gleichung der Asymptote, z.B. $x = 2t$
erste Ableitung: $f_t'(x) = -\frac{1}{2t-x} - 2x$; Ansatz für Extremstelle: $f_t'(x_E) = 0$
Lösungen der quadratischen Gleichung: $0 = 2x_E \cdot 2t – 2x_E^2 + 1 \Rightarrow\Rightarrow 0 = x_E^2 – 2tx_E – \frac{1}{2}$.
Ausschluss einer Lösung und Angabe der lokalen Extremstelle: $x_E = t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}$.

b) Ansatz für Nachweis: $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$ und Produktregel für Integration mit $u' = 1$; $v = \ln x$

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Ansatz für Fläche:

$$\int_0^{x_s} f_t(x) - g(x) dx = 1 \qquad \text{mit} \qquad x_s : f_t(x_s) = g(x_s) \Rightarrow x_s = 2t - 1$$

weiter mit GTR: solve(fnInt(ln(2T-X),X,0,2T-1)-1,T,2) $\rightarrow 1.3591 \approx \frac{e}{2}$.
Oder mittels Stammfunktion durch Substitution:

$$\int \ln(2t - x) dx = (x - 2t) \ln(2t - x) - x + c$$

Ansatz für Wert t: $2t \cdot \ln(2t) - 2t + 1 = 1$ mit dem Ergebnis $W_t = \frac{e}{2}$.

c) Lösungsidee: P_{Max} muss auf der x-Achse liegen und Ansatz für Wert t: $f_t(x_E) = 0$
GTR-Solver ergibt Näherungswert für t: $t \approx 0{,}386$.

Aufgabe E

a) Ansatz für Nachweis des Tetraeders: Das gleichseitige Dreieck $\triangle A_a B_a C_a$ hat die Kantenlänge $a \cdot \sqrt{2}$.
Zu zeigen ist $\overline{A_a D_a} = \overline{B_a D_a} = \overline{C_a D_a} = a\sqrt{2}$, was sich sofort ergibt.
D_a' entsteht z.B. durch Spieglung an $\triangle A_a B_a C_a$.

Normale von $\triangle A_aB_aC_a$: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade durch D_a:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + u\vec{n_1}$$

und die Ebene $\triangle A_aB_aC_a$:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt zu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt: $s = t = \frac{a}{3}$, $u = \frac{-2a}{3}$ und $L\left(\frac{a}{3}|\frac{a}{3}|\frac{a}{3}\right)$.

Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks $A_aB_aC_a$

$$\overrightarrow{OD_a'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{D_aL} \qquad \text{bzw.} \qquad \overrightarrow{OD_a'} = \overrightarrow{OD_a} + 2\overrightarrow{D_aL}$$

Koordinaten des Punktes $\left(-\frac{a}{3}| - \frac{a}{3}| - \frac{a}{3}\right)$.

b) Einfachster Weg mittels Umkreisradius des Tetraeders (Tafelwerk): $r = \frac{k}{4}\sqrt{6}$, wobei k die Kantenlänge ist.
Mit der Kantenlänge $k = \sqrt{2}a$ folgt nach Voraussetzung $3\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{12}$ und somit $a = 6$.

c) Volumen eines abgetrennten Tetraeders: $V_{\text{klein}} = \frac{1}{81}a^3$.
Ansatz für Volumen des Restkörpers: $V_{\text{rest}} = V_{\text{gesamt}} - 4 \cdot V_{\text{klein}}$
Volumen des Restkörpers: $V_{\text{rest}} = \frac{23}{81}a^3$.
Ansatz für Wert a: $V_{\text{rest}} = 207$ ergibt $a = 9$.

3.2 Lösungen LK (02)

Aufgabe A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $x|x \in \mathbb{R}$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse: $S_y(0|-1)$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse: $S_x(0{,}5|0)$
1. Ableitung:

$$f'_a(x) = e^{ax} \cdot (2a \cdot x - a + 2)$$

mögliche Extremstelle: x_e (siehe unten) 2. Ableitung:

$$f''_a(x) = a \cdot e^{ax} \cdot (2a \cdot x - a + 4)$$

Nachweis der Art des Extremums:

$$f''_a\left(\frac{a-2}{2a}\right) = 2ee^{\frac{a}{2}-1} > 0 \rightarrow \text{lokales Minimum}$$

Koordinaten des lokalen Extrempunktes: $x_e = \frac{a-2}{2a}$ und $y_e = -\frac{2}{a} \cdot e^{\frac{a-2}{2}}$
Ansatz für Nachweis: (evtl. Umbenennung: $a_1 = a$; $a_2 = b$ mit $a \neq b$.

$$f_a(x) = f_b(x) \Rightarrow (2x–1) \cdot e^{ax} = (2x–1) \cdot e^{bx} \Rightarrow e^{ax} = e^{bx}$$

eine Lösung ergibt sich aus $2x–1 = 0$; eine weitere Lösung aus $ax = bx$ mit $x = 0$; wegen $a \neq b$ gibt es keine weiteren gemeisamen Punkte.
Aussage zu einer Schnittstelle: $x_{S_x} = \frac{1}{2}$.
Aussage zur zweiten Schnittstelle und Ausschluss weiterer Schnittstellen: $x_{S_y} = 0$.
Gleichung der achsenparallelen Asymptote: $y = 0$ wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f_a(x) = 0$.
Wertebereich: $\{y|y \in \mathbb{R}, y \geq y_e\}$

b) mögliche Wendestelle: Es gibt für $f''_a(x_W) = 0$ nur eine Lösung x_W (siehe unten) 3. Ableitung:

$$f'''_a(x) = a^2 \cdot e^{ax} \cdot (2a \cdot x - a + 6)$$

Nachweis und Begründung der Einzigkeit: $f'''_a(\frac{a-4}{2a}) = 2a \cdot e^{\frac{a}{2}-2} \neq 0$.
Koordinaten des Wendepunktes: $x_W = \frac{a-4}{2a}$ (Gleichung 1) und $y_W = -\frac{4}{a} \cdot e^{\frac{a-4}{a}}$ (Gleichung 2)

Gleichung der Funktion g: $g(x) = (2x-1) \cdot e^{\frac{-4x}{2x-1}}$
Definitionsbereich der Funktion g: $\{x|x \in \mathbb{R}, x \neq 0{,}5\}$

c) Ansatz für unbestimmtes Integral:

$$\int f_a(x)dx = 2 \cdot \int x \cdot e^{ax}dx - \int e^{ax}dx$$

und partielle Integration des ersten Summanden ergibt

$$\int f_a(x)dx = e^{ax} \cdot \left(\frac{2ax - a - 2}{a2}\right) + C$$

Gleichung für F_a:

$$F_a(x) = e^{ax} \cdot \left(\frac{2ax - a - 2}{a2}\right) + \frac{a+2}{a^2}$$

d) Ansatz:

$$\int_b^0 f_2(x)dx = |F_2(0) - F_2(b)|$$

Flächeninhalt $A(b)$: $A(b) = 1 + (b–1) \cdot e^{2b}$
spezielle Flächeninhalte: $A(-2) \approx 0{,}945$; $A(-10) \approx 0{,}99999998$ und $A(-100) \approx 1$
Vermutung: $\lim A(b) = 1$

e) Ansatz für Volumen: $V = \pi \int\limits_{-1}^{0} f_2^2(x)dx$

GTR: Volumen: $V \approx 1{,}78$

f) Zielfunktion und GTR: Wert u: $u \approx -0{,}81$
maximaler Flächeninhalt: $A(-0{,}81) \approx 0{,}21$

Aufgabe B

a) Ansatz für Koordinaten des Punktes D_t: $D_t = g_t \cap E_{xy}$ und mit $E_{xy} : z = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ folgt $0 = 4 + s \cdot t$
Koordinaten des Punktes D_t in Abhängigkeit von t: $D_t \left(\frac{t-16}{2t}|\frac{4t-4}{t}|0\right)$
Ansatz für minimalen Abstand: $d_t^2 = \left(\frac{t-16}{2t}\right)^2 + \left(\frac{4t-4}{t}\right)^2$.
GTR liefert $t = 4$ und $d^2 = 11{,}25$,
Koordinaten des Punktes $D_4 : D_4(-1{,}5|3|0)$; minimaler Abstand: $d \approx 3{,}35$

b) Ansatz für Gleichung der Ebene E

$$\begin{aligned} I :& x = 0{,}5 + 2s \\ II :& y = 4 + s \\ III :& z = 4 + ts \end{aligned}$$

II in I: $2x = 1 + 4(y–4)$, Ebene in besonderer Lage (parallel zur z-Achse, $z \in \mathbb{R}$)
II in III: $z = 4 + t(y–4)$
Gleichung der Ebene E: $2x–4y = -15 \quad (z \in \mathbb{R})$

c)Ansatz für Werte t:

$$\angle\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 30^\circ$$

da es sich hier um den Normalenvektor und den Richtungsvektor der Geraden handelt bzw. $\sin\left(\frac{t}{\sqrt{5+t^2}}\right) = 60^\circ$
Werte t: $t = \pm\sqrt{15}$.
Gleichungen der Geraden, z.B.:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{15} \end{pmatrix} \quad ; \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{15} \end{pmatrix} \quad (r{,}s \in \mathbb{R})$$

d) Quadrate kann es nur geben, wenn die Diagonalen sich senkrecht schneiden. Untersuchen wir zunächst für welche Werte von t die Diagonalen senkrecht sind und überprüfen später, ob sie sich auch schneiden.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Wert t: $t = -4$ Nachweis, dass ein Quadrat existieren kann: Für diesen Fall kann der Schnittpunkt mit dem GTR bestimmt werden. Koordinaten des Schnittpunktes der Diagonalen: $S(1{,}5|4{,}5|2)$
Länge der Diagonalen: $\sqrt{17}$

Ansatz für Koordinaten der Eckpunkte: Ein möglicher Ansatz ist das Bilden eines Kreise k:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

um danach die Schnittpunkte mit der Gerade h zu berechnen. Ein kürzerer Weg ergibt sich über das Normieren des Richtungsvektors der Geraden h:

$$\overrightarrow{OP_{1/2}}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{9}{2}\\2\end{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{9}{2}\\2\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}0\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Koordinaten der Eckpunkte: $P_1(1{,}5|6{,}5|2{,}5)$, $P_2(1{,}5|2{,}5|1{,}5)$

Aufgabe C

a) Anzahl: $n=24$, Wahrscheinlichkeit p: $p=0{,}3750$
b) Hypergeometrische Verteilung

$$P(X=0)=\frac{\binom{37}{0}\cdot\binom{63}{10}}{\binom{100}{10}}$$

Wahrscheinlichkeit p: $p\approx 0{,}0074$
Wahrscheinlichkeit p, dass ein Set kein fehlerhaftes Teil enthält: $p\approx 0{,}8478$.
$P(A)=0{,}92\cdot 0{,}95\cdot 0{,}97$
Wahrscheinlichkeit p, dass das Set mindestens ein fehlerhaftes Teil enthält: $p\approx 0{,}1522=1–P(A)$

Ansatz für Wahrscheinlichkeit $P(158\le X\le 207)$:
$\mu\approx 182{,}664$; $\sigma\approx 12{,}444$ und Näherungsformel von Laplace.
Wahrscheinlichkeit: $P(158\le X\le 207)\approx 0{,}9556$
In Abhängigkeit vom verwendeten Lösungsverfahren und von eingesetzten Rechenhilfsmitteln kann die Wahrscheinlichkeit im Intervall $0{,}9500\le P\le 0{,}9600$ liegen.

Ansatz für Anzahl: da $n\ll 1200\Rightarrow 1–0{,}1522^n\ge 0{,}95\Rightarrow n>18{,}14$, d.h. n = 19

c) eine Wahrscheinlichkeit: $P(A)=B_{5;0{,}08}(1)=0{,}2866$
Nachweis: $P(B)=B_{4;0{,}08}(1)+B_{4;0{,}08}(2)=0{,}2817\neq P(A)$
Ansatz für Untersuchung: $P(A)=P(B)$

$$\binom{5}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^4=\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3+\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^2$$

ergibt $0=5p^2–12p+1$ mit dem Ergebnis $p\approx 0{,}0864$

Aufgabe D

1. Ableitung: $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$ mit extremwertverdächtigen Stellen bei $x=\pm 2$.
2. Ableitung: $f''(x)=-\frac{3}{2}x$; für $x_E=2$ wird die 2. Ableitung negativ, d.h. ein lokales Maximum liegt vor.

Einsetzen von P und Q in $f(x)$ zeigt, dass die Punkte P und Q zur Funktion gehören.
Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}I:\quad & P\in G_f \quad & f(0)=-3\Rightarrow d=-3\\ II:\quad & Q\in G_f \quad & f(2)=1\Rightarrow 8a+4b+2c=4\\ & III: & f'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0\\ & IV: & f'(-1)=0\Rightarrow 3a–2b+c=0\end{aligned}$$

Lösungen mit GTR ergibt g: $g(x) = -\frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x + 3$.

b) Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rll} I: & P \in G_f & f(0) = -3 \Rightarrow d = -3 \\ II: & Q \in G_f & f(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 4 \\ & III: & f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0 \end{array}$$

Umformen führt z.B. zu $b = -4a–1$ und $c = 4a + 4$. Damit ist die Funktion in Abhängigkeit von a gefunden:

$$f_a(x) = ax^3 + (-4a - 1)x^2 + (4a + 4)x - 3 \qquad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Ausschluss des zweiten Wertes des Parameters und Angabe der Gleichungen aller Funktionen, z.B.:

$$f_c(x) = \frac{c-4}{4}x^3 + (3 - c)x^2 + cx - 3 \qquad (c \in \mathbb{R}, c \neq 4)$$

Ansatz für Wendestellen: $f_a''(x) = 0$ und $f(x_W) = \frac{3}{2}$. Wendestellen: $x_W = \frac{4a+1}{3a}$
Damit gelingt es, diese Aufgabe mit dem GTR zu lösen. Zunächst wird die Gleichung $f_a(x_W) = 1{,}5$ gelöst. Das ergibt $a = 2$. Danach wird die Wendestelle berechnet $x_W = 1{,}5$ und kontrolliert, ob der Funktionswert $y_W = 1{,}5$ ist.
Gleichung der Funktion, z.B.: $f_{c=12}(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

Aufgabe E

a) Größe des Winkels α: $\alpha = 89{,}9°$
b) Ansatz für Gleichung der Ebene

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (p, q \in \mathbb{R})$$

Ansatz zur Berechnung der z-Koordinate des angehobenen Punktes:

$$\overrightarrow{OS^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z-Koordinate des angehobenen Punktes: $z = \frac{1}{2}$ ($p = \frac{1}{2}$; $q = 7$)
Höhendifferenz h: $h = 5$ m

c) Größe des Winkels zwischen den angehobenen Straßenabschnitten: 89,994°
Da das Dreieck AS^*B annähernd rechtwinklig ist, ergibt sich die gesuchte Bogenlänge, als die eines Viertelkreises mit dem Radius 66 m. $b = 2\pi\frac{66}{4}$ m $= 103{,}67$ m, d.h. die Länge des Kreisbogens ist $b \approx 104$ m.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS^*} + 6{,}6 \cdot \frac{\overrightarrow{S^*A}}{|\overrightarrow{S^*A}|} + 6{,}6 \cdot \frac{\overrightarrow{S^*B}}{|\overrightarrow{S^*B}|} = \begin{pmatrix} -7{,}\overline{3} \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Koordinaten des Mittelpunktes M: $M(-7{,}3|4{,}0|0{,}5)$ (Näherungswerte)

3.3 Lösungen LK (03)

Aufgabe A

a) größtmöglicher Definitionsbereich $\{x|x \in R, x > 0\}$
Ansatz für Koordinaten des Schnittpunktes $f(x_0) = 0$
Koordinaten des Schnittpunktes mit der Abszissenachse $S_x(e^{0,5a}|0)$
1.Ableitung $f_a^{'}(x) = 2 \cdot \ln(x) - a + 2$
2.Ableitung $f_a^{''}(x) = \frac{2}{x}$

Extremstelle $x_E = e^{0,5a-1}$
Nachweis der Art des Extremums $f_a^{''}(x_E) > 0$ wegen $x_E > 0$
Koordinaten des lokalen Minimumpunktes $P_{Min}(e^{0,5a-1}| - 2e^{0,5a-1})$

Nachweis der Nichtexistenz von Wendepunkten $f_a^{''}(x) > 0$ wegen $x > 0$
erstes Monotonieintervall z.B. für x mit $0 < x \leq e^{0,5a-1}$ monoton fallend
zweites Monotonieintervall z.B. für x mit $e^{0,5a-1} \leq x$ monoton wachsend

b) Schnittstellen: $x_1 = 0{,}5311$ und $x_2 = 5{,}5763$
Flächeninhalt

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_3^{'}(x) - f_3(x)dx \approx 12{,}7$$

c) Ansatz für Gleichung der Funktion $g_2 : y = ax^2 + bx + c$

$$I : f(0{,}1) = a(0{,}1)^2 + b(0{,}1) + c$$
$$II : f(1) = a + b + c$$
$$III : f(1{,}9) = a(1{,}9)^2 + b(1{,}9) + c$$

Gleichung der Funktion $g_2(x) = 1{,}22x^2 - 2{,}83x - 0{,}39$
Ansatz für maximale Abweichung von g_1 zu f_2 bzw. g_2 zu f_2: GTR, Funktionsdifferenz darstellen und Minimumsuche durchführen
maximale Abweichung von g_1 zu f_2: $d \approx 0{,}29$
maximale Abweichung von g_2 zu f_2: $d \approx 0{,}21$

d) Gleichung der Tangente $t_z(x) = 2\ln(z) \cdot x - 2z$
Nullstelle der Tangente $x_0 = \frac{z}{\ln z}$
Zielfunktion $A(z) = \frac{z^2}{\ln z}$
1.Ableitung $A'(z) = \frac{2z \cdot \ln z - z}{\ln^2 z}$
Extremwertverdächtige Stelle $z = \sqrt{e} \approx 1{,}64872$
Art des Extremums ist Maximum mit $A = 2e \approx 5{,}44$

e) Ansatz für Flächeninhalt

$$A(u) = \int_{e^{1,5}}^{u} f_3(x)dx$$

Ansatz für $A(u) = \frac{1}{2}e^3$
Partielle Integration ergibt $F(x) = x^2 \cdot \ln x - 2x^2$
Flächeninhalt $A(u) = u^2 \cdot \ln u - 2u + \frac{1}{2}e^3$, Ergebnis $u = e^2$

Aufgabe B

a) Nachweis von P_a in E: $-2(-1) + 8(-a) - 16(-3a) = 1 \Rightarrow a < 0$ im Widerspruch zu $a > 0$
Aufstellen der Ebenengleichung: $E_1 : \vec{x} = \vec{O} + s \cdot \vec{OP_3} + t \cdot \vec{n}$, wobei $\vec{n}$ Normalenvektor von E ist.
Alternativ auch $\left(\vec{n} \times \vec{OP_3}\right) \bullet \vec{x} = 0$

Gleichung der Ebene: $60x + y - 7z = 0$

b) Gleichung der Geraden $P_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

P_a schneidet die x-Achse bei x = -1 und ist echt parallel zur y-z-Ebene

c) Koordinaten des Schnittpunktes S: $S(1{,}5|-2{,}5|-1{,}5)$

Gleichung der Geraden s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -0{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

Größe des Schnittwinkels $\alpha \approx 59{,}1^\circ = 180^\circ - 2 \cdot 60{,}4659^\circ$

d) Koordinaten der drei Bildpunkte: $P_{axy}(-1|-a|0); P_{axz}(-1|0|-3a); P_{ayz}(0|-a|-3a)$
Ansatz für Ebenengleichung:

$$E_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -3a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3a \end{pmatrix}$$

bzw. in der Normalenform: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Gleichung der Ebene $E_a : 3ax + 3y + z = -6a$
Ansatz für Abstand

$$d(a) = \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ -3a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \right| = \left| \frac{-3a}{\sqrt{10 + 9a^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Ansatz über das Volumen der Pyramide $(P_{axy}, P_{axz}, P_{ayz}, P_a)$

$$V_P = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{6} V_{Quader} = \frac{1}{6} 3a^2$$

$$A_G = \frac{\sqrt{10a^2 + 9a^4}}{2} \text{ und } h = \frac{V_Q}{2A_G} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Wert a: $a = \frac{1}{3}$

Aufgabe C

a) Anzahl n der Anordnungen: $n = \begin{pmatrix} 8 \cdot 16 \\ 10 \end{pmatrix} \approx 2{,}27 \cdot 10^{14}$

b) Die Zufallsgröße ist binomialverteilt mit den Parametern n = 16 und $p = \frac{1}{8}$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - (\frac{7}{8})^{10} \approx 0{,}7369$$

Erwartungswert: E(X) = 1,25

c) X ist die Zufallsgröße, die beschreibt, wie viele 'A' bei n Versuchen in der 1.Zeile stehen.
$P(X > 0) \geq 0{,}99 \Rightarrow P(X = 0) = (\frac{7}{8})^n \leq 0{,}01 \Rightarrow n \geq 34{,}5$
Anzahl n der Versuchsdurchführungen: n = 35

d) Ein 'A' wird an eine beliebige Stelle geschrieben ($p_1 = 1$), dann wird
1. dieses 'A' gelöscht ($p_{22} = \frac{1}{128}$) und erneut ein 'A' an eine beliebige Stelle geschrieben ($p_{23} = 1$) oder
2. es wird ein 'A' auf eine freie Stelle geschrieben ($p_{32} = \frac{127}{128}$) und eines der beiden 'A' getroffen ($p_{33} = \frac{2}{128}$)
Wahrscheinlichkeit für genau ein 'A': $p = \frac{1}{128} + \frac{127}{128} \cdot \frac{2}{128} \approx 0{,}0233$

e) X beschreibe, welche Firma das Teil herstellt und Y beschreibe, ob das Teil fehlerhaft ist (F) oder nicht.
Gegeben sind: $P_{X=F_1}(Y = F) = 0{,}04; P_{X=F_2}(Y = F) = 0{,}06; P_{Y=F}(X = F1) = \frac{2}{3}$
Ansatz über Satz von Bayes:

$$I : P(X = F1) \cdot P_{X=F1}(Y = F) = P_{Y=F}(X = F1) \cdot P(Y = F) = P(F \cap F_1)$$
$$II : P(X = F2) \cdot P_{X=F2}(Y = F) = P_{Y=F}(X = F2) \cdot P(Y = F)$$

Gesucht ist
$$\frac{P(X = F_1}{P(X = F_2)} = \frac{P_{X=F_2}(Y = F) \cdot P_{Y=F}(X = F_1)}{P_{X=F_1}(Y = F) \cdot P_{Y=F}(X = F_2)} = \frac{3}{1}$$
Prozentuale Anteile: $F_1 : 75\%, F_2 : 25\%$

f) Die Größe ist binomialverteilt und wird über die Normalverteilung genähert
$n = 2000; p = 0{,}04; \mu = n \cdot p = 80; \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
$P_{F_1}(X > 99) = 1 – P_{F_1}(X \leq 99) \approx 1 - \Phi(2{,}16) \approx 0{,}015$
In Abhängigkeit vom Lösungsweg und von den verwendeten Hilfsmitteln kann diese Wahrscheinlichkeit im Intervall von $0{,}0125 < p < 0{,}0155$ liegen

Aufgabe D

a) Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse $S_y(0|0{,}54) = (0|cos1)$
achsensymmetrisch zur y-Achse, da $|-x| = |x|$

b) $f_{\frac{1}{2}}(x_0) = 0; f_{\frac{1}{2}}(x_S) = g(x_S)$

$$A_1 = |\int_0^{x_0} f_{\frac{1}{2}}(x)dx| \text{ und } A_2 = |\int_0^{x_S} f_{\frac{1}{2}}(x) - g(x)dx|$$

Überprüfung der Aussage mit $2 \cdot A_1 = A_2$
Inhalt der Teilfläche: $A_2 = 0{,}5243$
Inhalt einer Gesamtfläche: $A_1 = 0{,}9749$
Schlussfolgerung: Die Fläche wird im Fall t = 0,5 durch die x-Achse nicht halbiert.

c) 1.Ableitung: $f_t'(x) = \frac{1}{t}(\cos\frac{x}{t} + 1)$
Monotonie: monoton wachsend, denn $1 \geq \cos\frac{x}{t} \geq -1$ und $f_t'(x) \geq 0$
kleinster Anstieg: 0 für $\cos\frac{x}{t} = -1 \Rightarrow x = (2k - 1) \cdot \pi t \ (k \in Z)$
größter Anstieg: $\frac{2}{t}$ für $\cos\frac{x}{t} = 1 \Rightarrow x = 2k \cdot \pi t \ (k \in Z)$
Wert für t: t = 5 wegen $\frac{2}{t} = 0{,}4$
ein maximaler Anstieg findet sich bei $k = 0 \Rightarrow x = 0$
der erste mit $x > 0$ ist bei $k = 1 \Rightarrow$ Wert für x: $x = 10\pi$

Aufgabe E

a) $g_B(x) : \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{b} \ (s \in R)$

$g_A(x) : \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{a} \ (t \in R)$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 5 \end{pmatrix}$

Werte der Parameter in den Gleichungen bei $g_B(x) = g_A(x)$: $s = \frac{24}{25}; t = \frac{56}{25}; y = \frac{11}{2}$
Koordinaten des Schnittpunktes $S(0{,}96|5{,}28|7{,}8)$
Größe des Winkels $\alpha = 135° = 45°$

b) Punkt P_t liege zwischen A und B. Dann ist

$$P_t \begin{pmatrix} -8+4t \\ 12-3t \\ 19-5t \end{pmatrix}, t \in R^+ \text{ und } |\vec{BP}| + |\vec{AP}| < 25$$

Das ergibt

$$\sqrt{50} \cdot t + \sqrt{(-8+4t)^2 + (12-3t)^2 + (16-5t)^2} < 25$$

Mit dem GTR-Befehl wird $t = 2{,}7974$ und $z = 19 - 5 \cdot t = 5{,}013$
Mindesthöhe über NN: 50,1 m

c) Ansatz: $\angle(\vec{a},\vec{n}) = \angle(\vec{b},\vec{n})$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + 1 + a_z^2}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 1 \\ \sqrt{a_x^2 + 1} \end{pmatrix}$$

Da der Parameter a_x nicht ausgeklammert werden kann, ändert sich mit a_x auch die Richtung des Vektors $\vec{a}$. Es ist das a_x zu ermitteln, für das sich ein Schnittpunkt $S = g_A \cap g_B$ ergibt.

Lösung: $a_x = 0$, s = 6 und t = 2. $\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.4 Lösungen LK (04)

Aufgabe A

a) größtmöglicher Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}_0^+$
eine Nullstelle von $f_t : x_{01} = 0$; zweite Nullstelle von $f_t : x_{02} = 2t$
Ansatz für 1. Ableitung (zum Beispiel)

$$f_t(x) = \frac{1}{x} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

erste Ableitung:

$$f_t'(x) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3x - 2t}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{3}{2t} x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

Nachweis der zweiten Ableitung:

$$f_t''(x) = \underbrace{\frac{3}{4t} x^{-\frac{1}{2}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}}_{>0} > 0$$

Untersuchung und Art des Extremums:

$$f_t''(x) = \frac{3}{4t} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

und somit ein Minimum Begründung für Wendepunkt: $x_W = -\frac{2t}{3} \notin D_{f_t} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}_0^+)$.

b) Ansatz für Gleichung: $x_e = \frac{2}{3}t$ und $y_e = f_{\frac{3}{2}x_e}(x_e)$
Gleichung: $y = -\frac{4}{3}\sqrt{x} \qquad x \in D_{f_t}$
Ansatz für Abstand: $d^2(t) = x_e(t)^2 + y_e(t)^2$ oder $d^2(x) = x^2 + \frac{16}{9}x$ aus Ortskurve $\to x = \frac{1}{4}$.
Wert $t = \frac{3}{8}$.

c) Ansatz für Volumen des Körpers für $t = 2$:

$$V = \pi \int_0^4 f_2^2(x)dx$$

Volumen des Körpers (GTR) für $t = 2$: $V = \frac{16}{3}\pi \approx 16{,}8$
Ansatz für Volumen des Körpers für beliebiges t:

$$V = \pi \int_0^{2t} f_t^2(x)dx$$

Stammfunktion

$$\int_0^{2t} f_t^2(x)dx = \frac{4}{3}t^2$$

Ansatz für Wert t: $V = \frac{4}{3}\pi t^2 = 108\pi$ ergibt $t = 9$.

d) Anstieg der Tangente: $m = f_t(2t) = \sqrt{\frac{2}{t}}$
Ansatz für Tangentengleichung: $0 = m \cdot 2t + n$
Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der Ordinatenachse: $n = -2\sqrt{2t}$
Ansatz für Wert t für Flächeninhalt von 1: $1 = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot |n|$ mit $t = \frac{1}{2}$
Ansatz für Wert t für Gleichschenkligkeit: $2t = |n|$ ergibt $t = 2$

e) Ansatz:

$$2\int\limits_0^b f_2(x)dx = \int\limits_b^4 f_2(x)dx$$

GTR liefert Ergebnisse 1.1902 oder 2.1475

$$\int f_2(x)dx = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Werte $b \approx 1{,}2$ oder $b \approx 2{,}1$

Aufgabe B

a) Stützvektor und Richtungsvektor der schneidenden Gerade, z.B.:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ senkrecht
Ansatz für Wert k mit Ortsvektor von g in E_k: $(6k–3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (2k-1) \cdot (-1) = 6$
Wert $k = \frac{1}{2}$
Ansatz für Nachweis der Parallelität:

$$g \parallel E_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6k-3 \\ 2 \\ 2k-1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

ist für alle k erfüllt; $g \subset E_{\frac{1}{2}}$

b) Lagebeziehung für $a = 0$: parallel zu g, Lagebeziehung für $a \neq 0$: windschief zu g

$$g \parallel h_a?: \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ für $a = 0$ parallele Geraden

$$g \cap h_a?: \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

aus x- und z-Komponente folgt: keine Lösung für $a \in \mathbb{R}$
Schlussfolgerung: die Geraden g und h_0 sind echt parallel; die Geraden g und $h_{a\neq 0}$ sind windschief.

c) Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ansatz für Werte a:

$$\sin 60^\circ = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{4 + a^2 + 36}}$$

Umformungen: $\sqrt{3a^2+120} = 12$; Werte a: $a = \pm\sqrt{8}$.

d) Ansatz für Richtungsvektor der Geraden: Vektorprodukt der Richtungsvektoren der Geraden g und h_{-4}:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden: z.B.

$$i : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (u \in \mathbb{R})$$

e) Ansatz zur Ermittlung einer Koordinate eines Schnittpunktes: $y = z = 0 \Rightarrow x$
x-Koordinate des Punktes $S_{xk} : x = \frac{2}{2k-1}$
y-Koordinate des Punktes $S_{yk} : y = 3$
z-Koordinate des Punktes $S_{zk} : z = \frac{6}{2k-1}$
Ansatz für Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot z = \frac{3}{2} \Rightarrow xyz = 9$$

Volumen der Pyramide: $V = \frac{3}{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$

Wert k: $k = \frac{3}{2}$.

Aufgabe C

a) Anzahl für genau zehnmal sichtbares Firmenlogo: 352716
Ansatz für weitere Anzahl: $C_{11}^4 \cdot C_{10}^6 + C_{11}^5 \cdot C_{10}^5 + C_{11}^6 \cdot C_{10}^4 = 282744$

b) Charakterisierung der Zufallsgröße: $b_{21,\frac{1}{2}}$
erste Wahrscheinlichkeit: $P(X = 10) \approx 0{,}1682$
zweite Wahrscheinlichkeit: $P(X \leq 4) \approx 0{,}0036$

c) Charakterisierung der Zufallsgröße: $p = 0{,}1$
Ansatz für Anzahl: $1 - (1-p)^n \geq 0{,}95 \Rightarrow n \geq 28{,}43$
Anzahl: 29

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit p: $Z \sim \Phi_{\mu=100;\sigma=2}$ und $p = P(95 \leq Z \leq 103)$
GTR: normalcdf(95,103,100,2) ergibt 0,9270
Wahrscheinlichkeit p: $p \approx 0{,}927$

e) Ansatz für Wert a: $Z' \sim \Phi_{\mu=100a;\sigma=2a}$ und $P(Z' > 101) \geq 0{,}001$
Gleichung und GTR-Solver ergibt 0.9512
evtl. auch Tabelle für Standardnormalverteilung $\frac{101-\mu}{\sigma} > 3{,}09$
Wert a: $a \leq 0{,}95$.

Aufgabe D

a) Näherungswerte für w_2, w_3 und w_4: $w_2 = 7{,}15$, $w_3 = 10{,}19$ und $w_4 = 14{,}47$
Wert für $G = 220$; Wert für $q = 0{,}002$.

b) Ableitung:

$$h'(t) = \frac{220abe^{-at}}{(1+be^{-at})^2}$$

Ansatz für Nachweis:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{220} \cdot \frac{220e^{-at}}{1+be^{-at}} \cdot \left(220 - \frac{220e^{-at}}{1+be^{-at}}\right)$$

Nachweis mit $h'(t) = \frac{dh}{dt}$

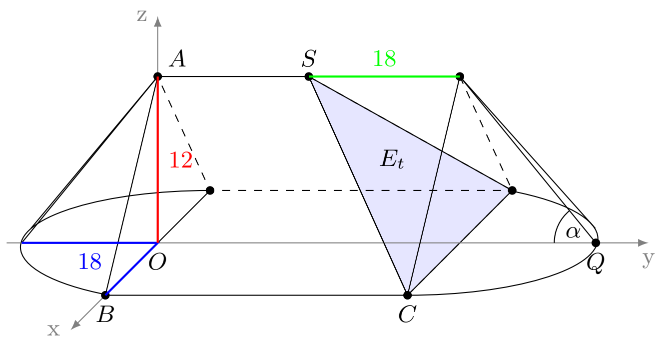
c) Gleichungssystem: Ansatz zur Ermittlung der Werte a und b

$$\begin{aligned} I: \quad & h(5) = 20{,}4 \Rightarrow b \cdot e^{-5a} = 9{,}7843 \\ II: \quad & h(10) = 20{,}4 \Rightarrow b \cdot e^{-10a} = 1{,}3681 \end{aligned}$$

weiter mit I, II: $e^{5a} = \frac{9{,}7843}{1{,}3681} = 7{,}1516$ usw.
Näherungswert a: $a \approx 0{,}393$; Näherungswert b: $b \approx 69{,}973$
Wachstumshöhe: $h(25) \approx 219{,}2$ cm

d) Lösungsidee: $h''(t_e) = 0$; GTR und solve ergibt 10,6
Ergebnis: nach ca. 9,6 Wochen

Aufgabe E



a) Ansatz für Böschungswinkel α: $\alpha = \arctan \frac{12}{18} = 0{,}588$
Böschungswinkel $\alpha \approx 33{,}7°$
Ansatz für Volumen: $V = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Prisma}}$
Volumen: $V \approx 12700\ \text{m}^3$
Ansatz für Oberflächeninhalt: $A_O = A_{\text{Kegelmantel}} + A_{\text{Seitenflächen Prisma}}$
Oberflächeninhalt: $A_O \approx 2950\ \text{m}^2$

b) Ansatz für Wert t: $C \in E_t$ mit dem Wert $t = 18$
Ansatz für Höhe der Pyramide: $S \in E_{18}$ ergibt $S(0|22|12)$
Ansatz für Volumen: $V_{ab} = \frac{1}{2}V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Pyramide}} \approx 3330\ \text{m}^3$

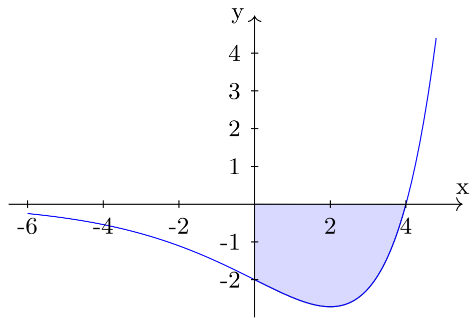
c) Ansatz für Zentriwinkel α des Kreisbogens: Tangente z.B. mit Satz des Thales; Suche nach Schnittpunkten für die Kreise

$$\begin{aligned} k_1: \quad & x^2 + y^2 = 18^2 \\ k_2: \quad & (x-24)^2 + (y-10)^2 = 24^2 + 10^2 \end{aligned}$$

führt mit GTR zu $(12{,}2456|-13{,}1918)$ und $\alpha = \arctan \frac{13{,}1918}{12{,}2456}$
Größe des Zentriwinkels: $\alpha \approx 47°$
sichtbarer Teil der Haldenoberfläche: $A \approx 1190\ \text{m}^2$

3.5 Lösungen LK (05)

Aufgabe A



a) Nullstelle: $x_0 = 4$
Koordinaten des lokalen Extrempunktes: $P_E(2|-e)$
Koordinaten des Wendepunktes: $P_W(0|-2)$
Volumen: $V \approx 65{,}3$

b) 1. Ableitung $f_k'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{k} - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{k}x}$
Koordinaten des Extrempunktes: $P_{\text{Min}}(k|-\frac{1}{2}ke)$
Gleichung der Funktion: $g(x) = -\frac{1}{2}e \cdot x$

c) Ansatz für Schnittstelle: $f_k(x) = f_k'(x)$
Wert k: $k = 1$

d) Partielle Integration: $u = \frac{1}{2}x - k$; $v' = e^{\frac{1}{k}x}$

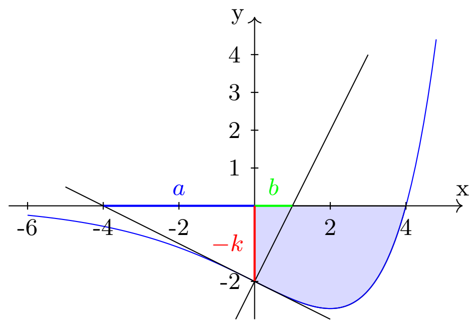
$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x - k\right) \cdot k \cdot e^{\frac{1}{k}x} - \int \frac{1}{2} \cdot k \cdot e^{\frac{1}{k}x} dx = \frac{k}{2}(x - 2k) \cdot e^{\frac{1}{k}x} - \frac{k}{2} \cdot k \cdot e^{\frac{1}{k}x} = \frac{k}{2}(x - 3k) \cdot e^{\frac{1}{k}x}$$

Ansatz für Fläche:

$$A(k) = \left| \int_0^{2k} f_k(x) \right| = F_k(2k) - F_k(0)$$

Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von k: $A(k) = \frac{k^2}{2}(e^2 - 3)$
Ansatz für Wert k:

$$A(k) = \frac{k^2}{2}(e^2 - 3) = \frac{2}{9}(e^2 - 3) \qquad \to \qquad k = \frac{2}{3}$$



d) $P_W(0|-k)$ ergibt $t_k : m_t = f'k(0) = -\frac{1}{2}$
Alle Tangenten sind somit parallel, denn deren Anstieg ist stets gleich.
s_k: $m_s = 2$;
Wegen $m_t = \tan\alpha$ reicht es die Strecken a und b, wie in der Abbildung zu sehen, zu berechnen:
$m_t = \frac{k}{a}$ und $m_s = \frac{k}{b}$
$A = \frac{1}{2}(a + b) \cdot k^2 = \frac{5}{2}k^2$
f) Gleichung einer trigonometrischen Funktion

$$h(x) = -e\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad ; \quad h(x) = e\sin\left(x + \frac{3\pi}{2} - 2\right) \quad ; \quad h(x) = e\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Begründung: $h(2) = e$ und $h'(2) = 0$

Aufgabe B

a) Begründung, z.B.: die Normalenform von E

$$(\vec{x} - \overrightarrow{OA}) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{x} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{AB}$$

der gegebenen Ebene überein oder $\overrightarrow{AB}$ entspricht dem Normalenvektor der Ebene und A ist in ihr enthalten.

Abstand vom Kreis: $d = \sqrt{40} - \sqrt{20}$

b) Ansatz für Öffnungswinkel: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\sqrt{20}}$
Größe des Öffnungswinkels: $\alpha \approx 88.6°$

c) P_1 ist Spiegelpunkt von P an A: Ansatz für Koordinaten eines Punktes: $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP}$
Koordinaten eines Punktes: z.B. $(-2|4|0)$

d) Ansatz für Abstand: $\overrightarrow{AC_a}^2 < 20 \Leftrightarrow 132 - 84 + 14a^2 < 0$
Lösungen der quadratischen Gleichung: $2 < a < 4$
Koordinaten des Punktes mit minimalem Abstand: $C_3(-3|2|3)$

e) Mit h und r werden die Höhe und der Radius im halbierten Kegel bezeichnet.
Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{21}}$. Das halbierte Volumen:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^3 \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{20}} = \frac{1}{6}\pi 20\sqrt{21} \qquad \text{und} \qquad h = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt[3]{2}}$$

Ansatz für Koordinaten eines Punktes der Ebene: Normalenform mit Punkt unterhalb von B

$$E_1 : \left(\vec{x} - \left(\overrightarrow{OB} - \frac{\sqrt{21}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$$

$$E_1 : 4x + y + 2z = \left(\overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{AB}}{\sqrt[3]{2}}\right) \bullet \overrightarrow{AB}$$

Gleichung der Ebene: $4x + y + 2z = 17 - \frac{21}{\sqrt[3]{2}}$

Aufgabe C

a) Charakterisierung der Zufallsgröße: Binomialverteilung $b_{60;0,95}$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $P(A) \approx 0{,}1802$
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: $P(B) \approx 0{,}4174$
Anzahl der zu entnehmenden Wurfpfeile: 120

b) Wahrscheinlichkeit für ein Set mit mindestens einem fehlerhaften Wurfpfeil: $p_m = 1 - 0{,}95^3$
Ansatz für Anzahl: $1-(1-p_m)^n < 0{,}98 \Rightarrow 1 - 0{,}95^{3n} < 0{,}98$
Anzahl: $n = 26$

c) Nachweis der Wahrscheinlichkeit für Material- und Montagefehler: A – Materialfehler; O – Montagefehler
gegeben sind: $P(A) = 0{,}04$; $P(O) = 0{,}02$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}95$, d.h. $P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = 0{,}05$

$$P(A \cap O) = P(A) + P(O) - P(A \cup O)$$

Nachweis für stochastische Abhängigkeit: $P(A \cap O) \neq P(A) \cdot P(O)$
Ansatz für bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(O) = \frac{P(A \cap O}{P(A)}$
Ergebnis: $P_A(O) = \frac{1}{4}$

d) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $P(m > 18{,}9) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(18{,}9)$
GTR liefert Ergebnis: $P(X > 18{,}9) \approx 0{,}0359$.

Aufgabe D

a) Begründung für ganzrationale Funktion dritten Grades:

Die Bedingungen erfordern 4 Freiheitsgrade. Nämlich 2 dafür, dass die Punkte B und C auf der Kurve liegen und 2, dass die Kurven in diesen Punkten "glatt" verlaufen. Ein Polynom 2. Grades hätte nur 3 Parameter, ein Polynom 3. Grades aber 4.

Ansatz für Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I: &\quad B \in f \\ II: &\quad C \in f \\ III: &\quad f'(x_B) = 0 \\ IV: &\quad f'(x_C) = 0 \end{aligned}$$

eine Gleichung der Funktion: $f(x) = -\frac{10}{343}x^3 + \frac{17}{49}x^2$
Nachweis für $p(x)$: Es müssen die 4 Eigenschaften des Gleichungssystems für p nachgewiesen werden.
Maßzahl der Bogenlänge mittels GTR: $L_p \approx 10{,}4$

b) Lösungsschritte z.B.: Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{65}$

1. Mittelpunkt M_1 des Kreises durch B und T_1: $M_1(0|r)$

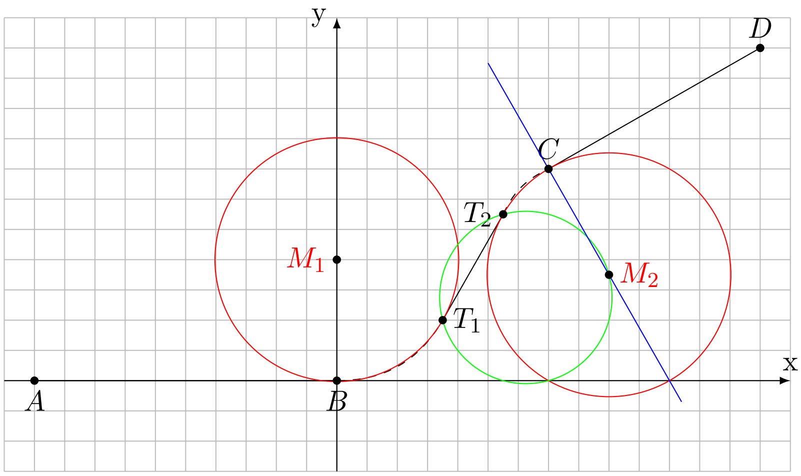
2. Ansatz für Mittelpunkt M_2 des Kreises durch T_2 und C:
   Senkrechte zu Strecke CD durch C: s: $y = \frac{7}{4}(11 - x)$
   Punkte auf s mit Abstand r zu C: $(7–x)^2 + (7–\frac{7}{4} \cdot (11–x))^2 = r^2$

3. Mittelpunkt $M_2(9|3{,}5)$ des Kreises durch T_2 und C

4. Mittelpunkt der Strecke M_1M_2

5. Ansatz für Koordinaten des Punktes T_2: ergibt sich aus der

6. Konstruktion der Tangente an einen Kreis (der mit dem Mittelpunkt M_2) von einem Punkt außerhalb (T_1) Thaleskreis über $\Rightarrow$ dem Durchmesser M_2T_1;
   ein Schnittpunkt ist T_2.



Näherungswerte der Koordinaten des Punktes T_2: $T_2(5{,}5|5{,}5)$

Aufgabe E

a) Ansatz für einen Stützvektor

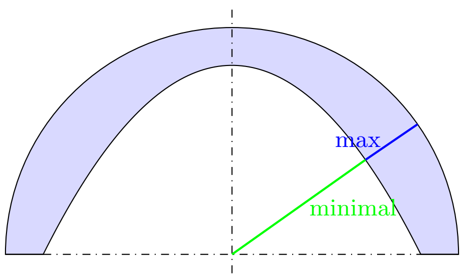
$$\overrightarrow{OP_{\frac{1}{2}}} = \overrightarrow{OP} \pm 7 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left(\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$$

eine Geradengleichung: z.B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Gleichung der Parabel: $y = -0{,}02x^2 + 50$
Inhalt der Querschnittsfläche und Masse: $m \approx 530$ kg

c) Wie in der Abbildung zu sehen ist, genügt es, den Abstand eines Punktes der Parabel zum Koordinatenursprung zu minimieren.



Zielfunktion: $d^{(}x) = x^2 + (-0.02x^2 + 50)^2$
GTR liefert 35,355 und somit $d_{max} = \sqrt{d^2(35{,}355)} \approx 16{,}7$
maximale Wandstärke: $d_{max} \approx 17$ cm

3.6 Lösungen LK (06)

Aufgabe A

a) Ansatz für Definitionsbereich: $t^{-3} - x^2 > 0$ mit dem Definitionsbereich:

$$D_{f_t} = \left\{ x | x \in \mathbb{R} \wedge -\sqrt{\frac{1}{t^3}} < x < \sqrt{\frac{1}{t^3}} \right\}$$

Ansatz für Symmetrie: $f(-x) = f(x)$ mit dem Ergebnis: axialsymmetrisch zur Ordinatenachse
Nullstellen: $f(x_0) = 0 \Rightarrow t^{-3} - x_0^2 = 1$ und $x_{0_{1;2}} = \pm\sqrt{t^{-3} - 1}$
$t = 1$ ... genau eine Nullstelle, $t < 1$ ... genau zwei Nullstellen

b) 1. und 2. Ableitung:

$$f_t'(x) = \frac{2 \cdot t^2 \cdot x}{t^3 \cdot x^2 - 1} \qquad ; \qquad f_t''(x) = -\frac{2 \cdot t^2 \cdot (t^3 x^2 + 1)}{(t^3 x^2 - 1)^2}$$

Koordinaten des lokalen Extrempunktes: $P_{max}\left(0 | -\frac{3}{t} \ln t\right)$
Wertebereich: $W_{f_t} = \left\{ y | y \in \mathbb{R} \wedge x \leq -\frac{3}{t} \ln t \right\}$

c) Ansatz für Volumen:

$$V = \pi \int_{-\sqrt{e^3-1}}^{\sqrt{e^3-1}} (e \cdot \ln (e^3 - x^2) dx$$

Volumen V: $V \approx 1320$

d) Nachweis für Parabel
$p(0) = f(0)$ außerdem ist $p(\sqrt{e^3 - 1}) = 0$ und aufgrund der Achsensymmetrie von p ist auch die zweite Nullstelle auf dem Graphen von p
Ansatz für Fläche:

$$A = \int_{-\sqrt{e^3-1}}^{\sqrt{e^3-1}} p(x) dx \qquad \Rightarrow \qquad P(x) = \frac{e \cdot x^3}{1 - e^3} + 3e \cdot x$$

Flächeninhalt: $A = 4e \cdot \sqrt{e^3 - 1}$.

e) Aufgrund der Symmetrie des Graphen, genügt es im I. Quadranten zu rechnen und das Teilverhältnis 1 : 4 zu verwenden. Ansatz:

$$(4u)^2 = u^2 + f(u)^2 \Rightarrow \sqrt{15} = f(u)$$

GTR ergibt 1,9570; Näherungswert u: $u \approx 1{,}96$

f) Anstieg der Senkrechten: $f'(x_A) = 1$
quadratische Gleichung: $0 = x^2 – 2ex - e^3$
Abszisse des Punktes A: $x_A = e – \sqrt{e^3 + e^2}$

Aufgabe B

a)

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt $P(-2|1|-1)$
Koordinaten des Punktes mit kleinstmöglichen Abstand: $P_{-1}(-2|1|-1)$
Größe des Winkels: $\alpha \approx 24{,}1°$

b) Ansatz für Werte a

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AP_a}^2 + \overrightarrow{BP_a}^2 \Rightarrow 69 = 12t^2 + 22t + 69$$

Werte a: $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{11}{6}$

c) Mit der Gleichung der Geraden durch A und B ist zu zeigen, dass

$$g_{AB} \cap g = \varnothing \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normaleneinheitsvektor der Ebene E_a: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 11a + 26 \\ 16a + 6 \\ -6a + 4 \end{pmatrix}$
Mit der Länge des Normalenvektors: $|\vec{n}| = \sqrt{413a^2 + 716a + 728}$ erhält man den Abstand zum Koordinatenursprung zu $\frac{50a}{|\vec{n}|}$ und somit die Gleichung

$$a \cdot \sqrt{953} = n \Rightarrow 540 \cdot a^2 + 716 \cdot a + 728 = 0$$

Werte a: $a_1 = -\frac{91}{135}$; $a_2 = 2$

d) Wenn P_a Spiegelpunkt von B ist, muss

$$\overrightarrow{BP_a} = \begin{pmatrix} 2a + 2 \\ -a - 6 \\ a - 4 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor von E sein.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP_a}}{2} = \begin{pmatrix} a - 1 \\ \frac{6-a}{2} \\ \frac{a+4}{2} \end{pmatrix}$$

ist ein Punkt auf E. Die Spiegelebene hat damit die Gleichung

$$(\overrightarrow{OM} - \vec{x}) \bullet \overrightarrow{BP_a} = 0$$

Liegt A auf dieser Ebene gilt $(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \bullet \overrightarrow{BP_a} = 0 = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BP_a}$.
Das führt zu $3a^2 + 5a – 28 = 0$. Werte für a: $a_1 = -4$; $a_2 = \frac{7}{3}$

Aufgabe C

a) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $b_{8;0.25}(k > 3)$ ergibt $p \approx 0{,}1138$

b) X – Zufallsgröße die den Typ beschreibt; Y – Zufallsgröße, die beschreibt, welche Zahlen gewürfelt werden. Ansatz für Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = A) \cdot P_{X=A}(Y = (1{,}1)) + P_{X=B} \cdot P_{X=B}(Y = (1{,}1)) = P(Y = (1{,}1))$$

Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{3}{32} \approx 0{,}0938$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $\frac{P_{X=B} \cdot P_{X=B}(y=(1{,}1))}{P(Y=(1{,}1))}$

Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{4}{9}$

c) Ansatz für Wahrscheinlichkeit: $1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$ ergibt $p = \frac{3}{32}$
Analyse der Aufgabe mit Baumdiagramm und Ansatz für Wahrscheinlichkeit:
y_e sei die gewürfelte Zahl, wenn nicht 2 beim ersten Mal fiel

$$P_{X=A}(y=2) + P_{X=A}(y=\overline{2}) \cdot 2 \cdot P_{X=A}(y=y_e) \cdot P_{X=A}(Y=2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{11}{32} \approx 0{,}3438$

d)

e	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(4,1)	(4,2)	(4,3)
$P(Z=e)$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$
hline Punkte	1	2	1	1	2	1	3	2	1

Erwartungswert für Punktzahl von Falk

$$E_{\text{Falk}} = n \cdot (P_{X=A}(Y=1) \cdot P_{X=B}(Y=1) + 2 \cdot P_{X=A}(Y=2) \cdot P_{X=B}(Y=2)) = \frac{n}{4}$$

Erwartungswert für Punktzahl von Carola: $E_{\text{Carola}} = \frac{5}{4}$
Wert für n: $n = 5$

Aufgabe D

a) Schnittwinkel zwischen E und der x-y-Ebene: 38,1°
Ansatz für prozentuale Steigung: $p = 100\% \cdot \tan 38{,}1^{c}irc$ ergibt prozentuale Steigung $p \approx 78\%$

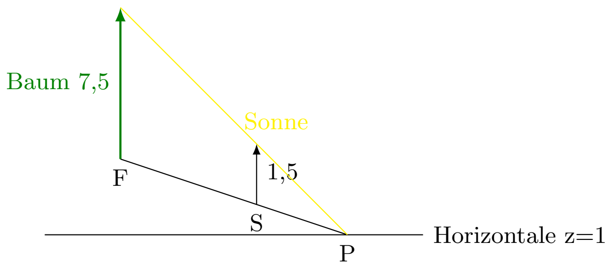
b) Ansatz für Schnittgerade g zwischen E und der x-y-Ebene:

$$E|z = 0 \Rightarrow g : 10x – 2y = 10 \Rightarrow 5x – y = 5$$

Projektion von P in die x-y-Ebene: $P'(-3|6)$
Senkrechte s zu g durch P': $s : x + 5y = (-3) + 5\Delta 6 = 27$
Schnittpunkte von s mit Kreis k: $(x–8)^2 + (y–1)^2 = \frac{25}{4}$

$$(27–5y–8)^2 + (y–1)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow 104 \cdot y^2 - 768 \cdot y + 1423 = 0$$

hat keine Lösungen. Schlussfolgerung: Der Ball kann nicht in den Teich rollen.



c) Gleichung der Geraden s der Sonnenstrahlen durch Baumspitze:

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OF} + 7{,}5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Koordinaten des Schnittpunktes von s und E: $P(1{,}9|11|1)$

Schlussfolgerung: Der Schatten liegt vollständig auf dem Hang. (sonst wäre die Höhe 0)

Analyse: siehe Skizze, Ansatz mit Verwendung des Strahlensatzes
Die Strecke PF wird im Verhältnis 1:5 geteilt. Daraus ergibt sich der Ansatz

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{5}\overrightarrow{PF}$$

Ergebnis: Menge aller Punkte der Strecke SF mit $S(0{,}8|12|2)$.

Aufgabe E

a) Erkenntnis zu Koordinaten des Berührungspunktes: $y_B = 2$, $z_B = 2$
Wert für c: $c = 8$; Wert für a: $a = \frac{1}{2}$; Wert für b: $b = 4$

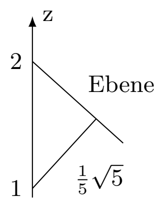
b) Ansatz für Volumen z.B. Umkehrfunktionen bezogen auf eine x-y-Ebene:

$$f^{-1}_{\frac{1}{2};4}(x) = \sqrt{8-2x} \qquad ; \qquad g_8^{-1}(x) = \sqrt{\frac{8}{x}}$$

Rotationskörper:

$$V = \pi \int_2^u \left(g_8^{-1}(x)\right)^2 dx - \pi \int_2^4 \left(f^{-1}_{\frac{1}{2};4}(x)\right)^2 dx = \pi \left([8\ln x]_2^u - 4\right) = 12\pi$$

eine Ebenengleichung: z.B. $z = 2e^2$ oder $z = 20e^{-\frac{3}{2}}$



c) Aufgrund der besonderen Lage von A und da die Ebene die Gerade $y = 2$ enthält, kann aus der Skizze ein Ansatz abgeleitet werden:

$$\frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Schnittwinkel: $\alpha \approx 53{,}1°$.

3.7 Lösungen LK (14)

Aufgabe 1

1.1

$$f_{1,6}(2) = 1{,}6 \cdot (-\frac{2}{125} \cdot 2^3 + \frac{3}{25} \cdot 2^2) + 1 \approx 1{,}56$$

d.h. 1,56 Millionen Tonnen pro Jahr.
GTR-Funktion solve($f_{1,6}(x) = 2$) ergibt $x =$2,9 Jahre.
Der Wendepunkt kann grafisch ermittelt werden. Er liegt bei 2,5 Jahren.

1.2

$$f_a(0) = a \cdot (-\frac{2}{125} \cdot 0^3 + \frac{3}{25} \cdot 0^2) + 1 = 1$$

Der Parameter hat keinen Einfluss.

$$f_a(5) = a \cdot (-\frac{2}{125} \cdot 5^3 + \frac{3}{25} \cdot 5^2) + 1 = a + 1$$

Der Parameter hat einen Einfluss.
Wendepunkt

$$f_a'(0) = \frac{-a(6x^2 - 20x)}{125} \qquad ; \qquad f_a''(0) = \frac{-a(12x^{-}30)}{125}$$

ergibt als Wendestelle $x = \frac{5}{2}$, also unabhängig von a.

1.3 Das Maximum und das Minimum ermitteln: Maximum sind 2,6 Millionen Tonnen, Minimum sind 2,2 Millionen Tonnen.

1.4

$$\int_0^5 f_{1,6}(t)dt + \int_5^{30} g(t)dt \approx 69$$

d.h. 69 Millionen Tonnen

1.5

$$h(t) = y = at^3 + bt^2 + ct + d \qquad ; \qquad h'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

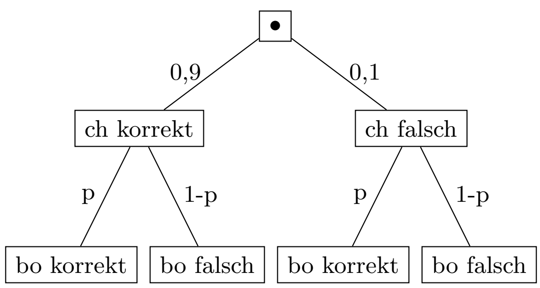
mit folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} I \quad g'(30) = h'(30) & ; & II \quad g(30) = h(30) \\ III \quad h(40) = 0 & ; & IV \quad h'(40) = 0 \end{array}$$

Lösen mit dem Taschenrechner ergibt

$$h(t) = 0{,}0052t^3 - 0{,}546t^2 + 18{,}72t - 208$$

1.6 Baumdiagramm



$$0{,}26 = 0{,}9 \cdot (1-p) + 0{,}1 \cdot p \Rightarrow p = 0{,}8$$

beide korrekt; $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$.

1.7 Taschenrechner: normCDf(25,35,7.5,30) $\approx 0{,}4950$
Durch Probieren normCDf(-1000,46,7.5,30) verschiedener Werte bekommt man einen Wert zwischen 45 und 46.

Aufgabe 2

2.1 $D(-25/5/-15)$ I ist über dem Mittelpunkt von $\overrightarrow{AC}$, also über $M(-15/15/-15)$ ermittelbar. Daraus leiten sich der x- und der y-Wert ab. Der z-Wert ergibt sich aus der Gesamthöhe minus der 15 cm, die A und C unter der x-y-Ebene liegen.

2.2
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ergibt keine Lösung, also ist die Ebene parallel zur x-Achse.
Ein gleichschenkliges Trapez liegt vor, wenn $\overrightarrow{BC} = a\overrightarrow{FG}$ und $\mid BF \mid = \mid CG \mid$ gilt:
$\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $a = \frac{2}{3}$, d.h. parallel

$$\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 25 + 225} = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} \right|$$

d.h. gleich lang.

2.3 Normalform für die Ebene durch FGI mit dem Taschenrechner ergibt: $4y + 3z = 120$. Das ergibt eine Hessesche Normalform $\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}x = 24$.
der x-Wert des Punktes muss -15 sein, da über M; der y-Wert des Punktes muss 15 sein, da über M.
Einsetzen in die Hessche Normalform ergibt $\frac{4}{5} \cdot 15 + \frac{3}{5}z = 9$ und damit $z = 5$.

2.4 Wenn das Licht in der Ebene $EFGH$ liegt und $ABCD$ einen Schatten erzeugt, ist die Ebene unterhalb der Fläche $ABCD$ bei $z = -75$.
Erstellen einer Geradengleichung von der Lichtquelle durch den Punkt A

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}$$

mit $z = -75$ ergibt sich ein $t = 5$ und damit $A'(35, -35, -75)$.
Geradengleichung von der Lichtquelle durch den Punkt B

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}$$

mit $z = -75$ ergibt sich ein $t = 5$ und damit $B'(35{,}65, -75)$.

Da ein Quadrat entsteht, reicht es die Länge von $A'B'$ auszurechnen.
$|A'B'| = \sqrt{0^2 + 100^2 + 0^2} = 100$ und damit einer Fläche von $100^2 = 10000$.

2.5 Volumen von $ABCDEFGH$ ist über die Formel

$$V = \frac{1}{3}h(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$$

zu berechnen.

$$V_1 = \frac{1}{3}15 \cdot (20^2 + 20 \cdot 30 + 30^2) = 9500$$

Damit soll das Volumen der Pyramide $V_2 = 6333\frac{1}{3}$ sein.

$$V_2 = \frac{1}{3}a^2 h = \frac{1}{2}30^2 \cdot h = 6333\frac{1}{3}$$

ergibt $h = 21{,}111$

2.6 Wahrscheinlichkeit, das eine Lampe kein Ausschuss ist beträgt

$$p = \frac{14}{15} \cdot \frac{13}{14} = 0{,}86$$

binomialverteilt, d.h. $1 - 0{,}86666^n > 0{,}99$ daraus ergibt sich ein $n \approx 32{,}1796$, also 33 zu entnehmenden Lampen.

2.7 Der gesuchte Bereich geht von 0 bis k

$$1 - B_{100/0,1}(X < k) = 0{,}04$$

mit dem Taschenrechner für k verschiedene Werte einsetzen ergibt, dass k zwischen 15 und 16 liegt. Der gesuchte Bereich muss 16 ... 100 sein.

3.8 Lösungen LK (15)

Aufgabe 1

1.1 Länge der Strecke zwischen den Nullstellen solve($f(x) = 0$) ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 4{,}71$ Länge also minimal 4,71 dm.
Da OA auf der x-Achse liegt, genügt es das Maximum von f und das Minimum von g zu ermitteln. Dies kann graphisch mit dem Taschenrechner erfolgen
$Max_f(0{,}85/1{,}44)$, $Min1_g(0{,}98/-1{,}79)$ und $Min2_g(3{,}73/-1{,}83)$ wobei das zweite Minimum die Breite bestimmt, Breite also minimal $1{,}44 + 1{,}83 = 3{,}27$ dm.

1.2

$$A_S = 2 \cdot \int_0^{4{,}71} f(x) - g(x)dx + 0{,}05 \cdot \left(\int_0^{4{,}71} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx + \int_0^{4{,}71} \sqrt{1 + g'(x)^2}dx \right)$$
$$\approx 20{,}21 + 0{,}32 + 0{,}36 = 20{,}89 \text{ dm}^2$$

Die Fläche ergibt sich aus 2 mal der Seitenfläche + 0,05 mal der Länge der Kurve zu f und 0,05 mal der Länge der Kurve zu g.

1.3 15° bedeuten einen Anstieg von $\tan 15° \approx -0{,}268$.
Gesucht sind die Stellen von f, an denen der Anstieg -0,268 ist, also $f'(x) = -0{,}268$ ergibt mit solve: $x_1 \approx 0{,}964$, $x_2 \approx 2{,}538$ und $x_3 \approx 4{,}15$; dabei ist x_2 der interessante Wert.
$g'(x) = -0{,}268$ ergibt mit solve: $x_1 \approx 0{,}863$, $x_2 \approx 2{,}609$ und $x_3 \approx 3{,}578$; dabei ist x_2 der interessante Wert.
Die beiden Tangenten an den Stellen haben dann die Gleichungen

$$y = -0{,}268x + 1{,}019 \qquad ; y = -0{,}268x - 0{,}661$$

(kann im Graphikmenü ermittelt werden).
Die Normale zu den beiden Tangenten durch den Koordinatenursprung hat die Gleichung

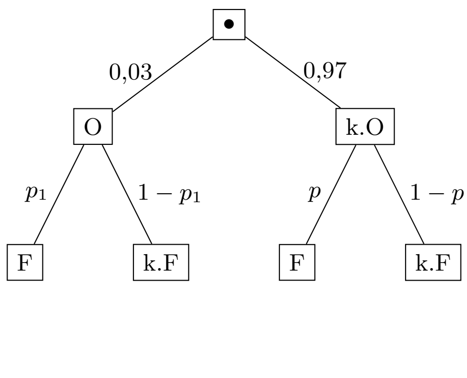
$$y_N = \frac{1}{0.268}x = 3{,}731x$$

Die Schnittpunkte der Normalen mit f und g sind $S_f(0{,}255/0{,}951)$ und $S_g(-0{,}165/-0{,}617)$. Für den Abstand wird

$$|S_fS_g| = \sqrt{(0{,}255 + 0{,}165)^2 + (0{,}951 + 0{,}617)^2} \approx 1{,}623 \text{ dm}$$

1.4 $g'(4{,}71) \approx 4{,}67$ ergibt für die Strebe $0 = 4{,}67 \cdot 4{,}71 + n$ und somit $n = 21{,}99$.
Der Punkt B hat den y-Wert: $y_B = 4{,}67 \cdot 5{,}25 + 21{,}99 = 2{,}53$.
Abstand $d = \sqrt{0{,}2889 + 6{,}4} \approx 2{,}59$ dm

1.5 Mit einem Baumdiagramm ergibt sich aus dem Pfad



$$P(\text{kein Oberflächenfehler} + \text{Farbfehler}) = 0{,}97 \cdot p = 0{,}01 \Rightarrow p \approx 0{,}0103$$

für Farbfehler und damit

$$P(\text{Oberflächenfehler} + \text{Farbfehler}) = 0{,}97 \cdot (1 - 0{,}0103) = 0{,}96$$

1.6 $n = 100$, H_0: $p_0 \geq 0{,}04$, $p = 0{,}15$, $\alpha = 0{,}15 \Rightarrow 0; 1$

Aufgabe 2

2.1 drei mal die Punktprobe ergibt: liegen auf der Ebene

$$|AB| = \sqrt{30^2 + 5^2 + 10^2} \approx 32{,}016; \qquad |AD| = \sqrt{30^2 + 45^2 + 15^2} \approx 56{,}125$$

$$|BD| = \sqrt{50^2 + 5^2} \approx 50{,}249$$

also 138,39 m.
Winkel $angle\left(\begin{pmatrix} -30 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -30 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \approx 18{,}2°$ (Gerade durch AB und deren „Schatten“)

2.2 $7 \cdot (-15) - 2 \cdot 45 + 20 \cdot h = 500 \Rightarrow h = 34{,}75$.

2.3

$$g(BD) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder zweidimensional betrachtet $z = \frac{1}{10}y + 25$. Einsetzen in die Abstandsgleichung:

$$\sqrt{(30 - x)^2 + (5 - y)^2 + (15 - z)^2} = \sqrt{(30 - 0)^2 + (5 - y)^2 + (15 - (\frac{y}{10} + 25))^2} = a(y)$$

Nun von $a(y)$ das Minimum ermitteln $y_{min} \approx 3{,}96$ mit einem Abstand von 31,77.
$z_{min} = \frac{1}{10}3{,}96 + 25 = 25{,}396$ also $P(0{,}0/4{,}0/24{,}4)$.
Der Graph der angegebenen Funktion hat im Intervall kein lokales Maximum. Das gesuchte Maximum ist also bei $h = 15$ und hat den Wert 13,1 m.

2.4 Hessesche Normalform

$$\frac{7}{\sqrt{453}}x - \frac{2}{\sqrt{453}}y + \frac{20}{\sqrt{453}}z = \frac{500}{\sqrt{453}}$$

Bedingung A:

$$\frac{7}{\sqrt{453}}(-15) - \frac{2}{\sqrt{453}}45 + \frac{20}{\sqrt{453}}z - \frac{500}{\sqrt{453}} = 7$$

ergibt $h_1 \approx 42{,}20$ und $h_2 \approx 27{,}3$. h_1 aus Abstand 7 und h_2 aus Abstand -7 also $27{,}3 \leq h \leq 42{,}2$.

Bedingung B

$$\cos\alpha = \left(\begin{pmatrix} 15 \\ -45 \\ 25 - h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 30 - h \end{pmatrix}\right) < 0 \Rightarrow 15 \cdot 15 - 45 \cdot 5 + (25 - h) \cdot (30 - h) < 0 \Rightarrow h < 30$$

alle Bedingungen $27{,}3 \leq h \leq 30$.

2.5 $D(0/50/30)$ als rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel 60° und der Gegenkathete 30 m erhält man

$$A_k = 30 \tan 60° \approx 17{,}32 \text{ m}$$

also einen möglichen Punkt $D_B(17{,}32/50/0)$.
Alle Punkte liegen auf einem Kreis mit dem Radius 17,32 also $A_k = \pi r^2 \approx 942{,}48$.

2.6 $E(X) = 145$ kN

$$P(X > 140) = 0{,}973 = 1 - P(X \leq 140) \Rightarrow \delta_1 = 2{,}595$$

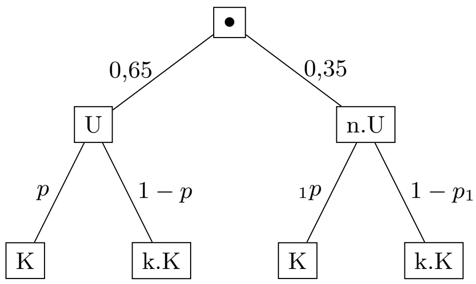
δ_2 entfällt, d.h. $P(X) = 0{,}8432$.

2.7 Mit einem Baumdiagramm wird schnell deutlich

$$P(\text{nicht Umgebung+Kind}) = 0{,}35 \cdot 0{,}55 = 0{,}1925$$

$$P(\text{Kind}) = P(\text{nicht Umgebung+Kind}) + P(\text{Umgebung+Kind}) = 0{,}485$$

und somit $0{,}1925 + 0{,}65 \cdot p = 0{,}485$ mit $p \approx 0{,}45$.



2.8 Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fremder ein Kind ist, ist 45%; oder die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher ein einheimisches Kind ist: $0{,}45 \cdot 0{,}65 \approx 0{,}2925$. Damit

$$\frac{100}{29{,}25} = \frac{x}{100} \Rightarrow x \approx 341{,}88$$

3.9 Lösungen LK (16)

Aufgabe 1

1.1 $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{12x}{(x^2+3)^2}, f''(x) = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}$
Null setzen $0 = 36x^2 - 36$ ergibt $x_1 = 1$ $x_2 = -1$
Ein Nachweis ist nicht notwendig, da im Text "besitzt genau zwei Nullstellen" ausgesagt wird. Damit ist die notwendige Bedingung auch hinreichend.
$d(CD) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2361$, d.h. ungefähr 224 m.

1.2

$$l(AB) = \int_{-3}^{3} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \approx 7{,}3134$$

also ungefähr 731 m.
$v = \frac{s}{t} = \frac{731m}{17s} = 43\frac{m}{s} = 154{,}8\frac{km}{h}$

1.3 Punkte: $S_1(-1|1); S_2(1|2)$
$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x)dx \approx 0{,}1724$, d.h. $1724m^2$ und somit $1724m^2 \cdot 0{,}25m \approx 431m^3$

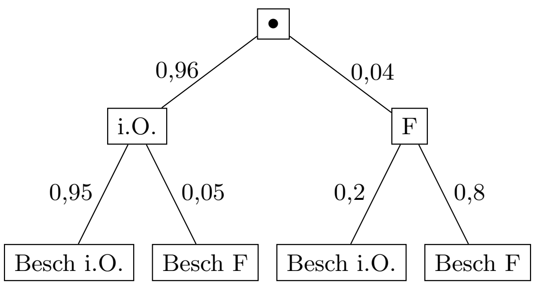
1.4 Gleichung der Tangenten: $f'(0) = 0{,}5$, $2 = 0{,}5 \cdot 0 + n$ ergibt $y = 0{,}5 \cdot x + 2$
Einsetzen ergibt wahre Aussage, d.h. M liegt auf der Tangente
$l(EM) = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}25^2} \approx 0{,}559$, d.h. etwa 56 m

$$\vec{OL_2} = \vec{OL_1} + 2\vec{L_1M} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 2{,}3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2(0{,}7|2{,}2)$$

Extremwertaufgabe mit Zielfunktion: $d(f(x)M) = \sqrt{(2{,}25 - y)^2 + (0{,}5 - x)^2}$
Nebenbedingung: $y = f(x)$
Zielfunktion: $d(f(x)M) = \sqrt{(2{,}25 - f(x))^2 + (0{,}5 - x)^2}$
Minimum mit Taschenrechner suchen: $(0{,}49|0{,}15)$, d.h. 15 Meter.

1.5 Tangente $y = mx + n$ an Berührungstelle x_p von außen an den Graphen mit $m = f'(x_p)$ und $m = \frac{2{,}3-f(x_p)}{0{,}3-x_p}$
$f'(x_p) = \frac{2{,}3-f(x_p)}{0{,}3-x_p}$ ergibt mit GTR: $x_1 = -1{,}766$; $x_2 = -0{,}2728$
nur x_2 liegt im Intervall mit der Lösung $f(-0{,}2728) \approx 1{,}8151$. Folglich ist $P(-0{,}2728|1{,}8151)$.

1.6 Binomialverteilung $B_70{,}91.2$ mit $E(X) = n \cdot p = 63{,}84$
$P(X > 63) = 1 - P(x \leq 63) \approx 0{,}5795$



1.7 $0{,}912 = 0{,}96 \cdot x$ ergibt 0,95 ; $0{,}08 = 0{,}96 \cdot 0{,}05 + 0{,}04 \cdot y$ ergibt 0,8
Satz von Bayes: $\frac{0{,}2 \cdot 0{,}04}{0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}96 \cdot 0{,}95} \approx 0{,}0087$

Aufgabe 2

2.1 $O(9{,}5|2{,}5)$

2.2 Winkel zum Normalenvektor $\approx 10°$, gesuchter Winkel $\approx 80°$

2.3 E, G und Fußpunkt E_F von E auf x-Achse bilden rechtwinkliges Dreieck, d.h. $E_F = \frac{4}{\tan 76°} = 0{,}9973 \approx 1 \Rightarrow E(3{,}5|-0{,}5|0)$
Abstand $d = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} \approx 0{,}7071$

2.4 Geradengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 85{,}3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}$

normierter Richtungsvektor $\frac{\begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}}{14{,}67}$
Einsetzen von $t = 74$ in die normierte Geradengleichung ergibt $\approx -19{,}266$, d.h. 19,3 m Tiefe

2.5 Die Gerade des Zugangs $\vec{x} = \begin{pmatrix} 85{,}3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}$

und die Gerade der Flugbahn entlang $\vec{BE} = \begin{pmatrix} -35{,}6 \\ -152{,}4 \\ 49 \end{pmatrix}$ müssen sich schneiden. Für den Stützvektor ist die z-Komponente unbekannt.

$$\begin{pmatrix} 85{,}3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 \\ 30 \\ h \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -35{,}6 \\ -152{,}4 \\ 49 \end{pmatrix}$$

ergibt ein Gleichungssystem mit der Lösung $z \approx 7{,}7$.

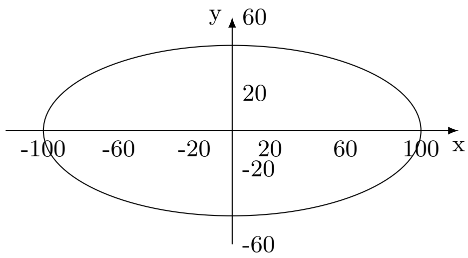
2.6 GTR: $binomialPDf(0{,}25{,}0.28) \approx 0{,}00027 \Rightarrow binomialPDf(4{,}11{,}0.28) \cdot 0.28 \approx 0{,}0570$

2.7 GTR: $binomialCDf(33{,}100{,}100{,}0.28) \approx 0.158$, somit mehr als 5%, weniger als 5% wären bei 36 erreicht

3.10 Lösungen LK (17)

Aufgabe 1

1.1 $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{10000 - x^2}$



Nachweis durch Einsetzen in $f(x)$ und $g(x)$; achsensymmetrisch, wenn $f(x) = f(-x) \Longrightarrow$ Ursache x^2
Skizze einer Ellipse mit Breite 200 und Höhe 100

1.2 mit Taschenrechner Max von $f(x)$ und Min von $g(x)$ bestimmen $\Rightarrow 100m$

1.3 $2\int_{-100}^{100} f(x)dx = 5000\pi$
$5000\pi \cdot 0{,}8 = 4000\pi \approx 12566{,}37$

1.4 Gesucht: $y = ax^2 + bx + c$
Ordinate des Punktes R berechnen f(80)=30, Ableitung an der Stelle 80 ermitteln $f'(80 = -\frac{2}{3}$
gesuchte Funktion muss an der Stelle 80 den Anstieg $\frac{3}{2}$ besitzen
Gleichungssystem:

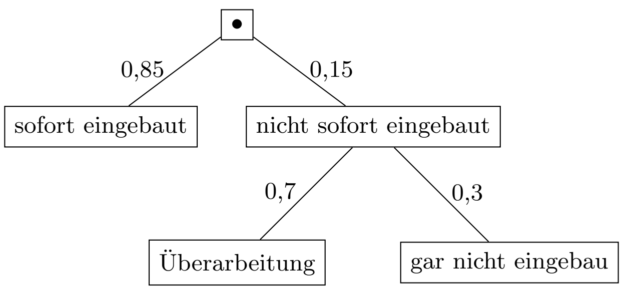
$$0 = a \cdot 50^2 + b \cdot 50 + c, 30 = a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + c, \frac{3}{2} = 2a \cdot 80 + b$$

Lösung: $y = \frac{1}{60}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{50}{3}$

1.5 Hälfte des Rotationskörpers: $V = \frac{\pi}{2}\int_{-100}^{100}(f^2(x))dx = \frac{5000\pi}{3} \approx 523598{,}78$

1.6 erster Träger hat die Länge 68,5 $\Rightarrow \frac{u}{2} = \pi r \Rightarrow r \approx 21{,}80$
mittels Taschenrechner Funktion zeichnen und zu r (das ist der y-Wert) den x-Wert ermitteln $\Rightarrow x_1 \approx -90$
Da der rechte Träger die gleiche Länge hat, befindet er sich ebenfalls 10 m von 100 entfernt. Für die restlichen Träger bleiben 180 m für 6 Lücken übrig = 30 m.
Der dritte Träger befindet sich somit bei -30.
y-Wert (Radius) bei -30 ermitteln $\Rightarrow y \approx 47{,}70$
Länge berechnen: $\frac{u}{2} = 47{,}70\pi \approx 149{,}844$

1.7 Baumdiagramm



$0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}7 = 0{,}955$, mit Satz von Bayes: $\frac{0{,}15 \cdot 0{,}7}{0{,}15 \cdot 0{,}7 + 0{,}85} \approx 0{,}1099$

1.8 Jahr in Monate umrechnen und GTR:

normCDf$(-\infty, 72{,}9{,}96) \approx 0{,}00383$
$0{,}00383 \cdot 18000 \approx 68{,}947 \Rightarrow$ somit 69

Aufgabe 2

2.1 rechtwinkliges Dreieck: $\tan 54° = \frac{h}{94} \Rightarrow h \approx 129{,}38$

2.2 x und y ergeben sich aus den halben Seitenlängen, z ergibt sich, da B in der x-y-Ebene liegt
Die x-Koordinate erhält man mit einem rechtwinkligen Dreieck
Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 58{,}4 \\ 58{,}4 \\ 49 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } z = 49$$

Nachweis für x: $\tan 54° = \frac{49}{l} \Rightarrow l \approx 35{,}6 \Rightarrow x = 94 - 35{,}6 = 58{,}4$, analog für y
Alternativ Punktprobe mit E und der Geraden durch A und S_{alt}

$$\begin{pmatrix} 58{,}4 \\ -58{,}4 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ -94 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -94 \\ 94 \\ 129{,}38 \end{pmatrix} \Rightarrow t \approx 0{,}3787$$

2.3 Die Pyramide besteht aus einem Pyramidenstumpf mit der Höhe 49, der Grundseite 188 und der "Deckseite" $58{,}4 + 58{,}4 = 116{,}8$
$V_1 = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) \approx 1158762{,}45$
und einer Pyramide mit der Grundseite 116,8 und der Höhe $h = 105 - 49 = 56$
$V_2 = \frac{1}{3} A_G \cdot h \approx 254655{,}1467 \Longrightarrow V = V_1 + V_2 \approx 1413417{,}6\text{m}^3$

2.4 Geradengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 85{,}3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}$

normierter Richtungsvektor $\frac{\begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}}{14{,}67}$
Einsetzen von $t = 74$ in die normierte Geradengleichung ergibt $\approx -19{,}266$, d.h. 19,3 m Tiefe

2.5 Die Gerade des Zugangs $\vec{x} = \begin{pmatrix} 85{,}3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix}$

und die Gerade der Flugbahn entlang $\vec{BE} = \begin{pmatrix} -35{,}6 \\ -152{,}4 \\ 49 \end{pmatrix}$ müssen sich schneiden. Für den Stützvektor ist die z-Komponente unbekannt.

$$\begin{pmatrix} 85{,}3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13{,}3 \\ 0 \\ -6{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 \\ 30 \\ h \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -35{,}6 \\ -152{,}4 \\ 49 \end{pmatrix}$$

ergibt ein Gleichungssystem mit der Lösung $z \approx 7{,}7$

2.6 GTR: $binomialPDf(0{,}25{,}0.28) \approx 0{,}00027 \Rightarrow binomialPDf(4{,}11{,}0.28) \cdot 0.28 \approx 0{,}0570$

2.7 GTR: $binomialCDf(33{,}100{,}100{,}0.28) \approx 0.158$, somit mehr als 5%, weniger als 5% wären bei 36 erreicht

3.11 Lösungen LK (18)

Aufgabe 1

1.1 Begründung: da e^z für alle $z \in \mathbb{R}$ stets positiv ist, gilt $f_t(x) > 0$
Mittel Kettenregel und ausklammern von $\frac{1}{t}$ wird

$$y' = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{t} e^{\frac{x}{t}} - \frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}} \right) = \frac{5}{2t} \cdot \left(e^{\frac{x}{t}} - e^{-\frac{x}{t}} \right)$$

eine beeinflusste Eigenschaft: z.B. die Steilheit in jedem Punkt der Kurve (außer für $T(0|5)$)
eine nicht beeinflusste Eigenschaft: die Koordinate des Minimums $T(0|5)$

1.2 Ansatz für Höhenunterschied: $f_{90}(-200) - f_{90}(80) = \Delta h$
Höhenunterschied: 16,2 m , Höhe des tiefsten Punktes: 5,0 m
Ansatz für Gefälle im Punkt A: $f'_{90}(-200)$ Gefälle im Punkt A: z.B. 25,3 %

1.3 Bestimmung der Länge des nicht straff gespannten Stahlseils

$$l = \sqrt{280^2 + \Delta h^2} \approx 280{,}47 \text{ m}$$

Bogenlänge:

$$s = \int_{-200}^{80} \sqrt{1 + (f'_{90}(x))^2} dx$$

mittel GTR wird 281,351 m; Differenz zum gespannten Seile $\approx 0{,}9$ m
Geradengleichung:

$$g(x) = y = -\frac{\Delta h}{280}(x - 80) + f_{90}(80) \approx -0{,}05797x + 11.7464$$

Ansatz für maximalen Abstand ergibt mit GTR $\approx 9{,}3$ m

1.4 Anstieg der Tangente: $\approx -0{,}056$ Tangente an den Graphen vom Punkt $K(-220|15)$ außerhalb, an eine Stelle s, die wir noch nicht kennen. $y = mx + n$

$$\begin{aligned} I: &\quad 15 = f'_{90}(s) \cdot (-220) + n \\ II: &\quad f_{90}(s) = f'_{90}(s) \cdot s + n \end{aligned}$$

I in II ergibt $f_{90}(s) = f'_{90}(s) \cdot (s + 220) + 15$ und weiter mit GTR: $s \approx -80{,}2482$

$$t(x) = -0.56366x + 2.59957$$

Ansatz für Anstieg der Geraden von der Kamera zum Punkt A

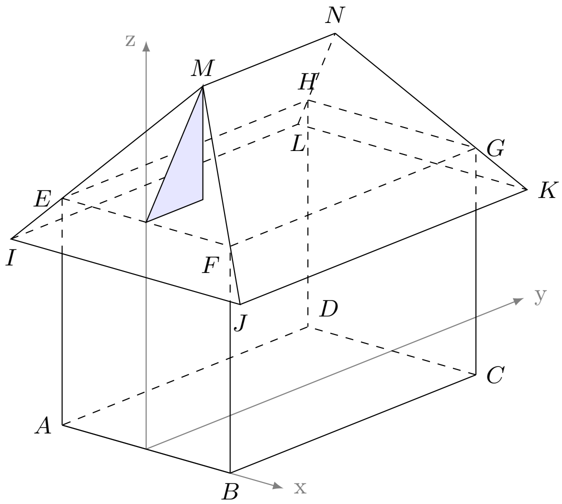
$$\tan(\alpha_1) = -0{,}056366 \Rightarrow \alpha_1 \approx -3{,}2261° \quad ; \quad \tan(\alpha_2) = \frac{23{,}3405 - 15}{20} \Rightarrow \alpha_2 \approx 22{,}6372°$$

Anstieg der Geraden von der Kamera zum Punkt A: $\approx 0{,}417$
Größe des Winkels α: $\alpha \approx 26°$
1.5 Ansatz für den Mindestwert für m_S
GTR: $invNorm(.0001)$ ergibt -3,71902 und somit

$$-3{,}71902 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{100 - (100 + m_S)}{20} \Rightarrow m_S \approx 74{,}38$$

Mindestwert für m_S: $m_S \approx 74$ kg

Aufgabe 2



2.1 Koordinaten der Punkte: $A(-2{,}75|0{,}00|0{,}00)$ und $G(2{,}75|8{,}50|5{,}00)$

2.2 Ansatz für Größe des Neigungswinkels: $\tan\alpha = \frac{2{,}5}{2}$ ergibt als Größe des Neigungswinkels $\approx 51{,}3°$
Nachweis der Koordinaten von J:

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OF} + \lambda \cdot \overrightarrow{MF} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{11}$$

und E: $x = 2{,}75 \Rightarrow x_J = 3{,}75$ wahre Aussage
z.B. Lage von J auf der Geraden durch M und F; Abstand von J zur Ebene durch B, C, G und F

2.3 Ansatz für Inhalt der Trapezfläche:

$$h = \sqrt{3{,}75^2 + (z_J–7{,}5)^2} \qquad ; \qquad F_T = \frac{1}{2}(2 \cdot \frac{8}{11} + 8{,}5 + 4{,}5) \cdot h$$

($2 \cdot \frac{8}{11}$ sind der Überstand in y-Richtung)
Inhalt der Trapezfläche: $\approx 36{,}6\ \text{m}^2$

2.4 Ansatz für Koordinaten des Punktes M_α: siehe Abbildung
$\tan\alpha = \frac{h_M}{2{,}75}$ mit Koordinaten des Punktes $M_\alpha(0|2|5 + 2{,}75 \cdot \tan\alpha)$

2.5 Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)$$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: $P(A) = \frac{79}{120}$.
Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B
$\mu = 32{,}91$ und $P(B) = 1–B(50{,}0.6585{,}32)$ ergibt Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: $P(B) \approx 0{,}5555$
Ansatz für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24} = \frac{79}{120} \cdot P(C)$$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C: $P(C) = \frac{25}{79}$

4 Lösungen ohne Hilfsmittel

4.1 Lösungen oH (01)

1 richtiges Kreuz: Feld 3, Feld 5, Feld 4, Feld 3, Feld 2

2.1 $x_1 = 0$, $x_2 = a$

2.2 $\int_0^a (-ax^2 + a^2x)dx = [\frac{-a}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2]_0^a = \frac{1}{6}a^4 = \frac{8}{3}$
$\Rightarrow a = 2$, (-2 entfällt, da $a > 0$)

3.1. $g(PQ) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Der Richtungsvektor der Geraden ist das Zweifache des Normalenvektors.

3.2 Ein Normalenvektor der Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Der Mittelpunkt $M(3|1|4)$ von PQ liegt in der Ebene.
$4x + 2y + 4z = n \Rightarrow M$ einsetzen ergibt $n = 30$. Die Ebene ist also $4x + 2y + 4z = 30$.

4.1 Die einzelnen Ergebnisse haben unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.

4.2

x_i	2	3
$P(x = x_i)$	$2(\frac{1}{2})^2$	$4(\frac{1}{2})^4$

$E(X) = 2 \cdot 2(\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot 4(\frac{1}{2})^3 = 2{,}5$

5.1 gemeinsamer Punkt: $a \cdot e^{a+x} = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1} \Rightarrow$
$x = -1$ ergibt: $a \cdot e^{a-1} = a \cdot e^{a-1}$, d.h. eine wahre Aussage
gemeinsamer Anstieg: $f_a'(x) = a \cdot e^{a+x} \Rightarrow x = -1$ ergibt $f_a'(-1) = a \cdot e^{a-1}$, den Anstieg der Geraden

5.2 Nullstelle: $0 = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a \cdot e^{a-1}$ ergibt $x_0 = -2$
Die Fläche ist ein Dreieck, d.h. $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a \cdot e^{a-1} = 2a \cdot e^{a-1}$

4.2 Lösungen oH (02)

1 richtiges Kreuz: Feld 1, Feld 1, Feld 3, Feld 3, Feld 2

2.1 $0 = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 \Rightarrow x_0 = 2 \cdot \ln \frac{1}{2}$

2.2 Tangentengleichung aufstellen: $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow y = x + 1$

3.1 $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$, $|BC| = \sqrt{4^4 + 3^2 + 0+^2} = 5$
Da rechtwinklig: $A = \frac{1}{2} a \cdot b = 25$

3.2 $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot h \Rightarrow h = 6$
x und y können beliebig gewählt werden, da das Volumen nur von der z-Komponente von S abhängt. Damit kann z.B. $S(3|3|3+6)$ sein

4.1 sieben mal Drehen und niemals blau getroffen

4.2 $\left(\begin{array}{c} 10 \\ 2 \end{array} \right) \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$

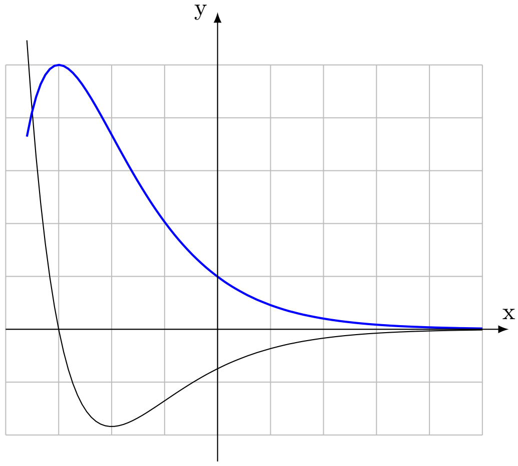
4.3 Die Aussage ist falsch. Die Wahrscheinlichkeit bleibt bei jedem neuen Versuch gleich. Die Versuche sind unabhängig. Das Rad merkt sich die letzten Versuche nicht.

5.1
$$\int_0^2 (-x^3 + 12x)dx = \left[\frac{-x^4}{4} + 6x^2 \right]_0^2 = 20$$

5.2 Gerade y=mx+n geht durch den Punkt $P(2|16)$, d.h. $16 = 2m + n$ und $n = 16 - 2m$.
Da unter der Funktion im gegebenen Intervall die Fläche 20 ergibt, muss die Fläche unter der linearen Funktion 40 sein:
$\int_0^2 (mx + 16 - 2m)dx = 40 \Rightarrow m = -4$ Damit wird n = 24 und $S_y(0|24)$

4.3 Lösungen oH (03)

1 richtiges Kreuz: Feld 4, Feld 1, Feld 2, Feld 2, Feld 4



2

Stammfunktion blau
Begründung: Hochstelle von F ist Nullstelle von f; Hochpunkt wegen Vorzeichenwechsel von + zu -; am Minimum von f liegt Wendepunkt; Auslauf der Kurve achsenparallel, wegen kleinerem Anstieg

3.1 eine Gleichung der Ebene: $3x + 6y + 4z – 12 = 0$ (enthält alle Spurpunkte)

3.2 Nachweis: $3 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{1}{2} – 12 = 0$ ist wahre Aussage.

4 Ansatz für den Anteil:
60% der Hälfte sind 30% des Ganzen, verbleiben 20% kleine Männer um auf 60% Männer zu kommen, fehlen noch 40 %

5 Ansatz für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{gleiche Augenzahlen}) + P(\text{zwei Primzahlen}) – P(\text{zwei gleiche Primzahlen})$$

Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$