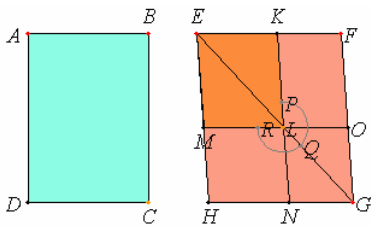


II. Buch der Elemente Definitionen

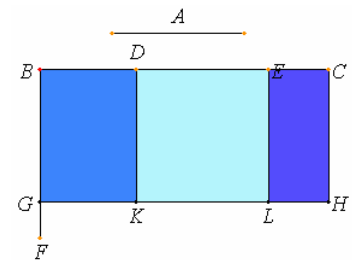


1. Von jedem rechtwinkligen Parallelogramm sagt man, dass es von den beiden den rechten Winkel umfassenden Seite **umfasst** das **Rechteck aus** den Seiten werden.

2. In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um seine Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen ein **Gnomon** heißen.

§ 1 (L. 1)

Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.

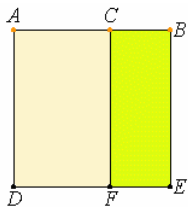


Die zwei Strecken seien A, BC; man teile BC beliebig, in den Punkten D, E. Ich behaupte, dass $A \cdot BC = A \cdot BD + A \cdot DE + A \cdot EC$.

Man ziehe nämlich von B aus $BF \perp BC$, trage $BG = A$ ab, ziehe durch G $GH \parallel BC$ und durch D, E, $CD \parallel BG$, $EL \parallel BG$. Hier ist Parallelogramm $BH = BK + DL + EH$. BH ist nun $A \cdot BC$; denn es wird von GB, BC umfasst (II, Definition 1), und $BG = A$. Und BK ist $A \cdot BD$; denn es wird von GB, BD umfasst, und $BG = A$. Und DL ist $A \cdot DE$; denn DK , d.h. BG (I, 34) = A . Ähnlich ist EH schließlich $A \cdot EC$. Also ist $A \cdot BC = A \cdot BD + A \cdot DE + A \cdot EC - S$.

§ 2 (L. 2)

Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so sind die Rechtecke aus der ganzen Strecke und den beiden einzelnen Abschnitten zusammen dem Quadrat über der ganzen Strecke gleich.



Man teile die Strecke AB beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass $AB \cdot BC + BA \cdot AC = AB^2$.

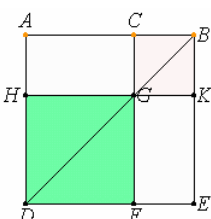
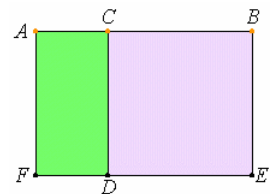
Man zeichne nämlich über AB das Quadrat ADEB und ziehe durch C $CF \parallel AD$ oder BE. Hier ist Parallelogramm $AE = AF + CE$; AE ist nun AB^2 . Und AF ist $BA \cdot AC$; denn es wird von DA, AC umfasst, und $AD = AB$. Und CE ist $AB \cdot BC$; denn $BE = AB$. Also sind $BA \cdot AC + AB \cdot BC = AB^2 - S$.

§ 3 (L. 3)

Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenanntem Abschnitt zusammen gleich.

Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.

Man zeichne nämlich über CB das Quadrat CDEB, verlängere ED nach F und ziehe durch A $AF \parallel CD$ oder BE. Hier ist Parallelogramm $AE = AD + CE$. AE ist nun $AB \cdot BC$, denn es wird von AB, BE umfasst, und $BE = BC$. Und AD ist $AC \cdot CB$; denn $DC = CB$. Und DB ist CB^2 . Also ist $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2 - S$.



§ 4 (L. 4)

Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.

Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 AC \cdot CB$.

Man zeichne nämlich über AB das Quadrat ADEB, ziehe BD, ferner durch C CF

|| AD oder EB und durch G HK || AB oder DE.

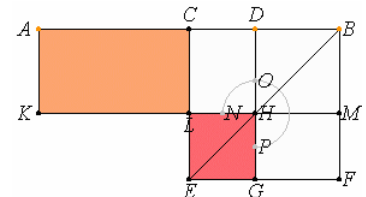
Da CF || AD, und BD sie schneidet, so ist der äußere Winkel CGB dem innen gegenüberliegenden ADB gleich (I, 29). Aber ADB = ABD, da die Seite BA = AD (I, 5); also ist auch $\angle CGB = GBC$ (Axiom 1), so dass auch die Seite BC = der Seite CG (I, 6). Andererseits ist $CB = GK$ (I, 34) und $CG = KB$; also ist auch $GK = KB$ (Axiom 1); also ist CGKB gleichseitig. Ich behaupte, dass es auch rechtwinklig ist. Da nämlich $CG \parallel BK$ und die gerade Linie CB sie schneidet, so sind $\angle KBC + GCB = 2 R.$ (I, 29).

KBC ist aber ein Rechter; also ist auch BCG ein Rechter (Axiom 3); daher sind auch die gegenüberliegenden Winkel CGK, GKB Rechte (I, 34). CGKB ist also rechtwinklig. Die Gleichseitigkeit ist oben bewiesen. Also ist es ein Quadrat, und zwar über CB. Aus demselben Grunde ist auch HF ein Quadrat, und zwar über HG, d.h. über AC (I, 34); HF, KC sind also AC^2, CB^2 . Da ferner Parallelogramm $AG = GE$ (I, 43) und $AG = AC \cdot CB$, weil $GC = CB$, so ist auch $GE = AC \cdot CB$, also $AG + GE = 2 AC \cdot CB$. Man hat aber auch AC^2, CB^2 , nämlich HF, CK; also sind $HF + CK + AG + GE = AC^2 + CB^2 + 2 AC \cdot CB$. HF, CK, AG, GE bilden aber zusammen ADEB, d.h. AB^2 . Also ist $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 AC \cdot CB.$ – S.

Zusatz: Hiernach ist klar, dass in jedem Quadrat die Parallelogramme um die Diagonale Quadrate sind.

§ 5 (L. 5)

Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.



Eine Strecke AB teile man in gleiche Abschnitte in C und in ungleiche in D. Ich behaupte, dass $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$.

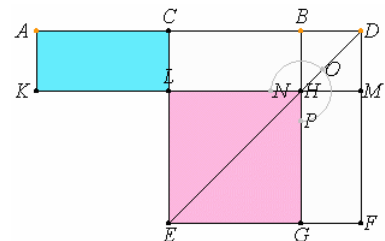
Man zeichne über CD das Quadrat CEFB, ziehe BE, ferner durch D DG || CE oder BF, ebenso durch H KM || AB oder EF, und ebenso durch A AK || CL oder BM. Hier ist die Ergänzung CH der Ergänzung HF gleich (I, 43); man füge daher DM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm CM dem ganzen DF gleich. Andererseits ist Parallelogramm $CM = AL$, da $AC = CB$ (I, 36); also ist auch Parallelogramm $AL = DF$. Man füge CH beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm $AH =$ Gnomon NOP (II, Definition 2). AH ist aber $AD \cdot DB$; denn $DH = DB$ (II, 4); also ist Gnomon $NOP = AD \cdot DB$. Man füge $LG = CD^2$ beiderseits hinzu; dann sind Gnomon $NOP + LG = AD \cdot DB + CD^2$. Gnomon NOP und LG bilden aber zusammen das Quadrat CEFB, d.h. CB^2 . Also sind $AD \cdot DB + CD^2 = CB^2.$ – S.

§ 6 (L. 6)

Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.

Eine Strecke AB halbiere man im Punkte C und setze ihr eine Strecke BD gerade an. Ich behaupte, dass $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2$.

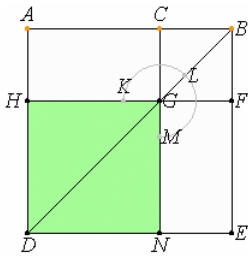
Man zeichne über CD das Quadrat CEFD, ziehe DE, ferner durch Punkt B BG || EC oder DF, durch Punkt H KM || AB oder EF, schließlich durch A AK CL oder DM. Da hier $AC = CB$, ist auch Parallelogramm $AL = CH$ (I, 36). Andererseits ist Parallelogramm $CH = HF$ (I, 43); also ist auch Parallelogramm $AL = HF$. Man füge CM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm $AM =$ Gnomon NOP. AM ist aber $AD \cdot DB$; denn $DM = DB$; also ist Gnomon $NOP = AD \cdot DB$. Man füge $LG = BC^2$ beiderseits hinzu; dann sind $AD \cdot DB + CB^2 =$ Gnomon $NOP + LG$. Gnomon NOP und LG bilden aber zusammen das Quadrat CEFD, d.h. CD^2 . Also sind $AD \cdot DB + CB^2 = CD^2.$ – S.



§ 7 (L. 7)

Teilt man eine Strecke, wie er gerade trifft, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke und über einem ihrer Abschnitte beide zusammen gleich zweimal dem

Rechteck aus der ganzen Strecke und dem genannten Abschnitt und dem Quadrat über dem anderen Abschnitt zusammen.



Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass $AB^2 + BC^2 = 2 AB \cdot AC + CA^2$.

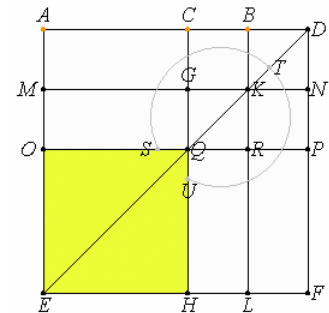
Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig. Hier ist Parallelogramm AG = GE (I, 43); man füge daher CF beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm AF dem ganzen CE gleich; also $AF + CE = 2 AF$.

Andererseits bilden $AF + CE$ Gnomon KLM + Quadrat CF; also sind Gnomon KLM + CF = $2 AF$. $2 AF$ ist aber auch $2 AB \cdot BC$; denn $BF = BC$.

Also sind Gnomon KLM + Quadrat CF = $2 AB \cdot BC$. Man füge DG, d.h. AC^2 beiderseits hinzu; dann sind Gnomon KLM und die Quadrate BG, GD zusammen = $2 AB \cdot BC + AC^2$. Gnomon KLM und Quadrate BG, GD bilden aber zusammen ADEB + CF, d.h. $AB^2 + BC^2$. Also sind $AB^2 + BC^2 = 2 AB \cdot BC + AC^2$. - S.

§ 8 (L. 8)

Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist viermal das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte zusammen mit dem Quadrat über dem anderen Abschnitt dem über der ganzen Strecke und genanntem Abschnitt vereint gezeichneten Quadrat gleich.

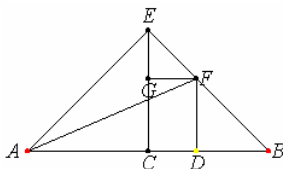


Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass $4 AB \cdot BC + AC^2 = (AB + BC)^2$. Man setze nämlich BD an AB gerade an, mache $BD = CB$, zeichne über AD das Quadrat AEFD und zeichne die Doppelfigur fertig.

Da hier $CB = BC$, andererseits $CB = GK$ und $BD = KN$ (I, 34), so ist auch $GK = KN$. Aus demselben Grunde ist auch $QR = RP$. Und da sowohl $BC = BD$ als auch $GK = KN$, so ist auch sowohl Parallelogramm $CK = KD$ als auch Parallelogramm $GR = RN$ (I, 36). Andererseits ist $CK = RN$; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm CP (I, 43). Also ist auch Parallelogramm $KD = GR$ (Axiom 1); also sind DK, CK, GR, RN alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also = $4 CK$. Ebenso ist, da $CB = BD$, andererseits $BD = BK$, d.h. = CG , und $CB = GK$, d.h. = GQ , auch $CG = GQ$. Und da sowohl $CG = GQ$ also auch $QR = RP$, ist auch sowohl Parallelogramm $AG = MQ$ als auch Parallelogramm $QL = RF$. Andererseits ist $MQ = QL$; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm ML. Also ist auch Parallelogramm $AG = RF$; also sind AG, MQ, QL, RF alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also = $4 AG$.

Wie oben bewiesen, sind $CK + KD + GR + RN = 4 CK$; also sind die acht Flächenstücke, die den Gnomon STU bilden, = $4 AK$. Da AK hier $AB \cdot BD$ ist, weil $BK = BD$, so ist $4 AB \cdot BD = 4 AK$. Wie oben bewiesen, ist auch Gnomon STU = $4 AK$; also ist $4 AB \cdot BD =$ Gnomon STU. Man füge $OH = AC^2$ beiderseits hinzu; dann sind $4 AB \cdot BD + AC^2 =$ Gnomon STU + OH. Andererseits bilden Gnomon STU + OH das Quadrat AEFD, d.h. AD^2 ; also sind $4 AB \cdot BD + AC^2 = AD^2$. Aber $BD = BC$; also sind $4 AB \cdot BC + AC^2 = AD^2$, d.h. = $(AB + BC)^2 - S$.

§ 9 (L. 9)



Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so sind die Quadrate über den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen doppelt so groß wie die Quadrate über der Hälfte und über der Strecke zwischen den Teilpunkten zusammen.

Eine Strecke AB teile man in gleiche Abschnitte in C und in ungleiche in D. Ich behaupte, dass $AD^2 + DB^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$.

Man ziehe CE von C aus \perp AB und mache es sowohl AC als auch CB gleich, ziehe ferner EA, EB sowie durch D DF \parallel EC und durch F FG \parallel AB, und ziehe AF.

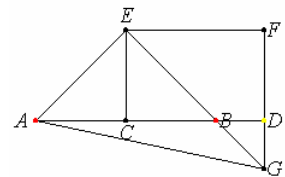
Da hier $AC = CE$, ist auch $\angle EAC = \angle AEC$ (I, 5). Und da der Winkel bei C ein Rechter ist, so sind die übrigen $\angle EAC + \angle AEC = 1 R.$ (I, 32); dabei sind sie gleich; also ist jeder der beiden $\angle CEA, CAE = \frac{1}{2} R.$ Aus demselben Grunde ist auch jeder der beiden $\angle CEB, EBC = \frac{1}{2} R.$; der ganze $\angle AEB$ ist also ein Rechter. Und da $\angle GEF = \frac{1}{2} R.$, $\angle EGF$ aber ein Rechter, weil dem innen

gegenüberliegenden $\angle ECB$ gleich (I, 29), so ist der letzte $\angle EFG = \frac{1}{2} R.$ (I, 32); also ist $\angle GEF = \angle EFG$; folglich auch die Seite $EG = GF$ (I, 6). Ebenso ist, da der Winkel bei B = $\frac{1}{2} R.$ und FDB ein Rechter, weil wieder dem innen gegenüberliegenden $\angle ECB$ gleich, der letzte $\angle BFD = \frac{1}{2} R.$; also ist der Winkel bei B = $\angle DFB$; folglich auch Seite $FD =$ Seite DB .
 Und da $AC = CE$, ist auch $AC^2 = CE^2$; also sind $AC^2 + CE^2 = 2 AC^2$. Aber $AC^2 + CE^2 = EA^2$; denn $\angle ACE$ ist ein Rechter (I, 47); also ist $EA^2 = 2 AC^2$. Ebenso ist, da $EG = GF$, auch $EG^2 = GF^2$; also $EG^2 + GF^2 = 2 GF^2$. Aber $EG^2 + GF^2 = EF^2$; also ist $EF^2 = 2 GF^2$. Aber $GF = CD$ (I, 34); also ist $EF^2 = 2 CD^2$. Aber auch $EA^2 = 2 AC^2$; also sind $EA^2 + EF^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$. Aber $EA^2 + EF^2 = AF^2$; denn $\angle AEF$ ist ein Rechter (I, 47); also ist $AF^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$. Aber $AF^2 = AD^2 + DF^2$; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); also sind $AD^2 + DF^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$. Aber $DF = DB$; also sind $AD^2 + DB^2 = 2 (AC^2 + CD^2) - S.$

§ 10 (L. 10)

Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke mit Verlängerung und über der Verlängerung beide zusammen doppelt so groß wie das Quadrat über der Hälfte und das über der Hälfte und Verlängerung vereint gezeichnete Quadrat zusammen.

Eine Strecke AB halbiere man in C und setze ihr eine Strecke BD gerade an. Ich behaupte, dass $AD^2 + DB^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$.



Man ziehe CE von Punkt C aus \perp AB und mache es sowohl AC als auch CB gleich; ziehe ferner EA, EB sowie durch E EF \parallel AD und durch D FD \parallel CE. Da hier parallele gerade Linien EC, FD von der geraden Linie EF geschnitten werden, so sind $\angle CEF + \angle EFD = 2 R.$ (I, 29); also sind $\angle FEB + \angle EFD < 2 R.$ (Axiom 8); von Winkeln aus, die zusammen $< 2 R.$ sind, verlängerte treffen sich aber (Postulat 5); also müssen sich EB, FD bei der Verlängerung über B, D hinaus treffen. Man verlängere sie, sie mögen sich in G treffen; und man ziehe AG.

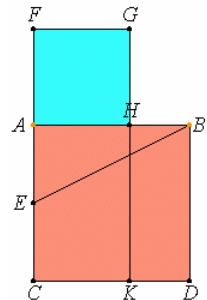
Da hier $AC = CE$, ist auch $\angle EAC = \angle AEC$ (I, 5); und der Winkel bei C ist ein Rechter; also ist jeder der beiden $\angle EAC, \angle AEC = \frac{1}{2} R.$ (I, 32). Aus demselben Grunde ist auch jeder der beiden $\angle CEB, \angle ECB = \frac{1}{2} R.$; also ist $\angle AEB$ ein Rechter. Ferner ist, da $\angle ECB = \frac{1}{2} R.$, auch $\angle DBG = \frac{1}{2} R.$ (I, 15); und $\angle BDG$ ist ein Rechter, er ist nämlich = $\angle DCE$ als Wechselwinkel (I, 29); also ist der letzte $\angle DGB = \frac{1}{2} R.$ (I, 32). Also ist $\angle DGB = \angle DBG$, folglich Seite $BD =$ Seite GD (I, 6). Ebenso ist, da $\angle EGF = \frac{1}{2} R.$ und der Winkel bei F ein Rechter, weil dem gegenüberliegenden Winkel bei C gleich (I, 34), der letzte $\angle FEG = \frac{1}{2} R.$ (I, 32). Also ist $\angle EGF = \angle FEG$, folglich Seite $GF =$ Seite EF (I, 6). Da ferner $EC = CA$ und $EC^2 = CA^2$, so sind $EC^2 + CA^2 = 2 CA^2$. Aber $EC^2 + CA^2 = EA^2$ (I, 47); also ist $EA^2 = 2 AC^2$. Ebenso ist, da $FG = EF$, auch $FG^2 = FE^2$; also sind $GF^2 + FE^2 = 2 EF^2$. Aber $GF^2 + FE^2 = EG^2$; also ist $EG^2 = 2 EF^2$. Aber $EF = CD$ (I, 34); also $EG^2 = 2 CD^2$.

Wie oben bewiesen, ist $EA^2 = 2 AC^2$; also sind $EA^2 + EG^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$. Aber $EA^2 + EG^2 = AG^2$ (I, 47); also ist $AG^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$. Aber $AG^2 = AD^2 + DG^2$ (I, 47); also sind $AD^2 + DG^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$. Aber $DG = DB$; also sind $AD^2 + DB^2 = 2 (AC^2 + CD^2) - S.$

§ 11 (A. 1)

Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

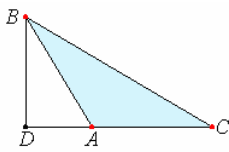
Die gegebene Strecke sei AB. Man soll AB so teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.



Man zeichne über AB das Quadrat ABDC, halbiere AC im Punkte E, ziehe BE, verlängere CA nach F, mache $EF = BE$, zeichne über AF der Quadrat FH und ziehe GH nach K durch; ich behaupte, dass man AB in H so geteilt hat, dass $AB \cdot BH = AH^2$.

Da die Strecke AC nämlich in E halbiert und FA ihr angesetzt ist, so ist $CF \cdot FA + AE^2 = EF^2$ (II, 6). Aber $EF = EB$; also ist $CF \cdot FA + AE^2 = EB^2$. Aber $EB^2 = BA^2 + AE^2$; denn der Winkel bei A ist ein Rechter (I, 47); also ist $CF \cdot FA + AE^2 = BA^2 + AE^2$. Man nehme das gemeinsame AE^2 weg; dann ist der Rest, $CF \cdot FA = AB^2$. $CF \cdot FA$ ist hier FK ; denn $AF = FG$; und AB^2 ist AD ; also ist $FK = AD$. Man nehme Parallelogramm AK beiderseits weg; dann ist der Rest, Parallelogramm FH = HD. HD ist hier $AB \cdot BH$; denn $AB =$

BD; und FH ist AH^2 ; also ist $AB \cdot BH = HA^2$. Man hat also eine gegebene Strecke AB in H so geteilt, dass $AB \cdot BH = HA^2$ - dies hatte man ausführen sollen.



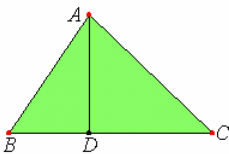
§ 12 (L. 11)

An jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer als die Quadrate über den den stumpfen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um den stumpfen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot

außen abgeschnittenen Strecke an der stumpfen Ecke.

ABC sei ein stumpfwinkliges Dreieck mit dem stumpfen Winkel BAC; und vom Punkte B sei auf die Verlängerung von CA das Lot BD gefällt. Ich behaupte, dass BC^2 um $2 CA \cdot AD$ größer ist als $BA^2 + AC^2$.

Da die Strecke CD im Punkte A beliebig geteilt ist, so ist $DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 CA \cdot AD$ (II, 4). Man füge DB^2 beiderseits hinzu; dann sind $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 CA \cdot AD$. Aber $CD^2 + DB^2 = CB^2$; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); und $AD^2 + DB^2 = AB^2$ (I, 47); also ist $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2 CA \cdot AD$. Folglich ist CB^2 um $2 CA \cdot AD$ größer als $CA^2 + AB^2$ - S.



§ 13 (L. 12)

An jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner als die Quadrate über den diesen spitzen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um diesen spitzen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot

innen abgeschnittenen Strecke an dieser spitzen Ecke.

ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel bei B; und vom Punkte A sei auf BC das Lot AD gefällt. Ich behaupte, dass AC^2 um $2 CB \cdot BD$ kleiner ist als $CB^2 + BA^2$.

Da die Strecke CB in D beliebig geteilt ist, so sind $CB^2 + BD^2 = 2 CB \cdot BD + DC^2$ (II, 7). Man füge DA^2 beiderseits hinzu; dann sind $CB^2 + BD^2 + DA^2 = 2 CB \cdot BD + AD^2 + DC^2$. Aber $BD^2 + DA^2 = AB^2$; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); und $AD^2 + DC^2 = AC^2$ (I, 47); also sind $CB^2 + BA^2 = AC^2 + 2 CB \cdot BD$. Folglich ist AC^2 allein um $2 CB \cdot BD$ kleiner als $CB^2 + BA^2$ - S.

§ 14 (A. 2)

Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.

Die gegebene geradlinige Figur sei A. Man soll ein der geradlinigen Figur A gleiches Quadrat errichten.

Man errichte ein der geradlinigen Figur A gleiches rechtwinkliges Parallelogramm BD (I, 45). Wenn hier $BE = ED$, dann wäre die Aufgabe schon ausgeführt; denn dann hat man ein der geradlinigen Figur A gleiches Quadrat errichtet, nämlich BD.

Anderenfalls ist eine der Strecken BE, ED größer. B E sei die größere, man verlängere sie nach F, mache $EF = ED$, halbiere BF in G, zeichne mit G als Mittelpunkt und einer der Strecken GB, GF als Abstand den Halbkreis BHF, verlängere DE nach H und ziehe GH.

Da hier die Strecke BF sowohl in gleiche Abschnitte geteilt ist in G, als auch in ungleiche in E, so sind $BE \cdot EF + EG^2 = GF^2$ (II, 5). Aber $GF = GH$ (I, Definition 15); also sind $BE \cdot EF + GE^2 = GH^2$. Aber $GH^2 = HE^2 + EG^2$ (I, 47); also sind $BE \cdot EF + GE^2 = HE^2 + EG^2$. Man nehme das gemeinsame GE^2 weg; dann ist der Rest, $BE \cdot EF = EH^2$. $BE \cdot EF$ ist aber BD ; denn $EF = ED$; also ist Parallelogramm $BD = HE^2$. BD ist aber der geradlinigen Figur A gleich. Also ist auch die geradlinige Figur A dem Quadrat gleich, das man über EH zu zeichnen hätte. Also hat man sich ein der gegebenen geradlinigen Figur A gleiches Quadrat verschafft, nämlich das, welches man über EH zu zeichnen hätte - dies hatte man ausführen sollen.

