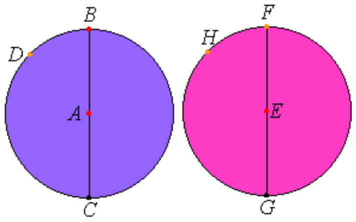
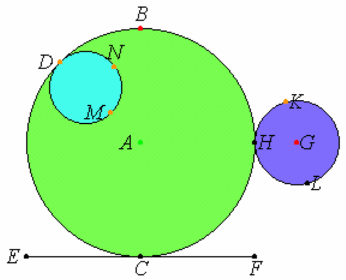
III. Buch der Elemente
Definitionen



1. **Gleiche** Kreise sind solche, deren Durchmesser oder deren Radien gleich sind.



2. Dass sie den Kreis **berühre** (**Tangente sei**), sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet.

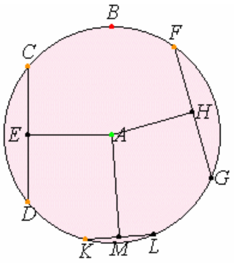
3. Dass sie **einander berühren**, sagt man von Kreisen, die einander treffen, ohne einander zu schneiden.

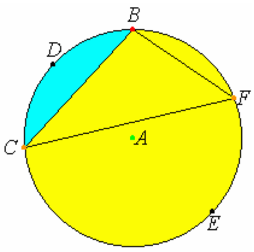
4. Von Strecken im Kreis (**Sehnen**) sagt man, dass sie vom Mittelpunkt **gleich weit abstehen**, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällten Lote gleich sind;

5. Dass sie **weiter abstehe**, sagt man von der, auf die das größere Lot fällt.

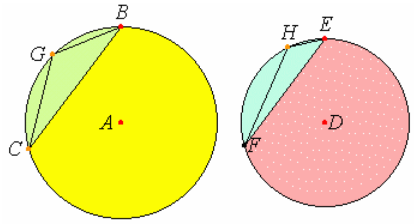
6. **Kreisabschnitt** ist die von einer Strecke und einem Kreisbogen begrenzte Figur.

7. **Winkel des Abschnitts** ist der von der Strecke und dem Kreisbogen umfasste;



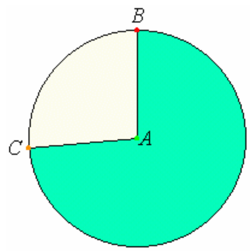


8. **Winkel im Abschnitt** ist der Winkel, der, wenn man auf dem Bogen des Abschnitts einen Punkt wählt und vom ihm nach den Enden der Grundstrecke des Abschnitts gerade Linien zieht, von diesem umfasst wird.



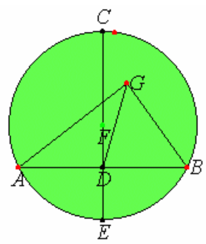
9. Wenn die einen Winkel umfassenden geraden Linien einen Bogen abgrenzen, sagt man, der Winkel **stehe über** dem Bogen.

10. **Kreisausschnitt** ist die Figur, die wenn ein Winkel seinen Schenkel im Mittelpunkt des Kreises hat, von den den Winkel umfassenden geraden Linien und dem von ihnen abgegrenzten Bogen umfasst wird.



11. **Ähnliche Kreisabschnitte** sind solche, die gleiche Winkel fassen, oder in denen die Winkel einander gleich sind.

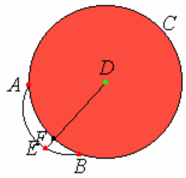
§ 1 (A. 1)
Zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden.



Der gegebene Kreis sei ABC. Man soll zum Kreise ABC den Mittelpunkt finden. Man ziehe in ihn, wie es gerade trifft, eine Sehne AB, halbiere sie im Punkte D, ziehe ferner DC von D aus $\perp$ AB, ziehe DC nach E durch und halbiere CE in F; ich behaupte, dass F der Mittelpunkt des Kreises ABC ist.
Wäre dies nämlich nicht der Fall, sondern etwa G Mittelpunkt, dann ziehe man GA, GD, GB. Da AD = DB und DG gemeinsam wäre, wären zwei Seiten AD, DG zwei Seiten GD, DB (überkreuz) entsprechend gleich; auch die Grundlinien GA, GB wären gleich als Radien; also wäre $\angle$ ADG = $\angle$ GDB (I, 8). Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Definition 10); also wäre GDB ein Rechter. Aber auch FDB ein Rechter; also wäre FDB = GDB (Postulat 4), der größere Winkel (Axiom 8) dem

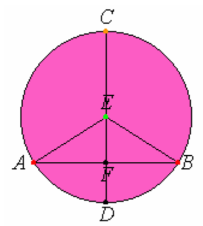
kleineren; dies ist aber unmöglich. G ist also nicht Mittelpunkt des Kreises ABC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch sonst kein Punkt außer F es sein kann. Also ist Punkt F der Mittelpunkt (I, Definition 16) des Kreises ABC.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass wenn im Kreise eine Sehne irgendeine andere mitten und rechtwinklig schneidet, dann der Mittelpunkt des Kreises auf der schneidenden Sehne liegt. – Das hatte man ausführen sollen.

§ 2 (L. 1)
Wählt man auf dem Umfang eines Kreises zwei beliebige Punkte, so muss die die Punkte verbindende Strecke innerhalb des Kreises fallen.



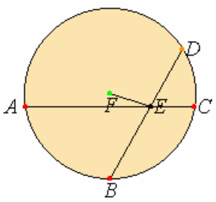
ABC sei ein Kreis, man wähle auf seinem Umfang zwei beliebige Punkte A, B. Ich behaupte, dass die A mit B verbindende Strecke innerhalb des Kreises fallen muss.
Täte sie dies nämlich nicht, sondern fiele, etwa als AEB, außerhalb, so verschaffe man sich den Mittelpunkt des Kreises ABC (III, 1), er sei D; ferner ziehe man DA, DB und ziehe DFE durch.
Da hier DA = DB, so ist auch ∠ DAE = DBE (I, 5); und da am Dreieck DAE eine Seite verlängert ist, nämlich AEB, so ist ∠ DEB > DAE (I, 16). Aber DAE = DBE; also ist DEB > DBE. Dem größeren Winkel liegt aber die größere Seite gegenüber (I, 19); also ist DB > DE. Aber DB = DF; also ist DF > DE, die als kleinere angenommene Strecke größer als die größere (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also kann die A mit B verbindende Strecke nicht außerhalb des Kreises fallen. Ähnlich lässt sich zeigen, dass sie auch nicht auf den Umfang selbst fallen kann; also fällt sie innerhalb – S.

§ 3 (L. 2)
Wenn in einem Kreis eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie eine nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehne halbiert, schneidet sie sie auch rechtwinklig; und wenn sie sie rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch.



ABC sei ein Kreis, in ihm halbiere eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie CD eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne AB im Punkte F. Ich behaupte, dass sie sie auch rechtwinklig schneidet.
Man verschaffe sich nämlich den Mittelpunkt des Kreises ABC, er sei E, und ziehe EA, EB. Da AF = FB ist und FE gemeinsam, sind zwei Seiten zwei Seiten gleich; ferner Grundlinie EA = Grundlinie EB; also ist ∠ AFE = ∠ BFE (I, 8). Wenn aber eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter (I, Definition 19); also sind AFE, BFE beide Rechte. Also schneidet CD, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, AB, eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne, indem sie sie halbiert, auch rechtwinklig.
Zweitens schneide CD AB rechtwinklig; ich behaupte, dass sie sie auch halbiert, d.h. dass AF = FB. Man konstruiere ebenso. Da dann EA = EB, ist auch ∠ EAF = EBF (I, 5). Aber auch AFE = BFE als Rechte; man hat also zwei Dreiecke EAF, EFB, in denen zwei Winkel zwei Winkeln gleich sind und die einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten, nämlich die ihnen gemeinsame EF, einander gleich; also müssen in ihnen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein (I, 26); also ist AF = FB – S.

§ 4 (L. 3)
Zwei nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehnen eines Kreises können einander beim Schnitt nicht halbieren.

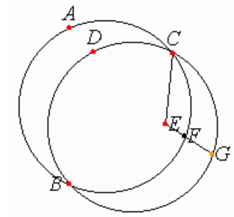


ABCD sei ein Kreis, in ihm mögen zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen AC, BD einander in E schneiden. Ich behaupte, dass sie einander nicht halbieren.
Wenn dies nämlich möglich wäre, mögen sie einander halbieren, so dass sowohl AE = EC als auch BE = ED; man verschaffe sich dann den Mittelpunkt des Kreises ABCD, er sei F, und ziehe FE.
Da dann eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, nämlich FE, eine

nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne, nämlich AC, halbierte, schnitte sie sie auch rechtwinklig (III, 3); also wäre FEA ein Rechter. Ebenso schnitte die gerade Linie FE, da sie die Sehne BD halbierte, diese auch rechtwinklig; also wäre FEB ein Rechter. Wie oben bewiesen, wäre auch FEA ein Rechter, also wäre FEA = FEB, der kleinere Winkel dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also können AC, BD einander nicht halbieren – S.

§ 5 (L. 4)

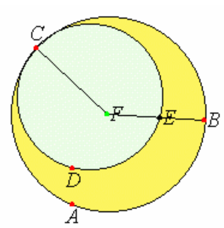
Wenn zwei Kreise einander schneiden, können sie nicht denselben Mittelpunkt haben.



Zwei Kreise ABC, CDG mögen einander schneiden, in den Punkten B, C. Ich behaupte, dass sie nicht denselben Mittelpunkt haben können.
Wäre dies nämlich möglich, so sei er E; dann verbinde man EC und ziehe durch EFG durch, wie es gerade trifft. Da Punkt E Mittelpunkt des Kreises ABC sein soll, wäre EC = EF. Ebenso wäre, da Punkt E Mittelpunkt des Kreises CDG sein soll, EC = EG. Wie oben bewiesen, wäre EC = EF; also wäre auch EF = EG, die kleinere Strecke der größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also ist Punkt E nicht Mittelpunkt der Kreise ABC und CDG – S.

§ 6 (L. 5)

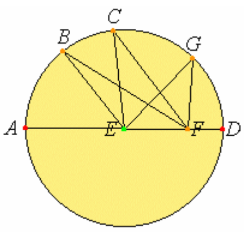
Wenn zwei Kreise einander berühren, können sie nicht denselben Mittelpunkt haben.



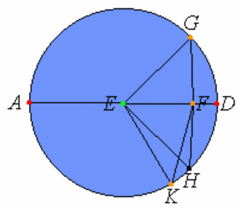
Zwei Kreise ABC, CDE mögen einander berühren, im Punkte C. Ich behaupte, dass sie nicht denselben Mittelpunkt haben können.
Wäre dies nämlich möglich, so sei er F; dann verbinde man FC und ziehe FEB durch, wie es gerade trifft. Da Punkt F Mittelpunkt des Kreises ABC sein soll, wäre FC = FB. Ebenso wäre, da Punkt F Mittelpunkt des Kreises CD sein soll, FC = FE. Wie oben bewiesen, wäre FC = FB; also wäre auch FE = FB, die kleinere der größeren Strecke (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also ist Punkt F nicht Mittelpunkt der Kreise ABC und CDE – S.

§ 7 (L. 6)

Wählt man auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt, der nicht der Kreismittelpunkt ist, und zieht von dem Punkte bis zum Kreis irgendwelche Strecken, so muss die die größte sein, auf der der Mittelpunkt liegt, die kleinste die Reststrecke; und von den anderen ist immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, größer als die entferntere; und von dem Punkt lassen sich an gleichen Strecken nur immer zwei bis zum Kreise ziehen, beiderseits der kleinsten.

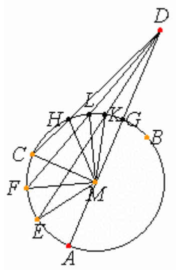


ABCD sein ein Kreis, AD ein Durchmesser desselben; auf AD wähle man einen Punkt F, der nicht der Kreismittelpunkt ist; der Kreismittelpunkt sei E; ferner ziehe man von F bis zum Kreise ABCD irgendwelche Strecken FB, FC, FG.
Ich behaupte, dass FA die größte und FD die kleinste ist, von den anderen FB > FC und FC > FG. Man ziehe BE, CE, GE.
Da in jedem Dreieck zwei Seiten zusammen größer sind als die letzte (I, 20), sind EB + EF > BF. Aber AE = BE also BE + EF = AF; also ist AF > BF. Da weiter BE = CE ist und FE gemeinsam, so sind zwei Seiten BE, EF zwei Seiten CE, EF gleich; dabei ist ∠ BEF > ∠ CEF; also ist Grundlinie BF > Grundlinie CF (I, 24). Aus demselben Grunde ist auch CF > FG. Ebenso sind, da GF + FE > EG (I, 20) und EG = ED, GF + FE > ED. Man nehme EF beiderseits weg; dann ist der Rest GF > Rest FD. Also ist FA die größte Strecke, FD die kleinste, FB > FC und FC > FG.



Ich behaupte, dass ferner sich vom Punkte F bis zum Kreise ABCD an gleichen Strecken nur immer zwei ziehen lassen, beiderseits der kleinsten FD.
Man trage an die gerade Linie EF im Punkte E auf ihr ∠ FEH = GEF an und ziehe FH. Da dann GE = EH ist und EF gemeinsam, sind zwei Seiten GE, EF zwei Seiten HE, EF gleich; und ∠ GEF = ∠ HEF; also ist Grundlinie FG = Grundlinie FH (I, 4). Ich behaupte nun, dass sich vom Punkte F keine

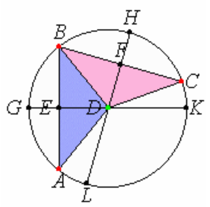
weitere Strecke, die = FG wäre, bis zum Kreise ziehen lässt. Ware dies nämlich möglich, dann sei FK so gezogen. Da dann FK = FG und FH = FG, so wäre auch FK = FH, die der durch den Mittelpunkt gehenden nähere Strecke der entfernteren gleich; dies ist aber unmöglich. Also lässt sich von Punkte F bis zum Kreise keine weitere Strecke, die = GF wäre, ziehen, also nur eine einzige – S.



§ 8 (L. 7)

Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von dem Punkte irgendwelche gerade Linien zum Kreise durch, eine davon durch den Mittelpunkt, die übrigen beliebig, so ist unter den zum hohlen Bogen gezogenen Strecken die größte die durch den Mittelpunkt, von den anderen immer die, welche der durch den Mittelpunkt gehenden näher liegt, größer als die entferntere; unter dem zum erhabenen Bogen gezogenen Strecken hingegen die kleinste die zwischen dem Punkt und dem Durchmesser, von den anderen immer die, welche der kleinsten näher liegt, kleiner als die entferntere; und vom dem Punkte lassen sich an gleichen Strecken nur immer zwei bis zum Kreise ziehen, beiderseits der kleinsten.

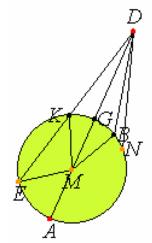
ABC sein ein Kreis; außerhalb ABC wähle man einen Punkt D und ziehe vom ihm irgendwelche gerade Linien DA, DE, DF, DC durch, DA soll durch den Mittelpunkt gehen. Ich behaupte, dass unter den zum hohlen Bogen AEFC gezogenen Strecken die größte die durch den Mittelpunkt, DA ist, ferner DE > DF und DF > DC, dass unter den zum erhabenen Bogen HLKG gezogenen Strecken hingegeben die kleinste DG ist, die zwischen dem Punkte und dem Durchmesser AG, und dass immer die, welche der kleinsten DG näher liegt, kleiner ist als die entferntere, DK < DL und DL < DH.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABC, er sei M, und ziehe ME, MF, MC, MK, ML, MH. Hier ist AM = EM; man füge daher MD beiderseits hinzu; dann ist AD = EM + MD; aber EM + MD > ED (I, 20); also ist auch AD > ED. Da ebenso ME = MF ist und MD gemeinsam, so sind EM, MD den Seiten FM, MD gleich; und ∠ EMD > ∠ FMD; also ist Grundlinie ED > Grundlinie FD (I, 24). Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch FD > CD; also ist DA die größte Strecke, DE > DF und DF > DC. Da weiter MK + KD > MD (I, 20) und MG = MK, so ist der Rest KD > Rest GD, folglich GD < KD. Und da im Dreieck MDL über der einen Seite MD zwei Strecken MK, KD innerhalb zusammengebracht sind, so sind MK + KD < ML + LD (I, 21). Aber MK = ML; also ist der Rest DK < Rest DL. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch DL < DH; also ist DG die kleinste Strecke, DK < DL und DL < DH.
Ich behaupte, dass ferner sich vom Punkte D bis zum Kreise an gleichen Strecken nur immer zwei ziehen lassen, beiderseits der kleinsten DG.
Man trage an die gerade Linie MD im Punkte M auf ihr ∠ DMB = ∠ KMD an und ziehe DB. Da dann MK = MB ist und MD gemeinsam, sind zwei Seiten KM, MD zwei Seiten BM, MD entsprechend gleich; und ∠ KMD = ∠ BMD; also ist Grundlinie DK = Grundlinie DB (I; 4). Ich behaupte nun, dass vom Punkte D sich keine weitere Strecke, die = DK wäre, bis zum Kreise ziehen lässt. Wäre dies nämlich möglich, dann sei eine so gezogen, etwa DN. Da dann DK = DN und DK = DB, so wäre auch DB = DN, die der kleinsten Strecke DG nähere der entfernteren gleich; wie oben bewiesen, ist dies aber unmöglich. Also lassen sich an gleichen Strecken nicht mehr als immer zwei vom Punkte D bis zum Kreise ABC ziehen, beiderseits der kleinsten DG – S.



§ 9 (L. 8)

Wählt man innerhalb eines Kreises einen Punkt und es lassen sich von dem Punkte bis zum Kreise mehr als zwei gleiche Strecke ziehe, so ist der gewählte Punkt der Mittelpunkt des Kreises.

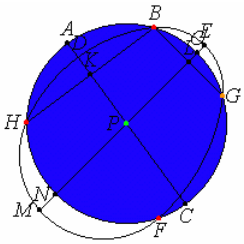
ABC sein ein Kreis, D ein Punkt innerhalb desselben, und von D seien mehr als zwei gleiche Strecken bis zum Kreise ABC gezogen, nämlich DA, DB, DC. Ich behaupte, dass Punkt D der Mittelpunkt des Kreises ABC ist.
Man ziehe nämlich AB, BC, halbiere sie in den Punkten E, F und ziehe die Verbindungslinien ED, FD durch nach den Punkten G, K, H, L. Da dann AE = EB ist und ED gemeinsam, sind zwei Seiten AE, ED zwei Seiten BE, ED gleich; und Grundlinie DA = Grundlinie DB; also ist ∠ AED = ∠ BED (I, 8). Also sind ∠



AED, BED beide Rechte (I, Definition 10); also schneidet GK die Sehne AB mitten und rechtwinklig. Und da, wenn im Kreise eine Sehne irgendeine andere mitten und rechtwinklig schneidet, der Mittelpunkt des Kreises auf der schneidenden Sehne liegen muss (III, 1, Zusatz), so liegt auf GK der Kreismittelpunkt. Aus demselben Grunde liegt der Mittelpunkt des Kreises ABC auch auf HL. Die geraden Linien GK, HL können nun außer dem Punkte D keinen weiteren gemein haben; also ist Punkt D der Mittelpunkt des Kreises ABC – S.

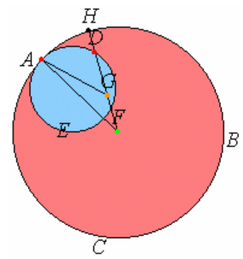
§ 10 (L. 9)
Ein Kreis kann einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

Wäre dies nämlich möglich, so schneide der Kreis ABC den Kreis DEF in mehr als zwei Punkten B, G, F, H; man ziehe dann die Strecken BH, BG und halbiere sei in den Punkten K, L; ferner ziehe man KC, LM von K, L aus rechtwinklig zu BH, BG und ziehe sie durch nach den Punkten A, E.

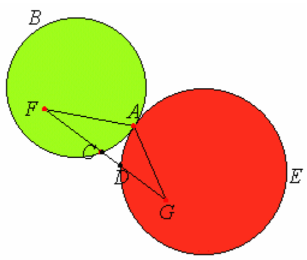


Da dann im Kreise ABC eine Sehne AC eine Sehne BH mitten und rechtwinklig schnitte, so läge der Mittelpunkt des Kreises ABC auf AC (III, 1, Zus.). Da ebenso in demselben Kreise ABC eine Sehne NO eine Sehne BG mitten und rechtwinklig schnitte, so läge der Mittelpunkt des Kreises ABC auf NO. Wie oben bewiesen, läge er auch auf AC. Die geraden Linien AC, NO treffen sich nun nirgends außer in P; also wäre auch P der Mittelpunkt des Kreises ABC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass P auch der Mittelpunkt des Kreises DEF wäre; also hätten zwei Kreise, die einander schneiden, nämlich ABC, DEF, denselben Mittelpunkt, nämlich P; dies ist aber unmöglich (III, 5) – S.

§ 11 (L. 10)
Wenn zwei Kreis einander innen berühren und man verschafft sich ihre Mittelpunkte, so muss die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gegebenenfalls verlängert den Berührungspunkt der Kreise treffen.

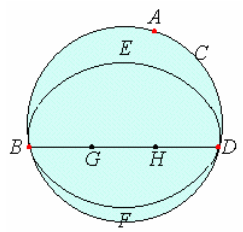


Zwei Kreise ABC, ADE mögen einander innen berühren im Punkte A; man verschaffe sich die Kreismittelpunkte F von ABC und G von ADE (III, 1). Ich behaupte, dass die Verbindungsstrecke von G mit F verlängert den Punkt A treffen muss.
Sie treffe ihn nämlich nicht, sondern verlaufe etwa wie FGH; dann ziehe man AF, AG. Dann wären AG + GF > FA (I, 20), d.h. > FH; man nehme daher FG beiderseits weg; dann wäre der Rest AG > Rest GH. Aber AG = GD; also wäre auch GD > GH, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. Also kann die F mit G verbindende gerade Linie nicht vorbeigehen; also muss sie den Berührungspunkt A treffen. Bei äußerer Berührung würden GA + AF > GF, also GD + HF > GF; dies ist aber unmöglich – S.



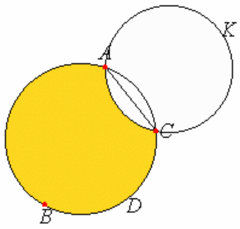
§ 12 (L. 11)
Wenn zwei Kreis einander außen berühren, muss die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte durch den Berührungspunkt gehen.

§ 13 (L. 12)
Ein Kreis kann einen Kreis nicht in mehr als einem Punkte berühren, einerlei ob er ihn innen oder außen berührt.

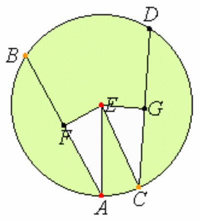


Wenn möglich, berühre nämlich der Kreis ABCD den Kreis EBFD zunächst innen in mehr Punkten als einem, nämlich D und B.
Man verschaffe sich die Kreismittelpunkte G von ABCD und H von EBFD. Dann müsste die G mit H verbindende Linie B und D treffen (III, 11); sie verlaufe wie BGHD. Da Punkt G der Mittelpunkt des Kreises ABCD sein soll, wäre BG = GD; also wäre BG > HD (Axiom 8); um so mehr wäre also BH > HD (Axiom 8). Ebenso wäre, da Punkt H der Mittelpunkt des Kreises EBFD sein soll, BH = HD; wie oben bewiesen, wäre die eine Strecke aber auch weit größer als

die andere; dies ist aber unmöglich. Also berührt ein Kreis den anderen innen nicht in mehr Punkten als einem.



Ich behaupte, dass er es auch außen nicht tut. Wenn möglich, berühre nämlich der Kreis ACK den Kreis ABCD außen in mehr Punkten als einem, nämlich A und C. Dann ziehe man AC. Da man dann auf dem Umfang jedes der beiden Kreise ABCD, ACK zwei beliebige Punkte A, C hätte, müsste die die Punkte verbindende Strecke innerhalb beider Kreise fallen (III, 2). Sie liegt jedoch zwar innerhalb ABCD, aber außerhalb ACK (III, Definition 3); dies wäre Unsinn. Also berührt ein Kreis den anderen außen nicht in mehr Punkten als einem. Wie oben bewiesen, tut er es auch innen nicht – S.

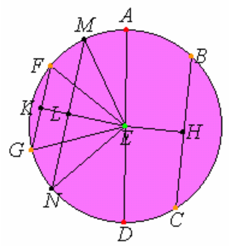


§ 14 (L. 13)

Im Kreise stehen gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkt ab, und gleichweit vom Mittelpunkt abstehende Sehnen sind einander gleich.

ABCD sei ein Kreis, und in ihm seien AB, CD gleiche Sehnen. Ich behaupte, dass AB und CD vom Mittelpunkt gleichweit abstehen.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABCD, er sei E, fälle von E auf AB, CD die Lote EF, EG und ziehe AE, EC. Da hier eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF eine nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehne AB rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch (III, 3). Also ist AF = FB, also AB = 2 AF. Aus demselben Grund ist auch CD = 2 CG. Hier ist AB = CD; also ist auch AF = CG. Da ferner AE = EC, ist auch $AE^2 = EC^2$. Aber $AE^2 = AF^2 + EF^2$; denn der Winkel bei F ist ein Rechter (I, 47); und $EC^2 = EG^2 + GC^2$; denn der Winkel bei G ist ein Rechter. Also sind $AF^2 + FE^2 = CG^2 + GE^2$; hierin ist $AF^2 = CG^2$, denn AF = CG; also ist der Rest $FE^2 = EG^2$, also EF = EG. Man sagt aber von Sehnen, dass sie vom Mittelpunkt gleichweit abstehen, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällten Lote gleich sind (III, Definition 4); also stehen AB und CD gleichweit vom Mittelpunkt ab.
Andererseits mögen die Sehnen AB, CD gleichweit vom Mittelpunkt abstehen, d.h. es sei EF = EG. Ich behaupte, dass auch AB = CD. Man konstruiere ebenso; dann lässt sich ähnlich zeigen, dass AB = 2 AF und CD = 2 CG. Und da AE = CE, ist $AE^2 = CE^2$. Aber $AE^2 = EF^2 + FA^2$ und $CE^2 = EG^2 + GC^2$; also ist $EF^2 + FA^2 = EG^2 + GC^2$; hierin ist $EF^2 = EG^2$, denn EF = EG; also ist der Rest $AF^2 = CG^2$, also AF = CG. Nun ist 2 AF = AB und 2 CG = CD; also ist AB = CD – S.

§ 15 (L. 14)



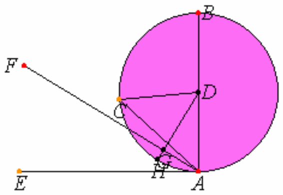
Größte Sehne im Kreise ist der Durchmesser, und von den anderen ist immer die dem Mittelpunkt nähere größer als die entferntere.

ABCD sei ein Kreis, AD ein Durchmesser desselben, E der Mittelpunkt, und dem Durchmesser AD liege BC näher, FG ferner. Ich behaupte, dass AD am größten ist und BC > FG.
Man fälle vom Mittelpunkt E auf BC, FG die Lote EH, EK. Da BC dem Mittelpunkt näher liegt, FG ferner, so ist EK > EH. Man trage EL = EH ab, ziehe LM durch L ⊥ EK und durch nach N, ziehe ferner ME, EN, FE, EG.
Da EH = EL, ist auch BC = MN (III, 14). Andererseits ist, da AE = EM und ED = EN, AD = ME + EN. Aber ME + EN > MN (I, 20) und AD > MN und MN = BC; also ist AD > BC. Und da zwei Seiten ME, EN zwei Seiten FE, EG gleich sind, dabei ∠ MEN > ∠ FEG, so ist Grundlinie MN > Grundlinie FG (I, 24). Wie oben bewiesen, ist MN = BC und BC > FG. Also ist der Durchmesser AD am größten und BC > FG – S.

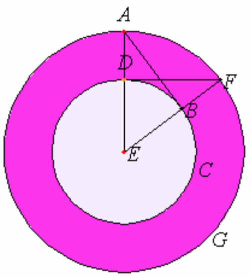
§ 16 (L. 15)

Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene Linie muss außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und der Bogens lässt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen; der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner.

Man habe einen Kreis ABC um den Mittelpunkt D und den Durchmesser AB. Ich behaupte, dass eine ⊥ AB vom Endpunkte A aus gezogene gerade Linie außerhalb des Kreises fallen muss.



Täte sie dies nämlich nicht, sondern fiele innerhalb, etwa wie CA, dann ziehe man DC. Da DA = DC, wäre auch ∠ DAC = ∠ ACD (I, 5). DAC ist aber ein Rechter; also wäre auch ACD ein Rechter. Im Dreieck ACD wären dann zwei Winkel DAC + ACD = 2 R.; dies ist aber unmöglich (I, 17). Also kann eine ⊥ AB vom Punkte A aus gezogene gerade Linie nicht innerhalb des Kreises fallen. Ähnlich lässt sich zeigen, dass sie auch nicht auf den Bogen fallen kann; also fällt sie außerhalb.
Sie verlaufe wie AE. Ich behaupte, dass in den Zwischenraum der geraden Linie AE und des Bogens CHA sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen lässt.
Eine solche sei nämlich, wenn möglich, als FA nebenhineingezogen. Dann fälle man vom Punkte D auf FA das Lot DG. Da dann AGD ein Rechter wäre und DAG < R. (Axiom 8), so wäre AD > DG (I, 19). Aber DA = DH; also wäre DH > DG, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. Also lässt sich in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen.
Ich behaupte, dass außerdem der Winkel des Halbkreises, nämlich der, der von der geraden Linie BA und dem Bogen CHA umfasst wird (III, Definition 7), größer ist als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel aber, nämlich der, der von dem Bogen CHA und der geraden Linie AE umfasst wird, kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel.
Wäre nämlich irgendein geradliniger Winkel größer als der zwischen der geraden Linie BA und dem Bogen CHA oder kleiner als der zwischen dem Bogen CHA und der geraden Linie AE, so müsste sich in den Zwischenraum des Bogens CHA und der geraden Linie AE eine gerade Linie nebenhineinziehen lassen, die den Winkel zwischen geraden Linien erzeugte, der größer wäre als der zwischen der geraden Linie BA und dem Bogen CHA, und den, der kleiner wäre als der zwischen dem Bogen CHA und der geraden Linie AE. Eine solche lässt sich aber nicht nebenhineinziehen. Also kann kein spitzer Winkel zwischen geraden Linien größer sein als der Winkel zwischen der geraden Linie BA und dem Bogen CHA und auch keiner kleiner als der zwischen dem Bogen CHA und der geraden Linie AE.
Zusatz: Hiernach ist klar, dass eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene gerade Linie den Kreis berührt und dass eine gerade Linie einen Kreis nur in einem Punkte berühren kann, da ja, wie bewiesen, eine Strecke, die in zweien mit ihm zusammentrifft, innerhalb desselben fällt – dies hatte man beweisen sollen.



§ 17 (A. 2)

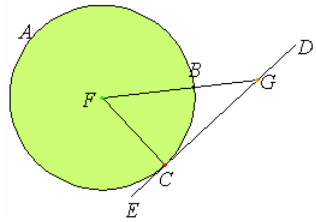
Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen.

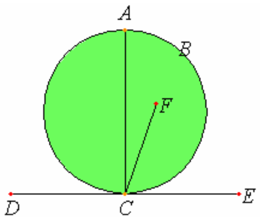
Der gegebene Punkt sei A, der gegebene Kreis BCD. Man soll vom Punkte A an den Kreis BCD eine Tangente ziehen.
Man verschaffe sich den Kreismittelpunkt E (III, 1), ziehe AE und zeichne mit E als Mittelpunkt, EA als Abstand den Kreis AFG, ziehe ferner von D aus DF ⊥ EA und ziehe EF, AB. Ich behaupte, dass man vom Punkte A an den Kreis BCD eine Tangente gezogen hat, nämlich AB.
Da nämlich E Mittelpunkt der Kreise BCD, AFG ist, so ist EA = EF und ED = EB; mithin sind zwei Seiten AE, EB zwei Seiten FE, ED gleich; und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, den bei E; also ist Grundlinie DF = Grundlinie AB, ∆ DEF = ∆ EBA, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln (I, 4); also ist ∠ EDF = EBA. EDF ist aber ein Rechter; also ist auch EBA ein Rechter. Und EB geht vom Mittelpunkt aus; eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkte aus gezogene gerade Linie berührt aber den Kreis (III, 16, Zus.); also berührt AB den Kreis BCD.
Man hat also von einem gegebenen Punkte A an einen gegebenen Kreis BCD eine Tangente gezogen, nämlich AB – dies hatte man ausführen sollen.

§ 18 (L. 16)

Zieht man an einen Kreis eine Tangente, ferner vom Mittelpunkt aus eine gerade Linie zum Berührungspunkt, so muss die Verbindungsstrecke das Lot auf die Tangente sein.

Den Kreis ABC berühre nämlich eine gerade Linie DE im Punkte C; man verschaffe sich den Mittelpunkt F des Kreises ABC und ziehe von F nach C die Verbindungslinie FC. Ich behaupte, dass FC das Lot auf DE ist. Anderenfalls fälle man nämlich von F auf DE das Lot FG. Da dann ∠ FGC ein Rechter wäre, wäre FCG spitz (I, 17).Dem größeren Winkel liegt aber die größere Seite gegenüber (I, 19), also wäre FC > FG. Aber FC = FB; also wäre auch FB > FG, die kleinere Strecke (Axiom 8) größer als die größere; dies ist aber unmöglich. FG ist also nicht das Lot auf DE. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch keine andere Strecke außer FC es sein kann; also ist FC das Lot auf DE (I, 12) – S.

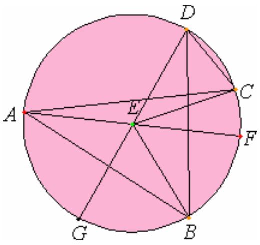




§ 19 (L. 17)

Zieht man an einen Kreis eine Tangente, ferner vom Berührungspunkt aus eine gerade Linie rechtwinklig zur Tangente, so muss auf dieser der Mittelpunkt des Kreises liegen.

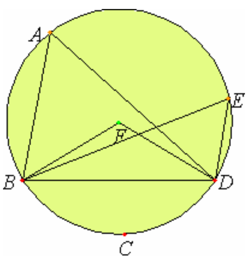
Den Kreis ABC berühre nämlich eine gerade Linie DE im Punkte C; man ziehe von C aus CA ⊥ DE. Ich behaupte, dass der Mittelpunkt des Kreises auf AC liegt.
Täte er es nämlich nicht, sondern wäre etwa F; dann ziehe man CF. Da man dann an den Kreis ABC eine Tangente DE und vom Mittelpunkt zum Berührungspunkt die Verbindungslinie FC gezogen hätte, so wäre FC das Lot auf DE (III, 18), also ∠ FCE ein Rechter. Aber auch ACE ist ein Rechter; also wäre FCE = ACE, der kleinere Winkel dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. Also ist F nicht Mittelpunkt des Kreises ABC. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch kein anderer Punkt außer einem auf AC es sein kann – S.



§ 20 (L. 18)

Im Kreise ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Umfangswinkel, wenn die Winkel über demselben Bogen stehen.

Man habe den Kreis ABC und die Winkel BEC an seinem Mittelpunkt, BAC am Umfang; diese mögen über demselben Bogen stehen. Ich behaupte, dass ∠ BEC = 2 BAC.
Man ziehe AE und durch nach F. Da dann EA = EB, so ist auch ∠ EAB = EBA (I, 5); also sind ∠ EAB + EBA = 2 EAB. Aber BEF = EAB + EBA (I, 32); also ist auch BEF = 2 EAB. Aus demselben Grunde ist auch FEC = 2 EAC. Also ist der ganze Winkel BEC doppelt so groß wie der ganze Winkel BAC. Man ziehe wieder eine gebrochene Linie, es entstehe ein anderer Winkel BDC. Dann ziehe man DE und durch nach G. Dann lässt sich ähnlich zeigen, dass ∠ GEC = 2 EDC und hierin GEB = 2 EDB; also ist auch der Restwinkel BEC = 2 BDC – S.



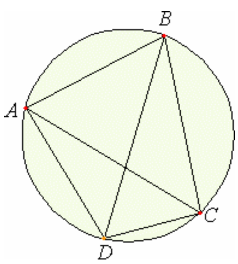
§ 21 (L. 19)

Im Kreise sind die Winkel in demselben Abschnitt einander gleich.

Man habe den Kreis ABCD, und in demselben Abschnitt BA ED die Winkel BAD, BED (III, Definition 8). Ich behaupte, dass ∠ BAD = ∠ BED.
Man verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABCD, er sei F, und ziehe BF, FD. Da dann der Winkel BFD am Mittelpunkt liegt, BAD am Umfang, und sie über demselben Bogen BCD stehen, so ist ∠ BFD = 2 BAD (III, 20).
Aus demselben Grund ist auch BFD = 2 BED; also ist BAD = BED – S.

§ 22 (L. 20)

Im jedem einem Kreise einbeschriebenen Viereck sind gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich.



Man habe den Kreis ABCD und in ihm das Viereck ABCD. Ich behaupte, dass gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich sind.
Man ziehe AC, BD. Da in jedem Dreieck die drei Winkel zusammen = 2 R. sind (I, 32), sind im Dreieck ABC die drei Winkel CAB + ABC + BCA = 2 R. Aber ∠ CAB = BDC; denn sie liegen in demselben Abschnitt BADC (III, 21). Und ∠ ACB = ADB; denn sie liegen in demselben Abschnitt ADCB. Also ist der ganze Winkel ADC = BAC + ACB. Man füge ABC beiderseits

hinzu; dann sind ABC + BAC + ACB = ABC + ADC. Aber ABC + BAC + ACB = 2 R.; also sind auch ABC + ADC = 2 R. Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch ∠ BAD + DCB = 2 R. – S.

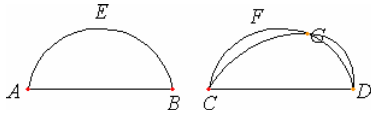
§ 23 (L. 21)

Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei ungleiche ähnliche Kreisabschnitte nach derselben Seite zu errichten.

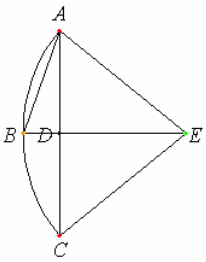
Wäre dies nämlich möglich, so errichte man über derselben Strecke AB zwei ungleiche ähnliche Kreisabschnitte ACB, ADB nach derselben Seite. Man ziehe dann ACD durch und ziehe CB, DB. Da hier der Abschnitt ACB dem Abschnitt ADB ähnlich sein soll, ähnliche Kreisabschnitte aber solche sind, die gleiche Winkel fassen (III, Definition 11), so wäre ACB = ADB, der Außenwinkel dem Innenwinkel; dies ist aber unmöglich (I, 16) – S.

§ 24 (L. 22)

Ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken sind einander gleich.



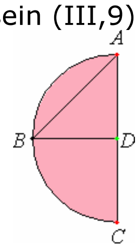
AEB, CFD seien ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken AB, CD. Ich behaupte, dass der Abschnitt AEB dem Abschnitt CFD gleich ist.
Deckt man nämlich den Abschnitt AEB auf CFD und legt dabei Punkt A auf C sowie die gerade Linie AB auf CD, dann muss auch Punkt B Punkt D decken, weil AB = CD. Deckt AB aber CD, dann muss auch der Abschnitt AEB CFD decken; wenn nämlich zwar die Strecke AB CD deckte, der Abschnitt AEB aber CFD nicht deckte, so müsste er entweder innerhalb desselben fallen oder außerhalb (ausgeschlossen durch III, 23) oder abweichen wie CGD, und ein Kreis schnitte den anderen in mehr als zwei Punkten; dies ist aber unmöglich (III, 10). Also trifft nicht zu, dass, während die Strecke AB CD deckt, der Abschnitt AEB CFD nicht auch deckte; also muss er decken und ihm gleich sein (Axiom 7) – S.



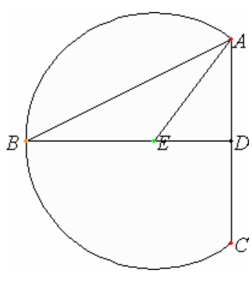
§ 25 (A. 3)

Wenn ein Kreisabschnitt gegeben ist, den Kreis daran zu zeichnen, dessen Abschnitt er ist.

Der gegebene Kreisabschnitt sei ABC. Man soll zum Abschnitt ABC den Kreis daranzeichnen, dessen Abschnitt er ist.
Man halbiere AC in D, ziehe vom Punkte D aus DB ⊥ AC und ziehe AB; ∠ ABD ist dann entweder > BAD oder = oder <. Zunächst sei er größer; dann trage man an die gerade Linie BA im Punkte A auf ihr ∠ BAE = ABD an, verlängere DB nach E und ziehe EC. Da ∠ ABE = BAE, ist auch die Strecke EB = EA (I, 6). Da ferner AD = DC ist und DE gemeinsam, so sind zwei Seiten AD, DE zwei Seiten CD, DE entsprechend gleich; und ∠ ADE = ∠ CDE, weil beide Rechte sind; also ist Grundlinie AE = Grundlinie CE (I, 4). Wie oben bewiesen, ist aber AE = BE; also ist auch BE = CE; also sind AE, EB, EC alle drei einander gleich. Zeichnet man also mit E als Mittelpunkt und einer der Strecken AE, EB, EC als Abstand den Kreis, so muss er auch durch die übrigen Punkte gehen und darangezeichnet sein (III,9). Also hat man zum gegebenen Kreisabschnitt den Kreis darangezeichnet. Hier seht man, dass der Abschnitt ABC kleiner als der Halbkreis ist, weil sich der Mittelpunkt E außerhalb seiner findet.



Ähnlich müssen auch, wenn ∠ ABD = BAD, da AD sowohl BD als auch CD gleich wird, DA, DB, DC alle drei einander gleich sein; D muss der Mittelpunkt des ergänzten Kreises sein und offenbar ABC ein Halbkreis.
Ist aber ∠ ABD < BAD und trägt man an die gerade Linie BA im Punkte A auf ihr einen Winkel = ABD an, so muss der Mittelpunkt innerhalb des Abschnittes ABC auf DB fallen, und der Abschnitt ABC muss offenbar größer als der Halbkreis sein – S.

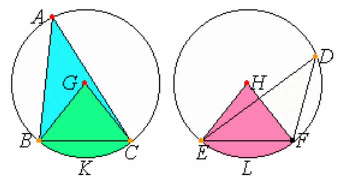


§ 26 (L. 23)

In gleichen Kreisen sind die Bogen gleich, über denen gleiche Winkel stehen, einerlei ob diese an den Mittelpunkten oder an den Umfängen stehen.

ABC, DEF seien gleiche Kreise, in ihnen BGC, EHF gleiche

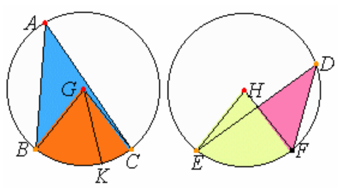
Mittelpunktswinkel, BAC, EDF gleiche Umfangswinkel. Ich behaupte, dass Bogen BKC = Bogen ELF.
Man ziehe BC, EF. Da die Kreise ABC, DEF gleich sind, sind auch die Radien gleich (III, Definition 1); also sind die zwei Seiten BG, GC zwei Seiten EH, HF gleich; und der Winkel bei G ist dem Winkel bei H gleich; also ist Grundlinie BC = Grundlinie EF (I; 4). Da der Winkel bei A dem bei D gleich ist, ist der Abschnitt BAC dem Abschnitt EDF ähnlich (III, Definition 11); sie liegen dabei über gleichen Strecken BC, EF; ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Strecken sind aber einander gleich (III, 24); also ist der Abschnitt BAC = EDF. Auch der ganze Kreis ABC ist aber dem ganzen Kreis DEF gleich; also ist der Restbogen BKC dem Bogen ELF gleich – S.



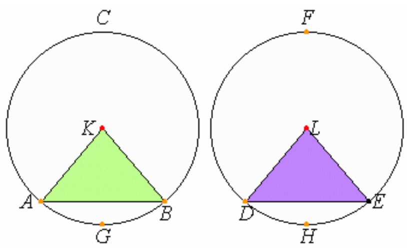
§ 27 (L. 24)

In gleichen Kreisen über gleichen Bogen stehende Winkel sind einander gleich, einerlei ob sie an den Mittelpunkten oder an den Umfängen stehen.

In gleichen Kreisen ABC, DEF mögen nämlich über gleichen Bogen BC, EF an den Mittelpunkten G, H die Winkel BGC, EHF und an den Umfängen die Winkel BAC, EDF stehen. Ich behaupte, dass ∠ BGC = EHF und BAC = EDF.
Wäre nämlich ∠ BGC ungleich EHF, dann müsste einer von ihnen größer sein. ∠ BGC sei der größere. Man trage dann an die gerade Linie BG im Punkte G auf ihr ∠ BGK = EHF an. Bogen, über denen gleiche Mittelpunktswinkel stehen, sind aber gleich (III, 26); also wäre Bogen BK = Bogen EF. Aber EF = BC; also wäre auch BK = BC; der kleinere Bogen dem größeren (Axiom 8); dies ist aber unmöglich. ∠ BGC ist also nicht ungleich EHF, also ihm gleich. Ferner ist der Winkel bei A = ½ BGC und der bei D = ½ EHF (III, 20); also ist auch der Winkel bei A dem bei D gleich – S.



§ 28 (L. 25)

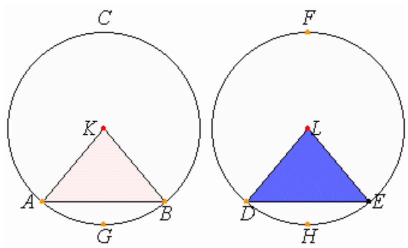


Gleiche Sehnen in gleichen Kreisen grenzen gleiche Bogen ab, so dass der größere dem größeren gleich wird und der kleinere dem kleineren.

ABC, DEF seien gleich Kreise, in ihnen AB, DE gleiche Sehnen, so dass ACB, DFE die größeren abgegrenzten Bogen werden, AGB, DHE die kleineren. Ich behaupte, dass der größere Bogen ACB dem größeren Bogen DFE gleich ist und der kleinere Bogen AGB = DHE.
Man verschaffe sich die Kreismittelpunkte K, L und ziehe AK, KB, DL, LE.
Da die Kreise gleich sind, sind auch die Radien gleich; also sind zwei Seiten AK, KB zwei Seiten DL, LE gleich; und Grundlinie AB = Grundlinie DE; also ist ∠ AKB = ∠ DLE (I, 8). Bogen, über denen gleiche Mittelpunktswinkel stehen, sind aber gleich (III, 26); also ist Bogen AGB = DHE. Aber auch der ganze Kreis ABC ist dem ganzen Kreise DEF gleich; also ist auch der Restbogen ACB dem Restbogen DFE gleich – S.

§ 29 (L. 26)

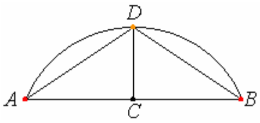
Gleichen Bogen in gleichen Kreisen liegen gleiche Sehnen gegenüber.



ABC, DEF seien gleich Kreise; in ihnen grenze man gleiche Bögen BGC, EHF ab und ziehe die Sehnen BC, EF. Ich behaupte, dass BC = EF.
Man verschaffe sich nämlich die Kreismittelpunkte, sie seien K, L, und ziehe BK, KC, EL, LF. Da Bogen BGC = Bogen EHF, ist auch ∠ BKC = ELF (III, 27). Und da die Kreise ABC, DEF gleich sind, sind auch die Radien gleich; also sind zwei Seiten BK, KC zwei Seiten EL, LF gleich; und sie umfassen gleiche Winkel; also ist Grundlinie BC = Grundlinie EF (I, 4) – S.

§ 30 (A. 4)

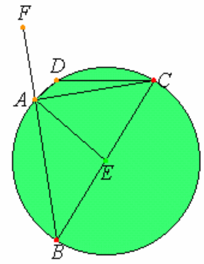
Einen gegebenen Bogen zu halbieren.



Der gegebene Bogen sei ADB. Man soll den Bogen ADB halbieren.
Man ziehe AB, halbiere es in C, ziehe vom Punkte C aus CD ⊥ zur geraden Linie AB und ziehe AD, DB. Da AC = CB ist und CD gemeinsam, sind zwei Seiten AC, CD zwei Seiten BC, CD gleich; und ∠ ACD = ∠ BCD, weil beide Rechte sind; also ist Grundlinie AD = Grundlinie DB (I, 4). Gleiche Sehnen grenzen aber gleiche Bogen ab, so dass der größere dem größeren gleich wird und der kleinere dem kleineren (III, 28); hier sind beide Bogen AD, DB kleiner als der Halbkreis; also ist Bogen AD = Bogen DB. Der gegebene Bogen ist also im Punkte D halbiert – dies hatte man ausführen sollen.

§ 31 (L. 27)

Im Kreise ist der Winkel im Halbkreis ein Rechter, der in einem größeren Abschnitt kleiner als ein Rechter und der in einem kleineren Abschnitt größer als ein Rechter; außerdem ist der Winkel des größeren Abschnittes größer als ein Rechter und der Winkel des kleineren Abschnittes kleiner als ein Rechter.

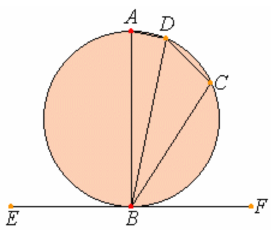


ABCD sei ein Kreis, BC Durchmesser desselben, E der Mittelpunkt; man ziehe BA, AC, AD, DC. Ich behaupte, dass der Winkel BAC im Halbkreis BAC ein Rechter ist, der Winkel ABC im Abschnitt ABC, der größer als der Halbkreis ist, < R. und der Winkel ADC im Abschnitt ADC, der kleiner als der Halbkreis ist, > R.
Man ziehe AE und verlängere BA nach F. Da BE = EA, ist auch ∠ ABE = BAE (I, 5). Ebenso ist, da CE = EA, auch ∠ ACE = CAE; also ist der ganze ∠ BAC = ABC + ACB. Am Dreieck ABC ist aber auch der Außenwinkel FAC = ABC + ACB (I, 32); also ist ∠ BAC = FAC; also sind beide Rechte (I, Definition 10). Also ist der Winkel BAC im Halbkreis BAC ein Rechter. Da ferner im Dreieck ABC die zwei Winkel ABC + BAC < 2 R. (I, 17), BAC aber ein Rechter ist, so ist ∠ ABC < R.; und dieser liegt im Abschnitt ABC, der größer als der Halbkreis ist. Da ferner ABCD ein einem Kreis einbeschriebenes Viereck ist, in jedem einem Kreise einbeschriebenen Viereck aber gegenüberliegende Winkel zusammen = 2 R. (III, 22) also ∠ ABC + ADC = 2 R. und ∠ ABC < R., so ist der Restwinkel ADC > R.; und dieser liegt im Abschnitt ADC, der kleiner als der Halbkreis ist.
Ich behaupte, dass außerdem der Winkel des größeren Abschnittes, nämlich (III, Definition 7) der zwischen dem Bogen ABC und der Sehne AC, > R. ist und der Winkel des kleineren Abschnittes, nämlich der zwischen dem Bogen ADC und der Sehne AC, < R. Dies ist ohne weiteres klar. Da nämlich der Winkel zwischen den geraden Linien BA, AC ein Rechter ist, ist der zwischen dem Bogen ABC und der geraden Linie AC > R. (Axiom 8). Ebenso ist, da der Winkel zwischen den geraden Linien AC, AF ein Rechter ist, der zwischen der geraden Linie CA und dem Bogen ADC < R. – S.

§ 32 (L. 28)

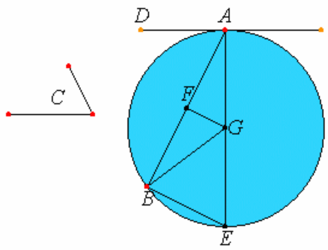
Zieht man an einen Kreis eine Tangente und vom Berührungspunkt aus eine den Kreis schneidende gerade Linie zum Kreis durch, so müssen die Winkel, die diese mit der Tangente bildet, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich sein.

Man ziehe an den Kreis ABCD eine im Punkte B berührende gerade Linie EF und vom Punkte B aus eine den Kreis ABCD schneidende gerade Linie BD zu ihm durch. Ich behaupte, dass die Winkel, die BD mit der Tangente EF bildet, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich sein müssen, d.h. dass ∠ FBD einem im Abschnitt BAD zu errichtenden Winkel gleich ist und ∠ EBD einem im Abschnitt DCB zu errichtenden Winkel gleich.



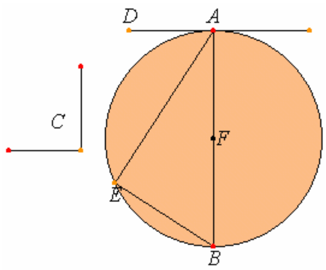
Man ziehe nämlich von B aus BA ⊥ EF, wähle auf dem Bogen BC Punkte C beliebig und ziehe AD, DC, CB. Da eine gerade Linie EF den Kreis ABCD in B berührt und man BA vom Berührungspunkt aus rechtwinklig zur Tangente gezogen hat, liegt der Mittelpunkt des Kreises ABCD auf BA

(III, 19). BA ist also Durchmesser des Kreises ABCD, also ∠ ADB als Winkel im Halbkreis ein Rechter (III, 31); also sind die übrigen Winkel BAD + ABC = 1 R. (I, 32). Aber auch ABF ist ein Rechter, also ABF = BAD + ABD (Postulat 4).
Man nehme ABD beiderseits weg; dann ist der Restwinkel DBF dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt, nämlich BAD gleich. Da ferner ABCD ein Viereck im Kreise ist, sind in ihm gegenüberliegende Winkel zusammen = 2 R. (III, 22). Aber auch DBF + DBE = 2 R. (I, 13); also sind DBF + DBE = BAD + BCD. Hiervon ist, wie oben bewiesen, BAD = DBF; also ist der Restwinkel DBE = DCB, dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt DCB – S.

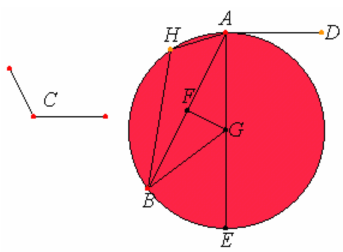


§ 33 (A. 5)

Über einer gegebenen Strecke einen Kreisabschnitt zu zeichnen, der einen einem gegebenen geradlinigen Winkel gleichen Winkel fasst.



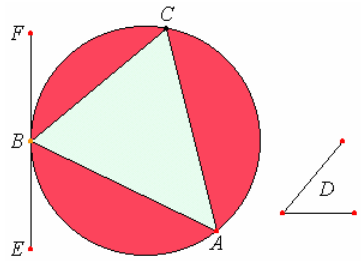
Die gegebene Strecke sei AB, der gegebene geradlinige Winkel der bei C. Man soll über der gegebenen Strecke AB einen Kreisabschnitt zeichnen, der einen dem bei C gleichen Winkel fasst.
Der Winkel bei C ist entweder spitz oder ein Rechter oder stumpf. Zunächst sei er spitz. Dann trage man, wie in der ersten Zeichnung, an die gerade Linie AB im Punkte A den dem Winkel bei C gleichen ∠ BAD an; dann ist auch ∠ BAD spitz. Man ziehe AE ⊥ DA, halbiere AB in F, ziehe vom Punkte F aus FG ⊥ AB und verbinde GB. Da AF = FB ist und FG gemeinsam, sind zwei Seiten AF, FG zwei Seiten BF, FG gleich; und ∠ AFG = BFG; also ist Grundlinie AG = Grundlinie BG (I, 4). Zeichnet man also mit G als Mittelpunkt und GA als Abstand den Kreis, so muss dieser auch durch B gehen. Man zeichne ihn, er sei ABE, und ziehe EB.
Da AD vom Endpunkt A des Durchmessers AE aus ⊥ AE verläuft, berührt AD den Kreis ABE (III, 16, Zus.). Da hier eine gerade Linie AD den Kreis ABE berührt und vom Berührungspunkt A eine gerade Linie AB zum Kreis ABE durchgezogen ist, so ist ∠ DAB = AEB, dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt (III, 32). ∠ DAB ist aber dem bei C gleich; also ist der Winkel bei C auch = AEB. Man hat also über der gegebenen Strecke AB einen Kreisabschnitt, der den dem gegebenen Winkel bei C gleichen ∠ AEB fasst, gezeichnet, nämlich AEB.
Zweitens sei der Winkel bei C ein Rechter. Man soll wieder über AB einen Kreisabschnitt zeichnen, der einen dem Rechten bei C gleichen Winkel fasst. Man trage den dem Rechten bei C gleichen ∠ BAD an, wie in der zweiten Zeichnung geschehen, halbiere AB in F und zeichne mit F als Mittelpunkt und FA oder FB als Abstand den Kreis AEB.
Dann berührt die gerade Linie AD den Kreis ABE, weil der Winkel bei A ein Rechter ist (III, 16, Zus.). Und ∠ BAD ist dem im Abschnitt AEB gleich; denn als Winkel im Halbkreis ist auch dieser ein Rechter (III, 31). ∠ BAD ist aber auch dem bei C gleich. Also ist auch der Winkel im Abschnitt AEB dem bei C gleich. Man hat also wieder über AB einen Kreisabschnitt, der einen dem Winkel bei C gleichen fasst, gezeichnet, nämlich AEB.



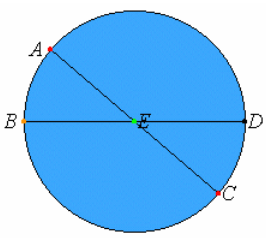
Schließlich sei der Winkel bei C stumpf. Man trage dann, wie in der dritten Zeichnung geschehen, an die gerade Linie AB im Punkte A ∠ BAD, der jenem gleich sei, an, ziehe AE ⊥ AD, halbiere wieder AB in F, ziehe FG ⊥ AB und verbinde GB. Da wieder AF = FB ist und FG gemeinsam, sind zwei Seiten AF, FG zwei Seiten BF, FG gleich; und ∠ AFG = ∠ BFG; also ist Grundlinie AG = Grundlinie BG (I, 4). Zeichnet man also mit G als Mittelpunkt und GA als Abstand den Kreis, so muss dieser auch durch B gehen; er verlaufe wie AEB. Da hier AD rechtwinklig zum Durchmesser AE vom Endpunkte aus verläuft, berührt AD den Kreis AEB (III, 16, Zus.); und AB ist von Berührungspunkt A aus durchgezogen; also ist ∠ BAD dem Winkel, der sich im entgegengesetzten Kreisabschnitt AHB errichten lässt, gleich. Andererseits ist ∠ BAD dem Winkel bei C gleich. Also ist auch der Winkel im Abschnitt AHB dem bei C gleich. Man hat also über der gegebenen Strecke AB einen Kreisabschnitt, der einen dem Winkel bei C gleichen fasst, gezeichnet, nämlich AHB – dies hatte man ausführen sollen.

§ 34 (A. 6)

Von einem gegebenen Kreis einen Abschnitt abzutrennen, der einen einem gegebenen geradlinigen Winkel gleichen Winkel fasst.



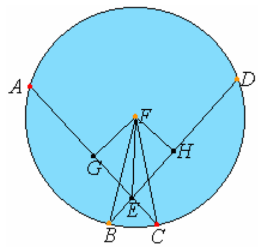
Der gegebene Kreis sei ABC, der gegebene geradlinige Winkel der bei D. Man soll vom Kreise ABC einen Abschnitt abtrennen, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel bei D gleichen Winkel fasst.
Man ziehe an ABC im Punkte B die Tangente EF (III, 16, Zus.) und trage an die gerade Linie FB im Punkte B auf ihr $\angle$ FBC = dem bei D an. Da eine gerade Linie EF den Kreis ABC berührt und BC vom Berührungspunkt B aus durchgezogen ist, ist $\angle$ FBC dem Winkel, der sich im entgegengesetzten Abschnitt BAC erreichten lässt, gleich (III, 32).
Andererseits ist FBC dem Winkel bei D gleich; also ist der Winkel im Abschnitt BAC dem bei D gleich.
Man hat also von dem gegebenen Kreise ABC einen Abschnitt abgetrennt, nämlich BAC, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel bei D gleichen Winkel fasst – dies hatte man ausführen sollen.



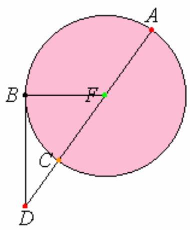
§ 35 (L. 29)

Schneiden im Kreise zwei Sehnen einander, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich.

Im Kreise ABCD mögen nämlich zwei Sehnen AC, BD einander schneiden im Punkte E. Ich behaupte, dass $AE \cdot EC = DE \cdot EB$.
Gehen hier AC und BD durch den Mittelpunkt, so dass E der Mittelpunkt des Kreises ABCD ist, so ist klar, dass, da AE, EC, DE, EB gleich sind, auch $AE \cdot EC = DE \cdot EB$.
AC und DB mögen nun nicht durch den Mittelpunkt gehen.
Dann verschaffe man sich den Mittelpunkt von ABCD, er sei F, fälle von F auf die geraden Linien AC, DB die Lote FG, FH und ziehe FB, FC, FE.



Da eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie GF eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne AC rechtwinklig schneidet, halbiert sie

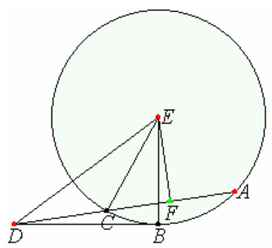


sie auch (III, 3); also ist AG = GC. Da man hier die Strecke AC sowohl in gleiche Abschnitte geteilt hat in G, als auch in ungleiche in E, so ist $AE \cdot EC + EG^2 = GC^2$ (II, 5). Man füge GF^2 beiderseits hinzu; dann ist $AE \cdot EC + GE^2 + GF^2 = CG^2 + GF^2$. Aber $EG^2 + GF^2 = FE^2$ und $CG^2 + GF^2 = FC^2$ (I, 47); also ist $AE \cdot EC + FE^2 = FC^2$. Aber FC = FB; also ist $AE \cdot EC + EF^2 = FB^2$. Aus demselben Grunde ist auch $DE \cdot EB + FE^2 = FB^2$. Wie oben bewiesen, ist aber $AE \cdot EC + FE^2 = FB^2$, also ist $AE \cdot EC + FE^2 = DE \cdot EB + FE^2$. Man nehme FE^2 beiderseits weg; dann ist der Rest $AE \cdot EC = DE \cdot EB$ – S.

§ 36 (L. 30)

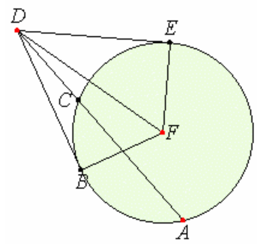
Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von ihm aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis schneidet, die andere ihn berührt, so muss das Rechteck aus der ganzen schneidenden Strecke und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück dem Quadrat über der Tangente gleich sein.

Man wähle außerhalb des Kreises ABC einen Punkt D und ziehe von D aus zum Kreis ABC zwei Strecken DCA, DB; DCA schneide den Kreis ABC, BD berühre ihn. Ich behaupte, $AD \cdot DC = DB^2$
DCA geht dann entweder durch den Mittelpunkt oder tut es nicht.
Zunächst gehe es durch den Mittelpunkt; F sei der Mittelpunkt des Kreises ABC; man ziehe FB. Dann ist FBC ein Rechter (III, 18). Da die Strecke AC in F halbiert ist und CD ihr angesetzt, so ist $AD \cdot DC + FC^2 = FD^2$ (II, 6). Aber FC = FB; also ist $AD \cdot DC + FB^2 = FD^2$. Aber FD^2 =



$FB^2 + BD^2$ (I, 47); also ist $AD \cdot DC + FB^2 = FB^2 + BD^2$. Man nehme FB^2 beiderseits weg; dann ist der Rest $AD \cdot DC$ dem Quadrat über der Tangente DB gleich.
Zweitens gehe DCA nicht durch den Mittelpunkt des Kreises ABC; dann verschaffe man sich den Mittelpunkt E, fälle von E auf AC das Lot EF und ziehe EB, EC, ED.
Dann ist EBD ein Rechter (III, 18). Da hier eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie EF eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne AC rechtwinklig schneidet, halbiert sie sie auch (III, 3); also ist AF = FC. Und da die Strecke AC im Punkte F halbiert ist und CD ihr angesetzt, so ist $AD \cdot DC + FC^2 = FD^2$ (II, 6). Man füge FE^2 beiderseits hinzu; dann ist $AD \cdot DC + CF^2 + FE^2 = FD^2 + FE^2$. Aber $CF^2 + FE^2 = EC^2$, weil EFC ein Rechter (I, 47); und $DF^2 + FE^2 = ED^2$ (I, 47); also ist $AD \cdot DC + EC^2 = ED^2$. Aber EC = EB; also ist $AD \cdot DC + EB^2 = ED^2$. Und $ED^2 = EB^2 + BD^2$, weil $\angle$ EBD ein Rechter (I, 47); also ist $AD \cdot DC + EB^2 = EB^2 + BD^2$. Man nehme EB^2 beiderseits weg; dann ist der Rest $AD \cdot DC = DB^2$ - S.

§ 37 (L. 31)



Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt und zieht von dem Punkte aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis schneidet, die andere herangeht, so, dass das Rechteck aus der ganzen schneidenden Strecke und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück dem Quadrat über der herangehenden Strecke gleich ist, so muss die Herangehende den Kreis berühren.

Man wähle außerhalb des Kreises ABC einen Punkt D und ziehe von D aus zum Kreis ABC zwei Strecken DCA, DB; DCA schneide den Kreis, DB gehe heran; und es sei $AD \cdot DC = DB^2$. Ich behaupte, dass DB den Kreis ABC berührt.
Man ziehe an ABC die Tangente DE (III, 17), verschaffe sich den Mittelpunkt des Kreises ABC, er sei F, und ziehe FE, FB, FD. Dann ist FED ein Rechter (III, 18). Da DE den Kreis ABC berührt und DCA ihn schneidet, so ist $AD \cdot DC = DE^2$ (III, 36). Es war aber auch $AD \cdot DC = DB^2$; also ist $DE^2 = DB^2$, also DE = DB. Aber auch FE = FB; mithin sind zwei Seiten DE, EF zwei Seiten DB, BF gleich; und sie haben die Grundlinie FD gemein; also ist $\angle$ DEF = $\angle$ DBF (I, 8). DEF ist aber ein Rechter; also ist auch DBF ein Rechter. Nun lässt sich FB zum Durchmesser verlängern; eine gerade Linie, die man rechtwinklig zum Kreisdurchmesser von Endpunkte aus zieht, berührt aber den Kreis (III, 16, Zus.); also berührt DB den Kreis ABC. Ähnlich lässt sich der Beweis auch führen, wenn der Mittelpunkt auf AC liegt – S.