Klassiker der Mathematik

Euklids Elemente

Buch XIV

Abschrift, Bearbeitung, Zeichnungen und LaTex-Satz:
Steffen Polster 2020
https://mathematikalpha.de

Quellen:

1. Euklid's Elemente, übersetzt von J. F. Lorenz, Halle 1824,
2. Euclidis Elementorum Libri XV, editi Ch. Clavius, Coloniae 1591,
3. Euclidis Elementorum Libri XV, Federicus Commandinus in latinum conversi, Pisauri 1572,

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Euklids ”Stoicheia”, bei uns besser als ”Euklids Elemente” oder ”Die Elemente” bekannt, waren bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meist verbreitete Werk der Weltliteratur. Es gibt uns einen guten Überblick über den mathematischen Kenntnisstand der Griechen gegen Ende des 4. Jahrhunderts v.u.Z.
Bei den Elementen handelt es sich um ein Lehrbuch der Mathematik, das aus 13 ”Büchern” besteht.

Die älteste erhaltene Handschrift stammt aus dem Byzanz des Jahres 888 und wird heute in der Bodleian Library in Oxford aufbewahrt. Eine Übersetzung des Boethius aus dem Griechischen ins Lateinische (um 500) ist heute nur teilweise, und auch nur in späteren Bearbeitungen erhalten.
Von den zahlreichen arabischen Übersetzungen und Kommentaren waren für die Überlieferung besonders die beiden Übersetzungen des al-Haggag gegen Ende des 8. Jahrhunderts und diejenigen von Ishaq ibn Hunain/Tabit ibn Qurra (Ende 9. Jahrhundert) bzw. von Nasi al-Din al-Tusi (1248) von Bedeutung.

Die erste mittelalterliche Übersetzung der Elemente ins Lateinische verdanken wir dem Engländer Adelard von Bath. Dieser durchstreifte im 12. Jahrhundert Europa auf der Suche nach Handschriften und übertrug so um 1120 auch dieses Werk aus dem Arabischen. Unabhängig davon wurden die Elemente dann im gleichen Jahrhundert in Spanien auch noch von mindestens zwei weiteren berühmten Übersetzern aus dem Arabischen übertragen: von Hermann von Kärnten und von Gerhard von Cremona.

Ebenfalls im 12. Jahrhundert, allerdings in Süditalien von einem unbekannten Autor, ist eine weitere Übersetzung der Elemente aus dem Griechischen entstanden. Wegen des Stils der Übersetzung liegt die Vermutung nahe, dass es sich bei diesem unbekannten Autor um denselben handelt, der um 1160 auch den Almagest des Ptolemäus übersetzte.

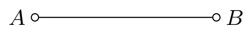
Natürlich gehörten die Elemente zu den ersten Werken, die man gedruckt haben wollte. Die vorbereitende Bearbeitung des Regiomontanus blieb in den 1460er Jahren unvollendet. Eine vollständige Übersetzung aus dem Griechischen von Zamberti konnte 1505 gedruckt werden.

Die ursprünglichen 13 Bücher der ”Elemente” wurden später durch zwei Bücher ergänzt:
Buch 14: Ein Buch des Hypsikles (2. Jahrhundert v.u.Z.)
Buch 15: Ein Buch wahrscheinlich von Damaskios (5. Jahrhundert)

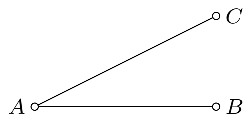
2 Buch I

2.1 Definitionen

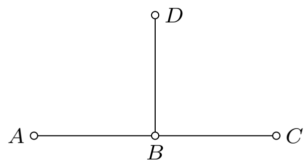
1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.



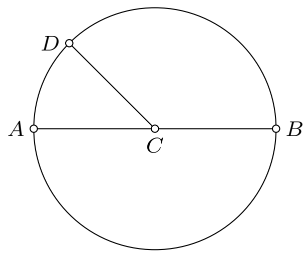
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.



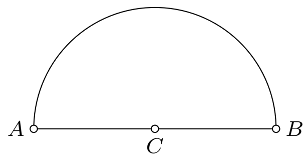
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel geradlinig.



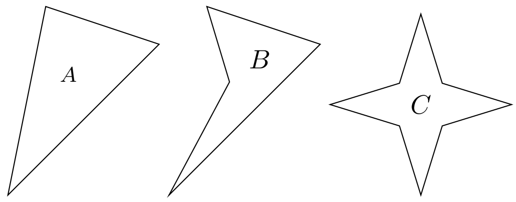
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter.
11. Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,
12. Spitz, wenn kleiner als ein Rechter.
13. Eine Grenze ist das, worin etwas endet.
14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfasst wird.
15. Eine Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie die Umfang (Bogen) heißt umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie zum Umfang des Kreises laufenden Strecken einander gleich sind;



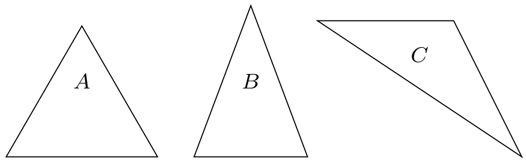
16. Und Mittelpunkt des Kreises heißt dieser Punkt.
17. Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten von Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.



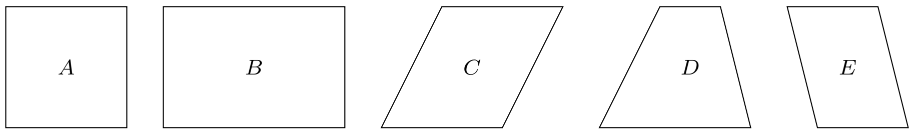
18. Ein Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur; und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise.



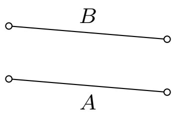
19. Geradlinige Figuren sind solche, die von Strecken umfasst werden,
dreiseitige die von drei,
vierseitige die von vier,
vielseitige die von mehr als vier Seiten umfassten.



20. Von den dreiseitigen Figuren ist
ein gleichseitiges Dreieck jede mit drei gleichen Seiten
ein gleichschenkliges jede mit nur zwei gleichen Seiten
ein schiefes jede mit drei ungleichen Seiten
21. Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein rechtwinkliges Dreieck jede mit einem rechten Winkel, ein stumpfwinkliges jede mit einem stumpfen Winkel, ein spitzwinkliges jede mit drei spitzen Winkeln.



22. Von den vierseitigen Figuren ist ein
Quadrat jede, die gleichseitig und rechtwinkliges ist,
ein längliches Rechteck jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist,
ein Rhombus jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,
ein Rhomboid jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;
die übrigen vierseitigen Figuren sollen Trapeze heißen.

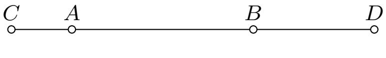


23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

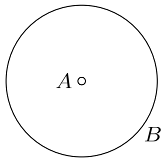
2.2 Postulate

Gefordert werden soll:

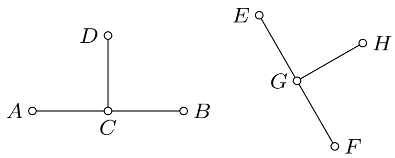
1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,



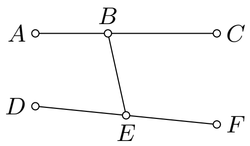
2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,



3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,



4. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind,



5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendlich sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

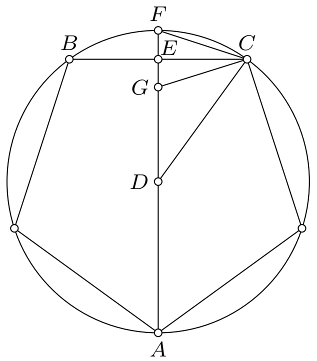
2.3 Axiome

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
6. Die Halben von demselben sind einander gleich.
7. Was einander deckt, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist größer als der Teil.
9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

3 Buch XIV

3.1 Satz 1

Die senkrechte Strecke von der Seite eines Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, ist die Hälfte der Strecke aus den Seiten eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind.



Wenn in den Kreis ABC mit dem Mittelpunkt D das Fünfeck ABC mit der Seite BC einbeschrieben und auf BC die Senkrechte DE durch D errichtet und um EF und DA verlängert ist, dann ist DE die Hälfte der Strecke aus den Seiten eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind.

Es sind DC, CF zu ziehen, es ist GE, das gleich EF ist, abzutragen und es ist vom Punkt G bis C die GC einzutragen.

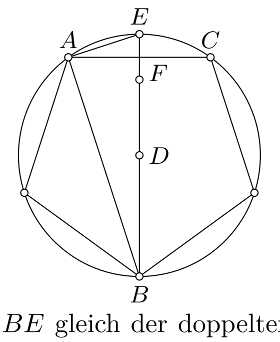
Da der ganze Kreisumfang das Fünffache des Kreisbogens BFC, da ACF die Hälfte des Kreisumfangs und da FC die Hälfte des Kreisbogens BFC ist, ist ACF das Fünffache des Kreisbogens FC und ist AC das Vierfache des Kreisbogens FC.

Es verhält sich der Kreisbogen AC zum Kreisbogen FC wie der Winkel ADC zum Winkel FDC (siehe III.33).
Der Winkel ADC ist damit das Vierfache des Winkels FDC und der Winkel ADC das Doppelte des Winkels AFC (siehe III.20).
Der Winkel CGF ist gleich dem Winkel GFC, also ist der Winkel EFC gleich dem Winkel EGC.

Damit ist der Winkel EGC gleich dem doppelten Winkel GDC und ist DG gleich GC. Es ist CG gleich CF, denn es ist GE gleich EF, und somit ist DG gleich FC.
Es ist deshalb DE gleich EF, FC zusammen und, bei dem DE hinzugefügt, ist DF, FC zusammen gleich der doppelten DE.
Da DF die Seite eines einbeschriebenen Sechsecks und FC die Seite eines einbeschriebenen Zehnecks ist, ist DE die Hälfte der Strecke aus der Seite eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind, was zu zeigen war. □

3.2 Lemma 2

Das Quadrat über der Sehne unter zwei Seiten eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zusammen mit dem Quadrat über einer Seite des Fünfecks ist gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem es einbeschrieben ist.



Wenn in den Kreis ABC mit dem Mittelpunkt D das Fünfeck ABC einbeschrieben, auf dessen Seite AC die Senkrechte DF zu errichten und bis B, E zu verlängern und AB gezogen ist, dann ist das Quadrat über BA zusammen mit dem Quadrat über AC gleich dem fünffachen Quadrat über DE.
Denn wenn AE gezogen wird, ist AE eine Seite eines einbeschriebenen Zehnecks.

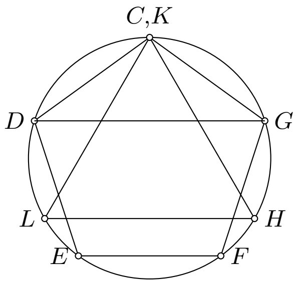
Da BE gleich der doppelten Strecke ED ist, ist das Quadrat über BE gleich dem vierfachen Quadrat über ED.
Da das Quadrat über BA zusammen mit dem Quadrat über AE gleich dem Quadrat über BE ist, sind die Quadrate über BA, AE zusammen gleich dem vierfachen Quadrat über DE und sind die Quadrate

über BA, AE, ED zusammen gleich dem fünffachen Quadrat über DE.

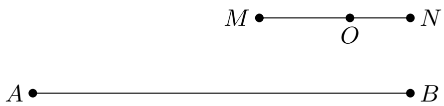
Es ist das Quadrat über AC gleich den Quadraten über DE, EA zusammen (siehe XIII.10), somit sind die Quadrate über AB, AC zusammen gleich dem fünffachen Quadrat über DE, was zu zeigen war. □

3.3 Satz 2

Die fünfeckige Seitenfläche eines Dodekaeders und die dreieckige Seitenfläche eines Ikosaeders, die derselben Kugel einbeschrieben sind, haben den gleichen Umkreis.



Wenn in eine Kugel mit dem Durchmesser AB ein Dodekaeder mit der fünfeckigen Seitenfläche $CDEFG$ und ein Ikosaeder mit der dreieckigen Seitenfläche KLH einbeschrieben sind, dann, sage ich, haben deren Umkreise den gleichen Radius und es ist das Fünfeck $CDEFG$ und das Dreieck KLH dem gleichen Kreis einzubeschreiben. Denn wenn DG gezogen wird, ist DG die Kante eines der Kugel einbeschriebenen Würfels (siehe XIII.17).
Es ist dann eine Strecke MN so anzulegen, dass das Quadrat über AB gleich dem fünffachen Quadrat über MN ist.
Es ist das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, über dem ein der Kugel einbeschriebenes Ikosaeder errichtet ist (siehe XIII.16, Zusatz].
Damit ist MN gleich dem Radius des Kreises, über dem das Ikosaeder errichtet ist.

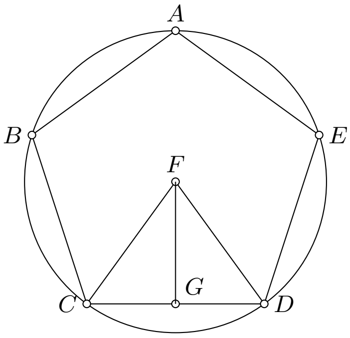


Wird MN in O in stetiger Teilung so geteilt, dass MO der größere Teil ist, dann ist MO die Seite eines diesem Kreis einbeschriebenen Zehnecks (siehe XIII.10).
Da das Quadrat über AB gleich dem fünffachen Quadrat über MN und da das Quadrat über BA gleich dem dreifachen Quadrat über DG ist (siehe XIII.15), ist das dreifache Quadrat über DG gleich dem fünffachen Quadrat über MN.
Somit verhält sich das dreifache Quadrat über DG zum dreifachen Quadrat über CG wie das fünffache Quadrat über MN zum fünffachen Quadrat über MO. Da das fünffache Quadrat über MO zusammen mit dem fünffachen Quadrat über MN gleich dem fünffachen Quadrat über KL ist (siehe XIII.10), ist das fünffachen Quadrat über KL gleich dem dreifachen Quadrat über CG zusammen mit dem dreifachen Quadrat über DG.
Das fünffache Quadrat über KL ist gleich dem fünfzehnfachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem das Dreieck HKL einbeschrieben ist (siehe XIII.12).
Das dreifache Quadrat über DG zusammen mit dem dreifachen Quadrat über CG ist gleich dem fünfzehnfachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem das Fünfeck $CDEFG$ einbeschrieben ist (siehe XIV.2, Lemma), denn wie gezeigt, ist das Quadrat über DG zusammen mit dem Quadrat über CG gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem das Fünfeck $CDEFG$ einbeschrieben ist.
Da die fünfzehnfachen Quadrate über den erwähnten Radien gleich sind, ist der Durchmesser des Kreises der gleiche.
Deshalb haben die fünfeckige Seitenfläche eines Dodekaeders und die dreieckige Seitenfläche eines Ikosaeders, die derselben Kugel einbeschrieben sind, den gleichen Umkreis, was zu zeigen war. □

3.4 Satz 3

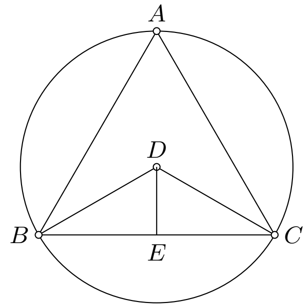
Das dreißigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, mit einer Seite des Fünfecks ist gleich der Oberfläche dessen Dodekaeders.
Das dreißigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, mit einer Seite des Dreiecks ist gleich der Oberfläche dessen Ikosaeders.

Wenn das gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck $ABCDE$ dem Kreis ACD mit dem Mittelpunkt F einbeschrieben und von F auf CD die Senkrechte FG errichtet ist, dann, sage ich, ist das dreißigfache Rechteck aus CD mit FG gleich dem zwölffachen Fünfeck $ABCDE$.



Denn wenn CF, FD gezogen werden, ist das Rechteck aus CD mit FG gleich dem doppelten Dreieck CDF und ist das fünffache Rechteck aus CD mit FG gleich dem zehnfachen Dreieck CDE.
Da das zehnfache Dreieck dem doppelten Fünfeck gleich ist, ist, jeweils versechsfacht, das dreißigfache Rechteck aus CD mit FG gleich der Oberfläche des Dodekaeders aus zwölf Fünfecken $ABCDE$.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass das dreißigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke DE von der Seite BC eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks ABC zum Mittelpunkt D des Kreises ABC, dem es einbeschrieben ist, mit BC gleich der Oberfläche dessen Ikosaeders ist.
Denn wenn BD, CD gezogen werden, ist das Rechteck aus DE mit BC gleich dem doppelten Dreieck DBC und ist das dreifache Rechteck aus DE mit BC gleich dem sechsfachen Dreieck DBC.

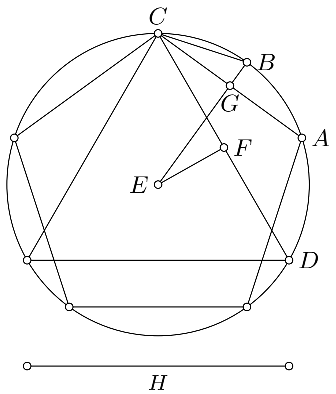


Da das sechsfache Dreieck DEC gleich dem doppelten Dreieck ABC ist, ist, jeweils verzehnfacht, das dreißigfache Rechteck aus DE mit BC gleich der Oberfläche des Ikosaeders aus zwanzig Dreiecken ABC, was zu zeigen war. □

Zusatz XIV.3:
Offensichtlich verhält sich die Oberfläche eines Dodekaeders zur Oberfläche eines Ikosaeders wie das Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises mit einer Seite des Fünfecks zum Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem sie einbeschrieben sind, mit einer Seite des Dreiecks.

3.5 Satz 4

Die Oberfläche eines Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders.



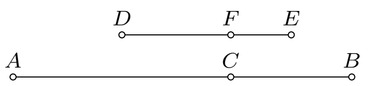
Wenn ABC der Umkreis eines Fünfecks des Dodekaeders und eines Dreiecks des Ikosaeders ist, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, wobei CD die Kante des Ikosaeders und somit die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, das dem Kreis ABC mit dem Mittelpunkt E einbeschrieben ist, und wobei AC die Kante des Dodekaeders ist, und wenn von E senkrecht zu DC, CA die Strecken EF, EG gezogen, EG um GB verlängert, BC eingetragen und die Kante H des der Kugel einbeschriebenen Würfels ist, dann, sage ich, verhält sich die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders wie H zu CD.

Denn da die Strecke aus BE, BC zusammen in stetiger Teilung geteilt ist, wobei BE der größere Teil ist (siehe XIII.9), da EG gleich der halben Strecke aus EB, BC zusammen ist (siehe 14.1) und da EF gleich der halben BE ist (wie in XIII.12), ist die Strecke EG in stetiger Teilung geteilt, wobei EF der größere Teil ist.
Wird H in stetiger Teilung geteilt, wobei CA der größere Teil ist (wie XIII.17 Zusatz), dann verhält sich H zu CA wie EG zu EF (siehe Lemma XIV.2).

Da dann das Rechteck aus PE mit H gleich dem Rechteck aus CA mit EG ist (siehe VI.16), verhält sich H zu CD wie wie das Rechteck aus PE mit H zum Rechteck aus CD mit FE (siehe VI.1).
Das Rechteck aus CA mit EG ist gleich dem Rechteck aus PE mit H, also verhält sich H zu CD wie das Rechteck aus CA mit EG zum Rechteck aus CD mit FE.
Damit verhält sich die Kante des Würfels zur Kante des Ikosaeders wie die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders (siehe XIV.3 Zusatz), was zu zeigen war. □.

3.6 Lemma 4

Sind zwei Strecken in stetiger Teilung geteilt, dann verhält sich die eine Strecke zu ihrem größeren Teil wie die andere Strecke zu ihren größeren Teil.



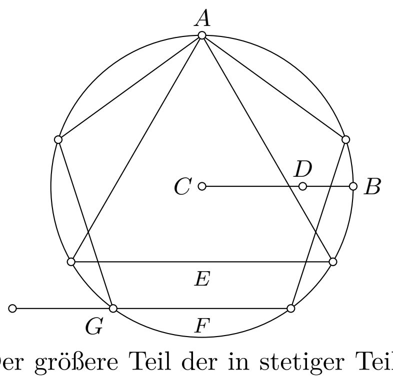
Wenn AB in C so ist stetiger Teilung geteilt ist, dass AC der größere Teil ist, und wenn DE in F so in stetiger Teilung geteilt ist, dass DF der größere Teil ist, dann sage ich, verhält sich AB zu AC wie DE zu DF.

Denn da das Rechteck aus AB mit BC gleich dem Quadrat über AC und da das Rechteck aus DE mit EF gleich dem Quadrat über DF ist (wie VI.17), verhält sich das Rechteck aus AB mit BC zum Quadrat über AC wie das Rechteck aus DE mit EF zum Quadrat über DF und verhalten sich vier Rechtecke aus AB mit BC zum Quadrat über AV wie vier Rechtecke aus DE mit EF zum Quadrat über DF.

In vergrößerten Verhältnissen verhalten sich mit vier Rechtecke aus AB mit BC zusammen mit dem Quadrat über AC zum Quadrat über AC wie vier Rechtecke aus DE und EF zusammen mit dem Quadrat über DF zum Quadrat über DF.

3.7 Satz 5

Die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, verhält sich zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfel zur Kante eines Ikosaeders.



Wenn AB der Umkreis eines Fünfecks des Dodekaeders und eines Dreiecks des Ikosaeders ist, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, und zum Mittelpunkt C der Radius CB gezogen und in D in stetiger Teilung so geteilt ist, dass CD der größere Teil ist, dann ist CD die Seite eines Zehnecks, das demselben Kreis einbeschrieben ist.

Ist E die Kante des Ikosaeders, F die Kante des Dodekaeders und G die Kante des Würfels, dann ist E die Seite eine gleichseitigen Dreiecks und F die Seite eines Fünfecks, die demselben Kreis einbeschrieben sind.

Der größere Teil der in stetiger Teilung geteilten Kante G des Würfels ist dann die Kante F des Dodekaeders [wie XIII.17. Zusatz].

Da E die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist und da das Quadrat über der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, das einem Kreis einbeschrieben ist, gleich dem dreifachen Quadrat über dem Radius ist [wie XIII.12.], somit das Quadrat über CB zusammen mit dem Quadrat über BD gleich dem dreifachen Quadrat über CD ist [wie XIII.4.], verhält sich das Quadrat über E zum Quadrat über CB wie die Quadrate über CB, BD zusammen zum Quadrat über CD.

Nach Umordnung [wie V16.], verhält sich das Quadrat über E zu den Quadraten über CB, BD zusammen wie das Quadrat über CB zum Quadrat über CD und wie das Quadrat über G zum Quadrat über F, denn F ist der größere Teil der Strecke G.
Damit verhält sich das Quadrat über E zu den Quadraten über CB, BD zusammen wie das Quadrat über G zum Quadrat über F und, nach Umordnung, verhält sich das Quadrat über G zum Quadrat über

E wie das Quadrat über F zu den Quadraten über CB, BD zusammen.

Da die Quadrate über BC, CD zusammen gleich dem Quadrat über F ist, denn das Quadrat über der Seite eines einem Kreis einbeschriebenen Fünfecks ist gleich den Quadraten über den Seiten des diesem Kreis einbeschriebenen Sechsecks und Zehnecks zusammen [wie XIII.10.], verhält sich das Quadrat über G zum Quadrat über E wie die Quadrate über BC, CD zusammen zu den Quadraten über CB, BD zusammen.

Also verhält sich das Quadrat über G zum Quadrat über E wie die Seite des Quadrats, das den Quadraten über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist.

Dabei ist G die Kante eines Würfels und E die Kante eines Ikosaeders.

Deshalb verhält sich die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, was zu zeigen war.

3.8 Satz 6

Das Volumen eines Dodekaeders verhält sich zum Volumen eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders.

Die Umkreise des Fünfecks des Dodekaeders und des Dreiecks des Ikosaeders, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, sind gleich [wie XIV.2.]. Gleiche Kreise auf der Oberfläche einer Kugel sind gleich weit von deren Mittelpunkt entfernt, denn die senkrechten Strecken vom Mittelpunkt der Kugel zu den Ebenen, in denen die Kreise liegen, sind gleich und gehen durch die Mittelpunkte der Kreise.

Also verhalten sich die Pyramiden, deren eine Grundfläche das Fünfeck des Dodekaeders und deren andere Grundfläche das Dreieck des Ikosaeders ist, wobei ihre Spitzen der Mittelpunkt der Kugel ist, wie ihre Grundflächen, denn ihre Höhen sind gleich und Pyramiden gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen [wie XII.6.].

Damit verhält sich das Fünfeck zum Dreieck wie die Pyramide, deren Grundfläche das Fünfeck, zur Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck ist, wobei ihre Spitze jeweils der Mittelpunkt der Kugel ist.

Es verhalten sich damit zwölf Fünfecke zu zwanzig Dreiecken wie zwölf Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Fünfeck, zu zwanzig Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Dreieck sind.

Da zwölf Fünfecke die Oberfläche des Dodekaeders und zwanzig Dreiecke die Oberfläche des Ikosaeders sind, verhält sich die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders wie zwölf Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Fünfeck, zu zwanzig Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Dreieck sind. Dabei haben zwölf Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Fünfeck sind, das Volumen des Dodekaeders und haben zwanzig Pyramiden, deren Grundflächen gleich dem Dreieck sind, das Volumen des Ikosaeders.

Somit verhält sich die Oberfläche des Dodekaeders zur Oberfläche des Ikosaeders wie das Volumen des Dodekaeders zum Volumen des Ikosaeders.

Wie gezeigt, verhält sich die Oberfläche eines Dodekaeders zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders [wie XIV.4.].

Deshalb verhält sich die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders wie das Volumen des Dodekaeders zum Volumen des Ikosaeders.

Zusatz XIV.6.:
Es verhält sich die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfel zur Kante eines Ikosaeders [wie XIV.5.].

Wie gezeigt, verhält sich die Oberfläche eines Dodekaeders zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders [wie XIV4.].

Das Volumen eines Dodekaeders verhält sich zum Volumen eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders [wie XIV6.], wobei das Fünfeck des Dodekaeders und das Dreieck des Ikosaeders dem gleichen Kreis und Dodekaeder und Ikosaeder der gleichen Kugel einbeschrieben sind, und diese verhalten sich wie die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer beliebigen in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist.

Deshalb verhält sich ein Dodekaeder zu einem Ikosaeder, der der gleichen Kugel einbeschrieben ist, wie die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer beliebigen in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist.