Berechnung pythagoräischer Tripel

Autor: Dieter Behrendt, 2020

Im rechtwinkligen Dreieck gilt u.a. der Satz des Pythagoras. Wir schreiben ihn in der Form

$$a^2 + x^2 = (x+m)^2 \tag{1}$$

a, x und m sind natürliche Zahlen (außer Null). Gleichung 1 umgeformt nach a^2 ergibt

$$a^2 = 2mx + m^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a = \sqrt{2mx + m^2} \tag{2}$$

Für $m = 1$ wird Gleichung 2 zu

$$a_1 = \sqrt{2x+1} \tag{2.1}$$

Nachstehende Wertetafel zeigt die Werte für a_1 in Anhängigkeit von x:

x	1	2	3	4	5	...	12	...	24	...	39	40	...	60	...
a_1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\underline{\sqrt{9}}$	$\sqrt{11}$		$\underline{\sqrt{25}}$		$\underline{\sqrt{49}}$		$\sqrt{79}$	$\underline{\sqrt{81}}$		$\sqrt{121}$	

Nur die a_1 bilden mit den zugehörigen x (und $x+1$) pythagoräische Zahlentripel, bei denen in der Wurzel eine Quadratzahl steht (unterstrichene Wurzelausdrücke).
Tabelle 1 zeigt die ersten fünf Tripel für $m = 1$. In der gleichen Weise können die Zahlentripel für weitere m ermittelt werden, Tabellen 2 bis 6.

Der Anschaulichkeit halber sind den Tabellen 1, 3 und 5 auch die ungeraden Werte 1, 3 und 5 für m zugeordnet, sowie den Tabellen 2, 4 und 6 die geradzahligen 2, 4 und 6.
Dabei sind auch hier die jeweils ersten fünf Tripel aufgelistet. Die Nummerierung der einzelnen Tripel in den Tabellen erfolgt fortlaufend von $n = 1 - 5$ für ungerade m und von $n = 2 - 6$ für gerade m (Erklärung dafür weiter unten).

Tabellen 1, 3, 5 ; m = ungerade

$m = 1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2x+1}$ Gl. 2.1

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
1	4	3	4+1=5	16	9	25
2	12	5	12+1=13	144	25	169
3	24	7	24+1=24	576	49	625
4	40	9	40+1=41	1600	81	1681
5	60	11	60+1=61	3600	121	3721

$m = 3 \Rightarrow a_3 = \sqrt{6x+9}$ Gl. 2.3

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
1	12	9	12+3=15	144	81	225
2	36	15	36+3=39	1295	225	1521
3	72	21	72+3=75	5184	441	5625
4	120	27	120+3=123	14400	729	15129
5	180	33	180+3=183	32400	1089	33489

$m = 5 \Rightarrow a_5 = \sqrt{10x+25}$ Gl. 2.5

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
1	20	15	20+5=25	400	225	625
2	60	25	60+5=65	3600	625	4225
3	120	35	120+5=125	14400	1225	15625
4	200	45	200+5=205	40000	2025	42025
5	300	55	300+5=305	90000	3025	93025

Tabellen 2, 4, 6 ; m = gerade

$m = 2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{4x+4} = 2\sqrt{x+1}$ Gl. 2.2

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
2	3	4	3+2=5	9	16	25
3	8	6	8+2=10	64	36	100
4	15	8	15+2=17	225	64	289
5	24	10	24+2=26	576	100	676
6	35	12	35+2=37	1225	144	1369

$m = 4 \Rightarrow a_4 = \sqrt{8x+16} = 2\sqrt{2x+4}$ Gl. 2.4

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
2	6	8	6+4=10	36	64	100
3	16	12	16+4=20	256	144	400
4	30	16	30+4=34	900	256	1156
5	48	20	48+4=52	2304	400	2704
6	70	24	70+4=74	4900	576	5476

$m = 6 \Rightarrow a_6 = \sqrt{12x+36} = 2\sqrt{3x+9}$ Gl. 2.6

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
2	9	12	9+6=15	81	144	225
3	24	18	24+6=30	576	324	900
4	45	24	45+6=51	2025	576	2601
5	72	30	72+6=78	5184	900	6084
6	105	36	105+6=111	11025	1296	12321

Aus den Tabellen 1-6 ist zu erkennen, dass die Werte für a in besonderer Weise mit m und n verknüpft sind. Danach lässt sich a_{un} für ungerade m durch die Beziehung

$$a_{un} = m(2n+1) \tag{3.1}$$

und a_{ge} für gerade m durch die Beziehung

$$a_{ge} = m \cdot n \tag{3.2}$$

ausdrücken. Damit können pythagoräische Zahlentripel über die frei wählbaren Variablen m und n berechnet werden, wobei für die Berechnung von x, je nachdem ob m ungerade oder gerade ist, die Gleichung 3.1 oder Gleichung 3.2 in Gleichung 1 eingesetzt werden müssen.
Gleichung 1 wird damit mit Gleichung 3.1 für ungerade m zu

$$x_{un} = \frac{a^2 - m^2}{2m} = \frac{m^2(2n+1)^2 - m^2}{2m} = 2m(n^2+n) \tag{4.1}$$

und mit Gleichung 3.2 für gerade m zu

$$x_{ge} = \frac{m^2n^2 - m^2}{2m} = \frac{m}{2}(n^2-1) \tag{4.2}$$

Für $n = 1$ wird $x_{ge} = 0$ zu null, d.h. $a = m$, was natürlich keine Lösung im o.g. Sinne ist. Daher gilt Gleichung 4.2 nur für $n \geq 2$.

Addiert man in Gleichung 4.1 und 4.2 das zugehörige m, erhält man:

$$(x+m)_{un} = 2m(n^2+n) + m = m(2n^2+n+1) \tag{5.1}$$

sowie

$$(x+m)_{ge} = \frac{m}{2}(n^2-1) + m = \frac{m}{2}(n^2+1) \tag{5.2}$$

Einfacher ist es natürlich zum ermittelten x sofort m zu addieren um die dritte Zahl des Tripels zu erhalten.

Noch einige Zahlenbeispiele:

1. $m = 5$, $n = 6$

   Gl. 3.1 $\quad a_{un} = m(2m+1) = 5(2 \cdot 6 + 1) = 65$

   Gl. 4.1 $\quad x_{un} = 2m(m^2 + n) = 2 \cdot 5(6^2 + 6) = 420$

   Gl. 5.1 $\quad (x+m)_{un} = m(2n^2 + 2n + 1) = 5(2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1) = 425$

   Probe: $65^2 + 420^2 = 425^2$, d.h. $4225 + 176400 = 180625$

2. $m = 7$, $n = 3$

   $$\begin{aligned} a_{7/3} &= 7(2 \cdot 3 + 1) = 49 \\ x_{7/3} &= 2 \cdot 7(3^2 + 3) = 168 \\ (x+m)_{7/3} &= 175 \end{aligned}$$

   Probe: $49^2 + 168^2 = 175^2$, d.h. $2401 + 28224 = 30625$

3. $m = 8$, $n = 2$

   Gl. 3.2 $\quad a_{8/2} = m \cdot n = 16$

   Gl. 4.2 $\quad x_{8/2} = \dfrac{m}{2}(n^2 - 1) = 12$

   Gl. 5.2 $\quad (x+m)_{8/2} = \dfrac{n}{2}(n^2 + 1) = 20$

   Probe: $16^2 + 12^2 = 20^2$, d.h. $256 + 144 = 400$

4. $m = 2$, $n = 7$

   $$\begin{aligned} a_{2/7} &= 2 \cdot 7 = 14 \\ x_{2/7} &= \frac{2}{2}(7^2 - 1) = 48 \\ (x+m)_{2/7} &= (48 + 2) = 50 \end{aligned}$$

   Probe: $14^2 + 48^2 = 50^2$, d.h. $196 + 2304 = 2500$

Berechnung pythagoräischer Tripel der Form $a^2 + (a+i)^2 = c^2$

Autor: Dieter Behrendt, 2020

Gemäß der obigen Gleichng ist die größere Kathete im rechtwinkligen Dreieck um i größer (i ganze Zahl) als die kleinere. Es genügt, wenn man diese Aufgabe für $i = 1$ löst.
Alle weiteren Tripel ergeben sich dann durch Multiplikation der gefundenen Lösungen für $i = 1$ mit den Faktoren $f = 2, 3, ..., j$.

Aus $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ ergibt sich für a die quadratische Gleichung in der Normalform

$$a^2 + a + \frac{1}{2} - \frac{c^2}{2} = 0 \tag{1}$$

mit der Lösungsgleichung

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{c^2}{2}} \tag{1.1}$$

Umgeformt ergibt sich daraus die positive Lösung für a in Abhängigkeit von c zu:

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2c^2 - 1} - 1\right) \tag{1.2}$$

Die erste Lösung ist sofort bekannt, schon das einfachste (und erste) Tripel 3, 4 und 5 ergibt für a eine ganze Zahl

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{49} - 1\right) = 3$$

mit $b = a + 1$ wird $b = 4$, so dass das erste Tripel dieser komplett ist.

Leider geht es nicht so bequem weiter, da der Wurzelausdruck in (1.2) eine ungerade Quadratzahl sein muss, damit sich in Verbindung mit dem Subtrahenden 1 in der Klammer und dem Faktor $\frac{1}{2}$ vor der Klammer für a eine natürliche Zahl ergibt.
Die ersten sechs Tripel, bei denen $b - a = 1$ gilt, sind in nachstehender Tabelle aufgelistet:

Nr.	c	c^2	a	$b = a + 1$	a^2	$b^2 = (a+1)^2$
1	5	25	3	4	9	16
2	29	841	20	21	400	441
3	169	28561	119	120	14161	14400
4	985	970225	696	697	484416	485809
5	5741	32959081	4059	4060	16475481	16483600
6	33461	1119638521	23660	23661	559795600	559842921