Aufgabensammlung

"Abituraufgaben"

306 Aufgaben der schriftlichen Reifeprüfung Mathematik der Erweiterten Oberschulen der DDR

Zusammenstellung und Zeichnungen: Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2018-2022

Vorwort

Mit der Gründung der Sowjetischen Besatzungszone und der Verwaltung durch die Sowjetische Militäradministration Deutschland (SMAD) ab Juni 1945 kam es zur Umsetzung der Grundsätze der Potsdamer Konferenz. Dazu gehörte eine vollständige Änderung des Bildungssystem.

Nach der Gründung der Deutschen Zentralverwaltung für Volksbildung (DVV) am 27. Juni 1945, welche "die Tätigkeit der Schulverwaltungen in den Ländern und Provinzen zusammenfassen, koordinieren, anleiten und kontrollieren" soll, wird am 25. August 1945 der SMAD-Befehl Nr. 40 "Über die Vorbereitung der Schulen zum Schulbetrieb" erlassen, der dazu führt, dass am 01. Oktober 1945 die allgemeinbildenden Schulen mit neuen vorläufigen Stundentafeln ihren Dienst wieder aufnehmen können. In dieser Zeit kommt es zur Ausbildung vieler Neulehrer, um die fehlenden Lehrkräfte ersetzen zu können.

Mit dem "Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule" wird zwischen dem 22. Mai und dem 2. Juni 1946 einer der zentralsten Beschlüsse für die nachfolgende Zeit getroffen.
Dadurch wird die demokratische Einheitsschule geschaffen, welche die Dreigliedrigkeit des Schulsystems aufhebt, und auch die Koedukation (geschlechtsunabhängige Klassenbildung) umsetzt. Als eine weitere Folge werden die einklassigen Landschulen im Laufe der Zeit abgeschafft.

Mit der Gründung der DDR geht die DVV im Ministerium für Volksbildung (MfV) auf.
Die Bildungsstruktur der achtklassigen Einheitsschule bleibt grundsätzlich erhalten und wird 1951 auf eine Zehnjahresschule erweitert. Mit Einführung der Polytechnik geht diese im Schuljahr 1958/59 nahtlos in die polytechnische Oberschule (POS) über.

Die Erweiterte Oberschule (EOS) löste mit dem "Gesetz über die sozialistische Entwicklung des Schulwesens in der DDR" vom 2. Dezember 1959 die bisherige Oberschule ab.
Die EOS umfasste vier Klassenstufen (9 bis 12), ab 1981 die Klassen 11 und 12, und war in der DDR die Bildungseinrichtung, an der die Hochschulreife (Abitur) erworben werden konnte.
Daneben gab es weitere Möglichkeiten, etwa die Berufsausbildung mit Abitur, die Arbeiter-und-Bauern-Fakultät, die Volkshochschulen oder Spezialschulen und -klassen verschiedener Richtungen.

Ein erster Mathematiklehrplan wird durch die DVV am 01. Juli 1946 herausgegeben. Dieser wird am 15. März 1948 überarbeitet und mit weiteren Details versehen. Die Lehrpläne selbst sind reine Stoffpläne, in denen vereinzelt fachdidaktische Kommentare enthalten sind.

Ab 1945 werden in der achtklassigen Volksschule in den Klasse 1 bis 6 jeweils 4 bis 5 Wochenstunden Rechnen, in der Klassenstufe 7 und 8 je 2 Stunden Rechnen, Algebra und Geometrie unterrichtet, an den Oberschulen, getrennt für Jungen oder Mädchen, je Klasse 1 bis 9 jeweils 4 Mathematikstunden je Woche.

Ab 1946 werden an den Oberschulen wieder die Klassenstufen 9 bis 12 unterrichtet.
Bis zum Abiturjahrgang 1965 gab es dabei drei Spezialisierungsrichtungen (Zweige) mit unterschiedlichen Stundentafeln. Es waren dies: A neusprachliches, B mathematisch-naturwissenschaftliches und C altsprachliches Profil.
Die Mathematiklehrpläne der Zweige unterschieden sich vor allem im Anforderungsniveau.
Im A- und C-Zweig wurden in jeder Jahrgangsstufe 3 Wochenstunden Mathematik unterrichtet, im B-Zweig 5 bzw. 6 Stunden von Klasse 9 bis 12.

1951 bringt das Ministerium für Volksbildung den Lehrplan für die Zehnjahresschule heraus, welcher 1955/56 durch vorläufige Lehrpläne überarbeitet wurde und im Lehrplan zur Polytechnischen Oberschule 1959 mündet.

Ein wichtige Änderung des Mathematikunterrichts erfolgte am 17. Dezember 1962 mit dem sogenannten Mathematikbeschluss – "Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR".[1]
Der Mathematikunterricht erhielt einen wesentlich höheren Stellenwert.
Es war ein in der Geschichte des Mathematikunterrichts einmaliges Ereignis, da zu keinem anderen Unterrichtsfach jemals etwas Ähnliches beschlossen wurde, was die Wertschätzung und auch Anerkennung der Schwierigkeiten dieses Faches zum Ausdruck bringt.

U.a. wurde die Ausbildung von Lehrern für Mathematik und Naturwissenschaften stark erhöht, die Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule“ ins Leben gerufen, ein Institut für Schulmathematik an der Humboldt-

[1] Download: https://mathematikalpha.de/?smd_process_download=1&download_id=19079

Universität Berlin gegründet und eine „Zentrale Staatliche Kommission für Mathematik“ (ZSKM) berufen.
Die außerschulische Bildung mathematisch Begabter wurde wesentlich gefördert, eine landesweite Mathematikolympiade durchgeführt, Spezialklassen für Mathematik gebildet und vieles mehr.
Interessant ist, dass die Kinder- und Jugendmedien beauftragt wurden, regelmäßig Beiträge und Aufgaben zur Mathematik zu veröffentlichen und so das Interesse der Schüler zu wecken.
Ab 1967 wurde die erste deutsche mathematische Schülerzeitschrift "alpha" veröffentlicht.

Mit einer Übergangsstundentafel für die erweiterte zwölfklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule 1959 endete die Ära der Oberschule. Ab 1961 galt die Stundentafel für die erweiterte Oberschule. Im A- und C-Zweig wurden in jeder Jahrgangsstufe 3 Wochenstunden Mathematik unterrichtet, im B-Zweig 5 Stunden von Klasse 9 bis 11 und 4 Stunden in der Klassenstufe 12.
Ab 1966 gab es keine speziellen Profile mehr.

Nach der Abschaffung der unterschiedlichen Zweige wurden in der Klassenstufe 11 und 12 jeweils 5 Wochenstunden Mathematik gegeben.

Am Ende der 12. Klasse wurde von allen Schülern die zentrale Reifeprüfung abgelegt.
Zur schriftlichen Prüfung wurden vier Arbeiten unter Klausur geschrieben: Deutsch (5 Stunden), Mathematik (5 Stunden), Russisch (1,5 Stunden) und Naturwissenschaft (Physik oder Chemie oder Biologie, 5 Stunden).
Zusätzlich waren zwei bis fünf mündliche Prüfungen sowie eine Sportprüfung verpflichtend.

Die schriftliche Mathematik-Abiturprüfung musste von allen Schülern absolviert werden.
Als Hilfsmittel waren i.A. eine Formelsammlung, Zeichengeräte und ein Rechenstab zugelassen. Ab 1988 wurde der Taschenrechner SR 1 ("Schulrechner 1") eingesetzt.

Die Inhalte des Mathematikunterrichts waren eindeutig vorgeschrieben. Ebenso der zeitliche Rahmen für die Stoffgebiete.
Die Lehrpläne und -bücher wurden von führenden Mathematikdidaktikern erarbeitet. Diese landesweit einheitlichen Lehrbücher waren im Aufbau und Inhalt fächerübergreifend angepasst.
Nicht vorgeschrieben war, wie der Unterrichtsstoff zu vermitteln sei. Damit kam der methodischen Arbeit des Lehrers große Bedeutung zu. Aus diesem Grund beinhaltete die Lehrerausbildung in hohem Umfang Pädagogik, Psychologie, Didaktik und Methodik der Mathematik.

Die schriftliche Abiturprüfung wurden mit einer Note 1 bis 5 bewertet. Die Gesamtabiturnote ergab sich als arithmetisches Mittel der Jahresnote der Klasse 12 und dem Prüfungsergebnis.
Gegebenenfalls wurde eine zusätzliche mündliche Prüfung durchgeführt.

Im Nachfolgenden werden die schriftlichen Abiturprüfungsaufgaben einzelner Jahrgänge aufgeführt.
Vielen Dank an Dieter Barth für die Hilfe bei der Bereitstellung der Originalaufgaben.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

1.1 Abituraufgaben 1953 A

Aufgabe 1
Ein Flugzeug fliegt von Moskau ($\varphi_1 = 55°46'N; \lambda_1 = 37°34'O$) nach Wladiwostok ($\varphi_2 = 43°06'N; \lambda_2 = 131°36'O$).
Zu berechnen sind:

a) die Entfernung Moskau-Wladiwostok auf dem Großkreis,

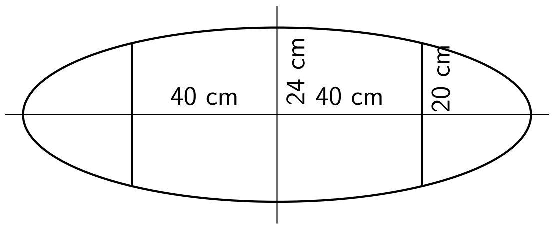
b) der Kurswinkel bei dem Abflug von Moskau,

c) die geographische Breite des nördlichsten Punktes der Strecke Moskau-Wladiwostok!

Aufgabe 2
Untenstehende Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Fasses, das durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die große Achse in den eingezeichneten Grenzen entstehen soll.



a) Bestimmen Sie aus den gegebenen Stücken die noch unbekannte große Halbachse a!

b) Berechnen sie das Volumen des Fasses in Litern! (Wandstärke bleibt unberücksichtigt.)

Aufgabe 3
Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven:

$$x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8 \qquad \text{und} \qquad x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28$$

a) Lösung durch Rechnung!

b) Lösung durch Zeichnung!

1.2 Abituraufgaben 1954 A

Aufgabe 1
Ein sowjetischer Eisbrecher verlegte seinen Standort aus der Gegend südlich Spitzbergens ($\varphi_1 = 77°N; \lambda_1 = 18{,}33°O$) auf dem kürzesten Wege in die Gegend nördlich der Insel Nowaja Semlja ($\varphi_2 = \varphi_1; \lambda_2 = 68{,}73°O$).

a) Wieviel Kilometer ist die Fahrtstrecke auf dem Hauptkreisbogen kürzer als die auf dem 77.Breitenkreis?

b) Wieviel Seemeilen ist der nördlichste Punkt des Großkreisbogens vom 77.Breitenkreis entfernt? (Eine Planskizze wird gefordert.)

Aufgabe 2
Die Kurve der Funktion

$$y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{x}(4-x)$$

bildet eine Schleife.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen und zeichnen Sie das Bild der Funktion im Bereich $x = 0$ bis $x = 5$!

b) Berechnen Sie die Fläche innerhalb der Schleife!

c) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Schleife um die x-Achse entsteht!

Aufgabe 3
Durch den Punkt $P_1(8; -10)$ des Kreises $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 156 = 0$ ist die Tangente gezeichnet.

a) Zeichnen Sie den Kreis und die Tangente mit der Koordinateneinheit 0,5 cm!

b) Berechnen Sie, wo und unter welchem Winkel die Tangente die x-Achse schneidet!

1.3 Abituraufgaben 1954 B

Aufgabe 1
An einem Vormittag, Ende April dieses Jahres, warf in Potsdam ($\varphi = 52{,}4°N; \lambda = 13{,}1°O$) ein senkrechter Stab von 1 m Länge einen waagerechten Schatten von 1,50 m in Richtung WNW.
(Zeitgleichung: -2,5 min)

a) In welcher Höhe stand die Sonne?

b) Wie groß war die Deklination? (Planskizze verlangt)

c) Um wieviel Uhr mitteleuropäischer Zeit erfolgte die Beobachtung?

Aufgabe 2
Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck von 34 dm Umfang.
Wie lang sind die Rechteckseiten, wenn der Zylinder ein Volumen von 440 dm^3 hat und seine Höhe kleiner als sein Durchmesser ist?
(Berechnen Sie diese Rechteckseiten in Dezimeter auf zwei Dezimalstellen genau durch Näherungslösung!)

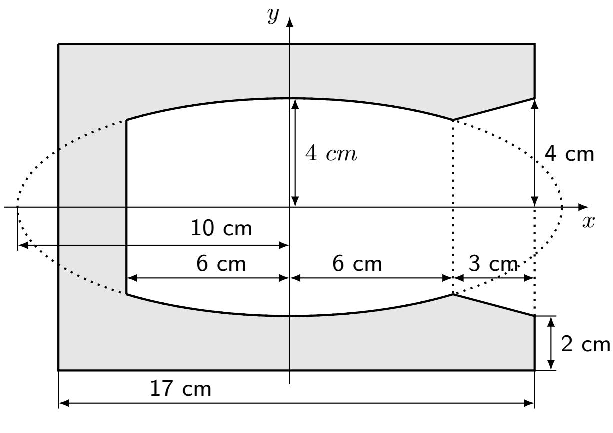
Aufgabe 3
Eine Gipsgussform ist ein Zylinder. Die Skizze zeigt den Achsenschnitt der Gipsform mit dem Hohlraum.

a) Stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf!

b) Berechnen Sie das Volumen des Hohlraums, der durch Rotation der Ellipse um die x-Achse in den angegebenen Grenzen entsteht!

c) Wie groß ist das Gesamtvolumen des Hohlraums?
(Kegelstumpf elementar berechnen.)

d) Wie groß ist das Volumen des Gipskörpers?



1.4 Abituraufgaben 1955 B

Aufgabe 1
Ein Frachtdampfer fährt von Auckland - Neuseeland - ($\varphi_1 = 36{,}8°$ S, $\lambda_1 = 174{,}8°$ O) nach Punta Arenas - Kostarika - ($\varphi_2 = 9{,}9°$ N, $\lambda_2 = 84{,}6°$ W).

a) Fertigen Sie eine Überlegungsskizze an.

b) Berechnen Sie den orthodromen Weg Dampfers in Seemeilen.

c) Berechnen Sie den Anfangskurs.

d) Bei welcher geographischen Länge und unter welchem Winkel wird der Äquator geschnitten?

Aufgabe 2
Aus einem zylindrischen Baumstamm mit dem Durchmesser d soll ein Balken größter Tragfähigkeit hergestellte werden. Für die Tragfähigkeit gilt die Formel

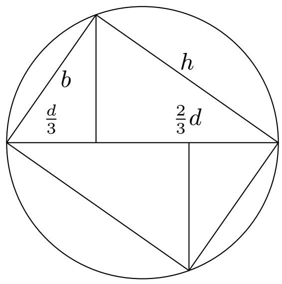
$$T = c \cdot b \cdot h^2$$

(c ist eine Materialkonstante, b die Breite, h die Höhe des rechteckigen Balkenquerschnittes).

a) Wie groß müssen b und h gewählt werden?

b) In welchem Verhältnis stehen b und h zueinander?

c) In der Praxis konstruiert man den Querschnitt des Balkens nach Abb. 55/B/2.



Der Durchmesser ist in drei gleiche Teile geteilt. Berechnen Sie nach der Konstruktionsfigur aus dem Durchmesser d Breite und Höhe.
Vergleichen Sie die hier gewonnenen Ergebnisse mit denen der Aufgabe a).

Aufgabe 3
Von einem ebenen Dreieck sind folgende Stücke gegeben:

$$\gamma = 38°; \qquad \alpha = 112{,}5°; \qquad c = 12{,}2 \text{ cm}$$

a) Berechnen Sie die Länge der Seite a.

b) Welchen Einfluss haben die Winkelfehler $\Delta\alpha = \Delta\gamma = \pm 0{,}2°$ auf das Ergebnis (absoluter und relativer Fehler)?

1.5 Abituraufgaben 1956 B

Aufgabe 1
Der Polarforscher Fridtjof Nansen ließ sich 1893-1896 in seinem Schiff "Fram" mit dem Eis des Polarmeeres nordwärts treiben.
Seiner Fahrt lag folgende Beobachtung zugrunde:
Aus der Gegend der Neusibirischen Inseln $P_1(\varphi_1 = 77°N; \lambda_1 = 140°O)$ geht eine Meeresströmung mit der mittleren Geschwindigkeit $v = 2\frac{\text{sm}}{\text{Tag}}$ über die Polargegend, die an der Ostküste Grönlands $P_2(\varphi_2 = 80°N; \lambda_2 = 10°W)$ das offene Meer wieder erreicht.

a) Welche Fahrtdauer ergibt sich daraus, wenn die Fahrt auf der Orthodrome planmäßig verläuft?

b) In welchem Abstand sollte die "Fram" unter diesen Voraussetzungen am Pol vorbeitreiben?

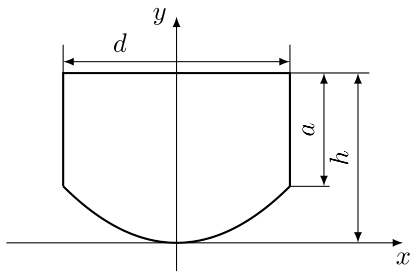
Aufgabe 2
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens die Lösung der Gleichung

$$\sin x + 1{,}8x - 1{,}5 = 0$$

im Bogenmaß auf drei Dezimalen genau!

Aufgabe 3
Die beigegebene, nicht maßstäbliche Skizze gibt den Achsenschnitt eines Kessels an.
Das Kurvenstück ist eine Parabel mit der Gleichung

$$y = \frac{2h}{d^2}x^2$$



Berechnen Sie

a) die Fläche des Achsenschnittes,

b) die Größe a,

c) den Rauminhalt des Kessels, wenn die y-Achse die Rotationsachse dieses Drehkörpers ist!
Zahlenbeispiel: $h = 0{,}6$ m; $d = 1{,}0$ m.

1.6 Abituraufgaben 1957 B

Aufgabe 1
Im März 1956 flog ein Düsenpassagierflugzeug TU-104 von Moskau ($\varphi_1 = 55{,}8°N$; $\lambda_1 = 37{,}4°$ O) über Berlin ($\varphi_2 = 52{,}4°N$; $\lambda_2 = 13{,}5°O$) nach London ($\varphi_3 = 51{,}3°N$; $\lambda_3 = 0{,}1°W$).
Die Flugzeit betrug $3\frac{1}{2}$ Stunden.

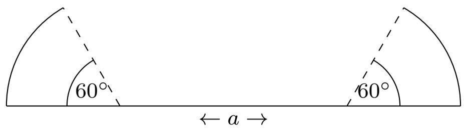
a) Wie groß ist der Flugweg, wenn orthodrome Kurse geflogen werden? (Skizze) ?

b) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich für den berechneten Flug?

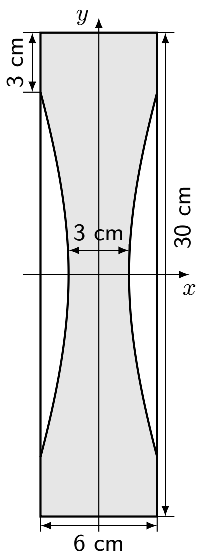
c) Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeuges betrug auf dem wirklichen Kurs 800 km/h.
Um wieviel km und wieviel Prozent war der tatsächlich geflogene Kurs länger als der von Ihnen unter a) berechnete Wert?

d) Berechnen Sie nun mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks die kürzeste Entfernung Berlin-London mit dem von den wahren Werten nur unbedeutend abweichenden Mittelwert φ Berlin $= \varphi$ London $= 51{,}8°N$.
Um wieviel km weicht das Resultat von dem entsprechenden unter a) berechneten Wert ab? (Skizze)

Aufgabe 2
Aus einem $a = 90$ cm breiten rechteckigen Blech soll eine Rinne von trapezförmigem Querschnitt hergestellt werden. Dazu biegt man an den Längsseiten gleichbreite Ränder um 60° hoch. (Siehe Skizze).



Wie breit müssen die Randstreifen gemacht werden, wenn der Querschnitt der Rinne möglichst groß werden soll? (Überlegungsfigur erforderlich).



Aufgabe 3
Es soll das Gewicht einer eisernen Schwungscheibe ($\gamma = 7{,}8$ p/cm^3) aus den Maßangaben des nebenstehenden Achsenschnittes berechnet werden.
Sie wird aus einer zylindrischen Scheibe (Durchmesser $d = 30$ cm, Dicke $h = 6$ cm) durch Ausdrehen der Vertiefungen hergestellt; die gezeichneten Bögen sind Teile einer Hyperbel.

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!

b) Wieviel verliert die Scheibe durch das Ausdrehen an Gewicht?

c) Wie schwer ist die fertige Schwungscheibe?

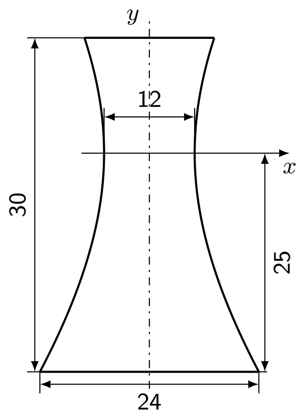
1.7 Abituraufgaben 1958 B

Aufgabe 1
Die Bahn des Sputnik 1 lag in einer Ebene. welche die Erdoberfläche in einem Großkreis schneidet.
In einem bestimmten Zeitpunkt lagen Berlin (B) und ein Ort P auf diesem Großkreis.
B ($\varphi_1 = 52{,}5°N$; $\lambda_1 = 13{,}4°O$)
P ($\varphi_2 = 34{,}4°N$; $\lambda_2 = 137{,}4°O$)

a) Wieviel Grad misst der Großkreisbogen von B bis P?

b) In wieviel Minuten würde dieser Großkreisbogen durchlaufen, wenn für den ganzen Großkreis 96 Minuten benötigt werden?

c) Welche geographische Breite hat der nördlichste Punkt des unter a) errechneten Großkreisbogens?



Aufgabe 2
Ein Kühlturm hat die Gestalt eines Rotationshyperboloids.
Nebenstehende Skizze stellt den Achsenschnitt seines Innenraumes dar.
Seine schmalste Stelle liegt in einer Höhe von 25 m.

a) Berechnen Sie das Volumen des Innenraumes!

b) Berechnen Sie den Durchmesser der oberen Öffnung!

(Maßangaben in m)

Aufgabe 3
Von der Kurve

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$$

sind zu bestimmen:
die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte, Wendepunkte und Pole.
Ferner ist das Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$ zu untersuchen.
Die Ergebnisse sind in ein Koordinatensystem einzutragen und zu einer Skizze des Kurvenverlaufs zu verwenden.

1.8 Abituraufgaben 1959 B

Aufgabe 1
Zur Leipziger Frühjahrsmesse 1959 wurde für Messegäste aus Übersee durch die Eröffnung der Interflug-Route Leipzig-Kopenhagen erstmalig der Anschluss an die Nordpolroute der Skandinavischen Luftfahrtgesellschaft hergestellt.
Messegäste aus Tokio ($\varphi_1 = 35{,}7°N$; $\lambda_1 = 139{,}2°O$) fliegen zunächst nach Nome in Alaska ($\varphi_2 = 65{,}2°N$; $\lambda_2 = 167{,}5°$ W). Von dort wird der Flug auf dem Meridian von Nome über den Nordpol und ständig auf dem gleichen Großkreis über Kopenhagen nach dem Messeflugplatz Leipzig ($\varphi_3 = 51{,}3°N$; $\lambda_3 = 12{,}5°O$) fortgesetzt.

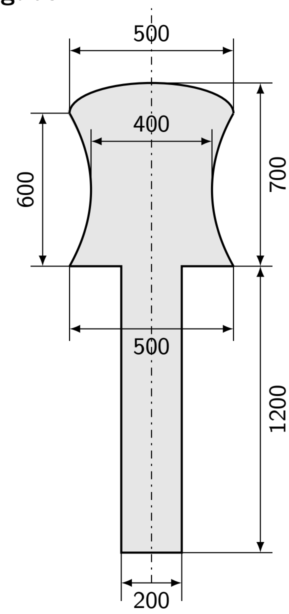
Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass orthodrome Kurse eingehalten werden, die Flugwege in km

a) Tokio-Nome (Skizze!),

b) Nome(-Kopenhagen)-Leipzig,

c) Berechnen Sie den Abflugkurs in Tokio!

Aufgabe 2



Die Zeichnung zeigt den Achsenschnitt eines Pollers, an dem beim Anlegen eines Schiffes die Haltetaue befestigt werden.
Die seitlichen Bögen des Achsenschnittes sind Hyperbeläste. Den oberen Abschluss des Achsenschnittes bildet eine halbe Ellipse. Der untere zylindrische Teil wird in die Hafenmauer eingelassen.

Die Form des Pollers ergibt sich durch Rotation des Achsenschnittes um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen

a) des Rotationshyperboloids.

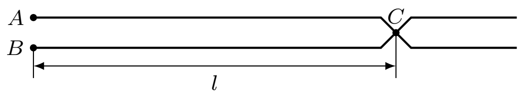
b) des halben Rotationsellipsoids unter Benutzung eines zweiten hierfür besonders geeigneten Koordinatensystems,

c) des Zylinders!

d) Wie groß ist das Gesamtgewicht des gusseisernen Pollers ($\gamma = 7{,}1$ kp/dm^3)?

(Anleitung: Für die Rechnung ist es zweckmäßig, die Maßangaben in dm umzuwandeln.)

Aufgabe 3
Zwei Adern eines im Erdreich liegenden Fernsprechkabels aus Kupferdraht mit einem Durchmesser von $d = (0{,}9 \pm 0{,}01)$ mm zeigen am Punkt C Kurzschluss gegeneinander (siehe Skizze).



Zur Bestimmung der Schadenstelle C ermittelt man durch mehrere Messungen einen Widerstand von $R = (13 \pm 0{,}2)\Omega$ in den Leitungsstrecken $\overline{ACB}$.
Der spezifische Widerstand beträgt $\rho = 0{,}0178\Omega$ mm^2/m. In diesem Fall gilt für den Widerstand R die Beziehung

$$R = \frac{\rho \cdot 2l}{q}$$

($2l$ wegen der Hin- und Rückleitung), wobei q den Querschnitt des Leiters in mm^2 und l seine Länge in m bedeuten.

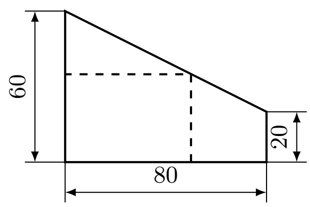
a) In welcher Entfernung von A müsste die Schadenstelle C liegen, wenn man die angegebenen Fehler zunächst unberücksichtigt lässt?

b) Innerhalb welcher Grenzen müsste im ungünstigsten Falle bei der Suche nach der Schadenstelle aufgegraben werden, wenn man die angegebenen Fehler berücksichtigt?

1.9 Abituraufgaben 1960 A

Aufgabe 1

Aus trapezförmigen Blechabfällen sollen Rechtecke größter Fläche (siehe Skizze) zur weiteren Verarbeitung herausgeschnitten werden.
Berechnen Sie die Seiten des geforderten Rechteckes! (Rechteck in der Skizze nicht maßstäblich!)



Aufgabe 2

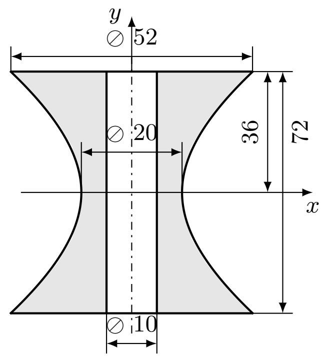
Der Kesselteil eines Hochdruckdampf-Speichers hat ein Fassungsvermögen von $V = 10$ m^3.
Er besteht aus einem Zylinder von $l = 4{,}0$ m Länge mit beiderseits angesetzten Halbkugeln.
Berechnen Sie durch Näherungsverfahren den für Zylinder und Halbkugeln gemeinsamen Radius auf cm genau!

Aufgabe 3

Maßangaben in cm
Eine Seiltrommel entsteht durch Rotation einer Hyperbel um die y-Achse (siehe Skizze).
Sie besteht aus Eisen ($\gamma = 7{,}3 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$).

a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf!

b) Berechnen Sie das Gewicht der Seiltrommel, wobei die für die Achse vorgesehene zylindrische Bohrung zu berücksichtigen ist!



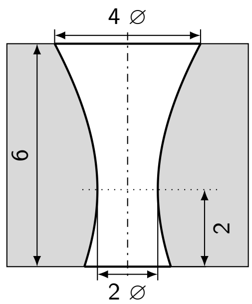
1.10 Abituraufgaben 1960 B

Aufgabe 1

Für den Verkauf von Ölfarbe verwendet man zylindrische Blechdosen mit einem Fassungsvermögen von $V = 250$ cm^3. Sie haben eine kreisförmige Öffnung, die durch einen Kunststoffdeckel verschlossen wird.
Der Durchmesser dieser Öffnung steht zu dem des Zylinders im Verhältnis 4 : 5.
Wie groß müssten Durchmesser und Höhe der Dosen gewählt werden, damit für die Herstellung möglichst wenige Blech verbraucht wird?

Aufgabe 2

Drähte werden mit Hilfe von Ziehsteinen gezogen (d.h. gestreckt). Für weiches Ziehmaterial und stärkere Drähte verwendet man Ziehsteine aus hochwertigem Hartmetall.
Aus dem Ziehstein wird die Ziehdüse in Form eines Hyperboloids herausgearbeitet. Die engste Stelle der Ziehdüse hat einen Durchmesser von $d = 2$ mm.



a) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf.
b) Berechnen Sie das aus dem Ziehstein herausgearbeitete Volumen!

c) Berechnen Sie ferner dieses Volumen näherungsweise als Zylinder, dessen Höhe mit der des Hyperboloids und dessen Durchmesser mit dem des Düsenausganges übereinstimmt!
d) Ein Draht von 2,8 mm Durchmesser wird durch die Düse gezogen. Infolge elastischer Nachwirkung nimmt der Draht nach dem Durchgang durch die engste Stelle den Durchmesser des Düsenausgangs an.
Auf welche Länge wird ein ursprünglich 1 m langes Drahtstück durch das Durchziehen gestreckt? (Abb. 60/B/2)

Aufgabe 3

Nach der Wettkampfordnung für Leichtathletik (Kugelstoßen für Männer) müssen die Kugeln ein Gewicht von mindestens 7,25 kp haben. Sie werden aus Eisen ($\gamma = 7{,}8$ p/cm^3) gergestellt.

a) Berechnen Sie den Radius der Kugeln.
b) Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler des Gewichtes, wenn der Radius um $\pm$ 0,25 mm vom berechneten Wert abweicht!
c) Um welchen Betrag darf der Radius größer sein, damit das Mindestgewicht um nicht mehr als 2 % überschritten wird?

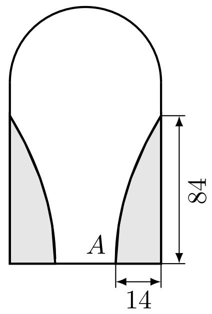
1.11 Abituraufgaben 1961 A

Aufgabe 1
Ein Wasserbehälter soll die Form eines Zylinders mit unten angesetzten Kegel haben.
Die Höhe des Zylinders soll 2 m, die Mantellinie des Kegels 6 m betragen.

a) Welche Abmessungen muss der Behälter bei größtem Fassungsvermögen haben?

b) Wie groß ist das Maximalvolumen?

Aufgabe 2
Nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer sogenannten Sparbadewanne.
Nichtmaßstäbliche Skizze! Maße in cm!
Zweckes Einsparung von Wasser und Energie sind am Fußende links und rechts zwei gleiche Backen eingebaut, deren waagerechte Grund- und Deckflächen gleiche Parabelsegmente sind und deren Höhe bis zum normalen Wasserstand 38 cm beträgt.
Die Seitenwände der Backen verlaufen senkrecht zum ebenen Wannenboden. (Geringfügige Rundungen am Boden der Wanne werden vernachlässigt.
Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei A.



a) Wieviel Liter Wasser werden bei einem Bad durch diese Vorrichtungen eingespart?

b) Wieviel Prozent beträgt die Einsparung von Wasser und Energie, wenn für ein Band in einer gleichgroßen Wanne ohne diese Sparvorrichtungen 175 Liter Wasser nötig sind?

Aufgabe 3

a) Zeichnen Sie den Kreis
$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$
und die Parabel $y=-\frac{1}{2}x^2$ (Koordinateneinheit 1cm)!

b) Berechnen Sie die Abszissenwerte der Schnittpunkte der beiden Kurven!
Diese Werte sind durch Näherungsverfahren auf drei Dezimalstellen genau zu bestimmen!

1.12 Abituraufgaben 1961 B

Aufgabe 1

a) Wie hoch stehen 500 Liter Flüssigkeit in einem kugelförmigen Behälter, dessen innerer Radius $r = 1$ m beträgt?
Die Höhe ist durch Näherung auf cm genau zu bestimmen.

b) Leiten Sie die zur Berechnung eines Kugelabschnitts gebräuchliche Formel

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

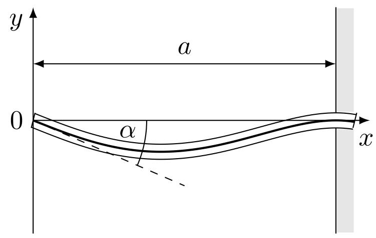
mit Hilfe der Integralrechnung her!

Aufgabe 2

a) Konstruieren Sie die Parabel $y^2 = 4x$!

b) Berechnen Sie unter Verwendung des Parabelanstiegs die Gleichung des Kreises, der die Parabel in den beiden Punkten mit der Abszisse $x = 5$ (von innen) berührt!

Aufgabe 3
Ein Träger ist an einem Ende fest eingespannt und liegt an seinem anderen Ende fest auf.
Infolge seines Eigengewichts biegt sich der Träger nach unten durch (siehe Skizze!).



Nichtmaßstäbliche Skizze!
Die Lage der neutralen Faser des Balkens wird für das angenommene Koordinatensystem durch die Gleichung

$$y = f(x) = -k\left(x - \frac{3x^3}{a^2} + \frac{2x^4}{a^3}\right)$$

gegeben.
Dabei sind a und x in Metern gemessen; k ist eine positive dimensionslose Konstante.

a) An welcher Stelle hängt der Träger am weitesten durch, wenn $a = 8$ m ist?

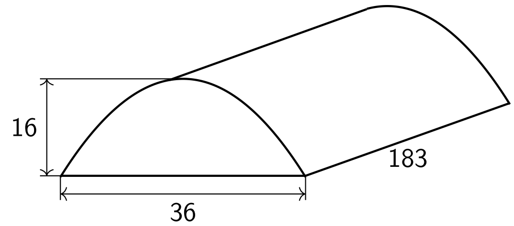
b) An welcher Stelle zwischen Wand und Auflage befindet sich ein Wendepunkt?

c) Wie groß ist k, wenn der Winkel zwischen der Kurventangente im Auflagepunkt und der Horizontalen $1°$ beträgt?

1.13 Abituraufgaben 1962 A

Aufgabe 1

In der Tschechoslowakischen Sozialistischen Republik wurden erstmalig beim Bau großer Speicher parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton verwendet. Ein solcher Speicher ist innen 16 m hoch, 36 m breit und 183 m lang (siehe Skizze).
Maßangaben in m



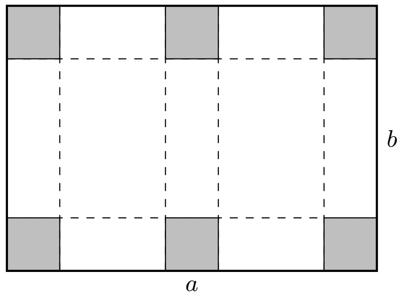
a) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Fläche des Querschnitts!

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Speichers!

c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

Aufgabe 2

Aus rechteckigem Kartonpapier von der Länge $a = 27$ cm und der Breite $b = 18$ cm soll eine quaderförmige geschlossene Faltschachtel hergestellt werden, deren Deckel an drei Seiten übergreift. Nachstehende Skizze zeigt das Netz der Schachtel.



a) Wie groß muss die Seitenlänge der auszustanzenden Quadrate sein, wenn das Volumen der Schachtel möglichst groß werden soll?

b) Berechnen Sie dieses Volumen!

c) Wieviel Prozent des ursprünglichen Materials beträgt der Abfall, der durch das Ausstanzen der Quadrate entsteht?

Aufgabe 3

3. Gegeben sind die Punkte $P_1(-5; +4)$ und $P_2(+3; +8)$.

a) Konstruieren Sie den Kreis, der durch diese beiden Punkte geht und dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Methoden der analytischen Geometrie die Gleichung dieses Kreises auf!

1.14 Abituraufgaben 1962 B

Aufgabe 1

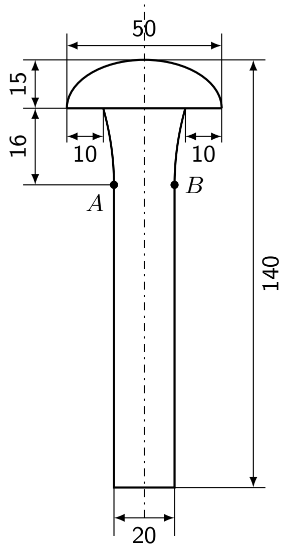
a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Pole, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2}$$

Prüfen Sie das Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$.

b) Fertigen Sie eine Skizze des Kurvenverlaufes an!

c) An welcher Stelle hat die Funktionskurve den Anstieg $m = +2$?



Aufgabe 2

Niete werden aus Rundstahl durch Pressen in eine Form (Gesenk) hergestellt.
Nebenstehende Skizze zeigt die Ansicht eines solchen Nietes. Die Maße sind der Skizze zu entnehmen.

Der zylindrische Teil des Niets hat den gleichen Querschnitt wie der verwendete Rohling und verbreitert sich hyperbolisch (A und B sind die Scheitel der Hyperbel), während der Setzkopf die Form eines halben Ellipsoids hat.

a) Wie lang muss der Rohling sein, aus dem dieser Niet hergestellt wird?

b) Wieviele Rohlinge können aus 3 m langem Rundstahl hergestellt werden? Wieviel Prozent Abfall entsteht dabei?

Skizze nicht maßstäblich!

Aufgabe 3

a) Zeichnen Sie den Kreis

$$x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$$

in ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit 2 cm)!
Konstruieren Sie die Parabel $x^2 = -2y$ mit Hilfe des Brennpunktes und der Leitlinie!

b) Einer der Schnittpunkte hat einen positiven x-Wert. Ermitteln Sie diesen x-Wert auf zwei Dezimalstellen genau.

c) Berechnen Sie den zugehörigen y-Wert.

1.15 Abituraufgaben 1963 A

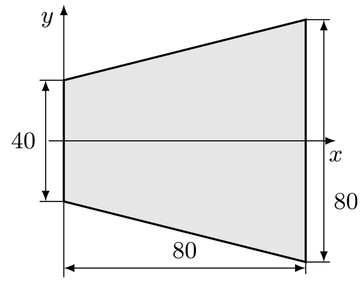
Aufgabe 1
Bestimmen Sie von der Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{12}x(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$$

a) die Abszissen der Wendepunkte,

b) den Anstieg der Kurve in den Wendepunkten!

Aufgabe 2
Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Abmessungen der Abbildung zu entnehmen sind, soll um seine Symmetrieachse rotieren.



(Abmessungen in mm)
Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!
Wie groß ist die Masse eines solchen Körpers, wenn er aus Aluminium besteht?
(Dichte des Aluminiums: $\rho = 2{,}7$ g $\cdot$ cm^{-3}

Aufgabe 3
Stellen Sie die Funktion

$$y = f(x) = -x^2 + 12$$

im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ grafisch dar!
Die x-Achse und die Kurve schließen eine Fläche ein.
Ihr soll ein Rechteck, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt, von möglichst großem Inhalt einbeschrieben werden.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks!

Aufgabe 4
Eine Ellipse ist durch folgenden Gleichung gegeben:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Diese Ellipse wird von einem Kreis geschnitten, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt.
Im ersten Quadranten hat der Schnittpunkt P_1 von Kreis und Ellipse die Ordinate $y_t = \frac{9}{4}$.

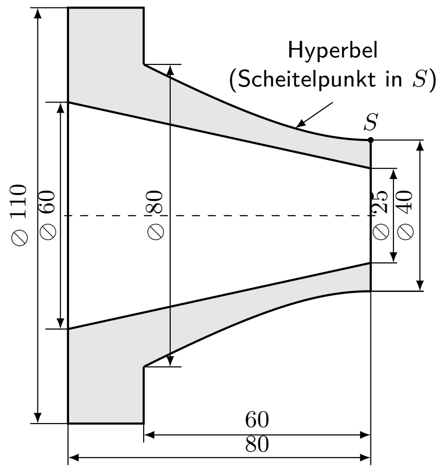
a) Konstruieren Sie die Ellipse!

b) Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung des Kreises!

c) Verbinden Sie die beiden Brennpunkte der Ellipse mit P_1!
Begründen Sie, weshalb diese beiden Strecken einen rechten Winkel einschließen!

1.16 Abituraufgaben 1963 B

Aufgabe 1
Untenstehende Skizze zeigt den Achsenschnitt einer Düse.



Düse: Werkstoff Messing ; Dichte $\rho = 8{,}5$ kg $\cdot$ dm^{-3}

a) Berechnen Sie die Masse der Düse!

b) Bei Einzelfertigung wird die Düse aus einem zylindrischen Rohling mit 110 mm Durchmesser und 80 mm Länge gedreht. Bei Serienanfertigung stellt man sie durch Gießen her.
Wieviel Material spart man dadurch pro Düse ein?
(Hinweis: Rechenstabgenauigkeit genügt; Kegelstumpf kann elementar berechnet werden!)

Aufgabe 2
Ein gleichschenkliges Trapez hat einen Flächeninhalt von 9 m^2. Seine Höhe beträgt 1,5 m.
Wie lang muss ein Schenkel sein, wenn die Summe aus den beiden Schenkeln und der kürzeren der beiden parallelen Seiten ein Minimum sein soll?

Aufgabe 3
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander im Verhältnis 2:1.
Berechnen Sie vektoriell die Koordinaten des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden der Dreiecks ABC mit: $A(2;-1), B(8;2)$ und $C(5;8)$!

Aufgabe 4
Eine Ellipse ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie die Ellipse!

b) Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Koordinaten der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen!

Aufgabe 5

a) Das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2$, die x-Achse und die Ordinaten dieser Funktion an den Stellen x_1 und x_2 begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

b) Mit Hilfe der Formel

$$F = \frac{x_2 - x_1}{6}(y_1 + y_2 + 4y_m) \text{ [Simpsonsche Regel]}$$

erhalten Sie den gleichen Flächeninhalt.
Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!
Hinweis: Unter y_m versteht man die im Mittelpunkt des Integrationsintervalls errichtete Ordinate.

1.17 Abituraufgaben 1964 A

Aufgabe 1

a) Unter welchem Winkel schneidet das Bild von

$$y = f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$$

den positiven Teil der x-Achse?

b) Ermitteln Sie diejenigen Punkte des Bildes von

$$y = f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$$

in denen der Anstiegswinkel $45°$ beträgt!

Aufgabe 2
Das Kantengerüst eines quaderförmigen Transportkäfigs soll aus 36 m Winkeleisen hergestellt werden.
Bei welchen Abmessungen für Länge, Breite und Höhe erhält man das größte Volumen des Käfigs, wenn dessen Höhe halb so groß wie die Länge sein soll?

Aufgabe 3
Gegeben ist der Mittelpunkt $M(3; 4)$ des Kreises, der durch $P_1(7; 7)$ geht.

a) Bestimmen Sie durch Zeichnung und Rechnung den Schnittpunkt P_2 (mit $y_2 > 0$) dieses Kreises mit der y-Achse!

b) Zeichnen Sie die Geraden durch P_1 und P_2, die auf den Radien $\overline{MP_1}$ bzw. $\overline{MP_2}$ senkrecht stehen!
Stellen Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung auf!

c) Wie groß ist die von diesen beiden Geraden und $\widehat{P_1P_2}$ (dem kleineren der beiden Kreisbögen) eingeschlossene Fläche?

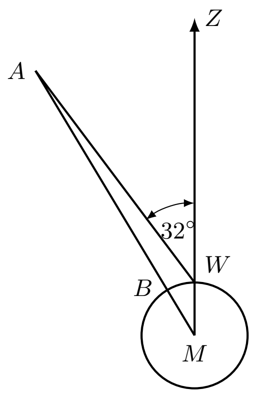
d) Begründen Sie ausführlich den Ansatz zur Lösung der Teilaufgabe c!

Aufgabe 4

Bei einem Sportwettkampf wird aus einem Kreis mit dem Durchmesser von 2,135 m (lt. Wettkampfbestimmung) vom Punkte W aus eine Kugel gestoßen, die 11,65 m von W entfernt in A auftrifft (vgl. Skizze!).

Die Stoßrichtung $\overrightarrow{WA}$ weicht von der Zielrichtung $\overrightarrow{WZ}$ um einen Winkel von $32°$ ab.

Laut Wettkampfordnung wird aber die Strecke $\overline{AB}$ gemessen und bewertet.
Wie viel cm werden bei diesem Stoß "verschenkt"?



Skizze (nicht maßstäblich)

Aufgabe 5
Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat eine Grundkantenlänge von 8 cm und eine Körperhöhe von 12 cm.
Ihr ist ein 8 cm hohes gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche so einbeschrieben, dass die Eckpunkte seiner Deckfläche auf den Höhen der Seitenflächen der Pyramiden liegen.
Fertigen Sie davon eine Zeichnung in senkrechter Zweitafelprojektion an (Benennung aller Eckpunkte)!

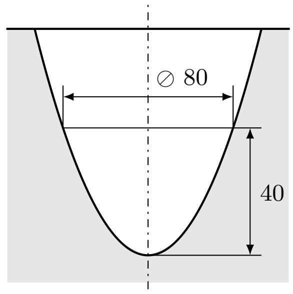
1.18 Abituraufgaben 1964 B

Aufgabe 1

Der Innenraum eines Gefäßes hat die Gestalt eines Rotationsparaboloids (siehe Skizze!)

a) Das Gefäß ist bis zur Höhe $h_1 = 40$ (Maßangaben in Millimetern) mit einer Flüssigkeit gefüllt.
Berechnen Sie das Volumen V_1 der Flüssigkeit!

b) Bis zu welcher Höhe h_2 ist das Gefäß gefüllt, wenn die Flüssigkeitsmenge verdoppelt worden ist?



Skizze (nicht maßstäblich)

Aufgabe 2
Die Gleichung einer Hyperbel lautet

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie diese Hyperbel!

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die im Punkte $P_1(5; y_1 > 0)$ die Hyperbel berührt!

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Tangente den Winkel $\measuredangle(F_1P_1F_2)$ halbiert (F_1 und F_2 bezeichnen die Brennpunkte der Hyperbel)!

Aufgabe 3
Einer geraden Pyramide ist ein gerades Prisma einbeschrieben. Beide Körper haben quadratische Grundflächen.
Die Seiten der Grundflächen verlaufen parallel zueinander.
Die Pyramide ist 12 cm hoch, ihre Grundkante ist 8 cm lang.

a) Die Höhe des Prismas sei 8 cm lang. Fertigen Sie eine Zeichnung in Grund- und Aufriss an (alle Eckpunkte benennen)!

b) Welche Maße müssen Höhe und Grundkante des Prismas erhalten, wenn dessen Volumen möglichst groß sein soll?

Aufgabe 4
Ein Ortsvektor $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt, bildet mit der x-Achse und der z-Achse Winkel von $60°$.
Der Winkel zwischen $\vec{x}$ und der y-Achse ist stumpf.
Der absolute Betrag des Vektors $\vec{x}$ ist $|\vec{x}| = 4 \cdot \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$!

Aufgabe 5
Auf einem Lagerplatz sind Rohre in folgender Weise gestapelt:
In der untersten Schicht liegen 12 Rohre; in der nächsten liegen die Rohre in den Lücken der darunterliegenden Schicht; in jeder folgenden Schicht liegen die Rohre wiederum auf Lücke zur darunterliegenden.
In der obersten Schicht liegt nur noch 1 Rohr.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Rohre dieses Stapels!

b) Mit Hilfe welcher Formel kann die entsprechende Aufgabe gelöst werden, wenn in der untersten Schicht n Rohre liegen (n ist eine beliebige natürliche Zahl)?

c) Beweisen Sie die Gültigkeit der beim Lösen des Teiles b) gewonnenen Summenformel mit Hilfe vollständiger Induktion!
(Anmerkung; in den Klassen Berufsausbildung mit Abitur kann bei der Teilaufgabe 5c auch ein anderes Beweisverfahren benutzt werden.)

1.19 Abituraufgaben 1965 A

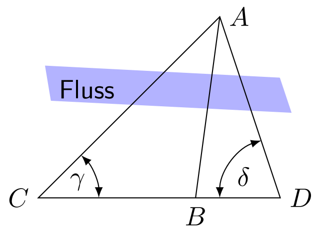
Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M_1(2;2)$ und $M_2(8;6{,}5)$ berühren sich von außen. Für ihre Radien r_1 und r_2 gilt die Proportion $r_1 : r_2 = 2 : 3$.

a) Berechnen Sie die Länge der Radien, stellen Sie die Kreisgleichungen auf und zeichnen Sie die Kreise!

b) Berechnen Sie den Anstieg der Tangente im Berührungspunkt beider Kreise!

Aufgabe 2
Für die Projektierung einer Flussbrücke benötigt man die Entfernung zwischen den Geländepunkten A und B (siehe Skizze).
(Skizze nicht maßstäblich)



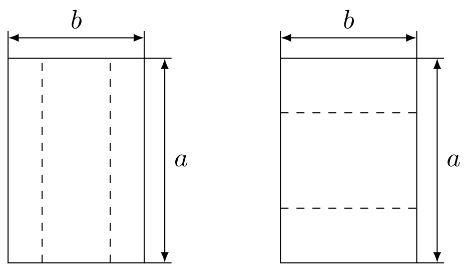
Um die Länge der Strecke AB berechnen zu können, wird an dem einen Flussufer eine durch B gehende Gerade abgesteckt. Auf ihr werden die Standlinien CB und BD vermessen.

Außerdem wird von den Punkten C und D aus der jenseits des Flusses liegende Punkt A angepeilt. Durch Messung werden folgende Größen ermittelt:

$$CB = 47{,}4 \text{ m}; \qquad BD = 54{,}6 \text{ m}; \qquad \gamma = 74{,}3°; \qquad \delta = 62{,}5°$$

Berechnen Sie die Länge der Strecke AB! Rechenstabgenauigkeit genügt.

Aufgabe 3
Aus rechteckigen Blechen von der Länge a und der Breite b ($a > b$) sollen der Boden und zwei gegenüberliegende Seitenflächen von quaderförmigen Behältern für Kleinmaterial gebogen werden.



Die beiden Skizzen (nicht maßstäblich) zur Aufgabe 3 zeigen zwei verschiedenen Möglichkeiten für die Lage der Biegekanten.

a) Bestimmen Sie für beide Möglichkeiten das jeweilige Maximalvolumen!

b) Welcher von diesen beiden Behältern hat das größere Fassungsvermögen?
Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4

a) Stellen Sie folgenden geraden Pyramidenstumpf mit quadratischen Parallelflächen in senkrechter Zweitafelprojektion dar:
Die Seitenlängen der Quadrate betragen 8 cm bzw. 2 cm; der Pyramidenstumpf ist 2,5 cm hoch.

b) Ermitteln Sie zeichnerisch die wahre Größe und Gestalt einer Seitenfläche dieses Pyramidenstumpfes (Benennung aller Punkte).

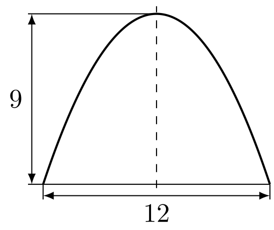
Wahlaufgaben
Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

Aufgabe 5.1.
Gegeben ist die Funktion mit dem analytischen Ausdruck

$$y = f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^4$$

Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im kartesischen Koordinatensystem nach Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse, der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte!

Aufgabe 5.2.
Ein Hohlspiegel, dessen Achsenschnitt eine Parabel ist, hat einen Öffnungsdurchmesser von 12 cm und eine Tiefe von 9 cm (siehe Skizze, nicht maßstäblich).



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel!

b) Geben Sie die Gleichung der Leitlinie der Parabel an und konstruieren Sie diese Parabel!

c) Welchen Winkel bilden im Achsenschnitt die beiden Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt ausgehen und den Rand des Spiegels treffen?

Aufgabe 5.3.

a) Gegeben seien die Funktionen mit dem analytischen Ausdruck

$$y = f(x) = x^2 - 6x + k \qquad (k > 9)$$

Weisen Sie nach, dass diese Funktionen keine Nullstellen haben.

b) Bestimmen Sie alle reellen x, für die gilt: $x^3 > x^2$.
Bestimmen Sie alle reellen x, für die gilt: $x^3 = x^2$.
Bestimmen Sie alle reellen x, für die gilt: $x^3 < x^2$.

c) In der allgemeinen Form der Geradengleichung $Ax + By + C = 0$ sollen die Koeffizienten folgenden drei Bedingungen genügen: $A > 0, \qquad B = 1, \qquad C \leq 0$.
Beschreiben Sie die Lagen dieser Geraden im kartesischen Koordinatensystem.

1.20 Abituraufgaben 1965 B

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Das Bild der Funktion

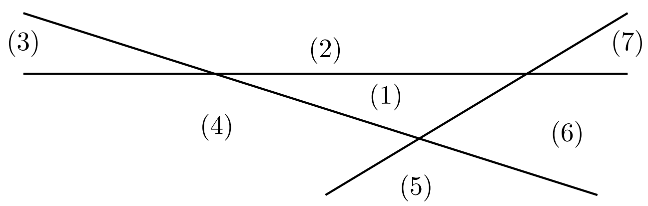
$$y = f(x) = 6 - \frac{6}{\sqrt{x}}$$

die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = 4$ und $x = 9$ begrenzen eine Fläche.

a) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
Zeigen Sie, dass die Nullstelle der Funktion nicht innerhalb des Integrationsintervalls liegt!

b) Bestimmen Sie den Rauminhalt des Körpers, der durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht! (Rechenstabgenauigkeit ist ausreichend!)

Aufgabe 2
Zeichnet man in einer Ebene n Geraden, so wird die Ebene dadurch in eine Anzahl von Teilen zerlegt.



Von den Geraden soll keine zu einer anderen parallel sein, und durch keinen Punkt der Ebene sollen mehr als 2 der Geraden verlaufen. Der Fall $n = 3$ ist in einer Skizze dargestellt.

a) Nimmt man zu $n - 1$ Geraden eine weitere Gerade hinzu, so erhöht sich die Anzahl der Ebenenteile um n. Überprüfen Sie das an Hand einer Skizze für den Fall n=4!

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass n Geraden die Ebene in insgesamt

$$S_n = \frac{n^2 + n + 2}{2} \ ; \ (n = 1{,}2{,}3, \dots)$$

Teile zerlegen!

Aufgabe 3
Eine durch den Vektor $\overrightarrow{F_1} = 6{,}3\vec{i} + 2{,}5\vec{j} + 6{,}0\vec{k}$ dargestellte Kraft bewegt einen Körper geradlinig von $P_1(1{,}7; 6{,}5; -9{,}3)$ nach $P_2(3{,}2; -1{,}6; -2{,}5)$.
(Die Einheiten der Beträge der Kraft bzw. des Weges sind Kilopond bzw. Meter.)

a) Berechnen Sie den Betrag von $\overrightarrow{F_1}$!

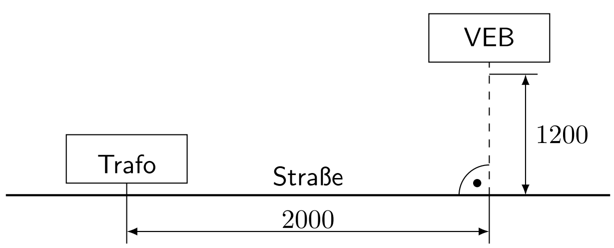
b) Berechnen Sie die Arbeit, die bei dieser Bewegung verrichtet wird!

c) Welchen Wert muss die dritte Koordinate eines Kraftvektors

$$\overrightarrow{F_2} = 6{,}3\vec{i} + 2{,}5\vec{j} + z_2\vec{k}$$

haben, wenn auf dem gleichen Weg eine Arbeit von 36 kpm verrichtet werden soll?

Aufgabe 4
Die Skizze zeigt die Lage eines volkseigenen Betriebes und einer Transformatorstation.



(Maßangabe in m)
Der Betrieb soll durch ein Erdkabel an die Transformatorstation angeschlossen werden.
Die Kosten für das Verlegen längs der Straße betragen 15 MDN pro Meter und im unwegsamen Gelände 25 MDN pro Meter. Die Kosten für das Verlegen des Gesamtkabels sollen möglichst gering gehalten werden.
Wegen der unterschiedlichen Kosten für die Verlegung muss deshalb das Kabel zum Teil längs der Straße und dann geradlinig im Gelände verlegt werden.
In welchem Abstand von der Transformatorstation muss die Verlegung des Kabels im Gelände beginnen?

Wahlaufgaben
Von den folgenden vier Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

Aufgabe 5.1.
a) Konstruieren Sie das Grund-Aufriss-Bild eines geraden, regelmäßigen, sechsseitigen Prismas. Das Prisma soll so auf der Grundrisstafel stehen, dass ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen parallel zur Aufrisstafel verläuft.
Die Grundkante des Prismas sei 30 mm lang, seine Höhe 100 mm lang.

b) Das Prisma wird von einer Ebene geschnitten, die senkrecht zur Aufrisstafel verläuft und unter $45°$ zur Grundrisstafel geneigt ist.
Die Ebene soll weder Grund- noch Deckfläche des Prismas schneiden.
Ermitteln Sie durch Konstruktion die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur.
Anmerkung zu a) und b): Alle Punkte sind zu bezeichnen.

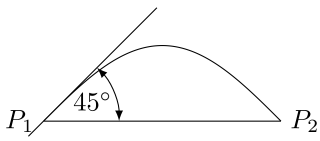
c) Überprüfen Sie das durch Zeichnung ermittelte Ergebnis für die Seitenlängen der Schnittfigur durch Rechnung!

Aufgabe 5.2.
Bestimmen Sie die Nullstellen und die Abszissen der Extrema der Funktion

$$y = f(x) = \cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4}$$

im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$!

Aufgabe 5.3.



Die senkrecht zur Parabelachse verlaufende Sehne des Parabelsegments P_1P_2 sei 10 cm lang.
Die im Punkt P_1 an die Parabel gelegte Tangente bilde mit der Sehne einen Winkel von $45°$.
Berechnen Sie die Fläche dieses Parabelsegments mit Hilfe der Integralrechnung!

Aufgabe 5.4. Die Punkte $A(3;-2;4)$, $B(7;-4;8)$ und $C(3;-3;2)$ seien Eckpunkte eines Dreiecks. Berechnen Sie vektoriell:

a) den Flächeninhalt des Dreiecks ABC,

b) den Winkel CAB dieses Dreiecks!

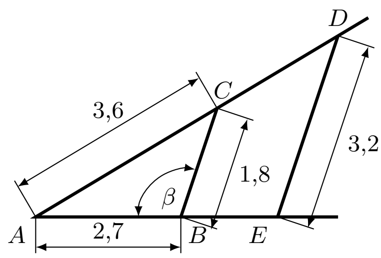
1.21 Abituraufgaben 1966 A

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den Winkel β, den die Straße von A nach B mit der Abzweigung von B nach C bildet (siehe Skizze!)

b) Der Straßenabschnitt von B nach E ist gesperrt. Die Umleitung erfolgt von B über C und über D nach E.
Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{ED}$ sind parallel.
Berechnen Sie die Differenz aus der Länge der Umleitung und der Sperrstrecke!
(Rechenstabgenauigkeit genügt)



Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in km

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

a) Untersuchen Sie, ob das Bild dieser Funktion Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte besitzt und ermitteln Sie deren Koordinaten!

b) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion unter Verwendung der errechneten Koordinaten!

Aufgabe 3
Von einem Parallelogramm sind drei Eckpunkte $A(-7;2), B(2;-1), C(-1;8)$ in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des im ersten Quadranten liegenden vierten Eckpunktes D zeichnerisch und bestimmen Sie mit Hilfe der analytischen Geometrie die Koordinaten von D rechnerisch!

b) Weisen Sie nach, dass dieses Parallelogramm kein Rechteck ist!

Aufgabe 4

a) Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch seine Schenkel a und den von diesen eingeschlossenen Winkel γ bestimmt.
Leiten Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts gleichschenkliger Dreiecke her, in der keine weiteren als die Bestimmungsstück a und γ enthalten sind!
Gehen Sie dabei von der Formel

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

aus (in dieser Formel bedeute c die Basis, h_c die zugehörige Höhe des gleichschenkligen Dreiecks)!

b) In einem gleichschenkligen Dreieck lässt sich der Winkel γ wie folgt berechnen:

$$\cos\gamma = \frac{2a^2 - c^2}{2a^2}$$

Dabei können folgende drei Fälle auftreten:

$$2a^2 > c^2 \;;\; 2a^2 = c^2 \;;\; 2a^2 < c^2$$

Was lässt sich jeweils über die Größe des Winkels aussagen? Begründen Sie Ihre Aussagen!

Wahlaufgaben
Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

Aufgabe 5.1.
Von allen geraden Kreiskegel, deren Mantellinien $s = 12$ cm lang sind, ist derjenige mit dem größten Volumen gesucht.
Berechnen Sie für diesen Kegel die Höhe und den Grundkreisradius!
(Rechenstabgenauigkeit genügt!)

Aufgabe 5.2.
Die Gleichung einer Ellipse lautet $x^2 + 2y^2 = 32$.

a) Konstruieren Sie diese Ellipse!

b) Stellen Sie die Gleichung der Hyperbel auf, die folgende Bedingungen erfüllt:
Hyperbel und Ellipse haben dieselben Brennpunkte.
Die Hauptachse der Hyperbel $(2a_H)$ ist halb so lang wie die Hauptachse der Ellipse $(2a_E)$.

Aufgabe 5.3.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt.
Die Schnittebene soll durch eine Diagonale einer Würfelfläche und durch einen und nur einen Eckpunkt der dazu parallelen Würfelfläche gelegt werden.
Stellen Sie den Teilkörper mit dem größeren Volumen

a) in einem selbstgewählten axonometrischen Verfahren und

b) im Grund-Aufriss-Verfahren das (Benennung aller Eckpunkte)!

1.22 Abituraufgaben 1966 B

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Eine Ellipse wird von einer Parallelen zur Hauptachse geschnitten.
Die Schnittpunkte liegen 36 cm voneinander entfernt. Ein Nebenscheitel und der Mittelpunkt der Ellipse haben von der schneidenden Geraden jeweils einen Abstand von 6 cm.

a) Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Ellipse auf! (Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Konstruieren Sie die Ellipse punktweise im Maßstab 1:5!

Aufgabe 2
Eine Parabel sei gegeben durch
$$y = f(x) = x \cdot (x - 3)$$

a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion im Intervall $0 \leq x \leq 5$, berechnen Sie dazu die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel, der Abszissenachse und der Geraden $x = 5$ im Intervall $0 \leq x \leq 5$ eingeschlossen ist!

c) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht!

Aufgabe 3
Von einem Dreieck ABC, für das $\overline{AB} = \overline{CB}$ ist, sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(5;0), C(3;4)$ und $B(6;y_B)$.

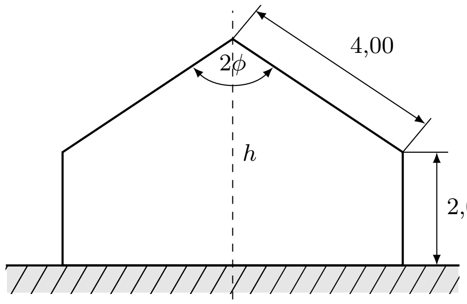
a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC im Koordinatensystem und lesen Sie die Ordinaten y_B des Punktes B ab!

b) Berechnen Sie y_B!

c) Verbinden Sie die Punkte A und C mit dem Koordinatenursprung O und beweisen Sie, dass in dem Viereck $OABC$ die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 4

Die Skizze zeigt die Giebelwand eines zu errichtenden Schuppens.
Es ist Material vorhanden, welches erlaubt, den Schuppen mit Seitenwänden von 2,00 m Höhe und mit Dachbalken von 4,00 m Länge zu bauen.
Um das maximale Fassungsvermögen eines Schuppens zu erreichen, muss der Flächeninhalt der Giebelwand möglichst groß werden.
Wie groß ist der von den Dachbalken eingeschlossene Winkel 2ϕ zu wählen, damit diese Forderung erfüllt wird?



Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in m

Hinweis: Es ist vorteilhaft, den Winkel als unabhängige Variable zu wählen.

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.)

Aufgabe 5.1.
Gegeben sind zwei Funktionen durch

$$y = f(x) = \sin^2 x \text{ und } y = g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x$$

Ihre Bilder schneiden einander im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ zweimal.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte!

b) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen im angegebenen Intervall!

c) Berechnen Sie die Fläche, die im vorgegebenen Intervall von den beiden Kurven allseitig begrenzt wird!

Aufgabe 5.2.
Gegeben ist eine Funktion durch $y = f(x) = x \cdot e^x$.

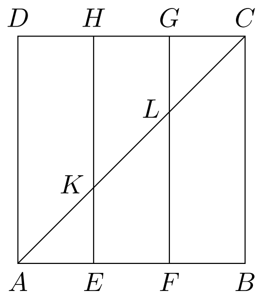
a) Ihr Bild besitzt einen (lokalen) Extrempunkt. Bestimmen Sie seine Art und seine Koordinaten!

b) Bilden Sie von der gegebenen Funktion auch die dritte und vierte Ableitung!
Welche Vermutung ergibt sich hieraus für die n-te Ableitung?
Bestätigen Sie die Richtigkeit Ihrer Vermutung durch vollständige Induktion!

Aufgabe 5.3.
Eine Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 90 mm ist durch die Strecken $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ in drei kongruente Rechtecke zerlegt (siehe Skizze!). Die Rechtecke $AEHD$ und $FBCG$ werden um die Strecken $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ so umgeklappt, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ zusammenfallen.
Dadurch entsteht ein oben und unten offener Körper.

a) Stellen Sie den Körper in schräger Parallelprojektion oder in dimetrischer oder in isometrischer Abbildung dar, und zeichnen Sie den Streckenzug $\overline{AKLC}$ ein, der aus der Flächendiagonalen $\overline{AC}$ entsteht (Benennung aller Punkte)!

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Winkel, den zwei benachbarte Teile des Streckenzuges $\overline{AKLC}$ in dem durch Klappung entstandenen Körper miteinander einschließen!



1.23 Abituraufgaben 1967 A

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x$$

a) Bilden Sie die erste und zweite Ableitung!

b) Berechnen Sie die lokale Minimumstelle x_T dieser Funktion!

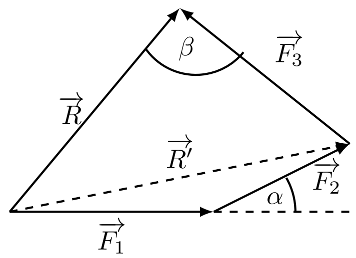
Aufgabe 2
Gegeben sind in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 eines Vierecks durch $P_1(9;-3), P_2(11;3); P_3(-2;8); P_4(-3;1)$.

a) Stellen Sie die Gleichungen der Diagonalen dieses Vierecks auf, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes S!

b) Ein Kreis hat S als Mittelpunkt und geht durch P_1.
Wie lautet die Gleichung dieses Kreises?

c) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Punkte P_2, P_3 und P_4 Punkte dieses Kreises sind!

Aufgabe 3
Die Skizze zeigt die Resultierende $\overrightarrow{R}$ der Kräfte $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ mit den Beträgen F_1, F_2, F_3.



Gegeben sind $F_1 = 15{,}4$ kp; $F_2 = 12{,}5$ kp; $F_3 = 16{,}5$ kp; $\alpha = 19{,}5°$ und $\beta = 90°$ (siehe Skizze!) Skizze nicht maßstäblich.

a) Berechnen Sie den Betrag der Resultierenden $\overrightarrow{R'}$ der Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$!

b) Berechnen Sie den Betrag der Resultierenden $\overrightarrow{R}$ der Kräfte $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ und $\overrightarrow{F_3}$!

Aufgabe 4
Gegeben ist eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist.
Die Länge der Sechseckseite soll 4 cm, die der Höhe der Pyramide 6 cm betragen.

a) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar (Benennung aller Eckpunkte!)

b) Bestimmen Sie mit den Mitteln der darstellenden Geometrie die Größe des Neigungswinkels einer Seitenfläche gegen die Grundfläche, und messen Sie die Größe des Winkels!

Aufgabe 5
Es sollen zylindrische Behälter hergestellt werden.
Die Höhe und der Durchmesser eines Behälters sollen zusammen 100 cm lang sein.

a) Berechnen Sie die Länge des Durchmessers und die der Höhe des Behälters mit dem maximalen Volumen!

b) Geben Sie das maximale Volumen in Litern an!

Wahlaufgaben
Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.

Aufgabe 6.1.
Gegeben: $y = f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$
Hierbei seien a ein ganze Zahl und b eine rationale Zahl.

a) Berechnen Sie die Wendepunktkoordinaten!

b) Begründen Sie, dass die Abszissen der Extrempunkte ganze Zahlen sind!

c) Geben Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte für $a = 2$ und $b = -\frac{1}{2}$ an!

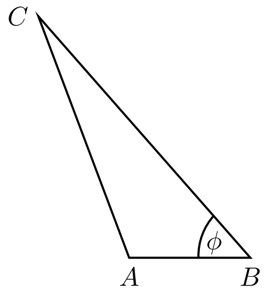
Aufgabe 6.2.
Auf der Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$ ist ein Punkt $P_0(x_0; y_0)$ mit $x_0 > 0$ gegeben.
Ein Punkt auf der y-Achse wird durch $P_1(0; -y_0)$ festgelegt.
Durch die Punkte P_0 und P_1 ist eine Gerade bestimmt.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Zeichnung dar!

b) Weisen Sie nach, dass eine so festgelegte Gerade die Parabel berührt!

c) Berechnen Sie die Abszisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit der x-Achse!

Aufgabe 6.3.



Skizze (nicht maßstäblich)

Die drei Punkte A, B und C stellen Geländepunkte dar, die in gleicher Höhe über N.N. liegen (siehe Skizze).
Wenn $\phi = 60°, \overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = 2a$ sind, kann die Entfernung x der Punkte B und C mit Hilfe der Gleichung $4a^2 = a^2 + x^2 - ax$ berechnet werden.

a) Bestimmen Sie die Entfernung $\overline{BC} = x$ unter Verwendung dieser Gleichung!

b) Weisen Sie die Gültigkeit der obigen Gleichung für die angegebenen Bedingungen nach!

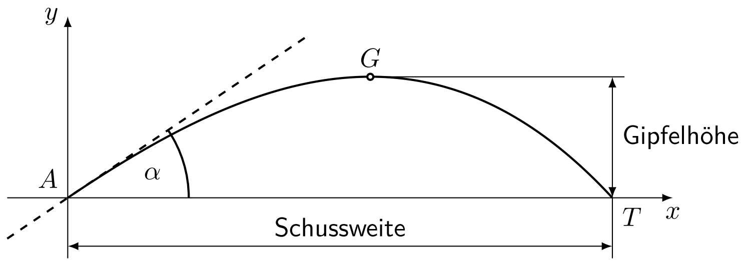
c) Wie groß ist in einer Karte im Maßstab 1:25000 die Horizontalentfernung der Punkte B und C in Millimetern für $a = 320$ m?

1.24 Abituraufgaben 1967 B

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Die Flugbahn eines Geschosses kann bei vereinfachten Bedingungen durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$y = f(x) = k(135x - 6x^2 - x^3)$$



Dabei geben x die horizontale Entfernung vom Abschusspunkt A und y die zugeordnete Geschosshöhe über der Horizontalebene an.
Die Koordinateneinheit entspricht für beide Achsen einem Kilometer.
Abschusspunkt A und Auftreffpunkt T liegen in derselben Horizontalebene. (siehe Skizze!)

a) Berechnen Sie die Schussweite $\overline{ST}$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes G der Geschossbahn, wenn $k = \frac{1}{200}$ ist.

c) Bestimmen Sie den Abschusswinkel α für $k = \frac{1}{200}$!

d) Wie groß muss k sein, damit die Gipfelhöhe 1,5 km beträgt?

Aufgabe 2
Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist gegeben durch

$$a_n = 3n(n-1) + 1 \ ; \ (n = 1{,}2{,}3{,}...)$$

a) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5!

b) Bestimmen Sie die Partialsummen s_1, s_2, s_3, s_4 und s_5 der gegebenen Zahlenfolge!

c) Formulieren Sie eine Vermutung für s_n, das n-te Glied in der Folge der Partialsummen!

d) Überprüfen Sie durch vollständige Induktion, ob Ihre Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ richtig ist!

Aufgabe 3
Von einem Dreieck ABC sind die Koordinaten der Eckpunkte gegeben:

$$A(6;1;3), B(9;13;-1), C(2;5;1)$$

a) Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ in Komponentendarstellung an, und bestimmen Sie die Längen der Dreiecksseiten $\overline{AC} = b$ und $\overline{AB} = c$!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \measuredangle(BAC)$!
(Rechenstabgenauigkeit genügt!)

c) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Geraden (Parameterdarstellung), die durch die Punkte A und B geht!
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes $D(x_D; y_D; z_D)$, der auf dieser Geraden liegt und für den $z_D = 0$ ist!

Aufgabe 4
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei ein Quadrat durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $P_1(0;0), P_2(2;0), P_3(2;2)$ und $P_4(0;2)$ gegeben.
Durch die Bilder der Funktionen $y = e^x$ und $y = \ln x$ werden von der Fläche des Quadrates Flächenstücke

abgetrennt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Restfläche!
(Runden Sie das Ergebnis auf eine Stelle nach dem Komma!)

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben ist nur **eine** Aufgabe auszuwählen und zu lösen.)

Aufgabe 5.1.
Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{c}{x} \text{ ; } (c > 0, \text{ konstant; } x > 0)$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an das Bild dieser Funktion in $P_1(1; c)$!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangenten mit den Koordinatenachsen!

c) Tangente und Koordinatenachsen begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck.
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt!

d) Weisen Sie nach, dass der Inhalt dieser Dreiecksfläche von der Wahl des Berührungspunktes $P_i(x_i; y_i)$ unabhängig ist!

Aufgabe 5.2.
Gegeben seien im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ zwei Funktionen durch die Gleichungen
$y = \sin(2x)$ und $y = -2\sin x$.

a) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem!

b) Die Bilder der Funktionen sollen von einer Parallelen zur y-Achse so in zwei Punkten P_1 und P_2 geschnitten werden, dass die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ein Maximum wird.
Bestimmen Sie die Abszisse der Schnittpunkte P_1 und P_2!

Aufgabe 5.3.
Gegeben sei ein gerader Kreiskegel, dessen Grundkreisdurchmesser 6,0 cm und dessen Mantellinie 6,0 cm lang sind.

a) Stellen Sie diesen Kegel im Grund-Aufriss-Verfahren im Maßstab 1:1 dar!
(Der Kegel soll mit der Grundfläche auf der Grundrissebene stehen.)

b) Legen Sie eine Ebene senkrecht zur Aufrissebene so durch den Mittelpunkt des Grundkreises des Kegels, dass als Schnittfigur ein Parabelsegment entsteht!
Konstruieren Sie sowohl den Grundriss als auch die wahre Größe des Parabelbogens (jeweils mindestens 5 Punkte)!

c) Legen Sie für den in wahrer Größe konstruierten Parabelbogen ein geeignetes Koordinatensystem fest!
Stellen Sie die Gleichung dieses Parabelbogens auf!

1.25 Abituraufgaben 1968 A

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist eine Parabel mit der Scheitelgleichung $y^2 = 4x$.

a) $P_1\left(+\frac{1}{4}; y_1 < 0\right)$ und $P_2(x_2; +4)$ sind Punkte dieser Parabel. Berechnen Sie die Ordinate y_1 und die Abszisse x_2.

b) Konstruieren Sie die Parabel, und zeichnen Sie diejenige Gerade, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht!

c) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Geraden, und geben Sie ihre Steigung an.

d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Brennpunkt der Parabel ein Punkt dieser Geraden ist!

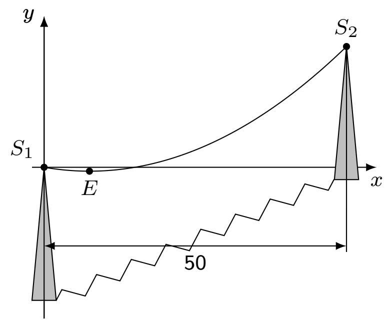
Aufgabe 2

Der durchhängende Draht einer Hochspannungsleitung beschreibt eine Kurve, die angenähert eine Parabel ist (siehe Skizze!). (Maßangaben in m)

Die Gleichung dieser Parabel lautet in dem angegebenen Koordinatensystem

$$y = -\frac{3}{35}x + \frac{1}{175}x^2 \qquad (0 \leq x \leq 50)$$

(Koordinateneinheit: 1 m)



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes E, und weisen Sie die Art dieses Extremums nach!

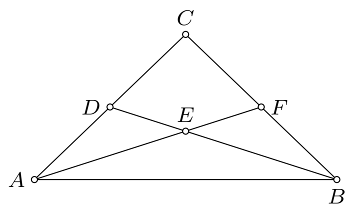
b) Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen den beiden Mastspitzen S_1 und S_2.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die im Punkt S_2 an die Kurve gelegte Tangente mit der x-Achse bildet!

Aufgabe 3
Die Skizze stellt einen Dachbinder dar. Die Balken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleichlang. Die Balken $\overline{BD}$ und $\overline{AF}$ greifen in der Mitte der Balken $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ an.

Die Spannweite $\overline{AB}$ des Dachbinders soll 9,90 m, die Größe des Winkels ABC soll 40,0° betragen. Berechnen Sie

a) die Länge des Balkens $\overline{AC}$,
b) die Länge des Balkens $\overline{BD}$,
c) die Größe des Winkels ABD!



Skizze (nicht maßstäblich)

Aufgabe 4
Gegeben ist ein gerades Prisma mit der Körperhöhe 8 cm. Die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm.
Durch einen ebenen Schnitt wird das Prisma abgeschrägt. Dieser Schnitt geht durch zwei benachbarte Eckpunkte der Deckfläche und durch die Mitten der gegenüberliegenden 8 cm langen Seitenkanten des Prismas.

a) Stellen Sie den Restkörper mit dem größeren Volumen im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Benennen Sie alle Eckpunkte!

b) Konstruieren Sie die Schnittfigur in ihrer wahren Größe und Gestalt!

c) Berechnen Sie das Volumen des unter a) dargestellten Restkörpers!

Wahlaufgaben
Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

Aufgabe 5.1
Die Kurven einer Kurvenschar sind durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x + c \qquad (c \text{ ganzzahlig})$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Abszissen der Extrempunkte, und geben Sie die Art der Extrema an!

b) Zeigen Sie, dass die Kurven je einen Wendepunkt haben! Bestimmen Sie dessen Abszisse!

c) Bestimmen Sie die Variable c so, dass sich eine Kurve ergibt, die die x-Achse im Punkt $P_0(3; 0)$ schneidet!

Aufgabe 5.2
Die Gleichung einer Hyperbel lautet

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

a) Konstruieren Sie diese Hyperbel!

b) Im ersten Quadranten liegt ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ auf der Hyperbel so, dass die Parallelen durch P_1 zu den Koordinatenachsen und die Koordinatenachsen selbst ein Quadrat begrenzen.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_1!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrates!

Aufgabe 5.3
a) Von einem Dreieck ABC sind bekannt: $\overline{BC} = a = 5$ cm; $\overline{AC} = b = 7$ cm; $\angle CAB = \alpha = 40°$.
Berechnen Sie alle fehlenden Dreieckswinkel! Wieviel verschiedene Dreiecke gibt es? Konstruieren Sie diese Dreiecke!

b) Die Seiten a und b und der Winkel α eines Dreiecks sind gegeben. Für den Winkel β gilt dann nach dem Sinussatz

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen für den Winkel β.
wenn $\frac{b}{a}\sin\alpha = 1$
wenn $\frac{b}{a}\sin\alpha > 1$!
Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

1.26 Abituraufgaben 1968 B

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = 2\sqrt{x} - x \ (x \geq 0).$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!

b) Das Bild der Funktion hat keinen Wendepunkt, jedoch einen lokalen Extrempunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten und Art dieses Extrempunktes!

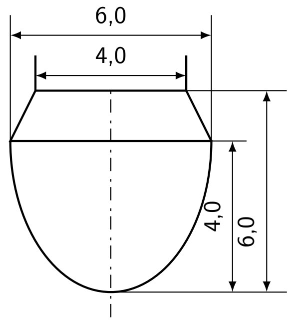
c) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $0 \leq x \leq 6$.

Aufgabe 2

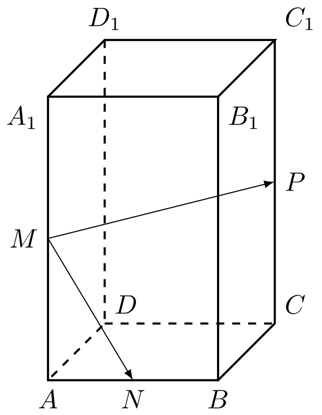
Die Skizze stellt den Achsenschnitt der Trommel eines Rührwerkes dar. Sie besteht aus einem Rotationsparaboloid mit aufgesetztem Kegelstumpf (Innenmaße siehe Skizze!).

Berechnen Sie das Volumen der Trommel in Litern!
(Wird die Formel für das Volumen eines Rotationsparaboloids benutzt, so ist diese mit Hilfe der Integralrechnung herzuleiten.)

Skizze (nicht maßstäblich), (Maßangaben in dm)



Aufgabe 3



Skizze (nicht maßstäblich)

Ein gerades Prisma (siehe Skizze!) hat die quadratische Grundfläche $ABCD$. Eine Seite des Quadrates ist 3 cm, die Höhe des Prismas 6 cm lang. N, M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AA_1}$ bzw. $\overline{CC_1}$.

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, und geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ in Komponentendarstellung an!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, der von den Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ eingeschlossen wird!

c) Bestimmen Sie einen Punkt Q auf der Kante $\overline{CC_1}$ so, dass der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\vec{MQ}$ $90°$ beträgt!
Welchen Abstand hat der Punkt Q vom Punkt C?

Aufgabe 4
Die Glieder einer endlichen Zahlenfolge sind

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 3}; a_2 = \frac{1}{3 \cdot 4}; a_3 = \frac{1}{4 \cdot 5}; a_4 = \frac{1}{5 \cdot 6}; a_5 = \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

a) Geben Sie das Bildungsgesetz für die Glieder dieser Zahlenfolge an!

b) Berechnen Sie die Partialsummen s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 dieser Zahlenfolge!

c) Das unter a) gefundene Bildungsgesetz sei das Bildungsgesetz für eine unendliche Zahlenfolge. Untersuchen Sie mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion, ob für die Partialsummen s_n dieser unendlichen Zahlenfolge gilt:

$$s_n = \frac{n}{2(n+2)} \ (n \geq 1, n \in N)$$

d) Berechnen Sie $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$!

Wahlaufgaben

Von den folgenden vier Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

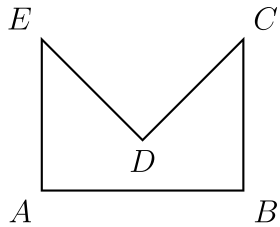
Aufgabe 5.1
Die Gleichung der Parabel lautet $y^2 = 6x$.

a) Konstruieren Sie mindestens 8 Punkte dieser Parabel, und zeichnen Sie die Parabel!
(Koordinateneinheit: 1cm)

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung der Anstieg der Tangente an die Parabel im Punkt $P_0(6; y_0 > 0)$!
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

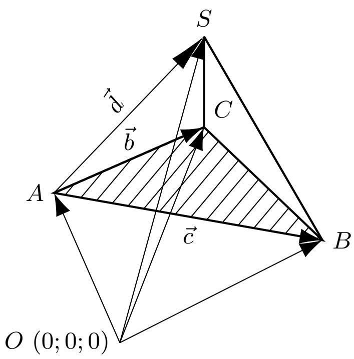
c) Legt man in einem Punkt $P_1(x_1; y_1 > 0)$ der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ die Tangente an diese Parabel, so schneidet diese Tangente die x-Achse in dem Punkt N. Der Brennpunkt der Parabel sei F.
Weisen Sie nach, dass das Dreieck NFP_1 gleichschenklig ist!

Aufgabe 5.2
Eine ebene Fläche $ABCDE$ hat die skizzierte Form. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt 20,0 cm.



Skizze (nicht maßstäblich)
Ferner gilt: $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = x$ und $\overline{EA} \perp \overline{AB}$ und $\overline{CB} \perp \overline{AB}$.
Berechnen Sie x so, dass der Inhalt der angegebenen Fläche minimal wird!
(Das Ergebnis ist auf Millimeter genau anzugeben.)

Aufgabe 5.3



Gegeben ist ein dreiseitige schiefe Pyramide durch die Koordinaten ihrer Eckpunkte:
$A(3; 4; 2); B(7; 6; 2); C(11; 9; 5), S(9; 3; 11)$ (siehe Skizze, Skizze nicht maßstäblich) Bestimmen Sie

a) die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ in Komponentendarstellung;

b) den Inhalt der Grundfläche ABC;

c) den Abstand des Punktes S von der durch die Punkte A, B und C festgelegten Ebene;

d) das Volumen der Pyramide!

Aufgabe 5.4
Die Grundfläche $ABCDE$ einer geraden Pyramide mit der Spitze S ist ein regelmäßiges Fünfeck und liegt in der Grundrisstafel. Jede Grundkante ist 40 mm, jede Seitenkante 60 mm lang. Die Grundkante $\overline{AB}$ verläuft senkrecht zur Aufrisstafel.

a) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar.
(Bei dieser Aufgabe dürfen die zur Zeichnung benötigten Winkel oder Strecken berechnet werden.)

b) Diese Pyramide wird von einer zur Aufrisstafel senkrechten Ebene geschnitten. Diese Ebene geht durch die Grundkante $\overline{AB}$ und den Punkt T auf der Seitenkante $\overline{DS}$ mit $\overline{ST} = 20$ mm.
Zeichnen Sie die Spurgeraden dieser Ebene!

c) Konstruieren Sie die Schnittfigur in ihren wahren Größe und Gestalt!
Alle Eckpunkte sind zu benennen.

1.27 Abituraufgaben 1969 A

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist eine Funktion durch $y = x(3 - x)^2$ (x reell).

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und des Wendepunktes des Funktionsbildes!

c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 4{,}0$.

Aufgabe 2
Ein Kreis hat den Mittelpunkt $M(6; 3)$ und geht durch den Punkt $P_1(2; 0)$.

a) Zeichnen Sie den Kreis und stellen Sie die Gleichung des Kreises auf!

b) Auf dem Kreis liegt ein Punkt $P_2(10; y_2 > 0)$. Berechnen Sie y_2!

c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P_3(3; 7)$ auf dem Kreis liegt!

d) Weisen Sie nach, dass das Dreieck $P_1P_2P_3$ rechtwinklig ist!

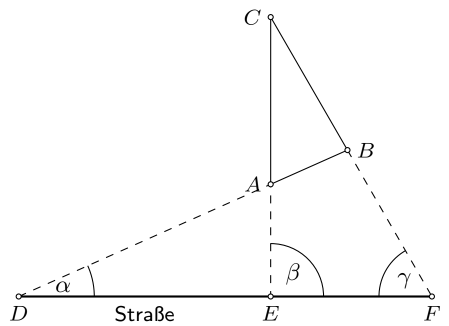
Aufgabe 3

In einem ebenen Gelände verläuft eine geradlinige Straße (siehe Skizze).

Bei einer vormilitärischen Übung erhält eine Gruppe der GST den Auftrag, die Entfernungen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ von der Straße aus zu ermitteln. Die Gruppe legt zu diesem Zweck auf der Straße die Punkte D, E und F fest und misst:

$$\overline{DE} = 2{,}5 \text{ km}, \quad \overline{EF} = 1{,}6 \text{ km}$$

$$\alpha = 24°, \quad \beta = 90°, \quad \gamma = 60°$$



Skizze (nicht maßstäblich)

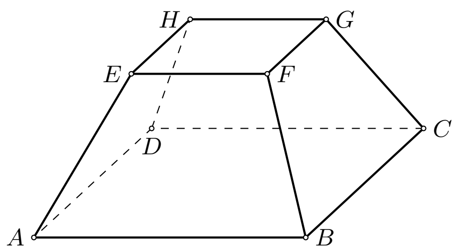
a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$!

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BC}$! (Rechenstabgenauigkeit genügt.)

Aufgabe 4

Ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche (siehe Skizze!) hat folgende Maße:

Länge der Grundkante: 6 cm; Länge der Deckkante: 3 cm;
Länge der Körperhöhe: 3 cm
Skizze (nicht maßstäblich)



a) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Legen Sie zweckmäßigerweise die Grundkante $\overline{AB}$ parallel zur Rissachse!

b) Durch die Punkte B, C, H und E des Pyramidenstumpfes wird eine Schnittebene gelegt. Stellen Sie die Schnittfläche $BCHE$ im Grund- und Aufriss dar!
Konstruieren Sie die wahre Größe dieser Schnittfläche!

c) Die Schnittfläche $BCHE$ hat die Gestalt eines Trapezes.
Berechnen Sie die Länge der Trapezhöhe. Benennen Sie alle Eckpunkte!

Wahlaufgaben
Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

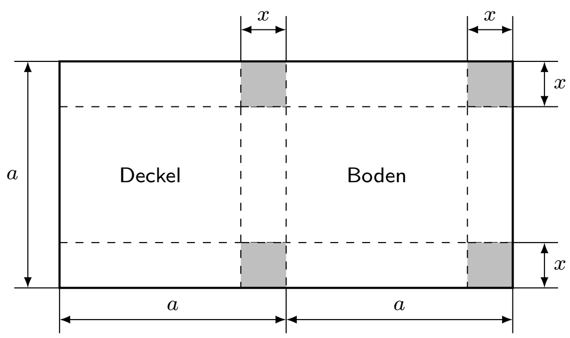
Aufgabe 5.1.
Von einer Ellipse sind folgende charakteristischen Punkte bekannt:
Hauptscheitelpunkte $A_1\left(-\frac{15}{2};0\right)$ und $A_2\left(\frac{15}{2};0\right)$
Brennpunkte $F_1(-6;0)$ und $F_2(6;0)$.

a) Konstruieren Sie die Ellipse in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)
Anmerkung: Außer den Scheitelpunkten sind in jedem Quadranten mindestens drei Punkte zu konstruieren.

b) Geben Sie die Koordinaten der Nebenscheitelpunkte an, und stellen Sie die Gleichung der Ellipse auf!

c) Durch den Mittelpunkt $M(0;0)$ und den Radius $r = \frac{15}{2}$ cm ist ein Kreis festgelegt. Durch den Punkt $P_1(6;y_1 > 0)$ dieses Kreises verlaufe eine Parallele zur x-Achse.
Begründen Sie, dass diese Parallele gleichzeitig durch einen Nebenscheitelpunkt der Ellipse geht!

Aufgabe 5.2.
Eine quaderförmige Faltschachtel mit anhängendem, nach beiden Längsseiten übergreifendem Deckel wird folgendermaßen hergestellt:



Skizze (nicht maßstäblich)
Aus einer rechteckigen Pappe mit den Seitenlängen a und $2a$ werden vier gleichgroße quadratische Stücke ausgeschnitten (in der Skizze farbig).
Die in der Skizze unterbrochen gezeichneten Linien werden zu Kanten der entstehenden Schachtel. Das Volumen der Schachtel soll möglichst groß werden.

Berechnen Sie für diesen Fall die Länge x (siehe Skizze)!

Aufgabe 5.3.
Gegeben ist eine Funktion durch
$$y = -x^3 + 9x^2 \qquad (0 \leq x \leq 6)$$
Das Bild dieser Funktion besitzt einen Wendepunkt.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes!

b) Welche Steigung hat die Tangente, die im Wendepunkt an das Bild der Funktion gelegt wird?

c) Stellen Sie eine Gleichung dieser Tangente auf!

d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse!

e) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen, die durch
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 \qquad (a \neq 0, b \neq 0, a,b,x \text{ reell})$$
gegeben sind, die Extremstelle $x_E = 0$ besitzen!

1.28 Abituraufgaben 1969 B

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;2), B(9;8), C(6;12), D(2;9)$.

a) Zeichnen Sie dieses Viereck in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
(Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ parallel sind!

c) Berechnen Sie das Maß des Winkels $\alpha = \measuredangle(BAD)$!

d) Auf der x-Achse gibt es genau einen Punkt P_0, so dass gilt: $\overline{P_0B} \perp \overline{P_0A}$.
Berechnen Sie die Abszisse des Punktes P_0!

Aufgabe 2
Gegeben ist die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ; } (a > 0, b > 0;\ \text{a,b reell})$$

a) Konstruieren Sie die Ellipse für den Fall $a = 5$ und $b = 4$ punktweise!
Anmerkung: Außer den Scheitelpunkten sind in jedem Quadranten mindestens drei Punkte zu konstruieren.

b) Von jeder Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ; } (a > 0, b > 0;\ \text{a,b beliebig reell})$$

wird eine Fläche eingeschlossen.
Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen V_x. Rotiert diese Fläche um die y-Achse, so entsteht ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen V_y. Berechnen Sie V_x und V_y mit Hilfe der Integralrechnung!

c) Zeigen Sie, dass für die beiden Rotationskörper stets gilt: $V_x : V_y = b : a$!

Aufgabe 3
In der Regelungstechnik kann die Übergangsfunktion $f(t)$ eines Regelkreisgliedes durch

$$y = f(t) = -t^3 + 9t^2 \text{ ; } (0 \leq t \leq 6)$$

dargestellt werden.
Das Bild der Funktion besitzt im Definitionsbereich einen Wendepunkt.
Zur Ermittlung von charakteristischen Kennwerten interessiert der Schnittpunkt der Tangente im Wendepunkt mit der t-Achse.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente, die im Wendepunkt an das Bild der Funktion gelegt wird.

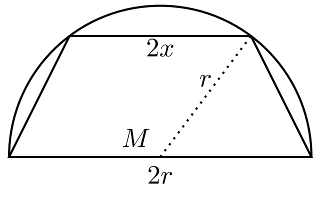
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Tangente mit der t-Achse!

d) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen, die durch

$$y = f(t) = ax^3 + bx^2 \text{ ; } (a \neq 0; b \neq 0; a,b,x \text{ reell})$$

gegeben sind, die Extremstelle $x_E = 0$ besitzen!

Aufgabe 4
Aus einer halbkreisförmigen Blechplatte ($r = 4$ dm) soll das gleichseitige Trapez mit größtem Flächeninhalt herausgeschnitten werden (siehe Skizze!)



a) Stellen Sie den Flächeninhalt A des Trapezes als Funktion einer geeigneten Veränderlichen dar!

b) Bestimmen Sie den Wert dieser Veränderlichen für den Fall, dass der Flächeninhalt maximal wird! (Auf einen Nachweis des Extremums - 2.Ableitung - wird verzichtet.)

Wahlaufgaben
Von den folgenden drei Aufgaben brauchen Sie nur **eine** zu lösen.

Aufgabe 5.1.
Die Gleichung einer Hyperbel lautet

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Geben Sie die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2 sowie der Scheitelpunkte A_1 und A_2 der Hyperbel an!

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte $P_1(5; \frac{9}{4})$ und $P_2(5; -\frac{9}{4})$ auf dieser Hyperbel liegen!

c) Skizzieren Sie diese Hyperbel!

d) Durch A_1 und P_1 verläuft die Gerade g_1, durch A_2 und P_2 die Gerade g_2.
Ermitteln Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2!
Berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes S!

e) Weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Ellipse liegt, die den gleichen Mittelpunkt und die gleichen Halbachsen a und b wie die gegebene Hyperbel hat!

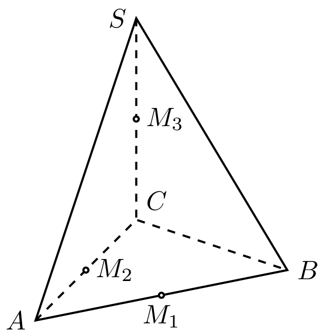
Aufgabe 5.2.
Die Grundfläche ABC einer Pyramide mit der Spitze S ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{CA} = 4$ cm und $\overline{CB} = 6$ cm.
Die Kante $\overline{CS}$ steht senkrecht auf der Grundfläche ABC und ist 8 cm lang (siehe Skizze!)

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, und geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an!

b) M_1, M_2, M_3 seien die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}, \overline{AC}$ und $\overline{CS}$ (siehe Skizze!).
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte!

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte M_1 und M_3!
Berechnen Sie das Maß des Winkels, den die Gerade g mit der Kante $\overline{CS}$ einschließt! (Rechenstabgenauigkeit genügt.)

d) Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die durch die Gerade g und den Punkt M_2 bestimmt ist!



Skizze (nicht maßstäblich)

Aufgabe 5.3.
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

a) Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion!
Bestimmen Sie hierzu die Koordinaten von mindestens drei Punkten!

b) Im Schnittpunkt mit der y-Achse sei die Tangente an das Bild der Funktion gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

c) Auf dem Bild der Funktion liegt ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ mit $x_1 > 0$.
Die Parallele zur y-Achse durch P_1, die x-Achse, die y-Achse und das Bild der Funktion begrenzen ein Flächenstück.
Zeigen Sie, dass für den Inhalt A dieses Flächenstücks gilt: $A = 2(1 - y_1)$!

1.29 Abituraufgaben 1970 A

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist eine Funktion durch $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 16$ (x reell).
Das Funktionsbild hat zwei lokale Extrempunkte und einen Wendepunkt.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte!

b) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Geraden auf, die durch die Extrempunkte geht!
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes, und untersuchen Sie, ob der Wendepunkt auf der unter b) bestimmten Geraden liegt!

Aufgabe 2
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks $A(4; 0), B(3; 7)$ und $C(0; 3)$.

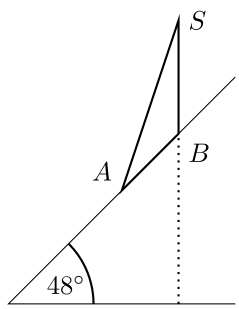
a) Zeichnen Sie das Dreieck!

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist!

c) Begründen Sie, dass der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC und die Strecke $\overline{AB}$ halbiert, und zeichnen Sie diesen Umkreis!

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes und die Länge des Radius!
Stellen Sie die Gleichung des Umkreises auf!

Aufgabe 3
Für eine Bergseilbahn wird ein lotrechter Mast von der Länge $\overline{BS} = 8{,}0$ m als Seilträger verwendet.
Der Berghang hat einen Steigungswinkel von $48°$.
Zur Erhöhung der Stabilität wird eine Stütze $\overline{AS}$ angebracht, deren Fußpunkt A vom Fußpunkt B des Seilträgers 4,5 m entfernt ist. (Siehe Skizze!) Skizze nicht maßstäblich.



a) Berechnen Sie die Länge von $\overline{AS}$!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\measuredangle(BAS)$!

Aufgabe 4
Die Grundfläche einer schiefen Pyramide ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5,0 cm.
Die Spitze der Pyramide befindet sich senkrecht über einem Eckpunkt der Grundfläche. Die Körperhöhe ist 8,0 cm lang.

a) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar!
Benennen Sie alle Eckpunkte!

b) Ermitteln Sie durch Konstruktion die wahre Länge der längsten Seitenkante, und geben Sie diese Länge in Millimetern an!

c) Berechnen Sie die Länge der längsten Seitenkante!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 5.1
Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2x$.

a) Konstruieren Sie die Parabel für $0 \leq x \leq 8$!
(Koordinateneinheit: 1 cm)
Außer dem Scheitelpunkt S sind mindestens sechs weitere Parabelpunkte zu konstruieren.

b) Eine Parallele zur Leitlinie im Abstand von 6,5 cm schneidet die Parabel in den Punkten P_1 und P_2.
Zeichnen Sie diese Parallele ein, und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2!

c) Untersuchen Sie, ob das Dreieck SP_1P_2 gleichseitig ist.

Aufgabe 5.2
a) Zeichnen Sie ein Dreieck mit

$$\measuredangle(BAC) = \alpha = 60^\circ \text{ ; } \measuredangle(CBA) = \beta = 30^\circ$$

und mit beliebiger Seitenlänge!
Zeichnen Sie die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle(BAC)$ ein!
Ihr Schnittpunkt mit der Seite $\overline{BC}$ sei T.

b) Die Länge der Strecke $\overline{AT}$ sei w.
Geben Sie die Längen von $\overline{CT}$ und $\overline{AC}$ unter Verwendung der Streckenlänge w an!

c) Zeigen Sie, dass die Quotienten $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ und $\dfrac{\overline{CT}}{\overline{BT}}$ einander gleich sind!

Aufgabe 5.3
Das Spielfeld eines Sportplatzes soll von einer Aschenbahn umschlossen werden, deren innerer Rand 440 m lang ist.
Dieser Rand besteht aus den beiden langen Seiten eines Fußballfeldes und zwei sich daran anschließenden Halbkreise (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)

a) Das rechteckige Fußballfeld soll einen möglichst großen Flächeninhalt erhalten.
Wie sind seine Abmessungen zu wählen?

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der beiden Halbkreisflächen unter Verwendung des in Aufgabe a) ermittelten Ergebnisses!

1.30 Abituraufgaben 1970 B

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben sind eine Parabel und eine Gerade durch die Gleichungen

$$y^2 = 4x \text{ bzw. } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte der Parabel, und zeichnen Sie diese Parabel im Intervall $0 \leq x \leq 10$!
Zeichnen Sie die Gerade in dasselbe Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von Parabel und Gerade!

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die Parabel und die Gerade begrenzt wird!

Aufgabe 2
In einem x-y-z-Koordinatensystem ist eine Gerade g durch die Punkte $P_1(10,7;1)$ und $P_2(4;1;-2)$ festgelegt.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Geraden g auf!

b) Untersuchen Sie, ob der Punkte $P_3(14;10;3)$ auf der Geraden g liegt!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0, in dem die Gerade g die x-y-Ebene durchstößt!

Aufgabe 3
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = f(x) = \ln(2x) \text{ ; (x reell; } x > 0)$$

a) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetafel!

x	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	4,0
y		-0,51		0,69		

Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $0{,}1 \leq x \leq 4{,}0$!

b) Das Bild dieser Funktion schneidet die x-Achse in P_0.
Berechnen Sie den Anstieg der Tangente in P_0 an die Kurve.

c) Das Bild jeder Funktion

$$y = g(x) = \ln(ax) \text{ ; } (x > 0; a > 0)$$

schneidet die x-Achse in $Q(\frac{1}{a};0)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente in Q an das Funktionsbild!
Begründen Sie, dass für jedes $a > 0$ diese Tangente die y-Achse im Punkt $R_0(0;-1)$ schneidet!

Aufgabe 4
In den Glühofen eines Presswerkes werden Rohlinge eingesetzt, die die Form von geraden Kreiszylindern haben.
Jeder Rohling hat eine Masse von $m = 15$ kg.
Um die Abbrandverluste möglichst gering zu halten, muss unter anderem die Oberfläche dieser Rohlinge möglichst klein sein.
Berechnen Sie Radius und Höhe für den Fall, dass die Oberfläche minimal wird!
Dichte des glühenden Stabes: $\rho = 7{,}5$ kg $\cdot$ dm^{-3}
(Rechenstabgenauigkeit genügt.)

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 5.1
Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung

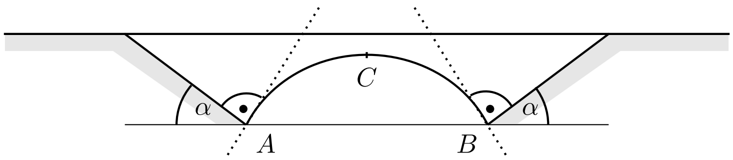
$$y = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Polstellen und auf Nullstellen!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Funktionsbild die y-Achse schneidet!

b) Weisen Sie nach, dass diese Funktion keine lokalen Extremstellen hat!
Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Bereich von $x_1 = -4$ bis $x_2 = +4$!

c) Das Bild dieser Funktion, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = 0$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht!

Aufgabe 5.2
Die Skizze zeigt einen parabelförmigen Brückenbogen, der beide Böschungen in den Punkten A und B senkrecht trifft.



Skizze (nicht maßstäblich)
Die Böschungen bilden mit der Horizontalen den Winkel $\alpha = 30°$. Die Entfernung der Punkte A und B beträgt $\overline{AB} = 12{,}0$ m.
Berechnen Sie die Höhe des Scheitelpunktes C des Brückenbogens über der Strecke $\overline{AB}$!
(Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!)

Aufgabe 5.3
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks $A(0;0), B(6;0)$ und $C(0;4)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck!
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seite $\overline{BC}$, und tragen Sie die Strecke $\overline{AM}$ in die Zeichnung ein!

b) Auf der Seite $\overline{AB}$ liegt der Punkt $D(2;0)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes E der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{CD}$!

c) Berechnen Sie das Verhältnis, in dem E die Strecke $\overline{AM}$ teilt!

d) Auf der Seite $\overline{AB}$ liegt ein Punkt $P(k;0)$ mit $0 < k < 6$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes F der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{PC}$!
(Hinweis: Das Ergebnis ist in möglichst einfacher Form anzugeben.)

1.31 Abituraufgaben 1971

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Bei einem gemeinsamen Manöver der Streitkräfte der Warschauer Vertragsstaaten wird ein Ziel (Flugzeug) nacheinander in den Punkten $P_1(19;-12;5)$ und $P_2(22;-9;5)$ geortet.
Das Ziel bewegt sich auf einer geradlinigen Bahn.
Eine Abwehrrakete wird von einem Punkt $P_3(8;2;0)$ aus abgeschossen.
Die Bahn dieser Rakete wird ebenfalls als geradlinig angenommen; ihre Richtung ist durch den Vektor $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ bestimmt.

a) Stellen Sie die Gleichungen dieser beiden geradlinigen Bahnen in Parameterform auf!

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P_0(28;-3;5)$ der Schnittpunkt der beiden Flugbahnen ist!

c) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die beiden Bahnen einander schneiden!

Aufgabe 2
Durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2+q}{x^2+1} \; ; (x, q \text{ reell}; q \neq 1)$$

sind rationale Funktionen gegeben.

a) Untersuchen Sie, ob die Funktionen für $q > 0$ bzw. für $q < 0$ Nullstellen besitzen!
Begründen Sie Ihre Aussagen!

b) Ermitteln Sie $\lim_{x\to+\infty} f(x)$!

c) Jede derartige Funktion hat genau eine lokale Extremstelle.
Berechnen Sie diese Extremstelle und den zugehörigen Funktionswert!
(Hinweis: Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung kann auf Grund der Aufgabenstellung verzichtet werden.)

Aufgabe 3
Gegeben ist eine Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie mindestens vier Punkte des Hyperbelastes, der im I. und IV.Quadranten liegt!
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $4 \leq x \leq 8$!

b) Geben Sie die Gleichung derjenigen Asymptote an, die positiven Anstieg hat! Zeichnen Sie diese Asymptote ein!
Zeichnen Sie die Gerade g, die durch $F_2(e;0)$ geht und senkrecht auf dieser Asymptote steht!
Die Gerade g schneidet dieser Asymptote in $P_0(x_0;y_0)$.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_0!

c) Zeichnen Sie die Parallele zur y-Achse durch den Scheitelpunkt $S(4;0)$!
Sie schneidet die Asymptote im Punkt Q.
Weisen Sie nach, dass die Dreiecke OSQ und OF_2P_0 kongruent sind (O ist der Ursprung des Koordinatensystems)!

d) Weisen Sie nach, dass auch für beliebige Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die entsprechend gelegenen Dreiecke kongruent sind!

Aufgabe 4
Die Bilder der Funktionen

$$f_1(x) = \sin(2x) \text{ und } f_2(x) = \sin x$$

schneiden einander im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ in drei Punkten.

a) Berechnen Sie die Abszissen dieser Schnittpunkte!

b) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen im angegebenen Intervall!

c) Die Bilder der Funktionen schließen in diesem Intervall zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den Inhalt des kleineren Flächenstückes!

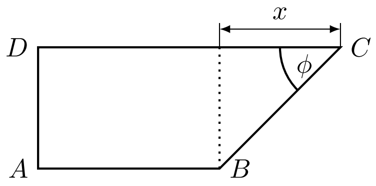
Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 5.1.
Der Querschnitt eines Kanals muss auf Grund örtlicher Gegebenheiten die skizzierte Form erhalten.

Es gilt: $\overline{AB} = 2{,}0$ m ; $\overline{BC} = 4{,}0$ m ; $\overline{AD} \perp \overline{AB}; \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

a) Geben Sie den Flächeninhalt des Kanalquerschnitts in Abhängigkeit entweder von ϕ oder x an!

b) Berechnen Sie entweder ϕ oder x für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird!
(Hinweis: Auf die Untersuchung der zweiten Ableitung wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)



Skizze (nicht maßstäblich)

Aufgabe 5.2.
Eine Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_1 = 3 \; ; \; a_{k+1} = a_k + (4k+3) \; ; \; (k > 0)$$

a) Geben Sie die Glieder a_2, a_3 und a_4 dieser Folge an!

b) Dieselbe Folge kann durch die explizite Bildungsvorschrift

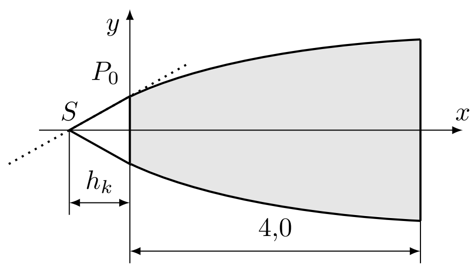
$$b_n = 2n^2 + n \; ; \; (n > 0)$$

gegeben werden.
Beweisen Sie diese Behauptung mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion!

c) Bestimmen Sie k so, dass $b_k = 820$ gilt!

d) Beweisen Sie, dass die Folge (b_n) eine monoton wachsende Zahlenfolge ist, d.h., dass für alle n gilt: $b_{n+1} > b_n$!

Aufgabe 5.3.



Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in Meter
Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Raumflugkörpers, der aus einem Rumpf (in der Skizze grau) und einem kegelförmigen Kopf mit der Spitze S besteht.
Der Rumpf kann als Paraboloid aufgefasst werden, das durch Rotation der Parabel mit der Gleichung

$$y^2 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})$$

um die x-Achse in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 4$ entsteht.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Rumpfes!

b) Welchen Radius hat der Grundkreis des Kegels?

c) Die Gerade durch die Punkte S und P_0 ist Tangente an das Bild der gegebenen Parabel im Punkt $P_0(x_0; y_0)$.
Bestimmen Sie die Höhe h_k des Kegels!

1.32 Abituraufgaben 1972

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch $a_n = 3n(n-1)$; $(n \geq 1)$.

a) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Zahlenfolge!

b) Bestimmen Sie die Partialsummen s_1, s_2 und s_3 der gegebenen Zahlenfolge!

c) Das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen kann in der Form

$$s_n = n^3 + r \cdot n \ ; \ (r \in R; n \in N; n \geq 1)$$

dargestellt werden.
Bestimmen Sie den Wert der Variablen r unter Verwendung der im Teil b) berechneten Partialsummen!

d) Setzen Sie den von Ihnen ermittelten Wert der Variablen r in die in c) angeführte Gleichung ein!
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass der so erhaltene Ausdruck das allgemeine Glied für die Folge der Partialsummen ist!

Aufgabe 2
Durch die Gleichung $y^2 = 4x$ ist eine Parabel gegeben.

a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte dieser Parabel, und zeichnen Sie die Kurve im Intervall $0 \leq x \leq 6$!

b) Eine Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = t$ $(t \in R$ und $0 \leq t \leq 8)$ schneidet die Parabel in den Punkten P_1 und P_2.
Ermitteln Sie die Koordinaten von P_1 und P_2 in Abhängigkeit von t!

c) Der Punkte $P_3(6; 0)$ bestimmt mit diesen Punkten ein gleichschenkliges Dreieck $P_1P_2P_3$.
Bestimmen Sie t so, dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat!

Aufgabe 3
Bei einer Übung der GST im Fallschirmspringen bildet der Beobachtungspunkt 0 den Ursprung eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems.
Ein geöffneter Fallschirm, dessen Bewegung als geradlinig angesehen werden kann, wird nacheinander in den Punkten $P_1(0; 0; 600)$ und $P_2(120; 90; 450)$ beobachtet. (Koordinateneinheit: 1 m)

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade durch P_1 und P_2!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des voraussichtlichen Landepunktes P_0 des Fallschirms in der xy-Ebene!

c) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{OP_0}$!

d) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle\left(\overrightarrow{OP_0}, \vec{j}\right)$!

e) Berechnen Sie den Betrag der durchschnittlichen Bahngeschwindigkeit des Fallschirmes in ms^{-1}, wenn er die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in 60 s zurücklegt.

Aufgabe 4
Gegeben ist eine Funktion durch

$$y = f(x) = \sqrt{16 - 2x} - 2 \ ; \ (x \in R; x \leq 8)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

b) Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle dieser Funktion!

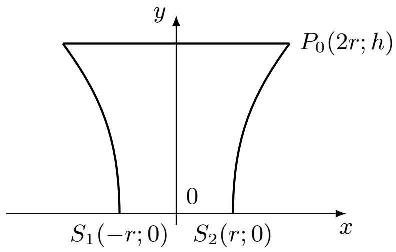
x	-4,5	0		8
y			1	

c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-4{,}5 \leq x \leq 8$!

d) Die Koordinatenachsen und das Bild der Funktion begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie deren Flächeninhalt!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 5.1.



$(r > 0; h > 0)$, Skizze (nicht maßstäblich)
Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Rotationshyperboloids.
Die Rotation erfolgt um die y-Achse. S_1 und S_2 sind die Scheitelpunkte der den Achsenschnitt begrenzenden Hyperbel.

a) Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der durch die Punkte S_1, S_2 und P_0 gegebenen Hyperbel auf!

b) Berechnen Sie das Volumen des Hyperboloids durch Integration!

c) Ein weiterer Punkt der Hyperbel ist $P_M(x_M; \frac{h}{2})$ $(x_M > 0)$
Berechnen Sie x_M!

d) In der Praxis berechnet man das Volumen V eines Hyperboloids mit Hilfe der Formel

$$V = \frac{h}{6}\,(A_1 + A_2 + 4A_M)$$

Hierbei bedeuten:
A_1 ... Inhalt der Grundfläche
A_2 ... Inhalt der Deckfläche
A_M ... Inhalt der parallel zur Grundfläche liegenden Schnittfläche in der Höhe $\frac{h}{2}$
Weisen Sie nach, dass man durch Anwendung dieser Formel dasselbe Ergebnis wie im Teil b) dieser Aufgabe erhält!

Aufgabe 5.2.
Gegeben sind Funktionen mit Gleichungen der Form

$$y = f(x) = \frac{a}{x^2}\ ;\ (x \in R; x > 0; a \in R; a > 0)$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $y = \frac{a}{x^2}$ für $a = 4$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem im Intervall $0 < x \leq 4$!

b) Durch das Bild jeder Funktion $y = f(x) = \frac{a}{x^2}$, die x-Achse und die Geraden $x = 2$ und $x = 3$ wird eine Fläche begrenzt!
Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche in Abhängigkeit vom Parameter a!

c) An das Bild einer beliebigen Funktion $y = f(x) = \frac{a}{x^2}$ wird im Punkte $P_0(1; a)$ die Tangente gelegt.
Zeigen Sie, dass die Abszisse des Schnittpunktes der Tangente mit der x-Achse von a unabhängig ist!

Aufgabe 5.3.
Ein Druckbehälter für eine chemische Reaktion besteht aus einem Zylinder, der beiderseits durch angesetzte Halbkugeln abgeschlossen ist.
Der zylindrische Teil soll ein Volumen von $V_z\ m^3$ erhalten.
Um Wärmeverluste während der Reaktion gering zu halten, soll die gesamte Oberfläche möglichst klein sein.
(Die Wandstärke des Behälters ist bei der Rechnung nicht zu berücksichtigen.)

a) Bestimmen Sie den Radius r des Zylinders in Abhängigkeit von V_z für den Fall, dass der gesamte Oberflächeninhalt des Druckbehälters minimal wird!

b) Weisen Sie nach, dass bei minimalem Oberflächeninhalt des Druckbehälters das Verhältnis von Radius r und Höhe h des Zylinders 1 : 4 beträgt!

1.33 Abituraufgaben 1973

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Bei einer gemeinsamen Übung der Luft- und Seestreitkräfte unserer NVA ortet eine Radarstation der Küstenüberwachung ein Schiff nacheinander in den Punkten $P_1(30;12;0)$ und $P_2(22;8;0)$.
Der Kurs des Schiffes verlaufe geradlinig.
Zur Bekämpfung des Schiffes wird von einem Flugzeug aus im Punkt $P_3(10;7;3)$ eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen. Die Flugbahn der Rakete wird als geradlinig angenommen.
Richtungsvektor dieser Flugbahn ist $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. (Koordinatenangaben in km)

a) Ermitteln Sie je eine Parametergleichung für den Schiffskurs und für die Flugbahn der Rakete!

b) Das Schiff wird von der Rakete im Punkt S getroffen.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Bahn der Rakete und dem Kurs des Schiffes!

d) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat die Rakete, wenn ihre Flugzeit vom Abschusspunkt bis zum Treffpunkt 7 Sekunden beträgt?

Aufgabe 2
Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Konstruieren Sie außer den Scheitelpunkten mindestens acht Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie die Ellipse!

b) Berechnen Sie die Länge der Sehne, die in einem Brennpunkt dieser Ellipse auf der x-Achse senkrecht steht!

c) Die Brennpunkte der Ellipse seien Scheitelpunkte einer Hyperbel.
Eine Asymptote dieser Hyperbel hat den Anstieg $m = \sqrt{3}$. Geben Sie die Gleichung dieser Hyperbel an!

Aufgabe 3
Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$y = f(x) = \sin 2x \ ; \ (x \in R)$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $0 \leq x \leq \pi$!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_1(\frac{\pi}{2}; y_1)$!

c) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$.

Aufgabe 4
Durch die Gleichung

$$y = f(x) = e^x \cdot (x^2 - a) \ ; \ (x \in R; a \in R)$$

sind nichtrationale Funktionen gegeben.

a) Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung!

b) Für $a = 3$ hat das Funktionsbild zwei lokale Extrempunkte.
Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Minimumpunktes!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktionen für $a < -1$ keine Extrema haben!

Wahlaufgaben

(Von den folgenden drei Aufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 5.1.
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \ ; \ (x \in R) \qquad \text{und} \qquad y = g(x) = \ln\frac{x}{2} \ ; \ (x \in R; x > 0)$$

a) Ergänzen Sie die vorgegebene Wertetafel für $y = g(x)$!

x	4	2	1	0,5
y			-0,69	

b) Skizzieren Sie die Bilder beider Funktionen im Intervall $0{,}5 \leq x \leq 4{,}0$ in einem Koordinatensystem!

c) Schneidet eine Parallele zur y-Achse die Bilder der Funktionen f und g in je einem Punkt, so stellt $h(x) = f(x) - g(x)$ den Abstand der beiden Punkte dar.
Berechnen Sie diejenige Abszisse x_E, für die dieser Abstand minimal wird!
Berechnen Sie diesen minimalen Abstand!

Aufgabe 5.2.
Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 6x$.

a) Konstruieren Sie mindestens sechs Punkte dieser Parabel!

b) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an diese Parabel im Punkt $P_1(6;6)$ auf!

c) Durch den Brennpunkt F dieser Parabel verläuft eine Gerade, die senkrecht auf der unter b) bestimmten Tangente steht.
Stellen Sie die Gleichung dieser Geraden auf!

d) Für jede Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ gilt:
Die Tangente an die Parabel in einem beliebigen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ mit $x_0 \neq 0$ schneidet die y-Achse im Punkt $A(0; \frac{y_0}{2})$.
Weisen sie nach, dass die Gerade durch A und F auf dieser Tangente senkrecht steht!

Aufgabe 5.3.
Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x} \;;\; (x \in R; x \neq 1)$$

a) Berechnen Sie die Stellen x_1 und x_2, an denen die erste Ableitung dieser Funktion den Wert 1 hat!

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = \frac{3}{2}$ lokal monoton wachsend ist!

c) Bilden Sie die 2., die 3. und die 4.Ableitung der Funktion!
Geben Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ an!
(Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Fakultätsschreibweise zu verwenden.)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ richtig ist!

1.34 Abituraufgaben 1974

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \qquad (x \in P)$$
$$y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 \qquad (x \in P)$$

Ihre Bilder schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes für das Bild der Funktion g.

c) Die Bilder der gegebenen Funktionen begrenzen eine Fläche vollständig. Fertigen Sie eine Skizze an! Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe 2
In der x-y-Ebene ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2;3)$ gegeben, der durch den Punkt $P_1(5;7)$ geht.

a) Berechnen Sie den Radius, und stellen sie die Gleichung des Kreises auf!

b) Der Kreis schneidet den positiven Teil der x-Achse im Punkt $P_0(x_0;y_0)$. Berechnen Sie x_0.

c) Weisen Sie nach, dass die in P_0 und P_1 an den Kreis gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 3
In einem Koordinatensystem $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sind die Punkte $A(-2;8;2)$ und $B(-4;10;10)$ gegeben.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte A und B geht!

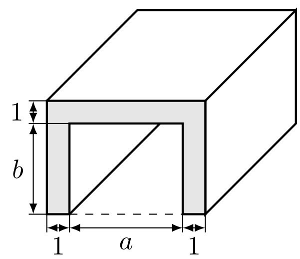
b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $C(-2;2;8)$ nicht auf der Geraden g liegt!

c) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle AOC$! (Dabei ist O der Ursprung des Koordinatensystems.)

d) Weisen Sie nach, dass das Viereck OABC ein Parallelogramm ist!
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Parallelogramms!

Aufgabe 4

Zum Schutz gegen mechanische Beschädigungen werden unterirdisch verlegte Kabel mit Formstücken aus Beton so abgeschirmt, dass die Kabel in einem Hohlraum liegen. (siehe Skizze)
Der Hohlraum muss eine rechteckige Querschnittsfläche von 18 dm^2 Inhalt haben. Wand- und Deckenstärke betragen jeweils 1 dm.
Für die Herstellung der Formstücke soll möglichst wenig Beton verbraucht werden, d.h., der Inhalt der in der Skizze gefärbten Fläche soll minimal werden.
Berechnen Sie für diesen Fall die Abmessungen a und b der Querschnittsfläche des Hohlraums!



(Skizze nicht maßstäblich, Maßangabe in Dezimeter)

Aufgabe 5
a) Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{2x+1} = 1 - x \qquad (x \in P)$$

b) Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = e^{3x} \cdot \sin x \qquad (x \in P)$$

Bilden Sie die erste Ableitung!

c) Gegeben ist eine Funktion g durch

$$y = g(x) = 1 - \ln x \qquad (x \in P; x > 0)$$

Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{2} + \cos(2x) \; ; \; (x \in R) \; ; \; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle dieser Funktion!

b) Ermitteln Sie die Funktionswerte $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ und $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$!

c) Das Bild der Funktion f hat genau einen lokalen Maximumpunkt. Berechnen Sie seine Koordinaten!

d) Skizzieren Sie unter Verwendung der berechneten Werte das Bild der Funktion!

e) Das Bild der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche allseitig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe 6.2.
Eine Zahlenfolge (a_n) hat die Folge der Partialsummen (s_n). Eine Bildungsvorschrift für (s_n) sei gegeben durch

$$s_n = \frac{2n}{n+1} \qquad (n \in N; n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der Folge (s_n) an. Weisen Sie nach, dass die Folge (s_n) monoton wachsend ist.

b) Geben Sie den Grenzwert g der Folge (s_n) an!

c) Wieviele Glieder der Folge (s_n) sind kleiner als 1,94?

d) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 und das allgemeine Glied a_n der Zahlenfolge (a_n)!

Aufgabe 6.3.
Gegeben ist eine Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

a) Konstruieren Sie mindestens acht Punkte dieser Hyperbel!
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

b) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an, und zeichnen Sei die Asymptoten ein!

c) Die Parallele zu der Asymptote mit positivem Anstieg durch den Punkt $Q(0;2)$ schneidet die Hyperbel im Punkt R. Berechnen Sie die Koordinaten von R.

d) Beweisen Sie, dass für jede Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gilt:
Jede nicht durch den Ursprung gehende Parallele zur Asymptote mit positivem Anstieg schneidet die Hyperbel in genau einem Punkt.

1.35 Abituraufgaben 1975

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
In einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ist ein Dreieck durch die Eckpunkte $O(0;0;0)$, $A(2;2;1)$ und $B(1;4;-1)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Seiten $\overline{OA}$ und $\overline{AB}$ gleiche Länge haben!

b) Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

d) Durch die Punkte A und B geht die Gerade g. Geben Sie eine Gleichung für g an!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0, in dem diese Gerade die y-z-Ebene durchstößt!

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{4}{x^2} + 1 \; ; \; (x \in R; x \neq 0)$$

a) Berechnen Sie die Ordinaten der Punkte $P_1(1; y_1)$ und $P_2(4; y_2)$!
Skizzieren Sie das Bild dieser Funktion im Intervall $1 \leq x \leq 4$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f, von der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ eingeschlossen wird!

c) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f!
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0, in dem das Bild der Funktion f den Anstieg $m = -1$ hat!

d) Stellen Sie die Gleichung der im Punkte P_0 an das Bild der Funktion gelegten Tangente auf!

Aufgabe 3
Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $x^2 + 4y^2 = 25$.

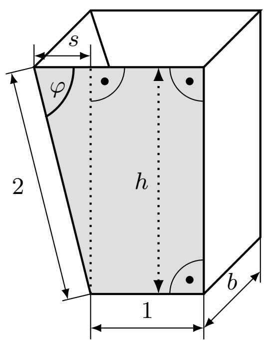
a) Ermitteln Sie die Halbachsen a und b sowie die lineare Exzentrizität e der Ellipse!

b) Konstruieren Sie außer den Scheitelpunkten mindestens 12 Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie diese Ellipse!

c) Die Gerade mit der Gleichung $x + y - 5 = 0$ schneidet die gegebene Ellipse in den Punkten P_1 und P_2.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2!

d) Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist Durchmesser eines Kreises.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M dieses Kreises!
Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf!

Aufgabe 4
Ein Abfallcontainer hat die in der Skizze dargestellte Form.
Damit er bei konstanter Breite b ein möglichst großes Fassungsvermögen erhält, muss der Inhalt der in der Skizze hervorgehobenen Seitenfläche maximal werden.
Skizze (nicht maßstäblich), Maßangabe in Meter



a) Geben Sie die Höhe h und die Strecke s in Abhängigkeit vom Winkel φ an!

b) Stellen Sie den Inhalt A der hervorgehobenen Seitenfläche als Funktion des Winkel φ dar!

c) Bestimmen Sei den Winkel φ so, dass der Inhalt dieser Seitenfläche maximal wird!
Hinweis: Auf den Nachweis des Maximums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.

Aufgabe 5
a) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{o}; \vec{b} \neq \vec{o}$) schließen einen spitzen Winkel ϕ ein.
Ermitteln Sie ϕ für den Fall, dass gilt: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2} \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$

b) Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = x \cdot \ln x$; $(x \in R; x > 0)$
Bilden Sie erste Ableitung $f'(x)$! Berechnen Sie $f'(1)$!

c) Geben sie alle reellen Zahlen x an, für die der Term $\sqrt{0{,}1 - 2x}$ definiert ist!

d) Ermitteln Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{4n^3 - 7}$.

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.
Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; $(x \in R)$.

a) Bilden Sie die ersten drei Ableitung $f'(x), f''(x), f'''(x)$!

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Ableitungen der Funktion f gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

c) Berechnen Sie $f'(0), f''(0), f'''(0)$ und $f^{(n)}(0)$!
Diese Werte bilden eine Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_1 = f'(0); a_2 = f''(0); a_3 = f'''(0); ...; a_n = f^{(n)}(0); ...$$

Zeigen Sie für die Folge (a_n), dass der Quotient aufeinanderfolgender Glieder $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstant ist!

d) Aus den Gliedern dieser Zahlenfolge (a_n) lässt sich die unendliche geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bilden.
Berechnen Sie deren Summe $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$!

Aufgabe 6.2.
Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$; $0 \leq x \leq 2\pi$ $(x \in R)$

a) Berechnen Sie die Nullstelle x_0 der Funktion f! Skizzieren Sie das Bild von f!

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P_0(x_0; 0)$ Wendepunkt ist!

c) Eine Fläche wird von den Koordinatenachsen und dem Bild von f allseitig begrenzt.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

d) Eine Teilfläche wird von den Koordinatenachsen, dem Bild von f und einer Parallelen zur y-Achse im Abstand d $(0 < d < \pi)$ allseitig begrenzt.
Berechnen Sie d so, dass der Inhalt dieser Teilfläche den Wert 1 hat!

Aufgabe 6.3.
Eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ geht durch den Punkt $P_1(12; 12)$.

a) Geben Sie den Halbparameter p dieser Parabel an!
Berechnen Sie den Anstieg m_1 der Tangente im Punkt P_1 an diese Parabel!

b) Skizzieren Sie diese Parabel und die in P_1 an die Parabel gelegte Tangente!

c) Es gibt genau eine Tangente an diese Parabel mit dem Anstieg $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes P_2, in dem diese Tangente die Parabel berührt!

d) Beweisen Sie, dass für jede Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ gilt:
Für die Ordinaten der Berührungspunkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ eines jeden Paares aufeinander senkrecht stehender Tangenten ist

$$y_1 \cdot y_2 = -p^2$$

1.36 Abituraufgaben 1976

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1

Eine Hyperbel sei gegeben durch die Koordinaten ihrer Scheitelpunkte $A_1(-3;0)$ und $A_2(3;0)$ und ihrer Brennpunkte $F_1(-5;0)$ und $F_2(5;0)$.

a) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Hyperbel!
Zeichen Sie diese Hyperbel im Intervall $-6 \leq x \leq 6$!

b) Geben Sie die Gleichung dieser Hyperbel und ihrer beiden Asymptoten an!

c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, geht durch die Scheitelpunkte der Hyperbel.
Stellen Sie die Gleichung dieses Kreises auf!
Zeichnen Sie die Asymptoten und den Kreis in dasselbe Koordinatensystem wie die Hyperbel ein!

d) Dieser Kreis schneidet eine der Asymptoten im ersten Quadranten im Punkt P_1. Berechnen Sie die Koordinaten von P_1!

Aufgabe 2

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = x - 2\sqrt{x} \qquad (x \in P; x \geq 0)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f!

b) Das Bild der Funktion f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Skizzieren Sie das Bild von f im Intervall $0 \leq x \leq 9$!

d) Das Bild der Funktion f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

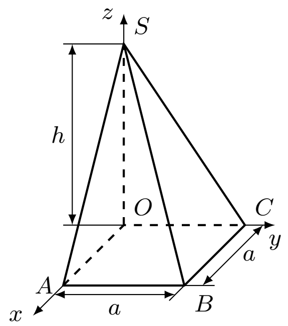
Aufgabe 3

Die Skizze zeigt eine schiefe Pyramide, deren quadratische Grundfläche $OABC$ in der xy-Ebene eines Koordinatensystems $\{O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ liegt. Die Spitze S befindet sich auf der z-Achse. Die Länge der Seite der quadratischen Grundfläche beträgt 8 cm; die Höhe der Pyramide beträgt $h = 6$ cm.

a) Geben Sie die Koordinaten der fünf Eckpunkte der Pyramide an!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seitenkante $\overline{AS}$! Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$ in Komponentendarstellung an!

c) Berechnen Sie $\measuredangle BMC$!



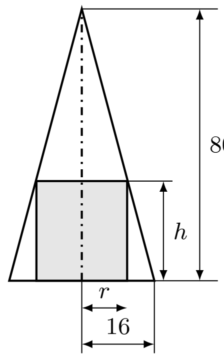
Skizze nicht maßstäblich!

d) Auf der Grundkante $\overline{OC}$ der Pyramide existiert ein Punkt P_0 derart, dass $\overrightarrow{MP_0} \perp \overrightarrow{MB}$ gilt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0!

Aufgabe 4

Ein Raketenkopf hat die Form eines geraden Kreiskegels (Grundkreisradius 16 cm, Höhe 80 cm). Er soll einen zylindrischen Behälter für einen Messgerätesatz aufnehmen (siehe Figur).

Aus technischen Gründen soll die Oberfläche des Zylinders (Grund-, Deck- und Mantelfläche) maximalen Flächeninhalt erhalten.
Berechnen Sie den Radius r und die Höhe h des Zylinders für diesen Fall!



Skizze nicht maßstäblich!

Aufgabe 5

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ und $\vec{b} = 9\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.
Ermitteln Sie $\vec{w} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ und das Vektorprodukt $\vec{w} \times \vec{i}$!

b) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $\quad y = f(x) = e^x \cdot 2x \quad (x \in P)$
und berechnen Sie $f'(0)$!

c) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\quad \int \frac{dx}{2x+1} \qquad (x \in P; x \geq 0)$

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch $\quad a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \qquad (n \geq 1)$

a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!
Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge!
Für die Glieder der Partialsummenfolge gilt

$$s_n = \frac{n}{3(n+c)} \qquad (n = 1; 2; 3)$$

Ermitteln Sie den Wert der Konstanten c!

b) Setzen Sie den ermittelten Wert für c ein, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass der so erhaltene Ausdruck für s_n allgemeines Glied der Partialsummenfolge (s_n) ist!

c) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge (s_n)!

d) Von welchem $n = n_0$ ab liegen die Glieder der Partialsummenfolge (s_n) in der ϵ-Umgebung des Grenzwertes g, wenn $\epsilon = 10^{-2}$ ist?

Aufgabe 6.2.

a) Berechnen Sie die lokale Extremstelle, den zugehörigen Funktionswert und die Art des Extremums der Funktion

$$y = f_1(x) = e^{2x} - 4x \qquad (x \in P)$$

b) Weisen Sie nach, dass jede Funktion

$$y = f(x) = e^{ax} - a^2 x \qquad (a \in P; a > 0; x \in P)$$

genau eine lokale Extremstelle x_E hat! Ermitteln Sie die Art des Extremums!

c) Berechnen Sie $f(x_E)$ und ermitteln Sie die reelle Zahl a, für die $f(x_E) = 0$ gilt!

Aufgabe 6.3.

a) Eine Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1(2; 2; 3)$ und $P_2(0; 2; 1)$.
Stellen Sie die Parametergleichung für g_1 auf! Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0, in dem diese Gerade die xy-Ebene durchstößt!

b) Eine zweite Gerade g_2 geht durch $P_3(4; 6; 9)$; ihr Richtungsvektor ist $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
Stellen Sie eine Parametergleichung für g_2 auf! Weisen Sie nach, dass g_1 und g_2
- nicht parallel sind,
- keinen Schnittpunkt haben!

c) Die Gerade g_1 wird von einer Geraden g_3 im Punkt S geschnitten.
Die Gerade g_3 geht ebenfalls durch den Punkt P_3 und hat den Richtungsvektor $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + c\vec{k}$ $(c \in P)$.
Berechnen Sie die Koordinate c dieses Vektors!
Geben Sie die Koordinaten des Punktes S an!

1.37 Abituraufgaben 1977

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte A_1 und A_2 und der Brennpunkte F_1 und F_2!

b) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Hyperbel!
Zeichnen Sie die Hyperbel im Intervall $-4 \leq x \leq 4$!

c) Die Gerade $y = 6$ schneidet diese Hyperbel in den Punkten P_1 und P_2.
Die Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{A_1A_2}$ und die Hyperbel begrenzen eine Fläche, die den Achsenschnitt des Innenraumes einer Düse von 6,0 cm Höhe darstellt.
Berechnen Sie den oberen Durchmesser P_1P_2 dieser Düse!
(Koordinateneinheit 1 cm)

d) Der obere Durchmesser der Düse soll auf 8,0 cm vergrößert werden, die Höhe und der untere Durchmesser A_1A_2 bleiben unverändert.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Gleichung der Hyperbel!

Aufgabe 2
In einem räumlichen Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sind die Punkte $P_1(2; 2; 4), P_2(10; 2; 8)$ und $P_3(4; 1; 4)$ gegeben.

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g_1 auf, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht!

b) Eine Gerade g_2 geht durch den Punkt P_3 und hat die Richtung des Vektors $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Stellen Sie für die Gerade g_2 eine Gleichung auf!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2!

d) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2!

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$!

Aufgabe 3
Es soll ein allseitig geschlossener quaderförmiger Container gebaut werden, der folgende Bedingungen erfüllt:
Das Volumen beträgt 9,0 m^3,
die Länge ist doppelt so groß wie die Breite,
der Inhalt der Oberfläche soll minimal sein.
Berechnen Sie die Abmessungen dieses Containers!

Aufgabe 4
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{9 - x^2}{x^2 + 3} \ ; \ (x \in R)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion keine Pole hat!

c) Ermitteln Sie Anzahl, Art und Koordinaten der Extrempunkte des Bildes der Funktion!

d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen!

e) Skizzieren Sie das Bild der Funktion im Intervall $-7 \leq x \leq 7$!

Aufgabe 5
a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion $y = f(x) = e^x - 1 \ (x \in R)$ an!

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx$.

c) Berechnen Sie die Summe $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.
Gegeben sind die Funktion g und h durch

$$y = g(x) = 3 + \cos x \ ; \ (0 \leq x \leq 2\pi; x \in R)$$

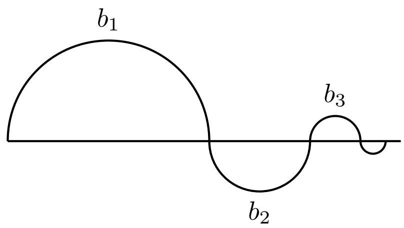
$$y = h(x) = 1 + \sin x \ ; \ (0 \leq x \leq 2\pi; x \in R)$$

a) Skizzieren Sie die Bilder der Funktionen g und h in ein und demselben Koordinatensystem!

b) Die Bilder der Funktionen g und h sollen von einer Parallelen zur y-Achse so in zwei Punkten P und Q geschnitten werden, dass die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ minimal wird.
Berechnen Sie die Abszisse der Punkte P und Q!

c) Die y-Achse, die Bilder der Funktionen g und h und die Gerade $x = 2\pi$ begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe 6.2.
In der Skizze sind Halbkreise dargestellt. Der erste Halbkreis mit der Bogenlänge b_1 hat den Radius r. Der Radius jedes weiteren Halbkreises ist halb so groß wie der Radius seines unmittelbaren Vorgängers.



a) Die Längen $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ der Halbkreisbögen bilden eine unendliche Folge (b_n).
Geben Sie die Glieder b_1, b_2, b_3 und das allgemeine Glied b_n dieser Folge in Abhängigkeit von r an!

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summen der ersten n Glieder der Folge (b_n) gilt:

$$s_n = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \ ; \ (n \geq 1)$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (s_n)!

Aufgabe 6.3.
Gegeben ist die Funktion f_1 durch

$$y = f_1(x) = 2\sqrt{x-4} \ ; \ (4 \leq x \leq 13); x \in R)$$

a) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f_1!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f_1, von der x-Achse und der Geraden $x = 13$ eingeschlossen wird!

c) Im Punkt $B(8; y_B)$ wird an das Bild von f_1 die Tangenten gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

d) Das Bild jeder der Funktionen

$$y = f(x) = c\sqrt{x - c^2} \ ; \ (c \in R; c > 0)$$

hat eine Tangente mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$.
Berechnen Sie die Abszisse des jeweiligen Berührungspunktes (in Abhängigkeit von c)!

1.38 Abituraufgaben 1978

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = x^2 + 1 \; ; \; (x \in R) \text{ und } y = g(x) = 2x + 4 \; ; \; (x \in R)$$

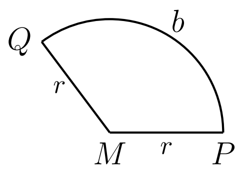
Die Bilder von f und g schneiden einander in den Punkten P_1 und P_2.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2!

b) Die Bilder der gegebenen Funktionen begrenzen eine Fläche vollständig.
Fertigen Sie eine Skizze an! Berechnen Sie den Inhalt der Fläche!

c) Es gibt genau eine Tangente an das Bild von f, die parallel zum Bild von g ist.
Berechnen Sie die Abszisse x_0 des Berührungspunktes!

Aufgabe 2
Ein Kreisausschnitt PQM (siehe Skizze!) hat den Flächeninhalt $A = \frac{b \cdot r}{2} = 100 \; cm^2$

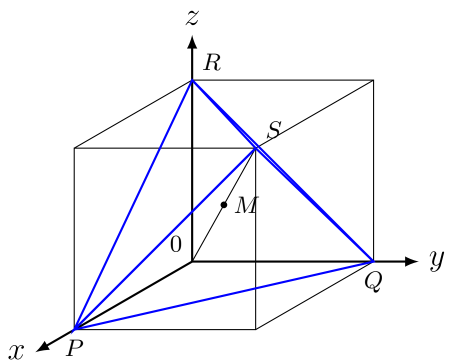


Skizze (nicht maßstäblich)
Der Umfang des Kreisausschnittes, der sich aus den Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ und dem Kreisbogen $\widehat{PQ}$ zusammensetzt, soll minimal werden. Berechnen Sie für diesen Fall

a) die Längen des Radius r und des Bogens b;

b) die Größe des Winkels $\measuredangle PMQ$ (in Grad)!

Aufgabe 3



Skizze (nicht maßstäblich)

Das Modell des Methanmoleküls hat die Form eines Tetraeders. Für Berechnungen ist es zweckmäßig, dieses einem Würfel mit der Kantenlänge 1 Längeneinheit einzubeschreiben.
Die Skizze zeigt die Lage dieses Würfels in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$.
Die Punkte P, Q, R und S kennzeichnen die Lage der Wasserstoffatomkerne.
Die Lage des Kohlenstoffatomkerns wird durch den Mittelpunkt M der Raumdiagonalen $\overline{OS}$ angegeben.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte P, Q, R, S und M!

b) Berechnen Sie den Abstand eines Wasserstoffatomkerns vom Kohlenstoffatomkern für dieses Modell!

c) Berechnen Sie die Größe des Bindungswinkels $\phi = \measuredangle PMQ$!

Aufgabe 4
Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = 10\dfrac{\ln x}{x}$; $(x \in R; 0{,}6 \leq x \leq 6)$

a) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetafel!

x	0,6	0,8		4	6
y		-2,8	0	3,5	

b) Das Bild der Funktion f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

Aufgabe 5
a) Eine Zahlenfolge ist gegeben durch die rekursive Bildungsvorschrift

$$a_1 = 3 \text{ und } a_{k+1} = a_k + 2^{k+2} \ (k \in N; k \geq 1)$$

Berechnen Sie das Glied a_2 dieser Folge!

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x_0+h)^2 - 2x_0^2}{h}$ an der Stelle $x_0 = 3$!

c) Gegeben ist

$$\int_0^t \cos x dx = \frac{1}{2} \ (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

Berechnen Sie t!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 1 + \sin(2x) \ ; \ (x \in R; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Abszissen und Ordinaten der beiden Extrempunkte des Bildes dieser Funktion!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f!

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird!

d) Gegeben sind Funktionen durch

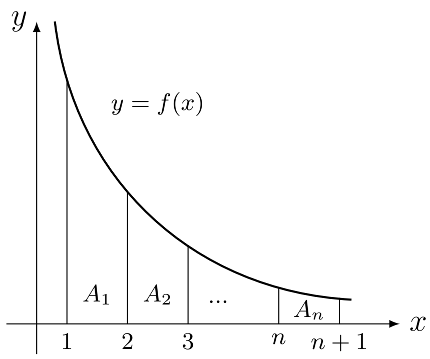
$$y = g(x) = 1 + \sin(bx) \ ; \ (x \in R; b \in R; b > 0)$$

$P_1(0;1)$ und $P_2(\frac{\pi}{b};1)$ sind Punkte der Bilder dieser Funktionen.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters b für den Fall, dass die Tangenten in P_1 und P_2 an das Bild der entsprechenden Funktion aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 6.2.
Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \ ; \ (x \in R; x > 0)$$

Das Bild von f, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 2$ begrenzen die Fläche A_1 vollständig.
Die n-te Fläche A_n wird durch das Bild der Funktion f, die x-Achse und die Geraden $x = n$ und $x = n + 1$ vollständig begrenzt $(n = 1; 2; 3; ...)$ (siehe Skizze!).



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Inhalte der Flächen A_1, A_2, A_3 und A_n!

b) Die Inhalte der Flächen $A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$ bilden die Glieder einer Zahlenfolge $A(n)$!
Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

c) Geben Sie eine Vermutung für das n-te Glied s_n dieser Partialsummenfolge an!
Beweisen Sie diese Vermutung!

d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$

Aufgabe 6.3.
Durch die Gleichung $y^2 = 4{,}8x$ ist eine Parabel gegeben.

a) Die Gerade g_1 mit der Gleichung $y = x$ schneidet die Parabel in den Punkten P_1 und P_2.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2.
Berechnen Sie die Koordinaten x_M und y_M des Mittelpunktes M_1 der Strecke $\overline{P_1P_2}$!

b) Die zu g_1 parallele Gerade g_2 mit der Gleichung $y = x + 0{,}9$ schneidet die obige Parabel $y^2 = 4{,}8x$ in P_3 und P_4.
Weisen Sie nach, dass die Ordinate des Mittelpunktes M_2 der Strecke $\overline{P_3P_4}$ gleich der Ordinate von M_1 ist!

c) Weisen Sie nach, dass für jede Parabel $y^2 = 2px$ gilt:
Schneidet eine Gerade $y = x + n$ diese Parabel in den Punkten Q_1 und Q_2, so ergibt sich für die Ordinate y_H des Mittelpunktes H der Strecke $\overline{Q_1Q_2}$: $y_H = p$.

d) Geben Sie an, welche Bedingung für n (in Abhängigkeit von p) erfüllt sein muss, damit die Gerade $y = x+n$ die Parabel $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ in zwei Punkten schneidet.

1.39 Abituraufgaben 1979

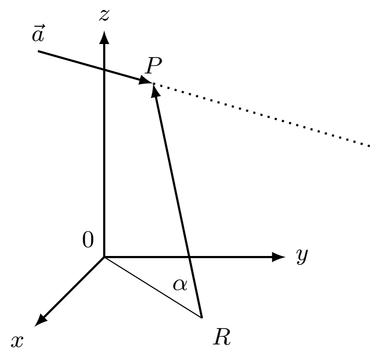
Pflichtaufgaben

Aufgabe 1

Bei einer Übung der Nationalen Volksarmee wird von einer Bodenkontrollstelle ein Flugkörper geortet. Dieser Flugkörper bewegt sich auf geradliniger Bahn mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ auf den Punkt $P(0;0;13)$ zu. (siehe Skizze!). Vom Raketenstützpunkt $R(8;6;0)$ wird eine Abwehrrakete gestartet, die den Flugkörper im Punkt P treffen soll. Die Bahn dieser Rakete wird ebenfalls als geradlinig angenommen.
(Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Bahn der Abwehrrakete auf!

b) Berechnen Sie für diese Rakete den Abschusswinkel $\measuredangle ORP = \alpha$!



Skizze (nicht maßstäblich)

c) Weisen Sie nach, dass Raketen- und Flugkörperbahn senkrecht zueinander verlaufen!

d) Berechnen Sie die Zeit t, welche die Abwehrrakete für die Strecke $\overline{RB}$ bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $1{,}64$ km$\cdot$ s^{-1} benötigt!

Aufgabe 2
Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

a) Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Ellipse!
Zeichnen Sie die Ellipse!

b) Zeichnen Sie den Kreis k ein, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt und der durch die Hauptscheitel der Ellipse geht!
Geben Sie die Gleichung des Kreises k an!

c) $P_0(2;3)$ ist ein Punkt der Ellipse. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente in P_0 an die Ellipse!

d) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Tangenten mit dem Kreis k!

Aufgabe 3
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \; (n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!

b) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $s_n = \frac{n}{4n+1}$!

d) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$!

Aufgabe 4
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 3 - x + 2\sqrt{x} \; ; \; (x \in R; x \geq 0)$$

a) Die Funktion f hat genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle!

b) Das Bild der Funktion f hat genau einen lokalen Extrempunkt. Berechnen Sie seine Koordinaten!
Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 10$!

d) Das Bild der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie $\int e^{2x}dx$!

b) Berechnen Sie die durch $\Sigma_{k=0}^{4}10^k$ gegebene Zahl!

c) Für welche x aus dem Intervall von 0 bis 2π gilt $\sin x = \cos x$?

Wahlaufgaben

(Von den folgenden drei Aufgaben 6.1., 6.2. und 6.3. brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.

Gegeben sind Funktionen durch die Gleichung

$$y = f(x) = \frac{a}{1+x^2}\ ;\ (x \in R; a \in R; a > 0)$$

a) Jede dieser Funktionen hat genau ein lokales Maximum. Berechnen Sie seine Koordinaten!
(Der Nachweis der Art des Extremums ist hier nicht erforderlich.)

b) Untersuchen Sie das Verhalten dieser Funktionen im Unendlichen!

c) Untersuchen Sie, ob diese Funktionen Polstellen haben!

d) Skizzieren Sie die Bilder dieser Funktionen für $a = 1$ und $a = 4$!

e) Jeder der Funktionen

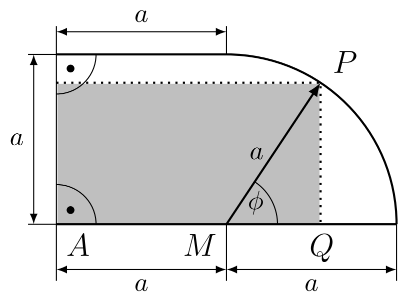
$$y = f(x) = \frac{a}{1+x^2}\ ;\ (x \in R; a \in R; a > 0)$$

hat zwei Wendepunkte.
Weisen Sie nach, dass für deren Abszissen x_{W_1} und x_{W_2} gilt:

$$x_{W_1} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}; x_{W_2} = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Aufgabe 6.2.

Bleche haben die in der Skizze dargestellte Form (Quadrat- und angesetzter Viertelkreisfläche).
Daraus sollen rechteckige Bleche geschnitten werden. Skizze (nicht maßstäblich)

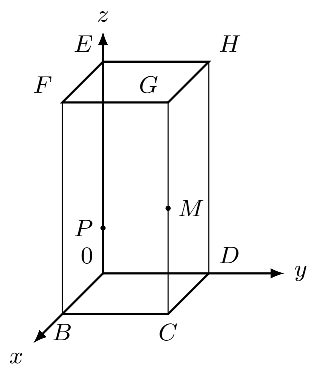


a) Geben Sie die Längen der Rechteckseiten $\overline{QP}$ und $\overline{AQ}$ bei gegebener Länge a in Abhängigkeit vom Winkel ϕ an!

b) Berechnen Sie den Winkel ϕ für den Fall, dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird!

Aufgabe 6.3.

Die Skizze zeigt ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche OBCD in einem Koordinatensystem $\{O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$.
M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{CG}$. $\overline{BC} = 3$ cm; $\overline{CG} = 13$ cm, Skizze (nicht maßstäblich)



a) Auf der Kante $\overline{OE}$ liegt der Punkt P mit $\overline{OP} = 2$ cm. Geben Sie die Koordinaten der Punkte B, P und M an!
Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{PB}$ und $\overrightarrow{PM}$ zueinander orthogonal sind!

b) Durch die Punkte P und M geht die Gerade g_1, durch B und H geht die Gerade g_2.
Stellen Sie für die Geraden g_1 und g_2 je eine Gleichung auf!
Weisen Sie nach, dass g_1 und g_2 einander nicht schneiden!

c) Auf der Kante $\overline{DH}$ existiert ein Punkt Q derart, dass die Gerade g_3, die durch B und Q geht, von der Geraden g_1 geschnitten wird.
Berechnen Sie die z-Koordinate des Punktes Q!

1.40 Abituraufgaben 1980

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(1;1;1), B(2;5;2), C(1;4;-2)$ und $D(0;0;-3)$ gegeben.

a) Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ in Komponenten- oder Koordinatendarstellung an!
Weisen Sie nach, dass diese Vektoren parallel zueinander sind!

b) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle BAD$!

c) Durch die Punkte A und C geht die Gerade g_1, durch B und D die Gerade g_2. Stellen Sie für die Geraden g_1 und g_2 je eine Gleichung auf!
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2!

d) Die Gerade g_1 durchstößt die xy-Ebene im Punkt P_0.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0!

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x-3)^2;\ (x \in R)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Bildes der Funktion f!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $-1 \leq x \leq 6$!

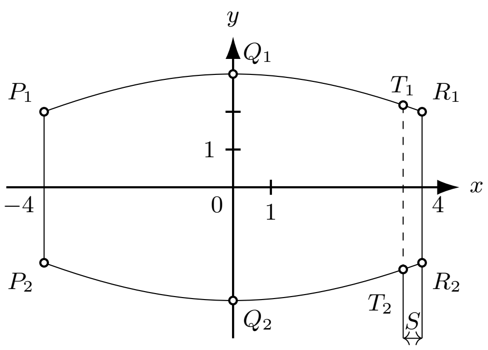
d) Im Koordinatenursprung ist die Tangente t an das Bild der Funktion f gelegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

e) Die Tangente t und das Bild der Funktion f haben außer dem Berührungspunkt nur den Punkt $P_1(6; y_1)$ gemeinsam.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f und der Tangente vollständig begrenzt wird.

Aufgabe 3
Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Fasses. Die Bögen $P_1Q_1R_1$ bzw. $P_2Q_2R_2$ werden durch die Parabeln

$$y = -\frac{1}{16}x^2 + 3 \text{ bzw. } y = \frac{1}{16}x^2 - 3$$

im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ beschrieben. (Koordinateneinheit: 1 dm)



a) Berechnen Sie den Durchmesser des Fassbodens!

b) In welchem Abstand s vom Fassboden beträgt der Durchmesser T_1T_2 des Fasses 5,0 dm?

c) Die Bögen des Achsenschnittes lassen sich durch Bögen der Ellipse annähern, die durch die Punkte P_1, Q_1 und R_1 geht und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung O liegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Ellipse auf!

Aufgabe 4
Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einem Flächeninhalt von 450 m^2 angelegt werden. Dazu ist der Platz an drei Seiten mit einem Zaun zu umgeben, an der vierten Seite wird er durch einen Teil der Werkhalle vollständig begrenzt.
Die Abmessungen des Platzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird.
Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge des Zaunes!

Kurzaufgaben 5

a) Berechnen Sie $\vec{k} \times \vec{j}$ und $(\vec{k} \times \vec{j}) \bullet \vec{i}$!

b) Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{n-1}, n > 1$, eine monoton fallende Folge ist!

c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $y = f(x) = \ln(x+2)$ an!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Gegeben sind Funktionen durch

$$y = f(x) = xe^{ax} (x, a \in R \text{ und } a > 0)$$

a) Das Bild jeder dieser Funktionen hat genau eine lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Ermitteln Sie die Art des Extremums.

b) Bilden Sie die dritte Ableitung der Funktion f(x)!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung dieser Funktion gilt:

$$f^{(n)}(x) = a^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot (n + ax)$$

Aufgabe 7
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \sin(2x) + 2 \cdot \cos x; (x \in R; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Bildes der Funktion f!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

c) Berechnen Sie $f(0)$ und $f(\pi)$. Skizzieren Sie das Bild der Funktion f!

d) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral:

$$\int (\sin(2x) + 2 \cdot \cos x) dx$$

Aufgabe 8
Die Gleichung einer monoton fallenden Funktion sei

$$y = f(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}}$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!

b) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetabelle:

X	-1	0		7
Y			1,5	

Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $-1 \leq x \leq 7$!

c) Das Bild der Funktion f, die Koordinatenachsen und die Gerade x = 7 begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt A_1 dieser Fläche!

d) Das Bild der Funktion f, die Koordinatenachsen und eine Gerade $x = b; (b > 0)$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie b für den Fall, dass der Inhalt A_2 dieser Fläche 8 FE beträgt!

e) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$!

1.41 Abituraufgaben 1981

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist die Ellipse mit den Scheitelpunkten $A_1(5;0), A_2(-5;0), B_1(0;\frac{5}{2})$ und $B_2(0;-\frac{5}{2})$

a) Geben Sie die Gleichung diese Ellipse an!
Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Ellipse, und zeichnen Sie die Ellipse!

b) Im Punkt $P_0(3;2)$ dieser Ellipse sei die Tangente t an die Ellipse gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, die durch P_0 geht und senkrecht auf der Tangente t steht!
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes Q der Geraden g mit der x-Achse!

Aufgabe 2
Bei einer Übung der NVA soll vom Stab einer Einheit im Punkt $S(0;0;1)$ eine Verbindung zum Raketenstützpunkt $P(10;50;0)$ durch Richtfunk hergestellt werden.
(Koordinateneinheit: 1 km)

a) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{SP}$ vom Stab der Einheit zum Raketenstützpunkt!

b) Im Punkt $R_1(0;10;1)$ wird eine Richtfunkstation eingerichtet.
Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{R_1S}$ und $\overrightarrow{R_1P}$!

c) Zur Verbesserung der Empfangsqualität wird im Punkt $R_2(5;30;0{,}5)$ eine Richtfunkstation zwischengeschaltet.
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte R_1 und R_2 geht!
Weisen Sie nach, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

Aufgabe 3
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ ; \ (n > 0)$$

a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!
Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

b) Für das n-te Glied der Partialsummenfolge (s_n) gilt:

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Beweisen Sie diese Behauptung durch vollständige Induktion!

c) Geben Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge (s_n) an!

Aufgabe 4
Gegeben ist eine Funktion f durch:

$$y = f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}; (x \in R; x \neq 0)$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Bildes der Funktion f, und untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine Nullstellen hat!

c) Berechnen Sie f(1) und f(4), und skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $1 \leq x \leq 4$!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = 4 vollständig begrenzt wird!

Kurzaufgaben 5

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $(\vec{a}+\vec{b}) \bullet (\vec{a}-\vec{b})$ für $\vec{a} = \vec{i}+\vec{i}$ und $\vec{b} = \vec{j}-\vec{k}$!

b) Ermitteln Sie $\int \sqrt{3x-6}dx$; $(x \in R; x \geq 2)$!

c) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = e^x \sin 2x$; $(x \in R)$!
Berechnen Sie f'(0)!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Ein Kondensator wird über einen Widerstand entladen. Die Maßzahl U der Kondensatorspannung lässt sich als Funktion der Maßzahl t der Zeit beschreiben durch

$$U = f(t) = U_0 \cdot e^{-0,5t} \text{ ; } (t \in R; t \geq 0)$$

Dabei sind die Spannung in Volt und die Zeit in Sekunden gemessen.
U_0 ist die Maßzahl der Spannung für t = 0. Es sei $U_0 = 800$.

a) Berechnen Sie $U_2 = f(2)$ und $U_4 = f(4)$!

b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $0 \leq t \leq 4$!

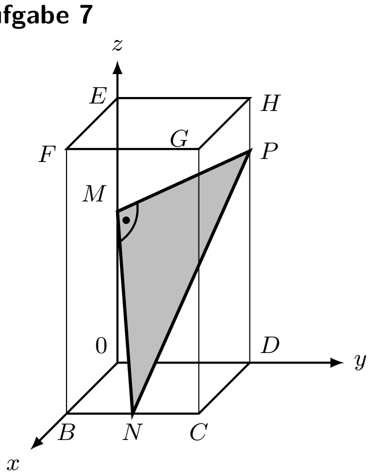
c) Nach welcher Zeit beträgt die Spannung des Kondensators 20 Volt?

d) Für den Mittelwert U_M der Maßzahl der Spannung im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ gilt:

$$U_M = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

Berechnen Sie U_M für das Intervall $0 \leq t \leq 4$!

Aufgabe 7



Die Skizze zeigt ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche OBCD in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Es gilt: $\overline{OB} = a$ Längeneinheiten, $\overline{OE} = 2a$ Längeneinheiten. Skizze (nicht maßstäblich).
M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{OE}$, N der Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte M und N an!

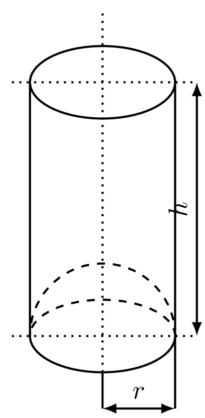
b) Auf der Kante $\overline{DH}$ liegt ein Punkt P derart, dass $\overline{MP} \perp \overline{MN}$ gilt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

c) Berechnen Sie a für den Fall, dass das rechtwinklige Dreieck MNP den Flächeninhalt
$A = 6\sqrt{5}$ Flächeneinheiten hat!

Aufgabe 8

Ein oben offener zylindrischer Behälter hat als Boden eine nach innen gewölbte Halbkugel (siehe Skizze!).
Der Behälter hat den Oberflächeninhalt A (A konstant).
(Die Oberfläche besteht aus Zylindermantel und Oberfläche der Halbkugel.)

Berechnen Sie den Radius r der Halbkugel in Abhängigkeit von A für den Fall, dass das Fassungsvermögen des Behälters maximal wird! (Die Wandstärke bleibt unberücksichtigt.)
Skizze nicht maßstäblich.



1.42 Abituraufgaben 1982

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist der Kreis k gegeben. Sein Mittelpunkt liegt im Koordinatenursprung, sein Radius beträgt $2\sqrt{5}$ Längeneinheiten.

a) Zeichnen Sie den Kreis k! Geben Sie eine Gleichung des Kreises k an!

b) $A(x_1;4)$ und $B(x_1;-4)$, $x_1 > 0$, sind Punkte des Kreises k.
Ermitteln Sie eine Gleichung der im Punkt A an den Kreis k gelegten Tangente t!
Zeichnen Sie die Tangente t ein!

c) Zeichnen Sie durch den Punkt B die Parallele g zur Tangente t!
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an!

d) Die Gerade g schneidet den Kreis k in den Punkten B und C. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C!

Aufgabe 2
Die Gleichung einer Funktion f sei

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

a) Ermitteln Sie Nullstellen und Polstelle der Funktion f!

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine lokalen Extrema hat!

d) Skizzieren Sie das Bild (den Graph) der Funktion f im Intervall $-5 \leq x \leq +5$!

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild (Graph) der Funktion f, von der x-Achse und den Geraden x = 4 und x = 5 vollständig begrenzt wird!

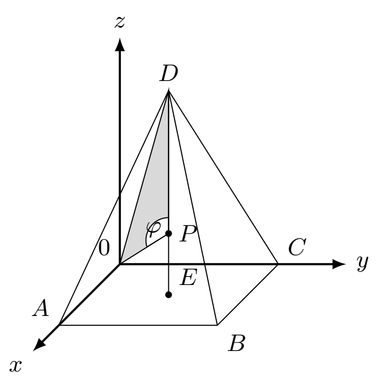
Aufgabe 3
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2n(n+1)} \; ; \; (n > 0)$$

a) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Zahlenfolge!
b) Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist!
c) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$s_n = \frac{n}{2(n+1)}$$

Aufgabe 4



Bei einer Untersuchung von Molekülstrukturen werden Punktmodelle betrachtet. Ein solches Punktmodell sei durch die Eckpunkte O, A, B, C, D einer geraden Pyramide mit der quadratischen Grundfläche OABC und

der Spitze D gegeben (siehe Skizze!).
Pyramidenhöhe und jede Seite der quadratischen Grundfläche haben die gleiche Länge von je 4 Längeneinheiten. Skizze nicht maßstäblich!

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D an!

b) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{OD}$!

c) Auf der Pyramidenhöhe $\overline{ED}$ existiert ein Punkt $P(2; 2; z_p)$, für den gilt: $\overline{PO} = \overline{PD}$.
Berechnen Sie z_p!

d) Berechnen Sie den Winkel $\phi = \measuredangle OPD$!

Kurzaufgaben 5

a) Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{10}{3}$!

b) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(\sin x)$; $(x \in R; 0 < x < \pi)$.
Berechnen Sie $f'(\frac{\pi}{2})$!

c) Berechnen Sie $\int \cos 3x \; dx$!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \cos 2x - 8 \sin x - 1 \; ; \; (x \in R; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Bildes (Graphen) der Funktion f!
Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Berechnen Sie $f(\frac{\pi}{4})$ und $f(\frac{3\pi}{4})$!
Skizzieren Sie das Bild (den Graph) der Funktion f!

d) Gegeben seien Funktionen g durch

$$y = g(x) = a \cdot (\cos 2x - 8 \sin x - 1) \; ; \; (x \in R; 0 \leq x \leq \pi; a \in R; a \neq 0)$$

Berechnen Sie den Wert des Parameters a für den Fall, dass die im Punkt $P_0(\frac{\pi}{6}; y_0)$ an das Bild (den Graph) der Funktion g gelegte Tangente den Anstieg $m = \sqrt{3}$ hat!

Aufgabe 7
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{4}{2x - 3} \; ; \; (x \in R; x > 1{,}5)$$

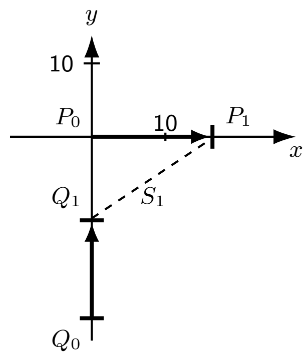
a) Zeichnen Sie das Bild (den Graph) der Funktion f im Intervall $2 \leq x \leq 6$!

b) Ermitteln Sie alle x, für die $f(x) < 1$ ist!

c) Die Tangente im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ an das Bild (den Graph) von f hat den Anstieg $m = -2$.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_0!
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an!

d) Das Bild (der Graph) der Funktion f, die x-Achse sowie die Geraden x = 2 und x = 6 begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
Durch eine Gerade $x = a$ $(a \in R; 2 < a < 6)$ wird diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Berechnen Sie a!

Aufgabe 8



In der Skizze sind die Bewegungen zweier Schiffe P und Q bezogen auf ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit: 1 km) dargestellt. Die Schiffe P und Q befinden sich anfangs $(t_0 = 0)$ in den Punkten $P_0(0; 0)$ bzw. $Q_0(0; -50)$ (siehe Skizze).
Das Schiff P fährt mit der konstanten Geschwindigkeit 15 $\frac{km}{h}$ in Richtung Osten, das Schiff Q mit der konstanten Geschwindigkeit 30 $\frac{km}{h}$ in Richtung Norden.
Nach t Stunden befinden sich folglich das Schiff P im Punkt $P(15t; 0)$ und das Schiff Q im Punkt $Q(0; 30t-50)$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und Q_1 an, in denen sich die Schiffe nach einer Stunden $(t_1 = 1)$ befinden! Ihre Entfernung voneinander beträgt dann s_1 Kilometer.
Berechnen Sie $s_1 = \overline{P_1Q_1}$!

b) Wie groß ist die Entfernung der Schiffe voneinander, wenn sich das Schiff Q im Punkt $P_0(0; 0)$ befindet?

c) Nach t Stunden sind die Schiffe s Kilometer voneinander entfernt.
Geben Sie $s = \overline{P_tQ_t}$ als Funktion von t an!

d) Für welches t haben die Schiffe P und Q die kürzeste Entfernung voneinander?
Berechnen Sie diese minimale Entfernung in km!
(Hinweis auf den Nachweis des Minimums wird in dieser Aufgabe verzichtet.)

1.43 Abituraufgaben 1983

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Bei einer Übung der NVA wird von einer im Koordinatenursprung $0(0;0;0)$ befindlichen Radarstation ein Flugzeug nacheinander in den Punkten $P_1(-5;50;4)$ und $P_2(15;30;3)$ geortet. Die Bahn des Flugzeuges verläuft geradlinig.
Zur Bekämpfung eines Erdziels wird vom Flugzeug aus im Punkt P_2 eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen, die sich auf einer geradlinigen Bahn mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bewegt. (Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Bahn des Flugzeuges und die Bahn der Rakete auf!

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen diesen beiden Bahnen!

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_3(x_3;y_3;0)$, in dem die Rakete das Erdziel erreicht!

d) Die Rakete fliegt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $1{,}5\frac{km}{s}$.
Berechnen Sie die Flugdauer für die Strecke P_2P_3!

Aufgabe 2
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch

$$a_n = \frac{12}{(n+3)(n+4)} \text{ ; } (n > 0)$$

a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!

b) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$s_n = \frac{3n}{n+4}$$

d) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge (s_n)!

Aufgabe 3
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = 2\sqrt{x} \text{ ; } (x \in R; x \geq 0) \text{ und } y = g(x) = 2x - 4 \text{ ; } (x \in R)$$

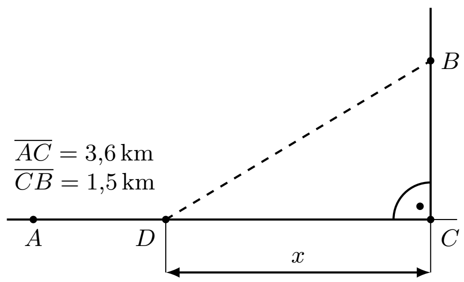
a) Die Graphen der Funktionen f und g schneiden einander in genau einem Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S!

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $0 \leq x \leq 5$!

c) Die Graphen der Funktionen f und g und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie denn Inhalt dieser Fläche!

d) Es gibt eine Tangente t an den Graph der Funktion f, die parallel zum Graph der Funktion g verläuft.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes P_0 dieser Tangente t!

Aufgabe 4



Von einem Betrieb A soll nach einem Betriebsteil B eine Versorgungsleitung gelegt werden. A und B liegen an zwei geradlinig verlaufenden Straßen, die einander im Punkt C rechtwinklig schneiden (siehe Skizze!).
Die Kosten für den Bau der Leitung längs der Straßen $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ sind mit 40 TM je Kilometer und im Gelände mit 50 TM je Kilometer zu veranschlagen.
(1 TM = 1000 Mark) Skizze nicht maßstäblich.

a) Berechnen Sie die Kosten K_1 für den Fall, dass die Leitung längs der Straßen von A über C nach B verlegt wird!

b) Berechnen Sie die Kosten K_2 für den Fall, dass die Leitung im Gelände geradlinig von A nach B verlegt wird!

c) Die Kosten können dadurch gesenkt werden, dass die Versorgungsleitung von A längs der Straße bis zu einem Punkt D und von D im Gelände geradlinig von B verlegt wird.
Berechnen Sie die Länge x der Strecke $\overline{DC}$ für den Fall, dass die Kosten minimal werden!
Wie hoch sind diese Kosten?
(Hinweis: Auf dem Nachweis des Minimums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

Kurzaufgaben 5

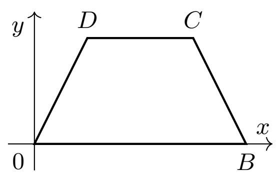
a) Ein Kreis ist gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Kreises!

b) Berechnen Sie die Anzahl aller Permutationen der Elemente a, b, c, d, e!
Wie viele dieser Permutationen beginnen mit dem Element b?

c) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}$!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6



Gegeben sind Trapeze mit den Eckpunkten $0(0;0), B(4a;0), C(3a;a\sqrt{3}), D(a;a\sqrt{3})$; $(a \in R, a > 0)$
(siehe Skizze!). Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Länge der Seiten $\overline{OD}$ und $\overline{BC}$!

b) Weisen Sie nach, dass die Diagonale $\overline{OC}$ senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$ steht!

c) Weisen Sie nach, dass die Diagonale $\overline{OC}$ den Winkel $\alpha = \measuredangle BOD$ halbiert!

d) Berechnen Sie den Parameter a für den Fall, dass das Trapez den Flächeninhalt $A = 9\sqrt{3}$ hat!

Aufgabe 7
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 10e^{-x} \ (x \in R; 0 \leq x \leq 4)$$

a) Ermitteln Sie die Funktionswerte f(0), f(2) und f(4), und skizzieren Sie den Graph der Funktion f!

b) $P(x; f(x))$ sei ein Punkt des Graphen von f im Intervall $0 \leq x \leq 4$.
Fällt man von P die Lote auf die Koordinatenachsen, so entsteht ein Rechteck mit den Seiten x und f(x). Der Flächeninhalt dieses Rechtecks sei A.
Geben Sie A als Funktion von x an! Berechnen Sie x für den Fall, dass A maximal wird!

c) Gegeben sind Funktionen durch

$$y = g(x) = e^{-ax} \ (x \in R; a \in R; a > 0)$$

Die Graphen dieser Funktionen gehen durch den Punkt $P_1(0;1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangenten, die in P_1 an die Graphen der Funktionen gelegt werden können!

d) Genau eine dieser Tangenten schneidet die x-Achse im Punkt $P_2(3;0)$.
Berechnen Sie für diese Tangente den Wert des Parameters a!

Aufgabe 8
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = x(2 - \ln x) \ (x \in R; 1 \leq x \leq 8)$$

a) Berechnen Sie f(1) und f(8)!

b) Die Funktion f hat genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle!

c) Der Graph von f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes! Weisen Sie die Art des Extremums nach!
Skizzieren Sie den Graph der Funktion f!

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit

$$y = F(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x \ (x \in R; 1 \leq x \leq 8)$$

eine Stammfunktion von f ist!

e) Gegeben sind Funktionen durch

$$y = g(x) = x(a - \ln x) \ (x \in R; a \in R; a \neq 0).$$

$P_1(1; a)$ ist ein Punkt der Graphen dieser Funktionen. Ermitteln Sie den Parameter a für den Fall, dass die Tangente in P_1 an den Graph der entsprechenden Funktion den Anstieg m = 1 hat!

1.44 Abituraufgaben 1984

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3 \ (x \in R)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f!
Untersuchen Sie die Art dieser Extrema!

c) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $-2 \le x \le 4$!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion f und der x-Achse vollständig begrenzt wird!

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \ln(2x - 1) \ (x \in R; x > 0{,}5)$$

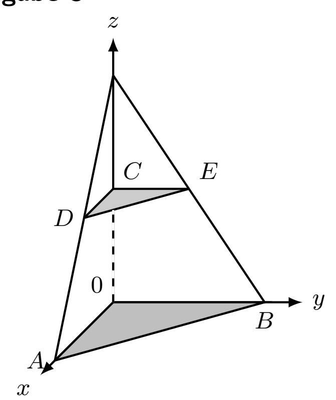
a) Berechnen Sie die Nullstelle x_0 von f!

b) Berechnen Sie die Funktionswerte f(0,6), f(2) und f(4)!
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0{,}6 \le x \le 4$!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graph der Funktion f im Punkt $P_0(x_0; 0)$!

d) Der Punkt $M(0; 3)$ ist Mittelpunkt des Kreises k mit dem Radius $r = \sqrt{5}$.
Zeichnen Sie den Kreis in die Skizze ein! Stellen Sie die Gleichung des Kreises k auf!

Aufgabe 3



Die Punkte O, A, B, C, D, E sind Eckpunkte eines Pyramidenstumpfes mit $\overline{OA} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{OB} \parallel \overline{CE}$ (siehe Skizze!). Skizze (nicht maßstäblich)
Es gilt: $\overline{OA} = \overline{OB} = 6{,}0cm$ und $\overline{CD} = \overline{CE} = 3{,}0cm; \overline{OC} = 3{,}0cm$
a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E an!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Diagonalen $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$!

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$!

d) Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{OS}$ orthogonal zur Diagonalen $\overline{AE}$ ist!

Aufgabe 4
Eine Zentrifuge läuft mit einer Drehzahl von a_0 Umdrehungen pro Minute. Nach Abschalten des Stromes verringert sich die Drehzahl und nimmt nach 1 Sekunde den Wert a_1 Umdrehungen pro Minute an, nach k Sekunden den Wert a_k Umdrehungen pro Minute.

a) Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, ...$ sind Glieder einer geometrischen Folge.
Berechnen Sie die Glieder a_2 und a_3 dieser Folge für den Fall, dass $a_0 = 1250$ und $a_1 = 1000$ gilt!

b) Die Drehzahl y Umdrehungen pro Minute nach t Sekunden kann auch beschrieben werden durch eine Exponentialfunktion der Form

$$y = f(t) = 1250 \cdot e^{-ct} \ (t \in R, t \ge 0; c \in R, c > 0)$$

Berechnen Sie c für den Fall, dass $f(1) = 1000$ gilt!
Berechnen Sie für diesen Fall $f(3)$

Kurzaufgaben 5
a) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1 - x^2}{e^{3x}}$ $(x \in R)$. Berechnen Sie $f'(0)$!

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5}{1+2x-3x^2}$

c) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, in denen die auftretenden Ziffern ungerade und voneinander verschieden sind?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{10}{1+x} \ (x \in R; x \geq 1)$$

a) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(1), f(2), f(4)$ und $f(7)$!
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $1 \leq x \leq 7$!

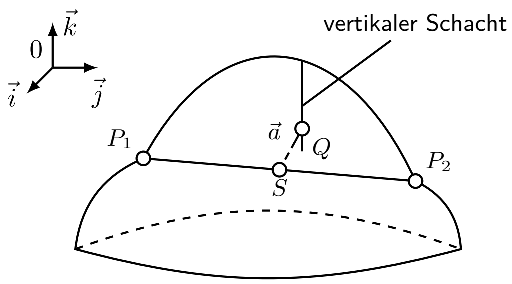
b) Der Graph von f, die x-Achse sowie die Geraden $x = k$ und $x = k+1$ begrenzen die Fläche mit dem Inhalt A_K vollständig $(k = 1, 2, 3, ..., n, ...)$.
Berechnen sie A_1, A_2, A_3 und A_n!

c) $A_1, A_2, A_3, ...$ bilden die Glieder einer Zahlenfolge (A_n).
Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

d) Weisen Sie nach, dass für das n-te Glied s_n der Partialsummenfolge gilt:

$$s_n = 10 \cdot \ln \frac{n+2}{2}$$

Aufgabe 7



Durch einen Berg führt die geradlinige Tunnelstrecke P_1P_2 mit $P_1(100; 20; 100)$ und $P_2(400; 200; 90)$ (Koordinateneinheit: 1 m) Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Länge der Tunnelstrecke P_1P_2!
Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht!

b) Von einem Punkt $Q(210; 122; z_Q)$ eines vertikal verlaufenden Schachtes aus soll in Richtung des Vektors

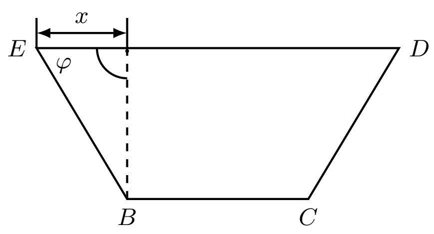
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ein geradlinig verlaufender Entlüftungsstollen gebaut werden, der den Tunnel im Punkt S trifft.
Berechnen Sie die Koordinaten von S!

c) Berechnen Sie die Höhe von z_Q, von der aus der Bau des Entlüftungsstollens begonnen werden muss!

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem vertikal verlaufenden Schacht und dem Entlüftungsstollen!

Aufgabe 8
Der Querschnitt einer oben offenen Rinne ist ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{BC} = 6{,}8$ dm und $\overline{CD} = \overline{BE} = 4{,}0$ dm (siehe Skizze!) Skizze (nicht maßstäblich)



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts für den Fall, dass $\overline{DE} = 12{,}8dm$ beträgt!

b) Berechnen Sie x oder ϕ für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird! (Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.)

c) Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt!

1.45 Abituraufgaben 1985

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 2} \ (x \in R)$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und Polstellen!

b) Der Graph der Funktion f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes! Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen!

d) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-6 \leq x \leq 6$!

Aufgabe 2
In einem räumlichen Koordinatensystem $\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ sind die Punkte $A(5; 1; -6), B(1; 3; -2)$ und $C(1; -2; -4)$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Winkel $\alpha = \measuredangle BCA$!

b) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte A und B geht!

c) In der yz-Ebene existiert genau ein Punkt P, für den gilt: $\overline{CP} \parallel \overline{AB}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P!

Aufgabe 3
Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch

$$a_n = n(3n + 1) \ (n \geq 1)$$

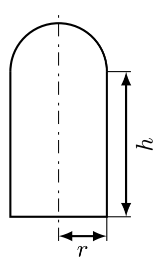
a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!

b) Begründen Sie, dass die Folge (a_n) keine arithmetische Zahlenfolge ist!

c) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $s_n = n(n + 1)^2$.

Aufgabe 4



Ein Silo soll die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel erhalten (siehe Skizze!).
Skizze (nicht maßstäblich)
Das Fassungsvermögen des zylinderförmigen Teils ist mit $V_z = 55\ m^3$ festgelegt.
Zur Verbesserung der Nutzungseigenschaften soll die gesamte Innenfläche des Silos (Grundfläche des Zylinders und Mantelfläche des Zylinders und Fläche der Halbkugel) mit Aluminiumblech ausgekleidet werden.
Berechnen Sie den Grundkreisradius r des Zylinders für den Fall, dass möglichst wenig Blech verbraucht wird!

Kurzaufgaben 5

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} c+4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$!
Ermitteln Sie den Parameter c für den Fall, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den gleichen Betrag haben!

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\pi 2 \cdot \sin \frac{x}{3} dx$$

c) Eine Handballmannschaft besteht aus zehn Feldspielern und zwei Torwarten. Gleichzeitig spielen davon jeweils sechs Feldspieler und ein Torwart - sie bilden eine Formation.
Der Regel entsprechend dürfen die Torwarte nicht als Feldspieler und die Feldspieler nicht als Torwart eingesetzt werden.

Wie viele verschiedene Formationen sind damit möglich? (Die Spielpositionen der Feldspieler werden dabei nicht unterschieden.)

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 5x \cdot e^{-0{,}5x} \ (x \in R; x \geq 0)$$

a) Berechnen Sie die lokale Extremstelle x_E von f und $f(x_E)$!

b) Berechnen Sie f(0) und f(1)!
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0 \leq x \leq x_E$!

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit

$$F(x) = -10(x+2) \cdot e^{-0{,}5x} \ (x \in R; x \geq 0)$$

eine Stammfunktion der Funktion f ist!

d) Berechnen Sie $\int_0^{X_E} f(x)dx$!

Aufgabe 7
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{x+1}{4}} \ (x \in R; -\frac{1}{4} \leq x \leq 7)$$

und die Gerade g durch $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

a) Die Gerade g schneidet den Graph von f in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2!

b) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{4})$ und $f(2)$!
Skizzieren Sie den Graph von f! Zeichnen Sie die Gerade g ein!

c) Gegeben ist eine zweite Gerade h durch $y = x$.
Berechnen Sie den Winkel zwischen den Geraden g und h!

d) Auf der Geraden $y = x$ liegt ein Punkt $Q(x_Q; y_Q)$ mit $x_Q > 0$, für den der Winkel $\measuredangle S_1QS_2 = 90°$ ist.
Berechnen Sie die Koordinaten von Q!

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔS_1S_2Q!

Aufgabe 8
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \ ; \ (x \in R; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

c) Skizzieren Sie Graph der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq \pi$!

d) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

e) Es gibt genau zwei Tangenten an den Graph von f mit dem Anstieg $m = -1$.
Berechnen Sie die Abszissen der Berührungspunkte dieser Tangenten!

1.46 Abituraufgaben 1986

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte $A(5;2;0)$ und $B(6;2;-5)$, die Gerade g_2 geht durch den Punkt $(2;-6;11)$ und hat die Richtung des Vektors $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Geraden g_1 und g_2 auf!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel ϕ der Geraden g_1 und g_2!

c) Überprüfen Sie, ob der Punkt $C(5;6;2)$ auf der Geraden g_2 liegt!

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \sqrt{2x+3} - x \ (x \in R; x \geq -1{,}5)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f!

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f!
Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-1{,}5 \leq x \leq 4$!

d) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe 3
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = 2 + \cos x \ (x \in R; 0 \leq x \leq \pi) \text{ und } y = g(x) = \sin 2x \ (x \in R; 0 \leq x \leq \pi)$$

a) Ergänzen Sie für die Funktion g die folgende Werttabelle!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
g(x)							

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein und demselben Koordinatensystem!

c) Für jede Parallele zur y-Achse, die die Graphen der Funktionen f und g in einem Punkt schneidet, stellt $h(x) = f(x) - g(x)$ den Abstand der beiden Punkte dar.
Berechnen Sie die Abszisse x_E für den Fall, dass dieser Abstand minimal wird!
Berechnen Sie den minimalen Abstand!

d) Zeigen Sie, dass die Tangente im Punkt $P(\frac{2\pi}{3}; f(\frac{2\pi}{3}))$ an den Graph der Funktion f und die Tangente im Punkt $Q(\frac{2\pi}{3}; g(\frac{2\pi}{3}))$ an den Graph der Funktion g zueinander parallel sind!

Aufgabe 4
Fünf Bauelemente haben die elektrischen Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5.
Ihre Zahlenwerte bilden eine geometrische Folge. Es sei $R_1 = 10$ Ohm und $R_5 = 160$ Ohm.

a) Berechnen Sie den Quotienten q dieser geometrischen Folge!

b) Berechnen Sie den elektrischen Widerstand R für den Fall, dass die 5 Widerstände in Reihe geschaltet sind!

c) Schaltet man zwei verschiedene dieser 5 Widerstände in Reihe, so erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand.
Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich auf diese Weise herstellen?

d) Auch bei Reihenschaltung von je 3 oder je 4 verschiedenen dieser 5 Widerstände erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand.
Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich dann insgesamt erzeugen, wenn man alle möglichen Schaltungen von 2 und von 3 und von 4 verschiedenen Widerständen herstellt?

Kurzaufgaben 5
a) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = x \cdot \ln x$ $(x \in R; x > 0)$
Berechnen Sie $f'(e)$!

b) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD durch $A(2;1)$, $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 4\vec{j}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D und die Läge der Diagonalen $\overline{BD}$!

c) Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen x an, für die der Term $\frac{1}{\sqrt{3x-6}}$ nicht definiert ist!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{3 - ax} \ (x \in R; x \neq \frac{3}{a}; a \in R; a > 0)$$

a) Weisen Sie nach, dass diese Funktionen keine lokalen Extrema haben!

b) Für a = 0,5 erhält man die Funktion f_1 mit

$$y = f_1(x) = \frac{1}{3 - 0{,}5x} \ (x \in R; x \neq 6)$$

Skizzieren Sie den Graph von f_1 im Intervall $0 \leq x \leq 5$!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph dieser Funktion, den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ vollständig begrenzt wird!

c) Bilden Sie $f''(x)$ und $f'''(x)$ für

$$y = f(x) = \frac{1}{3 - ax}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion f

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!a^n}{(3 - ax)^{n+1}}$$

gilt!

d) Die Graphen aller Funktionen $y = f(x) = \frac{1}{3-ax}$ schneiden die y-Achse in $P_0(0; 1/3)$.
Die Tangente in P_0 an genau eines dieser Graphen steht senkrecht auf der Geraden $y = -6x + 1$.
Berechnen Sie für diesen Fall den Wert des Parameters a!

Aufgabe 7
Für einen geladenen Kondensator lässt sich der Zahlenwert I der Entladestromstärke als Funktion des Zahlenwertes t der Zeit beschreiben durch

$$I = f(t) = I_0 e^{-0{,}4t} \ (t \in R; t \geq 0)$$

(Dabei sind die Stromstärke in Milliampere und die Zeit in Sekunden gemessen)
I_0 ist der Zahlenwert der Entladestromstärke für $t = 0$. Es sei $I_0 = 2{,}4$.

a) Berechnen Sie f(0), f(2) und f(4)! Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0 \leq t \leq 4$!

b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Stromstärke 1,8 mA beträgt!

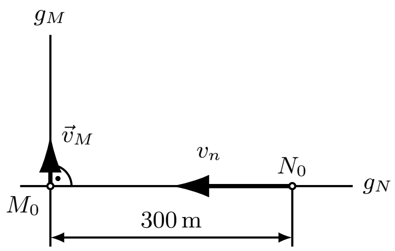
c) Der Zahlenwert Q der vom Kondensator im Intervall $[t_1; t_2]$ abgegebenen Ladung (gemessen in Milliamperesekunden) wird durch

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

ermittelt. Berechnen Sie die Ladung, die der Kondensator in den ersten 3,5 Sekunden des Entladungsvorganges abgibt!

d) Für $t_1 = 0$ habe der Kondensator eine Ladung, deren Zahlenwert $Q = 6{,}0$ beträgt.
Berechnen Sie t_2 für den Fall, dass der Kondensator 60 % dieser Ladung abgegeben hat !

Aufgabe 8



Ein Massepunkt M bewegt sich auf einer Geraden g_M mit der konstanten Geschwindigkeit $2{,}0 m \cdot s^{-1}$ und durchläuft zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den Punkt M_0 (siehe Skizze!). Skizze (nicht maßstäblich)
Ein zweiter Massepunkt N bewegt sich auf einer zu g_M orthogonalen Geraden g_N mit der konstanten Geschwindigkeit $6{,}0 ms^{-1}$ auf den Punkt M_0 zu.
Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durchläuft er den Punkt N_0. Die Entfernung $\overline{N_0 M_0}$ beträgt 300 m.

a) Berechnen Sie die Entfernung, die die beiden Massepunkte nach 30 Sekunden voneinander haben!

b) Nach t Sekunden sind die beiden Massepunkte s Meter voneinander entfernt.
Geben Sie für diesen Fall s als Funktion von t an!

c) Nach welcher Zeit ist die Entfernung der beiden Massepunkte voneinander minimal?
Berechnen Sie diese minimale Entfernung!

d) Mit welcher konstanten Geschwindigkeit müsste sich der Massepunkt M unter sonst gleichen Bedingungen bewegen, wenn die Entfernung der beiden Massepunkte voneinander bereits nach 40 Sekunden minimal sein soll?
Hinweis: Auf den Nachweis des Minimums bei c) wird bei dieser Aufgabe verzichtet.

1.47 Abituraufgaben 1987

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
In einem Koordinatensystem $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ist das Dreieck Δ ABC mit $A(6;-1;3), B(2;3;3)$ und $C(2;-1;7)$ gegeben.

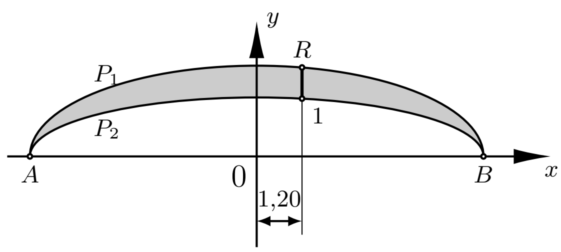
a) Berechnen Sie die Längen der Dreieckseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$!

b) Ermitteln Sie den Winkel $\alpha = \measuredangle BAC$!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks!

d) Die Punkte A, B, P, C sind die Eckpunkte des Parallelogramms ABPC.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P!

Aufgabe 2



Die Skizze zeigt einen Parabelsichelträger in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Ursprung 0 (Koordinateneinheiten: 1 m).
Die beiden den Träger begrenzenden Parabelbögen p_1 und p_2 schneiden die x-Achse in den Punkten A und B.
Skizze (nicht maßstäblich)

a) Der obere Parabelbogen p_1 ist Graph der Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{72}x^2 \ (x \in R; x_A \leq x \leq x_B)$$

Berechnen Sie die Spannweite AB!

b) Der untere Parabelbogen p_2 ist Graph der Funktion g mit

$$y = g(x) = \frac{3}{2} - ax^2 \ (x \in R; x_A \leq x \leq x_B)$$

Berechnen Sie die Konstante a!

c) Die Strecke $\overline{RT}$ liegt parallel zur y-Achse. Berechnen sie die Länge dieser Strecke!

d) In R sei an Parabel p_1 die Tangente t gelegt. Berechnen Sie den Anstieg von t!
Zu t gibt es eine Parallele, die die Parabel p_2 berührt. Der Berührungspunkt sei Q.
Berechnen sie die Abszisse des Punktes Q!

Aufgabe 3
Gegeben ist die Partialsummenfolge (s_n) der Zahlenfolge (a_n) durch

$$s_n = \frac{n}{2(n+1)} \ ; \ (n \geq 1)$$

a) Geben Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der Partialsummenfolge (s_n) an!

b) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Folge (s_n)!

c) Für welche natürliche Zahlen n gilt, dass die Glieder der Folge (s_n) in der ϵ-Umgebung von g liegen, wenn $\epsilon = 10^{-3}$ ist?

d) Geben sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 der Zahlenfolge (a_n) an!
Ermitteln Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für die Zahlenfolge (a_n)!

Aufgabe 4
Gegeben sind die Funktion f durch

$$y = f(x) = x + 2\cos x \ (x \in R; \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi)$$

und die Gerade g durch $y = g(x) = x + 2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f!
Weisen Sie die Art der Extrema nach!

b) Die Gerade g und der Graph von f haben die Punkte S_1 und S_2 gemeinsam.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2!

c) Skizzieren Sie den Graph von f! Zeichnen Sie die Gerade g ein!

d) Der Graph von f und die Gerade g begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen sie den Inhalt dieser Fläche!

Kurzaufgaben 5
a) Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{e^x} \ (x \in R; x > 0)$$

Berechnen Sie $f'(1)$!

b) Welche Stammfunktion F der Funktion $f(x) = e^{2x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ den Funktionswert $F(x_0) = 2$?

c) Für welche Zahl n ist die Anzahl der Variationen von n verschiedenen Elementen zur 2.Klasse gleich der Anzahl der Kombinationen dieser n Elemente zur 3.Klasse?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Trapez ABCD mit $A(0; 0), B(20; 0), C(5; 10)$ und $D(0; 10)$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Diagonalen!
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen!

b) Berechnen Sie die Abszisse des Punktes P, der auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt und für den $\overline{PB} = \overline{PS}$ gilt!

c) Die Parallele zur Seite $\overline{AB}$ durch den Punkt S schneidet die Seite $\overline{AD}$ im Punkt T.
Weisen Sie nach, dass diese Parallele den Winkel $\measuredangle BTC$ halbiert!

Aufgabe 7
Gegeben sind Funktionen f durch

$$y = f(x) = (x + 1) \cdot e^{ax} \ (x \in R; a \in R, a > 0)$$

a) Der Graph jeder dieser Funktionen schneidet die y-Achse im Punkt R und die x-Achse im Punkt Q. Ermitteln Sie die Koordinaten von R und Q!

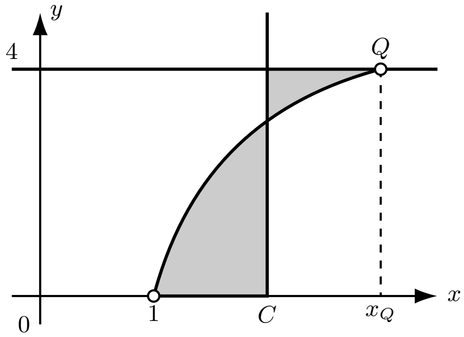
b) Die Graphen der Funktionen haben je eine lokalen Extrempunkt $E(x_E; f(x_E))$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E (in Abhängigkeit vom Parameter a)!
Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion f

$$f^{(n)}(x) = a^{n-1} \cdot e^{ax} \cdot (ax + a + n)$$

gilt!

Aufgabe 8



Die Skizze zeigt den Graph der Funktion f mit

$$y = f(x) = 2\sqrt{x-1} \ (x \in R; 1 \leq x \leq x_Q)$$

und die Geraden $y = 4$ und $x = c$, $(c \in R; 1 < c < x_Q)$.
Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Abszisse x_Q des Punktes Q!

b) Berechnen Sie für den Fall c = 3 die Inhalte der beiden gekennzeichneten Flächen!

c) Unter den Geraden $x = c$ gibt es genau eine, für die die Summe der Inhalte der gekennzeichneten Flächen minimal wird.
Berechnen Sie c für diesen Fall! Geben Sie die minimale Summe an!
(Auf den Nachweis des Minimums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

1.48 Abituraufgaben 1988

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben sei die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 9x \ (x \in R)$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Auf dem Graph von f gibt es genau einen Punkt $A(x_A; f(x_A))$ mit $f''(x_A) = 0$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A!

c) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0 \leq x \leq 10$!

d) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

Aufgabe 2
Bei einer Übung der Raketentruppe der NVA wird ein auf geradliniger Bahn g_1 mit konstanter Geschwindigkeit fliegendes Objekt im Punkt $P(-6; 9; 7)$ und 20 Sekunden später im Punkt $Q(2; 1; 11)$ geortet.
Im Punkt $A(3{,}5; -8; 0{,}5)$ wird eine Abwehrrakete in Richtung des Vektors $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ gestartet. Die Bahn g_2 dieser Rakete sei geradlinig.
(Koordinateneinheit : 1 km)

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2!

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2!

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des georteten Objektes!

d) Die Abwehrrakete trifft das Objekt im Punkt S:
Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Rakete, wenn ihr Start in A zwei Sekunden nach der Ortung des Objektes in Q erfolgte!

Aufgabe 3
Es soll ein quaderförmiger Behälter mit einem Volumen von 6 m^3 gebaut werden, bei dem die Länge dreimal so groß ist wie die Breite.
Alle 12 Kanten des Behälters sollen durch Winkeleisen verstärkt werden. Der geringste Materialverbrauch an Winkeleisen ergibt sich, wenn die Summe der Längen aller Kanten minimal wird.
Berechnen Sie für diesen Fall Länge, Breite und Höhe des Behälters!

Aufgabe 4
Bei Laboruntersuchungen werden häufig wässrige Lösungen fester Substanzen benötigt. Die in der Zeit t gelöste Masse wird durch die Gleichung

$$m = m_0(1 - e^{-at})$$

beschrieben.
Hierbei sind m_0 die unter bestimmten Normbedingungen in Lösung gehende maximale Masse, Sättigungsmasse genannt, und a eine vom Stoff abhängige Konstante.

a) Für einen Versuch, für den $a_1 = 0{,}20 min^{-1}$ gilt, wird festgestellt, dass 20 g der Substanz in der ersten Minute in Lösung gegangen sind.
Berechnen Sie für diesen Fall die Sättigungsmasse m_0!

b) Für die andere Substanz gilt $m_0 = 200g$ und $a_2 = 0{,}17 min^{-1}$.
Nach welcher Zeit sind 120 g dieser Substanz in Lösung gegangen?

c) Bei einer weiteren Substanz ist nach 5,0 Minuten die Hälfte der entsprechenden Sättigungsmasse
m_0 in Lösung gegangen.
Berechnen Sie für diesen Fall die Konstante a_3!

Aufgabe 5

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Werte c für den Fall, dass a und b zueinander orthogonal sind!

b) Weisen Sie nach, dass für die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \cos(2x)\ (x \in R; x > -1)$$

gilt: $f(0) = 2 \cdot f'(0)$!

c) Wie viele Funktionen

$$y = f(x) = mx + n\ (x \in R)$$

gibt es, bei denen m und n jeweils voneinander verschiedene Primzahlen sind, von denen jede kleiner als 20 ist?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6
Gegeben ist eine Funktion f durch

$$y = f(x) = x(\ln x - a)\ (x \in R; x > 0; a \in R)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle x_N der Funktion f in Abhängigkeit von a!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f in Abhängigkeit von a! Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Zeigen Sie, dass $f'(x_N)$ von a unabhängig ist!

d) Beweisen Sie, dass für die n-te Abteilung der Funktion f mit $n \geq 2$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

Aufgabe 7
Gegeben sind die Funktion f und g durch

$$y = f(x) = 1 - 2\cos x\ (x \in R; 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$y = g(x) = 1 + \sin(2x)\ (x \in R; 0 \leq x \leq 2\pi)$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und die Nullstellen der Funktion g!

b) Die Graphen der Funktionen f und g schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2!

c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g in dasselbe Koordinatensystem!

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g vollständig begrenzt wird!

e) Ermitteln Sie die Menge aller positiven reellen Zahlen a, für die die Graphen der Funktion

$$y = h(x) = 1 - a\cos x\ (x \in R; 0 \leq x \leq 2\pi)$$

mit dem Graph der Funktion g mehr als zwei gemeinsame Punkte haben!

Aufgabe 8
Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \dfrac{4x+6}{(x+2)^2}$

a) Geben Sie Nullstelle und Polstelle der Funktion f an!

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f!
Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

d) Für genau einen Wert von a ist

$$F(x) = \frac{a}{x+2} + 4\ln{(x+2)}\ (a \in R; x > -2)$$

eine Stammfunktion von f. Ermitteln Sie a!

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!

1.49 Abituraufgaben 1989

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(1;5), B(3;-3), C(5;1)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC!

b) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g_1 auf, die durch A geht und die Seite $\overline{BC}$ halbiert!

c) Stellen Sie eine Gleichung für die Mittelsenkrechte g_2 der Seite $\overline{AB}$ auf!

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2!

e) Berechnen Sie den Schnittwinkel ϕ der Geraden g_1 und g_2!

Aufgabe 2
Gegeben sind die ersten Glieder $a_1 = 4{,}9; a_2 = 14{,}7; a_3 = 24{,}5$ der arithmetischen Zahlenfolge (a_n).

a) Berechnen Sie a_4!
Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift dieser Folge (a_n)!

b) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zu (a_n) gehörenden Partialsummenfolge (s_n)!

c) Weisen Sie durch vollständige Induktion nach, dass für alle n $(n \geq 1)$ gilt: $s_n = 4{,}9n^2$!

Aufgabe 3
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = e^{0{,}5x} \ (0 \leq x \leq 4)$$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f!

b) Der Graph der Funktion f, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig. Es gibt genau eine Gerade $x = c$ (mit $0 < c < 4$), die diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Berechnen Sie c!
Tragen Sie diese Gerade $x = c$ in Ihre Zeichnung ein!

Aufgabe 4
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = -1 + 2\sin\frac{x}{2}$$

a) Geben Sie die kleinste Periode p und den Wertebereich der Funktion f an!
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$!
Skizzieren Sie den Graph der Funktion f mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$!

b) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt $P_0(2\pi; f(2\pi))$!

Aufgabe 5
a) Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen x an, für die der Term $\sqrt{\ln x}$ definiert ist!

b) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 durch

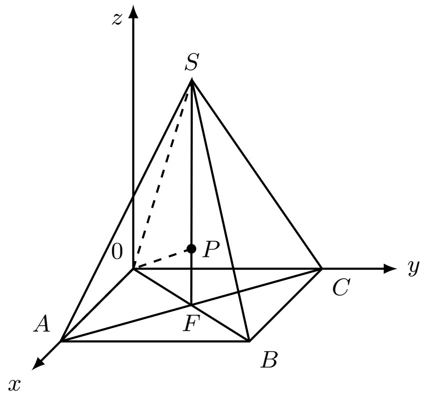
$$g_1 : x + ay = 1 \ (a \neq 0) \ ; \ g_2 : 2x + 3y = 4$$

Berechnen Sie a für den Fall, dass g_1 und g_2 zueinander parallel sind!
Berechnen Sie a für den Fall, dass g_1 und g_2 zueinander orthogonal sind!

c) Fünfstellige Kennzeichen sollen folgendermaßen gebildet werden:
Die ersten beiden Stellen werden durch 2 voneinander verschiedene Buchstaben und die letzten drei Stellen durch 3 voneinander verschiedene Ziffern belegt.
Wie viele voneinander verschiedene Kennzeichen kann man bilden, wenn die 26 Buchstaben des Alphabetes und die Ziffern $0; 1; 2; ...; 9$ für die Belegung der Stellen zugrunde gelegt werden?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6



Die Skizze stellt eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche OABC und der Spitze S dar.
Die Kante $\overline{AB}$ hat die Länge 12 Längeneinheiten, die Höhe $\overline{FS}$ die Länge 18 Längeneinheiten.
Auf $\overline{FS}$ liegt ein Punkt P mit $\overline{FP} = z$ Längeneinheiten. (Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und S an!
Ermitteln Sie die Längen der Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{SP}$ in Abhängigkeit von z!

b) Auf $\overline{FS}$ existiert ein Punkt P_1, der von allen fünf Eckpunkten der Pyramide gleich weit entfernt ist.
Berechnen Sie die Koordinate z_1 des Punktes P_1!

c) Auf $\overline{FS}$ existiert ein Punkt P_2, für den gilt:
Die Summe der Abstände des Punktes P_2 von den fünf Eckpunkten der Pyramide ist minimal.
Berechnen Sie die Koordinate z_2 des Punktes P_2!

Aufgabe 7
Ein Motorschiff und ein Hubschrauber bewegen sich geradlinig gleichförmig.
Um 0:00 Uhr befinden sich das Motorschiff im Punkt $S_0(1; 1; 0)$ und der Hubschrauber im Punkt $H_0(19; 5; 0{,}5)$, und um 0:10 Uhr befinden sich das Motorschiff im Punkt $S_{10}(3; 2; 0)$, der Hubschrauber im Punkt $H_{10}(14; 5; 0{,}5)$.
(Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Bahn des Motorschiffes und die Bahn des Hubschraubers auf!

b) Berechnen Sie die Entfernung, die Motorschiff und Hubschrauber um 0:10 Uhr voneinander haben!

c) Um 0:30 Uhr haben das Motorschiff den Punkt S_{30} und der Hubschrauber den Punkt H_{30} erreicht. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte S_{30} und H_{30}!
Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte!

d) Ermitteln Sie die Uhrzeit für den Fall, dass die Entfernung zwischen Motorschiff und Hubschrauber minimal ist!
(Auf den Nachweis des Extremums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

Aufgabe 8
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \sqrt{6x} + \sqrt{16 - 2x} \ (0 \leq x \leq 8)$$

a) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine Nullstelle hat!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f!
(Auf Nachweis des Extremums von f wird verzichtet.)
Skizzieren Sie den Graph der Funktion f!

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graph der Funktion f, den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 8$ vollständig begrenzt wird!

d) Es sind $A(0; f(0))$ und $B(8; f(8))$ zwei Punkte des Graphen von f.
P sei ein Punkt auf der x-Achse.
Berechnen Sie die Abszisse des Punktes P für den Fall, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{PA}$ und $\overrightarrow{PB}$ minimal ist!

1.50 Abituraufgaben 1990

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = g(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von g!
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Berechnen sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g!
Skizzieren Sie die Graphen im Intervall $-1 \leq x \leq 6$!

c) Die Graphen von f und g begrenzen eine Punktmenge vollständig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

Aufgabe 2
In einem Koordinatensystem $\{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sind zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben.

g_1 geht durch den Punkt $P_0(4; 18; -2)$ und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

g_2 geht durch die Punkte $P_1(1; 3; 5)$ und $P_2(4; 6; 2)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2!

b) Eine zur Gerade g_2 parallele Gerade g_3 habe den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie a_x und a_y!

c) Es seien $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren von Geraden, die zur Geraden g_2 orthogonal sind.
Weisen Sie nach, dass für jeden dieser Richtungsvektoren gilt: $b_x + b_y = 1$!

Aufgabe 3
a) Durch die Tabelle ist eine monoton wachsende geometrische Folge (a_n) gegeben.

n	1	2	3	4
a_n	6,4		8,1	

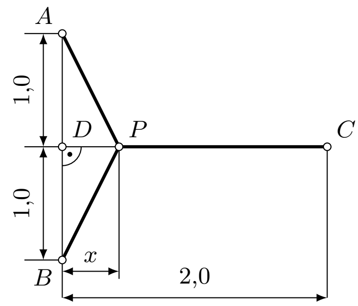
Berechnen Sie die Glieder a_2 und a_4 der Folge (a_n)!

b) Es gibt eine Funktion f mit

$$y = f(x) = c \cdot e^{kx} \ (x > 0; c \in R; k \in R)$$

für die $f(1) = 6{,}4$ und $f(3) = 8{,}1$ gilt.
Ermitteln sie $f(2)$ und $f(4)$!

Aufgabe 4
Für drei Betriebe, deren Lage durch die Punkte A, B und C gegeben ist, soll im Punkt P eine gemeinsame Abwasseraufbereitungsanlage gebaut werden (siehe Skizze!).
Skizze nicht maßstäblich, Maßangaben in km



a) Geben Sie die Gesamtlänge $s = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ der Anschlussleitungen an, wenn die Anlage im Punkt D bzw. wenn die Anlage im Punkt C errichtet würde!

b) Berechnen Sie x für den Fall, dass die Gesamtlänge s minimal wird!
(Auf den Nachweis des Extremums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)
Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge der Rohrleitung!

Aufgabe 5

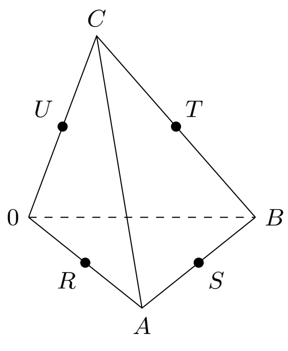
a) Zu einem Schulsportfest soll eine Klasse für eine 4 x 100 m-Staffel entweder eine Jungen- oder eine Mädchenstaffel stellen.
Es kommen 7 Jungen bzw. 6 Mädchen in Frage.
Ermitteln Sie die theoretisch mögliche Gesamtzahl von Staffelaufstellungen, aus denen die zu meldende Staffel ausgewählt werden kann für folgende Fälle!
1. Es sind die Namen der Staffelteilnehmer und deren Reihenfolge zu melden.
2. Es sind nur die Namen der Staffelteilnehmer zu melden.

b) Es sei $(a_n) = (\frac{c}{n!})$ eine Folge mit $c \in R; n \in N, n > 0$.
Man ermittle c für den Fall, dass gilt: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2n}{(n+1)!}$

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

Aufgabe 6.1.
Die Punkte O, A, B, C seien Eckpunkte einer Pyramide; R, S, T, U seien die Mittelpunkte der Kanten $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{OC}$ (siehe Skizze!).

a) In einem kartesischen Koordinatensystem $\{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sind O, A, B, C gegeben durch:
$O(0; 0; 0), A(6; 0; 0), B(8; 12; 0)$ und $C(4; 4; 10)$.
Weisen Sie nach, dass für diese spezielle Pyramide das Viereck RSTU ein Parallelogramm ist!



b) Die Pyramide OABC sei ein Tetraeder, d.h. alle Kanten haben die gleiche Länge.
Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{UT}, \overrightarrow{RU}, \overrightarrow{ST}$ in Abhängigkeit von $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ an!
Beweisen Sie, dass für jedes Tetraeder das Viereck RSTU ein Quadrat ist!

Aufgabe 6.2.
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \sin\frac{x}{3} \ (x \in R)$$

a) Geben Sie die kleinste Periode der Funktion f an!
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $-2\pi \leq x \leq 3\pi$!

b) Weisen Sie nach, dass es keine Tangente an den Graph von f gibt, die orthogonal zur Tangente im Punkt $O(0;0)$ an den Graph von f ist!

c) Gegeben sind die Funktionen g durch

$$y = g(x) = \sin ax \ (x \in R; a \in R; a \neq 0)$$

Bilden Sie die erste, die dritte und die fünfte Abteilung der Funktion g!
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n $(n \geq 0)$ gilt:

$$g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n+1} \cdot \cos(ax)$$

Aufgabe 6.3.
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln(3x)) \ (0{,}5 \leq x \leq 10)$$

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion!
Der Graph von f hat genau einen lokalen Maximumpunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes! Skizzieren Sie den Graph von f!

b) Zeigen Sie, dass

$$F(x) = -3(2 - \ln(3x)) \cdot \ln(3x)$$

eine Stammfunktion von f ist!
Der Graph von f, die x-Achse und eine Gerade $x = c(c > 1)$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A vollständig. Berechnen Sie c für den Fall, dass $A = 3$ gilt!

c) Gegeben sind Funktionen g durch

$$y = g(x) = -\frac{6}{x}(1 - \ln(ax)) \ (x \in R, x > 0; a \in R, a > 0)$$

Der Graph einer dieser Funktionen hat an der Stelle $x = 2$ den Anstieg 1.
Berechnen Sie a für diesen Fall!