# Aufgaben und Lösungen der schriftlichen Abschlussprüfung Mathematik Klasse 10 der Polytechnischen Oberschulen der DDR 1957 - 1974

Zusammenstellung der Aufgaben und Lösungen: Steffen Polster 2020
https://mathematikalpha.de

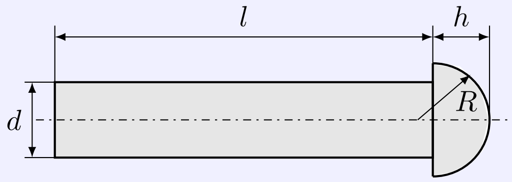
# Inhaltsverzeichnis

**1 Aufgaben und Lösungen** **3**
1.1 Abschlussprüfung 1957 . . . 3
1.2 Abschlussprüfung 1958 . . . 4
1.3 Abschlussprüfung 1959 . . . 5
1.4 Abschlussprüfung 1960 . . . 6
1.5 Abschlussprüfung 1961 . . . 7
1.6 Abschlussprüfung 1962 . . . 8
1.7 Abschlussprüfung 1963 . . . 10
1.8 Abschlussprüfung 1964 . . . 12
1.9 Abschlussprüfung 1965 . . . 15
1.10 Abschlussprüfung 1966 . . . 18
1.11 Abschlussprüfung 1967 . . . 21
1.12 Abschlussprüfung 1968 . . . 23
1.13 Abschlussprüfung 1969 . . . 26
1.14 Abschlussprüfung 1970 . . . 30
1.15 Abschlussprüfung 1971 . . . 34
1.16 Abschlussprüfung 1972 . . . 37
1.17 Abschlussprüfung 1973 . . . 41
1.18 Abschlussprüfung 1974 . . . 45

# 1 Aufgaben und Lösungen

## 1.1 Abschlussprüfung 1957

**Aufgabe 1**
Die Abbildung zeigt den Achsenschnitt eines Nietes aus Eisen. Entnehmen Sie daraus die Maße, und berechnen Sie das Gewicht von 1000 Stück!
d = 13 mm, R = 11 mm, l = 70 mm, h = 8,5 mm, $\gamma = 7{,}8\ \frac{p}{cm^3}$

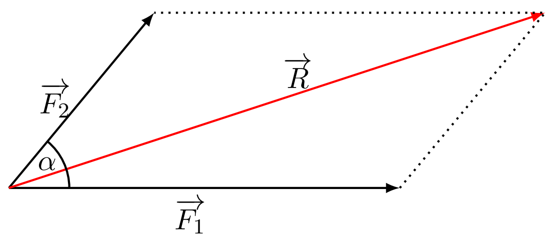



Der Niet besteht aus einem Zylinder (Durchmesser d, Höhe l) und einer Kugelkappe (Radius R und Höhe der Kappe h).
Volumen des Nietes $\quad V = \frac{\pi}{4}d^2 l + \frac{\pi}{3}h^2(3R - h) \approx 20{,}37 \quad cm^3$
Gewicht von 1000 Stück: $G = 159$ p.

**Aufgabe 2**
Zwei Kräfte $P_1$ und $P_2$ greifen unter dem Winkel $\alpha$ an einem Punkt an.

a) Wie groß ist ihre Resultierende R?

b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung nach!
$P_1 = 75{,}3$ kp; $P_2 = 129{,}4$ kp; $\alpha = 50{,}3°$




Für die Resultierende R ergibt der Kosinussatz

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos 129{,}7° = 186{,}7 \quad kp$$

**Aufgabe 3**
Lösen Sie die folgende Gleichung!

$$\frac{6x-2}{2x+3} = \frac{35x^2+23x+8}{16x^2-36} - \frac{4x+4}{8x-12}$$

$$\rightarrow \frac{6x-2}{2x+3} = \frac{35x^2+23x+8}{4(2x-3)(2x+3)} - \frac{x+1}{2x-3} \qquad |\cdot 4(2x-3(2x+3)$$

$$46x - 22x - 3 = 35x^2 + 23x + 8 - 4x + 12x + 3$$

$$\begin{aligned} 21x^2 + 91x + 28 &= 0 \\ x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{13}{6} \pm \sqrt{\frac{169}{36} - \frac{4}{3}} \\ x_1 = 4 \qquad x_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## 1.2 Abschlussprüfung 1958

**Aufgabe 1**
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und 200 m Länge vorangetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.

a) Berechnen Sie die Länge des Verbindungsstollens der beiden Endpunkte!

b) Berechnen Sie, unter welchen Winkeln der Verbindungsstollen von den Hauptstollen abzweigt!

c) Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine maßstäbliche Zeichnung!

a) Ist x die Länge des Verbindungsstollens wird mit dem Kosinussatz

$$x^2 = 162{,}5^2 + 200^2 - 2 \cdot 162{,}5 \cdot 200 \cos 70{,}5° \rightarrow x = 211{,}4 \quad m$$

b) mit dem Sinussatz und der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich

$$\frac{162{,}5}{211{,}4} = \frac{\sin\beta}{\sin 70{,}5°} \rightarrow \beta = 46{,}4° \rightarrow \gamma = 180° - 70{,}5° - 46{,}4° = 63{,}1°$$

c) Prüfen Sie die Ergebnisse durch eine maßstäbliche Zeichnung!

**Aufgabe 2**
Lösen Sie die folgende Gleichung, und machen Sie die Proben!

$$(4x+1)(2x-2) - (x+0{,}5)(6x-5) = 3$$

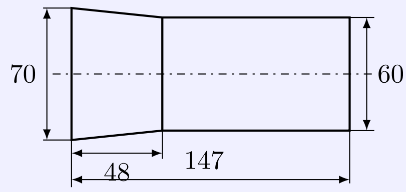
$$\begin{aligned} \rightarrow 8x^2 + 2x - 8x - 2 - 6x^2 + 5x - 3x + 2{,}5 &= 3 \\ 2x^2 - 4x - 2{,}5 &= 0 \\ x^2 - 2x - 1{,}25 &= 0 \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 1{,}25} \\ x_1 &= -0{,}5 \quad ; \quad x_2 = 2{,}5 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3**
Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 5 : 3. Der Umfang beträgt 72 cm.
Wie lang sind die Seiten?

Es sei l die Länge und b die Breite des Rechtecks. Dann gilt $l : b = 5 : 3$ sowie $2l + 2b = 72$. Mit $l = \frac{5}{3}b$ einsetzen, wird $\frac{10}{3}b + 2b = \frac{16}{3}b = 72$ ergibt sich $b = \frac{27}{2}$ cm und somit $l = \frac{45}{2}$ cm. Das Rechteck ist 22,5 cm lang und 13,5 cm breit.

**Aufgabe 4**

Wieviel kp wiegt der in der Abbildung dargestellte runde Maschinenzapfen aus Stahl?
Entnehmen Sie die Maße in mm aus der Skizze! (Wichte des Stahls 7,8 $\frac{p}{cm^3}$)




Der Maschinenzapfen besteht aus einem Zylinder mit dem Maßen Höhe 99 mm und Durchmesser 60 mm und einem Kegelstumpf der Höhe 47 mm und den Durchmessern 70 mm und 60 mm der begrenzenden Kreise.

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Stumpf}} = \frac{\pi}{4}60^2 \cdot 99 + \frac{\pi}{12}47 \cdot (60^2 + 60 \cdot 70 + 70^2) = 436180 \text{ mm}^3 = 436{,}18 \text{ cm}^3$$

Mit der gegebenen Wichte ergibt dies ein Gewicht von 3402 p = 3,4 kp.

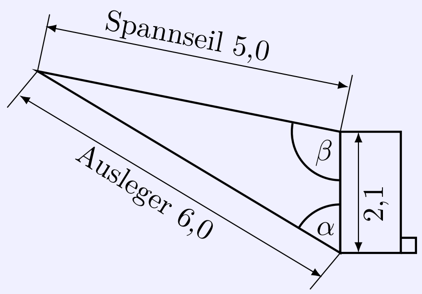
## 1.3 Abschlussprüfung 1959

**Aufgabe 1**
Lösen Sie die folgende Gleichung, und machen Sie die Proben!

$$4x^2 = 2 - 7x$$

$$\begin{aligned}
4x^2 &= 2 - 7x \\
4x^2 + 7x - 2 &= 0 \\
x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} &= 0 \\
x_{1,2} &= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{2}} = -\frac{7}{8} \pm \frac{9}{8} \\
x_1 &= -2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2**




Ein Dunglader hat bei einer bestimmten Arbeitsstellung die in der vereinfachten Zeichnung angegebenen Maße in Meter. Um die Belastungsverhältnisse berechnen zu können, benötigt man die Größe der Winkel. Berechnen Sie

a) den Winkel $\alpha$ zwischen Ausleger und Gehäuse,

b) den Winkel $\beta$ zwischen Spannseil und Gehäuse!

Mit dem Kosinussatz und den drei Seitenlängen des Dreiecks c = 2,1, b = 6,0 und a = 5,0 wird

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \to \alpha = 52{,}3°$$

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \to \beta = 108{,}3°$$

**Aufgabe 3**
Die galvanische Abteilung eines volkseigenen Betriebes hat die Aufgabe, die Oberfläche von Stahlkugeln zu vernickeln.
Das Volumen einer Kugel wurde auf Grund ihres Gewichtes mit $V = 3{,}053$ dm$^3$; festgestellt.
Zur Berechnung der galvanischen Lösung ist es notwendig, die Größe der Oberfläche einer Kugel zu bestimmen. Berechnen Sie diese logarithmisch!

Aus dem Volumen der Kugel kann der Radius und somit die Oberfläche ermittelt werden.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \to r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \qquad ; \qquad A = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}^2$$

Dann wird

$$\lg A = \lg 4 + \lg\pi + \frac{2}{3}(\lg 3 + \lg V - \lg 4 - \lg\pi) = 1{,}00775 \qquad ; \qquad A \approx 10{,}18 \text{ dm}^2$$

Der Oberflächeninhalt einer Stahlkugel 10,18 dm$^2$.

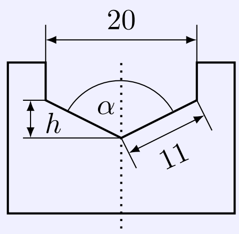
## 1.4 Abschlussprüfung 1960

**Aufgabe 1**
Berechnen Sie logarithmisch!

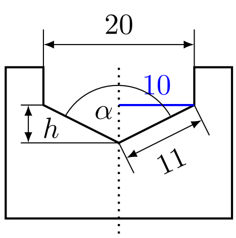
$$\frac{93{,}9 \cdot \sqrt[3]{0{,}0299}}{6{,}15^2 \cdot 0{,}0398}$$

$$\lg x = \lg 93{,}9 + \frac{1}{3}\lg 0{,}0299 - 2 \cdot \lg 6{,}15 - \lg 0{,}0398 \qquad \to x \approx 19{,}361$$

**Aufgabe 2**




Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre gemäß Abbildung angefertigt werden. Berechnen Sie die Spitzenhöhe h und den Winkel $\alpha$ für die dort eingetragenen Maße!




Die Spitzenhöhe $h$ ergibt sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 11 mm und der anderen Kathete 10 mm: $h = \sqrt{11^2 - 10^2} \approx 4{,}58$ mm

Der Winkel $\alpha$ ist doppelt so groß, wie ein Innenwinkel in dem rechtwinkligen Dreieck: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{10}{11} \to \frac{\alpha}{2} \approx 24.62°$
Der Winkel $\alpha$ ist somit 49,2° groß.

**Aufgabe 3**
Ein Feld hat die Form eines Dreiecks. Die Seiten haben folgende Abmessungen: 65,8 m; 89,7 m; 73,3 m. Wie groß sind

a) ein Winkel und
b) die Fläche des Feldes in ha?

Mittels Kosinussatz und $a = 65{,}8$ m, $b = 89{,}7$ m, $c = 73{,}3$ m wird für den Winkel $\gamma = 53{,}6°$.
Mittels $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ergibt sich dann ein Flächeninhalt von $A \approx 2376$ m$^2$.

**Aufgabe 4**
Zwei Rohrleitungen von 15 mm bzw. 25 mm lichter Weite (innerer Durchmesser) sollen durch ein einziges Rohr ersetzt werden.
Der Querschnitt des neuen Rohres soll mindestens so groß sein wie die Summe der Querschnitte der beiden anderen Rohre. Dadurch soll gewährleistet werden, dass im neuen Rohr mindestens dieselbe Wassermenge wie in den beiden alten Wasserrohren fließen kann.
Wie groß ist der Durchmesser des neuen Rohres?

Die Querschnitte der zwei gegebenen Rohre sind 176,7 mm$^2$ und 490,9 mm$^2$ groß. Das neue Rohr muss damit einen Querschnitt von 667,6 mm$^2$ haben.
Ein solches Rohr hat einen Durchmesser von 29,2 mm$^2$.

## 1.5 Abschlussprüfung 1961

**Aufgabe 1**
Bei der Kartoffelernte erwartete man einen Hektarertrag von 240 dt. Das Feld hatte eine Fläche von 15 ha.
Da der ausgestreute Stallmist nicht rechtzeitig untergepflügt wurde, trat eine Ertragsminderung von 7,5 % ein. Berechnen Sie den Ernteverlust!

Ohne Ertragsminderung wäre die Kartoffelernte $240 \cdot 15 = 3600$ dt groß.
7,5 % von 3600 dt sind 270 dt. Der Ernteverlust ist 270 dt Kartoffeln groß.

**Aufgabe 2**
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem rechnerisch oder grafisch!

$$x + y = 1 \qquad ; \qquad 3x–2y = 8$$

Umstellen der 1. Gleichung zu $x = 1-y$ und einsetzen in die zweite ergibt $3-3y-2y = 3-5y = 8$.
Daraus folgt $y = -1$ und mit der ersten Gleichung $x = 2$. Das Lösungspaar ist $(2, -1)$.

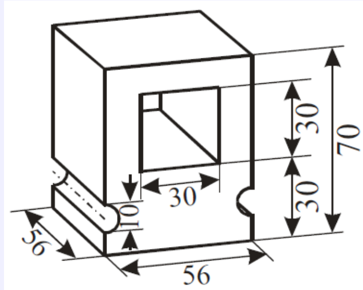
**Aufgabe 3**
Lösen Sie folgende Gleichung, und machen Sie die Proben!

$$26–(x + 3)^2 = (x–1)^2$$

$$\begin{aligned} 26 - x^2 - 6x - 9 = x^2 - 2x + 1 \qquad &\rightarrow \qquad 0 = 2x^2 + 4x - 16 \\ \rightarrow 0 = x^2 + 2x - 8 \qquad &\rightarrow \qquad x_1 = -4; \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4**

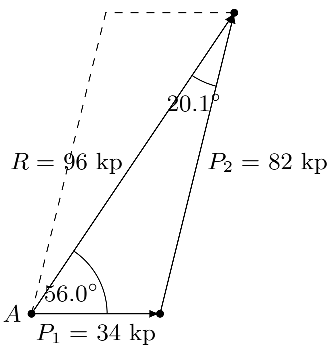
Wieviel kp wiegt der in der Zeichnung dargestellte Maschinenteil aus Stahl?
Entnehmen Sie die Maße aus der Abbildung (Wichte des Stahls 7,85 p/cm$^3$)




Das Maschinenteil ist ein Quader, aus dem ein quadratisches Prisma und zwei Halbzylinder herausgeschnitten werden.
Das Volumen des Quaders ist $V_Q = 56 \cdot 56 \cdot 70 = 219520$ mm$^3$.
Das Prisma hat ein Volumen von $V_P = 30 \cdot 30 \cdot 56 = 50400$ mm$^3$.
Die zwei Halbzylinder ergeben zusammen einen Zylinder mit der Höhe 56 mm und dem Durchmesser 10 mm, d.h. mit einem Volumen von $V_Z = \frac{\pi}{4} d^2 h \approx 4398$ mm$^3$.

Das Maschinenteil hat somit ein Volumen $V = 164720$ mm$^3$ $= 164{,}7$ cm$^3$ und damit ein Gewicht von $G = 1293$ p $\approx 1{,}29$ kp.

**Aufgabe 5**
Unter welchem Winkel greifen die beiden Kräfte $P_1 = 34$ kp und $P_2 = 82$ kp an einem Punkt A an, wenn ihre Resultierende $R = 96$ kp beträgt?
Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung!




Die zwei Kräfte $P_1$, $P_2$ und die Resultierende $R$ bilden ein Dreieck (siehe Abbildung). Mit dem Kosinussatz ermittelt man die Innenwinkel zu 20,1°, 56,0○ und 103,9°.
Damit greifen die zwei Kräfte bei $A$ und einem Winkel von 76,1° an.

## 1.6 Abschlussprüfung 1962

**Aufgabe 1**
a) Berechnen Sie! $(5a–1)^3$
b) Berechnen Sie! $\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54}$
c) Bestimmen Sie den Wert der Unbekannten! $d : (d–2) = 4 : 3$

a) $= 125a^3 - 25a^2 + 5a - 1$
b)

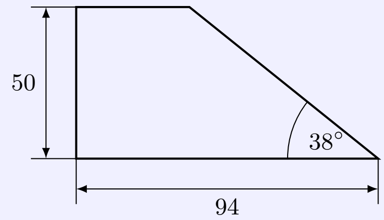
$$\frac{4r^2}{27t} : \frac{16r^5}{54} = \frac{4r^2}{27t} \cdot \frac{54}{16r^5} = \frac{1}{2r^3 \cdot t}$$

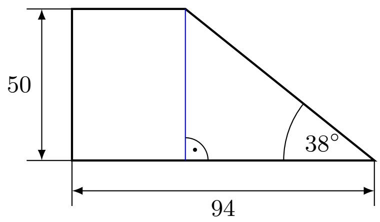
c)

$$\frac{d}{d-2} = \frac{4}{3} \to 3d = 4(d-2) \to d = 8$$

**Aufgabe 2**

Berechnen Sie, wieviel $cm^2$ Material für das in der Abbildung dargestellte Stützblech benötigt werden!




Fällt man das Lot vom oberen rechten Punkt auf die Grundseite (in der Abbildung die blaue Strecke), so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Das Lot hat die Länge 50 mm und die zweite Kathete $k$ dieses Dreiecks die Länge

$$\tan 38° = \frac{50 \text{ mm}}{k} \rightarrow k = \frac{50 \text{ mm}}{\tan 38°} = 64 \text{ mm}$$

Damit ist die obere waagerechte Seite $c$ des Trapezes 94 mm - 64 mm = 30 mm lang.

Für den Flächeninhalt des Stützblechs (Trapez) ergibt sich somit

$$A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = \frac{1}{2}(94 + 30) \cdot 50 = 3100 \text{ mm}^2 = 31 \text{ cm}^2$$

**Aufgabe 3**

Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung!

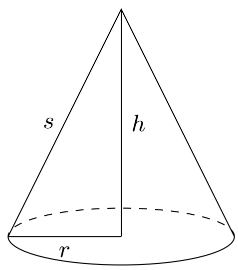
$$5x^2 – 12x = 9$$

$$5x^2 – 12x - 9 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{9}{5} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{5} \pm \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{45}{25}} = \frac{6}{5} \pm \frac{9}{5} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = -\frac{3}{5}; \quad x_2 = 3$$

**Aufgabe 4**

Beim Ausschachten einer Baugrube läuft die ausgehobene Erde über ein Förderband. Dadurch wird sie in Form eines Kegels auf der Baustelle gelagert.
Zur Ermittlung der aufgeschütteten Erdmenge werden mit dem Bandmaß der Umfang des Grundkreises u = 24,5 m und die Mantellinie s = 4,7 m des Kegels gemessen.
Fertigen Sie eine Skizze des Kegels, an, und berechnen Sie die Erdmenge!
Geben Sie die Zwischenergebnisse und das Endergebnis auf eine Dezimalstelle genau an!



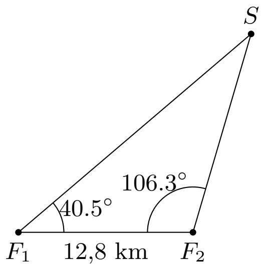

Mit einem Umfang $u = 24{,}5$ m hat der Grundkreis des Kegels einen Radius von $r = \frac{u}{2\pi} = 3{,}9$ m.

Die Kegelhöhe $h$ ergibt sich als Kathete des rechtwinkligen Dreiecks mit den zwei anderen Seiten $s$ und $r$: $h = \sqrt{s^2 - r^2} = 2{,}6$ m.
Somit wird für das Volumen der Erdmenge $V = \frac{\pi}{3}r^2h = 41{,}8$ m$^3$.

**Aufgabe 5**
Zwei Funkpeilstationen $F_1$ und $F_2$ der Nationalen Volksarmee liegen 12,80 km voneinander entfernt.
Ein feindlicher Sender $S$ wird von $F_1$ und $F_2$ aus angepeilt. Der Winkel zwischen dem Peilstrahl von $F_1$ und der Standlinie $\overline{F_1F_2}$ beträgt 40,50°; der Winkel zwischen dem Peilstrahl von $F_2$ und der Standlinie $\overline{F_1F_2}$ beträgt 106,30°.

a) Berechnen Sie die Entfernung des Senders von $F_1$ und $F_2$!

b) Prüfen Sie das Ergebnis durch eine maßstabgerechte Zeichnung, und geben Sie den gewählten Maßstab an!




Der Winkel bei $S$ im Dreieck $F_1F_2S$ ist 33,2° groß.
Mit Hilfe des Sinussatzes wird für die Entfernungen

$$\overline{F_1S} = \frac{\sin 106{,}3°}{\sin 33{,}2°} \cdot 12{,}8 = 22{,}4 \text{ km}$$

$$\overline{F_2S} = \frac{\sin 40.5°}{\sin 33{,}2°} \cdot 12{,}8 = 15{,}2 \text{ km}$$

## 1.7 Abschlussprüfung 1963

**Aufgabe 1**
a) Berechnen Sie! $\frac{7a}{15} - \frac{2a}{3} - \frac{4a}{5}$.

b) Lösen Sie die Formel für die Berechnung des Volumens der Kegel nach $d$ auf!

c) Berechnen Sie! $(3a - 5b)^2$

$$a) \qquad \frac{7a}{15} - \frac{2a}{3} - \frac{4a}{5} = \frac{7a}{15} - \frac{10a}{15} - \frac{12a}{15} = -\frac{15a}{15} = -a$$

$$b) \qquad V = \frac{\pi}{12} d^2 h \quad \to \quad d = \sqrt{\frac{12V}{\pi h}}$$

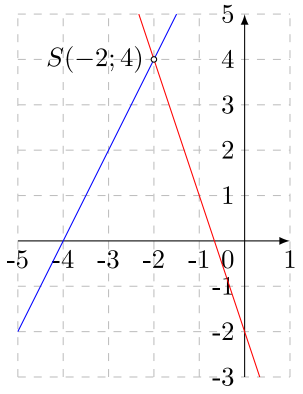
$$c) \qquad (3a - 5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$$

**Aufgabe 2**
Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung! $\qquad x^2 + 2x – 15 = 0$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4 \qquad \to \qquad x_1 = -5; \quad x_2 = 3$$

**Aufgabe 3**
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem rechnerisch und grafisch!

$$6x + 2y = –4 \qquad ; \qquad y = 2x + 8$$




Die erste Gleichung, nach $y$ umgestellt, ist $y = -3x - 2$. Gleichsetzen mit der 2.Gleichung ergibt

$$-3x - 2 = 2x + 8 \quad \rightarrow \quad 5x = 10 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

Damit ergibt sich $y = 4$. Das Lösungspaar ist $(-2; 4)$.

Für die grafische Lösung zeichnet man die zugehörigen linearen Funktionen in ein Koordinatensystem ein. Beide Graphen schneiden sich im Punkt $S(-2; 4)$.

**Aufgabe 4**
"Unwiederbringlich hat der Imperialismus die Herrschaft über einen großen Teil der Völker verloren."(N. S. Chruschtschow auf dem XXII. Parteitag)
Vervollständigen Sie folgende Übersicht!

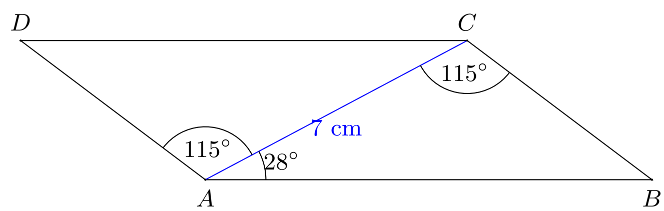
| | Bevölkerung in Mill. | % |
|---|---|---|
| Welt insgesamt | 3020 | |
| Sozialistische Welt | 1070 | |
| Imperialistische Großmächte | | 18 |
| Übrige Welt | 1410 | |

| | Bevölkerung in Mill. | % |
|---|---|---|
| Welt insgesamt | 3020 | 100 |
| Sozialistische Welt | 1070 | 35 |
| Imperialistische Großmächte | 540 | 18 |
| Übrige Welt | 1410 | 47 |

**Aufgabe 5**
Die Diagonale $KM$ eines Parallelogramms $KLMN$ hat eine Länge von 7 cm. Diese Diagonale bildet mit den Seiten des Parallelogramms Winkel von 28° bzw. 115°.

a) Konstruieren Sie das Parallelogramm!
b) Beschreiben Sie die Konstruktion!
c) Berechnen Sie die längere Seite des Parallelogramms!

b) Man zeichne eine beliebige Gerade und lege auf dieser einen Punkt $A$ fest.
In $A$ trage man einen Winkel von 28° an. Der Punkt $C$ liege auf dem freien Schenkel des Winkels im Abstand 7 cm von A.
In $C$ trage man einen Winkel von 115° an. Der zweite Schenkel schneidet die erste Gerade durch $A$ im Punkt $B$.
Den vierten Parallelogrammpunkt erhält man als Schnittpunkt durch Parallelverschiebungen der Strecken $AB$ durch $C$ und $BC$ durch $A$.



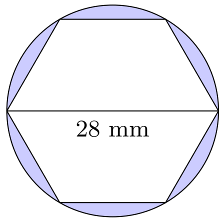
c) Der Winkel bei $B$ ist $\beta = 37°$. Mit dem Sinussatz wird dann für die längere Parallelogrammseite

$$\overline{AB} = \frac{\sin 115°}{\sin 37°} \cdot 7 = 10{,}5 \text{ cm}$$

**Aufgabe 6**
Für eine große Vorrichtung wird aus einem Messingstab mit kreisförmigem Querschnitt von 28 mm Durchmesser ein Werkstück gefertigt, bei dem an einem Ende ein regelmäßiges Sechskant von 800 mm Länge und 28 mm Eckenmaß zu fräsen ist.

Wieviel Kilopond Messingspäne können als Abfall der Verwendung wieder zugeführt werden? (Wichte für Messing: $\gamma = 8{,}3 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$)

Der Abfall ist der farbige Teil des abgebildeten Querschnitts. Er entspricht der Differenz aus dem Flächeninhalt des Kreises und dem Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks mit der Kantenlänge 14 mm.

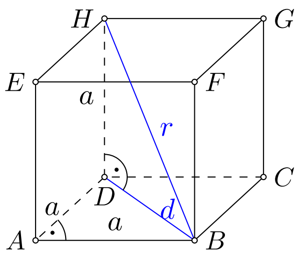



Flächeninhalt des Kreises: $A_K = \frac{\pi}{4} d^2 = 615{,}7 \text{ mm}^2$
Flächeninhalt des Sechseck: $A_S = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = 509{,}2 \text{ mm}^2$
Da der Sechskant eine Höhe von 800 mm hat, wird somit ein Volumen von

$$V = 800 \cdot (615{,}7 - 509{,}2) = 85200 \text{ mm}^3 = 85{,}2 \text{ cm}^3$$

als Abfall produziert. Dieser hat ein Gewicht von 707 p = 0,71 kp.

**Aufgabe 7**
Von einem Würfel ist die Kantenlänge a bekannt. Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Raumdiagonalen her!




Die Flächendiagonale $d$ ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $ABD$, d.h. $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

Die Raumdiagonale $r$ ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $BDH$, d.h. $r = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$.

## 1.8 Abschlussprüfung 1964

**Aufgabe 1**
Vergleichen Sie die Zahlen folgender Zahlenpaare miteinander!

$$\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{5}{6} \quad ; \quad \frac{4}{25} \quad \text{und} \quad 0{,}16 \quad ; \quad 7 \cdot \sqrt{8} \quad \text{und} \quad 5 \cdot \sqrt{8}$$

Setzen Sie jeweils das richtige Zeichen (< ; = ; >)!
Geben Sie an, wie Sie zu Ihrer Entscheidung gelangt sind!

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{12} < 0 \qquad &\text{d.h.} \qquad \frac{3}{4} < \frac{5}{6} \\ \frac{4}{25} - 0{,}16 = 0 \qquad &\text{d.h.} \qquad \frac{4}{25} = 0{,}16 \\ 7\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = 2\sqrt{8} > 0 \qquad &\text{d.h.} \qquad 7\sqrt{8} > 5\sqrt{8} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2**
Die Zusammenarbeit im Rat für Gegenseitige Wirtschaftshilfe (RGW) trug zu einer erheblichen Steigerung der Industrieproduktion und zu einer bedeutenden Erweiterung des Warenaustausches innerhalb der RGW-Länder bei.
Im Jahre 1958 betrug der Warenumsatz zwischen den Mitgliedsländern des RGW 10,9 Milliarden Rubel, im Jahre 1962 bereits 18,4 Milliarden Rubel.
Drücken Sie diese Steigerung des Warenumsatzes in Prozenten aus!

18,4 Milliarden sind das 1,688fache von 10,9 Milliarden.
Damit stieg der Warenumsatz um 68,8 % oder auf 168,8 %.

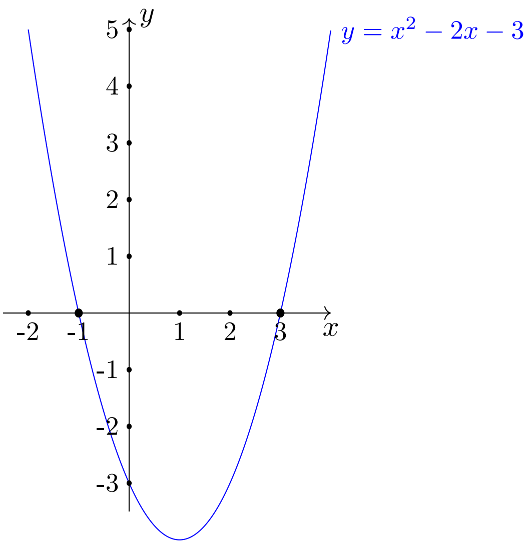
**Aufgabe 3**
Ein Drittel einer Zahl ist um 3 größer als ein Viertel der gleichen Zahl.
Bestimmen Sie die gesuchte Zahl mit Hilfe einer Gleichung!

Ansatz: $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 3$ mit der Lösung $x = 36$.

**Aufgabe 4**
Lösen Sie die Gleichung $(x - 3)(x + 1) = 0$

a) grafisch, indem Sie entweder die Nullstellen der entsprechenden quadratischen Funktion zeichnerisch ermitteln oder das Bild von $y = x^2$ mit der zugehörigen Geraden zum Schnitt bringen!
b) Lösen Sie diese Gleichung rechnerisch!

a) $(x-3)(x+1) = 0$ ist ausmultipliziert $x^2-2x-3 = 0$.
Die zugehörige Funktion $y = x^2-2x-3$ hat die Scheitelpunktsform $y = (x-1)^2-4$ und den Scheitelpunkt $S(1; -4)$. In der grafischen Darstellung ist der Graph der Funktion eine nach oben geöffnete Parabel.



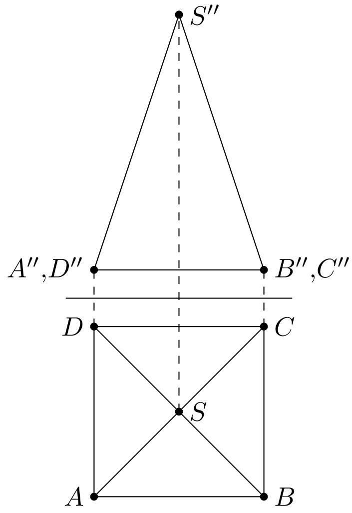

In der grafischen Darstellung erkennt man die Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -1$, die Lösung der Gleichung sind.

Das Produkt $(x - 3)(x + 1)$ ist genau dann gleich 0, wenn einer der beiden Faktoren null ist.
Damit werden aus $x-3 = 0$ und $x+1 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

**Aufgabe 5**
Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Länge der Grundkante beträgt 6 cm. Die Höhe der Pyramide beträgt 9 cm.

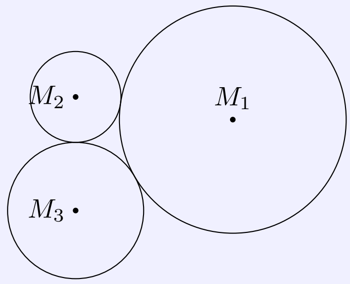
a) Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide!
b) Stellen Sie diese Pyramide in Grundriss und Aufriss dar (alle Eckpunkte benennen)!

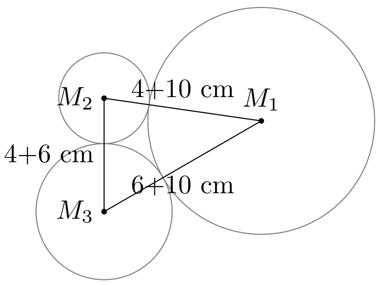
a) Grundkante $a = 6$ cm, d.h. quadratische Grundfläche $A = 36\ \text{cm}^2$
Volumen
$$V = \frac{1}{3} A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 9 = 108\ \text{cm}^3$$
b) Grund- und Aufriss siehe Abbildung




**Aufgabe 6**

Drei Kreise mit Durchmessern von 60 mm, 100 mm und 40 mm berühren einander von außen (Abbildung). Verbindet man die Mittelpunkte der drei Kreise, so entsteht ein Dreieck.
Berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks (Rechenstabgenauigkeit genügt)!
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Konstruktion!

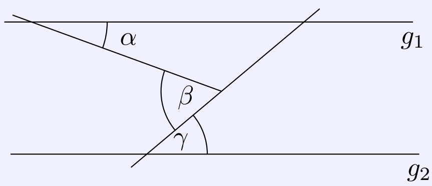


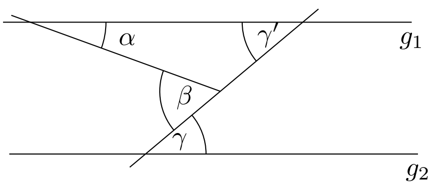




Die drei Mittelpunkte der Kreise bilden ein Dreiecke mit den Seitenlängen 14 cm, 16 cm und 10 cm.
Mit dem Kosinussatz ergeben sich dann die Innenwinkel zu 38,2°, 60° und 81,8°.

**Aufgabe 7**

Berechnen Sie an Hand der Abbildung ($g_1 \parallel g_2$) die Größe des Winkels $\gamma$ wenn Winkel $\alpha$ mit 20° und Winkel $\beta$ mit 60° gegeben sind!
Geben Sie Ihren Lösungsweg an, und begründen Sie Ihre Feststellung über die Größe des Winkels $\gamma$!




Der Winkel $\beta$ ist Außenwinkel in dem Dreieck, dass den Winkel $\alpha$ enthält. Nach dem Außenwinkelsatz ist dann der eingezeichnete Winkel $\gamma' = \beta - \alpha = 60° - 20° = 40°$. Da $g_1$ und $g_2$ parallel sind, sind $\gamma$ und $\gamma'$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Damit wird $\gamma = 40°$.

**Aufgabe 8**

a) Kürzen Sie den Bruch $\dfrac{4a^2 - 1}{2a + 1}$ und geben Sie an, welchen Wert $a$ in dem gegebenen Bruch nicht annehmen darf!

b) Fassen Sie folgende Summe zusammen! $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \qquad (a \neq -b; a \neq b)$

$$a) \qquad \frac{4a^2-1}{2a+1} = \frac{(2a+1)(2a-1)}{2a+1} = 2a-1$$

Der Nenner darf nicht Null werden, d.h. es muss $2a+1 \neq 0$ gelten, also $a \neq -\frac{1}{2}$.
b)

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2-ab}{a^2-b^2} + \frac{ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

## 1.9 Abschlussprüfung 1965

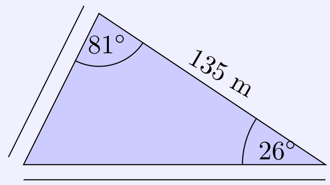
**Aufgabe 1**
Unsere Volkswirtschaft erzielte seit dem Bestehen unserer Republik in allen Industriezweigen große Erfolge. Zum Beispiel wurden im VEB Automobilwerk Sachsenring, Zwickau, von Jahr zu Jahr mehr PKW produziert.

| Jahr | Anzahl produzierter Fahrzeuge |
|---|---|
| 1955 | 7880 |
| 1964 | 60000 |

Der Plan für das Jahr 1965 sieht im Vergleich zum Jahre 1964 eine Steigerung der Produktion um rund 17 % vor.
a) Ermitteln Sie, um wieviel Prozent die Produktion von 1964 gegenüber der von 1955 gesteigert wurde!
b) Bestimmen Sie die Anzahl der im Jahre 1965 zu produzierenden PKW!

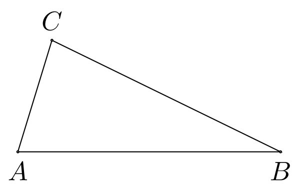
a) $60000 : 7800 = 7{,}69$, d.h. von 1955 bis 1964 wurde die Produktion auf 769% oder um 669% gesteigert.
b) $60000 \cdot 1{,}17 = 70200$, d.h. 1965 sollen 70200 PKW produziert werden.

**Aufgabe 2**
Ein dreieckiges Flurstück wird begrenzt von einem Wald, einem Feldweg und einer Straße (s. Abbildung). Dieses Feld ist für eine rationelle Bearbeitung mit modernen Landmaschinen wegen seiner Form nicht geeignet.
Deshalb soll dieses Stück künftig als Weidefläche genutzt werden. Ein Elektrozaun soll die Weide umgeben. Es sind zwei Leitungsdrähte vorgesehen.




a) Berechnen Sie, wieviel Meter Draht benötigt werden.
b) Prüfen Sie Ihre Ergebnisse durch eine Konstruktion im Maßstab 1 : 1000!

a) Der dritte Innenwinkel ist 73° groß. Mittels Kosinussatz und Sinussatz ergeben sich für die zwei unbekannten Seitenlängen 61,9 m und 139,4 m.
Insgesamt müssen 361,3 m Zaun gezogen werden.



**Aufgabe 3**
a) Bestimmen Sie $\cos x$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; ohne Benutzung der Tafeln der goniometrischen Funktionen, wenn Ihnen $\sin x$ mit $\frac{12}{13}$ bekannt ist!

b) Gibt es Lösungen für $2 + \cos\alpha = 4$?
Begründen Sie Ihre Aussage!

$$a) \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

b) Umstellen ergibt $\cos\alpha = 2$. Da der Kosinus einen Wertebereich von $[-1; 1]$ hat, kann es keine reelle Zahl $x$ geben, die die Gleichung erfüllt.

**Aufgabe 4**
a) Bestimmen Sie $x$ und $y$ aus dem Gleichungssystem

$$x + y = s \qquad ; \qquad x - y = t$$

Machen Sie die Probe!
b) Setzen Sie $t = 6$! Für welche Werte von $s$ hat dieses Gleichungssystem dann ganzzahlige Lösungen?

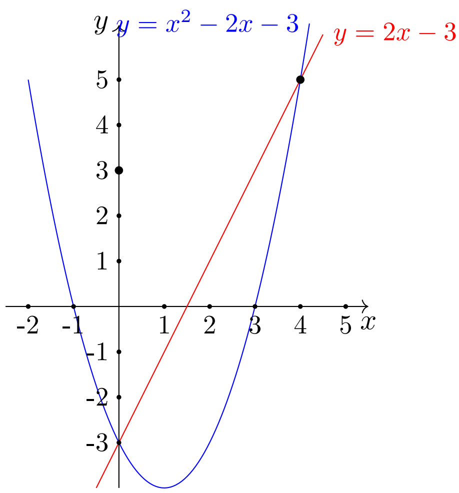
a) Addiert man beide Gleichung, so ergibt sich $2x = s + t$, d.h. $x = \frac{1}{2}(s + t)$.
Da $y = s - x$ ist, wird $y = \frac{1}{2}(s - t)$.

b) Mit $t = 6$ werden die Lösungspaare $\left(\frac{s}{2} + 3; \frac{s}{2} - 3\right)$. Ganzzahlige Lösungen ergeben sich dann für alle geradzahligen $s$.

**Aufgabe 5**
Zeichnen Sie die Graphen folgender zwei Funktionen im Bereich von $x = -2$ bis $x = 5$!

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad ; \qquad y = 2x - 3 \qquad (x \text{ reell})$$

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser beiden Graphen an!




Die Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion ist $y = (x - 1)^2 - 4$.

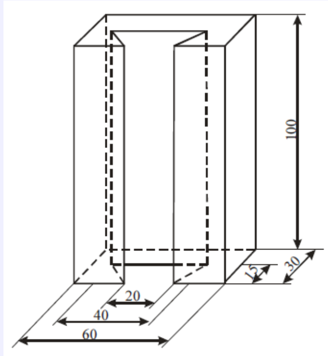
Die Graphen der Funktionen schneiden sich in den Punkten $A(0; -3)$ und $B(4; 5)$.

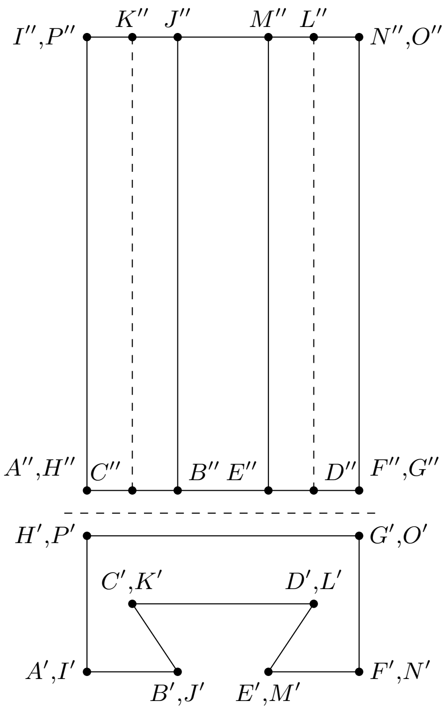
**Aufgabe 6**

Die Abbildung zeigt den Schrägriss eines Maschinenteils (Schlittenführung).
Maßangabe in mm, nicht maßstäblich.

a) Zeichnen Sie Grund- und Aufriss dieses Körpers im Maßstab 1:1!
Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!

b) Berechnen Sie das Volumen des Maschinenteils!




Das Maschinenteil ist ein Quader, aus dem ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche herausgeschnitten wurde. Das Quadervolumen ist $V_Q = 60{\cdot}30{\cdot}100 = 180000\ \text{mm}^3 = 180\ \text{cm}^3$.

Das Trapez der Prismagrundfläche hat eine Höhe von 15 mm. Die beiden parallelen Seiten sind 20 mm und 40 mm lang. Damit ist das Prismavolumen

$$V_P = \frac{1}{2}(20 + 40) \cdot 15 \cdot 100 = 45000\ \text{mm}^3 = 45\ \text{cm}^3$$

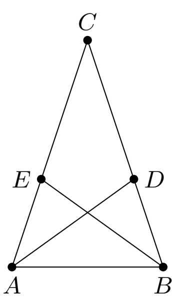
Das Volumen des Maschinenteils ist somit

$$V = V_Q - V_P = 135\ \text{cm}^3$$

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1 und 7.2 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
Es gilt der Satz:
"In gleichschenkligen Dreiecken sind die Winkelhalbierenden der Basiswinkel gleich lang."

Beweisen Sie den Satz! (Fertigen Sie eine Skizze an, und beweisen Sie zunächst die Kongruenz zweier Teildreiecke!)




Die Winkelhalbierenden der Basiswinkel seien $AD$ und $BE$.
Dann haben die Dreiecke $ABD$ und $ABE$ die Seite $AB$ gemeinsam. Die Winkel $\angle BAE$ und $\angle ABD$ sind Basiswinkel, d.h. gleich groß. Ebenso sind die Winkel $\angle ABE$ und $\angle BAD$ als halbe Basiswinkel gleich groß.

Somit sind die Dreiecke $ABD$ und $ABE$ nach Kongruenzsatz WSW zueinander kongruent und die Seiten $AD$ und $BE$, d.h., die Winkelhalbierenden gleich groß. w.z.b.w.

**Aufgabe 7.2**
Eine Seite eines Rechtecks sei 6 cm lang.
Verlängert man diese Seite um 4 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so entsteht ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt.
Wie lang ist die andere Seite des ursprünglichen Rechtecks?

Es seien $a = 6$ cm und $b$ die Seiten des ursprünglichen Rechtecks. Dann gilt

$$a \cdot b = 6b = A = (a+4) \cdot (b-1) = 10b - 10 \quad \to \quad 4b = 40 \quad \to \quad b = 2{,}5 \text{ cm}$$

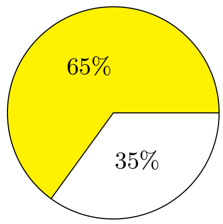
Die zweite Seite des ursprünglichen Rechtecks ist 2,5 cm lang.

## 1.10 Abschlussprüfung 1966

**Aufgabe 1**
Im Jahre 1964 wurden 65 % unserer Produktion an Kalisalzen exportiert. Das sind 1,2 Millionen Tonnen Kalisalz.

a) Berechnen Sie die Gesamtproduktion der DDR an Kalisalzen im Jahre 1964! (Runden Sie der Aufgabenstellung entsprechend!)
b) Stellen Sie den Anteil des Exports an der Gesamtproduktion in einem Kreisdiagramm dar! Beschriften Sie das Diagramm!

a) 1,2 Millionen t : 0,65 = 1,84 Millionen t Kalisalz.



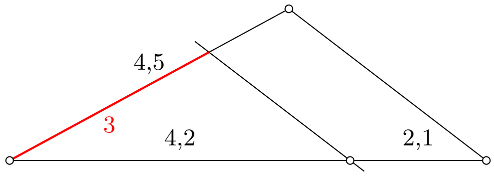

**Aufgabe 2**
Vom Dreieck $DEF$ sind bekannt: Winkel $EFD = 124°$; $EF = 58$ mm; $FD = 76$ mm

a) Errechnen Sie den Flächeninhalt in Quadratzentimetern!
b) Welcher Winkel ist in diesem Dreieck der kleinste? Begründen Sie Ihre Entscheidung!
c) Errechnen Sie die Länge der dritten Seite des Dreiecks in Millimetern!

a) Mit $A = \frac{1}{2} EF \cdot FD \cdot \sin\angle EFD$ wird $A = 1827$ mm$^2$.
b) Der kleinste Winkel liegt der kleinsten Seite gegenüber, d.h. hier ist $\angle EDF$ am kleinsten.
c) mit dem Sinussatz ergibt sich für $ED = 118$ mm.

**Aufgabe 3**
a) Bestimmen Sie $x$ durch Konstruktion! 6,3 : 4,5 = 4,2 : $x$
b) Errechnen Sie $x$!

Umstellen ergibt $x = \frac{4{,}2 \cdot 4{,}5}{6{,}3} = 3$.
Die Konstruktion erfolgt mittels Strahlensatz. Längs zweier Strahlen werden 6,3 cm und 4,5 cm und auf dem zweiten 4,2 cm abgetragen. Verschiebt man die Gerade durch 6,3 cm und 4,2 cm parallel durch den Punkt mit 4,5 cm, so erhält man auf dem 2. Strahl die Lösung 3 cm.




**Aufgabe 4**
Gegeben ist die Gleichung $2x^2 + ax - a^2 = 0$. Lösen Sie diese Gleichung nach $x$ auf! (Probe!)

$$x^2 + \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{2}}$$

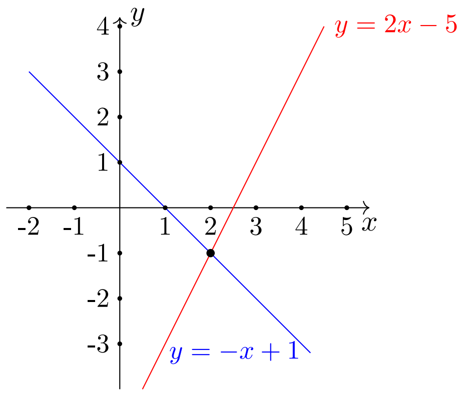
$$= -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{16}} = -\frac{a}{4} \pm \frac{3a}{4}$$

Die Lösung der Gleichung ist somit $x_1 = -a$ und $x_2 = \frac{a}{2}$.

**Aufgabe 5**
Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$y = -x + 1 \qquad ; \qquad 5 = 2x - y \qquad (x \text{ reell})$$

a) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Graphen an!
b) Überprüfen Sie die angegebenen Schnittpunktkoordinaten rechnerisch!
c) Für welchen Bereich von $x$ gilt für die erste Funktion und zugleich für die zweite Funktion, dass $y$ nicht größer als 3 ist?




a) der Schnittpunkt ist $S(2; -1)$
b) die zweite Gleichung zu $y = 2x - 5$ umstellen und mit der ersten gleichsetzen, ergibt

$$-x + 1 = 2x - 5 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

und somit $y = -x + 1 = -1$.
c) im Intervall $x \in [-2; 4]$ sind die Funktionswerte beider Funktionen nicht größer als 3.

**Aufgabe 6**
a) Bestimmen Sie $x$ in $x = \log_2 8$!
b) Lösen Sie nach $c$ auf, und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

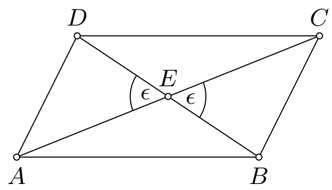
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \qquad (a \neq b; b \neq 0; c \neq 0; a \neq -b)$$

a) aus der Gleichung wird $2^x = 8$, d.h. $x = 3$.

b) $\dfrac{b+a}{ab} = \dfrac{1}{c} \quad \rightarrow \quad c = \dfrac{ab}{a+b}$

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
Zeichnet man in ein Parallelogramm die Diagonalen ein, so erhält man vier Teildreiecke. Weisen Sie nach, dass ein Paar gegenüberliegender Teildreiecke kongruent ist!




$E$ sei der Schnittpunkt der Diagonalen. In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig, d.h. es gilt $ED = ED$ und $EC = EA$.
Außerdem sind die zwei Winkel $\angle BEC$ und $\angle DEA$ gleich groß, da sie Scheitelwinkel bei $E$ sind.
Damit sind die zwei Dreiecke $\triangle BEC$ und $\triangle AED$ nach dem Kongruenzsatz WSW zueinander kongruent, da sie in dem Winkel $\epsilon$ und den zwei anliegenden Seiten übereinstimmen.

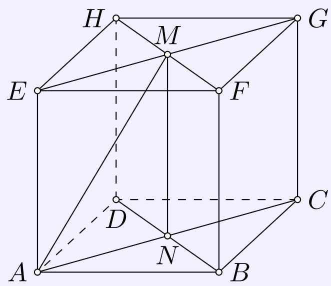
**Aufgabe 7.2**
Ein rechteckiges Stück Blech mit den Seitenlängen $a$ und $b$ wird zu einem Rohr zusammengebogen, das die Form eines offenen, geraden Kreiszylinders hat. Die Länge des Rohres sei $b$.
Geben Sie das Volumen des zylinderförmigen Rohres an, wenn $2a = b$ ist!

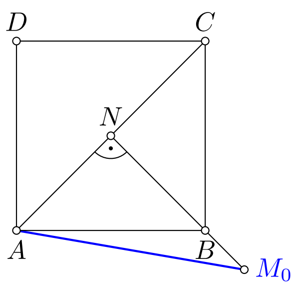
Wenn $b$ die Länge des Rohrs ist, so muss $a$ gleich dem Umfang $u$ des Grundkreises des Zylinders sein.
Der Kreis hat somit den Radius $r = \frac{u}{2\pi} = \frac{a}{2\pi}$ und den Flächeninhalt $A = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4\pi^2} = \frac{a^2}{4\pi}$.
Für das Volumen des zylinderförmigen Rohres wird somit bei $b = \frac{a}{2}$:

$$V = A \cdot h = \frac{a^2}{4\pi} \cdot b = \frac{a^2}{4\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{8\pi}$$

**Aufgabe 7.3**

Die Abbildung stellt einen Würfel mit der Kantenlänge 50 mm dar.
Konstruieren Sie die wahre Länge der Strecke $AM$, und geben Sie diese in Millimeter an!



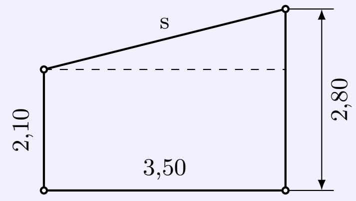

Im Grundriss des Würfels wird die Diagonale $AC$ der Grundfläche in wahrer Größe dargestellt, damit auch die Strecke $AN$.
Errichtet man in $N$ zu $AN$ eine Senkrechte und trägt auf dieser die Höhe des Würfels (gleich der Grundseitenlänge, gleich der Strecke $MN$) an, erhält man einen Punkt $M_0$. Die Strecke $AM_0$ besitzt dann die gleiche Länge wie die gesuchte Strecke $AM$.

Berechnung: $NM_0 = 50$ mm, $AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 50$ mm.

$AM = \sqrt{NM_0^2 + AN^2} \approx 61{,}2$ mm.

## 1.11 Abschlussprüfung 1967

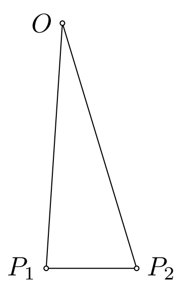
**Aufgabe 1**
Im NAW wird ein 15,00 m langer Fahrradschuppen gebaut. Die Abbildung (nicht maßstäblich) zeigt den vereinfachten Querschnitt.




a) Berechnen Sie die Balkenlänge $s$!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche!
c) Wieviel Quadratmeter Dachpappe müssen angeliefert werden, wenn 12 % des errechneten Flächeninhalts zusätzlich für Überlappung zu veranschlagen sind?

a) $s$ ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 3,50 m und $2{,}80 - 2{,}10 = 0{,}70$ m, d.h. $s = \sqrt{3{,}5^2 + 0{,}7^2} = 3{,}57$m.
b) Die Dachfläche ist 15 m lang, d.h. für den Flächeninhalt $A = 15 \cdot 3{,}57 = 53{,}54$ m$^2$.
c) Es werden $53{,}54 \cdot 1{,}12 \approx 60$ m$^2$ Dachpappe benötigt.

**Aufgabe 2**
Zwei Beobachtungsposten $P_1$ und $P_2$ der Nationalen Volksarmee peilen gleichzeitig einen Orientierungspunkt $O$ an. $P_1$ und $P_2$ liegen 960 m voneinander entfernt.
Der Winkel $OP_1P_2$ wird mit 86,2°, der Winkel $OP_2P_1$ mit 73,5° ermittelt.
Berechnen Sie die Entfernung des Orientierungspunktes $O$ von $P_1$!



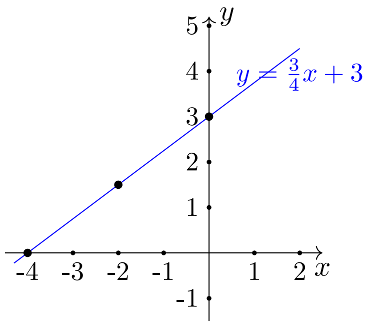

Im Dreieck $OP_1P_2$ ist die Grundseite 960 m lang und der Winkel bei $O$ gleich $180° - 73{,}5° - 86{,}2° = 20{,}3°$.

Der Seite $OP_1$ liegt der Winkel 73,5° gegenüber, so dass mit dem Sinussatz $OP_1 = 2653$ m folgt.

**Aufgabe 3**
Von einer linearen Funktion ist folgende Wertetabelle bekannt ($x$ reell):

| x | -4 | -2 | 0 |
|---|---|---|---|
| y | 0 | 1,5 | 3 |

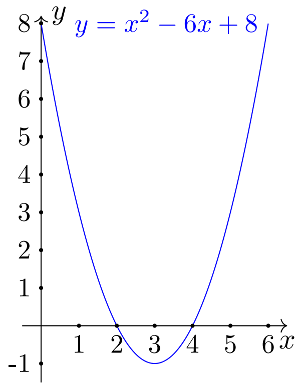
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion!
b) Geben Sie die Gleichung der Funktion an, die durch die Wertetabelle gegeben ist.
c) Berechnen Sie den Anstiegswinkel, den die Gerade mit der x-Achse bildet!




b) Da die lineare Funktion $y = mx+n$ durch $P(0;3)$ verläuft ist $n = 3$.
Als Anstieg ergibt sich $m = \frac{3}{4}$, so dass die Funktionsgleichung $y = \frac{3}{4}x + 3$ lautet.

c) Für den Anstiegswinkel $\alpha$ gilt $\tan\alpha = m$ und somit $\alpha = 36{,}9°$.

**Aufgabe 4**
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2 - 6x + 8$ ; ($x$ reell).
b) Von einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ sind die beiden Lösungen $x_1 = +3$ und $x_2 = -1$ bekannt.
Berechnen Sie $p$ und $q$!



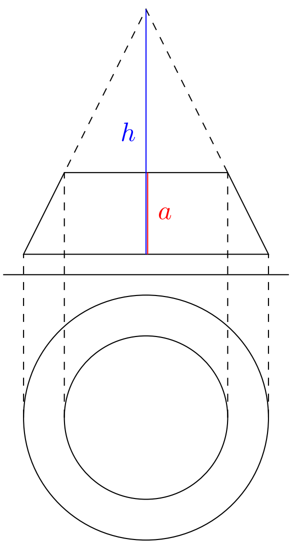

Sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ Lösungen der quadratischen Funktion, so ist $0 = (x - 3)(x + 1)$.
Ausmultiplizieren ergibt $y = x^2 - 2x - 3$, d.h. es sind $p = -2$ und $q = -3$.

**Aufgabe 5**
a) Berechnen Sie! $(6a + 5b) \cdot \left(\frac{1}{2}a - 2b\right)$.
b) Vereinfachen Sie! $\frac{10^5}{10^6} \cdot 10^3$.

a) $= 3a^2 - 12ab + \frac{5}{2}ab - 10b^2 = 3a^2 - \frac{19}{2}ab - 10b^2$.
b) $= 10^{5-6+3} = 100$.

**Aufgabe 6**
Ein gerader Kreiskegel ($r = 3{,}0$ cm; $h = 6{,}0$ cm) wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Der Abstand der Ebene von der Grundfläche des Kegels beträgt 2,0 cm.

a) Zeichnen Sie den so entstandenen Kegelstumpf im Grund-Aufriss-Verfahren im Maßstab 1:1!
b) Berechnen Sie die Länge des Radius der Schnittfläche! (Vergleichen Sie auch mit der Zeichnung!)
c) Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfes!




b) Der gesuchte Radius $r_s$ der Schnittfläche ergibt sich aus der in der Abbildung eingezeichneten Strahlensatzfigur.
Ist $a = 2$ cm der Abstand von der Grundfläche, so gilt

$$h : (h - a) = r : r_s$$

Umstellen ergibt $r_s = \frac{r(h - a)}{h} = 2$ cm.

c) Der Kegelstumpf ist die Differenz des großen Kegels und des abgeschnittenen:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi r_s^2 \cdot (h - a)$$

Mit den gegebenen Werten wird $V = \frac{38}{3}\pi \approx 39{,}8\ \text{cm}^3$.

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
Gegeben ist die Gleichung $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 1.$
Welche Einschränkungen gelten für $a$ und $b$?
Lösen Sie dazu auch die Gleichung nach $x$ auf, und machen Sie die Probe!

Die Gleichung ist nur lösbar wenn sowohl $a \neq 0$ als auch $b \neq 0$ gilt.

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{xb}{ab} - \frac{xa}{ab} = \frac{x(b-a)}{ab} = 1 \qquad \text{und damit} \qquad x = \frac{ab}{a-b}$$

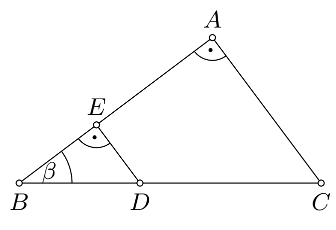
**Aufgabe 7.2**
Zwei Zahlen $a$ und $b$ verhalten sich wie 5 : 6.
Addiert man zu jeder der beiden Zahlen 3, so verhalten sich die neu entstandenen Zahlen wie 7 : 8.
Ermitteln Sie $a$ und $b$! (Probe!)

Es ergeben sich die Gleichungen $a : b = 5 : 6$, d.h. $a = \frac{5}{6}b$, und $(a+3) : (b+3) = 7 : 8$. Setzt man die umgestellte erste Gleichung in die zweite ein, wird

$$\frac{\frac{5}{6}b + 3}{b+3} = \frac{7}{8} \quad \rightarrow \quad 7b + 21 = \frac{20}{3}b + 24 \quad \rightarrow \quad b = 9$$

Damit folgt $a = \frac{15}{2} = 7{,}5$. Die Probe bestätigt das Lösungspaar $(7{,}5; 9)$.

**Aufgabe 7.3**
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit dem rechten Winkel bei $A$. Auf der Seite $a$ liege zwischen $B$ und $C$ der Punkt $D$.
a) Fällen Sie von $D$ das Lot auf die Seite $AB$, und bezeichnen Sie den Fußpunkt des Lotes mit $E$!
b) Beweisen Sie, dass das Dreieck $ABC$ dem Dreieck $EBD$ ähnlich ist!



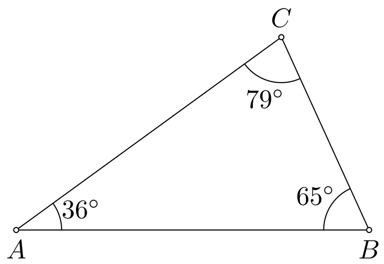

Die beiden Dreiecke $ABC$ und $EBD$ enthalten beide den Winkel $\beta$ beim Punkt $B$. Beide Dreiecke enthalten auch einen rechten Winkel.

Nach dem Hauptähnlichkeissatz sind die Dreiecke $ABC$ und $EBD$ zueinander ähnlich, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

## 1.12 Abschlussprüfung 1968

**Aufgabe 1**
Von einem Dreieck $ABC$ sind die Längen der drei Seiten gegeben: Strecke $AB = c = 7{,}0$ cm; Strecke $AC = b = 6{,}5$ cm; Strecke $BC = a = 4{,}2$ cm.

a) Konstruieren Sie das Dreieck! Messen Sie die Größe der drei Innenwinkel, und geben Sie Ihre Messergebnisse an!
b) Berechnen Sie die Größe der drei Winkel!




a) Messergebnisse: $\alpha = 36°$, $\beta = 65°$, $\gamma = 79°$

b) Mit Hilfe des Kosinussatzes und Sinussatzes ergeben sich $\alpha = 36{,}0°$, $\beta = 65{,}5°$, $\gamma = 78{,}5°$.

**Aufgabe 2**
"Kommunismus – das ist Sowjetmacht plus Elektrifizierung des ganzen Landes."(W. I. Lenin)
Im Jahre 1950 wurden in der UdSSR 91 Mrd. kWh Elektroenergie erzeugt. Im Jahre 1965 waren es 509 Mrd. kWh.
Um wieviel Prozent wurde die Erzeugung von Elektroenergie in diesem Zeitraum gesteigert?

$\frac{509}{91} \approx 5{,}59$, d.h. die Erzeugung von Elektroenergie stieg um 459 %.

**Aufgabe 3**
Berechnen Sie $x$ und $y$ aus dem folgenden linearen Gleichungssystem!

$$3ax + y = 7a \qquad ; \qquad ax + y = 3a \qquad (a \text{ reelle Zahl}, a \neq 0)$$

(Schriftliche Probe!)

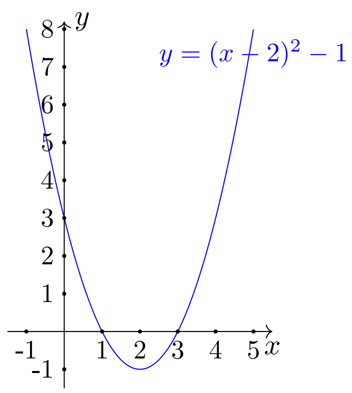
Umstellen der ersten Gleichung nach $y$ ergibt $y = 7a - 3ax$. Einsetzen in die zweite Gleichung

$$ax + 7a - 3ax = 3a \quad \rightarrow \quad -2ax = -4a \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Einsetzen in $y = 7a - 3ax$ ergibt $y = a$.
Die Proben $3a \cdot 2 + a = 7a$ und $a \cdot 2 + a = 3a$ bestätigen das Ergebnis $(2; a)$.

**Aufgabe 4**
Die Gleichung einer quadratischen Funktion lautet $\qquad y = (x - 2)^2 - 1 \qquad (x \text{ reell})$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Bereich $-1 < x < 5$!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!




a) der Scheitelpunkt der Funktion liegt bei $S(2; -1)$, der Graph ist eine Normalparabel

b)

$$0 = x^2 - 4x + 4 - 1 \qquad \rightarrow \qquad p = -4; q = 3 \qquad \rightarrow$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 1; x_2 = 3$$

**Aufgabe 5**

a) Vereinfachen Sie $\sqrt[3]{\frac{a^2}{9}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$, ($a$ ist eine positive reelle Zahl)

b) Lösen Sie die folgende Gleichung nach $t$ auf! $s = p + p \cdot k \cdot t$ $(p \neq 0; k \neq 0)$

c) Ermitteln Sie den größten Wert, den die Summe $\frac{1}{2} + \sin x$ annehmen kann!

a) $= \sqrt[3]{\frac{a^2}{9} \cdot \frac{a}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{27}} = \frac{a}{3}$

b) $t = \frac{s-p}{k \cdot k}$

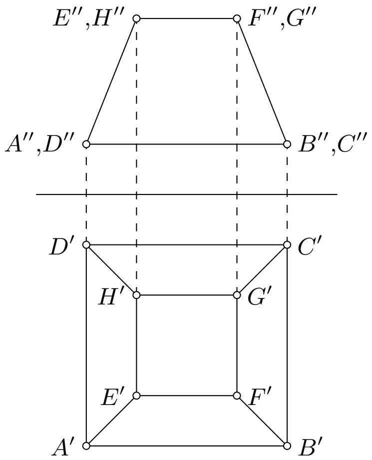
c) $\sin x$ hat den Wertebereich $[-1; 1]$. Damit ist der größte mögliche Wert 1,5.

**Aufgabe 6**

Ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche hat eine Körperhöhe von 4,5 cm. Eine Grundkante ist 8,0 cm lang, eine Kante der Deckfläche ist 4,0 cm lang.

a) Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes!

b) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Alle Eckpunkte sind zu benennen.




a) Aus der Formelsammlung entnimmt man, mit der Höhe $h$, dem Flächeninhalt $G$ der Grundfläche und dem Flächeninhalt $D$ der Deckfläche, für das Volumen

$$V = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{G \cdot D} + D\right)$$

Die Grundfläche hat einen Flächeninhalt von 64 cm$^2$, die Deckfläche von 16 cm$^2$ und somit $V = 168$ cm$^3$.

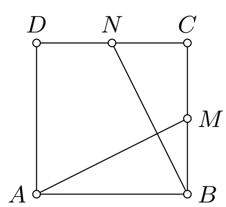
*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**

In einem Quadrat $ABCD$ ist $M$ der Mittelpunkt der Strecke $BC$ und $N$ der Mittelpunkt der Strecke $CD$.

a) Zeichnen Sie die Figur!

b) Beweisen Sie, dass die Strecke $AM$ und die Strecke $BN$ die gleiche Länge haben!




Die Dreiecke $ABM$ und $BCN$ sind zueinander kongruent, da sie beide einen rechten Winkel enthalten und jeweils zwei Seiten gleich lang sind: $AB = BC$ (Quadratseite) und $BM = CN$ (halbe Quadratseite).

Damit sind auch die beiden verbleibenden Seiten $AM$ und $BN$ gleich lang. w.z.b.w.

**Aufgabe 7.2**
Für die Bearbeitung von Werkstücken stehen zwei Drehmaschinen zur Verfügung. Die erste Maschine muss zur Bearbeitung 20 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 14 Minuten ein Werkstück aus.
Die zweite, modernere Maschine muss 200 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 2 Minuten ein Werkstück gleicher Art aus.

a) Wieviel Minuten werden bereits bei der Herstellung von 100 Werkstücken eingespart, wenn die modernere Maschine eingesetzt wird!
b) Bestimmen Sie diejenige Stückzahl, zu deren Herstellung beide Maschinen die gleiche Zeit benötigen!

a) Die erste Maschine benötigt für 100 Werkstücke eine Zeit von $t_1 = 20$ min $+ 100 \cdot 14$ min $=$ 1420 min.
Für die zweite Maschine wird $t_2 = 200$ min $+ 100 \cdot 2$ min $= 400$ min. Somit werden 1020 min eingespart.

b) Ist $x$ die gesuchte Stückzahl wird mit $t_1 = t_2$: $20 + 14x = 200 + 2x$. $x = 15$ erfüllt die Gleichung. Bei 15 Werkstücken benötigen beide Maschinen die gleiche Zeit.

**Aufgabe 7.3**
In einem Dreieck ist der größte Winkel dreimal so groß wie der kleinste und der andere Winkel zweimal so groß wie der kleinste. Die Seite, die dem größten Winkel gegenüberliegt, ist 4,8 cm lang.

a) Bestimmen Sie die Größe der Winkel! Begründen Sie Ihr Ergebnis!
b) Berechnen Sie die Länge der kleinsten Seite des Dreiecks!

a) Der kleinste Winkel sei $\epsilon$. Dann ergibt sich für die Innenwinkelsumme $180° = 3\epsilon + 2\epsilon + \epsilon = 6\epsilon$. Der kleinste Winkel ist somit $\epsilon = 30°$.

b) Der größte Winkel ist damit 90°. Mit dem Sinussatz wird für die kleinste Seite $x$

$$\frac{x}{4{,}8} = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} = 0{,}5 \qquad \rightarrow \qquad x = 2{,}4 \text{ cm}$$

## 1.13 Abschlussprüfung 1969

**Aufgabe 1**
Im Jahre des 20. Geburtstages der DDR soll die Produktion der Landwirtschaft und der Nahrungsgüterwirtschaft um 4,2 % gegenüber 1968 gesteigert werden. Das ist eine Steigerung um 1,49 Milliarden Mark.

a) Berechnen Sie die Produktion für das Jahr 1968! (in Milliarden Mark)
b) Berechnen Sie die geplante Produktion für 1969! (in Milliarden Mark)

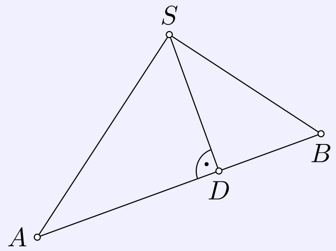
a) $\dfrac{4{,}2\%}{100\%} = \dfrac{1{,}49}{x} \qquad \rightarrow \qquad x = 35{,}47$ Milliarden Mark

b) $35{,}47 + 1{,}49 = 36{,}96$ Milliarden Mark.

**Aufgabe 2**

Das Urlauberschiff "Völkerfreundschaft" fährt auf einem Kurs, der als geradlinig angenommen werden kann. Zur Orientierung wird von den Standorten $A$ und $B$ des Schiffes das Funkfeuer $S$ angepeilt (siehe Abbildung).

Man ermittelt: den Winkel $BAS$ mit 48,4°; den Winkel $SBA$ mit 72,9° und die Strecke $AB$ mit 6,4 sm.




a) Berechnen Sie die Entfernung des Schiffes im Punkt $B$ von $S$!

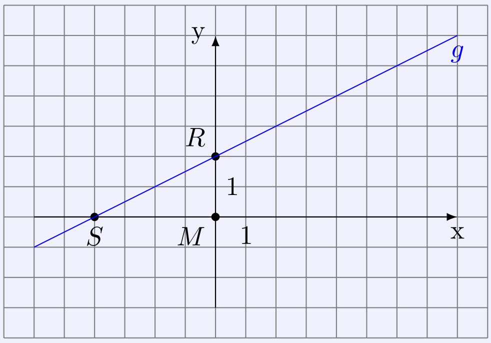
b) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung (Strecke $DS$), in der das Schiff am Funkfeuer $S$ vorbeigefahren ist!

a) Der Winkel bei $S$ im Dreiecke $SAB$ ist gleich $\gamma = 58{,}7°$.
Mit dem Sinussatz ergibt sich dann für die Strecke $BS = 5{,}6$ sm.

b) Mit dem Innenwinkel $\beta$ bei $B$ und der Hypotenuse $BS$ des rechtwinkligen Dreiecks $BSD$ wird: $\frac{DS}{BS} = \sin\beta \quad \rightarrow \quad DS = BS \cdot \sin\beta = 5{,}35$ sm.

**Aufgabe 3**

Übertragen Sie die Abbildung auf Millimeterpapier!



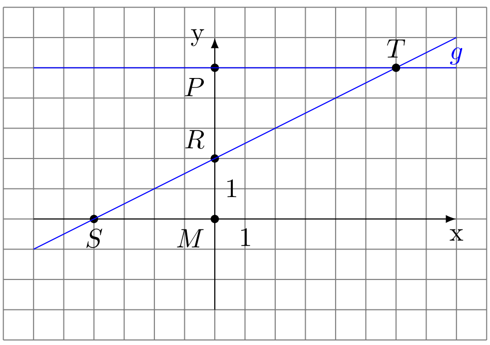

a) Geben Sie die Gleichung der linearen Funktion an, die in der Abbildung durch die Gerade $g$ graphisch dargestellt ist!

b) Zeichnen Sie durch den Punkt $P(0;5)$ die Parallele zur x-Achse! Diese Parallele schneidet die Gerade $g$ im Punkt $T$.

c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes $T$ an!

d) Beweisen Sie, dass die Dreiecke $MRS$ und $RTP$ ähnlich sind!

a) Ansatz: $y = mx + n$. Die Funktion verläuft durch den Punkt $R(0;2)$, d.h. $n = 2$.
Im Anstiegsdreieck $SMR$ ergibt sich der Anstieg $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, wodurch die gesuchte Funktion $y = \frac{1}{2}x + 2$.



c) Punkt $T(6; 5)$
d) In den Dreiecken $MRS$ und $RTP$ sind die Winkel $\angle SRM$ und $\angle TRM$ Scheitelwinkel die $R$ und somit gleich groß.
Ebenso sind die Winkel $\angle MSR$ und $\angle PTR$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke $MRS$ und $RTP$ mit zwei gleichgroßen Innenwinkeln zueinander ähnlich.

**Aufgabe 4**
Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung

$$y = x^2 - 3x - \frac{7}{4} \qquad (x \text{ reell})$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen $x_1$ und $x_2$ dieser Funktion!
b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!

a) $p = -3; q = -\frac{7}{4}$ ergibt

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = \frac{3}{2} \pm 2 \qquad ; \qquad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

b) Quadratische Ergänzung: $y = (x - 1{,}5)^2 - \frac{9}{4} - \frac{7}{4} = (x - 1{,}5)^2 - 4$
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(1{,}5; -4)$.

**Aufgabe 5**
a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich! $5\sqrt{k^2} - \sqrt{49k^2}$, $(k > 0,\ k$ reell)
b) Lösen Sie die folgende Gleichung nach $a$ auf! (Die Probe wird nicht verlangt)

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} = b \qquad (a \neq 0; b \neq 0; a,b \text{ reell})$$

c) Ermitteln Sie die Winkel $\alpha$, für die gilt: $\sin\alpha = 0{,}9011$, $0° < \alpha < 360°$!

a) $5\sqrt{k^2} - \sqrt{49k^2} = 5k - 7k = -2k$.

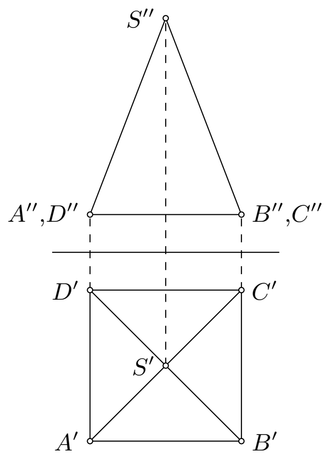
b) $\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} = \frac{5}{5a} - \frac{1}{5a} = \frac{4}{5a} = b \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{4}{5b}$

c) im Intervall $0° < \alpha < 360°$ gibt es zwei Lösungen $\alpha_1 = 64{,}3°$ und $\alpha_2 = 115{,}7°$.

**Aufgabe 6**
Eine gerade quadratische Pyramide hat eine Grundkante von 56 mm Länge und eine Körperhöhe von 72 mm Länge.

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in Kubikzentimetern!
b) Stellen Sie die Pyramide im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rissachse!
c) Ermitteln Sie die wahre Länge einer Seitenkante entweder durch Konstruktion oder durch Rechnung, und geben Sie diese in Millimetern an!

a) $V = \frac{1}{3}56^2 \cdot 72 = 75260 \text{ mm}^3 = 75{,}260 \text{ cm}^3$




Die Seitenkante $s$, die Höhe $h$ der Pyramide und die halbe Diagonale $d$ der Grundfläche bilden ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt: $s^2 = h^2 + \frac{1}{4}d^2$.
Mit $d = \sqrt{2}a$ ($a$ ... Grundkante) ergibt sich

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}d^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}2a^2} = 82{,}2 \text{ mm}$$

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
Eine Kugel mit dem Radius $r$ wird von einer Ebene geschnitten. Diese Ebene hat den Abstand $a$ vom Mittelpunkt $M$ der Kugel.

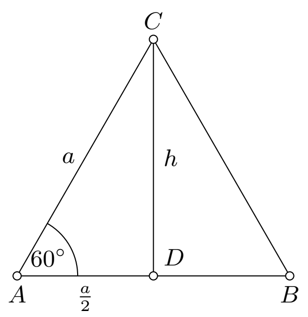
a) Berechnen Sie für $r = 5{,}0$ cm und $a = 3{,}0$ cm das Volumen des kleineren Kugelabschnittes, der durch den Schnitt entsteht! Benutzen Sie die Formelsammlung der Zahlentafel!
b) Geben Sie den Radius $r_1$, der Schnittfläche an!
c) Ermitteln Sie den Inhalt der Schnittfläche!

a) Formelsammlung: $V = \frac{\pi}{3}(r-a)^2(3r-(r-a))$ ergibt $V \approx 54{,}5$ cm$^2$.

b) Radius $r$, Abstand $a$ und Schnittkreisradius $r_1^2$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit $r^2 = a^2 + r_1^2$, d.h. $r_1 = \sqrt{r^2 - a^2} = 4{,}0$ cm.

c) Die Schnittfläche hat den Flächeninhalt $A = \pi r_1^2 = 16\pi = 50{,}3$ cm$^2$.

**Aufgabe 7.2**
a) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit beliebiger Seitenlänge $a$, und zeichnen Sie eine Höhe $h$ ein!
b) Leiten Sie die Gleichung $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ohne Benutzung trigonometrischer Beziehungen her!
c) Leiten Sie die Beziehung $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ her!




b) Im rechtwinkligen Dreieck $ADC$ gilt $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Umgestellt wird $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
c) In diesem rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus von $\alpha$ gleich dem Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse, d.h.

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

**Aufgabe 7.3**
Gegeben ist die Gleichung $x^2 - ax + c = 0$. ($a$, $c$, $x$ reell)

a) Geben Sie für diese Gleichung die Diskriminante an!

b) Geben Sie die Anzahl aller reellen Lösungen der Gleichung für folgende zwei Fälle an!

$$(1) \quad a = 0 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{5} \qquad (2) \quad c = \frac{a^2}{4}$$

Begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe der Diskriminante!

a) Die Diskriminante $D$ ist gleich

$$D = \left(\frac{-p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-(-a)}{2}\right)^2 - c = \frac{a^2}{4} - c$$

b) Für $a = 0$ und $c = \frac{1}{5}$ wird $D = -\frac{1}{5} < 0$, d.h. die Gleichung hat keine Lösung.
Für $c = \frac{a^2}{4}$ wird $D = 0$. Damit hat die Gleichung hat genau eine Lösung: $x = \frac{a}{2}$.

## 1.14 Abschlussprüfung 1970

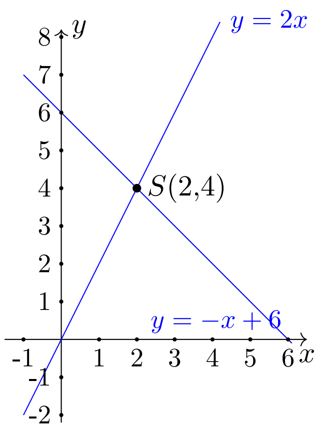
**Aufgabe 1**
Zwei Klassen planen eine Ferienwanderung. Für gute Leistungen im polytechnischen Unterricht erhalten sie dazu von ihrem Patenbetrieb 360 M.
Dieser Betrag soll entsprechend der Schüleranzahl auf beide Klassen aufgeteilt werden. In der einen Klasse sind 26, in der anderen 22 Schüler.

a) Berechnen Sie den Teilbetrag, den jede Klasse erhält!
b) Wieviel Prozent der Gesamtsumme erhält die Klasse mit 26 Schülern?

a) Je Schüler werden $\frac{360}{22+26} = 7{,}50$ M übergeben. Damit erhält die eine Klasse 195 M, die andere 165 M.
b) Die Klasse mit den 26 Schülern erhält $\frac{26}{48} \cdot 100\% = 54{,}4\%$.

**Aufgabe 2**
Gegeben sind zwei Funktionen mit den Gleichungen $y = 2x$ und $y = -x + 6$ ($x$ reell).

a) Die Graphen dieser Funktion sind Geraden. Zeichnen Sie die zwei Geraden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem! (Koordinateneinheit: 1 cm)
b) Die beiden Geraden schneiden die x-Achse in den Punkten $P$ und $Q$. Geben Sie die Koordinaten der Punkte $P$ und $Q$ an!
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ der beiden Geraden!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $PQS$ (in Quadratzentimetern)!

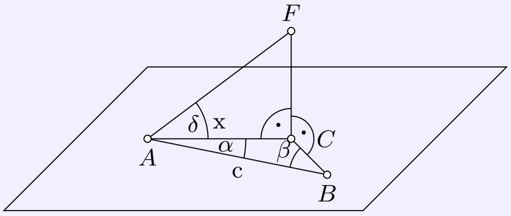



b) $P(0; 0)$ und $Q(6; 0)$

c) Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen ergibt $2x = -x + 6$ mit der Lösung $x = 2$ und somit $y = 6$. Der Schnittpunkt beider Funktionen ist $S(2; 4)$.

d) Die Grundlinie des Dreiecks $PQS$ ist $PQ = 6$ Einheiten. Der Abstand von $S$ über der Grundlinie ergibt die Dreieckshöhe $h = 4$ Einheiten.
Der Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2} PQ \cdot h = 12$ Flächeneinheiten.

**Aufgabe 3**



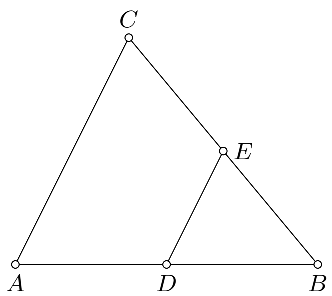

Ein Segelflugzeug soll einen Punkt $C$ der Erdoberfläche in vorgeschriebener Höhe überfliegen. Zur Kontrolle nimmt man an zwei Punkten $A$ und $B$ (in gleicher Höhe wie $C$) Messungen vor.

a) Man ermittelt (siehe Abbildung):
$AB = c = 210$ m; Winkel $CAB = \alpha = 68°$; Winkel $CBA = \beta = 74°$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $AC$!

b) Während sich das Flugzeug senkrecht über $C$ befindet, misst man in $A$ den Erhebungswinkel $\delta = 37°$. Berechnen Sie die Höhe $CF$ des Flugzeuges!

a) Der Innenwinkel bei $C$ im Dreiecke $ABC$ ist $\gamma = 38°$. Mittel Sinussatz wird damit $AC = x = 328$ m.
b) Im rechtwinkligen Dreieck $ACF$ ist $\tan\delta = \frac{FC}{AC}$, d.h. $FC = AC \cdot \tan\delta = 247$ m.

**Aufgabe 4**
a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck $ABC$!
Legen Sie auf $AB$ zwischen den Punkten $A$ und $B$ einen Punkt $D$ fest! Zeichnen Sie durch $D$ die Parallele zu $AC$; den Schnittpunkt mit $BC$ nennen Sie $E$!
Beweisen Sie, dass die Dreiecke $ABC$ und $DBE$ einander ähnlich sind!
b) Gegeben ist eine 10 cm lange Strecke $RS$.
Teilen Sie $RS$ durch Konstruktion im Verhältnis 5 : 2! Der Teilpunkt $T$ soll zwischen $R$ und $S$ liegen.

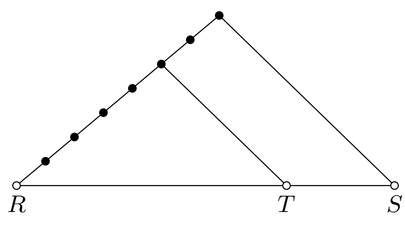



a) Da $DE \parallel AC$ nach Konstruktion ist, liegt eine Strahlensatzfigur mit dem Zentrum bei $B$ vor. Damit gilt

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} \qquad \rightarrow \qquad \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE}$$

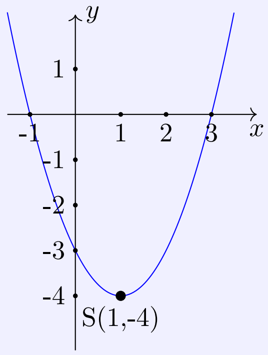
Damit ist ein Seitenverhältnis in den Dreiecken $ABC$ und $BDE$ gleich. Da zusätzlich der eingeschlossene Winkel $\beta$ zu beiden Dreiecken gehört, sind die Dreiecke $ABC$ und $BDE$ zueinander ähnlich.

b) An den Punkt $R$ wird ein weitere Stahl gezeichnet. Auf diesem werden sieben gleich lange Strecken nacheinander abgetragen.
Der letzte (in der Abbildung schwarze) Punkt wird mit $S$ verbunden. Durch Parallelverschiebung dieser Strecke durch den 5. Punkt erhält man als Schnittpunkt mit $RS$ den gesuchten Punkt $T$.
Nach dem Strahlensatz teilt $T$ dann $RS$ im Verhältnis 5:2.




**Aufgabe 5**
a) Eine Quadratische Funktion habe eine Gleichung der Form $y = (x + d)^2 + e$. ($x$ reell)
Geben Sie für den Fall $d = 0$ und $e = 3$ die Scheitelpunktskoordinaten des Graphen der Funktion an!

b) Die in der Abbildung dargestellte Parabel sei der Graph einer weiteren quadratischen Funktion mit einer Gleichung von der Form $y = (x + d)^2 + e$. ($x$ reell)
(1) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme der nebenstehenden Abbildung die Nullstellen $x_1$ und $x_2$ dieser Funktion!
(2) Geben Sie die Gleichung dieser speziellen quadratischen Funktion in der Form $y = (x + d)^2 + e$ an!
(3) Überführen Sie nunmehr diese Gleichung der Funktion in eine Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$, und bestimmen Sie hieraus $p$ und $q$!




a) Die Funktion $y = x^2 + 3$ hat den Scheitelpunkt $S(0; 3)$.

b) (1) Die Nullstellen sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.
(2) Die abgebildete Funktion hat den Scheitelpunkt $S(1; -4)$ und somit die Funktionsgleichung $y = (x - 1)^2 - 4$.
(3) Ausmultiplizieren ergibt $y = x^2 - 2x - 3$, womit $p = -2$ und $q = -3$ gilt.

**Aufgabe 6**
a) Ermitteln Sie $\cos 120°$!
Bestimmen Sie $x$ in $x = \log_5 125$!
Geben Sie $7 \cdot 10^{-3}$ als Dezimalbruch an!

b) Lösen Sie die folgende Gleichung nach $r$ auf! $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $(r > 0)$

c) Vereinfachen Sie die folgende Summe so weit wie möglich!

$$3m(m + 0{,}6n - 4n) + (m - 5n)^2$$

a) $\cos 120° = -0{,}5$; $x = 3$ und $7 \cdot 10^{-3} = 0{,}003$.

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \to \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

c) $3m(m + 0{,}6n - 4n) + (m - 5n)^2 = 4m^2 - 20{,}2mn + 25n^2$

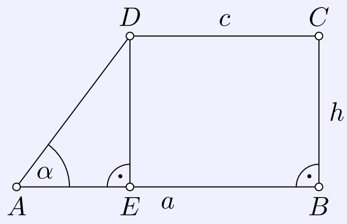
*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
In einem Chemiebetrieb stehen zylindrische Behälter mit 1,20 m Durchmesser und 2,00 m Höhe (Innenmaße).
Überprüfen Sie, ob ein solcher Behälter 3000 kg Natronlauge der Dichte 1,25 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ fassen kann! (Begründen Sie Ihre Entscheidung!)

Der zylindrische Behälter hat das Volumen $V = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h = 2{,}26\ \text{m}^3$.
Eine Dichte von 1,25 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ entspricht der Dichte 1250 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, so dass die Natronlauge ein Volumen von 2,4 $\text{m}^3$ hat.
Damit ist der zylindrische Behälter zu klein.

**Aufgabe 7.2**

Für den Flächeninhalt $A_T$ des in der Abbildung dargestellten Trapezes $ABCD$ gilt:




$$A_T = \frac{a^2 - c^2}{2} \cdot \tan\alpha$$

a) Berechnen Sie $A_T$ für $a = 6{,}3$ cm; $c = 5{,}5$ cm; $\alpha = 75{,}3°$!
b) Drücken Sie $h$ durch die Variablen $a$, $c$ und $\alpha$ aus (siehe Abbildung)!
c) Leiten Sie die Gleichung $A_T = \frac{a^2 - c^2}{2} \cdot \tan\alpha$ her, indem Sie von $A_T = \frac{a+c}{2}h$ ausgehen und das in b) ermittelte Ergebnis nutzen!

a) $A_T = 17{,}99 \approx 18$ cm$^3$.
b) Im rechtwinkligen Dreieck $AED$ ist $DE = h$ und $AE = a - c$. Für den Innenwinkel $\alpha$ gilt $\tan\alpha = \frac{DE}{AE}$ und somit

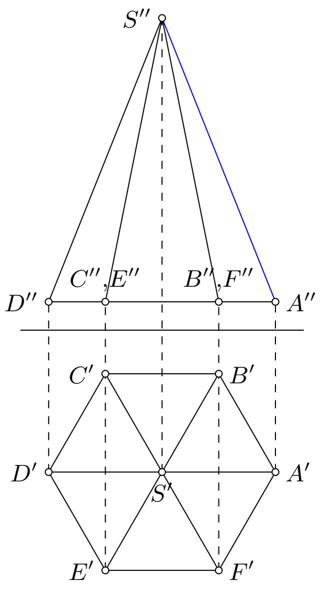
$$\tan\alpha = \frac{h}{c-a} \qquad \rightarrow \qquad h = (a-c)\tan\alpha \qquad ((*))$$

c) Setzt man in $A_T = \frac{a+c}{2}h$ die bei b) gefundene Gleichung (*) ein, wird

$$A_T = \frac{a+c}{2}h = \frac{a+c}{2}(a-c)\tan\alpha = \frac{a^2-c^2}{2} \cdot \tan\alpha$$

**Aufgabe 7.3.**
Eine gerade Pyramide mit der Spitze $S$ hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit einer Seitenlänge von 25 mm; die Körperhöhe beträgt 60 mm.

a) Stellen Sie den Körper im Grund-Aufriss-Verfahren dar! Benennen Sie die Bilder aller Eckpunkte der Pyramide!
b) Ermitteln Sie unter Verwendung Ihrer Zeichnung die wahre Länge einer Seitenkante, und kennzeichnen Sie diese Strecke farbig!
c) Berechnen Sie außerdem die wahre Länge dieser Seitenkante!




b) Auf Grund der Lage der Pyramide im Grundriss wird die Seitenkante $AS$ im Aufriss in der wahren Länge dargestellt.

c) Da die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist, ist die Strecke $A'S' = a = 25$ mm. Gemeinsam mit der Höhe $h$ bildet sie ein rechtwinkliges Dreieck dessen Hypotenuse $AS$ ist, d.h.

$$AS = \sqrt{h^2 + A'S'^2} = \sqrt{60^2 + 25^2} = 65 \text{ mm}$$

## 1.15 Abschlussprüfung 1971

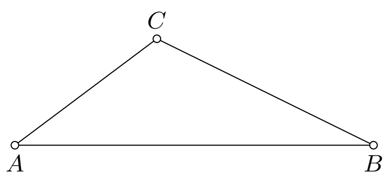
**Aufgabe 1**
Die Vietnamspende der Schüler der Ho-Chi-Minh-Oberschule in Berlin hatte bis zum Tage der Namensverleihung eine Höhe von 14800 M erreicht. Davon wurden 4200 M durch Altstoffsammlungen erbracht.
Der größere Teilbetrag stammte aus persönlichen Spenden der Schüler sowie aus Spenden der Lehrer, der Eltern, der Patenbrigade usw.

a) Wieviel Prozent der Gesamtsumme stellt der größere Teilbetrag dar?
b) Durch den Erlös eines Vietnam-Basars konnte später der Betrag von 14800 M noch um 6,5 % erhöht werden.
Wie hoch waren die zusätzlichen Einnahmen aus dem Vietnam- Basar?

a) Der größere Beitrag entspricht 10600 M. Das sind $\frac{10600}{14800} \cdot 100\% = 71{,}6\%$.

b) 6,5 % von 14800 M sind 962 M. Die zusätzlichen Einnahmen sind 962 M.

**Aufgabe 2**
Von einem Dreieck $ABC$ sind gegeben: $AB = c = 95$ mm; $BC = a = 64$ mm; $AC = b = 47$ mm.
a) Konstruieren Sie das Dreieck $ABC$!
b) Berechnen Sie den größten Winkel dieses Dreiecks!




b) Der größte Winkel liegt der größten Seite gegenüber. Mit dem Kosinussatz wird $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$\rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \quad \rightarrow \quad \gamma = 116{,}9°$$

**Aufgabe 3**
Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{1}{2}x$; ($x$ reell).

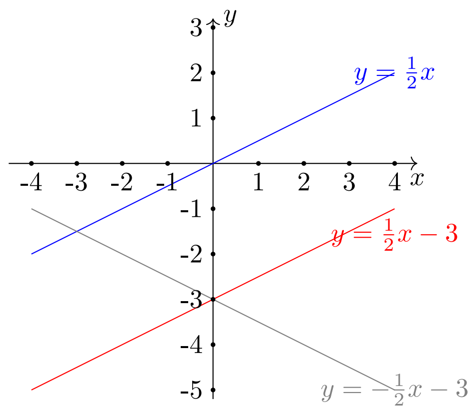
a) Berechnen Sie für diese Funktion die zu den angegebenen x-Werten gehörenden y-Werte! (Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)

| $x$ | -4 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ | | | |

b) Zeichnen Sie den Graph $g_1$ dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
c) Zeichnen Sie die Gerade $g_2$, die parallel zu $g_1$ verläuft und durch den Punkt $P_1(0;-3)$ geht! Geben Sie die Gleichung der durch $g_2$ dargestellten Funktion an!
d) Spiegeln Sie die Gerade $g_2$ an der y-Achse, und zeichnen Sie das Spiegelbild!

a)

| $x$ | -4 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |




c) $y = \frac{1}{2}x - 3$
d) $y = -\frac{1}{2}x - 3$

**Aufgabe 4**
Zur optimalen Auslastung des Transportraumes bei der Beförderung von Speisekartoffeln werden durch die Deutsche Reichsbahn Zielzüge eingesetzt. In einem solchen Zug laufen zwei Wagentypen mit einer Ladefähigkeit von 20 t bzw. 24 t Speisekartoffeln.
Der Zug besteht aus 33 Waggons. Er befördert insgesamt 720 t Speisekartoffeln.

Berechnen Sie, wieviel Waggons des jeweiligen Typs in diesem Zielzug eingesetzt sind!

$x$ sei die Anzahl der 20 t-Waggons, $y$ der 24 t-Waggons. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 33 \qquad ; \qquad 20x + 24y = 720$$

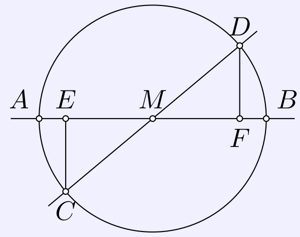
Stellt man die erste Gleichung nach $y$ um und setzt diese in die zweite Gleichung ein, wird

$$20x + 24(33 - x) = -4x + 792 = 720 \quad \to \quad 72 = 4x \quad \to \quad x = 18$$

Für $y$ folgt damit $y = 15$. Es wurden 18 Waggons mit einer Ladefähigkeit von 20 t und 15 mit 24 t eingesetzt.

**Aufgabe 5**

Durch den Mittelpunkt $M$ eines Kreises verlaufen zwei Geraden, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Sie schneiden den Kreis in den Punkten $A$ und $B$ bzw. $C$ und $D$.
Von $C$ und $D$ sind die Lote auf die durch $A$ und $B$ verlaufende Gerade gefällt. Die Fußpunkte der Lote seien $E$ und $F$ (siehe Abbildung).




a) Beweisen Sie, dass die Dreiecke $MEC$ und $MFD$ kongruent sind! (Benutzen Sie dabei einen der Kongruenzsätze!)
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $ME$ für $MC = 13$ cm und $CE = 5$ cm!

a) Die Dreiecke $MEC$ und $MFD$ haben den Scheitelwinkel bei $M$ gemeinsam. In beiden Dreiecken tritt an den Lotfußpunkten ein rechter Winkel auf. Weiterhin ist $MD = MC = r$.
Nach dem Kongruenzsatz WWS sind beide Dreiecke zueinander kongruent, da die identischen rechten Winkel der jeweils größten Seite gegenüberliegen.

b) Im rechtwinkligen Dreieck $MEC$ wird

$$ME^2 = MC^2 - EC^2 \qquad \to \qquad ME = \sqrt{MC^2 - EC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

**Aufgabe 6**
a) Ermitteln Sie für einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 21{,}2$ cm den Umfang und den Flächeninhalt!

b) Formen Sie die folgende Gleichung nach $a$ um! $A = \dfrac{(a + c) \cdot h}{2}$.

c) Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 4x + q = 0$.
Ermitteln Sie die Lösungen dieser Gleichung für $q = 3$!
Geben Sie für $q$ eine solche Zahl an, dass die Gleichung eine Doppellösung (zweifache reelle Lösung) hat!

a) Umfang $u = \pi d = 66{,}6$ cm; Flächeninhalt $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 353$ cm$^3$.

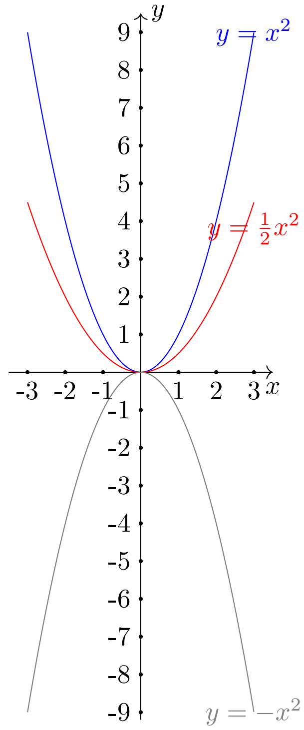
b) $A = \dfrac{(a+c)\cdot h}{2} \quad \to \quad a = \dfrac{2A}{h} - c$

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$ ergibt $p = 4$, $q = 4$ und die Lösungen $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3}$, d.h. $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$.
Eine Doppellösung tritt auf, wenn die Diskriminante gleich 0 ist, d.h. für $q = 4$.

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Koordinateneinheit 1 cm) die Graphen der Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2$ (x reell) für
(1) $a = 1$; (2) $a = \frac{1}{2}$; (3) $a = -1$;
mindestens im Intervall $-3 < x < 3$.

b) Geben Sie den Wertebereich von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2$ $(a < 0)$ an, wenn der Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen ist!



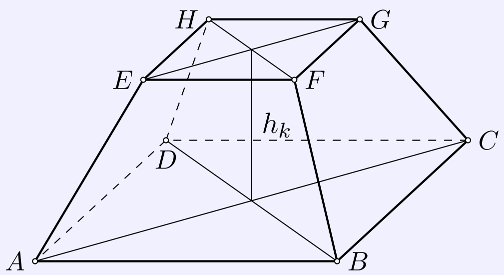

b) Wertebereich $y \in \mathbb{R}; y \leq 0$

**Aufgabe 7.2**
Gegeben ist eine natürliche Zahl $n$ $(n \neq 0)$.

a) Schreiben Sie in allgemeiner Form die der Zahl $n$ unmittelbar vorangehende natürliche Zahl (Vorgänger) und die unmittelbar folgende natürliche Zahl (Nachfolger) auf!
b) In einem speziellen Fall sei das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von $n$ die Zahl 323. Berechnen Sie $n$ mit Hilfe einer Gleichung!
c) Geben Sie eine natürliche Zahl zwischen 400 und 500 an, die sich, ebenfalls als Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen lässt!

a) Vorgänger $n - 1$; Nachfolger $n + 1$
b) Gleichung $(n-1)(n+1) = 323$ ergibt $n^2 - 1 = 323$, d.h. $n^2 = 324$ und somit $n = 18$.
c) z.B. $21 \cdot 23 = 483$

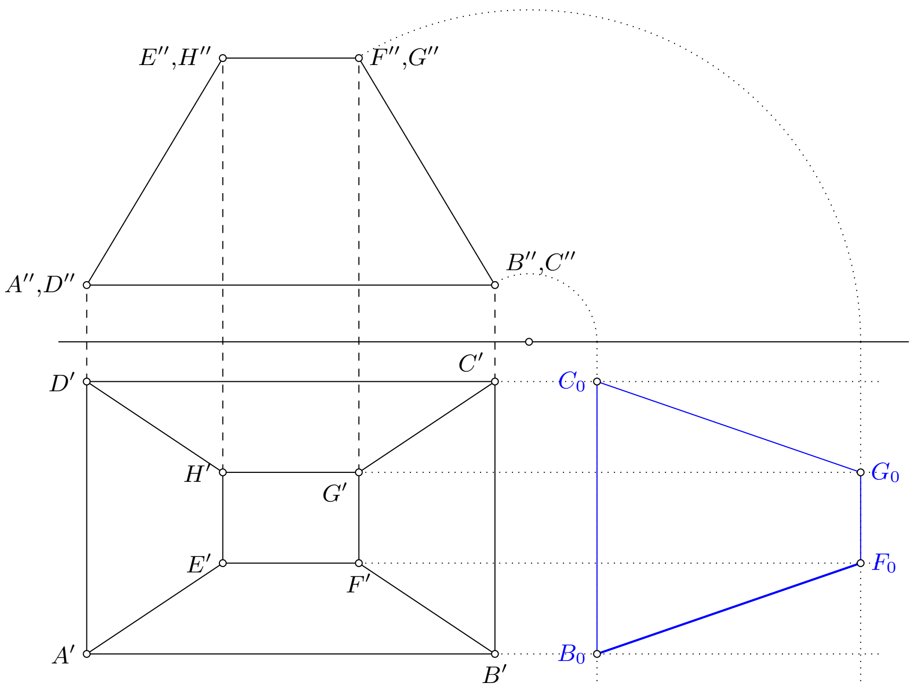
**Aufgabe 7.3**




Die Abbildung zeigt das Schrägbild eines geraden Pyramidenstumpfes mit rechteckiger Grund- und Deckfläche.

$AB = CD = 72$ mm; $BC = AD = 48$ mm;
$EF = GH = 24$ mm; $FG = EH = 16$ mm;
$h_k = 40$ mm

a) Stellen Sie diesen Pyramidenstumpf im Grund-Aufriss-Verfahren unter Verwendung der angegebenen Originalmaße dar! Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rissachse!
b) Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!
c) Konstruieren Sie eine der Seitenflächen des Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und kennzeichnen Sie die wahre Länge einer Seitenkante des Pyramidenstumpfes!




## 1.16 Abschlussprüfung 1972

**Aufgabe 1**
Gesucht sind zwei Zahlen. Ihre Summe ist 4. Wird das Dreifache der einen Zahl um das Doppelte der anderen Zahl vermindert, so erhält man 52.
Berechnen Sie die beiden Zahlen! Führen Sie eine Probe durch!

Die zwei Zahlen seien $x$ und $y$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 4 \qquad ; \qquad 3x - 2y = 52$$

Einsetzen der umgestellten ersten Gleichung ergibt $3x - 2(4 - x) = 5x - 8 = 52$ mit der Lösung $x = 12$ und $y = -8$. Die Zahlen sind -8 und 12.

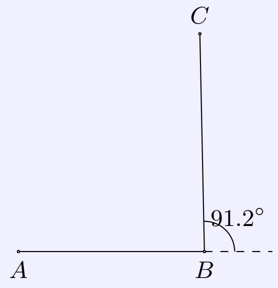
**Aufgabe 2**
Die Großküche eines Kraftwerkes gab täglich 600 Gerichte mit Kartoffeln aus, wobei für jedes Gericht 250 g Kartoffeln benötigt wurden.

a) Wieviel Tonnen Kartoffeln mussten eingelagert werden, wenn der Vorrat für genau 30 Tage reichen sollte?
b) Entsprechend den Beschlüssen des VIII. Parteitages der SED werden zur besseren Versorgung der Werktätigen in der Nachtschicht täglich 150 Portionen bereitgestellt.
Für wieviel Tage würde der gleiche Vorrat nun reichen?

a) $600 \cdot 250 \cdot 30 = 4500000$ g $= 4500$ kg $= 4{,}5$ t Kartoffeln.
b) $4500000 : ((600 + 150) \cdot 250) = 24$. Der Vorrate reicht dann 24 Tage.

**Aufgabe 3**

Am 17. November 1970 landete die sowjetische Station Luna 17 auf dem Mond und setzte das erste automatische Mondfährzeug "Lunochod 1" auf dem Erdtrabanten ab.
Das sowjetische Mondmobil fuhr zuerst von der Landestelle $A$ nach einem Punkt $B$ und legte dabei 82 m zurück. In $B$ drehte es um 91,2° und fuhr 96 m bis zum Haltepunkt $C$. Die Wege sind als geradlinig anzunehmen (siehe Abbildung).
Berechnen Sie die Entfernung des Mondmobils von seiner Landestelle (Strecke $AC$)!



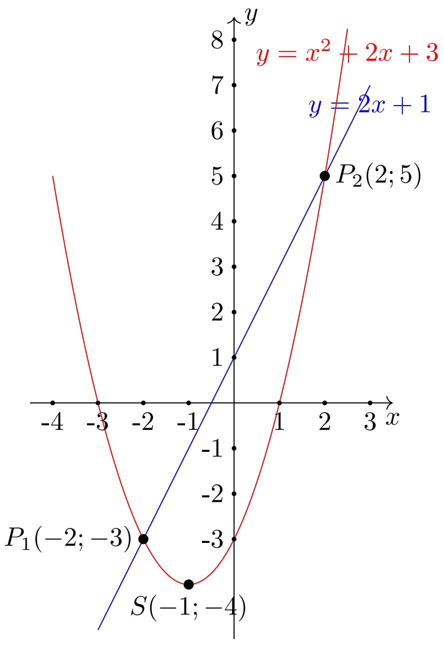

Der Winkel $\angle ABC$ ist als Nebenwinkel 88,8° groß. Mit dem Kosinussatz wird dann

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 88{,}8°} = 124{,}9 \text{ m}$$

**Aufgabe 4**
Gegeben sind zwei Funktionen $f_1$ und $f_2$mit den Gleichungen

$$(1) \quad f_1(x) = y = 2x + 1; \qquad (2) \quad f_2(x) = y = x^2 + 2x–3 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f_1$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion $f_1$!
c) Der Graph der Funktion $f_2$ ist eine Parabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f_2$!
e) Die Graphen der Funktionen $f_1$ und $f_2$ schneiden sich in den Punkten $P_1$ und $P_2$. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!




b) $2x + 1 = 0$ ergibt die Nullstellen $x_0 = -\frac{1}{2}$.

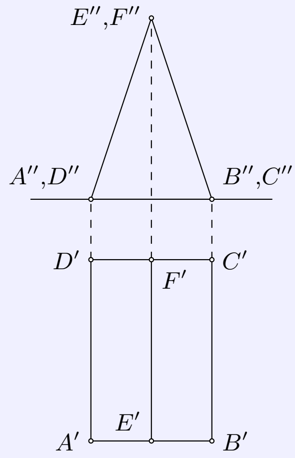
c) Scheitelpunktsform mit quadratischer Ergänzung
$y = (x + 1)^2 - 4$ und somit als Scheitelpunkt $S(-1; -4)$.

d) $p = 2$ und $q = -3$, d.h. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$ und somit $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

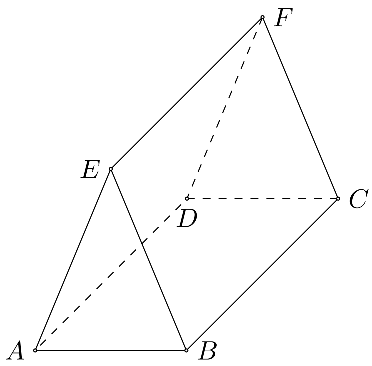
e) $P_1(-2; -3)$, $P_2(2; 5)$

**Aufgabe 5**

Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma im Grund- und Aufriss. Die Maße des Prismas sind: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AE = BE = s = 6{,}5$ cm, $BC = l = 14{,}0$ cm




a) Stellen Sie diesen Körper in Kavalierperspektive, d.h. in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}$ dar!
b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas!




a) Mit $AE = 6{,}5$ cm und $AB = 5$ cm ist der Abstand des Punktes $E$ von der Grundkante $AB$ gleich 6 cm.

b) Die Oberfläche setzt sich aus der Grundfläche $ABCD$, mit $5 \cdot 14 = 70$ cm$^2$, zwei kongruenten Seitenflächen $BCEF$ und $ADFE$, mit $6{,}5 \cdot 14 = 91$ cm$^2$ und zwei gleichschenkligen Dreiecken $ABE$ und $CDF$ mit der Grundkante 5 cm und der Höhe 6 cm, d.h. $A = 15$ cm$^2$ zusammen.
Insgesamt ist das ein Oberflächeninhalt von 352 cm$^2$.

**Aufgabe 6**
a) Berechnen Sie 12,5 % von 528 ha!

b) Ermitteln Sie alle Winkel $x$ im Intervall $0° < x < 360°$, für die gilt: $\sin x = 0{,}6600$!

c) Das Produkt aus der Differenz zweier verschiedener Zahlen und einer dritten Zahl sei gleich $x$. Geben Sie diesen mathematischen Sachverhalt in Form einer Gleichung mit Hilfe von Variablen an!

d) Formen Sie die Gleichung für das Volumen des Kegels $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ nach der Variablen $r$ um!

a) $0{,}125 * 528 = 66$ ha
b) $\alpha_1 = 41{,}3°$ und $\alpha_2 = 138{,}7°$.
c) Die drei Zahlen seien $a$, $b$, $c$. Dann ist $x = (a - b) \cdot c$.
d) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \rightarrow \qquad r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
Beweisen Sie folgende Aussagen!

a) Die Summe von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar.

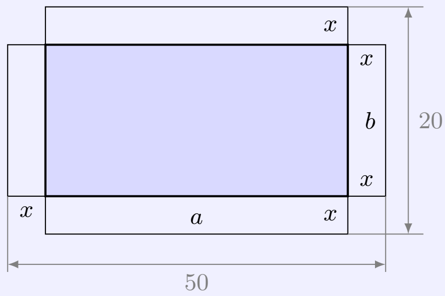
b) Wenn die kleinste von fünf beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, dann ist deren Summe auch durch 2 teilbar.

a) Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen seien $a$, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$.
Aus ihrer Summe $a+a+1+a+2+a+3+a+4 = 5a+10 = 5(a+2)$ kann eine 5 ausgeklammert werden. Damit ist die Summe durch 5 teilbar.

b) Eine gerade natürliche Zahl kann als $2a$ ($a \in \mathbb{N}$) dargestellt werden. Die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen sind nun $2a$, $2a+1$, $2a+2$, $2a+3$, $2a+4$.
Aus ihrer Summe $2a+2a+1+2a+2+2a+3+2a+4 = 10a+10 = 2(5a+5)$ kann eine 2 ausgeklammert werden. Damit ist die Summe durch 2 teilbar.

**Aufgabe 7.2**

Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen 50 cm und 20 cm soll ein oben offener quaderförmiger Kasten entstehen.
Dazu schneidet man an den vier Ecken Quadrate mit der Seitenlänge $x$ cm heraus (siehe Abbildung). Das schraffierte Rechteck mit den Seitenlängen $a$ cm und $b$ cm ist die Grundfläche des Kastens.




a) Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche für $x = 1{,}5$!
b) Wie groß muss $x$ sein, damit der Inhalt der Grundfläche 400 cm$^2$ beträgt? Geben Sie für diesen Fall $a$ und $b$ an!

a) $A = (50-3)\cdot(20-3) = 799\text{cm}^2$.

b) Es soll $A = 400 = (50-2x)(20-2x)$ gelten, d.h. $4x^2 - 140x + 1000 = 400$.
Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 30$, wobei die zweite Lösung entfällt, da mehr Material herausgeschnitten würde als existiert. $x$ muss 5 cm groß sein.

**Aufgabe 7.3**

Gegeben ist die lineare Ungleichung $\dfrac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$.

a) Lösen Sie diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!
b) Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an!
(1) Die Lösungsmenge $L_1$ obiger Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
(2) die Lösungsmenge $L_2$ obiger Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4 < x < 1$;
(3) die Menge $M$ aller Elemente, die sowohl in $L_1$ als auch in $L_2$ vorkommen.

a) $\dfrac{8(2x+1)}{5} < 3x+2 \quad\rightarrow\quad 16x+8 < 15x+10 \quad\rightarrow\quad x < 2$

b) (1) $L_1 = \{x|0, 1\}$
(2) $L_2 = \{x| -3, -2, -1, 0\}$
(3) $M = \{x|0\}$

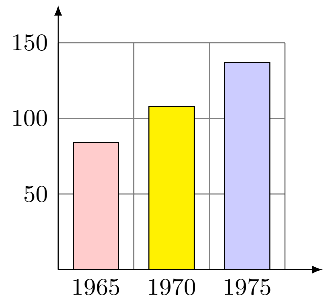
## 1.17 Abschlussprüfung 1973

**Aufgabe 1**
Die folgende Tabelle zeigt den erreichten bzw. den geplanten Stand des Nationaleinkommens der DDR in den Jahren 1965, 1970 und 1975.

| | in Mrd. Mark | in Prozent |
|---|---|---|
| 1965 | | 100 |
| 1970 | 108 | 129 |
| 1975 | 137 | |

a) Ermitteln Sie das Nationaleinkommen des Jahres 1965 (in Mrd. Mark)!
b) Ermitteln Sie, auf wieviel Prozent das Nationaleinkommen im Jahre 1975 steigen wird (bezogen auf 1965)!
c) Stellen Sie die Prozentsätze in einem Streifendiagramm dar (1 % entspricht 1 mm)!

| | in Mrd. Mark | in Prozent |
|---|---|---|
| 1965 | **84** | 100 |
| 1970 | 108 | 129 |
| 1975 | 137 | **164** |

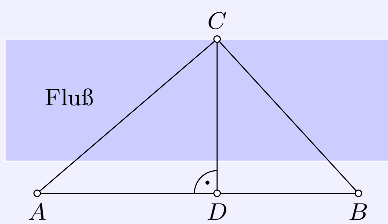



**Aufgabe 2**
Gegeben ist die Ungleichung $7(3x-2) < 3x+22$ $(x \in \mathbb{R})$
a) Lösen Sie diese Ungleichung! (Probe wird nicht verlangt.)
b) Geben Sie die Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

a) $7(3x-2) < 3x+22 \quad \rightarrow \quad 21x-14 < 3x+22 \quad \rightarrow \quad 18x < 36 \quad \rightarrow \quad x < 2$

b) $L = \{x|0,1\}$

**Aufgabe 3**
Während der Hans-Beimler-Wettkämpfe erhält eine Gruppe den Auftrag, die Breite eines Flusses zu ermitteln. Dazu steckt sie eine Strecke $AB$ ab, die im Abstand von 5,0 m parallel zum Ufer verläuft.
Von den Punkten $A$ und $B$ aus peilt die Gruppe einen unmittelbar am anderen Ufer liegenden Orientierungspunkt $C$ an (siehe Abbildung).




Es werden folgende Werte ermittelt: $AB = 45{,}0$ m; Winkel $BAC = 42{,}5°$; Winkel $ABC = 67{,}3°$

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $BC$!
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $CD$!
c) Berechnen Sie die Breite des Flusses! (Runden Sie das Ergebnis auf volle Meter!)

a) Der Winkel bei $C$ hat die Größe 70,2°. Mit dem Sinussatz wird dann $BC = 32{,}3$ m.

b) $CD$ ist eine Kathete im rechtwinkligen Dreieck $BCD$. Mit dem Winkel bei $B$ und das Hypotenuse $BC$ wird $CD = \sin 67{,}3° \cdot BC = 29{,}8$ m.

c) Die Breite des Flusses ist dann 24,8 m.

**Aufgabe 4**
Die Differenz zweier natürlicher Zahlen beträgt 6. Das Produkt dieser beiden Zahlen beträgt 216.
Ermitteln Sie diese beiden natürlichen Zahlen!

Die zwei natürlichen Zahlen seien $a$ und $b$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

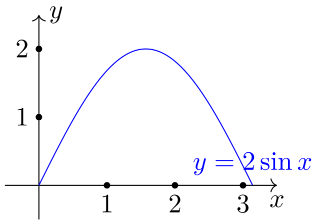
$$a - b = 6 \qquad ; \qquad a \cdot b = 216$$

Umstellen der ersten Gleichung und Einsetzen in die zweite ergibt $(6+b)b = 6b + b^2 = 216$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1 = 12$ und $b_2 = -18$. $b_2$ entfällt, da es keine natürliche Zahl ist. Für $b = 12$ folgt $a = 18$.
Die gesuchten Zahlen sind 12 und 18.

**Aufgabe 5**
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreisringes mit den Durchmessern $d_1 = 4{,}5$ cm und $d_2 = 3{,}8$ cm!
b) Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y = x^3$; $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für diese Funktion die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte! (Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)

| $x$ | 2 | 3 | -1 | |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | 125 |

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion mit der Gleichung $y = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $0 < x < \pi$!
Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an!
d) Geben Sie den Wert für die Variable $a$ an, für den der Term $\dfrac{5}{6-3a}$ nicht definiert ist! (Antwortsatz!)




a) $A = \frac{\pi}{4}d_1^2 - \frac{\pi}{4}d_2^2 = 4{,}56\ \text{cm}^2$

b)

| $x$ | 2 | 3 | -1 | **5** |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | **8** | **27** | **-1** | 125 |

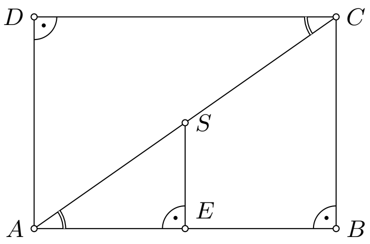
c) siehe Abbildung, Wertebereich $y \in \mathbb{R}; -2 \leq y \leq 2$

d) Der Zähler wird für $a = 2$ gleich Null, d.h. der Term ist für $a = 2$ nicht definiert.

**Aufgabe 6**
Gegeben ist ein Dreieck $ABC$ mit folgenden Stücken:
$AB = c = 5{,}0$ cm; $BC = a = 3{,}5$ cm; Winkel $ABC = \alpha = 90°$.

a) Konstruieren Sie dieses Dreieck!
b) Zeichnen Sie durch die Eckpunkte $A$ und $C$ die Parallelen zu den Gegenseiten! Ihr Schnittpunkt sei $D$. Es entsteht das Rechteck $ABCD$.
Fällen Sie vom Mittelpunkt $S$ der Strecke $AC$ das Lot auf $AB$! Sein Fußpunkt sei $E$.

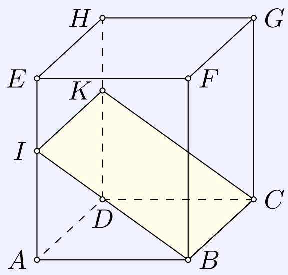
c) Beweisen Sie, dass das Dreieck $AES$ dem Dreieck $ACD$ ähnlich ist! Geben Sie den dabei benutzten Ähnlichkeitssatz an!



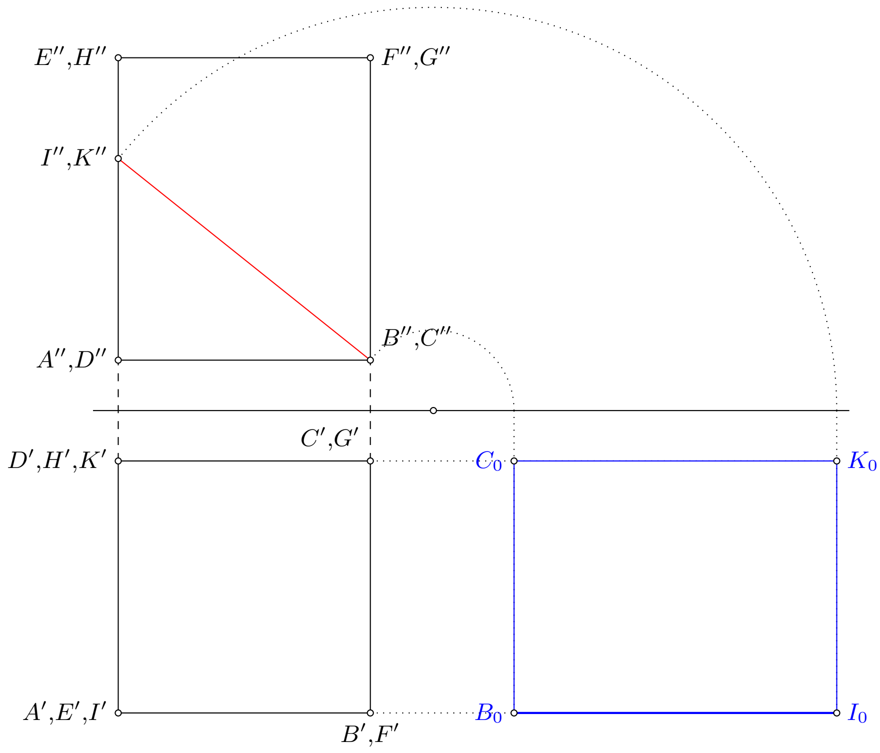

Die Winkel $BAC$ und $ACD$ sind als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß. Ebenso sind die Winkel $AES$ und $BDA$ als rechte Winkel gleich groß.
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz sind die Dreiecke $AES$ und $ACD$ zueinander ähnlich da sie zwei Paar gleich großer Winkel besitzen.

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.2**
Gegeben ist ein gerades Prisma $ABCDEFGH$ mit quadratischer Grundfläche, das von einer Ebene in den Punkten $I$, $B$, $C$, $K$ geschnitten wird (siehe Abbildung).
$AB = BC = 5{,}0$ cm; $AE = DH = 6{,}0$ cm; $AI = DK = 4{,}0$ cm

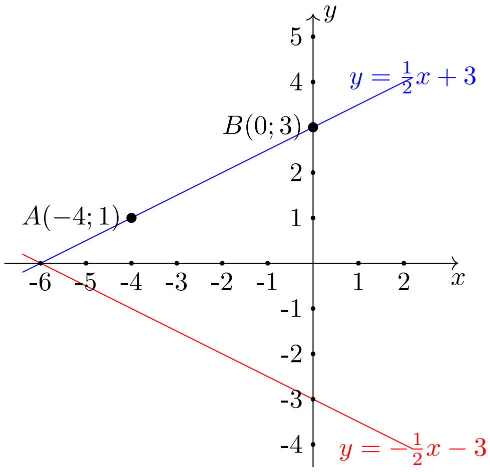



a) Stellen Sie das Prisma einschließlich der Schnittfigur in Zweitafelprojektion dar!
b) Berechnen Sie die Länge der Seite $IB$ der Schnittfigur!
c) Zeichnen Sie die Schnittfigur in wahrer Größe!




b) $IB = \sqrt{AB^2 + AI^2} = 6{,}4$ cm.

**Aufgabe 7.1**
a) Zeichnen Sie die Punkte $A(-4;1)$ und $B(0;3)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Zeichnen Sie durch diese beiden Punkte die Gerade $g$! Geben Sie die Gleichung der durch $g$ dargestellten Funktion an!
c) Spiegeln Sie die Gerade $g$ an der Abszissenachse, und bezeichnen Sie das Spiegelbild mit $g'$!
d) Berechnen Sie den spitzen Winkel, den die beiden Geraden $g'$ und $g$ einschließen!




b) $n$ ist 3, da die Gerade durch $B$ verläuft. Im Anstiegsdreieck ergibt sich $m = 2$, d.h. $g : y = \frac{1}{2}x + 3$

c) bei der Spiegelung an der x-Achse werden $m$ und $n$ negativ, d.h. $g' : y = -\frac{1}{2}x - 3$

d) der Schnittwinkel ist gleich dem Doppelten Anstiegswinkel $\alpha$ von $g$. Es ist $m = \frac{1}{2} = \tan\alpha$, d.h. $\alpha = 26{,}6°$.
Die Geraden schneiden sich unter dem Winkel 53,2°.

**Aufgabe 7.3**
Ein zylinderförmiges Werkstück aus Stahl ($d = h = 75$ mm, $\rho = 7{,}8g/cm^3$) wird so bearbeitet, dass daraus eine Kugel entsteht, die den gleichen Durchmesser wie der Zylinder hat.
Berechnen Sie die Masse des Abfalls, der bei dieser Bearbeitung entsteht! Geben Sie die Masse in Gramm an!

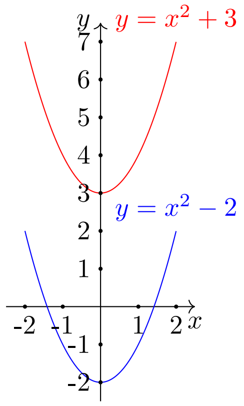
Volumen des Zylinders: $V_Z = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h = 331300$ mm$^3$
Volumen der Kugel: $V_K = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = 220900$ mm$^3$

Die Differenz der Volumina ist $\Delta V = 109400$ mm$^3 = 109{,}4$ cm$^3$. Dieser Abfall hat eine Masse von $\Delta V \cdot \rho = 853$ g.

## 1.18 Abschlussprüfung 1974

**Aufgabe 1**
Durch die Gleichung $y = x^2 - 2$ ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Parabel.

a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
b) Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes an, und zeichnen Sie die Parabel!
c) Verschieben Sie die Parabel so, dass ihr Scheitelpunkt die Koordinaten $x_S = 0$, $y_S = 3$ hat! (Zeichnen Sie die verschobene Parabel in dasselbe Koordinatensystem, das Sie bei Teilaufgabe b) benutzt haben!)
d) Geben Sie die Gleichung der Funktion an, deren Graph durch die Verschiebung entstanden ist!

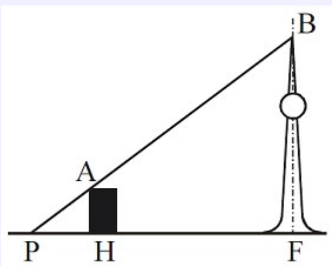



a) Funktionsgleichung gleich 0 setzen: $x^2 - 2 = 0$ ergibt $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$.

b) Scheitelpunkt $S(0; -2)$, Zeichnung links

c) Funktionsgleichung $y = x^2 + 3$

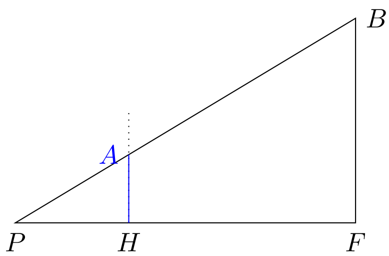
**Aufgabe 2**




nicht maßstäblich

Im Stadtzentrum Berlins erscheint von einem Punkt $P$ aus der Fernsehturm hinter dem Hotel "Stadt Berlin" so, dass die Punkte $P$, $A$ und $B$ auf einer Geraden liegen (siehe Abbildung). Die Längen der Strecken betragen näherungsweise:
$PH = 200$ m, $PF = 600$ m, $FB = 360$ m.

a) Ermitteln Sie durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10000 die Höhe $HA$ des Hotels! Geben Sie das Ergebnis in Metern an!
b) Ermitteln Sie die Höhe des Hotels auch rechnerisch! Formulieren Sie einen Antwortsatz!



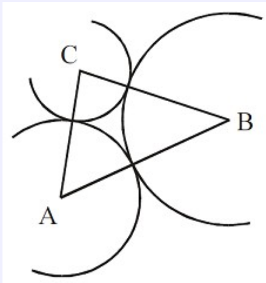

a) Mit dem Maßstab ergibt sich $PH = 2$ cm, $PF = 6$ cm, $FB = 3{,}6$ cm.
siehe Skizze: Der Schnittpunkt der Senkrechten in $H$ mit $PB$ ist $A$. Durch Messung ergibt sich $HA \approx 1.2$ cm, d.h. das Hotel ist 120 m hoch.

b) Die Dreiecke $PHA$ und $PFB$ sind ähnlich. Damit gilt nach dem Strahlensatz $\frac{PH}{PF} = \frac{HA}{FB}$, also

$$HA = \frac{PH \cdot FB}{PF} = \frac{200 \cdot 360}{600} = 120 \text{ m}$$

Das Hotel ist 120 m hoch.

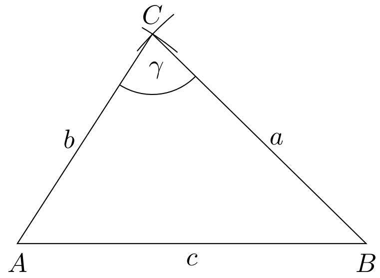
**Aufgabe 3**
Drei Kreise berühren einander von außen. Ihre Mittelpunkte $A$, $B$ und $C$ sind Eckpunkte eines Dreiecks (siehe Abbildung).
Der Radius des Kreises um $A$ sei $r_1 = 3{,}0$ cm. Der Radius des Kreises um $B$ sei $r_2 = 4{,}0$ cm. Der Radius des Kreises um $C$ sei $r_3 = 2{,}0$ cm.



nicht maßstäblich

a) Ermitteln Sie die Längen der Seiten $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ des Dreiecks!
b) Konstruieren Sie das Dreieck $ABC$!
c) Berechnen Sie den Winkel $ACB = \gamma$!
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$!

a) Für die Abstände der Kreismittelpunkte wird: $AB = c = r_1 + r_2 = 7$ cm, $BC = a = r_2 + r_3 = 6$ cm, $AC = b = r_1 + r_3 = 5$ cm.



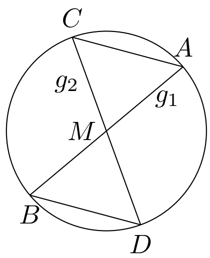

b) siehe Zeichnung
c) Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, d.h.

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0{,}2 \quad , \text{d.h. } \gamma = 78{,}4°$$

d) Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 14{,}7\text{cm}^2$

**Aufgabe 4**
Durch den Mittelpunkt $M$ eines Kreises verlaufen zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ die nicht senkrecht aufeinander stehen. Die Gerade $g_1$ schneidet den Kreis in den Punkten $A$ und $B$. Die Gerade $g_2$ schneidet den Kreis in den Punkten $C$ und $D$. Verbindet man $A$ mit $C$ und $B$ mit $D$, so entstehen die Dreiecke $MAC$ und $MBD$.

a) Entwerfen Sie eine Skizze!
b) Beweisen Sie mit Hilfe eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke $MAC$ und $MBD$ kongruent sind! (Geben Sie den dabei benutzten Kongruenzsatz an! )




b) In den Dreiecken $MAC$ und $MBD$ sind vier Seiten gleich lang: $MA = MB = MC = MD = r$, wobei $r$ der Kreisradius ist. Die Winkel $\angle AMC$ und $\angle BMD$ sind kongruent, da sie Scheitelwinkel der Geraden $g_1$ und $g_2$ am Punkt $M$ sind.
Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die beiden Dreiecke zueinander kongruent.

**Aufgabe 5**
Gegeben sind die folgenden Ungleichungen:

$$5x + 5 < x + 25 \qquad x \in \mathbb{P} \tag{1}$$
$$12x - (x - 1) > 5x + 13 \qquad x \in \mathbb{P} \tag{2}$$

a) Lösen Sie die Ungleichung (1)! Geben Sie diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

b) Lösen Sie die Ungleichung (2)! Geben Sie diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die einstellige natürliche Zahlen sind!
c) Die unter a) angegebenen natürlichen Zahlen bilden die Menge $M_1$, die unter b) angegebenen natürlichen Zahlen die Menge $M_2$. Geben Sie den Durchschnitt von $M_1$ und $M_2$ durch Aufzählen der Elemente an! (Proben werden nicht verlangt.)

a) $5x + 5 < x + 25$ wird durch äquivalentes Umformen zu $4x < 20$ und $x < 5$.
Lösungsmenge $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $12x - (x - 1) > 5x + 13$ wird durch äquivalentes Umformen zu $11x + 1 > 5x + 13$ und weiter $6x > 12$ und $x > 2$.
Lösungsmenge $L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $M_1 \cap M_2 = \{3, 4\}$.

**Aufgabe 6**
a) Berechnen Sie 17 % von 83!

b) Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! $\sqrt[3]{a^6b^9}$ $(a \geq 0, b \geq 0, a,b \in \mathbb{P})$

c) Ordnen Sie die Zahlen 1,2525...; 1,2500 und 1,25 nach der Größe! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

d) Durch die Gleichung $y = 3x$–1 ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Gerade $g$. Geben Sie die Gleichung einer anderen Funktion an, deren Graph parallel zu der Geraden $g$ verläuft!

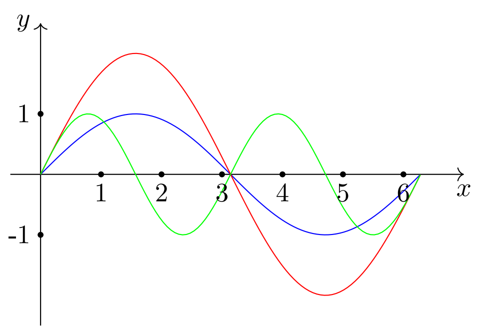
a) 14,1
b) $\sqrt[3]{a^6b^9} = a^2b^3$
c) $1{,}25 = 1{,}2500 < 1{,}2525$
d) $y = 3x + m$, wobei $m$ irgendeine reelle Zahl verschieden von 1 ist.

*Von den folgenden Wahlaufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 brauchen Sie nur e i n e zu lösen.*

**Aufgabe 7.1**
Gegeben sind Funktionen durch die folgenden Gleichungen:

$$y = \sin x \quad ; \quad y = 2\sin x \quad ; \quad y = \sin 2x.$$

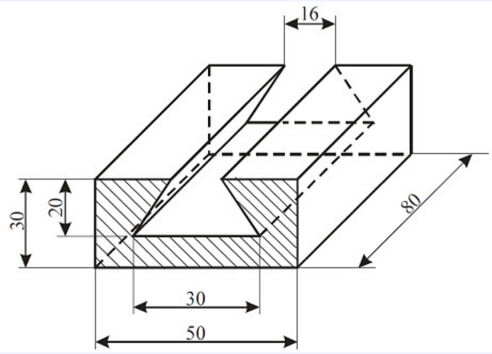
a) Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen im Intervall $0 < x < 2\pi$ ! Benutzen Sie dabei ein und dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem, und kennzeichnen Sie jeden Graph durch die entsprechende Gleichung!
b) Geben Sie für $y = 2\sin x$ alle im angegebenen Intervall auftretenden Nullstellen an!
c) Geben Sie für $y = \sin 2x$ die kleinste Periode an!




a) rot ... $y = \sin x$,
blau ... $y = 2\sin x$,
grün ... $y = \sin 2x$.

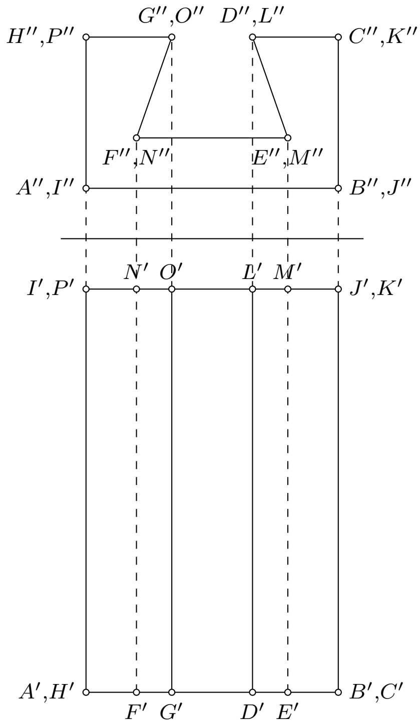
b) $y = 2\sin x$ hat im Intervall $[0; 2\pi]$ die Nullstellen $x_N \in \{0, \pi, 2\pi\}$
c) Die kleinste Periode von $y = \sin 2x$ ist $p = \pi$.

**Aufgabe 7.2**




Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schrägbild eines Werkstückes.

a) Stellen Sie dieses Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1 : 1 dar! (Benennen der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)
b) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche!




a)

b) Grundfläche $ABCDEFGH$ ergibt sich als Differenz des Rechtecks $ABCH$ und des Trapezes $DEFG$:

Rechteck: $A_R = a \cdot b = 50 \cdot 30 = 1500 \text{ mm}^2$
Trapez: $A_T = \frac{a+c}{2} h = \frac{16+30}{2} \cdot 20 = 460 \text{ mm}^2$
Grundfläche: $A = A_R - A_T = 1040 \text{ mm}^2$

Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt von $1040 \text{ mm}^2$.

**Aufgabe 7.3**
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist, dann ist das Produkt dieser Zahlen durch 4 teilbar.

Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die erste gerade ist, seien $2a, 2a+1, 2a+2$. Ihr Produkt ist

$$p = 2a \cdot (2a+1) \cdot (2a+2) = 2 \cdot a \cdot (2a+1) \cdot 2 \cdot (a+1) = 4 \cdot a \cdot (2a+1) \cdot (a+1)$$

Der letzte Term ist sicher durch 4 teilbar, also auch das Produkt. w.z.b.w.