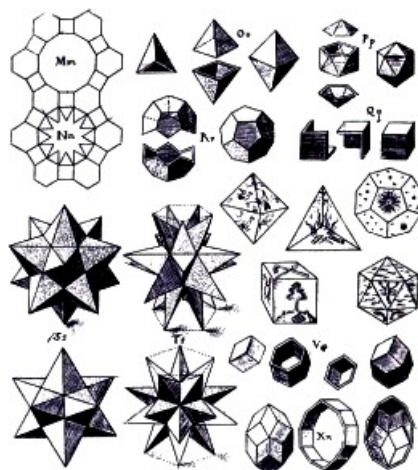


Kleines Sterndodekaeder



Der große deutsche Mathematiker und Astronom Johannes Kepler veröffentlichte 1619 sein Hauptwerk "Harmonices mundi".

Im 2. Buch, dem "Architektonischen oder dem auf der figürlichen Geometrie beruhenden Buch", untersucht Kepler die Kongruenz der "harmonischen Figuren". Damit wird der Fragestellung nachgegangen, inwieweit reguläre Figuren die Ebene um einen festen Punkt herum lückenlos ausfüllen oder geschlossene Raumfiguren bilden können. Bei den räumlichen Kongruenzen führt Kepler zwei Sternpolyeder ein, die er als vollkommene reguläre Kongruenzen auffasst. Eines der beiden Sternpolyeder ist das kleine Sterndodekaeder.



Das kleine Sterndodekaeder oder zwölfeckige Sternzwölfflach besitzt als Seiten zwölf kongruente regelmäßige Sternfünfecke, die zu je fünf an jeder Ecke zusammentreffen. Das Polyeder hat 12 Seitenflächen, 12 Ecken und 30 Kanten.

Die Eckpunkte stimmen mit den Eckpunkten des Ikosaeders überein. Zur Konstruktion des kleinen Sterndodekaeders beginnt man daher mit den zwölf Eckpunkten des Ikosaeders.

Die 30 Kanten entstehen durch Verbinden einer Ecke mit den fünf der Ecke nächstliegenden Eckpunkten. Je fünf dieser Kanten liegen in einer Ebene senkrecht zu einer Eckpunkt-Eckpunkt-Achse des Ikosaeders und bilden in dieser Ebene ein reguläres Sternfünfeck. Diese Sternfünfecke sind die Seiten des kleinen Sterndodekaeders.

Die Symmetriegruppe entspricht der Ikosaeder-Gruppe A_5 . Damit hat das kleine Sterndodekaeder

- 1) 6 fünzfählige Drehachsen (jeweils durch zwei gegenüber liegende Ecken),
- 2) 10 dreizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen) und
- 3) 15 zweizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten).

Die Euler-Charakteristik ist -6 , da mit 12 Ecken, 30 Kanten und 12 Flächen sich $e - k + f = 12 - 30 + 12 = -6$ ergibt. Das nicht konvexe Polyeder entspricht damit nicht dem Eulerschen Polyedersatz.

Das kleine Sterndodekaeder ist eines der vier möglichen Sternkörperbildungen aus dem Dodekaeder. Dieses Kepler-Poinsot-Polyeder ist das uniforme Polyeder U_{34} . Das duale Polyeder ist das große Dodekaeder.

Ist die Seitenlänge der Fünfecke am Grund einer "Spitze" gleich a , so wird

$$\begin{aligned} \text{Oberfläche} \quad A &= 15\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \cdot a^2 \approx 46,1652a^2 \\ \text{Volumen} \quad V &= \frac{5}{4}(7 + 3\sqrt{5}) \cdot a^3 \approx 17,1352a^3 \end{aligned}$$

Die Höhe der Spitzen; auf einem Dodekaeder der Seitenlänge a errichtet; wird zu

$$h = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}} \cdot a \approx 1,37638a$$

Das Polyeder besitzt sowohl eine Inkugel, eine Mittelkugel als auch eine Umkugel. Der Radien sind

$$\begin{aligned} \text{Inkugelradius} \quad r &= \frac{\sqrt{10(5 - \sqrt{4})}}{20} \cdot a \approx 0,2629a \\ \text{Mittelkugelradius} \quad \rho &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \cdot a \approx 0,3090a \\ \text{Umkugelradius} \quad R &= \frac{\sqrt[4]{5}}{4}\sqrt{2\sqrt{5} - 2} \cdot a \approx 0,5878a \end{aligned}$$

Künstlerische Darstellungen

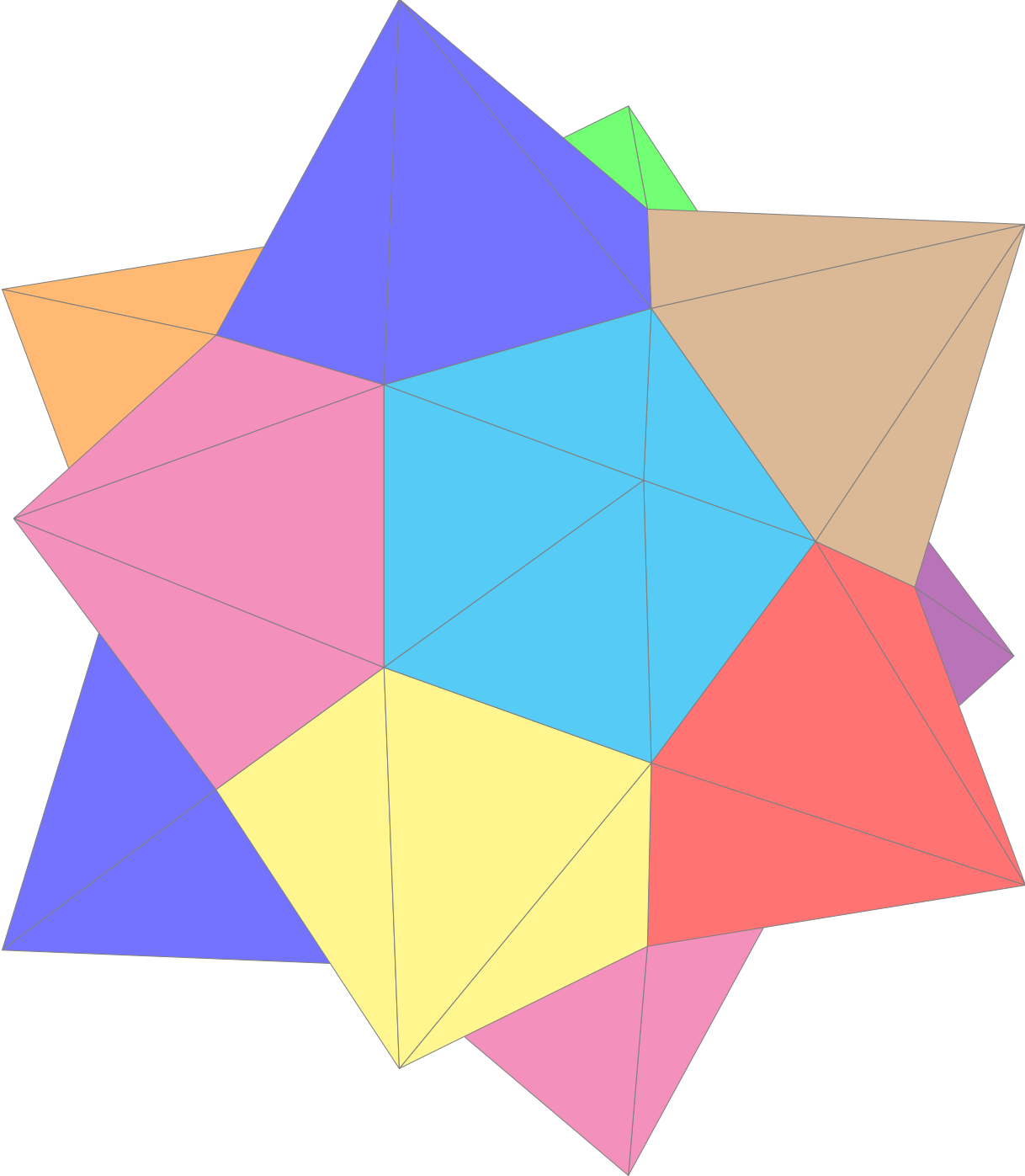


Das kleine Sterndodekaeder wurde auch von Künstlern in verschiedenen Werken genutzt. Eines der berühmtesten ist "Gravitation" von dem niederländischen Grafiker M.C. Escher. Die $29,7 \times 29,7$ cm große Lithografie wurde 1952 zuerst schwarz-weiß gedruckt, später mit Wasserfarben nachkoloriert. Jede Seite des Sterndodekaeders hat eine halbrechteckige Tür. Aus diesen Türen ragen die Füße von 12 Schildkröten, die das Sterndodekaeder als gemeinsamen Panzer benutzen. Die Schildkröten sind in sechs verschiedenen Farben entgegengesetzt dargestellt.



Eine Darstellung des Polyeders findet man als Mosaik (1430, Paolo Uccello) im Eingangsbereich von San Marco (Venedig). Dieses Polyeder ist eines der schönsten Polyeder aller Zeiten. Es vereint Mathematik mit Kunst und Schönheit.

Das kleine Sternpolyeder



Sternpolyedernetz

