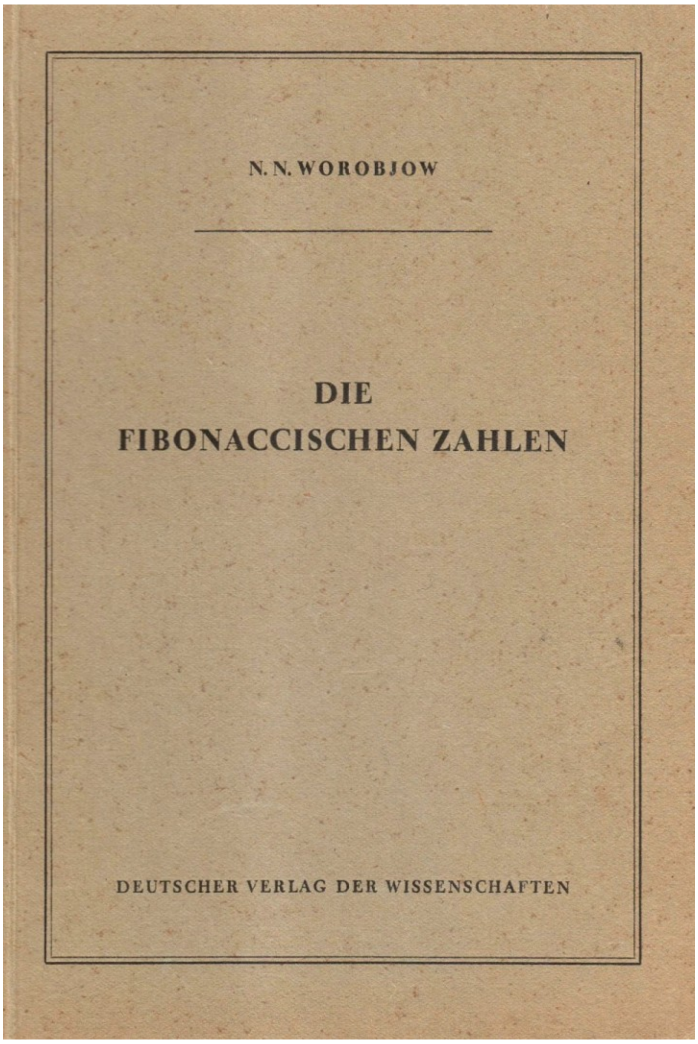
Die Fibonaccischen Zahlen
von N.N. Worobjow



Übersetzung: Hartwig Quabeck

Abschrift und LaTex-Satz: Steffen Polster 2020
https://mathematikalpha.de

Vorwort

In der elementaren Mathematik gibt es viele, manchmal schwierige und interessante Aufgaben, die nicht mit irgendeinem Namen verknüpft sind, sondern eher den Charakter einer Art "mathematischer Folklore" haben.
Solche Probleme finden sich in der umfangreichen populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur und in der mathematischen Unterhaltungsliteratur verstreut, indes ist oft sehr schwer festzustellen, in welcher Sammlung gerade das eine oder andere Problem erstmalig auftaucht.

Diese Aufgaben haben nicht selten einige Varianten; zuweilen lassen sich auch mehrere solcher Aufgaben zu einer einzigen, komplizierteren, vereinigen; umgekehrt zerfällt manchmal eine Aufgabe in mehrere einfachere.
Mit einem Wort - es ist oft schwierig, anzugeben, wo die eine Aufgabe endet und die andere anfängt. Richtiger wäre es vielleicht zu sagen, dass es sich bei jedem dieser Probleme um kleine mathematische Theorien handelt, die ihre eigene Geschichte, Problematik und Methode haben - welche natürlich mit der Geschichte, der Problematik und den Methoden der "großen Mathematik" eng zusammenhängen.

So verhält es sich auch mit der Theorie der Fibonaccischen Zahlen. Die Fibonaccischen Zahlen entstanden aus der nun schon fast 700 Jahre alten berühmten "Kaninchenaufgabe" und bilden auch heute noch eines der interessantesten Kapitel der Elementarmathematik.
Probleme, die mit den Fibonaccischen Zahlen zusammenhängen, findet man in vielen allgemeinverständlichen mathematischen Werken; sie werden in mathematischen Zirkeln der Schulen behandelt und den Teilnehmern mathematischer Olympiaden vorgelegt.

Das vorliegende Büchlein enthält eine Reihe von Problemen, die während des Studienjahres 1949/50 in einem mathematischen Zirkel für Schüler an der mit dem Leninorden ausgezeichneten Leningrader Staatlichen Shdanow-Universität bearbeitet worden sind.
Den Wünschen der Teilnehmer des Zirkels entsprechend, wurde vor allem die zahlentheoretische Seite dieser Frage behandelt, die auch in unserer Broschüre eingehender entwickelt wird.

Das Büchlein ist für Schüler der Oberklassen gedacht. Der Limesbegriff wird nur in den Punkten 7 und 8 von § 3 benutzt.
Leser, die mit diesem Begriff nicht vertraut sind, können sie ohne Nachteil für das Verständnis des Folgenden bei der Lektüre übergehen. Dasselbe gilt auch für die Binomialkoeffizienten (Punkt 8 von § 1) und die Trigonometrie (Punkte 2 und 3 von § 4). Die in dieser Broschüre behandelten Elemente der Teilbarkeitstheorie und der Theorie der Kettenbrüche setzen beim Leser keine über den Rahmen des Schulunterrichts hinausgehenden Vorkenntnisse voraus.

Lesern, die sich für die Struktur rekursiver Folgen interessieren, kann das kleine, aber inhaltsreiche Büchlein von A.I. Markuschewisch "Rekursive Folgen" (erscheint in dieser Reihe) empfohlen werden. Leser, die mehr über Zahlentheorie wissen wollen, mögen entsprechende Kurse besuchen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1. Die Geschichte des Altertum ist reich an hervorragenden Mathematikern. Viele Ergebnisse der antiken Mathematik lassen uns heute noch den Scharfsinn ihrer Autoren bewundern, und Namen wie Euklid, Archimedes, Heron sind jedem Gebildeten bekannt.

Anders steht es mit der Mathematik im Mittelalter. Außer Vieta, der jedoch erst im 16. Jahrhundert lebte, und einigen später lebenden Mathematikern wird im Mathematikunterricht an den Schulen kaum ein Name eines Mathematikers aus dieser Zeit genannt.
Das ist natürlich kein Zufall. Die mathematische Wissenschaft entwickelte sich in dieser Epoche außerordentlich langsam, und es gab damals nur sehr wenige bedeutende Mathematiker.

Von um so größerem Interesse für uns ist daher das Werk "Liber abacci" des berühmten italienischen Mathematikers Leonardo von Pisa, der bekannter ist unter seinem Beinamen Fibonacci (Fibonacci: Abkürzung von filius Bonacci, d.h. Sohn des Bonacci).
Dieses Buch, das im Jahre 1202 geschrieben wurde, ist uns in einer Abschrift aus dem Jahre 1228 erhalten geblieben. Das "Liber abacci" ist ein umfangreiches Werk, das fast das gesamte arithmetische und algebraische Wissen jener Zeit enthält.
Es spielte in der Entwicklung der Mathematik in Westeuropa im Laufe der folgenden Jahrhunderte eine bemerkenswerte Rolle. Insbesondere wurden durch dieses Buch die arabischen Ziffern in Europa bekannt.

Mit dem Inhalt des "Liber abacci" werden wir durch zahlreiche Aufgaben in dem vorliegenden Heftchen bekannt gemacht.
Wir wollen jetzt eine solche Aufgabe aus dem "Liber abacci" betrachten, die sich auf den Seiten 123 und 124 der Handschrift von 1228 findet.

"Wieviel Kaninchenpaare werden in einem Jahr von einem Paar erzeugt ?"

Paare:	1
erster Monat:	2
zweiter Monat:	3
dritter Monat:	5
vierter Monat:	8
fünfter Monat:	13
sechster Monat:	21
siebenter Monat:	34
achter Monat:	55
neunter Monat:	89
zehnter Monat:	144
elfter Monat:	233
zwölfter Monat:	377

"Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein allseitig ummauertes Gehege, um zu erfahren, wieviel Nachkommen dieses eine Paar im Laufe eines Jahres haben werde. Es wird dabei vorausgesetzt, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Kaninchen würden vom zweiten Monat nach ihrer Geburt an gebären.

Da das erste Paar noch im ersten Monat Nachkommen hat, sind in diesem Monat zwei Paare vorhanden. Von ihnen gebiert ein Paar, nämlich das erste, auch im folgenden Monat, so dass also im zweiten Monat drei Paare vorhanden sind.

Von diesen haben zwei Paare im folgenden Monat Nachkommen, so dass im dritten Monat schon zwei Kaninchenpaare geboren werden und die Gesamtzahl der Kaninchenpaare in diesem Monat auf fünf anwächst.
Drei dieser fünf Paare vermehren sich noch im gleichen Monat, und die Anzahl der Paare erreicht im vierten Monat acht.
Fünf davon erzeugen weitere fünf Paare, die zusammen mit den schon vorhandenen acht Paaren 13 Paare im fünften Monat ergeben.

Fünf dieser Paare haben im gleichen Monat keine Nachkommen, die übrigen acht Paare gebären.
Also sind im sechsten Monat 21 Paare vorhanden. Zusammen mit den 13 Paaren, die im siebenten Monat geboren werden, ergeben sich 34 Paare. Dazu kommen im achten Monat 21 Paare. Die Anzahl der Paare ist nun 89; sie wächst im zehnten Monat auf 144 an. Davon gehören im elften Monat 55 Paare nicht, so dass sich also in diesem Monat bei einem Zuwachs von 89 Paaren die Zahl der Paare auf 233 erhöht.
Schließlich vermehren sich hiervon im zwölften und letzten Monat 144 Paare, so dass also nach Ablauf eines Jahres 377 Paare vorhanden sind.

Mit Hilfe der Abbildung kann man sich noch einmal klarmachen, wie wir zu diesem Resultat kommen. Wir addieren nämlich die erste Zahl zur zweiten, d.h. 1 zu 2, die zweite zur dritten, die dritte zur vierten, die vierte zur fünften und so fort, bis wir die zehnte zur elften Zahl addieren und so die Gesamtzahl der erwähnten Kaninchenpaare, also 377, erhalten.
Wir können uns diesen Prozess schrittweise bis zu einer unendlichen Anzahl von Monaten fortgesetzt denken."

2. Verlassen wir nun die Kaninchen und betrachten eine Zahlenfolge

$$u_1, u_2, u_3, ... \tag{1}$$

bei der jedes Glied gleich der Summe der zwei vorangehenden ist; d.h., für jedes $n > 2$ gelte

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{2}$$

Solche Folgen, bei denen jedes Glied eine gewisse Funktion vorangehender Glieder ist, kommen in der Mathematik häufig vor; man nennt sie rekursive Folgen.
Den Prozess der Ermittlung der einzelnen Glieder dieser Folgen nennt man Rekursionsverfahren und eine Gleichung der Form (2) Rekursionsformel. Die Grundlagen der allgemeinen Theorie der rekursiven Folgen findet der Leser in dem schon erwähnten Büchlein von Markuschewitsch (siehe Vorwort).

Wir bemerken zunächst, dass die Glieder einer Folge (1) mit Hilfe der Formel (2) allein nicht eindeutig bestimmt werden können. Man kann beliebig viele verschiedene Zahlenfolgen aufstellen, die alle der Bedingung (2) genügen, z.B.:

$$\begin{aligned}
&2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ...,\\
&1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...,\\
&-1, -5, -6, -11, -17, ... \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Die Bedingung (2) ist also zur eindeutigen Aufstellung der Folge (1) offensichtlich zwar notwendig, aber nicht hinreichend; wir müssen daher noch einige ergänzende Bedingungen angeben. Man kann z.B. einige der ersten Glieder der Folge (1) vorgehen. Wie viele solcher Glieder müssen aber mindestens gegeben sein, damit man alle folgenden Glieder unter alleiniger Benutzung von (2) berechnen kann?

Wir finden, dass mit Hilfe von (2) nicht alle Glieder der Folge (1) zu ermitteln sind, schon allein deshalb, weil es nicht zu jedem Glied zwei vorangehende Glieder gibt. So steht vor dem ersten Glied der Folge überhaupt kein Glied der Folge, vor dem zweiten nur ein einziges, nämlich u_1.
Zur Berechnung von (1) mit Hilfe von (2) müssen wir also auf jeden Fall mindestens die ersten beiden Glieder der Folge kennen.

Das ist aber offensichtlich auch hinreichend, um jedes beliebige Glied der Folge (1) berechnen zu können. In der Tat lässt sich u_3 als Summe der für u_1 und u_2 vorgegebenen Werte darstellen; u_4 findet man durch Addition von u_2 zu dem soeben bestimmten u_3, u_5 durch Addition der schon ermittelten Werte u_3 und u_4 usw., und so der Reihe nach beliebig viele Glieder.
Indem man auf diese Weise immer von zwei benachbarten Gliedern zum nächstfolgenden übergeht, kann man bis zu jedem Glied mit beliebig vorgegebenem Index gelangen und es ausrechnen.

3. Wir Wenden uns jetzt dem wichtigen Spezialfall einer Folge (1) zu, bei welchem $u_1 = 1$ und $u_2 = 1$ sind. Die Bedingung (2) ermöglicht, wie soeben gezeigt wurde, die sukzessive Berechnung aller Glieder dieser Folge. Wie man leicht nachprüft, sind die ersten dreizehn Glieder die Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,$$

die uns schon bei der Lösung der Kaninchenaufgabe begegneten.
Zu Ehren des Verfassers dieser Aufgabe heißt nun die Folge (1) mit $u_1 = u_2 = 1$ die Fibonaccische Folge, und ihre Glieder heißen Fibonaccische Zahlen.

Die Fibonaccischen Zahlen besitzen nun eine ganze Reihe interessanter und wichtiger Eigenschaften, deren Untersuchung dieses Büchlein gewidmet ist.

1 Einfachste Eigenschaften der Fibonaccischen Zahlen

1. Wir berechnen zunächst die Summe der ersten n Fibonaccischen Zahlen, indem wir beweisen, dass

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1 \tag{3}$$

ist. In der Tat gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2 \\ u_2 &= u_4 - u_3 \\ u_3 &= u_5 - u_4 \\ &... \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

Durch gliedweise Addition aller dieser Gleichungen folgt

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 2$$

und wir brauchen nur noch daran zu erinnern, dass $u_2 = 1$ ist.

2. Die Summe der Fibonaccischen Zahlen mit ungeraden Indizes

$$u_1 + u_3 + ... + u_{2n-1} = u_{2n} \tag{4}$$

Zum Beweis dieser Gleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_3 &= u_4 - u_2 \\ u_4 &= u_6 - u_4 \\ &... \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2} \end{aligned}$$

auf und erhalten durch gliedweise Addition dieser Gleichungen die Behauptung.

3. Die Summe der Fibonaccischen Zahlen mit geraden Indizes ist

$$u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \tag{5}$$

Auf Grund von Abschnitt 1 gilt

$$u_1 + u_2 + ... + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

Subtrahieren wir davon die Gleichung (4) gliedweise, so erhalten wir

$$u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

was zu beweisen war.
Subtrahieren wir ferner gliedweise (5) von (4), so folgt

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \tag{6}$$

Wir addieren jetzt auf beiden Seiten dieser Gleichung u_{2n+1}:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \tag{7}$$

Als Ausdruck für die alternierende Summe der Fibonaccischen Zahlen erhalten wir aus (6) und (7) den folgenden:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{m+1} u_m = (-1)^{m+1} u_{m-1} + 1 \tag{8}$$

Der Ausdruck (8) stimmt nämlich für ungerade m, $m = 2n + 1$, mit (7), für gerade m, $m = 2n$, mit (6) überein.

4. Die Formeln (3) und (4) wurden durch gliedweise Addition einer Anzahl trivialer Identitäten gewonnen. Als weiteres Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens möge die Ableitung der Formel für die Summe der Quadrate der ersten n Fibonaccischen Zahlen dienen:

$$u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = u_n u_{n+1} \tag{9}$$

Wir bemerken, dass

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) u_k^2$$

ist. Addieren wir nun die Identitäten

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1 u_2 \\ u_2^2 &= u_2 u_3 - u_1 u_2 \\ u_3^2 &= u_3 u_4 - u_2 u_3 \\ &... \\ u_n^2 &= u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n \end{aligned}$$

so erhalten wir (9).

5. Viele Beziehungen zwischen den Fibonaccischen Zahlen lassen sich bequem durch vollständige Induktion beweisen.

Das Wesen der Methode der vollständigen Induktion[1] (die oft auch als Methode der mathematischen Induktion bezeichnet wird) besteht in folgendem: Zum Beweis dafür, dass eine gewisse Aussage für jede natürliche Zahl zutrifft, genügt es zu zeigen:

a) dass sie für die Zahl 1 gilt;

b) dass unter der Annahme, die Aussage gelte für eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl n, stets auch ihre Gültigkeit für die Zahl $n+1$ folgt.

Der Induktionsbeweis einer Behauptung, die für jede natürliche Zahl gelten soll, zerfällt also in zwei Teile. Im ersten (meist verhältnismäßig einfachen) Teil weist man die Gültigkeit der Behauptung für die Zahl 1 nach.
Die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage für die Zahl 1 wird manchmal die Basis der Induktion genannt.
Im zweiten Teil des Beweises, der in der Regel bedeutend schwieriger ist, nimmt man an, die Behauptung gelte für eine ganz beliebige (aber fest gewählte) Zahl n, und folgert aus dieser Annahme, der sogenannten Induktionsannahme, dass die Behauptung auch für die Zahl $n+1$ richtig ist. Den zweiten Teil des Beweises bezeichnet man auch als Induktionsschluss (Schluss von n auf $n+1$).

Eine eingehendere Darstellung der Methode der vollständigen Induktion und zahlreiche Beispiele für ihre Anwendung findet man in der schon erwähnten Broschüre von I. S. Sominski. So wird insbesondere die nachstehend angewandte Variante der Methode der vollständigen Induktion mit dem Schluss "von n und $n+1$ auf $n+2$"in der Broschüre von Sominski durch die Aufgaben 18 und 19 illustriert.

Wir beweisen nun durch Induktion die folgende wichtige Formel:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \tag{10}$$

Der Beweis dieser Formel wird durch Induktion nach m geführt. Für $m=1$ hat unsere Formel die Gestalt

$$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2 = u_{n-1} + u_n$$

was trivialerweise richtig ist. Für $m=2$ ist die Gleichung (10) wegen

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n$$

ebenfalls richtig. Damit ist der erste Teil des Beweises erbracht. Den Induktionsschluss führen wir nun in folgender Form:
Unter der Annahme, die Formel (10) sei für $m=k$ und für $m=k+1$ richtig, beweisen wir, dass sie auch für $m=k+2$ gilt. Es sei also

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1} \qquad \text{und} \qquad u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen gliedweise, so erhalten wir

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+4}$$

was zu zeigen war. Setzen wir in der Formel (10) $m=n$, so ergibt sich

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} \qquad \text{oder} \qquad u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \tag{11}$$

[1] Vgl. auch das in derselben Reihe erscheinende Heft: I.S. Sominski, "Die Methode der vollständigen Induktion".

Aus der angegebenen Gleichung ersieht man, dass u_{2n} durch u_n teilbar ist. Im folgenden Paragraphen beweisen wir eine viel allgemeinere Aussage. Wegen

$$u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

kann man die Gleichung (11) auch in folgender Gestalt schreiben

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) \qquad \text{oder} \qquad u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$$

das heißt aber, dass die Differenz der Quadrate zweier Fibonaccischer Zahlen, deren Indizes sich um 2 unterscheiden, wieder eine Fibonaccische Zahl ist. Analog beweist man

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$$

(indem man $m = 2n$ setzt).

6. Im folgenden wird uns die Formel

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n \tag{12}$$

sehr nützlich sein. Wir beweisen sie durch Induktion nach n. Für $n = 1$ nimmt die Gleichung (12) die Form

$$u_2^2 = u_1 u_3 - 1$$

an, und das ist offenbar richtig. Wir nehmen nun die Formel (12) für ein gewisses n als bewiesen an. Wir addieren auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl $u_{n+1}u_{n+2}$ und erhalten

$$u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} = u_n u_{n+2} + u_{n+1}u_{n+2} + (-1)^n$$

oder

$$u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) = u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) + (-1)^n$$

oder

$$u_{n+1}u_{n+3} = u_{n+2}^2 + (-1)^n$$

und schließlich

$$u_{n+2}^2 = u_{n+1}u_{n+3} + (-1)^{n+1}$$

Damit ist der Induktionsschluss geführt und die Formel (12) für jedes natürliche n bewiesen.

7. Ganz analog wie die soeben bewiesenen Eigenschaften der Fibonaccischen Zahlen bestätigt man auch die folgenden:

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + ... + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$
$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + ... + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$$
$$nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + ... + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$$

Die Beweise möge der Leser selbst führen.

8. Es zeigt sich, dass ein gewisser Zusammenhang zwischen den Fibonaccischen Zahlen und anderen, nicht weniger wichtigen Zahlen, den Binomialkoeffizienten, besteht. Wir wollen jetzt einige Gesetzmäßigkeiten angeben, um diese Zusammenhänge zu erläutern.
Dazu ordnen wir die Binomialkoeffizienten in folgendem Dreieck (sog. Pascalsches Dreieck) an:

$$\begin{array}{llll}
\binom{0}{0} & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3}
\end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{lllllll}
\mathbf{1} & & & & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & & & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot
\end{array}$$

Diejenigen Verbindungslinien von Zahlen dieses Dreiecks, welche die Zeilen unter einem Winkel von 45° schneiden, werden aufsteigende Diagonalen des Pascalschen Dreiecks genannt. Auf solchen Diagonalen liegen beispielsweise die Zahlen 1, 4, 3 oder 1, 5, 6, 1.

Wir beweisen nun, dass die Summe der Zahlen, die auf ein und derselben aufsteigenden Diagonalen liegen, eine Fibonaccische Zahl ist.
Die erste, oberste aufsteigende Diagonale des Pascalschen Dreiecks besteht ebenso wie die zweite nur aus der Eins. Zum Beweis unserer Aussage genügt es also zu zeigen, dass die Summe aller Zahlen, welche der $(n-2)$-ten und der $(n-1)$-ten Diagonale der Pascalschen Dreiecks angehören, gleich der Summe der Zahlen ist, die auf der n-ten Diagonale liegen.
Die $(n-2)$-te Diagonale enthält die Zahlen

$$\binom{n-3}{0}, \qquad \binom{n-4}{1}, \qquad \binom{n-5}{2}, ...$$

die $(n-1)$-te die Zahlen

$$\binom{n-2}{0}, \qquad \binom{n-3}{1}, \qquad \binom{n-4}{2}, ...$$

Die Summe aller dieser Zahlen schreiben wir in der Form

$$\binom{n-2}{0} + \left[\binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1}\right] + \left[\binom{n-4}{1} + \binom{n-4}{2}\right] + ... \tag{13}$$

Nun gilt aber für die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n-2}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$$

und

$$\begin{aligned}
\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} &= \frac{k(k-1)...(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot i} + \frac{k(k-1)...(k-i+1)(k-i)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot i\cdot (i+1)} \\
&= \frac{k(k-1)...(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot i}\left(1+\frac{k-i}{i+1}\right) \\
&= \frac{k(k-1)...(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot i}\frac{i+1+k-i}{i+1} \\
&= \frac{(k+1)k(k-1)...(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot i\cdot (i+1)} = \binom{k+1}{i+1}
\end{aligned}$$

Daher ist der Ausdruck (13) gleich

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + ...$$

d.h. aber gleich der Summe der Zahlen, die auf der n-ten Diagonale des Dreiecks liegen.

Aus dem eben Bewiesenen folgt auf Grund der Formel (3) sofort: Die Summe aller Binomialkoeffizienten, die nicht unterhalb der n-ten aufsteigenden Diagonale des Pascalschen Dreiecks (also einschließlich der n-ten Diagonale selbst) liegen, ist gleich $u_{n+2} - 1$.

Unter Benutzung der Formeln (4), (5), (6) und ihnen ähnlicher kann der Leser unschwer weitere Identitäten ableiten, welche die Fibonaccischen Zahlen mit den Binomialkoeffizienten verknüpfen.

9. Bisher haben wir die Fibonaccischen Zahlen rekursiv, d.h. induktiv nach ihren Indizes, bestimmt. Es zeigt sich aber, dass jede Fibonaccische Zahl auch unmittelbar als Funktion ihres Index bestimmt werden kann.
Wir untersuchen dazu verschiedene Zahlenfolgen, die der Bedingung (2) genügen. Alle diese Folgen nennen wir Lösungen der Gleichung (2).

Im folgenden sollen die Buchstaben V, V' und V'' beziehungsweise die Folgen

$$\begin{gathered} v_1, v_2, v_3, ... \\ v_1', v_2', v_3', ... \\ v_1'', v_2'', v_3'', ... \end{gathered}$$

bezeichnen. Wir beweisen zunächst zwei einfache Hilfssätze.

Lemma 1. Ist V eine Lösung der Gleichung (2) und c eine beliebige Zahl, so ist auch die Folge cV (d.h. die Folge cv_1, cv_2, cv_3, ...) eine Lösung der Gleichung (2).

Beweis. Multiplizieren wir die Identität

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$$

mit c, so ergibt sich

$$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$$

was zu beweisen war.

Lemma 2. Sind die Folgen V' und V'' Lösungen der Gleichung (2), so ist auch ihre Summe $V' + V''$ (d.h. die Folge $v_1' + v_1'', v_2' + v_2'', v_3' + v_3''$,...) eine Lösung der Gleichung (2).

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes besagen:

$$v_n' = v_{n-1}' + v_{n-2}' \qquad \text{und} \qquad v_n'' = v_{n-1}'' + v_{n-2}''$$

Wir addieren diese beiden Gleichungen gliedweise und erhalten

$$v_n' + v_n'' = (v_{n-1}' + v_{n-1}'') + (v_{n-2}' + v_{n-2}'')$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Es seien nun V' und V" zwei nichtproportionale Lösungen der Gleichung (2) (d.h. zwei Lösungen dieser Gleichung, die so beschaffen sind, dass zu jedem beliebig vorgegebenen c immer ein Index n gefunden werden kann, für den $\frac{v_n'}{v_n''} \neq c$ ist). Wir zeigen nun, dass jede Folge V, die eine Lösung der Gleichung (2) ist, in der Form

$$c_1 V_1' + c_2 V_2'' \tag{14}$$

dargestellt werden kann, wobei c_1 und c_2 gewisse Konstanten sind. Daher sagt man auch, (14) sei die allgemeine Lösung der Gleichung (2).
Vorher beweisen wir noch folgendes: Sind V' und V'' zwei nichtproportionale Lösungen der Gleichung (2), so gilt

$$\frac{v_1'}{v_1''} \neq \frac{v_2'}{v_2''} \tag{15}$$

(d.h. die Eigenschaft der Folgen V' und V'', nichtproportional zu sein, lässt sich schon an den ersten beiden Gliedern dieser Folgen nachweisen).
Der Beweis von (15) wird indirekt geführt. Dazu nehmen wir an, für zwei nichtproportionale Lösungen V' und V'' der Gleichung (2) würde

$$\frac{v_1'}{v_1''} = \frac{v_2'}{v_2''} \tag{16}$$

gelten. Durch Umformung dieser Proportion erhielten wir

$$\frac{v_1' + v_2'}{v_1'' + v_2''} = \frac{v_2'}{v_2''}$$

oder, da ja V' und V'' Lösungen der Gleichung (2) sind,

$$\frac{v_3'}{v_3''} = \frac{v_2'}{v_2''}$$

Analog könnte man (induktiv !) schließen, dass

$$\frac{v_3'}{v_3''} = \frac{v_4'}{v_4''} = ... = \frac{v_n'}{v_n''} = ...$$

gelten würde. Aus unserer Annahme (16) folgte also, dass die Folgen V' und V'' proportional wären, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Damit ist die Richtigkeit von (15) nachgewiesen.

Wir betrachten nun eine beliebige Folge V, die Lösung der Gleichung (2) ist. Dann ist diese Folge, wie in Punkt 2 der Einleitung gezeigt wurde, durch Angabe ihrer ersten beiden Glieder v_1 und v_2 eindeutig bestimmt.
Wir suchen nun ein c_1 und ein c_2, die den Gleichungen

$$c_1 v_1' + c_2 v_1'' = v_1 \qquad , \qquad c_1 v_2' + c_2 v_2'' = v_2 \tag{17}$$

genügen. Nach Lemma 1 und 2 liefert dann die Summe $c_1 V' + c_2 V''$ gerade die Folge V.

Wegen der Beziehung (15) lässt sich das Gleichungssystem (17) nach c_1 und c_2 auflösen, wie auch die Zahlen v_1 und v_2 beschaffen sein mögen:

$$c_1 = \frac{v_1 v_2'' - v_2 v_1''}{v_1' v_2'' - v_1'' v*_2} \qquad , \qquad c_2 = \frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_1' v_2'' - v_1'' v*_2}$$

Aus der Relation (15) folgt, dass der Nenner von Null verschieden ist. Setzen wir die für c_1 und c_2 errechneten Werte in (14) ein, so erhalten wir die gesuchte Darstellung unserer Folge V.
Es genügt also, zwei nichtproportionale Lösungen der Gleichung (2) zu kennen, um alle ihre Lösungen angeben zu können.

Wir werden nun diese Lösungen mit Hilfe geometrischer Reihen bestimmen. Nach Lemma 1 können wir uns bei unseren Betrachtungen auf solche Reihen beschränken, deren erstes Glied gleich Eins ist. Wir betrachten also die Reihe

$$1, q, q^2, ...$$

Damit diese Reihe Lösung der Gleichung (2) ist, muss für jedes n die Bedingung

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

erfüllt sein, d.h., wie sich durch Division durch q^{n-2} ergibt, die Bedingung

$$1 + q = q^2$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, d.h. die Zahlen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sind gerade die gesuchten Quotienten der Reihe. Wir bezeichnen sie mit α bzw. β und bemerken, dass $\alpha\beta = 1$ ist.
Wir haben so zwei geometrische Reihen erhalten, die Lösungen der Gleichung (2) sind. Daher sind alle Folgen der Gestalt

$$c_1 + c_2, \quad c_1\alpha + c_2\beta, \quad c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \quad ... \tag{18}$$

Lösungen der Gleichung (2). Da die beiden Reihen verschiedene Quotienten besitzen ($\alpha \neq \beta$) und daher nichtproportional sind, liefert die Formel (18) für verschiedene c_1 und c_2 alle Lösungen der Gleichung (2).

Insbesondere muss uns die Formel (18) für gewisse c_1 und c_2 gerade die Fibonaccische Reihe liefern. Wie oben gezeigt wurde, ist dazu notwendig, c_1 und c_2 aus den Gleichungen

$$c_1 + c_2 = u_1 \qquad \text{und} \qquad c_1\alpha + c_2\beta = u_2$$

d.h. aus dem Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{und} \qquad c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

zu bestimmen. Lösen wir dieses System auf, so erhalten wir

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \qquad ; \qquad c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} u_n &= c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

d.h.

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \tag{19}$$

Die Formel (19) heißt nach dem Namen des Mathematikers, der sie erstmalig bewies, die "Binetsche Formel".

Entsprechende Formeln lassen sich offensichtlich auch für die anderen Lösungen von (2) finden. Der Leser möge für die im Abschnitt 2 der Einleitung angegebenen Folgen die Formeln selbst herleiten.

10. Mit Hilfe der Binetschen Formel kann man nun bequem viele Reihen summieren, die mit Fibonaccischen Zahlen zusammenhängen.
Suchen wir beispielsweise einen Ausdruck für

$$u_3 + u_6 + u_9 + ... + u_{3n}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_3 + u_6 + ... + u_{3n} &= \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + ... + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + ... + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - ... - \beta^{3n}) \end{aligned}$$

oder, wenn man die hierin auftretenden geometrischen Reihen summiert,

$$u_3 + u_6 + ... + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right)$$

Nun gilt aber

$$\alpha^3 - 1 = \alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha$$

und analog $\beta^3 - 1 = 2\beta$. Daher gilt

$$u_3 + u_6 + ... + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\alpha}\right)$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} u_3 + u_6 + ... + u_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2 - \beta^{3n+2} + \beta^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2} \end{aligned}$$

11. Als Beispiel für die Anwendung der Binetschen Formel berechnen wir die Summe der Kuben der ersten n Fibonaccischen Zahlen.
Wir bemerken zunächst:

$$\begin{aligned} u_k^3 &= \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5}\frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5}(u_{3k} - (-1)^k 3u_k) = \frac{1}{5}(u_{3k} + (-1)^{k+1}3u_k) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_1^3 + u_2^3 + ... + u_n^3 = \frac{1}{5}[(u_3 + u_6 + ... + u_{3n}] + 3(u_1 - u_2 + u_3 - ... + (-1)^{n+1}u_n)]$$

oder unter Benutzung der Ergebnisse des vorigen Abschnittes und der Formel (8)

$$u_1^3 + u_2^3 + ... + u_n^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + (-1)^{n+1}3u_{n-1}\right) = \frac{u_{3n+2} + (-1)^{n+1}6u_{n-1} - 1}{10}$$

12. Wir erörtern nun die Frage wie schnell die Fibonaccischen Zahlen mit wachsenden Indizes größer werden. Auch auf diese Frage gibt uns die Binetsche Formel eine völlig erschöpfende Antwort. Man beweist nämlich leicht folgenden Satz.

Satz: Die Fibonaccische Zahl u_n ist die dem n-ten Glied a_n der geometrischen Reihe, deren erstes Glied $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ und deren Quotient α ist, nächstgelegene ganze Zahl.

Beweis: Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass der absolute Betrag der Differenz von u_n und a_n stets kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Es gilt aber

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

Wegen $\beta = -0,68...$ ist $|\beta| < 1$. Folglich ist für beliebiges n immer $|\beta|^n < 1$ und daher erst recht $\frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ (da ja $\sqrt{5} > 2$). Damit ist der Satz bewiesen.

Der Leser, der mit dem Begriff des Grenzwertes vertraut ist, bestätigt leicht die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0$$

deren Beweis nur wenig von dem soeben geführten abweicht.
Benutzen wir den oben bewiesenen Satz, so können wir die Fibonaccischen Zahlen auch mit Hilfe einer Logarithmentafel berechnen.

Gesucht sei beispielsweise u_{14} (die Zahl u_{14} ist, wie man sich leicht überlegt, die Lösung der Fibonaccischen Kaninchenaufgabe):

$$\sqrt{5} = 2,2361 \quad ; \quad \log\sqrt{5} = 0,34949 \quad ; \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180 \quad ; \quad \log\alpha = 0,2089$$

$$\log\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \cdot 0,20898 - 0,34949 = 2,5762 \qquad ; \qquad \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376,9$$

Die zu 376,9 nächstgelegene ganze Zahl ist 377; das ist aber gerade unsere Zahl u_{14}.

Bei der Berechnung von Fibonaccischen Zahlen mit sehr großem Index brauchen wir nicht sämtliche Stellen zu berücksichtigen, die uns die Logarithmentafel angibt. Man kann sich vielmehr mit den ersten Stellen begnügen, so dass man einen Näherungswert erhält.

Zur Übung mag der Leser beweisen, dass u_n für $n \geq 17$ höchstens $\frac{n}{4}$ und mindestens $\frac{n}{5}$ Ziffern im Dezimalsystem besitzt. Aus wieviel Ziffern besteht die Zahl u_{1000}?

2 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonaccischen Zahlen

Bevor wir in unseren Betrachtungen über die Fibonaccischen Zahlen fortfahren, wollen wir uns einiger einfacher Tatsachen aus der Zahlentheorie erinnern.

1. Wir zeigen zunächst, wie man den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen a und b bestimmt.

Wir dividieren a durch b mit Rest. Der sich ergebende Quotient sei q_0, der bei der Division

auftretende Rest r_1. Dann gilt offensichtlich $a = bq_0 + r_1$ und $0 \leq r_1 < b$. Für $a < b$ ist $q_0 = 0$.
Nun teilen wir weiter b durch r_1 und bezeichnen den Quotienten mit q_1, den Rest mit r_2. Dann ist $b = r_1 q_1 + r_2$ und $0 \leq r_2 < r_1$. Da $r_1 < b$ ist, ist $q_1 \neq 0$.
Weiter finden wir bei Division von r_1 durch r_2 ein $q_2 \neq 0$ und ein r_3 mit der Eigenschaft $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ und $0 \leq r_3 < r_2$. In dieser Weise setzen wir den Prozess fort.

Früher oder später muss die Entwicklung einmal abbrechen, und wir haben eine Reihe ganzer positiver und untereinander verschiedener Zahlen r_1, r_2, r_3, ... erhalten, die sämtlich kleiner als b sind. Die Anzahl der r_i kann also b nicht übersteigen, und der Divisionsprozess muss spätestens nach dem b-ten Schritte abbrechen. Abbrechen kann er aber nur dann, wenn einmal eine Division aufgeht, d.h. wenn der Rest gleich Null wird und eine weitere Division daher nicht möglich ist.

Den soeben durchgeführten Prozess bezeichnet man allgemein als Euklidischen Algorithmus. Bei Anwendung dieses Verfahrens auf die Zahlen a und b erhalten wir als Ergebnis das folgende System von Identitäten:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\ &= ... \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_n \end{aligned} \tag{20}$$

Wir betrachten den letzten von Null verschiedenen Rest r_n. Dann ist r_{n-1} offenbar durch r_n teilbar. Wir wenden uns nun in (20) der vorletzten Gleichung zu; die beiden Summanden rechts und daher auch r_{n-2} sind durch r_n teilbar.
Ganz analog weist man schrittweise (induktiv !) nach, dass r_{n-3}, r_{n-4}, ... und schließlich auch a und b durch r_n teilbar sind. Also ist r_n ein gemeinsamer Teiler von a und b.

Wir beweisen jetzt, dass r_n auch der größte gemeinsame Teiler von a und b ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass jeder gemeinsame Teiler von a und b ein Teiler des Restes r_n ist.
Sei also d irgendein gemeinsamer Teiler von a und b. Aus der ersten Gleichung von (20) ersieht man, dass d auch Teiler von r_1 sein muss. Dann ist d auf Grund der zweiten Gleichung von (20) auch Teiler von r_2.
Analog (durch Induktion !) beweisen wir, da $r_3, ..., r_{n-1}$ und folglich auch $r : n$ durch d teilbar sind.

Wir haben also gezeigt, dass die Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf die natürlichen Zahlen a und b immer auf den größten gemeinsamen Teiler dieser Zahlen führt. Diesen größten gemeinsamen Teiler von a und b werden wir im folgenden mit (a, b) bezeichnen.

Als Beispiel wollen wir $(u_{20}, u_{15}) = (6765, 610)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} 6765 &= 610 \cdot 11 + 55, \\ 610 &= 55 \cdot 11 + 5, \\ 55 &= 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

Es ist also $(u_{20}, u_{15}) = 5 = u_5$. Die Tatsache, dass der größte gemeinsame Teller zweier Fibonaccischer Zahlen wieder zu den Fibonaccischen Zahlen gehört, ist nicht zufällig. Wir werden im folgenden zeigen, dass dies ganz allgemein der Fall ist.

2. In der Geometrie finden wir ein dem Euklidischen Algorithmus ähnliches Verfahren bei der Bestimmung der gemeinsamen "Maßeinheit" zweier kommensurabler Strecken.

Betrachten wir also zwei Strecken; die eine habe die Länge a, die andere die Länge b.
Wir tragen die zweite Strecke so oft wie möglich auf der ersten ab (ist $b > a$, so ist dies offenbar überhaupt nicht möglich) und bezeichnen die Länge des eventuell auftretenden Bestes mit r_1. Offenbar ist $r_1 < b$.
Dann tragen wir die Strecke r_1 so oft wie möglich auf der Strecke b ab und bezeichnen den neu auftretenden Rest mit r_2. Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir schließlich eine Folge von Reststrecken, deren Länge offensichtlich immer kleiner wird.
Soweit besteht also vollständige Übereinstimmung mit dem Euklidischen Algorithmus.

Im folgenden jedoch unterscheidet sich das soeben beschriebene geometrische Verfahren grundsätzlich vom Euklidischen Algorithmus für natürliche Zahlen: Die Folge der Reste, die sich beim Vergleich der Strecken ergeben, braucht nicht abzubrechen, da der Prozess keine bestimmte Länge zu haben braucht. Das ist immer dann der Fall, wenn die vorgegebenen Strecken inkommensurabel sind. Aus den Überlegungen von Punkt 1 ergibt sich also u.a., dass zwei Strecken, deren Länge sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, immer kommensurabel sind.

Wir leiten jetzt einige einfache Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen ab.

3. (a, bc) ist teilbar durch (a, b).

Beweis: b und daher auch bc ist durch (a, b) teilbar; (a, b) teilt aber auch a. Folglich ist nach dem in Punkt 1 Bewiesenen auch (a, bc) durch (a, b) teilbar.

4. $(ac, bc) = (a, b)c$.

Beweis: Die Gleichungen (20) beschreiben das Verfahren der Bestimmung von (a, b). Multiplizieren wir nun jede dieser Gleichungen mit c, so erhalten wir, wie man leicht bestätigt, ein Gleichungssystem, das dem Euklidischen Algorithmus für die Zahlen ac und bc entspricht. Der letzte nichtverschwindende Rest ist dann gleich $r_n \cdot c$, d.h. gleich $(a, b) \cdot c$.

5. Aus $(a, c) = 1$ folgt $(a, bc) = (a, b)$. Es ist nämlich nach den Ergebnissen von Punkt 3 (ab, bc) durch (a, bc) teilbar. Aus Punkt 4 ergibt sich

$$(ab, bc) = (a, c)b = 1 \cdot b = b$$

Folglich ist b durch (a, bc) teilbar. Andererseits ist (a, bc) ein Teiler von a. Dann geht (a, bc) nach Punkt 1 auch in (a, b) auf. Da aber nach Punkt 3 (a, b) auch ein Teiler von (a, bc) ist, folgt $(a, b) = (a, bc)$.

6. Trivialerweise gilt: a ist durch b dann und nur dann teilbar, wenn $(a, b) = b$ ist.

7. Ist c durch b teilbar, so ist $(a, b) = (a + c, b)$.

Beweis: Die Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen a und b führt zu dem Gleichungssystem (20). Wir wenden nun den Algorithmus auf die Zahlen $a + c$ und b an.
Da c durch b teilbar ist, wir also c in der Form $c = c_1 b$ schreiben können, liefert uns der erste Schritt des Algorithmus die Gleichung

$$a + c = (q_0 + c_1)b + r_1$$

Alle weiteren Schritte des Algorithmus führen uns nacheinander auf die zweite, dritte, ... usw. Gleichung des Systems (20). Als letzter nichtverschwindender Rest erscheint wie früher r_n, woraus sich die Behauptung $(a, b) = (a + c, b)$ ergibt.

Es sei dem Leser zur nützlichen Übung empfohlen, diesen Satz unter ausschließlicher Verwendung der Ergebnisse der Punkte 3-6, d.h. ohne wiederholte Anwendung des Euklidischen Algorithmus und ohne Benutzung des Systems (20), zu beweisen.

Wir betrachten nun einige Teilbarkeitseigenschaften der Fibonaccischen Zahlen.

8. Satz: Ist n durch m teilbar, so auch u_n durch u_m.

Beweis: Es sei n durch m teilbar, d.h. $n = mm_1$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach m_1.
Für $m_1 = 1$ ist $n = m$. In diesem Falle ist u_n trivialerweise durch u_m teilbar. Wir nehmen nun an, u_{mm_1} sei durch u_m teilbar, und betrachten $u_{m(m_1+1)}$. Nun ist aber $u_{m(m_1+1)} = u_{mm_1+m}$, und wegen Gleichung (10) gilt

$$u_{m(m_1+1)} = u_{mm_1-1}u_m + u_{mm_1}u_{m+1}$$

Der erste Summand der rechten Seite dieser Gleichung ist trivialerweise durch u_m teilbar, der zweite enthält u_m als Faktor, ist also nach Induktionsvoraussetzung durch u_m teilbar. Folglich ist auch die Summe, d.h. $u_{m(m_1+1)}$, durch u_m teilbar, womit der Satz bewiesen ist.

9. Großes Interesse verdient die Frage nach der arithmetischen Natur der Fibonaccischen Zahlen, d.h. die Frage nach ihren Teilern.
Wir zeigen, dass u_n für zusammengesetztes und von 4 verschiedenes n eine zusammengesetzte Zahl ist. (Dabei nennen wir eine Zahl "zusammengesetzt", wenn sie nicht Primzahl ist.)

In der Tat kann man ein derartiges n immer in der Form $n = n_1n_2$ schreiben, wobei $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$ ist und $n_1 > 2$ oder $n_2 > 2$ gilt. Es sei etwa $n_1 > 2$. Dann ist nach dem soeben bewiesenen Satz u_n durch u_{n_1} teilbar, und es gilt ferner $1 < u_{n_1} < u_n$. Damit ist gezeigt, dass u_n eine zusammengesetzte Zahl ist.

10. Satz: Zwei benachbarte Fibonaccische Zahlen sind teilerfremd.

Beweis: Wir nehmen entgegen der Behauptung des Satzes an, u_n und u_{n+1} besäßen irgendeinen gemeinsamen Teiler $d > 1$.
Dann wäre ihre Differenz $u_{n+1} - u_n$, also $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$ durch d teilbar. Analog zeigt man (durch Induktion), dass auch u_{n-2}, u_{n-3}, ... usw. und schließlich u_1 durch d teilbar wären. Nun ist aber bekanntlich $u_1 = 1$ und daher sicher nicht durch $d > 1$ teilbar. Damit ist unsere Annahme zum Widerspruch geführt und der Satz bewiesen.

11. Satz: Es gilt die Gleichung $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $m > n$ annehmen. Wir wenden nun auf die Zahlen m und n den Euklidischen Algorithmus an:

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 \quad &\text{mit} \quad & 0 \leq r_1 < n, \\ n &= r_1q_1 + r_2 \quad &\text{mit} \quad & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \quad &\text{mit} \quad & 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ &r_{t-2} = r_{t-1}q_{t-1} + r_t \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq r_t < r_{t-1}, \\ &t_{t-1} = r_t q_t \end{aligned}$$

Wir wissen aber bereits, dass r_t der größte gemeinsame Teiler von m und n ist. Wir können also wegen $m = nq_0 + r_1$ schreiben:

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0+r_1}, un) \qquad \text{oder} \qquad (u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_r + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n)$$

und auf Grund der Ergebnisse der Punkte 8 und 7

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n)$$

nach den Punkten 10 und 5 erhalten wir hieraus:

$$(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n)$$

Analog beweist man

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1}) \quad ; \quad (u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2}) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad (u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

Diese Gleichungen liefern zusammen:

$$(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

und da r_t, ein Teiler von r_{t-1} ist, so dass auch $u_{r_{t-1}}$ durch u_{r_t} teilbar ist, folgt

$$(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$$

Erinnern wir uns schließlich, dass $r_t = (m, n)$ ist, so kommen wir zu dem verlangten Ergebnis. Insbesondere folgt aus dem soeben bewiesenen Satz die Umkehrung des Satzes von Punkt 8:

Ist u_n teilbar durch u_m, so ist auch n teilbar durch m.
In der Tat folgt aus der Teilbarkeit von u_n durch u_m nach Punkt 6

$$(u_n, u_m) = u_m \tag{21}$$

Wie wir eben bewiesen haben, ist aber

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)} \tag{22}$$

Aus den Gleichungen (21) und (22) zusammen erhalten wir unmittelbar

$$u_m = u_{(n,m)}$$

d.h. $m = (n, m)$; das bedeutet aber, dass n durch m teilbar ist.

12. Der Satz aus Punkt 8 und die Folgerung aus dem Satz in Punkt 11 ergeben zusammen: u_n ist dann und nur dann durch u_m teilbar, wenn n durch m teilbar ist.

Man kann also über die Teilbarkeit von Fibonaccischen Zahlen Aussagen machen, indem man die Teilbarkeit ihrer Indizes untersucht.

Wir gehen nun als Beispiel einige Teilbarkeitskriterien für Fibonaccische Zahlen an. Darunter verstehen wir hier Kriterien, mit deren Hilfe man feststellen kann, ob eine vorgegebene Fibonaccische Zahl durch irgendeine gegebene Zahl teilbar ist oder nicht.

Eine Fibonaccische Zahl ist dann und nur dann gerade (durch 2 teilbar), wenn ihr Index durch 3 teilbar ist.
Eine Fibonaccische Zahl ist dann und nur dann durch 3 teilbar, wenn ihr Index durch 4 teilbar ist.
Eine Fibonaccische Zahl ist dann und nur dann durch 4 teilbar, wenn ihr Index durch 6 teilbar ist.
Eine Fibonaccische Zahl ist dann und nur dann durch 5 teilbar, wenn ihr Index durch 5 teilbar ist.
Eine Fibonaccische Zahl ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn ihr Index durch 8 teilbar ist.

Diese und ähnliche Teilbarkeitskriterien kann der Leser mit Hilfe des zu Anfang dieses Punktes formulierten Satzes leicht selbst beweisen, indem er beziehungsweise die dritten, vierten, sechsten, fünften, achten usw. Fibonaccischen Zahlen betrachtet.
Der Leser möge auch beweisen, dass keine Fibonaccische Zahl existiert, die bei Division durch 8 den Rest 4 lässt, sowie die Tatsache, dass es keine ungerade Fibonaccische Zahl gibt, die durch 17 teilbar ist.

13. Es sei nun eine beliebige ganze Zahl m gegeben. Gibt es dann wenigstens eine Fibonaccische Zahl u_n, die durch m teilbar ist, so lassen sich beliebig viele durch m teilbare Fibonaccische Zahlen finden, etwa die Zahlen u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, ...
Es ist daher interessant, die Frage zu klären, ob man zu einer beliebig vorgegebenen Zahl m immer wenigstens eine durch sie teilbare Fibonaccische Zahl finden kann. Es zeigt sich, dass das der Fall ist.

Es sei $\overline{k}$ der bei der Division von k durch m auftretende Rest. Wir bilden nun die Folge aus den Paaren solcher Reste:

$$<\overline{u}_1,\overline{u}_2>,<\overline{u}_2,\overline{u}_3>,<\overline{u}_3,\overline{u}_4>,...<\overline{u}_n,\overline{u}_{n+1}>,... \qquad (23)$$

Nennen wir zwei derartige Paare $<a_1,b_1>$ und $<a_2,b_2>$ gleich, wenn $a_1=b_1$ und $a_2=b_2$ ist, dann ist die Anzahl aller verschiedenen Restpaare, die bei Division durch m auftreten, gleich m^2.
Unter den ersten m^2+1-Gliedern der Folge (23) gibt es also mit Sicherheit solche, die einander gleich sind.

Es sei $<\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}>$ das erste Paar, das in der Folge (23) zum zweiten Male auftritt. Wir beweisen, dass dieses Paar das Paar $<1,1>$ ist. Wir schließen indirekt, nehmen also an, das erste mehrfach auftretende Paar sei das Paar $<\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}>$ mit $k>1$.
Dann gäbe es in (23) ein Paar $<\overline{u}_l,\overline{u}_{l+1}>$, $(l>k)$, das gleich dem Paar $<\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}>$ wäre.
Da $u_{l-1}=u_{l+1}-u_l$, und $u_{k-1}=u_{k-1}-u_k$ sowie $\overline{u}_{l+1}=\overline{u}_{k+1}$ und $\overline{u}_l=\overline{u}_k$ wäre, so wären auch die bei der Division von u_{l-1} und u_{k-1} durch m auftretenden Reste einander gleich, d.h., es wäre $\overline{u}_{l-1}=\overline{u}_{k-1}$.
Daraus folgte aber, dass auch $<\overline{u}_{k-1},\overline{u}_k>=<\overline{u}_{l_1},\overline{u}_l>$ wäre; das Paar $<\overline{u}_{k-1},\overline{u}_k>$ steht jedoch in der Folge (23) vor dem Paar $<\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}>$ und daher wäre $<\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1}>$ nicht das erste mehrfach auftretende Paar, im Gegensatz zu unserer Annahme.
Wir sehen also, dass die Annahme $k>1$ zu einem Widerspruch führt, und dies besagt, dass $k=1$ ist.

Das Paar $< 1, 1 >$ ist also in der Tat das erste in der Folge (23) mehrfach auftretende Glied. Es möge etwa an der t-ten Stelle stehen (in Übereinstimmung mit dem Obigen können wir $1 < t < m^2 + 1$ annehmen), d.h., es möge $< \overline{u}_t, \overline{u}_{t+1} >=< 1, 1 >$ gelten.
Das bedeutet, dass sowohl u_t, als auch u_{t+1} bei Division durch m den Rest 1 lassen. Folglich ist ihre Differenz durch m teilbar. Wegen

$$u_{t+1} - u_t = u_{t-1}$$

ist dann also die $(t-1)$-te Fibonaccische Zahl durch m teilbar. Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz: Zu jeder vorgegebenen ganzen Zahl m lässt sich unter den ersten m^2 Fibonaccischen Zahlen immer wenigstens eine finden, die durch m teilbar ist.

Wir bemerken, dass der bewiesene Satz nichts darüber aussagt, welche Fibonaccische Zahl durch m teilbar ist. Er besagt lediglich, dass die erste durch m teilbare Fibonaccische Zahl nicht übermäßig groß ist.

3 Fibonaccische Zahlen und Kettenbrüche

1. Wir betrachten den Ausdruck

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}} \tag{24}$$

Die Zahlen q_1, q_2, q_3, ..., q_n sollen hier ganz und positiv sein, q_0 hingegen eine nichtnegative ganze Zahl. Zum Unterschied von den Zahlen q_1, q_2, ..., q_n darf also q_0 auch gleich Null sein. Diese Besonderheit der Zahl g_0 wollen wir immer beachten und sie deshalb nicht jedesmal von neuem hervorheben.

Den Ausdruck (24) bezeichnet man als Kettenbruch und die Zahlen q_0, q_1, q_2, ..., q_n als Teilnenner dieses Bruches, q_0 auch als Anfangsglied.
Kettenbrüche werden in den verschiedensten Gebieten der Mathematik angewandt. Dem Leser, der sich eingehender mit ihnen beschäftigen will, sei das Buch von A. J. Chinchin "Kettenbrüche") empfohlen.[2]

Der Prozess der Verwandlung einer Zahl m in einen Kettenbruch heißt Entwicklung dieser Zahl in einen Kettenbruch.
Wir wollen nun sehen, wie man bei einer solchen Entwicklung eines gewöhnlichen Bruches $\frac{a}{b}$ die Teilnenner findet. Zu diesem Zweck wenden wir den Euklidischen Algorithmus auf die

[2] In der deutschen Literatur: C. Knochendöppel, Von den Kettenbrüchen und den diophantischen Gleichungen, Volk und Wissen, Berlin-Leipzig 1948, O. Perron, Irrationalzahlen, W.de Gruyter Air & Co., 1939. und O. Perron. Kettenbrüche, B. G. Teubner, Leipzig 1929

Zahlen a und b an:

$$
\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1, \\
b &= r_1 q_1 + r_2, \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, \\
&\dots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\
r_{n-1} &= r_n q_n
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Die erste dieser Gleichungen liefert uns

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\dfrac{b}{r_1}}$$

Aus der zweiten Gleichung des Systems (25) folgt aber

$$\frac{b_1}{r} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}$$

so dass

$$\frac{a}{b} = q_0 \frac{1}{q_1 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}}$$

gilt. Aus der dritten Gleichung von (25) erhalten wir

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\dfrac{r_2}{r_3}}$$

und daher

$$\frac{a}{b} = q_0 \frac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_2}{r_3}}}}$$

Führen wir diesen Prozess bis zu Ende durch (Induktion), so erhalten wir, wie leicht zu sehen ist, die Gleichung

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Aus dem Euklidischen Algorithmus selbst folgt $q_n > 1$. (Wäre nämlich $q_n = 1$, so wäre $r_n = r_{n-1}$ und dann wäre r_{n-2} durch r_{n-1} teilbar, d.h., der ganze Algorithmus würde schon einen Schritt eher abbrechen.)
An Stelle von q_n können wir also auch den Ausdruck $(q_n - 1) + \frac{1}{1}$ betrachten, d.h. wir können $(q_n - 1)$ als vorletzten und 1 als letzten Teilnenner ansehen. Diese Festsetzung wird sich im folgenden als sehr nützlich erweisen.

Der Euklidische Algorithmus verläuft bei Anwendung auf ein beliebig vorgegebenes Paar natürlicher Zahlen a und b völlig eindeutig. Die Teilnenner der Kettenbruchzerlegung von $\frac{a}{b}$ sind durch das System der Gleichungen, welche den Euklidischen Algorithmus für a und b beschreiben, ebenfalls eindeutig bestimmt.
Daher können wir jeden rationalen Bruch $\frac{a}{b}$ auf eine und nur eine Weise in einen Kettenbruch entwickeln.

2. Es sei

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{26}$$

irgendein Kettenbruch. Wir betrachten nun die folgenden Zahlen:

$$q_0, \qquad q_0 + \frac{1}{q_1}, \qquad q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \qquad \dots$$

Diese Zahlen, in Form gewöhnlicher unkürzbarer (reduzierter) Brüche geschrieben:

$$\begin{aligned}
\frac{P_0}{Q_0} &= \frac{q_0}{1} \\
\frac{P_1}{Q_1} &= q_0 + \frac{1}{q_1} \\
\frac{P_2}{Q_2} &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} \\
&\dots \\
\frac{P_n}{Q_n} &= \omega
\end{aligned}$$

' nennt man die Näherungsbrüche des Kettenbruches ω.
Wir bemerken, dass der Übergang von $\frac{P_k}{Q_k}$ zu $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ erfolgt, indem man den letzten Teilnenner q_k der im Näherungsbruch vorkommt, durch $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$ ersetzt.

3. Eine wichtige Rolle in der Theorie der Kettenbrüche spielt der nachstehende Hilfssatz.

Lemma. Für jeden Kettenbruch (26) gelten die folgenden Beziehungen:

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1} \tag{27}$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \tag{28}$$

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k \tag{29}$$

Wir beweisen alle diese Relationen gleichzeitig durch Induktion nach k.
Zunächst beweisen wir sie für $k = 1$:

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0q_1 + 1}{q_1}$$

Da die Zahlen $q_0q_1 + 1$ und q_1 teilerfremd sind, ist der Bruch $\frac{q_0q_1+1}{q_1}$ unkürzbar. Der Bruch $\frac{P_1}{Q_1}$ ist definitionsgemäß unkürzbar. Gleiche unkürzbare Brüche haben aber gleiche Zähler und gleiche Nenner.
Also ist $P_1 = q_0q_1 + 1$ und $Q_1 = q_1$.

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{q_0(q_1q_2 + 1) + q_2}{q_1q_2 + 1} \tag{30}$$

Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $q_0(q_1q_2 + 1) + q_2$ und $q_1q_2 + 1$ ist nach Punkt 7 von § 2 gleich $(q_2, q_1q_2 + 1)$, und auf Grund desselben Satzes gleich $(q_2, 1)$, also gleich 1. Der auf der rechten Seite der Gleichung (30) stehende Bruch ist also unkürzbar, und daher gilt

$$P_2 = q_0(q_1q_2 + 1) + q_2 = (q_0q_1 + 1)q_2 + q_0 = P_1q_2 + P_0$$

und

$$Q_2 = q_1q_2 + 1 = Q_1q_2 + Q_0$$

Die Gleichung

$$P_2Q_1 - P_1Q_2 = (-1)^1$$

lässt sich ohne Schwierigkeit nachweisen.
Damit ist der erste Teil des Induktionsbeweises erbracht.

Wir nehmen nun an, die Gleichungen (27), (28) und (29) seien richtig, und betrachten den Näherungsbruch

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_kq_{k+1} + P_{k-1}}{Q_kq_{k+1} + Q_{k+1}}$$

Der Übergang von $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ zu $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ erfolgt, wie früher bemerkt wurde, indem man q_{k+1} in dem Ausdruck für $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ durch $q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}$ er-setzt.
Da q_{k+1} in den Formeln für P_k, Q_k, P_{k-1}, Q_{k-1} nicht vorkommt, erhalten wir so

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_k\left(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}\right) + P_{k-1}}{Q_k\left(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}\right) + Q_{k-1}}$$

oder unter Beachtung unserer Induktionsvoraussetzungen (27) und (28)

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_{k+1}q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k} \tag{31}$$

Wir beweisen nun, dass der auf der rechten Seite von (31) stehende Bruch unkürzbar ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.
Wir nehmen an, die Zahlen $P_{k+1}q_{k+2}+P_k$ und $Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k$ hätten irgendeinen gemeinsamen Teiler $d > 1$. Dann wäre auch der Ausdruck

$$(P_{k+1}q_{k+2} + P_k)Q_{k+1} - (Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k)P_{k+1}$$

durch d teilbar. Nach unserer Induktionsannahme (29) ist dieser Ausdruck aber gleich $(-1)^{k+1}$, kann also nicht durch d teilbar sein.
Folglich ist die rechte Seite von (31) unkürzbar, und (31) ist eine Identität zweier unkürzbarer Brüche. Also folgt

$$P_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2} + P_k \qquad \text{und} \qquad Q_{k+2} = Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass

$$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = (-1)^{k+1} \tag{32}$$

gilt. Nach dem eben Bewiesenen ist aber

$$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} + P_kQ_{k+1} - P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_k$$

und (32) folgt unmittelbar aus der Induktionsannahme (29). Damit ist der Induktionsschluss geführt und der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung:
$$\frac{Pk+1}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}} \tag{33}$$
Der Beweis liegt auf der Hand.
Da die Teilnenner von Kettenbrüchen ganze positive Zahlen sind, folgt aus dem eben bewiesenen Hilfssatz
$$P_0 < P_1 < P_2 < ... \qquad , \qquad Q_0 < Q_1 < Q_2 < ... \tag{34}$$
Diese einfache, aber wichtige Bemerkung werden wir im weiteren noch präzisieren.

4. Wir verwenden nun den Hilfssatz aus Punkt 3 zur Beschreibung aller Kettenbrüche, deren Teilnenner gleich 1 sind. Für solche Brüche gilt der folgende interessante Satz.

Satz: Hat ein Kettenbruch n Teilnenner, die sämtlich gleich 1 sind, so ist dieser Bruch gleich $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Beweis: Wir wollen einen Kettenbruch mit n Teilnennern, deren jeder gleich 1 ist, mit α_n bezeichnen. Offensichtlich sind
$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$$
aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von α_n. Es sei

$$\alpha_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

Wegen
$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{1} \qquad \text{und} \qquad \alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$
ist $P_1 = 1$ und $P_2 = 2$. Ferner ist $P_{n+1} = P_nq_{n+1} + Pn - 1 = P_n + P_{n-1}$.
Daher gilt (man vergleiche Punkt 8, § 1) $P_n = u_{n+1}$. Analog ergibt sich $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$ und $Q_{n+1} = Q_nq_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n+1}$ und daraus $Q_n = u_n$. Folglich ist

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{35}$$

Der Leser vergleiche dieses Ergebnis mit den Formeln (12) und (29).

5. Gegeben seien zwei Kettenbrüche ω und ω':

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + ...}} \qquad ; \qquad \omega' = q'_0 + \cfrac{1}{q'_1 + \cfrac{1}{q'_2 + ...}}$$

mit

$$q'_0 \geq q_0 \quad , \quad q'_1 \geq q_1 \quad , \quad q'_2 \geq q_2 \quad , ... \tag{36}$$

Die Näherungsbrüche von ω bezeichnen wir mit

$$\frac{P_0}{Q_0} \quad , \quad \frac{P_1}{Q_1} \quad , \quad \frac{P_2}{Q_2} \quad , ...$$

die Näherungsbrüche von ω' mit

$$\frac{P'_0}{Q'_0} \quad , \quad \frac{P'_1}{Q'_1} \quad , \quad \frac{P'_2}{Q'_2} \quad , ...$$

Aus den Ergebnissen des Satzes von Punkt 3 ersieht man leicht, dass wegen (36)

$$P'_0 \geq P_0, \quad P'_1 \geq P_1, \quad P'_2 \geq P_2 \quad , ... \quad \text{und} \quad Q'_0 \geq Q_0, \quad Q'_1 \geq Q_1, \quad Q'_2 \geq Q_2 \quad , ...$$

gilt.
Der kleinste Wert, den ein Teilnenner annehmen kann, ist offensichtlich 1. Sind also alle Teilnenner irgendeines Kettenbruches gleich 1, so wachsen die Zähler und Nenner seiner Näherungsbrüche langsamer als die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche jedes anderen Kettenbruches.

Wir schätzen nun ab, um wieviel langsamer dieses Anwachsen geschieht. Abgesehen von den Kettenbrüchen, deren sämtliche Teilnenner gleich 1 sind, wachsen offensichtlich Zähler und Nenner der Näherungsbrüche derjenigen Kettenbrüche am langsamsten an, bei denen einer der Teilnenner den Wert 2 hat, während alle anderen gleich 1 sind.
Solche Kettenbrüche hängen nun, wie der folgende Satz lehrt, ebenfalls mit den Fibonaccischen Zahlen zusammen.

Lemma: Der Kettenbruch ω habe die Teilnenner q_0, q_1, q_2, ..., q_n und es gelte

$$q_0 = q_1 = q_2 = ... = q_{i-1} = q_{i+1} = ... = q_n = 1 \quad , \quad q_i = 2 \qquad (i \neq 0)$$

Dann ist

$$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}$$

Der Beweis dieses Satzes wird durch Induktion nach i geführt.
Ist $i = 1$, so gilt für jedes n:

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{\underbrace{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{1}}}}_{n-1 \text{ Teilnenner}}}$$

oder wegen des zu Anfang dieses Punktes Bewiesenen,

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2u_n + u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+2}} = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+2}}$$

und schließlich, wenn wir noch, wie vorausgesetzt, $u_0 = 0$ setzen,

$$\omega = \frac{u_2 u_{n+2} + u_1 u_n}{u_1 u_{n+2} + u_0 u_n}$$

Der erste Teil des Induktionsbeweises ist damit erbracht. Wir nehmen nun an, es gelte für jedes n:

$$\underbrace{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_{n-i}}}}}}_{i \text{ Teilnenner}} = \frac{u_{i+1} u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1} u_{n-i+1}} \tag{37}$$

Wir betrachten den Kettenbruch $\underbrace{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_{n-i-1}}}}}}_{i+1 \text{ Teilnenner}}$.

Dieser Kettenbruch kann offensichtlich auch so aufgefasst werden

$$\underbrace{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha_{n-i-1}}}}}}_{i \text{ Teilnenner}} \tag{38}$$

Der Kettenbruch, der in (38) in der Klammer steht, ist nach Formel (37) gleich

$$\frac{u_{i+1} u_{n-i+2} + u_i u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}}$$

Der gesamte Bruch (38) ist also gleich

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\frac{u_{i+1} u_{n-i+2} + u_i u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}}} &= \frac{(u_i + u_{i+1}) u_{n-i+2} + (u_{i-1} + u_i) u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}} \\ &= \frac{u_{i+2} u_{n-i+2} + u_{i+1} u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}} \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschluss geführt und der ganze Satz bewiesen.

Folgerung: Es seien nicht alle Teilnenner eines Kettenbruches ω gleich 1; ferner sei $q_0 \neq 0$ und die Anzahl der von 1 verschiedenen Teilnenner sei mindestens n. Schreibt man ω in der Form eines gewöhnlichen Bruches $\frac{P}{Q}$, so erhält man

$$P \geq u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1} > u_{i+1}u_{n-i+2} + u_i u_{n-i+2} = u_{n+2}$$

und analog $Q > u_{n+1}$.

Eine wesentliche Rolle spielt dabei natürlich der Hilfssatz aus Punkt 3, auf Grund dessen wir beim Prozess des "Abbaus" eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch nur unkürzbare Brüche erhalten. Daher lassen sich Zähler und Nenner des erhaltenen Bruches nicht durch Kürzen verkleinern.

6. Aus den Betrachtungen des vorigen Punktes können wir den nachstehenden Satz folgern, der auf die besondere Stellung der Fibonaccischen Zahlen in bezug auf den Euklidischen Algorithmus hinweist.

Satz: Die Anzahl der Schritte bei der Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen a und b ist für beliebiges a gleich $n-1$, wenn $b = u_n$, und für jedes a kleiner als $n-1$, wenn $b < u_n$ ist.

Beweis: Der erste Teil des Satzes lässt sich recht leicht beweisen. Es genügt für a die auf b folgende Fibonaccische Zahl, also u_{n+1} einzusetzen. Dann gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_n$$

Der Kettenbruch α_n hat n Teilnenner, d.h., der Euklidische Algorithmus für die Zahlen a und b bricht nach $n-1$ Schritten ab.

Wir, beweisen nun den zweiten Teil des Satzes indirekt, d.h., wir nehmen an, die Anzahl der Schritte des Algorithmus wäre nicht kleiner als $n-1$.
Wir entwickeln den Quotienten $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch ω. Offensichtlich hätte ω nicht weniger als n Teilnenner (nämlich einen mehr, als der Euklidische Algorithmus Schritte hat). Da b keine Fibonaccische Zahl ist, sind nicht alle Teilnenner von ω gleich 1, und nach der Folgerung aus dem Satz in Punkt 5 wäre $b > u_n$. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung unseres Satzes

Der eben bewiesene Satz besagt, dass der auf benachbarte Fibonaccische Zahlen angewandte Euklidische Algorithmus in gewissem Sinne "am längsten"ist.

7. Einen Ausdruck der Form

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{39}$$

bezeichnet man als unendlichen Kettenbruch. Die Definitionen und Ergebnisse der vorhergehenden Punkte lassen sich in natürlicher Weise auch auf solche unendliche Kettenbrüche ausdehnen. Sei

$$\frac{P_0}{Q_0} \quad , \quad \frac{P_1}{Q_1} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{P_n}{Q_n} \quad , \quad \dots \tag{40}$$

die - offensichtlich unendliche - Folge der Näherungsbrüche des Bruches (39). Wir wollen zeigen, dass diese Folge einen Grenzwert besitzt.
Dazu betrachten wir die Teilfolgen

$$\frac{P_0}{Q_0} \quad , \quad \frac{P_2}{Q_2} \quad , \quad ... \quad , \quad \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad , \quad ... \tag{41}$$

und

$$\frac{P_1}{Q_1} \quad , \quad \frac{P_3}{Q_2} \quad , \quad ... \quad , \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} \quad , \quad ... \tag{42}$$

Wegen (33) und (34) gilt

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}} > 0$$

Die Folge (41) ist also wachsend. Genauso folgt aus

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} \frac{-1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}} + \frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} < 0$$

dass (42) eine abnehmende Folge ist.
Die Glieder der Folge (42) sind sämtlich größer als die Glieder der Folge (41). Betrachten wir nämlich die Zahlen

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \qquad \text{und} \qquad \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

und geben wir eine ungerade Zahl k vor, die sowohl größer als $2n$ als auch größer als $2m+1$ ist, so ergibt sich aus (33), dass

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \tag{43}$$

gilt; aus der Tatsache, dass (41) eine wachsende und (42) eine fallende Folge ist, folgt

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \qquad \text{und} \qquad \frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} \tag{44,45}$$

Vergleichen wir (43), (44) und (45), so erhalten wir gerade

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

Wegen (33) und (84) gilt

$$\left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \frac{1}{n^2}$$

für wachsendes n strebt demnach der Absolutbetrag der Differenz des $(n+1)$-ten und n-ten Näherungsbruches gegen Null.
Aus all dem Gesagten kann man schließen, dass die Folgen (41) und (42) ein und denselben Grenzwert besitzen, der offensichtlich auch Grenzwert von (40) ist. Diesen Grenzwert bezeichnet man als den Wert des unendlichen Kettenbruches (39).

Wir beweisen nun, dass jede Zahl nur als Wert eines einzigen Kettenbruches erscheinen kann. Dazu geben wir zwei (endliche oder unendliche) Kettenbrüche ω und ω' vor. Es seien q_0, q_1, q_2, ... und q'_0, q'_1, q'_2, ... ihre Teilnenner.

Wir zeigen, dass aus der Gleichung $\omega = \omega'$ die Beziehungen $q_0 = q'_0$, $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$ usw. folgen. Zunächst ist q_0 der ganzzahlige Teil der Zahl ω, q'_0 der ganzzahlige Teil von ω'; also ist in der Tat $q_0 = q'_0$.
Ferner kann man die Kettenbrüche ω und ω' in der Form

$$q_0 + \frac{1}{\omega_1} \qquad \text{und} \qquad q'_0 + \frac{1}{\omega'_1}$$

darstellen, wobei ω_1 und ω'_1 wieder Kettenbrüche sind.
Aus $\omega = \omega'$ und $q_0 = a'_0$ folgt, dass $\omega_1 = \omega'_1$ sein muss. Es sind also auch die ganzzahligen Teile q_1 und q'_1 der Zahlen ω_1 und ω'_1 einander gleich. Setzt man diese Überlegungen fort (Induktion), so überzeugt man sich leicht davon, dass auch $q_2 = q'_2$, $q_3 = q'_3$ usw. gelten muss.

Da sich eine rationale Zahl immer in einen endlichen Kettenbruch entwickeln lässt, so folgt aus dem soeben Bewiesenen, dass die Entwicklung einer rationalen Zahl in einen unendlichen Kettenbruch nicht möglich ist. Daher ist der Wert eines unendlichen Kettenbruches stets eine irrationale Zahl.

Die Theorie der Entwicklung irrationaler Zahlen in Kettenbrüche ist ein inhaltlich tiefgehendes Gebiet der Zahlentheorie, das interessante Resultate birgt. Wir können hier nicht näher auf diese Theorie eingehen, sondern wollen uns nur mit einem Beispiel begnügen, das mit den Fibonaccischen Zahlen zusammenhängt.

8. Gesucht ist der Wert des unendlichen Kettenbruches

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Wir haben oben bewiesen, dass dieser Wert gleich $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ist, und wollen diesen Grenzwert nun berechnen.
Wie schon in Punkt 12, § 1 festgestellt wurde, ist u_n gleich der zu $\frac{\alpha_n}{\sqrt{5}}$ nächstgelegenen ganzen Zahl. Also gilt

$$u_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{5}} + \theta_n$$

wobei $|\theta_n| < \frac{1}{2}$ für jedes n gilt. Daher gilt nach Punkt 4

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}$$

Nun ist aber $\theta_{n+1}\sqrt{5}$ beschränkt (der Absolutbetrag ist kleiner als 2), während α^n für $n \to \infty$ unbegrenzt wächst (wegen $\alpha > 1$). Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

Aus den gleichen Gründen ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \alpha$$

Der bewiesene Satz besagt, dass die Quotienten benachbarter Fibonaccischer Zahlen bei wachsenden Indizes gegen α streben. Das kann zur angenäherten Berechnung der Zahl α benutzt werden (vgl. die Berechnung von u_n in Abschnitt 12 von § 1).
Der dabei auftretende Fehler ist gering, selbst wenn man kleine Fibonaccische Zahlen verwendet. Zum Beispiel ist

$$\frac{u_{10}}{u_9} = \frac{55}{34} = 1,6176$$

auf 4 Stellen genau, während der genaue Wert von α gleich 1,6180 ist. Wie man sieht, ist also der Fehler kleiner als 0,1%.

Übrigens ist der Fehler bei der angenäherten Berechnung irrationaler Zahlen mit Hilfe der Näherungsbrüche ihrer Kettenbruchentwicklungen gerade bei der Zahl α am größten.
Jede andere Zahl wird durch ihre Näherungsbrüche in gewissem Sinne "genauer" approximiert als α. Wir können aber auf diesen Sachverhalt nicht näher eingehen, obwohl er äußerst interessant ist.

4 Die Fibonaccischen Zahlen und die Geometrie

1. Wir wollen eine gegebene Strecke AB der Länge 1 (Abb. 2) so in zwei Abschnitte teilen, dass der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Abschnitt und der ganzen Strecke ist.

Die gesuchte Länge des größeren Streckenabschnittes bezeichnen wir mit x. Offensichtlich wird dann die Länge des kleineren Abschnittes gleich $1-x$, und aus der in der Aufgabe angegebenen Bedingung erhalten wir die Proportion

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \tag{46}$$

und daraus

$$x^2 = 1 - x \tag{47}$$

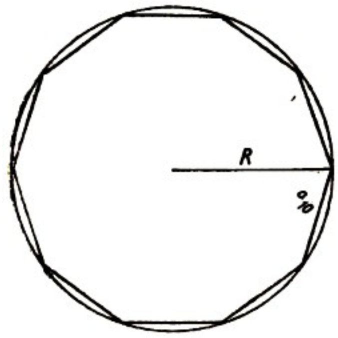
Die Gleichung (47) hat die positive Wurzel $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, so dass die Proportion (46) die Gestalt

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

annimmt. Eine solche Teilung (durch den Punkt C_1) bezeichnet man als "stetige Teilung" oder als "Goldenen Schnitt".

Verwendet man die negative Wurzel der Gleichung (47), so ergibt sich der Punkt C_2, der, wie aus Abb. 2 ersichtlich ist, nicht auf der Strecke AB liegt. (In der Geometrie spricht man hier von äußerer Teilung.) Man zeigt leicht, dass wir es auch hierbei mit dem Goldenen Schnitt zu tun haben:

$$\frac{C_2B}{AB} = \frac{AB}{C_2A} = \alpha$$



2. Dem Goldenen Schnitt begegnet man in der Geometrie ziemlich häufig.
Einem Kreis vom Radius R sei ein regelmäßiges Zehneck einbeschrieben (Abb. 3). Die Seite am a_{10} hat bekanntlich die Länge

$$2R \sin \frac{360°}{2 \cdot 10}$$

d.h. $2R \sin 18°$. Berechnen wir einmal ein 18°. Auf Grund bekannter trigonometrischer Formeln erhalten wir:

$$\sin 36° = 2 \sin 18° \cos 18° \qquad , \qquad \cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$$

so dass

$$\sin 72° = 4 \sin 18° \cdot \cos 18°(1 - 2\sin^2 18°) \qquad (*)$$

gilt. Wegen $\sin 72° = \cos 18° \neq 0$ folgt aus (*)

$$1 = 4 \sin 18°(1 - 2sin^2 18°)$$

daher ist $\sin 18°$ eine der Wurzeln der Gleichung

$$1 = 4x(1 - 2x^2) \qquad \text{bzw.} \qquad 8x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

Zerlegen wir deren linke Seite in Faktoren, so erhalten wir

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

und daraus

$$x_1 = \frac{1}{2}; \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \qquad x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

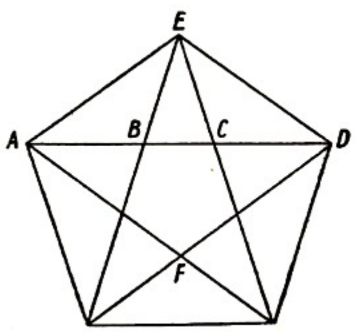
Da $\sin 181\circ$ positiv und von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, muss $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ sein. Daher ist

$$a_{10} = 2R\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = R\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{R}{\alpha}$$

Mit anderen Worten, a_{10} ist gleich dem größeren Teil des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Radius.

Zur praktischen Berechnung von a_{10} kann man α durch das Verhältnis benachbarter Fibonaccischer Zahlen ausdrücken (Punkt 12, § 1 oder Punkt 8, § 3) und angenähert a_{10} gleich $\frac{8}{13}R$ oder sogar schon gleich $\frac{5}{8}R$ setzen.

3. Wir wollen nun ein regelmäßiges Fünfeck betrachten. Seine Diagonalen beschreiben ein regelmäßiges sternförmiges Fünfeck (Abb. 4).



Der Winkel AFD ist gleich 108°, der Winkel ADF gleich 36°. Nach dem Sinussatz folgt:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = 2\frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \alpha$$

Da offensichtlich $AF = AC$ ist, gilt

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC} = \alpha$$

d.h., der Punkt C teilt die Strecke AD nach dem Goldenen Schnitt.

Nach Definition des Goldenen Schnittes ist dann auch

$$\frac{AC}{CD} = \alpha$$

Berücksichtigen wir $AB = CD$, so erhalten wir:

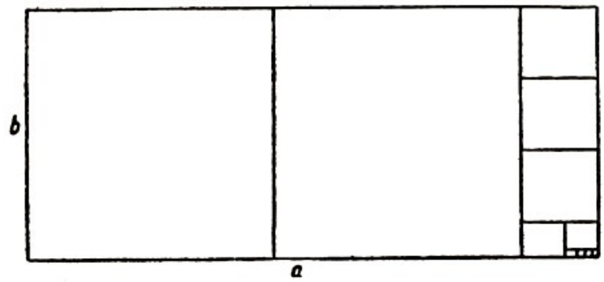
$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \alpha$$

Aus diesem Grunde ist unter den Strecken BC, AB, AC, AD jede Strecke α-mal so groß wie die vorhergehende. Der Leser möge beweisen, dass auch

$$\frac{AD}{AE} = \alpha$$

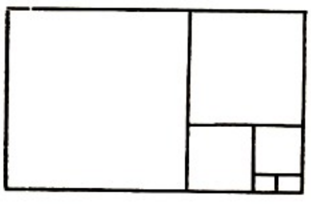
gilt.

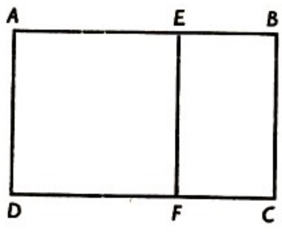
4. In ein Rechteck mit den Seiten a und b zeichnen wir möglichst große Quadrate ein (Abb.).



Die Betrachtungen in Punkt 2, § 2 zeigen, dass dieser Prozess, falls a und b ganz sind, dem Euklidischen Algorithmus für a und b entspricht. Die Anzahl der Quadrate von gleicher Größe ist daher gleich den entsprechenden Teilnennern der Kettenbruchentwicklung von $\frac{a}{b}$ (Punkt 1, § 3).

Zerlegen wir ein Rechteck, dessen Seiten sich wie benachbarte Fibonaccische Zahlen verhalten, auf die beschriebene Weise in Quadrate (Abb. 6), so sind nach Punkt 4, § 3 alle Quadrate - außer den beiden kleinsten - von verschiedener Größe.





Das Verhältnis der beiden Rechteckseiten sei α. (Solche Rechtecke wollen wir der Kürze halber "harmonische Rechtecke" nennen.) Wir beweisen nun:
Zeichnet man in ein harmonisches Rechteck ein möglichst großes Quadrat ein (Abb. 7), so erhält man als Rest wieder ein harmonisches Rechteck.
Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{AB}{AD} = \alpha$$

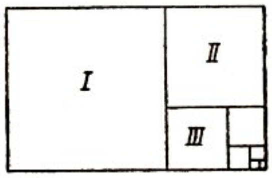
ferner ist $AD = AE = EF$, da $AEFD$ ein Quadrat ist. Also ist

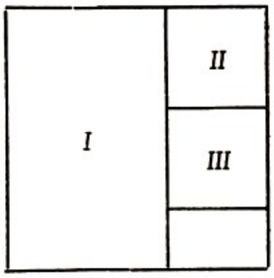
$$\frac{EF}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \alpha^2 - 1$$

Wegen $\alpha^2 - 1 = \alpha$ folgt schließlich

$$\frac{EF}{EB} = \alpha$$

Abb.8 veranschaulicht, wie ein harmonisches Rechteck "fast ganz" durch die Quadrate I, II, III, . . . ausgeschöpft werden kann. Dabei ist die Figur, die nach Einzeichnung eines weiteren Quadrates verbleibt, jedesmal ein harmonisches Rechteck.





Der Leser vergleiche diese Überlegungen mit denen in den Punkten 4 und 5 des vorhergehenden Paragraphen.

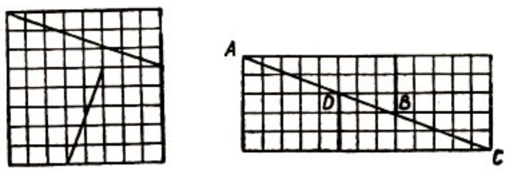
Wir bemerken noch folgendes: Zeichnet man in ein Quadrat ein harmonisches Rechteck I und die Quadrate II und III ein (s. Abb.9), so erweist sich das verbleibende Rechteck ebenfalls als ein harmonisches Rechteck. Die Durchführung des Beweises sei dem Leser überlassen.

5. Harmonische Rechtecke sehen "wohlproportioniert" aus und wirken gefällig. Gegenstände dieser Gestalt erweisen sich auch als bequem im Gebrauch. Daher gibt man vielen unserer "rechteckigen" Gebrauchsgegenstände - wie Büchern, Streichholzschachteln, Koffern usw. - diese Form.

Verschiedene idealistische Philosophen des Altertums und des Mittelalters leiteten aus der augenfälligen Schönheit der harmonischen Rechtecke und anderer Figuren, in denen der Goldene Schnitt Verwendung findet, ästhetische und sogar philosophische Prinzipien ab.
Mit Hilfe des Goldenen Schnittes und einiger anderer Zahlenverhältnisse versuchten sie, die Erscheinungen in der Natur und im gesellschaftlichen Leben zu erklären.

Unter Benutzung der Zahl α selbst und ihrer Näherungsbrüche erfanden sie mystische "Operationen" verschiedener Art.
Solche "Theorien" haben mit Wissenschaft natürlich nicht das geringste zu tun.

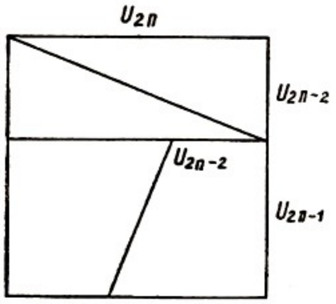
6. Wir beschließen unsere Betrachtungen mit einem kleinen geometrischen Scherz. Wir "beweisen" nämlich anschaulich, dass 64 = 65 ist.
Dazu nehmen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 und zerlegen es so in vier Teile, wie Abb. 10 zeigt.

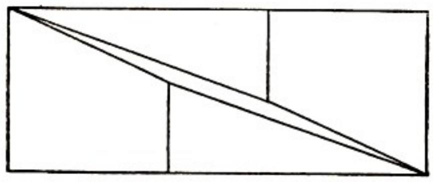


Diese vier Teile setzen wir zu einem Rechteck mit den Seitenlängen 13 und 5 zusammen (Abb. 11).
Das Rechteck hat also den Flächeninhalt 65.

Für diese auf den ersten Blick rätselhafte Erscheinung findet man leicht eine Erklärung. Die Punkte A, B, C, D in Abb. 11 liegen nämlich in Wirklichkeit gar nicht auf einer Geraden, sondern bilden vielmehr die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Flächeninhalt gerade gleich der einen "überzähligen" Einheit ist.

Dieser verblüffende, aber falsche "Beweis" einer wissenschaftlich falschen Aussage (solche "Beweise" nennt man Sophismen) kann noch anschaulicher und überzeugender durchgeführt werden, wenn man an Stelle des Quadrates mit der Seitenlänge 8 ein Quadrat nimmt, dessen Seitenlänge gleich irgendeiner Fibonaccischen Zahl mit hinreichend großem geradem Index, u_{2n}, ist. Wir zerlegen dieses Quadrat wieder (Abb. 12) und formen aus seinen Teilen ein Rechteck (Abb.l3).





Die nicht ausgefüllte Fläche in Form eines Parallelogramms, das sich längs der Diagonale unseres Rechtecks hinzieht, hat nach den Ausführungen von Punkt 6, § 1 einen Inhalt, der gleich 1 ist. Die größte Breite, d.h. die Höhe dieses Parallelogramms, ist, wie man leicht bestätigt, gleich

$$\frac{1}{\sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n-2}^2}}$$

Nehmen wir also ein Quadrat mit der Seitenlänge 21 cm und "verwandeln" es in ein Rechteck mit den Seiten 34 cm und 13 cm, so ist die Hohe des auftretenden Parallelogramms

$$\frac{1}{\sqrt{21^2 + 8^2}} \text{ cm}$$

d.h. ungefähr 0,4 mm, also für das Auge kaum wahrnehmbar.

Schlussbemerkungen

Nicht alle Probleme, die mit den Fibonaccischen Zahlen zusammenhängen, sind so leicht lösbar wie die hier behandelten. Wir weisen auf einige Fragen hin, deren Lösung entweder vorläufig überhaupt noch offen steht oder deren Beantwortung nur auf sehr kompliziertem Wege und unter Anwendung weit kräftigerer Untersuchungsmethoden möglich ist.

1. Es sei u_n die in der natürlichen Reihenfolge erste durch eine gewisse Primzahl p teilbare Fibonaccische Zahl. In diesem Falle nennt man p einen zu u_n gehörigen Teiler. Beispielsweise ist 11 ein zu u_{10} gehöriger, 17 ein zu u_9 gehöriger Teiler usw.
Es zeigt sich, dass jede Fibonaccische Zahl mit Ausnahme von u_1, u_2, u_6 und u_{12} mindestens einen zugehörigen Teiler besitzt.

2. Es erhebt sich natürlich die Frage, welchen Index n diejenige Fibonaccische Zahl hat, von der eine vorgegebene Primzahl p zugehöriger Teiler ist.
Aus Punkt 13, § 2 wissen wir, dass $n \leq p^2$ ist. Wie man beweisen kann, gilt sogar $n \leq p + 1$.
Weiter kann man zeigen:
Hat p die Gestalt $5t \pm 1$, so ist u_{p-1} durch p teilbar; ist p von der Form $5t \pm 2$, so ist p Teiler von u_{p-1}.
Eine allgemeine Formel zur Bestimmung des Index der Fibonaccischen Zahl, von der ein zugehöriger Teiler p gegeben ist, lässt sich jedoch noch nicht angeben.

3. In Punkt 9, § 2 wurde gezeigt, dass alle Fibonaccischen Zahlen, deren Indizes keine Primzahlen sind, mit Ausnahme von u_4 selbst zusammengesetzte Zahlen sind.
Das Umgekehrte gilt jedoch nicht, wie das Beispiel $u_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ zeigt.
Es erhebt sich die Frage, ob es unter den Fibonaccischen Zahlen endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt, mit anderen Worten, ob es unter den Fibonaccischen Zahlen, die Primzahlen sind, eine größte gibt oder nicht. Von einer Lösung dieses Problems ist man jedoch augenblicklich noch weit entfernt.