Maximilian Miller

Rechenvorteile

1968 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 14
Abschrift und LaTex-Satz: 2020 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Für viele Berufe ist die Gewandtheit und Sicherheit im Zahlenrechnen eine wesentliche Voraussetzung für eine erfolgreiche Arbeit.
Da das numerische Rechnen niemals Selbstzweck, sondern ein wichtiges Hilfsmittel ist, ergibt sich die Notwendigkeit, die Rechenarbeit auf ein Minimum zu reduzieren. Die Rechenmethoden, die uns von der Schule her geläufig sind, genügen dieser Forderung im allgemeinen nur in unvollkommener Weise.

Um Fehler in der Zahlenrechnung auszuschalten und zugleich Zeit zu sparen, wurden zahlreiche mathematische Geräte (Rechenschieber, Rechenmaschinen, Buchungsmaschinen usw.) entwickelt. Die moderne Technik stellt sogar Aufgaben, die ohne diese Geräte praktisch nicht mehr bewältigt werden können. Trotzdem wird es stets noch Probleme geben, die auf dem Papier mit dem Rechenstift erledigt werden müssen.
Auch hier erfordert das ökonomische Prinzip größte Sicherheit bei geringstem Zeitaufwand. Dies ist die praktische Seite der Rechenvorteile. Außerdem erfüllt der "Umgang mit Zahlen"noch einen anderen Zweck:
Er erzieht zum logischen Denken und zu Ordnung und Exaktheit in der schriftlichen Darstellung.

Es mag vielleicht mancher Leser einwenden, dass viele Rechenmethoden erst dann richtig zur Geltung kommen, wenn man ihre Handhabung genügend geübt hat. Dieser Einwand trifft jedoch ebenso auf die Erlernung der Stenographie zu: Der Anfänger wird zunächst kaum die Schnelligkeit und Sicherheit des kurrent Schreibenden erreichen. Man wird jedoch aus diesem Grunde auf den Vorteil der Stenographie nicht verzichten wollen.

Der letzte Abschnitt unseres Buches ist einigen Rechenvorteilen, wie sie Gauß praktizierte, gewidmet. Wenn es auch im allgemeinen einem Laien nicht so ohne weiteres gelingen wird, diese Rechenvorteile praktisch anzuwenden, so glauben wir doch, dass die Rechenmethoden des unbeschränkte Herrschers im Reiche der Zahlen das Interesse des Lesers beanspruchen können.

Dresden, im November 1963
Maximilian Miller

Inhaltsverzeichnis

1 Addition

Wesentliche Vereinfachungen sind bei Additionen im allgemeinen nicht möglich. Sind nur zwei Summanden zu addieren, so ist es vorteilhaft, die Rechnung auf der linken Seite zu beginnen, da der Übertrag aus der nächstfolgenden Vertikalreihe höchstens gleich 1 sein kann.
Ob dieser Übertrag 1 vorhanden ist, kann in der Regel ohne besondere Rechnung durch einen Blick auf die nächste Vertikalreihe festgestellt werden.
Beispiel:

$$\begin{array}{r} 2{,}3569275 \\ +1{,}4785364 \\ \hline 3{,}8354639 \end{array}$$

Wir beginnen links mit 2 + l und stellen fest, dass die nächste Vertikalreihe 3 + 4 keinen Übertrag ergibt.
Bei der Vertikalreihe 3 + 4 ist aus der Kolonne 5 + 7 der Übertrag 1 zu übernehmen und wir erhalten somit 3,8...
Der weitere Verlauf der Rechnung bedarf wohl keiner Erläuterung.

Etwas verwickelter gestaltet sich die Addition von links nach rechts bei folgendem Beispiel:
Hier ist wohl die übliche Methode der Addition von rechts nach links zuverlässiger.

$$\begin{array}{r} 1{,}98437 \\ +2{,}79572 \\ \hline 4{,}78009 \end{array}$$

Erwähnt sei noch, dass bereits im alten Indien teilweise von links nach rechts addiert wurde. In einer in Cambridge aufbewahrten lateinischen Handschrift aus dem 13. Jh., der Teilübersetzung einer Arithmetik des orientalischen Gelehrten Muhammad ibn Musa al Huwarizmi aus dem 9. Jh., wird ebenfalls empfohlen, die Addition und Subtraktion von links nach rechts vorzunehmen, denn so wäre es nützlicher und leichter.

Auch von Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) wurde diese Methode praktiziert, und heute noch ist sie in der Astronomie gebräuchlich. Gauß achtete bei Vermessungs- und astronomischen Rechnungen sorgfältig darauf, lange Additionsreihen, soweit möglich, durch eine geschickte Anordnung der Rechnung, zu vermeiden.
Längere Zahlenreihen ohne maschinelle Hilfsmittel (Additionsmaschine, Rechenmaschine, Buchungsmaschine usw.) zu addieren ist eine geisttötende und nervenverbrauchende Gedächtnisarbeit, bei der kaum eine Unterbrechung möglich ist. Es gibt hier nur ganz wenige, unerhebliche Rechenvorteile.
Man kann gelegentlich Ziffern überspringen und mehrere Ziffern derselben Vertikalreihe, deren Summe 10 oder ein Vielfaches von 10 beträgt, zusammenfassen.

$$\begin{array}{r} 53 \\ 46 \\ 27 \\ 51 \\ 71 \\ 95 \\ 28 \\ 85 \\ \hline 456 \end{array}$$

Beispiel:
Einer: $(3 + 7) + 6 + (1 + 1 + 8) + (5 + 5) = 3\underline{3}$
Zehner: $(3 + 5 + 2) + (4 + 7 + 9) + 5 + (2 + 8) = \underline{43}$

Werden in einem Zwischenergebnis eine oder auch mehrere Ziffern unterstrichen, so bedeutet dies, dass diese Ziffern ein Bestandteil des Endergebnisses sind.

Im kaufmännischen Rechnen kann man bisweilen gleiche Ziffern oder Gruppen gleichartiger Ziffern zusammenfassen.

$$\begin{array}{r} 7{,}15 \\ 2{,}05 \\ 3{,}10 \\ 6{,}25 \\ 4{,}85 \\ \hline 23{,}40 \end{array}$$

Beispiele:

1. Vertikale: $4 \cdot 5 = 2\underline{0}$
2. Vertikale: $2 + 1 + 1 + (2 + 8) = 1\underline{4}$
3. Vertikale: $(1 + 7 + 2) + 3 + (6 + 4) = \underline{23}$

1. und 2. Vertikale: $(1 + 2 + 3 + 2 + 1) \cdot 25 = 2\underline{25}$
3. Vertikale: $2 + (3 + 7) + 4 + 8 + (6 + 4) = 3\underline{4}$

$$\begin{array}{r} 3{,}25 \\ 4{,}00 \\ 7{,}50 \\ 8{,}75 \\ 6{,}50 \\ 4{,}25 \\ \hline 3\,|4{,}25 \end{array}$$

Ferrol schlägt ein Additionsverfahren für mehrere zwei- und dreistellige Zahlen vor, das wir durch zwei Beispiele erläutern:

$$\begin{array}{r} 57 \\ 24 \\ 62 \\ 35 \\ 21 \\ \hline 199 \end{array}$$

Gang der Rechnung:

$21 + 35 = 56$; $56 + 62 = 118$; $118 + 24 = 142$; $142 + 57 = \underline{199}$.

Die Additionen werden hier im allgemeinen von links nach rechts durchgeführt, dies hat den Vorteil, dass kein Übertrag im Gedächtnis zu behalten ist. Selbstverständlich vollzieht sich der ganze Vorgang rascher, als dies hier auf dem Papier erscheint. Die Zahlen 56, 118 usw. werden in Gedanken nur einmal ausgesprochen.

$$\begin{array}{r} 247 \\ 321 \\ 532 \\ 876 \\ 419 \\ \hline 2395 \end{array}$$

$419 + 800 + 70 + 6 = 1295$
$1295 + 532 = 1827$
$1827 + 321 = 2148$
$2148 + 247 = \underline{2395}$.

Dieses Verfahren erfordert etwas Übung, wenn das Ergebnis schnell und sicher errechnet werden soll.
Die Addition vereinfacht sich sehr, wenn die Summanden die Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung sind. In einer arithmetischen Reihe erster Ordnung von n Gliedern sei a_1 das erste Glied, d die Differenz, z_n das letzte (n-te) Glied und s_n die Summe von n Gliedern. Dann gelten die Beziehungen:[1]

$$z_n = a_1 + (n-1)d \qquad ; \qquad d = \frac{z_n - a_1}{n-1} \qquad ; \qquad n = \frac{z_n - a_1}{d} + 1$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + z_n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1) \cdot d\right]$$

Die Richtigkeit der Summenformel für die arithmetische Reihe erster Ordnung kann folgendermaßen bewiesen werden:
Schreibt man untereinander

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (z_n - 2d) + (z_n - d) + z_n$$
$$s_n = z_n + (z_n - d) + (z_n - 2d) + ... + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

so ergibt sich durch Addition:

$$2s_n = \underbrace{(a_1 + z_n) + (a_1 + z_n) + ... + (a_1 + z_n) + (a_1 + z_n)}_{n-\text{mal}}$$

[1] In der Originalvorlage sind mehrere Setzfehler enthalten, die hier korrigiert sind. Sie werden nicht alle markiert. St. Polster

Also hat man

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + z_n)$$

Ein häufig vorkommender Sonderfall der Summierung einer arithmetischen Reihe erster Ordnung liegt vor, wenn die Zahlen von 1 bis n zu addieren sind. Dann ist $a_1 = 1$, $z_n = n$ und daher

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bekanntlich löste Gauß als ABC-Schütze die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 40 zu addieren, zur Verwunderung seines Lehrers dadurch, dass er in Gedanken die Reihen

1,	2,	3,	...,	38,	39,	40
40,	39,	38,	...,	3,	2,	1

in der oben angegebenen Weise addierte.

Beispiele:
a) Es ist die Summe $20 + 23 + 26 + ... + 80$ zu bilden. Hier ist $a_1 = 20$, $d = 3$, $z_n = 80$ und daher $n = \frac{80-20}{3} + 1 = 21$;

$$s_n = \frac{21}{2} \cdot (20 + 80) = 1050$$

b) Es sind die Zahlen von 1 bis 1000 zu addieren.

$$s_n = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$$

c) Es sind die Zahlen von 50 bis 130 zu addieren. Lösung:

$$n = \frac{130 - 50}{1} + 1 = 81 \qquad ; \qquad s_n = \frac{81}{2}(50 + 130) = 7290$$

Die wichtigsten arithmetischen Reihen höherer Ordnung sind die Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Es gelten hier folgende Summenformeln:

$$S(n^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$S(n^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$S(n^4) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Die letzte Formel kann auch in der Form

$$S(n^4) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

geschrieben werden.
Die Summenformeln für die ganzzahligen Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis n können folgendermaßen hergeleitet werden:
Für die Summe $S(n^1)$ der natürlichen Zahlen fanden wir

$$S(n^1) = \frac{n}{2}(n+1)$$

Nun setzen wir in die Binomialformel[2]

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^3 + 3n - 1$$

für n der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, ..., n$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
0^3 &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 \\
1^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 \\
2^3 &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 \\
&\ldots \\
(n-1)^3 &= n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1
\end{aligned}$$

Bildet man aus diesen n Gleichungen die Summe, so fallen die Glieder 1^3, 2^3, ..., $(n-1)^3$ weg, da sie auf beiden Seiten der Gleichung stehen. Es ergibt sich

$$0 = n^3 - 3S(n^2) + 3S(n^1) - n$$

Wir lösen diese Gleichung nach $S(n^2)$ auf und finden mit. Rücksicht auf $S(n^1) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
& S(n^2) = \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n\right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
\text{oder} \qquad & S(n^2) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}
\end{aligned}$$

In analoger Weise ergibt sich aus der binomischen Formel

$$(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$$

für $n = 1, 2, 3, ..., n$

$$\begin{aligned}
0^4 &= 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 \\
1^4 &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 \\
2^4 &= 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 \\
&\ldots \\
(n-1)^4 &= n^4 - 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 1 \\
\hline
0 &= n^4 - 4S(n^3) + 6s(n^2) - 4S(n^1) + n
\end{aligned}$$

Hieraus finden wir:

$$S(n^3) = \frac{n^4 + 6S(n^2) - 4S(n^1) + n}{4}$$

Durch Substitution von $S(n^2) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ und $S(n^1) = \frac{n(n+1)}{2}$ erhalten wir

$$S(n^3) = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Aus $(n-1)^5 = n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 1$ ergibt sich durch analoge Summenbildung

$$0 = n^5 - 5S(n^4) + 10S(n^3) - 10S(n^2) - 5S(n^1) - n$$

[2] Dem folgenden liegt der binomische Lehrsatz zugrunde, der unter "9. Der binomische Lehrsatzäusführlicher behandelt wird.

die Beziehung:

$$S(n^4) = \frac{n^5 + 10S(n^3) - 10S(n^2) + 5S(n^1) - n}{5} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

Beispiele:
a.) Es ist die Summe der Quadrate von 1 bis 20 zu berechnen.

$$\text{Lösung:} \qquad 1^2 + 2^2 + ... + 20^2 = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 2870$$

b)Man berechne die Summe $30^2 + 31^2 + 32^2 + ... + 60^2$.

$$\text{Lösung:} \qquad 1^2 + 2^2 + ... + 60^2 = \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} = 73810$$
$$1^2 + 2^2 + ... + 29^2 = \frac{29 \cdot 30 \cdot 59}{6} = 8555$$

also $30^2 + 31^2 + 32^2 + ... + 60^2 = 73810 - 8555 = 65255$.

c) Es ist die Summe $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + 20^4$ zu berechnen.

$$\text{Lösung:} \qquad 1^3 + 2^4 + ... + 20^4 = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41 \cdot 1259}{30} = 722666$$

2 Subtraktion

In Deutschland sind drei Verfahren für die schriftliche Subtraktion in Gebrauch, die wir an dem einfachen Beispiel 53 · 38 erläutern wollen.

1. Methode (auch norddeutsche Methode genannt): Es wird gerechnet
$13 \cdot 8 = \underline{5}; \quad 4 \cdot 3 = \underline{1}$

2. Methode $13 \cdot 8 = \underline{5}; \quad 5 \cdot 4 = \underline{1}$

3. Methode (auch süddeutsche oder österreichische Methode genannt):
$8 + \underline{5}13; \quad 4 + \underline{1} = 5$; Ergebnis 15.

Der amerikanische Pädagoge J.Th. Johnson[3] stellte mit 1200 Schülern insgesamt 6000 Testversuche an und kam zu folgendem Ergebnis:
Im Hinblick auf Zeitaufwand und Richtigkeit ist die 1. Methode die unvorteilhafteste; mit der 2. Methode verglichen weist die erste Methode 18% mehr Fehler auf und erfordert 15% mehr Zeit. Verglichen mit der 3. Methode weist die 1. Methode 16% mehr Fehler auf und erfordert 67% mehr Zeit. Die zweite Methode ist gegenüber der dritten Methode an Fehlerlosigkeit um 1,6% überlegen, dagegen um 44% im Zeitaufwand unterlegen.

Diese Übersicht zeigt also eindeutig die Überlegenheit der dritten Methode über die beiden anderen.
Liegt der Subtrahend in der Nähe einer runden Zahl, so kann man diese subtrahieren und die Ergänzung addieren.

$$\begin{array}{r} 9473 \\ -6987 \\ \hline 2486 \end{array}$$

Beispiel :
Man rechnet: $9473 - 7000 = 2473$;
$2473 + 13 = \underline{2486}$.

Sind mehrere Zahlen von einer Zahl zu subtrahieren, so werden die Subtrahenden addiert und auf den Minuenden ergänzt.

$$\begin{array}{r} 8324 \\ -\ 227 \\ -1365 \\ -\ 673 \\ \hline 6059 \end{array}$$

Beispiel (links):
Rechnung: $3 + 5 + 7 + \underline{9} = 24$;
$2 + 7 + 6 + 2 + \underline{5} = 2\underline{2}$;
$2 + 6 + 3 + 2 + \underline{0} = 13$;
$1 + 1 + \underline{6} = 8$

Bei mehreren Summanden und Subtrahenden ist es zweckmäßig, die Summe der negativen Glieder von der Summe der positiven Glieder abzuziehen.

Beispiel (rechts)

$$\begin{array}{r} 473 \\ +\ 312 \\ -\ 126 \\ +\ \ 93 \\ -\ 217 \\ -\ 186 \\ +\ 254 \\ \hline +1132 \\ -\ 529 \\ \hline +\ 603 \end{array}$$

Sind mehrere Logarithmen zu addieren und subtrahieren, so bedient man sich bei den zu subtrahierenden Logarithmen der sogenannten dekadischen Ergänzungen, die wir mit Elog bezeichnen wollen. Um die Ergänzung anzuschreiben, liest man den Logarithmus in der Tafel ab

[3] J.Th. Johnson, The Relative Merits of Three Methods of Subtraction, New York, Columbia University, Teachers College 1938.

und ersetzt jede Ziffer durch deren Ergänzung zu 9; die letzte rechtsstehende Ziffer wird zu 10 ergänzt.

Beispiel:

$$x = \frac{2,57 \cdot 40,28 \cdot 0,53 \cdot 0,004}{\pi \cdot 0,51 \cdot 3,27 \cdot 0,068 \cdot 12,14}$$

An Stelle von		schreibt man	
$\log 2,57 =$	$+0,40993$	$\log 2,57 =$	$0,40993$
$+\log 40,28 =$	$+1,60509$	$\log 40,28 =$	$1,60509$
$+\log 0,53 =$	$+0,72428 - 1$	$\log 0,53 =$	$9,72428 - 10$
$+\log 0,004 =$	$+0,60206 - 3$	$\log 0,004 =$	$7,60206 - 10$

An Stelle von		schreibt man	
$-\log \pi =$	$-0,49715$	$\mathrm{Elog}\, \pi =$	$9,50285 - 10$
$-\log 0,51 =$	$-(0,70757 - 1)$	$\mathrm{Elog}\, 0,51 =$	$0,29243$
$-\log 3,27 =$	$-0,51455$	$\mathrm{Elog}\, 3,27 =$	$9,48545 - 10$
$-\log 0,068 =$	$-(0,83251 - 2)$	$\mathrm{Elog}\, 0,068 =$	$1,16749$
$-\log 12,14 =$	$-1,08422$	$\mathrm{Elog}\, 12,14 =$	$8,91578 - 10$
			$48,70536 - 50$
		$\log x =$	$8,70536 - 10$
		$x =$	$0,05070$

Rechenproben erfordern bei Additionen und Subtraktionen im allgemeinen denselben Zeitaufwand, der für die Rechnung selbst erforderlich ist.
Bei Additionen kann die Probe dadurch vorgenommen werden, dass man einmal von unten nach oben und denn von oben nach unten addiert. Subtraktionen werden auf ihre Richtigkeit hin geprüft, indem man zur Differenz die Subtrahenden addiert, das Ergebnis muss dann der Minuend sein. Hierbei ist ein nochmaliges Anschreiben der Zahlen nicht erforderlich.

Beispiel: Probe:

$$\begin{array}{r} 4523 \\ -\ 273 \\ -\ 625 \\ -1260 \\ \hline +2365 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 273 \\ +\ 625 \\ +1260 \\ +2365 \\ \hline 4523 \end{array}$$

Auf die Anwendung der Neuner- und Elferprobe bei Additionen und Subtraktionen werden wir im 7. Abschnitt zurückkommen.

3 Multiplikation

3.1 Das Ferrolsche Rechenverfahren

Wir besprechen nun ein Multiplikationsverfahren, das im Anfang unseres Jahrhunderts von dem Rechenkünstler F. Ferrol durch Vorträge und Lehrbriefe unter dem Namen "Ferrolsches Rechenverfahren"weiteren Kreisen bekannt gemacht wurde.

Wahrscheinlich war diese Methode schon den Indern bekannt und gelangte zugleich mit den indischen Ziffern ins Abendland.[4] Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass bei der Multiplikation von zwei mehrstelligen Faktoren die Zwischenergebnisse nicht angeschrieben werden.
Dadurch wird der Zeitaufwand für die Ausführung der Multiplikation gegenüber den sonst üblichen Verfahren bedeutend verringert.

Wir beginnen mit der Multiplikation von zwei zweistelligen Faktoren:
Aus der algebraischen Beziehung

$$(a_0 + 10a_1)(b_0 + 10b_1) = a_0b_0 + 10(a_1b_0 + a_0b_1) + 100a_1b_1$$

ergibt sich folgendes:
Die Einer des Produktes entstehen durch Multiplikation der Einer der beiden Faktoren.
Die Zehner des Produktes ergeben sich aus dem Einerüberschuss + Einer $\times$ Zehner + Zehner $\times$ Einer.
Die Hunderter des Produktes erhält man aus dem Zehnerüberschuss + Zehner $\times$ Zehner, also:

$$a_1 \mid a_0 \times b_1 \mid b_0 = \begin{array}{ccc} a_1 & & a_0 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ b_1 & & b_0 \end{array}$$

Zahlenbeispiel:
Gang der Rechnung
Einer: $7 \cdot 4 = 2\underline{8}$
Zehner: $2 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 4\underline{9}$
Hunderter: $4 + 3 \cdot 5 = \underline{19}$

$$37 \cdot 54 = \begin{array}{ccc} 3 & & 7 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ 5 & & 4 \\ \hline & 1998 & \end{array}$$

Angeschrieben werden außer den beiden Faktoren nur die das Ergebnis bildenden unterstrichenen Ziffern. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn in einer Spalte oder Zeile des Schemas $\begin{array}{ccc} a_1 & & a_0 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ b_1 & & b_0 \end{array}$ zwei gleiche Ziffern stehen.

[4] Das Verfahren wurde von den Indern thatstha (es bleibt stehen) oder vajrânhyâsa (blitzbildend) genannt. Der griechische Mönch Maximus Planudes (um 1300 u.Z.) erwähnt in seiner "Markenlegung nach Art der Inder" das Verfahren; die Araber bedienten sich dessen um 900 herum. Der italienische Mathematiker Luca Pacioli bezeichnet in seiner "Summa" (1491) die Methode als per crocetta. (kleines Kreuz) oder per casella. (kleines Häuschen)

$$\begin{array}{r} 37 \\ 34 \\ \hline 1258 \end{array}$$

Beispiele:
Einer: $7 \cdot 4 = 2\underline{8}$
Zehner: $2 + 3 \cdot (7 + 4) = 3\underline{5}$
Hunderter: $3 + 3 \cdot 3 = \underline{12}$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 55 \\ \hline 2640 \end{array}$$

Einer: $8 \cdot 5 = 4\underline{0}$
Zehner: $4 + 5 \cdot (8 + 4) = 6\underline{4}$
Hunderter: $6 + 4 \cdot 5 = \underline{26}$

Für das sogenannte erweiterte große Einmaleins, also Produkte im Bereich von 10 · 10 bis 20 · 20 ergibt sich aus

$$(a_0 + 10)(b_0 + 10) = [(a_0 + 10) + b_0] \cdot 10 + a_0 b_0$$

folgende Regel: Man addiere die Einer des zweiten Faktors zu dem ersten Faktor und multipliziere diese Summe mit 10; sodann addiere man zu der so gebildeten Zahl das Produkt- der Einer der beiden Faktoren.

Beispiel: $13 \cdot 18 = (13 + 8) \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 234$

Das Produkt aus zwei dreistelligen Faktoren erhalten wir aus der Beziehung

$$\begin{aligned} (a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2)(b_0 + 10b_1 + 10^2 b_2) &= a_0 b_0 + 10(a_1 b_0 + a_0 b_1) \\ &\quad + 10^2(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1) + 10^3(a_1 b_2 + a_2 b_1) + 10^4 a_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 728 \\ 236 \\ \hline 171808 \end{array}$$

Beispiel $728 \cdot 236 =$
Einer: $8 \cdot 6 = 4\underline{8}$
Zehner: $4 + 2 \cdot 6 + 8 \cdot 3 = 4\underline{0}$
Hunderter: $4 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6\underline{8}$
Tausender: $6 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3\underline{1}$
Zehntausender: $3 + 7 \cdot 2 = \underline{17}$

Die Multiplikation eines zweistelligen Faktors mit einem dreistelligen kann auf die Multiplikation von zwei dreistelligen Faktoren zurückgeführt werden, indem die Hunderterstelle des zweistelligen Faktors durch Null ersetzt wird.

$$\begin{array}{r} 643 \\ 027 \\ \hline 17361 \end{array}$$

Beispiel $643 \cdot 27 =$
$10^0 \mid 3 \cdot 7 = 21$
$10^1 \mid 2 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 3\underline{6}$
$10^2 \mid 3 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 5\underline{3}$
$10^3 \mid 5 + 6 \cdot 2 = \underline{17}$

Bisweilen ist es auch zweckmäßig, zwei Stellen als eine einstellige Zahl zu behandeln.

$$\begin{array}{r} 127 \\ 208 \\ \hline 26416 \end{array}$$

Beispiel $127 \cdot 208 =$
$10^0 \mid 7 \cdot 8 = 5\underline{6}$
$10^1 \mid 5 + 12 \cdot 8 + 7 \cdot 20 = 24\underline{1}$
$10^2 \mid 24 + 12 \cdot 20 = \underline{264}$

Die Multiplikation von zwei vierstelligen Faktoren hat zur Grundlage die Beziehung:

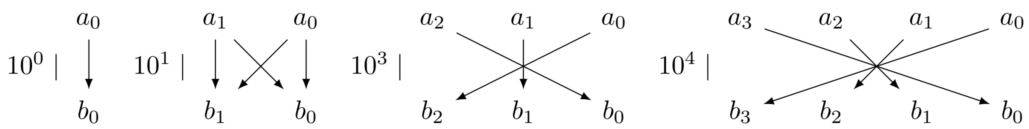
$$\begin{aligned}(a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3)(b_0 + 10b_1 + 10^2b_2 + 10^3b_3) &= a_0b_0 + 10(a_1b_0 + a_0b_1)\\ &+ 10^2(a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_1) + 10^3(a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 + a_2b_1) + 10^4(a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_2)\\ &+ 10^5(a_2b_3 + a_3b_2) + 10^6a_3b_3\end{aligned}$$

Beispiel $6583 \cdot 2127 =$

$$\begin{array}{r} 6583 \\ 2127 \\ \hline 14002041 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10^0 \mid 3 \cdot 7 = 2\underline{1} \\ 10^1 \mid 2 + 8 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 6\underline{4} \\ 10^2 \mid 6 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 20 = 6\underline{0} \\ 10^3 \mid 6 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 7\underline{2} \\ 10^4 \mid 7 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 4\underline{0} \\ 10^5 \mid 4 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 2\underline{0} \\ 10^6 \mid 2 + 6 \cdot 2 = \underline{14} \end{array}$$

Theoretisch kann das Ferrolsche Verfahren auf Zahlen mit beliebig viel Stellen erweitert werden, praktisch wird man über 5-6stellige Zahlen kaum hinausgehen. Wir geben noch eine übersichtliche Darstellung des Schema für zwei fünfstellige Faktoren:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array}$$



usw.

3.2 Weitere Rechenvorteile bei Multiplikationen

Wenig bekannt ist die Anwendung der Überschüsse und Ergänzungen bei der Ausführung von Multiplikationen.

Überschuss ist die Zahl, um die eine gegebene Zahl größer ist als eine für die Rechnung geeignete runde Zahl.
Ergänzung ist die Zahl, um die eine gegebene Zahl kleiner ist als eine für die Rechnung geeignete runde Zahl.

Als runde Zahlen sind besonders geeignet die Potenzen von 10, also 100; 1000 usw. Aber auch 50; 500; 5000 usw. können als Bezugszahlen dienen. Im allgemeinen wird man für zwei Faktoren dieselbe Bezugszahl nehmen. Je geringer die Überschüsse bzw. Ergänzungen sind, desto einfacher gestaltet sich die Rechnung.

Die Bezugszahl sei R. Dann gelten folgende Beziehungen:
Für zwei Überschüsse:

$$(R + a_1)(R + a_2) = R \cdot [(R + a_1) + a_2] + a_1a_2$$

Für zwei Ergänzungen:

$$(R - a_1)(R - a_2) = R \cdot [(R - a_1) - a_2] + a_1a_2$$

Für einen Überschuss und eine Ergänzung:

$$(R+a_1)(R-a_2) = R\cdot[(R+a_1)-a_2]-a_1a_2$$

Beispiele:
a) $106\cdot 124 = 100\cdot(106+24)+6\cdot 24 = 13144. \qquad (R=100)$
b) $985\cdot 972 = 1000\cdot(985-28)+15\cdot 28 = 957420. \qquad (R=1000)$
c) $512\cdot 494 = 500\cdot(512-6)-12\cdot 6 = 252928. \qquad (R=500)$

Nahe verwandt mit der soeben besprochenen Überschuss- bzw. Ergänzungsmethode ist der Gebrauch der aus dem Unterricht bekannten Formel

$$(R+a)\cdot(R-a) = R^2 - a^2$$

Ist der größere Faktor g und der kleine k, so ist $R=\frac{g+k}{2}$ und $a=\frac{g-k}{2}$. Dann ist

$$g\cdot k = \left(\frac{g+k}{2}\right)^2 - \left(\frac{g-k}{2}\right)^2$$

Dieses Verfahren ist besonders vorteilhaft, wenn $g-k$ und somit auch $g+k$ gerade Zahlen sind, d.h., wenn die Faktoren g und k entweder beide gerade oder beide ungerade Zahlen sind. Die Quadrate $\left(\frac{g+k}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{g-k}{2}\right)^2$ entnimmt man bei größeren Werten einer Quadrattafel. Für die geodätische Rechenpraxis waren früher "Tafeln der Viertelquadrate" aller ganzen Zahlen von 1 bis 200000 usw. im Gebrauch, so z.B. von Jos. Blater, Wien 1887.
Diese Rechenhilfen haben durch den Gebrauch der vollautomatischen, elektrisch betriebenen Rechenmaschinen an Bedeutung verloren.

Beispiel: $365\cdot 355 = 360^2 - 5^2 = 129575$

Der geodätischen Rechenpraxis entstammt auch folgendes Verfahren:
Bei der Berechnung der Koeffizienten der sogenannten Normalgleichungen in der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate sind für die Zahlenreihen

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \qquad , \qquad b_1, b_2, b_3, ..., b_n$$

folgende Rechenoperationen auszuführen:

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2 &= [aa] \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2+...+b_n^2 &= [bb] \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n &= [ab] \end{aligned}$$

Da man die Summen $[aa]$[5] und $[bb]$ ohnehin benötigt, berechnet man die Produkte sa_ib_i bzw. die Summe der Produkte $[ab]$ nach den Beziehungen:

$$a_ib_i = \frac{(a_i+b_i)^2-(a_i-b_i)^2}{4} \qquad \text{und} \qquad [ab] = \frac{[(a+b)^2]-([aa]+[bb])}{2}$$

Beispiel:

[5] Der Gebrauch der eckigen Klammer [ ] an Stelle des sonst üblichen Summenzeichens $\sum$ geht auf Carl Friedrich Gauß, den Begründer der Methode der kleinsten Quadrate, zurück.

a	b	$(a+b)$	a^2	b^2	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$
23	17	40	529	289	1600	36
47	29	76	2209	841	5776	324
18	54	72	324	2916	5184	1296
24	36	60	576	1296	3600	144
16	18	34	256	324	1156	4
51	49	100	2601	2401	10000	4
			6495	8067	27316	1808

$$[ab] = \frac{27316 - (6495 + 8067)}{2} = 6377$$

Man kann auch die Beziehungen

$$a_i b_i = \frac{a_i^2 + b_i^2 - (a_i - b_i)^2}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad [ab] = \frac{[a^2] + [b^2] - [(a-b)^2]}{2}$$

benutzen.
In unserem Beispiel finden wir

$$[ab] = \frac{6495 + 8067 - 1808}{2} = 6377$$

Wird die Summe der Produkte mit einer vollautomatischen Rechenmaschine mit Speicherwerk berechnet, so können die angegebenen Beziehungen zur Kontrolle dienen.

Multiplikationen mit den Faktoren 5 ; 25; 125 usw.

Berücksichtigt man, dass $5 = \frac{10}{2}$; $25 = \frac{100}{4}$; $125 = \frac{1000}{8}$ usw., so ergibt sich, dass Multiplikationen mit 5 oder Potenzen von 5 durch entsprechende Divisionen mit 2 bzw. den Potenzen von 2 ausgeführt werden können.

Beispiele:
a) $683 \cdot 5 = \frac{6830}{2} = 3415$.
b) $7125 \cdot 25 = \frac{712500}{4} = 178125$.
c) $6354 \cdot 125 = \frac{6354000}{8} = 794250$.

Multiplikationen mit dem Faktor 11.

Sie können nach folgendem Schema ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}&(a_0 + 10a_1 + 100a_2 + ... + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n) \cdot 11 = \\ &\quad = a_0 + 10(a_0 + a_1) + 100(a_1 + a_2) + ... + 10^n(a_{n-1} + a_n) + 10^{n+1}a_n\end{aligned}$$

Beispiel: $7684 \cdot 11 =$
Einer $\underline{4}$
Zehner $4 + 8 = 1 \mid \underline{2}$
Hunderter $1 + 8 + 6 = 1 \mid \underline{5}$
Tausender $1 + 6 + 7 = 1 \mid \underline{4}$
Zehntausender $1 + 7 = \underline{8}$
Ergebnis: $7684 \cdot 11 = 84524$

Einige Zahleneigenschaften, die bei Multiplikationen mit Vorteil verwendet werden können.

Die Multiplikation mit 37 kann dadurch erleichtert werden, dass man für 37 den Quotienten $\frac{111}{3}$ setzt.

Beispiele:
a) $24 \cdot 37 = 8 \cdot 111 = 888$
b) $121 \cdot 37 = 40 \cdot 111 + 37 = 4477$
c) $272 \cdot 37 = 90 \cdot 111 + 2 \cdot 37 = 10064$

Ebenso kann die Zerlegung $1001 = 13 \cdot 7 \cdot 11$ gelegentlich verwertet werden.

Beispiele:
a) $143 \cdot 84 = 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 = 1001 \cdot 12 = 12012$
b) $54 \cdot 77 = 52 \cdot 77 + 2 \cdot 77 = 4004 + 154 = 4158.$

3.3 Die abgekürzte Multiplikation von Dezimalbrüchen

Im Lehrplan unserer polytechnischen Oberschule ist die Behandlung der abgekürzten Multiplikation von Dezimalbrüchen vorgesehen.
Die praktische Bedeutung des abgekürzten Rechenverfahrens - dies gilt auch für die abgekürzte Division und für das Wurzelziehen - ist durch den Gebrauch des Rechenstabes und der Rechenmaschine in den Hintergrund getreten.

Da aber für gewisse Berufe (Statistiker, Kaufleute usw.) die abgekürzten Rechenverfahren von Nutzen sind, sollen sie hier kurz besprochen werden.
Es gibt eine reichhaltige Literatur über das abgekürzte Rechnen, die im Zusammenfassung in theoretischer und praktischer Hinsicht bietet wohl A. Witting, Abgekürzte Rechnung (Math. Phys. Bibl. Bd. 47; Leipzig - Berlin 1922).

Ferrol schlägt folgendes Verfahren vor, das wir an einem Beispiel erläutern:

Es soll $3,1416 \cdot 2,0375$ auf drei Dezimalstellen genau berechnet werden. Wenn wir eine Genauigkeit der dritten Dezimalstelle fordern, werden wir im allgemeinen zum Zweck einer etwaigen Aufrundung die vierte Dezimale im Resultat noch berücksichtigen. Führen wir die Multiplikation nach der Kreuzmethode, links beginnend, durch, so erhalten wir

$$\begin{array}{r} 3{,}1416 \\ 2{,}0375 \\ \hline 6,40101000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
3 \cdot 2 = & 6, \\
3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = & \;\;2 \\
3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = & \;\;17 \\
3 \cdot 7 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = & \;\;\;26 \\
3 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = & \;\;\;\;46 \\
1 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = & \;\;\;\;\;36 \\
4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 7 = & \;\;\;\;\;\;45 \\
1 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = & \;\;\;\;\;\;\;47 \\
6 \cdot 5 : & \;\;\;\;\;\;\;\;30 \\ \hline
 & 6{,}40101000
\end{array}$$

Für die abgekürzte Multiplikation genügen folgende Operationen

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2 = &\ \ 6,\\
3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = &\ \ \ 2\\
3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = &\ \ \ 17\\
3 \cdot 7 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = &\ \ \ \ \ 26\\
3 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = &\ \ \ \ \ \underline{\ \ 46}\\
&\ \ 6{,}4006
\end{aligned}$$

aufgerundet: $6,401$

An unseren Oberschulen wird folgendes Verfahren gelehrt. Es soll $3,3256 \cdot 0,2753$ auf 4 Dezimalen genau berechnet werden:

$$\begin{array}{rr}
 & 3{,}3256\\
 & \underline{0{,}2753}\\
3,3256 \cdot 0,2 & 0{,}66512\\
3325 \mid 6 \cdot 7 & 23279\\
332 \mid 6 \cdot 5 & 1663\\
33 \mid 3 \cdot 3 & \underline{100}\\
 & 0{,}91554
\end{array}$$

abgerundet: $0,9155$ Das genaue Ergebnis ist $0,91553768$.

Erläuterung des Verfahrens: Die erste Zeile $3,3256 \cdot 0,2$ bedarf keiner Erläuterung.
Bei den nachfolgenden Zeilen wird jeweils die letzte Stelle des Multiplikanden abgestrichen und nur zur Korrektur berücksichtigt.

Haben die Faktoren,abgesehen vom Komma, eine verschiedene Stellenzahl, so ergeben sich im allgemeinen mehr Stellen, wenn der Faktor mit der größeren Stellenzahl als Multiplikand genommen wird. Wir vertauschen in obigem Beispiel die Faktoren und erhalten

$$\begin{array}{rr}
 & 0{,}2753\\
 & \underline{3{,}3256}\\
0,2753 \cdot 3,8 & 0{,}8259\\
275 \mid 3 \cdot 3 & 826\\
27 \mid 5 \cdot 2 & 55\\
2 \mid 8 \cdot 5 & 14\\
\mid 3 \cdot 6 & \underline{2}\\
 & 0{,}9156
\end{array}$$

Man erhält hier praktisch nur drei Dezimalen.

4 Division und Teilbarkeitsregeln

Wir setzen für die numerische Rechnung bei der Ausführung einer Division voraus, dass die Regeln für die Setzung des Kommas bekannt sind.

Eine sehr naheliegende Vereinfachung bei einer Division besteht in der Kürzung, d.h. in der Teilung des Dividenden und Divisors durch einen gemeinsamen Teiler.
In vielen Fällen genügen die Teilbarkeitsregeln, um einen gemeinsamen Teiler des Dividenden und Divisors festzustellen.

Für die Ermittlung des größten gemeinschaftlichen Teilers von Dividend und Divisor benutzen wir das absolut exakte Verfahren der Kettendivision, den sogenannten Euklidischen Algorithmus.
Wir werden im folgenden die wichtigsten Teilbarkeitsregeln besprechen und daran anschließend die Kettendivision behandeln.

4.1 Kennzeichen der Teilbarkeit einer Zahl

Für die Herleitung der Teilbarkeitsgesetze bedienen wir uns eines zahlentheoretischen Gesetzes, dessen Gültigkeit dem Leser bei einigem Nachdenken sofort einleuchtet.
Es lautet: Es seien a, b, c drei von Null verschiedene ganze, d.h. positive oder negative Zahlen, die die Gleichung

$$a + b + c = 0$$

erfüllen. Haben zwei von diesen Zahlen einen gemeinsamen Teiler, so ist derselbe auch Teiler der dritten Zahl. Ist eine der drei Zahlen gleich Null, so wird der Satz insofern trivial, als die beiden anderen Zahlen sich in diesem Falle nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

a) Teilbarkeit durch 2 und 5:
Jede mehrstellige Zahl kann in der Form $10m + p$ dargestellt werden, wobei p die Einerstelle ist. Der Teil $10m$ ist durch 2 und 5 teilbar, deshalb ist die Zahl $10m+p$ durch 2 bzw. 5 teilbar, wenn die Einerstelle p entweder gleich Null oder durch 2 bzw. 5 teilbar ist.

b) Teilbarkeit durch 4 oder 25:
Jede Zahl, die mehr als zwei Stellen hat, kann in der Form $100m+p$ dargestellt werden, wobei p die aus der Einer- und Zehnerstelle gebildete Zahl ist. Der Teil $100m$ ist durch 4 und 25 teilbar, deshalb ist die Zahl $100m + p$ durch 4 bzw. 25 teilbar, wenn die Zahl auf zwei Nullen endigt oder die aus der Einer- und Zehnerstelle gebildete Zahl p durch 4 oder 25 teilbar ist.

c) Teilbarkeit durch 8 oder 125:
Aus der Darstellung einer Zahl in der Form $1000m+p$ ergibt sich in analoger Weise, dass eine Zahl durch 8 bzw. 125 teilbar ist, wenn die Zahl auf drei Nullen endigt oder die aus der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle gebildete Zahl durch 8 bzw. 125 teilbar ist.

Die weiteren Regeln für die Teilbarkeit durch 2^n bzw. 5^n sind praktisch bedeutungslos.

d) Teilbarkeit durch 3 oder 9:
Jede n-stellige Zahl z kann im dekadischen Zahlensystem durch die Form

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

dargestellt werden, wobei a_0 die Einer, a_1 die Zehner, a_2 die Hunderter usw. bedeuten.

Die Summe $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = q$ bezeichnet man als Quersumme und den Ausdruck $a_0 - a_1 + a_2 - ... \pm a_n = \overline{q}$ als alternierende Quersumme oder auch Querdifferenz. Wir bilden nun

$$z - q = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + ... + a_2 \cdot (10^2 - 1) + a_1 \cdot (10 - 1)$$

Da nun alle in den Klammern stehenden Ausdrücke

$$(10^n - 1), (10^{n-1} - 1), ..., (10^2 - 1), (10 - 1)$$

durch 9 und somit auch durch 3 teilbar sind, ist $z - q$ ebenfalls durch 9 bzw. 3 teilbar.
Ist also eine der Zahlen z, q durch 9 bzw. 3 teilbar, so ist es auch die andere Zahl, d.h. eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

e) Teilbarkeit durch 11:
Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise von d) bilden wir

$$z - \overline{q} = a_n \cdot (10^n \mp 1) + ... + a_3(10^3 + 1) + a_2 \cdot (10^2 - 1) + a_1 \cdot (10 + 1)$$

Da nun alle in den Klammern stehenden Ausdrücke durch 11 teilbar sind, ergibt sich, dass $z - \overline{q}$ durch 11 teilbar ist. Ist also eine der Zahlen z, $\overline{q}$ durch 11 teilbar, so ist es auch die andere Zahl, d.h. eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar oder gleich Null ist.

f) Teilbarkeit durch 7 und 13:
Die Teilbarkeitsregeln für 7 und 13 beruhen auf der Tatsache, dass $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ die Teiler 7 und 13 hat. Da 11 ebenfalls Teiler von 1001 ist, würde sich hieraus auch die Teilbarkeitsregel für 11 ergeben, die jedoch etwas umständlicher ist als die in e) entwickelte Regel.

Um die Teilbarkeitsregel für 7 und 13 zu begründen, schreiben wir die Zahl

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

in der Form

$$z = 10^3 \cdot (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{n-4} + ... + a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10 + a_3) + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

oder

$$\begin{aligned} z = &(10^3 + 1) \cdot (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{n-4} + ... + a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10 + a_3) \\ &- (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{n-4} + ... + a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10 + a_3) + (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \end{aligned}$$

Da nun $10^3 + 1 = 1001$ durch 7 und 13 teilbar ist, muss auch z durch 7 bzw. 13 teilbar sein, wenn die Differenz zwischen $(a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{n-4} + ... + a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10 + a_3)$ und $(a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$ durch 7 bzw. 13 teilbar ist.

Kennzeichen für die Teilbarkeit durch zusammengesetzte Zahlen lassen sich aus denen für die Teilbarkeit durch Primzahlen ableiten.
So ist eine Zahl durch 15 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 3 und durch 5 teilbar ist.

Für zusammengesetzte Zahlen, die Potenzen von Primzahlen als Teiler haben, sind gesonderte Untersuchungen nötig. Auf Grund analoger Überlegungen können weitere Teilbarkeitsregeln aufgestellt werden, die jedoch praktisch von untergeordneter Bedeutung sind.

Zahlenbeispiele zu den Teilbarkeitsregeln.

a) Die Zahl 4476 ist durch 4 teilbar, da 76 durch 4 teilbar ist; sie ist jedoch nicht durch 8 teilbar, da 476 nicht durch 8 teilbar ist.

b) Die Zahl 43278 ist durch 3 teilbar, da die Quersumme 8 + 7 + 2 + 3 + 4 = 24 durch 3 teilbar ist. Der Leser beachte, dass auch die Quersumme 2 + 4 = 6 durch 3 teilbar ist.

c) Die Zahl 534672 ist durch 9 teilbar, da die Quersumme 2 + 7 + 6 + 4 + 3 + 5 = 27 bzw. 7 + 2 = 9 durch 9 teilbar ist.

d) 590359 ist durch 11 teilbar, da die Querdifferenz 9 - 5 + 3 - 0 + 9 - 5 = 11 durch 11 teilbar ist. Die Zahl 90836372 ist ebenfalls durch 11 teilbar, da die Querdifferenz 2 - 7 + 3 - 6 + 3 - 8 + 0 - 9 = 22 durch 11 teilbar ist. Die Zahl 64334952 ist durch 11 teilbar, da die Querdifferenz 2 - 5 + 9 - 4 + 3 - 3 + 4 - 6 den Wert Null ergibt.

e) 44478 ist durch 7 teilbar, da 478 - 44 = 434 durch 7 teilbar ist. Die Zahl 857792936 ist durch 7 teilbar, da 857792 - 936 = 856856 wegen 856 - 856 = 0 durch 7 teilbar ist.

f) 808249 ist durch 13 teilbar, da 808 - 249 = 559 durch 13 teilbar ist. Die Zahl 11106173 ist durch 13 teilbar, da 11106 - 173 = 10933 und 933 - 10 = 923 durch 13 teilbar sind.

4.2 Die Kettendivision (Euklidischer Algorithmus)

Um den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen festzustellen, bedient man sich der Kettendivision. auch Euklidischer Algorithmus genannt.
Dieses Verfahren besteht darin, dass man die größere Zahl durch die kleinere dividiert. Da der gemeinschaftliche Teiler der beiden Zahlen auch Teiler des Restes sein muss, ist nur noch der gemeinsame Teiler des Divisors und des Restes zu suchen.
Man dividiert also den Divisor durch den Rest, so dass sich ein neuer Rest ergibt.

Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist der größte gemeinschaftliche Teiler. Ist der größte gemeinschaftliche Teiler gleich 1, so sind die beiden gegebenen Zahlen teilerfremd.

Soll also von a und b der größte gemeinschaftliche Teiler gesucht werden, so seien für a b der Reihe nach die Quotienten $q_1, q_2, q_3, ...$ und die Reste $r_1, r_2, r_3, ...$. Es ist also

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} \end{aligned}$$

Es ist also nach der letzten Gleichung r_n Teiler von r_{n-1}, nach der vorletzten Gleichung r_{n-1} Teiler von r_{n-2} und endlich Teiler von b und a.
Es ist aber auch r_n auch der größte Teiler von a und b. Ist nämlich g der größte Teiler von a und b, so muss g mit Rücksicht auf die angeschriebenen Gleichungen der Reihe nach Teiler von $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ sein, d.h. g ist gleich r_n.

Beispiele:

a) Es ist der größte gemeinsame Teiler von 165984 und 5486 zu suchen.

$$\begin{array}{rlrl} 165984 : 5486 = 3 & (\text{Rest } 1404) & 5486 : 1404 = 3 & (\text{Rest } 1274) \\ 1404 : 1274 = 1 & (\text{Rest } 130) & 1274 : 130 = 9 & (\text{Rest } 104) \\ 130 = 104 = 1 & (\text{Rest } 26) & 104 : 26 = 4 & (\text{Rest } 0) \end{array}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 165984 und 5486 ist demnach 26.

b) Es ist der größte gemeinschaftliche Teiler von 3022 und 189 zu bestimmen.

$$\begin{array}{rlrl} 3022 : 189 = 15 & (\text{Rest } 187) & 189 : 187 = 1 & (\text{Rest } 2) \\ 187 : 2 = 93 & (\text{Rest } 1) & 2 : 1 = 2 & (\text{Rest } 0) \end{array}$$

Die beiden Zahlen 3022 und 189 sind somit teilerfremd.

4.3 Die reziproken Werte der ganzen Zahlen

Da jede Division auf eine Multiplikation mit dem reziproken Wert des Divisors zurückgeführt werden kann, behandeln wir zunächst die Berechnung der reziproken Werte der ganzen Zahlen, also die Verwandlung von echten Brüchen mit dem Zähler 1, auch Stammbrüche genannt, in Dezimalbrüche.

1. Die Verwandlung von Brüchen von der Form $\frac{1}{2^\alpha \cdot 5^\beta}$

Brüche, deren Nenner keinen anderen Teiler als 2 und 5 enthalten, ergeben endliche Dezimalbrüche mit so vielen Dezimalstellen, als der größere der Exponenten α und β angibt.

Die Richtigkeit dieses Satzes beweisen wir folgendermaßen: Je nachdem $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$ ist, erweitern wir den Bruch mit $5^{\alpha-\beta}$ oder mit $2^{\beta-\alpha}$ und erhalten dadurch einen Bruch von der Form

$$\frac{5^{\alpha-\beta}}{(2\cdot 5)^\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2^{\beta-\alpha}}{(2\cdot 5)^\beta}$$

also einen Dezimalbruch mit α bzw. β Stellen.

Beispiele:
a) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = \frac{5^4}{10^4} = 0,0625;$

b) $\frac{1}{400} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^2} = \frac{5^2}{10^4} = 0,0025;$

c) $\frac{1}{12500} = \frac{1}{2 \cdot 5^5} = \frac{2^3}{10^5} = 0,00008.$

2. Die Verwandlung von Brüchen von der Form $\frac{1}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n}$, wenn n eine zu 10 teilerfremde Zahl ist.

a) Für $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich ein periodischer Dezimalbruch, und zwar beginnt die Periode sofort hinter dem Komma.
b) Enthält der Nenner als Teiler das Produkt $2^\alpha \cdot 5\beta$, so treten hinter dem Komma vor Beginn der Periode so viele Vorziffern auf, als der größere der Exponenten α und β angibt.

Der Beweis wird auch hier durch die Erweiterung des Bruches mit $5^{\alpha-\beta}$ bzw. $2^{\beta-\alpha}$ erbracht.

Beispiele:

a) $\frac{1}{880} = \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{5^3}{10^4 \cdot 11} = \frac{0,0125}{11} = 0,00113636...;$

b) $\frac{1}{1750} = \frac{1}{2 \cdot 5^3 \cdot 7} = \frac{2^2}{10^3 \cdot 7} = \frac{0,004}{7} = 0,000571428571428....$

Der aufmerksame Leser wird den vorhergehenden Ausführungen schon einige Rechenvorteile entnehmen können:
Hat der Nenner die Form $2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n$, wo n eine zu 10 teilerfremde Zahl ist, so ist der Bruch mit $5^{\alpha-\beta}$ oder $2^{\beta-\alpha}$ zu erweitern, je nachdem $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$ ist. Dadurch wird die Division auf

$$\frac{5^{\alpha-\beta}}{10^\alpha \cdot n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2^{\beta-\alpha}}{10^\beta \cdot n}$$

zurückgeführt.
Gleichzeitig kann hierbei festgestellt werden, ob die Division aufgeht bzw. wieviele Vorziffern vor Beginn der Periode auftreten.
Dies gilt natürlich auch für echte Brüche[6], bei denen der Zähler eine zu $2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n$ teilerfremde Zahl ist, die kleiner als der Nenner ist.

Beispiele:

a) $\frac{7}{1250} = \frac{7}{2 \cdot 5^4} = \frac{7 \cdot 2^3}{10^4} = 0,0056$ Da $\beta = 4$, entstehen vier Dezimalstellen.

b) $\frac{3}{880} = \frac{3}{2^4 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 5^3}{10^4 \cdot 11} = \frac{0,0375}{11} = 0,00340909...;$
Wegen $\alpha = 4$, hat der Dezimalbruch vier Vorziffern.

c) $\frac{11}{1750} = \frac{11}{2 \cdot 5^3 \cdot 7} = \frac{11 \cdot 2^2}{10^3 \cdot 7} = \frac{0,044}{7} = 0,006285714285714....$
Wegen $\beta = 3$, hat der Dezimalbruch drei Vorziffern.

4.4 Über die bei Dezimalbrüchen auftretenden Perioden

Die Untersuchung der bei Dezimalbrüchen auftretenden Perioden ist Gegenstand der Zahlentheorie.
Wir werden uns hier im allgemeinen nur mit den Eigenschaften der Dezimalbruchperioden befassen, durch die sich Rechenvorteile ergeben. Wir müssen auch öfters auf eine strenge Beweisführung verzichten, da eine lückenlose Darstellung der Theorie der periodischen Dezimalbrüche den Rahmen unseres Buches überschreitet.
Der an diesen Fragen interessierte Leser greife zu dem ausgezeichneten Buch von Leman-Schoeneberg "Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie" (Math. Phys. Bibl. Leipzig 1952), in dem die wichtigsten Eigenschaften der periodischen Dezimalbrüche behandelt werden.

Wir betrachten zunächst die Perioden von Primzahlnennern. Wir bezeichnen mit p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl und mit m eine Zahl, die kleiner ist als p. Dann liefert $\frac{m}{p}$ einen reinperiodischen Dezimalbruch.

Beispiele:

[6] Wir setzen voraus, dass im Falle eines unechten Bruches die Aufspaltung in eine ganze Zahl und einen echten Bruch bereits erfolgt ist; wir haben uns deshalb hier mit echten Brüchen zu befassen. Ferner betrachten wir Zähler und Nenner als teilerfremd.

$\frac{1}{7} = \quad 1:7 \quad = \quad 0{,}142857142857...$

10
30
20
60
40
50
10
$\vdots$

$\frac{5}{7} = \quad 5:7 \quad = \quad 0{,}714285714285...$

50
10
30
20
60
40
50
$\vdots$

$\frac{6}{7} = \quad 6:7 \quad = \quad 0{,}857142857142...$

60
40
50
10
30
20
60
$\vdots$

$\frac{1}{13} = \quad 1:13 \quad = \quad 0{,}076923076923...$

10
100
90
120
30
40
10
$\vdots$

$\frac{5}{13} = \quad 5:13 \quad = \quad 0{,}384615384615...$

50
110
60
80
20
70
50
$\vdots$

$\frac{6}{13} = \quad 9:13 \quad = \quad 0,692307692307...$

90
120
30
40
10
100
90
$\vdots$

$\frac{10}{13} = \quad 10:13 \quad = \quad 0,769230769230...$

100
90
120
30
40
10
100
$\vdots$

$\frac{1}{73} = \quad 1:73 \quad = \quad 0,0136986301369863...$

10
100
270
510
720
630
460
220
10
$\vdots$

$$\begin{array}{llll} \frac{5}{73} = & 5:73 & = & 0,0684931506849315... \\ & 50 & & \\ & 500 & & \\ & \ \ 620 & & \\ & \ \ \ \ 360 & & \\ & \ \ \ \ \ \ 680 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 230 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 110 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 370 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \frac{10}{73} = & 10:73 & = & 0,0136986301369863... \\ & 1\ 00 & & \\ & \ \ 270 & & \\ & \ \ \ \ 510 & & \\ & \ \ \ \ \ \ 720 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 630 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 460 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 220 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 100 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{101} = & 1:101 & = & 0,00990099... \\ & 10 & & \\ & 100 & & \\ & 1000 & & \\ & \ \ \ \ 910 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 10 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \frac{90}{101} = & 90:101 & = & 0,89108910... \\ & 900 & & \\ & \ \ 920 & & \\ & \ \ \ \ 110 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 90 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 900 & & \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots & & \end{array}$$

Wir haben die einzelnen Divisionen so durchgeführt, wie dies in der allgemeinbildenden Schule üblich ist. Die Angabe sämtlicher bei den Divisionen auftretenden Reste ist nötig, da die Untersuchung der Reste für die Klärung aller Fragen, die die periodischen Dezimalbrüche betreffen, sehr wesentlich ist.

Zunächst stellen wir fest, dass bei einem Primzahlnenner p nur die Reste von 1 bis $p-1$ möglich sind. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Es treten bei der Division durch die Primzahl p alle Reste von 1 bis $p-1$ auf. Dann muss nach $p-1$ Divisionen wieder ein Rest erscheinen, der schon einmal vorkam, in diesem Falle erscheinen auch die weiteren Beste und die Ziffern des Quotienten wieder in derselben Reihenfolge wie beim ersten Male; es ergibt sich also eine $(p-1)$stellige Periode.
Dies ist der Fall bei $p = 7; 17; 19; 23; 29$ usw., deren zugehörige Perioden 6; 16; 18; 22; 28 usw. Stellen aufweisen. Schreiben wir z.B. für $p = 7$ sowohl die Reste als auch die Ziffern der Periode zweimal nebeneinander auf

Rest(Zähler)	1; 3; 2; 6; 4; 5; 1; 3; 2; 6; 4; 5
Ziffern der Periode	1; 4; 2; 8; 5; 7; 1; 4; 2; 8; 5; 7

so können wir aus dieser Tabelle sofort die Dezimalbruchentwicklung für die Brüche $\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; ...; \frac{6}{7}$ entnehmen.
Soll etwa der Bruch $\frac{3}{7}$ als Dezimalbruch dargestellt werden, so beginnt die Periode mit der unter dem Rest (Zähler) 3 stehenden Ziffer 4 und setzt sich fort mit den rechts von 4 stehenden Ziffern 2 8 5 7 l; also $\frac{3}{7} = 0,428571 \quad 42....$

Auch bei unechten Brüchen mit dem Nenner 7 erscheint dieselbe sofort hinter dem Komma beginnende Periode.

Beispiel: $\frac{459}{7} = 65\frac{5}{7} = 65,57142857...$

Bei der Division 459 : 7 ergibt sich als ganzzahliger Quotient 65 und als Rest 4, dem die Ziffer 5 der Periode entspricht. Die Periode beginnt also unmittelbar nach dem Komma mit 5 und setzt sich mit 7 I 4 2 8 fort.

2. Es treten bei der Division durch die Primzahl p nicht mehr alle Reste von 1 bis $p-1$ auf. Dann ist auch die Stellenzahl der Periode nicht mehr $p-1$, sondern, wie wir an den durchgerechneten Beispielen sehen können, ein Teiler von $p-1$.
Für $p = 13$ ergeben sich nicht 12, sondern nur 6 Reste und somit auch sechsstellige Perioden. Für $p = 73$ ergeben sich 8 Reste und somit achtstellige Perioden. Bei $p = 101$ erscheinen 4 Reste und deshalb vierstellige Perioden.

Betrachten wir einmal das Beispiel $p = 13$. Für den Stammbruch finden wir

$$\frac{1}{13} = 0,076923076923...$$

Die zugehörigen Reste sind 1, 10, 9, 12, 3, 4.
Für $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{9}{13}, \frac{10}{13}, \frac{12}{13}$ ergibt sich dieselbe Ziffernfolge nur mit verschiedener Anfangsziffer. Beispiel: $\frac{3}{13} = 0,230769230769....$

Nehmen wir jedoch einen der übrigen sechs Reste, etwa 2, als Zähler, so ergibt sich $\frac{2}{13} = 0,153846153846...$, also eine neue sechsstellige Periode, die aus der Periode des Stammbruches durch Multiplikation mit dem Faktor 2 hervorgeht. Zu dieser neuen Periode gehören die Reste 2; 7; 5; 11; 6; 8.
Für irgendeinen Zähler aus diesem Restsystem, etwa 5, erhalten wir $\frac{5}{13} = 0,38461538...$, also die zweite Periode, beginnend mit der Ziffer 3. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Periode 153 846 aus der Periode 076 923 durch Multiplikation mit einem der Faktoren 2; 7; 5; 11; 6; 8 hervorgeht, wobei natürlich die Anfangsziffer variiert, z.B. $076923 \cdot 8 = 615384$.

Wir stellen die beiden Restsysteme mit den entsprechenden Perioden in folgender Übersicht zusammen:

Reste (Zähler)	1; 10; 9; 12; 3; 4; 1; 10; 9; 12; 3; 4
Ziffern der Periode	0; 7; 6; 9; 2; 3; 0; 7; 6; 9; 2; 3
Reste (Zähler)	2; 7; 5; 11; 6; 8; 2; 7; 5; 11; 6; 8
Ziffern der Periode	1; 5; 3; 8; 4; 6; 1; 5; 3; 8; 4; 6

Es erhebt sich nur die Frage nach der Zahl λ der Stellen einer Primzahlperiode. Dass λ entweder $p-1$ oder ein Teiler von $p-1$ ist, erwähnten wir bereits. Um der Lösung dieser Frage näherzukommen, betrachten wir das Verfahren, mit dem wir einen periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zurückverwandeln können.
Der englische Mathematiker John Robertson (1712-1776) stellte 1768 folgende Regeln auf:

1. Ein reinperiodischer Dezimalbruch ist gleich einem gewöhnlichen Bruch, dessen Zähler die Periode ist und dessen Nenner von so vielen Ziffern 9 gebildet wird, wie die Periode Ziffern hat.

2. Ein gemischtperiodischer Dezimalbruch ist gleich einem gewöhnlichem Bruch, dessen Zähler erhalten wird, indem man die aus den Vorziffern und der Periode gebildete Zahl um die aus den Vorziffern bestehende Zahl vermindert, und dessen Nenner aus so vielen Ziffern 9 besteht, wie die Periode Stellen hat, und aus so vielen angehängten Nullen, wie die Zahl der Vorziffern angibt.

Periodische Dezimalbrüche können stets durch fallende geometrische Reihen dargestellt werden. Man versteht unter einer geometrischen Folge eine Zahlenfolge, bei der jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor q, dem sogenannten Quotienten, hervorgeht:

$$a, aq, aq^2, aq^3, ..., aq^n$$

Wird außerdem eine Summation der Glieder der Folge ins Auge gefasst, so spricht man von einer geometrischen Reihe. Je nachdem, ob nun $|q| > 1$ oder $|q| < 1$ ist, liegt eine zunehmende bzw. eine fallende geometrische Reihe vor, da im ersten Falle die absoluten Beträge der Glieder zunehmen, im zweiten Falle hingegen abnehmen.

Darüber hinaus unterscheidet man zwischen endlichen und unendlichen geometrischen Reihen, je nachdem, ob deren Gliederzahl endlich oder unendlich ist.
Um für eine endliche geometrische Reihe mit n Gliedern eine Formel für die Summe der Glieder herzuleiten, schreiben wir sie zunächst in der Form

$$s = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-2} + aq^{n-1} \tag{I}$$

Wir multiplizieren nun beiderseits mit q und erhalten

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + aq^n \tag{II}$$

Wird nun (I) von (II) subtrahiert, so ergibt sich

$$sq - s = aq^n - a \qquad \text{oder} \qquad s(q-1) = a(q^n - 1)$$

und schließlich

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Soweit zunächst die Summenformel für eine geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl. Ist es aber auch sinnvoll, von der Summe einer geometrischen Reihe zu sprechen, wenn die Anzahl der Glieder unendlich ist ?

Betrachten wir eine zunehmende geometrische Reihe, also mit $|q| > 1$, so wird uns sofort einleuchten, dass mit unbegrenzt zunehmender Gliederzahl die Beträge der Glieder, und damit auch deren Summen, über alle Grenzen wachsen. Es hat also wenig Sinn, die Summe einer solchen Reihe zu betrachten.

Wenn dagegen $|q| < 1$ ist, d. h. der Betrag des Gliedes mit unbegrenzt zunehmender Gliederzahl sich unbegrenzt dem Wert Null nähert, kann die Summe einer solchen Reihe durchaus einen endlichen Wert haben.
Wir wollen uns diesen Sachverhalt an einem Beispiel klar machen.

Der Bruch $\frac{1}{3}$ hat, als periodischer Dezimalbruch geschrieben, die Form $0,333...$, was man auch in Gestalt einer unendlich fallenden geometrischen Reihe

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... \tag{*}$$

mit dem Quotienten $\frac{1}{10}$ schreiben kann. Soll die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{3}$ überhaupt einen Sinn haben, so muss die Reihe (*) die Summe $\frac{1}{3}$ haben. Bei unendlich fallenden geometrischen Reihen hat deren Summe stets einen endlichen Wert. Unendlich fallende Reihen mit einem anderen Bildungsgesetz für die Glieder, etwa die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

brauchen keinen endlichen Summenwert zu besitzen, da ihre Summe über alle Grenzen wachsen kann. Reihen mit endlicher Summe nennt man konvergent, alle anderen Reihen divergent.

Die unendlichen fallenden geometrischen Reihen gehören sogar zu den sogenannten absolut konvergenten Reihen, d.h. es konvergieren nicht nur die Reihen selbst, sondern auch die Reihen, die aus diesen entstehen, wenn man statt ihrer Glieder deren absolute Beträge betrachtet. Ein Beispiel für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - ...$$

Denn setzt man in dieser anstelle der Glieder deren absolute Beträge ein, so geht sie in die oben betrachtete divergente Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

über. Ebenso wie unsere bisher angeführten Behauptungen über die Reihen werden in der Reihenlehre die folgenden Sätze bewiesen:

1. Multipliziert man sämtliche Glieder einer absolut konvergenten Reihe, deren Summe S sei, mit einer konstanten Zahl c, so geht sie wieder in eine absolut konvergente Reihe, jedoch mit der Summe cS über.

2. Addiert oder subtrahiert man zwei absolut konvergente Reihen gliedweise, so entsteht wieder eine absolut konvergente Reihe, deren Summe gleich der Summe oder der Differenz aus den Summen der beiden ersten Reihen ist.

Diese beiden Sätze können wir uns nun zunutze machen, um die Formel für die Summe einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe herzuleiten.
Es sei

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... \tag{I'}$$

eine solche Reihe. Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit q, so ergibt sich wieder eine unendliche fallende geometrische Reihe eine solche Reihe. Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit q, so ergibt sich wieder eine unendliche fallende geometrische Reihe

$$S = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... \tag{II'}$$

Subtrahieren wir nun (II') von (I'), so folgt

$$S - Sq = a \qquad \text{oder} \qquad S(1-q) = a \qquad \text{bzw.} \qquad S = \frac{a}{1-q}$$

Ein reinperiodischer Dezimalbruch mit der n-stelligen Periode p kann in der Form $\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \frac{p}{10^{3n}} + ...$ angeschrieben werden. Dies ist eine fallende geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{p}{10^n}$ und dem Quotienten $\frac{1}{10^n}$. Die Summe ist somit

$$s = \frac{p}{10^n - 1}$$

Dies entspricht der Regel 1) über die Verwandlung eines reinperiodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch.

Ein gemischtperiodischer Dezimalbruch, der die m-stellige Zahl v als Vorzahl und die n-stellige Zahl p als Periode hat, kann in der Form

$$\frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^{m+n}} + \frac{p}{10^{m+2n}} + \frac{p}{10^{m+3n}} + ...$$

geschrieben werden. Als Summe erhalten wir

$$s = \frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^{m+n} - 10^m} = \frac{(v \cdot 10^n + p) - v}{10^m(10^n - 1)}$$

Dies entspricht der Regel 2) über die Verwandlung eines gemischtperiodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch.

Beispiele:
a) $0,02970297... = \frac{297}{9999} = \frac{3}{101}$,

b) $0,00123762376... = \frac{12376-1}{9999000} = \frac{1}{808}$.

Hat die Periode eines reinperiodischen Dezimalbruches 2 Stellen, so hat der zugehörige Nenner die Form 10^2-1. Da in den meisten Fällen bei der Verwandlung eines reinperiodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch noch Kürzungen vorzunehmen sind, untersuchen wir, wie die aus lauter Ziffern 9 bestehenden Zahlen in Faktoren zerlegt werden können:

$$\begin{aligned}
9 &= 10^1 - 1 = 3^2 \\
99 &= 10^2 - 1 = 3^2 \cdot 11 \\
999 &= 10^3 - 1 = 3^3 \cdot \underline{37} \\
9999 &= 10^4 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot \underline{101} \\
99999 &= 10^5 - 1 = 3^2 \cdot \underline{41} \cdot \underline{271} \\
999999 &= 10^6 - 1 = 3^3 \cdot \underline{7} \cdot 11 \cdot \underline{13} \cdot 37 \\
9999999 &= 10^7 - 1 = 3^2 \cdot \underline{239} \cdot \underline{4649} \\
99999999 &= 10^8 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot \underline{73} \cdot 101 \cdot \underline{137} \\
999999999 &= 10^9 - 1 = 3^4 \cdot 37 \cdot \underline{333667} \\
9999999999 &= 10^{10} - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot \underline{9091} \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Primfaktoren sind immer vorher noch nicht aufgetreten. Aus dieser Tabelle entnehmen wir, dass zu 11 eine zweistellige Periode, zu 3^3 und 37 eine dreistellige Periode, zu 101 eine vierstellige Periode usw. gehört. Wir können das so formulieren:
Das kleinste positive λ, für das 10^λ bei Division durch n den Rest 1 lässt, gibt die Länge der Periode für $\frac{1}{n}$ an.

Für die Zahlenrechnung ist durch diese Erkenntnis nicht allzu viel gewonnen. Deshalb zog es Gauß vor, sich Tabellen anzulegen, in denen zu den Primzahlen und ihren Potenzen nicht nur die zugehörigen λ-Werte, sondern auch die Perioden selbst angegeben sind (siehe hierzu Abschnitt 8.2), obwohl es für einen Zahlentheoretiker nicht allzu schwierig ist,auch für größere Primzahlen und auch für zusammengesetzte Zahlen die λ-Werte zu bestimmen.

Bei der Berechnung von Primzahlperioden sind jedoch einige Vorteile wahrzunehmen, die wir nun besprechen wollen:

Ist λ bei einer Primzahlperiode eine gerade Zahl, so braucht man die Division nur bis zur Hälfte der Periode durchzuführen, die Ziffern der zweiten Hälfte der Periode ergeben sich dann aus den Ziffern der ersten Hälfte durch Ergänzung zu 9.

Beispiele: a) $\frac{1}{7} = 0,142 \mid 857142857...$, $142 + 857 = 999$

b) Die Periode zu $\frac{1}{17}$ lautet $05382352 \mid 94117647$.
Es ist

$$\begin{array}{r} 99999999 \\ -05882352 \\ \hline 94117647 \end{array}$$

Begründung: Es sei $\lambda = 2\mu$. Die Periode hat dann die Form $[10^\mu \cdot \alpha] + \beta$, wobei α die durch die vordere Hälfte und β die durch die zweite Hälfte der Periode dargestellte Zahl ist.
Gehört die Periode $10^\mu \cdot \alpha + \beta$ zur Primzahl p, so muss sein

$$(10^\mu \cdot \alpha + \beta) \cdot p = 10^{2\mu} - 1 \qquad ; \qquad [(10^\mu - 1) \cdot \alpha + (\alpha + \beta)] \cdot p = [10^\mu - 1] \cdot [10^\mu + 1]$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $[10^\mu - 1]$, also

$$\left[\alpha + \frac{\alpha + \beta}{10^\mu - 1}\right] = \frac{10^\mu + 1}{p}$$

In dieser Gleichung müssen α, β, $\frac{\alpha+\beta}{10^\mu - 1}$ und $\frac{10^\mu + 1}{p}$ ganze positive Zahlen sein.
Von α wissen wir, dass es höchstem μ-stellig sein kann, außerdem ist $\alpha < \frac{1}{2} \cdot 10^\mu$; β ist auf jeden Fall kleiner als 10^μ, also kann $\alpha + \beta$ niemals den Wert $2 \cdot (10^\mu - 1)$ erreichen, d.h. $\frac{\alpha+\beta}{10^\mu - 1} < 2$.

Da nun $\frac{\alpha+\beta}{10^\mu - 1}$ eine ganze Zahl ist und $\alpha + \beta > 0$ sein muss, bleibt nur noch die Möglichkeit $\frac{\alpha+\beta}{10^\mu - 1} = 1$, also $\alpha + \beta = 10^\mu - 1$.

Hieraus folgt ferner $\alpha + 1 = \frac{10^\mu + 1}{p}$. Dieses Ergebnis kann man bei der Verwandlung einer Primzahlreziproken $\frac{1}{p}$ in einen periodischen Dezimalbruch benutzen. Erscheint bei der Division $1 : p$ der Rest $p - 1$, so weiß man, dass man bei der Hälfte der Periode angelangt ist. Man kann dann die zweite Hälfte durch Ergänzungen zu 9 sofort anschreiben.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{73} = 1 : 73 = 0,0136 \mid 986301369863 \\ \quad 10 \\ \quad 100 \\ \quad\; 270 \\ \quad\;\; 510 \\ \quad\;\;\; 72 \end{array}$$

Bei der vierten Stelle der Periode erscheint der Rest 72, also ist die Periode achtstellig und lautet 0 1 3 6 | 9 8 6 3.

Umgekehrt ist es bei der Verwandlung eines Dezimalbruches mit der Periode von $\lambda = 2\mu$ Ziffern in einen gemeinen Bruch nicht nötig, die ganze Periode durch $10^{2n} - 1$ zu teilen, vielmehr genügt es, die erste Hälfte der Periode, deren letzte Ziffer um 1 zu vergrößern ist, durch $10^{\mu}+1$ zu teilen:

Beispiel:
0,0072 9927 00729927 ... $= \frac{73}{10001} = \frac{1}{137}$

Bisweilen kann man sich bei der Verwandlung eines echten Bruches in einen periodischen Dezimalbruch Beziehungen zwischen den Resten zunutze machen.

Beispiele

$$\frac{1}{31} = 1 : 31 \quad = \quad 0,\underline{0}32258 \quad \underline{0}64516 \mid 129 \mid 032$$

$$\begin{array}{l}
10 \\
\underline{100} \\
\quad \underline{70} \\
\quad\; \underline{80} \\
\quad\; \underline{180} \\
\quad\;\; \underline{250} \\
\qquad 2\ 0
\end{array}$$

Dem Rest $\underline{1}$ entspricht die erste Stelle der Periode, nämlich 0. Dem Rest 2 entspricht die 7. Stelle der Periode, ebenfalls 0.
Die Zahl 0 3 2 2 5 8 muss demnach von der siebten Stelle der Periode ab doppelt erscheinen, also 0 6 4 5 1 6. Auch die weiteren Stellen 1 2 9 0 3 2 werden durch Verdoppelung von 0 6 4 5 1 6 gewonnen; dadurch sind wir sogar schon um drei Stellen über die 15stellige Periode hinausgekommen.

$$\frac{1}{71} = 1 : 71 \quad = \quad 0,0 \mid \underline{1}40845 \mid \underline{0}704225$$

$$\begin{array}{l}
\underline{10} \\
\underline{100} \\
\; \underline{290} \\
\quad \underline{60} \\
\quad \underline{600} \\
\quad\; \underline{320} \\
\quad\;\; \underline{360} \\
\qquad 50
\end{array}$$

Dem Rest 10 entspricht die 2. Stelle der Periode, nämlich 1.
Dem Rest 5 entspricht die 8. Stelle der Periode, nämlich 0.

Aus der Ziffernfolge 1 4 0 8 4 5 erhält man durch Halbieren die sich anschließende Ziffernfolge 0 7 0 4 2 2 5.
Aus 7 0 4 2 2 5 erhalten wir wieder durch Halbieren die sich anschließende Ziffernfolge 3 5 2 1 1 2. Bei der Halbierung der letzten Stelle 5 der Periode bleibt als Rest 1, dieser wird der

nächsten Ziffernfolge vorangesetzt, also 1 3 5 2 1 1 2; diese Zahl halbiert ergibt die nächste Ziffernfolge 6 7 6 0 5 6.
Weitere Halbierung dieser letzten Zahl liefert 3 3 8 0 2 8; dann erscheint 3 3 8 0 2 8 : 2 = 1 6 9 0 1 4. Mit 1 6 9 ist die 35stellige Periode abgeschlossen, sie lautet 014 084 507 042 253 521 126 760 563 380 281 69.

4.5 Das Ferrolsche Divisionsverfahren

Das Ferrolsche Divisionsverfahren ist im wesentlichen die Umkehrung der Ferrolschen Multiplikationsmethode.
Ferrol ging von dem Gedanken aus; dass bei der sonst üblichen schriftlichen Division viele Zahlen unnötigerweise angeschrieben werden. Es sei von vornherein bemerkt, dass das Ferrolsche Divisionsverfahren nur bei mehrstelligen Dividenden und Divisoren vorteilhaft ist.

Um das Verfahren zu erläutern, führen wir eine Multiplikation (linke Seite) nach der Ferrolschen Methode durch und schreiben alle Zwischenprodukte an. Die Umkehrung (rechte Seite) verläuft wie angegeben:

$$\begin{array}{rl}
548 & \\
\underline{312} & \\
16 & = 2\cdot 8 \\
8 & = 2\cdot 4 \\
8 & = 1\cdot 8 \\
10 & = 2\cdot 5 \\
4 & = 1\cdot 4 \\
24 & = 3\cdot 8 \\
5 & = 1\cdot 5 \\
12 & = 3\cdot 4 \\
\underline{15} & = 3\cdot 6 \\
170976 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
170976 : 312 & \\
\underline{15} & = 548 \\
20 & \\
\underline{5} & = 5\cdot 1 \\
15 :3 & = 4 \\
\underline{12} & \\
39 & \\
\underline{14} & = 5\cdot 2 + 4\cdot 1 \\
25 :3 & = 8 \\
\hline
\underline{24} & \\
17 & \\
\underline{16} & = 4\cdot 2 + 8\cdot 1 \\
16 & \\
\underline{16} & = 8\cdot 2 \\
0 &
\end{array}$$

Ergebnis: 1 7 0 9 7 6 :3 1 2 = 5 4 8 (Rest 0)

Ein einigermaßen geübter Rechner wird natürlich nicht alle Zwischenergebnisse anschreiben; ferner genügt es, die Rechnung bis zu der breiten Linie, also 25 : 3 = 8 durchzuführen.

$$\begin{array}{ll}
170976 : & 312 \\
20 & =548 \\
15 & \\
39 & \\
25 &
\end{array}$$

Der weitere Verlauf der Rechnung dient dazu festzustellen, ob die Division aufgeht, oder welcher Rest übrigbleibt. Es würden also, wenn drei Stellen des Quotienten gefordert werden, nur die folgenden Zahlen anzuschreiben sein.

Weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{l} 2263653 : \quad 413 \\ \;26 \qquad =5481 \\ \;21 \\ \;\;53 \\ \;\;34 \\ \;\;\;26 \\ \;\;\;\;6 \end{array}$$

Beispiel mit Rest:

$$\begin{array}{l} 1957119 : \;2327 \\ \;35 \qquad = \;841 \\ \;11 \\ \;\;37 \\ \;\;\;9 \\ \;\;\;71 \\ \;\;\;\;41 \\ \;\;\;\;119 \\ \;\;\;\;112 \quad \text{Rest} \end{array}$$

4.6 Die abgekürzte Division

Sie besteht im wesentlichen darin, dass man nicht, wie bei der gewöhnlichen Division, an den Rest rechts eine Null anhängt, sondern beim Divisor die erste Ziffer rechts abstreicht und nur noch für eine etwaige Aufrundung berücksichtigt.
In den folgenden Beispielen führen wir die Division sowohl vollständig als auch verkürzt durch:

a.) Es soll der Quotient 3 2 7 0 5 : 5 1 2 3 auf zwei Dezimalen genau berechnet werden.
Wird eine Genauigkeit auf zwei Dezimalstellen gefordert, so ist es zweckmäßig, noch die dritte Dezimalstelle mitzubestimmen

$$\begin{array}{l} 32705 :5123 = 6,384 \\ \underline{30738} \\ \;19670 \\ \;\underline{15368} \\ \;\;43020 \\ \;\;\underline{40984} \\ \;\;\;20260 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 32705 :5(1(2(3 = 6,38 \mid 4 \\ \underline{30738} \\ \;1967 \\ \;\underline{1537} \\ \;\;430 \\ \;\;\underline{410} \\ \;\;\;20 \end{array}$$

b) Es soll der Quotient 2 4, 7 3 5 : 0, 6 5 2 8 auf eine Dezimale genau berechnet werden

$$\begin{array}{l} 24,735 : \;0,6528 = 37,89 \\ \underline{19584} \\ \;51510 \\ \;\underline{45696} \\ \;\;58140 \\ \;\;\underline{52224} \\ \;\;\;59160 \\ \;\;\;\underline{58752} \\ \;\;\;\;408 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 24,735:0,65(2(8 = 37,89 \\ \underline{19584} \\ \;5151 \\ \;\underline{4570} \\ \;\;581 \\ \;\;\underline{522} \\ \;\;\;59 \\ \;\;\;\underline{59} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

5 Das Potenzieren

Das Potenzieren ist ein Sonderfall der Multiplikation. Daher können alle Rechenvorteile, die bei der Multiplikation angewandt werden, auch auf das Potenzieren übertragen werden.
Darüber hinaus gibt es aber noch Vereinfachungen, die besonders für die Berechnung von Quadraten nützlich sind.

5.1 Das Quadrieren

Soll z.B. eine zweistellige Zahl von der Form $10a_1 + a_0$ ins Quadrat erhoben werden, so ergibt sich aus

$$(10a_1 + a_0)^2 = [(10a_1 + a_0) + a_0] \cdot 10a_1 + a_0^2$$

folgende Regel, die wir an einem Beispiel erläutern wollen.

$$\begin{aligned} 74^2 &= [74 + 4] \cdot 70 + 4^2 \\ &= 546 \qquad\qquad [(74+4) \cdot 7 = 546] \\ &\underline{\quad\ 16} \\ &\ \ 5476 \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned} 63^2 &= [63 + 3] \cdot 60 + 3^2 \\ &= 396. \qquad\qquad [(63+3) \cdot 6 = 396] \\ &\underline{\quad\ ..9} \\ &\ \ 3969 \end{aligned}$$

Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn a_0 oder a_1 gleich 5 ist.
a) $[10a_1 + 5]^2 = [a_1 + 1] \cdot a_1 \cdot 100 + 25$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 85^2 &= 9 \cdot 8 \cdot 100 + 25 \\ &= 72.. \qquad\qquad [8 \cdot (8+1) = 72] \\ &\underline{\quad\ .25} \\ &\ \ 7225 \end{aligned}$$

Diese Regel hat auch Gültigkeit, wenn a_1 eine mehrstellige Zahl ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 4005^2 &= 401 \cdot 400 \cdot 100 + 25 \\ &= 160400.. \qquad\qquad [400 \cdot (400+1) = 160400] \\ &\underline{\qquad\quad .25} \\ &\ \ 16040025 \end{aligned}$$

b) $[50 + a_0]^2 = 2500 + 100a_0 + a_0^2 = [25 + a_0] \cdot 100 + a_0^2$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 57^2 &= 32.. \\ &\underline{\quad\ .49} \qquad\qquad [25 + 7 = 32] \\ &\ \ 3249 \end{aligned}$$

5.2 Bojkos 25er System

Dieses System beruht im wesentlichen darauf, die zu quadrierende Zahl a auf 50; 100; 150; 200 usw. zu beziehen. Es ist hierbei nur notwendig, dass der Rechner über die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 verfügt. Dem Bojkoschen System liegt folgende Beziehung zugrunde:

$$(a - 25n) \cdot n \cdot 100 + (50n - a)^2 = a^2$$

Wir nehmen nun an, dass die zu quadrierende Zahl a zwischen $50n - 25$ und $50n + 25$ liegt. Das Vielfache von 50, also $50n$, bezeichnet Bojko als Zentrum. Der Unterschied zwischen a und $50n$ beträgt im Höchstfalle 25.

Um a^2 zu berechnen, zieht man die Hälfte des Zentrums, das wir mit z bezeichnen, also $25n$ von a ab und multipliziert die Differenz $a-25n$ mit $100n$; sodann addiert man zu dem Produkt $(a - 25n) \cdot 100n$ das Quadrat des Unterschiedes zwischen a und dem Zentrum $50n$.
Dieser Unterschied, der im Höchstfalle 25 sein kann, ist positiv oder negativ, je nachdem a im Bereich $50n-25$ oder $50n+25$ liegt. Da der Unterschied quadriert wird, spielt sein Vorzeichen keine Rolle.

Die Bestimmung des Zentrums ist sehr einfach; es ist dies das der Zahl a am nächsten liegende Vielfache von 50.

Beispiele:
a) Man berechne 43^2; $z = 50$; $n = 1$; $\frac{z}{2} = 25$; also:

$$43^2 = (43 - 25) \cdot 100 + (50 - 43)^2 = 1800 + 49 = 1849$$

Wir schreiben kürzer:

$$\begin{array}{rl} 43^2 = 18.\;. & [43 - 25 = 18] \\ \underline{49} & [(50 - 43)^2 = 49] \\ 1849 & \end{array}$$

b) Man berechne 64^2; $z = 50$; $n = 1$; $\frac{z}{2} = 25$; also:

$$\begin{array}{rl} 64^2 = 39.\;. & [64 - 25 = 39] \\ \underline{196} & [(64 - 50)^2 = 196] \\ 4096 & \end{array}$$

c) Es ist 263^2 zu berechnen; $z = 250$; $n = 5$; $\frac{z}{2} = 125$; also:

$$\begin{array}{rl} 263^2 = 390\,.. & [(263 - 125) \cdot 5 = 690] \\ \underline{169} & [(263 - 250)^2 = 169] \\ 69169 & \end{array}$$

d) Man berechne 973^2; $z = 1000$; $n = 20$; $\frac{z}{2} = 500$; also:

$$\begin{array}{rl} 973^2 = 9460.\;. & [(973 - 500) \cdot 20 = 9460] \\ \underline{729} & [(1000 - 973)^2 = 729] \\ 946729 & \end{array}$$

5.3 Bojkos 250er System

Eigentlich ist das Bojkosche 25er System für beliebig hohe Zahlen a verwendbar. Bei großen a-Werten ist lediglich die Multiplikation $(a - 25n) \cdot n$ etwas unbequem.
Deshalb hat Bojko sein System erweitert durch das 250er System. Die zu quadrierende Zahl a wird auf 500; 1000; 1500 usw. bezogen. Liegt nun a zwischen $500\nu - 250$ und $500\nu + 250$, so wird a^2 auf Grund der Beziehung

$$(a - 250\nu) \cdot \nu \cdot 1000 + (500\nu - a)^2 = a^2$$

berechnet. Das Zentrum $\xi = 500\nu$ ist das der Zahl a nächstliegende Vielfache von 500. Der Unterschied zwischen a und 500ν kann im Höchstfalle 250 sein. Die Quadrate der Zahlen von 1 bis 250 können sehr einfach nach dem 25er System berechnet werden.

Beispiele:
a) Man berechne 783^2; $\xi = 1000$; $\nu = 2$; $\frac{\xi}{2} = 500$; $1000 - 783 = 217$; $z = 200$; $n = 4$; $\frac{z}{2} = 100$;also

$$\begin{array}{rl} 783^2 = 566\,..\,. & [(783 - 500) \cdot 2 = 566] \\ 468.\,. & [(217 - 100) \cdot 4 = 468] \\ 289 & [(217 - 200)^2 = 289] \\ \hline 613089 & \end{array}$$

b) Man berechne 3384^2; $\xi = 3500$; $\nu = 7$; $\frac{\xi}{2} = 1750$; $3500 - 3384 = 116$; $z = 100$; $n = 2$; $\frac{z}{2} = 50$;also

$$\begin{array}{rl} 3384^2 = 114338.\,.. & [(3384 - 1750) \cdot 7 = 11438] \\ 132.\,. & [(116 - 50) \cdot 2 = 132] \\ 256 & [(116 - 100)^2 = 256] \\ \hline 11451456 & \end{array}$$

c) Es ist 5132^2 zu berechnen; $\xi = 5000$; $\nu = 10$; $\frac{\xi}{2} = 2500$; $5132 - 5000 = 132$; $z = 150$; $n = 3$; $\frac{z}{2} = 75$;also

$$\begin{array}{rr} 5132^2 = 26320\,..\,. & [(5132 - 2500) \cdot 10 = 26320] \\ 171.\,. & [(132 - 75) \cdot 3 = 171] \\ 324 & [(150 - 132)^2 = 324] \\ \hline 26337424 & \end{array}$$

5.4 Die dritte Potenz

Für die dritte Potenz gibt es nur einen nennenswerten Rechenvorteil, wenn die Zahl, die in die dritte Potenz erhoben werden soll, auf 5 endigt, d.h., wenn sie die Form $10a + 5$ hat. Dann gilt

$$(10a + 5)^3 = \frac{a(a + 1)(2a + 1)}{2} \cdot 1000 + (10a + 5) \cdot 25$$

Da stets eine der beiden Zahlen a oder $a + 1$ eine gerade Zahl ist, ergibt sich für $\frac{a(a+1)(2a+1)}{2}$ immer ein ganzzahliger Wert.

Beispiele:

$$\begin{array}{r l}
65^3 = 273\,..\;. & [\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{2} = 273] \\
1625 & [65 \cdot 25 = \frac{6500}{4} = 1625] \\
\hline
274625 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
735^3 = 397047.\;.. & [\frac{73 \cdot 74 \cdot 147}{2} = 397047] \\
18375 & [\frac{73500}{4} = 18375] \\
\hline
39706537 &
\end{array}$$

Weitere Rechenvorteile, die bei der Bildung der dritten, vierten usw. Potenz unmittelbar zum Ziele führen, wurden bisher nicht bekannt.

6 Das Radizieren

Wir unterscheiden beim Radizieren rationale und irrationale Wurzeln; bei ersteren erscheint im Verlauf des Radizierens einmal der Rest Null, wodurch der Rechenvorgang zum Abschluss gelangt.
Irrationale Wurzeln können weder durch einen endlichen Dezimalbruch noch durch einen gemeinen Bruch dargestellt werden. Da Rechenvorteile, die wir bei der Berechnung von irrationalen Wurzeln wahrnehmen können, im allgemeinen auch für rationale Wurzeln Gültigkeit haben, werden wir in erster Linie die Auswertung irrationaler Wurzeln behandeln.

6.1 Die Quadratwurzel

Wir wollen zunächst die Frage beantworten, ob wir ohne umfangreichere Rechnung eine Quadratzahl als solche erkennen können. Das ist nun bei mehrstelligen Zahlen im allgemeinen nicht der Fall.
Dagegen ist es in sehr vielen Fällen möglich, sofort festzustellen, dass eine Zahl keine Quadratzahl sein kann.

Eine Quadratzahl kann niemals die Ziffern 2; 3; 7; 8; als Endziffer haben; auch kann sie nur auf eine gerade Anzahl von Nullen endigen.
Berücksichtigt man die beiden letzten Stellen einer Zahl, so ergibt sich, dass eine Quadratzahl nur auf eine der Zahlen 00; 01; 04; 09; 16; 21; 24; 25; 29; 36; 41; 44; 49; 56; 61; 64; 69; 76; 81; 84; 89; 96 endigen kann.
Diese Zahlen kann man sich verhältnismäßig leicht im Gedächtnis einprägen, wenn man sie in anderer Reihenfolge schreibt:

01;	21;	41;	61;	81;
04;	24;	44;	64;	84;
25;				
16;	36;	56;	76;	96;
09;	29;	49;	69;	89;

Abgesehen von der Endziffer 5, die nur mit der Zehnerstelle 2 auftreten kann, bilden die Zahlen mit derselben Endziffer jeweils eine arithmetische Folge mit der Differenz 20. Wir haben also einschließlich der Endziffern 00 im ganzen 22 Zahlen, die Endzahlen von Quadratzahlen sein können; die übrigen 78 ein- und zweiziffrigen Zahlen scheiden als Endzahlen von Quadraten von vornherein aus.

Wir wenden uns nun der zahlenmäßigen Auswertung der Quadratwurzel zu. Wie beim Radizieren von Dezimalbrüchen das Komma zu setzen ist, setzen wir als bekannt voraus. Eine Vereinfachung der Rechnung ergibt sich in vielen Fällen durch Abspaltung quadratischer Faktoren des Radikanden.
Sehr leicht zu erkennen sind die quadratischen Faktoren 4; 9 und 25 (Siehe Teilbarkeitsregeln).

Beispiele:
a) $\sqrt{4356} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 121} = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$
b) $\sqrt{65025} = \sqrt{9 \cdot 25 \cdot 289} = 3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$

Auch die Umkehrung der angegebenen Regel für das Quadrieren von Zahlen, die auf 5 endigen, ist bei Radikanden mit der Endzahl 25 anwendbar. Aus

$$\sqrt{(a+1) \cdot a \cdot 100 + 25} = 10a + 5$$

ergibt sich nämlich folgende Vereinfachung:
Man lässt bei einem auf 25 endigenden Radikanden die Zahl 25 weg und prüft, ob die Restzahl das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist. Hat die Restzahl die Form $(a+1)\cdot a$, so ist die gesuchte Wurzel $10a+5$.
Es ist hierbei zu beachten, dass die Restzahl $(a+1)\cdot a$ nur auf die Ziffern 0; 2 oder 6 endigen kann. Außerdem ist a in vielen Fällen durch überschlägige Berechnung der Wurzel $\sqrt{(a+1)\cdot a}$ zu bestimmen.

Beispiel: $\sqrt{34225} = 85$

Die Restzahl 342 liegt zwischen den Quadratzahlen $324 = 18^2$ und $361 = 19^2$. Da $19 \cdot 18 = 342$ ist, ergibt sich für die gesuchte Wurzel 185.
Selbstverständlich muss man in diesem Falle nachprüfen, ob die Restzahl in der Form $(a+1)\cdot a$ dargestellt werden kann.

Weiteres Beispiel: $\sqrt{648025} = 805$

Die Wurzel aus der Restzahl, also 6480, ergibt einen Wert, der wenig größer als 80 ist. Die Probe ergibt, dass $6480 = 80 \cdot 81$ und somit die gesuchte Wurzel 805 ist.

Das allgemeine Verfahren zum Ausziehen einer Quadratwurzel, das auf der Anwendung der ersten binomischen Formel bzw. der Formeln für die Quadrate mehrgliedriger Summen beruht, wird heute in der Schule nicht mehr behandelt, da man in den meisten Fällen mit der weit bequemeren logarithmischen Berechnung der Wurzeln auskommt.
Trotzdem dürfte es interessant und lehrreich sein, sich das oben genannte Verfahren vor Augen zu führen.

Das Quadrat einer zweistelligen Zahl können wir in der Form

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

darstellen, z.B.

$$36^2 = (30+6)^2 = 900 + 360 + 36 = 1296$$

Entsprechend hat man für das Quadrat einer dreistelligen Zahl

$$(a+b+c)^2 = a^2 + (2ab + b^2) + (2(a+b)c + c^2)$$

zum Beispiel

$$435^2 = (400+30+5)^2 = 160000 + (2\cdot 400 \cdot 30 + 900) + +(2(400+30)5 + 25) = 189225$$

für das Quadrat einer vierstelligen Zahl

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + (2ab+b^2) + (2(a+b)c + c^2) + (2(a+b+c)d + d^2)$$

usw. und allgemein

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + (2a_1a_2 + a - 2^2) + ... + (2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})a_n + a_n^2)$$

wie man durch Rechnung leicht bestätigt.
Wollen wir nun die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierstelligen Zahl, etwa aus 1936 ziehen, so suchen wir das größte Vielfache der Zahl 10, das ins Quadrat erhoben höchstens so groß ist wie 1900, d.h. wir suchen gemäß der Formel

$$\sqrt{a^2 + (2a+b)b} = a + b$$

die Zahl a und erhalten $a = 40$.
Das Quadrat von a subtrahieren wir von 1936 und erhalten 1936 - 1600 = 336. Das ist aber gleich dem Ausdruck $2ab + b^2$ oder $(2a + b)b$.
Wir verdoppeln daher $a = 40$, erhalten $2a = 80$ und sehen, dass 80 etwa viermal in 336 enthalten ist. Nun bilden wir versuchsweise $2a + b = 2 \cdot 40 + 4 = 84$ und $(2a + b)b = 84 \cdot 4$.
Das ergibt aber 336, so dass wir in der Tat $b = 4$ setzen können. Wir hatten also $a = 40$ und $b = 4$, so dass sich die Quadratwurzel aus 1936 zu 44 ergibt.

Analog verfahren wir beim Radizieren einer fünf- oder sechsstelligen Zahl, etwa 83521.
Wir suchen zunächst das größte Vielfache von 100, das quadriert höchstens so groß ist wie 80000. In unserem Falle ist das 200; denn 200^2 = 40000, während 300^2 bereits 90000 ergibt. Es ist also $a = 200$ und $a^2 = 40000$.

Nach Subtraktion erhalten wir 83521 - 40000 = 43521, was wir gemäß unserer Formel für $(a + b + c)^2$ als $2ab + b^2$ oder $(2a + b)b$ auffassen.
Wir bilden wieder $2a = 400$ und sehen, dass diese Zahl etwa 100 mal in 43521 aufgeht; $b = 100$ schließen wir aber von vornherein aus, da für b nur Vielfache von 10 zur Debatte stehen, die unterhalb von 100 liegen.
Aber auch mit $b = 90$ bzw. $(2a + b)b = (400 + 90)90 = 490 \cdot 90 = 44100$ erhalten wir noch eine zu große Zahl. Erst mit $b = 80$ und $(2a + b)b = 480 \cdot 80 = 38400$ ergibt sich eine Zahl, die unter 43521 liegt.

Die Subtraktion ergibt 43521 - 38400 = 5121, was in unserer Formel dem Ausdruck $2(a + b)c + c^2 = (2(a + b) + c)c$ entspricht. Für a hatten wir 200 und für b die Zahl 80 gefunden, so dass sich $a + b$ zu 280 und $2(a + b)$ zu 560 ergibt. In unserem Rest 5121 geht 560 etwa 9 mal auf.
Setzen wir versuchsweise jetzt $c = 9$, so folgt

$$(2(a + b) + c)c = (560 + 9) \cdot 9 = 569 \cdot 9 = 5121$$

womit, da 83521 eine Quadratzahl ist, das Verfahren abbricht. In der Tat ist $\sqrt{83521} = 289$, wie wir uns leicht durch Quadrieren überzeugen können.

In dieser Weise ließen sich Quadratwurzeln aus beliebig großen Zahlen ziehen, doch erscheint uns das Verfahren in der eben durchgeführten Form für die Praxis zu umständlich.
Es lässt sich aber sehr leicht vollständig schematisieren, wie wir an Hand des folgenden Beispiels für eine achtstellige Zahl sehen können.

Um etwa aus 71639296 die Quadratwurzel zu ziehen, kennzeichnen wir in dieser Zahl zweiziffrige Gruppen, wobei wir von rechts beginnen, und schreiben.

$$\sqrt{71 \mid 63 \mid 92 \mid 96} =$$

Erster Schritt:
Wir suchen die größte einstellige Zahl, deren Quadrat höchstens so groß ist wie 71. Das trifft für 8 zu (8^2 = 64; damit haben wir im Grunde genommen a zu 8000 und a^2 zu 64000000 ermittelt).
Das Quadrat 64 von 8 subtrahieren wir von 71 und ziehen zugleich die nächste zweiziffrige Gruppe herunter:

$$\begin{array}{l} \sqrt{71 \mid 63 \mid 92 \mid 96} = 8 \\ \underline{64} \\ 7 \quad 63 \end{array}$$

Zweiter Schritt: Nun ziehen wir vor der Zahl 763 einen senkrechten Strich, verdoppeln die hinter dem Gleichheitszeichen stehende Zahl 8 und schreiben das Ergebnis 16 in einem angemessenen Abstand vor den eben gezogenen Strich:

$$\begin{array}{r l}
 & \sqrt{71\,{\scriptstyle|}\,63\,{\scriptstyle|}\,92\,{\scriptstyle|}\,96} = 8 \\
 & 64 \\
\cline{2-2}
16 & |7 \quad 63
\end{array}$$

Sodann lassen wir in der Zahl 763 die letzte Stelle unbeachtet und stellen fest, dass 16 in 76 viermal enthalten ist. Nun schreiben wir die Ziffer 4 zur Zahl 16 hinzu, setzen die 4 noch einmal darunter, multiplizieren 164 mit 4 und schreiben das Ergebnis unter 7 63:

$$\begin{array}{r l}
 & \sqrt{71\,{\scriptstyle|}\,63\,{\scriptstyle|}\,92\,{\scriptstyle|}\,96} = 84 \\
 & 64 \\
\cline{2-2}
164 & |7 \quad 63 \\
4 & |6 \quad 56
\end{array}$$

Es hätte natürlich auch hier theoretisch eintreten können, dass das Produkt 164 · 4 zu groß ausfällt, um bei der Subtraktion von 763 einen nichtnegativen Rest zu ergeben. Dann hätten wir 163 · 3 zu bilden gehabt.
Damit haben wir eigentlich rein schematisch mit 6560000 den zweiten Summanden $2ab+b^2 = (2a+b)b = 6560000$ in der Formel für $(a+b+c+d)^2$ und b zu 400 ermittelt, weshalb wir die Ziffer 4 bereits in das Ergebnis neben die Ziffer 8 eingetragen haben.

Dritter Schritt: Um die Zahl

$$(2(a+b)c+c^2) = (2(a+b)+c)c$$

zu bilden, führen wir ebenso wie beim zweiten Schritt die Subtraktion 763 - 656 aus, verdoppeln nunmehr die Zahl 84 und ziehen sodann die nächste Zweiziffferngruppe herunter:

$$\begin{array}{r l}
 & \sqrt{71\,{\scriptstyle|}\,63\,{\scriptstyle|}\,92\,{\scriptstyle|}\,96} = 84 \\
 & 64 \\
\cline{2-2}
164 & |7 \quad 63 \\
4 & |6 \quad 56 \\
\cline{2-2}
168 & |1 \quad 07\ 92
\end{array}$$

In 1079(2) ohne die 2 ist 168 sechsmal enthalten, so dass sich jetzt, wenn wir auch noch den vierten Schritt in ähnlicher Weise vollziehen,

$$\begin{array}{r l}
 & \sqrt{71\,{\scriptstyle|}\,63\,{\scriptstyle|}\,92\,{\scriptstyle|}\,96} = 8464 \\
 & 64 \\
\cline{2-2}
164 & |7 \quad 63 \\
4 & |6 \quad 56 \\
\cline{2-2}
1686 & |1 \quad 07\ 92 \\
6 & |1 \quad 01\ 16 \\
\cline{2-2}
16924 & | \quad\ \ 06\ 76\ \ 96 \\
4 & | \quad\ \ 06\ 76\ \ 96
\end{array}$$

ergibt. Hier hatten wir wieder die Wurzel aus einer Quadratzahl gezogen.
Als Beispiel sei noch die Berechnung von $\sqrt{200}$ nach diesem Verfahren angeführt, die sich bekanntlich nicht ganzzahlig ziehen lässt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{2\,00} \qquad\qquad = 14,142\ldots \\
 & 1 \\ \hline
24 & 1\;00 \\
4 & \;\;96 \\ \hline
281 & \;\;\;400 \\
1 & \;\;\;281 \\ \hline
2824 & \;\;\;11900 \\
4 & \;\;\;11296 \\ \hline
28282 & \;\;\;\;\;6\,0400 \\
2 & \;\;\;\;\;5\,6564 \\ \hline
 & \;\;\;\;\;\;\;383600
\end{array}
$$

Das eben betrachtete Verfahren der numerischen Berechnung einer Quadratwurzel kann folgendermaßen vereinfacht werden:
Hat man bei einer Quadratzahl n Ziffern nach dem oben beschriebenen Verfahren berechnet, so können weitere $n-1$ Stellen unter Anwendung der abgekürzten Division ermittelt werden.

Beispiele:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{14{,}65} & = 3,827 \\
\;\;9 & \\ \hline
\;\;565 & \\
\;\;544 & = 68 \cdot 8 \\ \hline
\;\;\;2100 & \\
\;\;\;1524 & = 762 \cdot 2 \\ \hline
\;\;\;\;57600 & \\
\;\;\;\;53529 & = 7647 \cdot 7 \\ \hline
\;\;\;\;\;4071 &
\end{array}
$$

Weiterer Verlauf der Rechnung mit verkürzter Division $4071 : 7(6(5 = 532$.
Ergebnis: $\sqrt{14,65} = 3,827532$

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{75} & = 8,66 \\
\;69 & \\ \hline
1100 & \\
\;\;996 & = 166 \cdot 6 \\ \hline
\;\;10400 & \\
\;\;10356 & = 1726 \cdot 6 \\ \hline
\;\;\;\;\;44 &
\end{array}
$$

Ergebnis: $\sqrt{75} = 8,66025$

Ein weiteres, sehr brauchbares Näherungsverfahren zur Berechnung irrationaler Quadratwurzeln wird von Heron von Alexandria[7] (um 100 u.Z.) angegeben.

Soll nach diesem Verfahren $\sqrt{A}$ berechnet werden, so geht man von einem Näherungswert $a_1 \approx \sqrt{A}$ aus und bildet $\frac{A}{a_1}$. Ist a_1 zu klein gewählt werden, so ist $\frac{A}{a_1}$ ein zu großer Näherungswert, und umgekehrt: bei zu großem a_1 ist $\frac{A}{a_1}$ zu klein. Es ist daher sinnvoll, aus a_1 und $\frac{A}{a_1}$ den Mittelwert

$$a_2 = \frac{a_1 + \frac{A}{a_1}}{2}$$

zu bilden und diesen als neuen Näherungswert zu nehmen.

Genügt die Genauigkeit des Näherungswertes a_2 noch nicht, so wird die Rechnung wiederholt, wobei jetzt der Wert a_2 als Näherungswert zugrunde zu legen ist.
Dann ergibt sich der nochmals verbesserte Näherungswert

$$a_3 = \frac{a_2 + \frac{A}{a_2}}{2} \qquad \text{oder} \qquad a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{A}{a_2}\right)$$

Die Rechnung kann beliebig oft wiederholt werden. Es gilt dann die Beziehung:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$$

Meistens genügen zwei oder drei Näherungen, da sich die Näherungswerte sehr rasch dem exakten Wert der Wurzel nähern.

Beispiele:
a) Es ist $\sqrt{2}$ zu berechnen. Wir gehen aus von dem sehr ungenauen Näherungswert $a_1 = 1$. Dann ist:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2};$$
$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12};$$
$$a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{2} + \frac{2}{\frac{17}{2}}\right) = \frac{577}{408}$$

Wir fanden: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2} = 1,5$, $a_3 = \frac{17}{12} = 1,416$; $a_4 = \frac{577}{408} = 1,414215$.
Wären wir von dem ebenfalls sehr ungenauen Näherungswert $a_1 = 2$ ausgegangen, so hätte sich ergeben:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad \text{usw.}$$

Um einen Überblick über die Genauigkeit des Verfahrens zu erhalten, bilden wir die Näherungswerte

$$\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1,33; \qquad ; \qquad \frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17} = 1,411; \qquad ; \qquad \frac{2}{\frac{577}{408}} = 1,414211$$

[7] Ob Heron dieses Verfahren selbst erdacht hat, ist zum mindesten zweifelhaft.

Der genaue Wert liegt also zwischen 1,414 215 und 1,414 211. Wir sehen also, dass mit einer verhältnismäßig geringen Zahl von Rechenoperationen ein sehr genauer Näherungswert erzielt wurde.

b) Wir berechnen $\sqrt{10}$;

$$a_1 = 3; \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6}; \qquad a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{10 \cdot 6}{19}\right) = \frac{721}{228}$$

Wir fanden:

$$a_1 = 3; \qquad a_2 = \frac{19}{6} = 3,167; \qquad a_3 = \frac{721}{228} = 3,162281$$

Zur Beurteilung der Genauigkeit bilden wir:

$$\frac{10}{3} = 3,33; \qquad \frac{10}{\frac{19}{6}} = 3,158; \qquad \frac{10}{\frac{721}{228}} = 3,162275$$

Der genaue Wert liegt also zwischen 3,162281 und 3,162275. Gehen wir von dem Näherungswert $a_1 = 3,2 = \frac{16}{5}$ aus, so erhalten wir:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{5} + \frac{10 \cdot 5}{16}\right) = \frac{253}{80}$$
$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{253}{80} + \frac{10 \cdot 80}{253}\right) = \frac{128009}{40480} = 3,162278$$

Die ist genau das arithmetische Mittel aus 3,162281 und 3,162275.

6.2 Die Kubikwurzel und Wurzel höheren Grades

Benutzen wir die Binomialformel

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x^2$$

so ist

$$\sqrt[3]{1,08} = (1 + 0,08)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,08 - \frac{1}{9} \cdot 0,0064 \approx 1,02596$$

Durch einen kleinen Kunstgriff können wir unser Verfahren aber auch auf beliebig große Radikanden ausdehnen. Es sei z.B. $\sqrt[3]{345}$ zu berechnen. In der Nähe von 345 liegt die Kubikzahl $343 = 7^3$. Wir schreiben nun

$$\sqrt[3]{345} = \sqrt[3]{343+2} = (343+2)^{\frac{1}{3}} = 343^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2}{343}\right)^{\frac{1}{3}} = 7 \cdot \left(1 + \frac{2}{343}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Entwickeln wir nun den zweiten Faktor in eine Reihe (der Einfachheit halber brechen wir nach dem dritten Glied ab), so folgt

$$\left(1 + \frac{2}{343}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{343} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{343}\right)^2$$

Wie wir uns durch Rechnung überzeugen können, liefert das dritte Glied erst in der achten Dezimale einen Beitrag, so dass wir dieses getrost vernachlässigen können.
Es gilt dann

$$\left(1 + \frac{2}{343}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + 0,001943 = 1,001943$$

und

$$\sqrt[3]{345} \approx 7 \cdot 1,001943 = 7,013601$$

Analog können wir auch bei Wurzeln höherer Grade verfahren.

7 Die Neuner- und Elferprobe

7.1 Zahlentheoretische Vorbemerkungen

Für den mit zahlentheoretischen Betrachtungen nicht vertrauten Leser lassen wir einige Erläuterungen folgen, bei denen die auftretenden Buchstaben stets ganze Zahlen bedeuten.
Zwei Zahlen a und b heißen (nach Gauß) kongruent nach dem Modul m, wenn ihre Differenz durch m ohne Rest teilbar ist. Wir schreiben hierfür

$$a \equiv b \pmod m$$

und lesen "a kongruent b modulo m". Insbesondere ist jede Zahl modulo m dem Rest kongruent, den sie bei der Division durch m lässt.

Beispiele:
$74 \equiv 52 \pmod{11}$, da $\frac{74-52}{11}$ die ganze Zahl 2 ergibt, oder anders ausgedrückt: 74 und 52 ergeben bei der Division durch 11 denselben Rest 8.

Bei den uns vom Schulunterricht geläufigen Divisionen, bei denen nur positive und ganze Zahlen auftreten, ist der Rest stets kleiner als der Divisor. Bei der Division durch 11 können sich nur Reste zwischen 0 und 10 ergeben.

Wir können aber die Bedeutung des Wortes "Rest" dadurch erweitern, dass wir den Quotienten willkürlich wählen, wobei der Rest größer als der Divisor oder sogar negativ werden kann.

Beispiele:
74 : 11 = 7 Rest -3 oder als Kongruenz geschrieben $74 \equiv -3 \pmod{11}$.
74 : 11 = 4 Rest +30 oder $745 \equiv 30 \pmod{11}$. In diesem Falle ist der Rest 30 größer als der Divisor. Ferner ist 74 : 11 = 10 Rest -36 oder $74 \equiv -36 \pmod{11}$.

Offensichtlich folgt aus den Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{l} 74 \equiv 52 \\ 74 \equiv 8 \\ 74 \equiv -3 \\ 74 \equiv 30 \\ 74 \equiv -36 \end{array}\right\} \pmod{11} \text{ die Richtigkeit der Kongruenzen } \left.\begin{array}{l} 52 \equiv 8 \\ 52 \equiv -3 \\ 52 \equiv 30 \\ 52 \equiv -36 \\ 8 \equiv -3 \\ 8 \equiv 30 \end{array}\right\} \pmod{11} \text{ usw.}$$

Für Kongruenzen nach demselben Modul m ergibt sich somit der Satz:

Sind zwei Zahlen einer dritten kongruent, so sind sie auch unter sich kongruent.

Ferner gilt: Zwei Kongruenzen können addiert, subtrahiert und multipliziert werden, d.h.:

Aus $A \equiv B (\operatorname{mod} m)$ und $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ folgt

$$(A+a) \equiv (B+b)(\operatorname{mod} m), \quad (A-a) \equiv (B-b)(\operatorname{mod} m), \quad A \cdot a \equiv B \cdot b (\operatorname{mod} m)$$

Da die Potenz nur ein Sonderfall der Multiplikation ist, folgt aus $A \equiv a(\operatorname{mod} m)$ auch $A^2 \equiv a^2(\operatorname{mod} m)$; $A^3 \equiv a^3(\operatorname{mod} m)$; ...; $A^n \equiv a^n(\operatorname{mod} m)$, wobei n nur positiv und ganzzahlig sein kann.

Beispiele: $100 \equiv 37(\mod 7)$; $23 \equiv 2(\operatorname{mod} 7)$. Hieraus folgt

$(100+23) \equiv (37+2)(\operatorname{mod} 7)$; $\quad (100 \cdot 23) \equiv (37 \cdot 2)(\operatorname{mod} 7)$; $\quad 23^2 \equiv 2^2(\operatorname{mod} 7)$ usw.

Aus diesen für Kongruenzen gültigen Beziehungen ergibt sich für die genannten Rechenoperationen folgende Möglichkeit der Nachprüfung:

Man bestimmt für alle in der Rechenoperation vorkommenden Zahlen die Reste nach einem beliebigen Modul und führt mit den Resten dieselbe Rechenoperation aus wie mit den ursprünglich gegebenen Zahlen; dann muss das Ergebnis der mit den Resten ausgeführten Operation mit dem Rest des aus den ursprünglich gegebenen Zahlen gewonnenen Ergebnisses übereinstimmen.

Wir müssen hier auf einen schwachen Punkt dieser Restproben hinweisen:
Ergibt sich bei der Restprobe ein Widerspruch, so ist die Rechnung fehlerhaft. Stimmt die Restprobe, so ist dies noch kein absolut sicheres Zeichen für die Richtigkeit der Rechnung, denn wenn der bei der Ausführung der Rechenoperation begangene Fehler gleich dem Modul oder gleich einem Vielfachen des Moduls ist, so stimmt die Restprobe dennoch, und der Fehler wird durch die Restprobe nicht aufgedeckt.

Beispiele:
a) 657 · 342 = 224 694. Wir wählen als Modul 13
Es ist $657 \equiv 7 \pmod{13}$; $342 \equiv 4 \pmod{13}$; $224694 \equiv 2 \pmod{13}$
Probe: 7 · 4 = 28; $28 \equiv 2 \pmod{13}$

b) 6583 · 2127 = 13900041. Wir wählen als Modul 17.
Es ist $6583 \equiv 4 \pmod{17}$; $2127 \equiv 2 \pmod{17}$; $13900041 \equiv 8 \pmod{17}$
Probe: 4 · 2 = 8; $8 \equiv 8 \pmod{17}$

Führen wir für dieses Beispiel die Restprobe nach dem Modul 13 durch, so ergibt sich:
$6583 \equiv 5 \pmod{13}$; $2127 \equiv 8 \pmod{13}$; $13900041 \equiv 12 \pmod{13}$
Probe: 5 · 8 = 40; $40 \equiv 1 \pmod{13}$.

Die Probe stimmt nicht, da 40 nach dem Modul 13 den Rest 1 und 13900041 nach dem Modul 13 den Rest 12 ergibt. Das richtige Ergebnis ist 6583 · 2127 = 14002041.

Die Proben $14002041 \equiv 8 \pmod{17}$ und $14002041 \equiv 1 \pmod{13}$ zeigen Übereinstimmung. Durch die Restprobe nach dem Modul 17 deckt man den Fehler nicht auf, da die Differenz der beiden Zahlen 14002041 - 13900041 = 102000 ein Vielfaches des Moduls 17 ist.

Da nun jede beliebige ganze Zahl größer als 1, als Modul gewählt werden kann, wird man zweckmäßig solche Moduln verwenden, für die die Reste auf möglichst einfache Weise berechnet werden können.
Es sind dies im dekadischen Zahlensystem die Moduln 9 und 11. Die sich hieraus ergebenden Rechenproben heißen Neuner- bzw. Elferprobe.

7.2 Die Neunerprobe

Wird die Zahl $a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + ... + 10^n a_n$ durch 9 geteilt, so bleibt als Rest $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$, da sämtliche Potenzen von 10, also 10; 100; 1000 usw. bei der Division durch 9 den Rest 1 ergeben. Wir erhalten somit den Satz:

Eine Zahl ergibt durch 9 geteilt denselben Rest wie ihre Quersumme, d.h. wie die Summe ihrer Ziffern.

Beispiel: $647953 \equiv 7 \pmod{9}$.

Die Quersumme $3+5+9+7+4+6=34$ ergibt durch 9 geteilt ebenfalls den Rest 7. Diesen Rest 7 erhält man dadurch, dass man von der Quersumme 34 wiederum die Quersumme bildet. Bei der Bildung des Neunerrestes der Zahl 647953 hätte man von vornherein die Ziffer 9 und die Ziffernpaare 4 + 5 und 3 + 6, deren Summen ebenfalls 9 ergeben, weglassen können, da eine Kongruenz richtig bleibt, wenn man ein beliebiges Vielfaches des Moduls addiert oder subtrahiert. In unserem Beispiel wäre dann als Neunerrest die Zahl 7 geblieben.

Beispiele für die Neunerprobe: $6539203 \cdot 187 = 122283096$
Neunerreste: $1 \cdot 7 = 7$

Bei der Bildung des Neunerrestes der Zahl $\underline{6}5\underline{39}203$ hätte man die Ziffern 6; 3; 9 weglassen können; man hätte erhalten 5 + 2 + 3 = 10 und 1 + 0 = 1.
Bei der Zahl $\underline{18}7$ bleibt als Neunerrest wegen 1 + 8 = 9 die Zahl 7 und bei dem Produkt $1222\underline{830961}$ erhalten wir 1 + 2 + 2 + 2 = 7.

Weiteres Beispiel: $1183 \cdot 406 - 731 \cdot 256 = 293162$
Neunerreste: $4 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \equiv -4 \equiv 5 (\mod 9)$

Für die Neunerprobe gilt: Ergibt sich bei der Neunerprobe ein Widerspruch, so ist die Rechnung fehlerhaft; stimmt die Neunerprobe, so kann in der Rechnung ein Fehler gleich dem Modul 9 oder gleich einem Vielfachen von 9 enthalten sein.

7.3 Die Elferprobe

Da 1; 10^2; 10^4, ... also alle geraden Potenzen von 10 bei der Division durch 11 den Rest $+1$ und alle ungeraden Potenzen von 10, also 10; 10^3; 10^5, ... den Rest 10 oder -1 ergeben, ist der Elferrest der Zahl $a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + ... + 10^n a_n$ gleich $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + -....$

Auch hier kann ein beliebiges Vielfaches von 11 addiert oder subtrahiert werden.

Beispiele : Der Elferrest von 8123954 beträgt 4 - 5 + 9 - 3 + 2 - 1 + 8 = +14 oder +3; die Zahl 769253 lässt bei der Division durch 11 den Rest 3 - 5 + 2 - 9 + 6 - 7 = -10 bzw. +1.

Die Elferreste können nun für Rechenproben in derselben Weise verwendet werden wie die Neunerreste. Ein Fehler wird durch die Elferprobe nicht aufgedeckt, wenn er 11 oder ein Vielfaches von 11 beträgt.

Beispiele für die Elferprobe: $735264 \cdot 31527 = 23180668128$
Elferreste: $-9 \cdot 1 = -9$

Weiteres Beispiel: $1183 \cdot 406 - 731 \cdot 256 = 293162$
Elferreste: $-5 \cdot 10 - 5 \cdot 3 in 1 (\mod 11)$

Stimmt sowohl die Neuner- als auch die Elferprobe, so würde nur ein etwaiger Fehler, der 99 oder ein Vielfaches von 99 beträgt, nicht aufgedeckt werden.

7.4 Die Anwendung der Restproben bei Divisionen und bei der Berechnung von Wurzeln

Wir erwähnten bereits, dass die Restproben bei Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Potenzierungen und bei allen Rechnungen, die sich aus den genannten Operationen zusammensetzen, angewendet werden können.

Bei Additionen und Subtraktionen sind Restproben nur von untergeordneter Bedeutung, da hier die Proben durch die entgegengesetzten Rechenoperationen bezüglich des Zeitaufwandes und der Sicherheit den Restproben nicht nachstehen.
Für Divisionen und Berechnungen von Wurzeln wird folgendermaßen verfahren:

Ergibt sich bei der Division der ganzen Zahlen $a : b$ der ganzzahlige Quotient q und bleibt dabei der ganzzahlige Rest $r < q$, so ist

$$b \cdot +r = a$$

Für diese Gleichung können alle Restproben angewendet werden.

Beispiel:
$296 \cdot 1534 + 183 = 454247$
Neunerreste: $8 \cdot 4 + 3 \equiv 8 (\bmod 9)$
Elferreste: $(-1) \cdot 5 - 4 \equiv 2 (\bmod 11)$

$$\begin{array}{l}
454247 : 296 = 1534 \\
\underline{296} \\
1582 \\
\underline{1480} \\
\quad 1024 \\
\quad \underline{\ \ 888} \\
\qquad 1367 \\
\qquad \underline{1184} \\
\qquad\ \ 183 \text{ (Rest)}
\end{array}$$

Hätte man die Division schon nach der zweiten Ziffer des Quotienten abgebrochen, so hätte sich ergeben also
$296 \cdot 1500 + 10247 = 454247$
Neunerreste: $8 \cdot 6 + 5 \equiv 8 (\bmod 9)$
Elferreste: $-1 \cdot 4 + 6 \equiv 2 (\bmod 11)$

$$\begin{array}{l}
454247 : 296 = 1500 \\
\underline{296} \\
1582 \\
\underline{1480} \\
\quad 10247 \text{ (Rest)}
\end{array}$$

Man hätte aber auch die Division noch weiterführen können:

Hier muss der Dividend und der Quotient entsprechend der Anzahl der Dezimalstellen des Quotienten (nämlich 3) mit $10^3 = 1000$ erweitert werden. Die Gleichung für die Restproben lautet dann:

$296 \cdot 1534618 + 72 = 454247000$
Neunerreste: $8 \cdot 1 + 9 \equiv 8 (\bmod 9)$
Elferreste: $-1 \cdot 8 - 5 \equiv -2 (\bmod 11)$

$$\begin{array}{l}
454247 : 296 = 1534 \\
\underline{296} \\
1582 \\
\underline{1480} \\
\quad 1024 \\
\quad \underline{\ \ 888} \\
\qquad 1367 \\
\qquad \underline{1184} \\
\qquad\quad 1830 \\
\qquad\quad \underline{1776} \\
\qquad\qquad 540 \\
\qquad\qquad \underline{296} \\
\qquad\qquad 2440 \\
\qquad\qquad \underline{2368} \\
\qquad\qquad\quad 72 \quad \text{(Rest)}
\end{array}$$

Das folgende Beispiel zeigt, wie die Restproben bei Divisionen von Dezimalbrüchen anzuwenden sind: $27,7 : 3,1416 = 277000 : 31416$

$$\begin{array}{lll}
277000: & 31416 = 8,817 & \\
\underline{251328} & & \\
\;\;256720 & & \\
\;\;\underline{251328} & & \\
\;\;\;\;53920 & & \\
\;\;\;\;\underline{31416} & & \\
\;\;\;\;225040 & & \\
\;\;\;\;\underline{219912} & & \\
\;\;\;\;\;\;5128 & & \text{(Rest)}
\end{array}$$

Da der Quotient drei Dezimalstellen enthält, muss sowohl der Dividend als auch der Quotient mit $10^3 = 1000$ erweitert werden:
$31416 \cdot 8817 + 5128 = 277000000$
Neunerreste: $6 \cdot 6 + 7 \equiv 7 \pmod 9$
Elferreste: $0 \cdot 6 + 2 \equiv 2 \pmod{11}$

Hätte man die zuletzt behandelten Divisionsbeispiele unter Anwendung von Auf- und Abrundungen durchgeführt, so wäre eine Probe auf die Richtigkeit des Ergebnisses mit Hilfe einer Restprobe nicht möglich gewesen. Dies gilt für alle abgekürzten Rechenoperationen, bei denen Auf- bzw. Abrundungen vorgenommen werden.

Restproben beim Wurzelziehen sind in analoger Weise vorzunehmen wie bei Divisionen. Bleibt bei $\sqrt[n]{a} = b$ der Rest r übrig, so ist

$$b^n + r = a$$

Für diese Gleichung kann jede Restprobe durchgeführt werden.

Beispiel

Also ist $13312^2 + 59 = 1771620$
Neunerreste: $8^2 + 5 \equiv 6 \pmod 9$
Elferreste: $0^2 + 4 \equiv 4 \pmod{11}$

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{\overline{17}\,\overline{71}\,\overline{62}\,\overline{0}}= 3,827 & \\
\;\underline{1} & \\
\;\;77 & \\
\;\;\underline{69} & = 23 \cdot 3 \\
\;\;\;816 & \\
\;\;\;\underline{789} & = 263 \cdot 3 \\
\;\;\;\;2720 & \\
\;\;\;\;\underline{2661} & = 2661 \cdot 1 \\
\;\;\;\;\;\;59 & \text{(Rest)}
\end{array}$$

Weiteres Beispiel

Probe: $44724^2 + 1216 = 20000000$
Neunerreste: $8^2 + 1 \equiv 2 \pmod 9$
Elferreste: $6^2 + 6 \equiv 9 \pmod{11}$

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{20} \quad = 4,472 & \\
\;\underline{16} & \\
\;\;400 & \\
\;\;\underline{336} & = 84 \cdot 4 \\
\;\;\;6400 & \\
\;\;\;\underline{6209} & = 887 \cdot 7 \\
\;\;\;\;191\,00 & \\
\;\;\;\;\underline{178\,84} & = 8942 \cdot 2 \\
\;\;\;\;\;12\,16 & \text{(Rest)}
\end{array}$$

Es folgen nun zwei Beispiele für Kubikwurzeln:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{12977925} = 235 & \\
8 & \\
\hline
4977 & : 3\cdot 2^2 = 3, 3\cdot 2^2\cdot 3 = 36 \\
\underline{4167} & 3\cdot 2\cdot 3^2 = 54, 3^3 = 27 \\
810925 & : 3\cdot 23^2 = 5, 3\cdot 23^2\cdot 5 = 7935 \\
\underline{810987} & 3\cdot 23\cdot 5^2 = 1725, 5^3 = 125 \\
50 & \text{(Rest)}
\end{array}$$

Probe: $235^3 + 50 = 12977925$
Neunerreste: $1^3 + 5 \equiv 6 (\bmod 9)$
Elferreste: $1^3 + 6 \equiv 7 (\bmod 11)$

$$\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{139} = 5,18 & \\
125 & \\
\hline
14000 & : 3\cdot 5^2 = 1, 3\cdot 5^2\cdot 1 = 75 \\
\underline{7651} & 3\cdot 5\cdot 1^2 = 15, 1^3 = 1 \\
6349000 & : 3\cdot 51^2 = 8, 3\cdot 51^2\cdot 8 = 62424 \\
\underline{6340832} & 3\cdot 51\cdot 8^2 = 9792, 8^3 = 512 \\
8168 & \text{(Rest)}
\end{array}$$

Probe: $518^3 + 8168 = 139000000$
Neunerreste: $5^3 + 5 \equiv 4 (\bmod 9)$
Elferreste: $1^3 + 6 \equiv 7 (\bmod 11)$.

7.5 Die rationale Kubikwurzel aus einer neunstelligen Zahl

Die Aufgabe, die rationale Kubikwurzel aus einer mehrstelligen Zahl zu bestimmen, gehört in den Bereich der Rechenkunststücke und ist praktisch ohne Bedeutung, da Aufgaben der Technik im allgemeinen auf irrationale Wurzeln führen.
Es gibt zwar Rechenkünstler, die ohne weiteres in der Lage sind, die ganzzahligen Werte irrationaler Wurzeln und den verbleibenden Rest anzugeben. Die hierbei angewandten Methoden stellen an das Zahlengedächtnis und an die Rechenfertigkeit ungewöhnliche Anforderungen, denen nur ein berufsmäßiger Rechenkünstler zu genügen vermag.

Um aus einer neunstelligen Kubikzahl die Kubikwurzel zu ziehen, ist es nötig, folgende Tabelle im Gedächtnis zu haben:

1.Potenz:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.Potenz:	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Elferrest der 3.Potenz:	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

Zunächst sehen wir, dass die Endziffer der ersten Potenz eindeutig aus der Endziffer der dritten Potenz hervorgeht: Endigt z.B. die dritte Potenz auf die Ziffer 7, so ist die Endziffer der ersten Potenz 3, usw.
Es entsprechen sich:

1.Potenz:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.Potenz:	0	1	8	7	4	5	6	3	2	1

Bei der zweiten Potenz ist diese Zuordnung nicht mehr eindeutig:

1.Potenz:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.Potenz:	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Die Quadrate können zwar nur auf die Ziffern 0; 1 ; 4; 5; 6; 9 endigen, aber zu jeder Endziffer des Quadrates gehören zwei verschiedene Endziffern der Wurzel.
Bei der Kubikwurzel kann also die Einerstelle sofort angegeben werden. Ebenso liegt auch die Hunderterstelle fest, wie wir aus folgenden Beispielen sehen:

a) $\sqrt[3]{425|259|008} = 752$
Die Zahl der Millionen, also 4 2 5 liegt zwischen den Kubikzahlen 3 4 3 und 5 1 2; folglich liegt die Kubikwurzel zwischen 7 0 0 und 8 0 0. Für die Hunderterstelle ergibt sich somit 7 und für die Einerstelle 2.
Um die noch ausstehende Zehnerstelle zu ermitteln, bedienen wir uns der Elferreste. Der Elferrest der Kubikzahl beträgt in unserem Falle

$$(8+0+5+5+4)-(0+9+2+2)=9$$

Diesem Elferrest der Kubikzahl entspricht laut Tabelle der Elferrest 4 der Kubikwurzel. Ist z die Zehnerstelle der Kubikwurzel, so muss also $2+7-z=4$ sein. Hieraus ergibt sich $z=5$ und wir erhalten

$$\sqrt[3]{425|259|008} = 752$$

b) $\sqrt[3]{154|854|153} = 537$
Die Zahl der Millionen, also 1 5 4, liegt zwischen 1 2 5 und 2 l 6; hieraus ergibt sich die Hunderterstelle 5. Der Endziffer 3 der Kubikzahl entspricht die Endziffer 7 der Kubikzahl. Der Elferrest des Radikanden beträgt -8 bzw. +3, also ist der Elferrest der Kubikwurzel 9.
Die Zehnerziffer z der Wurzel ergibt sich also aus $7+5-z=9$ zu $z=3$; d.h.

$$\sqrt[3]{154|854|153} = 537$$

Bei der Berechnung der fünften, siebenten, neunten Wurzel usw. gibt es ähnliche Kunstgriffe wie bei der Kubikwurzel; auch hier spielen die Endziffern und die Neuner- bzw. Elferreste eine bedeutende Rolle.
Bei der zweiten, vierten Wurzel usw. liefern weder die Endziffern noch die Neuner- bzw. Elferreste eindeutige Ergebnisse. Die geradzahligen Wurzeln bereiten deshalb dem Rechenkünstler im allgemeinen größere Schwierigkeiten als die ungeradzahligen Wurzeln.

Der an diesen Fragen interessierte Leser sei auf das treffliche Büchlein P.H. Maennchen "Geheimnisse der Rechenkünstler", B.G. Teubner Leipzig 1951, verwiesen.

8 Wie rechnete Gauß ?

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) beschäftigte sich von früher Jugend an mit Fragen des numerischen Rechnens. Dazu veranlassten ihn

1. seine tiefgründigen zahlentheoretischen Untersuchungen;
2. seine umfangreichen astronomisch-geodätischen Arbeiten.

Insbesonders war es die von ihm erdachte "Methode der kleinsten Quadrate", deren Handhabung ein hohes Maß von Geschick und Sicherheit in der Ausführung numerischer Rechnungen erforderte.

Schon im jugendlichen Alter legte sich Gauß umfangreiche Zahlentabellen an, um durch die Erfahrung die Geheimnisse der Zahlen zu ergründen. Glaubte er einmal auf experimentellem Wege ein Gesetz gefunden zu haben, so ruhte er nicht eher, als bis er dieses vermutete Gesetz entweder theoretisch fundiert oder widerlegt hatte.
Zwei Probleme sind es vor allem, die für die Entwicklung von Gauß zum unumschränkten Herrscher im Reiche der Zahlen bedeutungsvoll wurden. Diese Probleme haben das arithmetisch-geometrische Mittel und die Erforschung des Fortschreitungs- bzw. Verteilungsgesetzes der Primzahlen zum Gegenstand.

Die meisten Leser wissen wohl, was man unter dem arithmetischen bzw. geometrischen Mittel aus den zwei positiven, reellen Zahlen a_0 und b_0 versteht. Ist z.B. $a_0 = 9$ und $b_0 = 25$, so ist das arithmetische Mittel aus diesen beiden Zahlen

$$a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) = \frac{1}{2}(9 + 25) = 17$$

und das geometrische Mittel

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15$$

Nun bildet Gauß die Zahlenfolgen:

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}(17 + 15) = 16 \qquad ; \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{17 \cdot 25} = 15,9687;$$
$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) = 15,9844; \qquad ; \qquad b_3 = \sqrt{a_2 b_2} = 15,9844 \quad \text{usw.}$$

Schon diese geringe Anzahl von Gliedern der Reihen für a und b zeigt, dass die beiden Reihen einem gemeinsamen Grenzwert zustreben.
Gauß konnte nun zeigen, dass dieser gemeinsame Grenzwert, den er als arithmetisch-geometrisches Mittel bezeichnete, mit dem "vollständigen elliptischen Integral erster Gattung" in einem sehr einfachen Zusammenhang steht. Der mathematisch nicht geschulte Leser kann natürlich die Tragweite dieser Gaußschen Entdeckung nicht ermessen.
Wir wollten durch diese Bemerkung auch nur zeigen, wie Gauß, ausgehend von ganz elementaren Begriffen, bis zu den tiefsten Erkenntnissen der Analysis vordrang.

Das Primzahlproblem suchte Gauß zunächst auf empirischem Wege zu lösen. Er kam hierbei auf eine sogenannte asymptotische Formel, d.h. auf eine Näherungsbeziehung, die um so genauer gilt, je größer der Wert der durch sie zu bestimmenden Größe ist.
Da Gauß der strenge Beweis für seine Formel nicht gelang, verzichtete er auf eine Veröffentlichung derselben. Durch dieses intensive Studium der Primzahlen gewann Gauß äußerst

wertvolle Einblicke in die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen der Zahlen.

Durch dieses zahlentheoretische Wissen wurde Gauß in die Lage versetzt, bei einer numerischen Rechnung sofort den kürzesten Weg zur Bewältigung derselben zu erkennen.
Es handelt sich bei den von Gauß angewandten Rechenvorteilen in den meisten Fällen nicht um vorher ausgearbeitete allgemeine Rechenmethoden, sondern um Kunstgriffe, die den spezifischen Eigenschaften der in der Rechnung auftretenden Zahlen entsprachen.
Dabei kamen die von Gauß angefertigten Tabellen entweder für die Rechnung selbst oder für die Kontrolle der Rechnung zur Anwendung.

Es ist daher nur in besonderen Fällen möglich, aus den von Gauß angewandten Verfahren allgemein gültige Rechenregeln abzuleiten.
Eine Sonderstellung nimmt hier die Rechenpraxis bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ein.

Gauß entwickelte hierfür ein Verfahren zur Auflösung der sogenannten Normalgleichungen, das nicht nur ein Minimum an Zahlenrechnung erfordert, sondern auch für jede Phase der Rechnung eine zuverlässige Kontrolle ermöglicht.

Wir besprechen nun eine Reihe von Rechenvorteilen, die zum größten Teil dem handschriftlichen Nachlass von Gauß entstammen und von Philipp Maennchen im 10. Band (2. Abteilung Abhandlung 6) von Gauß' Werken unter dem Titel "Gauß als Zahlenrechner" der Öffentlichkeit zugänglich gemacht wurden.

Dass Gauß die Addition von zwei Summanden im allgemeinen von links nach rechts durchführte und außerdem numerische Rechnungen nach Möglichkeit so anlegte, dass selten mehr als zwei Summanden zu addieren waren, erwähnten wir bereits.

8.1 Multiplikationen

Für Multiplikationen benutzte Gauß das Kreuzverfahren (jetzt Ferrolsches Verfahren genannt) im allgemeinen nicht, da es ihm zu primitiv war.
Als ihm zur Ausführung von numerischen Rechnungen die Hilfe des Rechenkünstlers Dase angeboten wurde, lehnte er entschieden ab mit der Begründung "er könne sich bei den vielen und großen Rechnungen, die er in seinem Leben ausgeführt habe, kaum eines Falles erinnern, wo die Hilfe von jemand, der bloß mechanische Rechenfertigkeit gehabt hätte, ihm von irgendeinem Nutzen hätte sein können".
Base verfügte nur über eine mechanische Rechenfertigkeit, die über die vier Grundrechnungsarten kaum hinausreichte, und das genügte Gauß nicht.

Wie führte Gauß nun Multiplikationen mehrstelliger Zahlen aus? Er bediente sich hierzu vielfach der Beziehung

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Im Prinzip läuft dieses Verfahren darauf hinaus, die Faktoren als Summen von zwei Quadratzahlen darzustellen.
Hier standen dem Zahlentheoretiker Gauß eine Reihe von Hilfsmitteln zur Verfügung, über die wir uns mit einigen wenigen Andeutungen begnügen müssen.

So stellte Gauß eine Tabelle auf, die die Primzahlen von 2 bis 997 als Reste bezüglich der Primzahlen von 3 bis 503 als Teiler enthält. Es war für Gauß nicht schwierig, innerhalb eines großen Zahlenbereiches die Primzahlen als solche zu erkennen.

Ergab sich dann z.B., dass eine Primzahl bei der Division durch 4 den Rest 1 ließ, so war damit auch die Gewissheit gegeben, dass diese Zahl sich in zwei Quadrate zerlegen ließ, und zwar nur auf eine Art.

Ferner stand Gauß die Theorie der quadratischen Reste, zu deren Entwicklung er wesentlich beigetragen hatte, in vollem Umfang zur Verfügung.

Beispiel für eine Multiplikation:

$$\begin{aligned} 937 \cdot 746 &= (19^2 + 24^2) - (11^2 + 25^2) \\ &= (19 \cdot 11 + 24 \cdot 25)^2 + (19 \cdot 25 - 24 \cdot 11)^2 = 809^2 + 211^2 = 69900^2 \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel für die individuelle Behandlung von Zahlen ist folgende Multiplikation

$$423219 \cdot 272673$$

Der Faktor 272673 kann folgendermaßen aufgespalten werden $272673 = 27 \cdot 10^4 + 27 \cdot 10^2 - 27$. Es ist also nur die Multiplikation 423219 · 27 = 11426913 auszuführen. Der weitere Verlauf der Rechnung gestaltet sich folgendermaßen:

11 426 913	$\cdot 10^4$	=	114 269 130 000
11 426 913	$\cdot 10^3$	= +	1 142 691 300
			115 411 821 300
- 11 426 913		=	- 11 426 913
423 219 · 272 673		=	115 400 394 387

Bei Multiplikationen bediente sich Gauß gerne der Faktorenzerlegungen.

Beispiel:

$$57 \cdot 212 = 3 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 53 = 12 \cdot [(20 - 1) \cdot 53] = 12 \cdot 1007 = 12084$$

Ein anderes Verfahren zeigt folgendes Beispiel:

$$377^2 = 300 \cdot (370 + 7) + 77 \cdot 377 = 111000 + 2100 + 29091 = 142129$$

8.2 Divisionen

Bei Divisionen bediente sich Gauß meistens einer von ihm selbst angelegten Tabelle zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern zwischen 1 und 1000 in Dezimalbrüche.
Insbesondere enthielt diese Tafel die Dezimalperioden für die reziproken Werte aller Primzahlen und Primzahlpotenzen in dem angegebenen Bereich.
Da hier oft Perioden mit Hunderten von Dezimalstellen zu bestimmen waren, stellt die Berechnung dieser Tabelle eine gewaltige Rechenarbeit dar, die nur mit Hilfe besonderer Kunstgriffe in verhältnismäßig kurzer Zeit zu bewältigen war.

Bezüglich der hier angewandten Rechenvorteile verweist Gauß auf die bereits besprochenen Verfahren von Robertson und Johann (III) Bernoulli.
Es ist aber anzunehmen, dass Gauß sich auch noch weiterer Methoden bediente. Wie Gauß diese Tabelle der Reziprokwerte der Primzahlen für die Ausführung von Divisionen benutzte, wollen wir an einem Beispiel zeigen:

$$23 : 17 = 1\frac{6}{17}$$

$\frac{1}{17}$ hat die sechzehnstellige Periode 0588235294117647. Um nun den Beginn der Periode des Bruches $\frac{6}{17}$ festzustellen, löste Gauß die Kongruenzgleichung $10^x \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 17)$; es ergibt sich $x = 5$.

Diese Lösung konnte Gauß entweder auf Grund seiner zahlentheoretischen Kenntnisse sofort angeben, oder er entnahm sie einer besonderen Tabelle.
Der Dezimalbruch begann also nach der fünften Stelle der Periode

$$05882|3529... \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{23}{17} = 1,3529411764705882...$$

Bei zusammengesetzten Nennern gebrauchte Gauß ein Verfahren, das wir an folgendem Beispiel zeigen:

$$\frac{123}{133} = \frac{a}{7} + \frac{b}{19} \qquad ; \qquad 123 = 19a + 7b$$

Die Lösung dieser diophantischen Gleichung verursacht wohl keine besonderen Schwierigkeiten. Es ergibt sich $a = 5$ und $b = 4$. Deshalb ist

$$\begin{array}{l} \frac{5}{7} = 0,714285714285714285... \\ \frac{4}{19} = 0,210526315789473684... \\ \hline \frac{123}{133} = 0,924812030075187969.... \end{array}$$

Die Dezimalbrüche für $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{19}$ entnahm Gauß seinen Tabellen. Es war daher in vielen Fällen möglich, durch eine einzige Addition von zwei Summanden eine Division bis zu jeder gewünschten Genauigkeit auszuführen.

Gelegentlich einer Berechnung der Zahl π wendet Gauß folgendes Verfahren an:

$$\pi \approx 3\frac{785}{5544} = \frac{17417}{5544} = 1 + \frac{1}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{9}{11} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ 0,1428571 \\ 0,625 \\ 0,5555555 \\ 0,8181818 \\ \hline 3,1415944 \end{array} \right.$$

Der auf sieben Dezimalen genaue Wert ist 3,1415927.
Uns interessiert hier die Aufteilung des Bruches $\frac{17417}{5544}$ in die Teilbrüche, deren Nenner die Teiler von 5544 sind.

8.3 Das Radizieren

Um irrationale Wurzeln zu berechnen, benutzte Gauß vielfach Kettenbruchentwicklungen.
Aus der Theorie der Kettenbrüche ist bekannt:

$$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{x}; \qquad \text{hieraus ergibt sich} \qquad x = 2n + \frac{1}{x}$$

also

$$\sqrt{n^2+1} = n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n...}}}$$

Beispiel:

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8...}}}$$

Hieraus ergeben sich die Näherungswerte

$$\frac{4}{1}; \frac{33}{8}; \frac{268}{65}; \frac{2177}{528}; \frac{17684}{4289}; \frac{143649}{34840}; \frac{1166876}{283009}; \frac{9478657}{2298912}$$

Der Nenner des letzten Näherungsbruches wird folgendermaßen zerlegt:

$$2298912 = 7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 32 \cdot 311$$

Hieraus findet Gauß

$$\begin{aligned}
\frac{9478657}{2298912} &= \frac{5}{7} + \frac{2}{3} + \frac{4}{11} + \frac{1}{32} + \frac{730}{311}, \quad \text{also} \\
\frac{5}{7} &= 0,714285714285714285714285 \\
\frac{2}{3} + \frac{4}{11} = 1 + \frac{1}{33} &= 1,030303030303030303030303 \\
\frac{1}{32} &= 0,03125 \\
\frac{730}{311} &= 2,347266881028938906752412 \\
\hline
\sqrt{17} &= 4,123105625617683495497000
\end{aligned}$$

Sehr aufschlussreich ist nachstehendes Beispiel, bei dem Gauß wahrscheinlich von folgender Überlegung ausging:

$$\sqrt{n} \approx \frac{u}{v}; \qquad v^2 \cdot n = u^2 \pm \epsilon; \qquad n = \frac{u^2 \pm \epsilon}{v^2} = \frac{u^2}{v^2}\left(1 \pm \frac{\epsilon}{u^2}\right)$$

$$\sqrt{n} = \frac{u}{v}\sqrt{1 \pm \frac{\epsilon}{u^2}} \approx \frac{u}{v} \pm \frac{\epsilon}{2uv} = \frac{2u^2 \pm \epsilon}{2uv}$$

d.h. wegen $u^2 \pm \epsilon = v^2 \cdot n$ wird

$$\sqrt{n} \approx \frac{u^2 + nv^2}{2uv}$$

Zahlenbeispiel :

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2...}}}$$

Der 14. Näherungswert dieses Kettenbruches ist

$$\frac{275807}{195025}$$

also $u = 275807$; $v = 195025$.

$$\sqrt{2} \approx \frac{275807^2 + 2 \cdot 195025^2}{2 \cdot 275807 \cdot 195025} = \frac{152139002499}{107578520350}$$

Nun ist $275807 = 7 \cdot 41 \cdot 961$ und $195025 = 25 \cdot 29 \cdot 269$.
Hieraus leitet Gauß folgende Zerlegung ab

$$\sqrt{2} = \frac{7}{50} + \frac{1}{7} + \frac{2}{29} + \frac{37}{41} + \frac{134}{269} + \frac{636}{961} - 1$$

Weiteres Beispiel: Gauß entwickelt $\sqrt{5}$ als Kettenbruch; der 12. Näherungswert in dieser Entwicklung ist

$$\frac{299537289}{133957148}$$

Der Nenner wird zerlegt in $4 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 211 \cdot 421$. Dann findet Gauß

$$\sqrt{5} = 3 - \frac{1}{4} - \frac{6}{13} + \frac{6}{29} + \frac{34}{211} - \frac{177}{421}$$

Für die Kubikwurzel wendet Gauß folgendes Verfahren an:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{1025}{512}} = \frac{10}{8} \cdot \sqrt[3]{1024}$$

Nun rechnet Gauß:

$$\sqrt[3]{1+\delta} = 1 + \frac{\delta}{3} - \left(\frac{\delta}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(\frac{\delta}{3}\right)^3 - \frac{10}{3}\left(\frac{\delta}{3}\right)^4 + \frac{22}{3}\left(\frac{\delta}{3}\right)^5$$

also

$$\sqrt[3]{1,024} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \\ 0,008 & \\ 0,00000085333 & -0,000064 \\ 0,0000000002403 & -0,0000000137 \\ \hline 1,008000853573 & \\ -0,0000640137 & \\ \hline 1,00793668399 & \end{array}\right.$$

und

$$\sqrt[3]{2} = 1,25 \cdot 1,0079368399 = 1,25992105$$

9 Der binomische Lehrsatz

9.1 Das Pascalsche Dreieck

Mit Hilfe der Binomialformel, auch binomischer Lehrsatz genannt, können die Ausdrücke $(a+b)^n$ und $(a-b)^n$ für ganzzahlige, positive n-Werte auf verhältnismäßig einfachem Wege berechnet werden.

Aus dem Algebraunterricht setzen wir als bekannt voraus:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \qquad ; \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation der gefundenen Ausdrücke mit $(a+b)$ bzw. $(a-b)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

$(a-b)^n$ unterscheidet sich von $(a+b)^n$ nur durch die wechselnden Vorzeichen.
Es leuchtet sofort ein, dass die Exponenten von a in demselben Maße abnehmen wie die Exponenten von b zunehmen. Die Summe der Exponenten von a und b ist stets gleich n. Ferner beginnt die Reihe von $(a+b)^n$ mit $a^n + na^{n-1}b$ und endet mit $nab^{n-1} + b^n$.

Die Reihe hat jeweils $n+1$ Glieder und ist vollkommen symmetrisch aufgebaut, so dass es genügt, die Reihe bis zum $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ten bzw. bis zum $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ten Glied zu berechnen.
Um das Bildungsgesetz für die Koeffizienten der Glieder $a^\nu \cdot b^{n-\nu}$ zu ermitteln, schreiben wir die Koeffizienten ohne die Ausdrücke $a^\nu \cdot b^{n-\nu}$ an:

n=1	1	
n=2	1 2 1	
n=3	1 3 3 1	
n=4	1 4 6 4 1	
n=5	1 5 10 10 5 1	
n=6	1 6 15 20 15 6 1	usw.

Das Bildungsgesetz springt sofort in die Augen:
Jede Zahl ist gleich der Summe der beiden darüberstehenden Zahlen, also 6 = 1 + 5, 15 = 5 + 10, 20 = 10 + 10 usw. Man bezeichnet diese Anordnung der Koeffizienten zu Ehren ihres Entdecken Blaise Pascal (1623 bis 1662) als Pascalsches Dreieck.

9.2 Die Newtonsche und Eulersche Formel

Für große n-Werte ist die Berechnung der Koeffizienten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks zwar nicht sehr schwierig, aber doch etwas langweilig.
Es erhebt sich daher die Frage, ob man für ein beliebiges n die Koeffizienten nicht finden könne, ohne die vorhergehenden zu bestimmen. Diese Frage wurde von Isaac Newton (1642

bis 1727) endgültig beantwortet. Er fand:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 \\ + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4 + ... + b^n$$

Beispiel: $n = 7$

$$\begin{aligned} \frac{n}{1} &= \frac{7}{1} = 7 \\ \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} &= \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21 \\ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} &= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35 \\ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} &= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Wir wollen den Leser noch mit folgender, von Leonhard Euler (1707 bis 1783) eingeführten Schreibweise bekannt machen:

$$\frac{n}{1} = \binom{n}{1}; \quad \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} = \binom{n}{2}; \quad \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{n}{3}; \quad \text{usw.}$$

Allgemein gilt

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ...\cdot(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot p} = \binom{n}{p}$$

Im Nenner steht also $p!$, der Zähler setzt sich aus p Faktoren zusammen. Somit erhält der binomische Lehrsatz folgende Gestalt:

$$(a\pm b)^n = \binom{n}{0}a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \pm \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... \pm \binom{n}{n}b^n$$

9.3 Die Ausdehnung auf negative und gebrochene Exponenten

Die binomische Reihe lässt sich auch auf negative und gebrochene Exponenten ausdehnen. Ist $|b| < a$, so entsteht als binomische Reihe eine unendliche konvergente Reihe.
Um die Konvergenz der Reihen zu sichern, schreiben wir

$$(a\pm b)^n = a^n \cdot \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^n = a^n(a\pm x)^n$$

Für $|b| < a$ ist $|x| < 1$. Für die Aufstellung der binomischen Reihen genügt es also $(1\pm x)^n$ zu berechnen, da $(a\pm b)^n$ durch Multiplikation der Reihe $(1\pm x)^n$ mit dem Faktor a^n gewonnen wird.
Für $x < 1$ erhält die binomische Reihe die Form

$$(1\pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \pm \binom{n}{3}x^3 + ...$$

Beispiele:

$$(1+x)^{-1} = 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + ... = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

Es ist dies die fallende geometrische Reihe mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten $-x$.

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Hier ergibt sich die fallende geometrische Reihe mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten $+x$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + -... \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + -...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{-2} &= 1 - 2x + 3x^3 - 4x^3 + 5x^4 - +... \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + -... \\ \sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 + -... \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + -...\end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned}(1-x)^{\frac{p}{q}} &= 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q\cdot 2q}x^2 + \frac{p(p-q)(p+2q}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3 + ... \\ (1-x)^{-\frac{p}{q}} &= 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{q\cdot 2q}x^2 - \frac{p(p+q)(p+2q}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3 + ...\end{aligned}$$

10 Worterklärungen

Algorithmus(-men)

Allgemeine Regel, Vorschrift, Verfahren.
Wir wollen hier unter einem A. jedes geordnete formale Rechenschema verstehen, das zur Lösung mathematischer Aufgaben benutzt werden kann.
Durch die Entwicklung der modernen Rechentechnik gewinnt die Algorithmentheorie immer mehr an Bedeutung, da auch die höchstentwickelte Maschine nur algorithmisierte Probleme zu lösen vermag.
Aus dem Schulunterricht bekannt ist vor allem der euklidische A. zum Aufsuchen des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen.

alternieren

wechseln, mit wechselnden Vorzeichen.

analog

gleichartig, entsprechend.

arithmetische Reihe

Ist in einer geordneten Folge aufeinanderfolgender Zahlen die Differenz zweier benachbarter Glieder konstant und $\neq 0$, so spricht man von einer a. R. erster Ordnung. Liefert hingegen in der vorgegebenen Zahlenfolge erst die n-te Differenzenfolge konstante Glieder, so ist es eine a. R. n-ter Ordnung.
Die Summen der Glieder einer arithmetischen Reihe n-ter Ordnung bilden eine a. R. $(n+1)$-ter Ordnung.

arithmetisches Mittel

Das a. M. von n Zahlen $a_1, ..., a_n$ ist gleich dem n-ten Teil der Summe aller n Zahlen:

$$M = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Diophantische Gleichungen

Unterbestimmte Gleichungen, lösbar unter der Bedingung, dass als Lösung nur ganze Zahlen gefordert sind.

Geodäsie

Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche. Während die niedere G. sich auf die Ebene beschränkt, hat die höhere G. die Erdkrümmung mit zu berücksichtigen. Als bedeutendster Geodät der Neuzeit gilt C.F. Gauß.

geometrisches Mittel

Das g. M. von n Zahlen $a_1, ..., a_n$ ist die n-te Wurzel des Produktes dieser Zahlen;

$$M = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

irrationale Zahl

Jeder unendliche nichtperiodische Dezimalbruch, der in der Praxis durch eine rationale Zahl mit hinreichender Genauigkeit dargestellt wird. Geometrisch veranschaulicht füllen die i. Z. alle Lücken auf der Geraden der reellen Zahlen aus, die zwischen den rationalen Zahlen bestehen.

Kettenbruch

Zahlendarstellung als fortgesetzten Bruch, bei dem man die Schreibweise

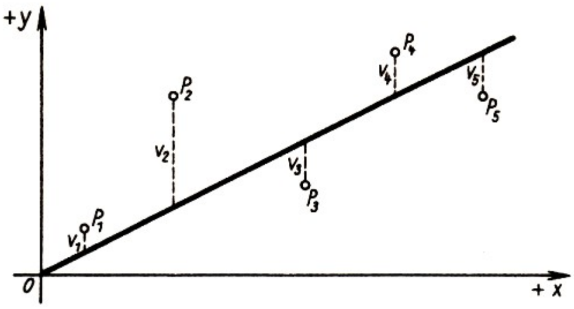
$$\frac{1}{\frac{b}{a}} \quad \text{für} \quad \frac{a}{b}$$

benutzt (a, b ganzzahlig $\neq 0$) und dadurch u.a. für jede rationale Zahl eine endliche Darstellung erhält. Wurzeln liefern unendliche Kettenbrüche.

Methode der kleinsten Quadrate

Ein Rechenweg, der bei unterschiedlichen Messergebnissen die Beobachtungsfehler weitestgehend ausgleicht und darauf fußt, dass dann, wenn die Summe der kleinsten Abweichungs- oder Fehlerquadrate ein Minimum bildet, das Ergebnis dem genauen Wert am nächsten ist.

Beispiel: Es seien in einem rechtwinkligen Koordinatensystem n Punkte durch ihre Koordinaten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ (siehe Bild) gegeben.



Durch den Koordinatenanfangspunkt 0 ist eine Gerade, der die Gleichung $y = mx$ entspricht, so zu legen, dass sich dieselbe den n gegebenen Punkten möglichst gut anpasst. Dabei sollen jedoch nur die Ordinaten (y-Werte) der Punkte verbessert werden.
Die Verbesserungen seien $v_1, v_2, ..., v_n$
Die sogenannten Fehlergleichungen lauten:

$$\begin{aligned} y_1 - mx_1 &= v_1 \\ y_2 - mx_2 &= v_2 \\ &\ldots \\ y_n - mx_n &= v_n \end{aligned}$$

Der Richtungsfaktor m der ausgleichenden Geraden soll nach dem Prinzip der M. d. k. Q. so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der v-Werte, also $v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ möglichst klein wird.
Gauß benutzte in der Ausgleichsrechnung an Stelle des Summenzeichens $\sum$ die eckige Klammer und schrieb statt

$$v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = \sum v^2$$
$$v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = [v^2]$$

oder statt

$$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum xy$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = [xy]$$

Werden nun die Fehlergleichungen quadriert und addiert, so ergibt sich:

$$[y^2] - 2m[xy] + m^2[x^2] = [v^2]$$

Nach den Rechenregeln der Differentialrechnung wird $[v^2]$ ein Minimum, wenn gilt

$$\frac{d[v^2]}{dm} = -2[xy] + 2m[x^2] = 0$$

Diese Bedingung führt auf die sogenannte Normalgleichung

$$m[x^2] - [xy] = 0$$

aus der sich der gesuchte Richtungsfaktor m ergibt mit

$$m = \frac{[xy]}{[x^2]}$$

Die Normalgleichung kann auch in der Form $[av] = 0$ geschrieben werden. Hieraus erhalten wir eine vollkommene Rechenkontrolle.

Zahlenbeispiel:

x	y	x^2	xy	v	xv
1	1	1	1	+0,5	+0,5
3	4	9	12 +	2,5	+7,5
6	2	36	12	-1,0	-6,0
8	5	64	40	+1,0	+8,0
10	4	100	40	-1,0	-10,0
		201	105		0

$m = \frac{105}{210} = 0,5$, Gleichung der Geraden $y = 0,5x$

Natürliche Zahlen

Nach Giuseppe Peano (1858-1932) gilt für die Menge der n. Z.
1. Die Null ist eine Zahl
2. Jede Zahl hat genau einen Nachfolger
3. Null ist nicht Nachfolger einer Zahl
4. Jede Zahl ist Nachfolger höchstem einer Zahl
5. Von allen Mengen, die die Zahl 0 und mit der Zahl n auch deren Nachfolger n' enthalten, ist die Menge der n. Z. die kleinste.

periodisch

regelmäßig wiederkehrend

p!

("p Fakultät"); Ausdruck aus der Kombinatorik für die Anzahl aller möglichen Permutationen (Anordnungen) von p verschiedenen Elementen:

$$p! = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

rationale Zahlen

Alle Zahlen, die durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division natürlicher Zahlen erhalten werden, also alle positiven und negativen ganzen Zahlen und Brüche und die Null.

reelle Zahlen

Alle rationalen und irrationalen Zahlen.

reziproker Wert

Kehrwert.

trivial

unbedeutend, nichtssagend

11 Literaturhinweise

Bojko, Lehrbuch der Rechenvorteile, Leipzig-Berlin 1926.

Euklid, Elemente VII, 2. ed. Heiberg, Leipzig 1883-1896.

Lehmann, Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1, Zahlentheorie, MSB Nr. 36, hsg. von Kleinfeld, Leipzig 1967.

Leman-Schoeneberg, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie, Math. Phys. Bibl., Leipzig 1952.

Lietzmann, Sonderlinge im Reich der Zahlen, Bonn 1948.

Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich, MSB Nr. 13; Leipzig 1966.

Lietzmann, Wo steckt der Fehler? MSB Nr. 11, Leipzig 1966.

Maennchen, Geheimnisse der Rechenkünstler, Leipzig 1951.

Peter, Das Spiel mit dem Unendlichen, Leipzig 1966.

Robertson, Philosophical Transactions, London 1768.

Speidel, Neues System zum Technischen Kopfrechnen von I. Bojko und E. Wendling, Zürich 1907.

Witting, Abgekürzte Rechnung, Math. Phys. Bibl. Bd. 47, Leipzig- Berlin 1922.