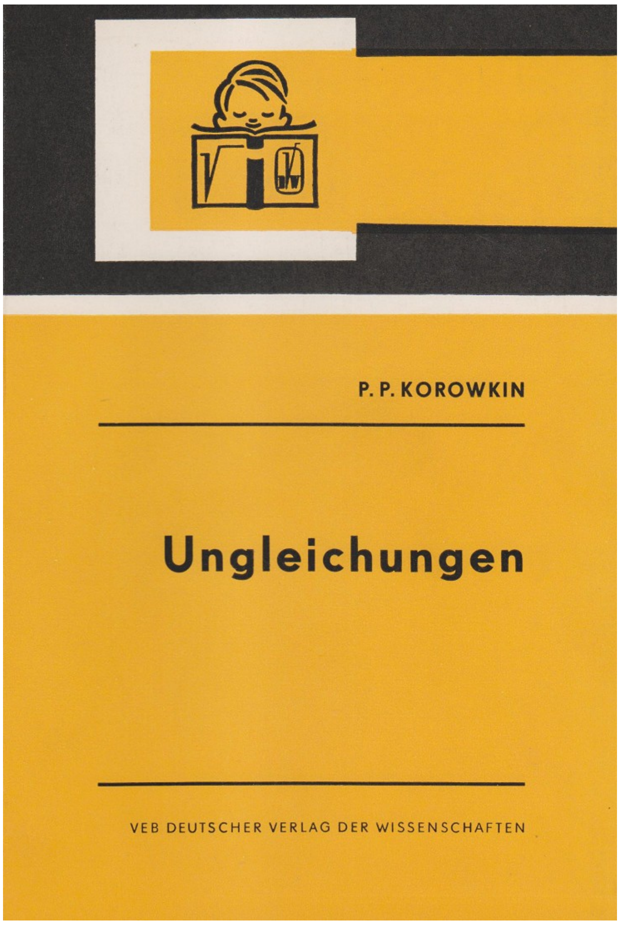
Ungleichungen
von P.P. Korowkin



Übersetzung von Waldemar Dege und Klaus-Dieter Rieck

Abschrift und LaTex-Satz: Steffen Polster 2020
https://mathematikalpha.de

Vorwort

Im mathematischen Unterricht der sowjetischen Oberschulen lernt der Schüler die Eigenschaften von Ungleichungen sowie Methoden zu ihrer Lösung in den einfachsten Fällen kennen (Ungleichungen ersten und zweiten Grades).

In diesem Büchlein setzte sich der Autor nicht das Ziel, die grundlegenden Eigenschaften von Ungleichungen darzulegen; er war lediglich bestrebt, die Schüler der höheren Klassen der Oberschule mit einigen bemerkenswerten Ungleichungen, die in verschiedenen Teilgebieten der höheren Mathematik eine große Rolle spielen, sowie mit ihrer Anwendung auf die Bestimmung von Maxima und Minima und zur Berechnung einiger Grenzwerte bekannt zu machen.

Es sind insgesamt 62 Aufgaben angeführt; 36 davon werden in aller Ausführlichkeit vorgerechnet. Darin besteht der wesentliche Inhalt des Heftchens; 26 Aufgaben werden am Ende der §§ 1, 4, 5 (in Kleindruck) als Übungsaufgaben gestellt. Die Lösungen der Übungsaufgaben findet der Leser am Ende des Büchleins kurz angegeben.

Die selbständige Lösung einiger schwieriger Aufgaben bringt dem Leser zweifellos größeren Nutzen als die Lösung einer großen Menge einfacher Aufgaben.

Daher empfehlen wir dem Studierenden, sich die Lösung einer Übungsaufgabe erst dann anzusehen, wenn er eine eigene gefunden hat; diese kann natürlich von der Lösung, die der Autor angegeben hat, verschieden sein (was sogar sehr gut ist).

Beim Beweis von Ungleichungen und bei der Lösung der Aufgaben benutzte der Autor nur diejenigen Eigenschaften von Ungleichungen und Grenzwerten, die zum Stoff der 9. Klasse der Oberschule gehören.

P. Korowkin

§ 1

Ganzer Teil einer Zahl x heißt die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft (in Zeichen $[x]$). Aus dieser Definition folgt die Beziehung $[x] \leq x$, da der ganze Teil von x die Zahl x nicht übersteigt. Da $[x]$ die größte ganze Zahl ist, die dieser Ungleichung genügt, ist $[x] + 1 > 1$. Somit ist $[x]$ diejenige ganze Zahl, welche durch die Ungleichungen

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

definiert wird.
So folgen z.B. aus den Ungleichungen

$$3 < \pi < 4; \qquad 5 < \frac{17}{3} < 6; \qquad -2 < -\sqrt{2} < -1; \qquad 5 = 5 < 6$$

die Beziehungen

$$[\pi] = 3; \qquad \left[\frac{17}{3}\right] = 5; \qquad [-\sqrt{2}] = -2; \qquad [5] = 5$$

Aufgabe 1: Man bestimme den ganzen Teil der Zahl

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Lösung: Wir benutzen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 1 \leq 1 \leq 1; \qquad 0,7 \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq 0,8; \qquad 0,5 \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \leq 0,6; \\ 0,5 \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \leq 0,6; \qquad 0,4 \leq \sqrt{\frac{1}{5}} \leq 0,5 \end{aligned}$$

die sich beim Wurzelziehen mit einer Genauigkeit von 0,1 ergeben; durch Addition dieser Ungleichungen erhalten wir

$$1 + 0,7 + 0,5 + 0,5 + 0,4 < x < 1 + 0,8 + 0,6 + 0,5 + 0,5$$

d.h. $3,1 < x < 3,4$; folglich ist $[x] = 3$.

Aufgabe 2: Man bestimme den ganzen Teil der Zahl

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Lösung: Diese Aufgabe unterscheidet sich von der vorhergehenden nur durch die Anzahl der Summanden; in der ersten sind es 5 Summanden, in der zweiten 1000000. Aber das allein macht praktisch die Anwendung der vorhergehenden Lösungsmethode unmöglich.
Zur Lösung der Aufgabe untersuchen wir die Summe

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dazu beweisen wir die Ungleichungen

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \qquad (1)$$

In der Tat: wegen

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

und $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ gilt

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Damit ist die eine Hälfte der Ungleichung (1) verifiziert; die zweite wird analog bewiesen. Setzen wir in den Ungleichungen (1) $n = 2, 3, 4, ..., n$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} &< \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2 \\ 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} &< \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} &< \frac{1}{\sqrt{4}} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{4} \\ &... \\ 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &< \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \end{aligned}$$

Wir addieren jetzt diese Ungleichungen:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$$

Addieren wir zu allen Teilen der so erhaltenen Ungleichungen die Zahl Eins, so bekommen wir

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad (2)$$

Da $2\sqrt{2} < 3$, aber $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ ist, folgt aus den Ungleichungen (2), dass

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad (3)$$

gilt.
Benutzen wir die Ungleichungen (3), so finden wir jetzt leicht den ganzen Teil der Zahl

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Setzen wir in den Ungleichungen (3) $n = 1000000$, so erhalten wir

$$2\sqrt{100000} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2\sqrt{1000000} - 1$$

oder $1998 < y < 1999$. Folglich ist $[y] = 1998$.

Aufgabe 3: Man beweise die Ungleichung

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Lösung: Wir setzen

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{100}{101}$$

Wegen

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \quad ... \quad \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

ist $x < y$ und folglich

$$x^2 < xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$

Übungen
1. Man beweise die Ungleichungen

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}$$

2. Man beweise die Ungleichungen

$$1800 < \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1800,02$$

3. Man bestimme $[50z]$, wobei

$$z = \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Antwort: $[50z] = 90000$.

4. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

durch vollständige Induktion.

5. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

§ 2

Wir gehen jetzt zur Behandlung einiger wichtiger Ungleichungen über, die bei der Lösung vieler Aufgaben angewandt werden.
Aus der Ungleichung $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ folgt $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $x_1 = x_2$ ist.
Sind x_1 und x_2 positive Zahlen, so erhalten wir, wenn wir beide Seiten der letzten Ungleichung durch x_1x_2 dividieren,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2 \tag{4}$$

Unter Benutzung der Ungleichung (4) beweist man leicht, dass die Summe zweier positiver Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist, mindestens 2 ist.

Ist nämlich $xy = 1$, so ist $y = \frac{1}{x}$. Die Ungleichung $x + y \geq 2$, d.h. $x + \frac{1}{x} \geq 2$ folgt aus (4) für $x_1 = x$ und $x_2 = 1$.

Wir beweisen jetzt einen Satz.

Satz 1: Ist das Produkt von n positiven Zahlen gleich 1, so ist ihre Summe mindestens n.

Mit anderen Worten, aus der Gleichung $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = 1$ folgt $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq n$ und zwar ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n > n$$

wenn die Zahlen $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ nicht alle gleich sind.

Beweis: Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion.[1]
Oben haben wir die Richtigkeit des Satzes 1 für den Fall zweier positiver Zahlen ($n = 2$) gezeigt. Wir nehmen nun an, der Satz sei richtig für $n = k \geq 2$, d.h., die Ungleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geq k$$

gelte für $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_k = 1$, und beweisen ihn für $n = k + 1$, d.h., wir beweisen, dass

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

gilt, wenn $x_1 x_2 x_3 ... x_k x_{k+1} = 1$ ist, wobei $x_{>} 0, x_2 > 0, x_3 > 0,\ ...,\ x_k > 0,\ x_{k+1} > 0$ sein sollen.
Zunächst bemerken wir folgendes: Ist

$$x_1 x_2 x_3 ... x_k x_{k+1} = 1$$

so sind zwei Fälle möglich:
1. Alle Faktoren $x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}$ sind gleich, d.h., es ist

$$x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1}$$

2. Nicht alle Faktoren sind gleich.

Im ersten Falle ist jeder Faktor gleich Eins, ihre Summe ist also gleich $k + 1$, d.h.

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} = k + 1$$

Im zweiten Falle gibt es unter den Faktoren des Produktes $x_1 x_2 x_3 ... x_k x_{k+1}$ Zahlen, die größer und solche, die kleiner als Eins sind. (Wären alle Faktoren kleiner als Eins, so wäre auch ihr Produkt kleiner als Eins.)
Es sei z.B. $x_1 < 1$, aber $x_{k+1} > 1$. Es ist also

$$(x_1 x_{k+1}) x_2 x_3 ... x_k = 1$$

Setzen wir $y_1 = x_1 x_{k+1}$, so erhalten wir

$$y_1 x_2 x_3 ... x_k = 1$$

[1] Die Methode der vollständigen Induktion wird ausführlich behandelt in dem Büchlein: I.S. Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion, 7. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966

Da hier das Produkt von k positiven Zahlen gleich Eins ist, kann (nach Induktionsannahme) ihre Summe nicht kleiner sein als k, d.h., es ist

$$y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geq k$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &\geq k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1 \end{aligned}$$

Bedenken wir, dass $y_1 = x_1 x_{k+1}$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} &\geq (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 \\ &= (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) \end{aligned}$$

Da $x_1 < 1$, aber $x_{k+1} > 1$ ist, gilt $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$ und folglich

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Aufgabe 1: Man beweise, dass

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

gilt, wenn $x_1, x_2, ..., x_n$ positive Zahlen sind, und dass das Gleichheitszeichen nur dann gilt; wenn $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$ ist.

Lösung: Wegen

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot ... \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$$

folgt die Ungleichung aus Satz 1. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = ... = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_1} = 1$$

d.h. $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$ ist.

Aufgabe 2: Man beweise die Ungleichung

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

Lösung: Offenbar ist

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Da das Produkt der Summanden auf der rechten Seite der Gleichung gleich Eins ist, kann ihre Summe nicht kleiner als 2 sein.
Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = 0$.

Aufgabe 3: Man beweise, dass für $a > 1$ die Ungleichung

$$\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2$$

gilt.

Lösung: Wegen $\log_a 10 \cdot \log_{10} a = 1$ gilt

$$\log_{10} a + \log_a 10 = \log_{10} a + \frac{1}{\log_{10} a} \geq 2$$

Aufgabe 4: Man beweise die Ungleichung

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$$

Lösung: Durch Division von Zähler und Nenner der linken Seite der Ungleichung durch x^2 erhalten wir

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2}$$

Wegen $\frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1$ ist $\frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2$ und folglich

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Definition: Die Zahl $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ heißt das geometrische Mittel der positiven Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ und die Zahl $a = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ ihr arithmetisches Mittel.

Satz 2: Das geometrische Mittel positiver Zahlen ist nicht größer als ihr arithmetisches Mittel. Sind die Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ nicht alle gleich, so ist das geometrische Mittel kleiner als das arithmetische.

Beweis: Aus der Gleichung $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ folgt

$$1 \leq g = \sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}...\frac{x_n}{g}} \quad \text{d.h.} \quad \frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}...\frac{x_n}{g} = 1$$

Da das Produkt dieser n positiven Zahlen gleich Eins ist, kann ihre Summe nicht kleiner als n sein (Satz 1), d.h., es gilt

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + ... + \frac{x_n}{g} \geq n$$

Durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit g und Division durch n erhalten wir

$$a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq g$$

Wir bemerken, dass Gleichheit nur dann besteht, wenn

$$\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}...\frac{x_n}{g} = 1$$

d.h. $x_1 = x_2 = ... = x_n = g$ ist. Sind aber die Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ nicht alle gleich, so gilt $a > g$.

Aufgabe 5: Unter allen Quadern mit gegebener Summe der drei zueinander senkrechten Kanten ist derjenige zu finden, dessen Rauminhalt am größten ist.

Lösung: Es sei $m = a + b + c$ die Summe der Kanten und $V = abc$ der Rauminhalt des Quaders. Wegen

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3} \qquad \text{ist} \qquad V \leq \frac{m^3}{27}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $a = b = c = \frac{m}{3}$, d.h. der Quader ein Würfel ist.

Aufgabe 6: Man beweise die Ungleichung

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad b \geq 2 \tag{5}$$

Lösung: Unter Benutzung von Satz 2 erhalten wir

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} < \frac{1+2+...+n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

Erheben wir beide Seiten der letzten Ungleichung in die n-te Potenz, so erhalten wir die Ungleichung (5).

Definition: Die Zahl

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

heißt Mittel α-ten Grades der Zahlen $a_1, a_2, ..., a_b$. Speziell ist

$$c_1 = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$; die Zahl '

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

heißt das quadratische und die Zahl

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + ... + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

das harmonische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$.

Aufgabe 7: Man beweise folgendes: Sind $a_1, a_2, ..., a_n$ positive Zahlen und ist $\alpha < 0 < \beta$, so gilt

$$c_\alpha \leq g \leq c_\beta \tag{6}$$

d.h., das Mittel n-ten Grades bei negativem Exponenten n ist höchstens gleich dem geometrischen Mittel; bei positivem Exponenten n ist es mindestens gleich dem geometrischen Mittel.

Lösung: Wir benutzen die Tatsache, dass das geometrische Mittel positiver Zahlen das arithmetische Mittel nicht übertrifft,

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha ... a_n^\alpha} \leq \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}$$

Durch Potenzieren beider Seiten der letzten Ungleichung erhalten wir unter Berücksichtigung von $\frac{1}{\alpha} < 0$ die Beziehung

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha$$

Damit ist der erste Teil der Ungleichung (6) bewiesen; den zweiten Teil zeigt man analog. Aus (6) folgt speziell, dass das harmonische Mittel c_{-1} das arithmetische Mittel c_1 nicht übertrifft.

Aufgabe 8: Man zeige, dass für positive $a_1, a_2, ..., a_n$

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

gilt.

Lösung: Da $c_{-1} \leq g \leq c_1$ ist, gilt

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = c_1$$

Aus dieser Ungleichung folgt

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

Aufgabe 9: Man zeige, dass für beliebige positive Zahlen a, b $(a \neq b)$ die Ungleichung

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a + nb}{n+1}$$

gilt.

Lösung: Offenbar ist

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a\underbrace{bb...b}_{n}} < \frac{a + \overbrace{b + b + ... + b}^{n}}{n+1} = \frac{a + nb}{n+1}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 10: Man beweise, dass mit wachsendem n die Größen

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{und} \qquad z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

zunehmen, d.h. dass die Beziehungen

$$x_n < x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad , \qquad z_n < z_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

gelten.

Lösung: Wir setzen in der Ungleichung der vorhergehenden Aufgabe $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{n}$ und erhalten:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Wir erheben beide Seiten der Ungleichung in die $(n+1)$-te Potenz und erhalten

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

d. h. $x_n < x_{n+1}$. Die zweite Ungleichung beweist man analog.

Aufgabe 11: Man zeige, dass

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

mit wachsendem n abnimmt, d.h., dass

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

gilt.

Lösung: Offenbar ist

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

(siehe die Bezeichnungen der Aufgabe 10). Da z_n mit wachsendem n wächst, fällt y_n.
In den Aufgaben 10 und 11 wurde bewiesen, dass

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 < x_3 < ... < x_n < ...$$
$$y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 < y_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = 3,375 > y_3 > ... > y_n > ...$$

gilt; andererseits ist

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4$$

Die Größe x_n hat also zwei Eigenschaften:
1. x_n wächst monoton mit n,
2. x_n ist nach oben durch 4 und nach unten durch 2 beschränkt.

Bekanntlich[2] hat eine monoton wachsende und beschränkte Folge einen Grenzwert. Folglich existiert der Grenzwert der Folge der x_n. Diesen Grenzwert bezeichnet man mit dem Buchstaben e, also

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Da sich die Folge der x_n ihrem Grenzwert monoton wachsend nähert, ist also x_n kleiner als dieser Grenzwert; somit ist

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \tag{7}$$

Man prüft leicht nach, dass $e < 3$ ist; denn für großes n ist

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2,985984$$

folglich auch

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n \leq 2,985984 < 3$$

[2]Vgl. W.I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil I, 7. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966 (Übersetzung aus dem Russischen), S. 48.

Die Zahl e hat ebenso wie die Zahl π in der Mathematik eine große Bedeutung. Sie wird z.B. als Basis eines Logarithmensystems verwendet, nämlich als Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen. Der Logarithmus einer Zahl N zur Basis e wird mit $\ln N$[3] bezeichnet (lies: Logarithmus naturalis N).
Bekanntlich sind die Zahlen e und π irrational. Jede dieser Zahlen ist mit einer Genauigkeit bis auf viele Stellen hinter dem Komma berechnet worden, und zwar ist

$$e = 2,7182818284590...$$

Wir zeigen jetzt, dass auch der Grenzwert der Folge der y_n gleich e ist. Zunächst ist

$$\lim y_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

Da sich die y_n der Zahl e monoton fallend nähern (Aufgabe 11), gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \tag{8}$$

Aufgabe 12: Man beweise die Ungleichung

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \tag{9}$$

Lösung: Wir beweisen die Ungleichung (9) durch vollständige Induktion. Sie gilt für $n = 1$ es ist nämlich

$$1! = 1 > \left(\frac{1}{e}\right)^{1}$$

Wir nehmen an, die Ungleichung (9) sei für $n = k$ richtig, d.h.

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}$$

Durch Multiplikation beider Seiten der letzten Ungleichung mit $k + 1$ erhalten wir

$$(k+1)k! = (k+1)! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}(k+1) = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}$$

Da nach (7) die Ungleichung $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e$ gilt, ist

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{e} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

d.h., die Ungleichung (9) ist für $n = k+1$ bewiesen. Damit ist die Richtigkeit der Ungleichung (9) für alle natürlichen Zahlen n gezeigt.
Da $e < 3$ ist, folgt aus Ungleichung (9) die Beziehung

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^{n}$$

[3]Im Original wird die nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung $\log$ nat für $\ln$ verwendet

Mit Hilfe der letzten Ungleichung lässt sich leicht zeigen, dass $300! > 100^{300}$ ist. Setzen wir nämlich $n = 300$, so ergibt sich

$$300! > \left(\frac{300}{3}\right)^{300} = 100^{300}$$

Genauso wie (9) beweist man die Ungleichung

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Aufgabe 13: Man beweise für positive $a_1, a_2, ..., a_n$ die Ungleichung

$$na_1a_2...a_n \leq a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n \tag{10}$$

Lösung: Da das geometrische Mittel höchstens gleich dem arithmetischen Mittel ist, gilt

$$a_1a_2...a_n = \sqrt[n]{a_1^n a_2^n ... a_n^n} \leq \frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{n}$$

Durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit n erhalten wir die Ungleichung (10). Aus (10) folgt

$$2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2; \qquad 3a_1a_2a_3 \leq a_1^3 + a_2^3 + a_3^3; \qquad 4a_1a_2a_3a_4 \leq a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4$$

d.h., das Doppelte des Produktes zweier positiver Zahlen ist nicht größer als die Summe ihrer Quadrate, das Dreifache des Produktes dreier Zahlen ist nicht größer als die Summe ihrer Kuben, usw.

§ 3

Bei der Lösung der Aufgaben des vorigen Paragraphen verwendeten wir den Satz, dass das geometrische Mittel positiver Zahlen ihr arithmetisches Mittel nicht übertrifft, d.h. die Beziehung

$$\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $x_1 = x_2 = ... = x_n$ gilt.
Diesen Satz benutzen wir zum Beweis der wichtigsten Ungleichung dieses Paragraphen, die, wie wir sehen werden, bei der Lösung von Aufgaben oft angewendet wird.

Satz 3: Ist $x \geq -1$ und $0 < \alpha < 1$, so gilt

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \tag{11}$$

Ist aber $x \neq 1$, $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$, so gilt

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \tag{12}$$

Das Gleichheitszeichen in (11) und (12) gilt nur für $x = 0$.

Beweis: Wir nehmen an, α sei ein positiver echter Bruch. Ist $\alpha = \frac{m}{n}$, m und n ganz und positiv und $1 \leq m < n$, so gilt

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-n}} = \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)...(1+x)}_{m} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{n-m}} \\ \leq \frac{(1+x)+(1+x)+...+(1+x)+1+1+...+1}{n} = \frac{m(1+x)+n-m}{n} \\ = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn alle unter dem Wurzelzeichen stehenden Faktoren gleich sind, d.h., wenn $1 + x = 1$, also $x = 0$ ist. Für $\neq 0$ gilt

$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$$

Wir haben somit den ersten Teil des Satzes für den Fall, dass α eine rationale Zahl ist, bewiesen. Wir nehmen nun an, α sei irrational ($0 < \alpha < 1$). Es sei $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ eine Folge echter Brüche mit dem Grenzwert α. Aus den Ungleichungen

$$(1+x)^{r_n} \leq 1 + r_n x, \qquad x \geq 1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

die wir ja für den Fall rationaler Exponenten schon bewiesen hatten, folgt

$$(1+x)^\alpha = \lim_{r_n \to \alpha} (1+x)^{r_n} \leq \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x$$

Damit ist die Ungleichung (11) auch für irrationale Werte von α bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass für $x \neq 0$ und $0 < \alpha < 1$

$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$$

gilt, d.h., dass für $\neq 0$ in (11) nicht das Gleichheitszeichen steht. Zu diesem Zweck wählen wir eine rationale Zahl r, für die $\alpha < r < 1$ ist. Offensichtlich gilt

$$(1+x)^\alpha = [(1+\alpha)^{\frac{\alpha}{r}}]^r$$

Wegen $0 < \frac{\alpha}{r} < 1$ gilt, wie bereits bewiesen,

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \leq 1 + \frac{\alpha}{r} x$$

Folglich ist

$$(1+x)^\alpha \leq \left(1 + \frac{\alpha}{r} x\right)^r$$

Für $x \neq 0$ gilt

$$\left(1 + \frac{\alpha}{r} x\right)^r < 1 + r\frac{\alpha}{r} x = 1 + \alpha x \qquad \text{d.h.} \qquad (1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$$

Damit ist der erste Teil des Satzes vollständig bewiesen. Wir kommen nun zum Beweis des zweiten Teiles.

Es sei $\alpha > 1$. Ist $1 + \alpha x < 0$ (das ist für $x < 0$ möglich; z.B. $\alpha = 4$, $x = -\frac{1}{2}$, also $1 + \alpha x = 1 + 4 \cdot (-1/2) = -1 < 0$), so ist die Ungleichung (12) sicher erfüllt, da ihre linke Seite nichtnegativ und ihre rechte Seite negativ ist.

Ist $1+\alpha x \geq 0$, $\alpha x \geq -1$, so gilt auf Grund des ersten Teiles des Satzes

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}\alpha x = 1 + x$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle $x = 0$ steht. Wir erheben beide Seiten der Ungleichung in die α-te Potenz und erhalten

$$1 + \alpha x \leq (1+x)^\alpha$$

Es sei jetzt $\alpha < 0$. Ist $1+\alpha x < 0$, so ist die Ungleichung (12) offenbar erfüllt. Ist aber $1+\alpha x \geq 0$, so wählen wir eine ganze positive Zahl n so, dass $-\frac{\alpha}{n} \geq 0$ ist. Auf Grund des ersten Teiles des Satzes gilt

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}x \qquad , \qquad (1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} \geq 1 + \frac{\alpha}{n}x$$

(die letzte Ungleichung ist wegen $1 \geq 1 - \frac{\alpha^2}{n^2}x^2$ richtig). Erheben wir beide Seiten der letzten Ungleichung in die n-te Potenz, so erhalten wir

$$(1+x)^\alpha \geq \left(1 - \frac{\alpha}{n}x\right)^n \geq 1 + n\frac{\alpha}{n}x = 1 + \alpha x$$

Wir bemerken, dass Gleichheit nur dann möglich ist, wenn $x = 0$ ist. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 4: Sind $a_1, a_2, ..., a_n$ positive Zahlen und ist $\alpha < \beta$, so ist $c_\alpha \leq c_\beta$; dabei ist $c_\alpha = c_\beta$ nur dann, wenn

$$a_1 = a_2 = ... = a_n \qquad \text{gilt.}$$

Beweis: Für den Fall, dass α und β verschiedene Vorzeichen haben, ist der Satz 4 oben bereits bewiesen worden (siehe Aufgabe 7 des vorigen Paragraphen und die Definition des Mittels n-ten Grades). Wir brauchen den Satz nur noch für den Fall zu beweisen, dass α und β gleiche Vorzeichen haben.
Wir nehmen an, es sei $0 < \alpha < \beta$ und setzen

$$k = c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dividieren wir c_β durch k, so erhalten wir

$$\frac{c_\beta}{k} = \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + ... + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Setzen wir jetzt

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha, \quad d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha, \quad ..., \quad d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha$$

so erhalten wir

$$\frac{c_\beta}{k} = \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + ... + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{13}$$

Wegen

$$\left(\frac{d_1+d_2+...+d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha + ... + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{k}c_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} = 1$$

ist

$$\frac{d_1+d_2+...+d_n}{n} = 1 \qquad , \qquad d_1+d_2+...+d_n = n$$

Wir setzen nun $d_1 = 1+x_1$, $d_2 = 1+x_2$, ..., $d_n = 1+x_n$. Aus der Gleichung $d_1+d_2+...+d_n = n$ folgt

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$$

Auf Grund des Satzes 3 (wir bemerken, dass $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ ist) gilt

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_1,$$
$$d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_2,$$
$$= d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \qquad = (1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha}x_n \tag{*}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen erhalten wir

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + ... + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = n \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\frac{c_\beta}{k} \geq \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1 \qquad , \qquad c_\beta \geq k = c_\alpha$$

Wir bemerken, dass nur dann $c_\beta = k = c_\alpha$ ist, wenn in (*) überall das Gleichheitszeichen gilt, d.h., wenn $x_1 = ... = x_n = 0$ ist (Satz 3). In diesem Falle ist $d_1 = d_2 = ... = d_n = 1$ und daher

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = k$$

Sind aber die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ nicht alle gleich, so ist

$$c_\beta > c_\alpha$$

Damit ist der Satz 4 auch für den Fall $0 < \alpha < \beta$ bewiesen.

Ist $\alpha < \beta < 0$, so ist $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$. Schließen wir ebenso wie vorher, so erhalten wir in den Ungleichungen (*) und (14) die umgekehrten Zeichen.
Da aber $\beta < 0$ ist, folgt aus der Ungleichung

$$\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + ... + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leq 1 \qquad \text{, dass} \qquad \frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + ... + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq 1^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

gilt, d.h. $c_\beta \geq k = c\alpha$. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen. Fortan nennen wir das geometrische Mittel Mittel 0-ten Grades, d.h., wir setzen $g = c_0$.

Wir bemerken, dass Satz 4 auch für diesen Fall richtig bleibt, da (Aufgabe 7, § 2) $c_\alpha \leq g = c_0$ ist, sobald $\alpha < 0$, und $c\beta \geq g = c_0$, sobald $\beta > 0$ ist.

Aus dem bewiesenen Satz folgt insbesondere, dass

$$c_{-1} \leq c_0 \leq c_1 \leq c_2$$

gilt, d.h., für positive Zahlen ist das harmonische Mittel höchstens gleich dem geometrischen, das geometrische höchstens gleich dem arithmetischen, das arithmetische höchstens gleich dem quadratischen Mittel. Z.B. ist für $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7} = 1,7...\\
c_0 &= \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = 2\\
c_1 &= \frac{1+2+4}{4} = \frac{7}{3} = 2,3...\\
c_2 &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+4+16}{3}} = \sqrt{7} < 2,6...
\end{aligned}$$

und somit

$$c_{-1} = 1,7... < 2 = c_0 < 2,3... = c_1 < 2,7... = c_2$$

Aufgabe 1: Man beweise, dass $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ gilt, falls $x + y + z = 6$ ist.

Lösung: Da das arithmetische Mittel das quadratische Mittel nicht übertrifft, ist

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{d.h.} \qquad x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

In unserer Aufgabe ist $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{6^2}{3} = 12$. Das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn $x = y = z = 2$ ist.

Aufgabe 2: Man beweise, dass für positive x, y, z, welche der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ genügen, die Beziehung

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

gilt.

Lösung: Aus $c_2 \leq c_3$ folgt

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

In unserer Aufgabe ist '

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \sqrt{\frac{8}{3}} \qquad \text{d.h.} \qquad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \cdot \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 3: Man beweise, dass für positive Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ die Ungleichungen

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^\alpha \leq n^{\alpha-1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha), \qquad \alpha \geq 1 \tag{15}$$

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^\alpha \geq n^{\alpha-1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha), \qquad 0 < \alpha \geq 1 \tag{16}$$

gelten.

Lösung: Ist $\alpha > 1$, so gilt

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = c_1$$

Hieraus folgt leicht die Ungleichung (15). Genauso wird auch Ungleichung (16) bewiesen.

Speziell folgt aus den Ungleichungen (15) und (16)

$$\begin{aligned} (x+y)^\alpha &\leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha), \qquad \alpha \geq 1, x > 0, y > 0 \\ (x+y)^\alpha &\leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha), \qquad 0 < \alpha < 1, x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Man beweise, dass für positive x, y, z, welche der Bedingung $x^3 + y^3 + z^3 = 81$ genügen, die Beziehung

$$x + y + z \leq 9$$

gilt.

Lösung: Aus

$$(x+y+z)^3 \leq 3^2(x^3 + y^3 + z^3) = 9 \cdot 81 = 729$$

(Ungleichung (15)) folgt

$$x + y + z \leq \sqrt[3]{729} = 9$$

Aufgabe 5: Man beweise: Ist $0 > \alpha > -1$, so gilt

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{17}$$

Lösung: Aus $0 < \alpha + 1 < 1$ folgt nach Ungleichung (11)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 + \frac{\alpha+1}{n} \qquad , \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 - \frac{\alpha+1}{n}$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $n^{\alpha+1}$ ergibt sich

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + \alpha + 1n^\alpha \qquad , \qquad (n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - \alpha + 1n^\alpha$$

Aus diesen Ungleichungen folgt unmittelbar (17).

Aufgabe 6: Man beweise, dass im Falle $0 > \alpha > -1$ die Ungleichung

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{\alpha+1} < m^\alpha + (m+1)^\alpha + ... + n^\alpha < \frac{n^{\alpha+1} - (m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{18}$$

gilt.

Lösung: Wir setzen in (17) $n = m, m+1, ..., n$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1-\alpha}}{1+\alpha} &< m^\alpha < \frac{m^{1+\alpha} - (m-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\ \frac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1-\alpha}}{1+\alpha} &< (m+1)^\alpha < \frac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\ \frac{(m+3)^{1+\alpha} - (m+2)^{1-\alpha}}{1+\alpha} &< (m+2)^\alpha < \frac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\ &... \\ \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1-\alpha}}{1+\alpha} &< n^\alpha < \frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen folgt (18).

Aufgabe 7: Man bestimme den ganzen Teil der Zahl

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$$

Lösung: Wir setzen in (18) $m = 4$, $n = 1000000$, $\alpha = -\frac{1}{3}$ und erhalten

$$\frac{1000001^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} < x < \frac{1000000^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

d.h.

$$\frac{3}{2} \cdot 1000001^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 4^{\frac{2}{3}} < x < \frac{3}{2} \cdot 1000000^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$$

Da

$$\frac{3}{2} \cdot 1000001^{\frac{2}{3}} > \frac{3}{2} \cdot 1000000^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot 10000 = 15000, \qquad \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} < 4, \qquad \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8} = 3$$

ist, gilt $15000 - 4 < x < 15000 - 3$, d.h. $14996 < x < 14997$. Aus diesen Ungleichungen folgt $[x] = 14996$.

§ 4

In diesem Paragraphen wenden wir einige Ungleichungen, die wir früher betrachtet haben, auf die Lösung von Extremwertaufgaben[4] an.

Aufgabe 1: Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

$$x^\alpha, \qquad a > 0, x \geq 0, \alpha > 1$$

Lösung: Die Aufgabe lässt sich für den Fall, dass $\alpha = 2$ ist, sehr einfach lösen. Wegen

$$x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

nimmt nämlich die Funktion den kleinsten Wert für $x = \frac{a}{2} > 0$ an, und zwar ist dieser Wert gleich $-\frac{a^2}{4}$.

Im Falle eines beliebigen $\alpha > 1$ lässt sich die Aufgabe unter Benutzung der in Satz 3 bewiesenen Ungleichung (12) lösen. Wegen $\alpha > 1$ gilt

$$(1 + z)^\alpha \geq 1 + \alpha z, \qquad z \geq -1$$

wobei Gleichheit nur für $z = 0$ besteht. Setzen wir hier $1 + z = y$, so erhalten wir

$$y^\alpha \geq 1 + \alpha(y - 1), \qquad y^\alpha - \alpha y \geq 1 - \alpha, \qquad y \geq 0$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $y = 1$ steht. Durch Multiplikation beider Seiten der letzten Ungleichung mit c^α ergibt sich

$$(cy)^\alpha - \alpha c^{\alpha-1}(cy) \geq (1 - \alpha)c^\alpha, \qquad y \geq 0$$

[4] Über die Anwendung von Ungleichungen zweiten Grades zur Ermittlung von Maxima und Minima vgl. I.P. Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben, 2. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).

Setzen wir $x = cy$ und $\alpha c^{\alpha-1} = a$, $c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, so erhalten wir

$$x^\alpha - ax \geq (1-\alpha)c^\alpha = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $x = c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ gilt. Also nimmt die Funktion

$$x^\alpha - ax, \qquad \alpha > 1, a > 0, x \geq 0$$

den kleinsten Wert für $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ an; es ergibt sich zu

$$(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Speziell nimmt die Funktion $x^2 - ax$ $(\alpha = 2)$ ihren kleinsten Wert für

$$x = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}} = \frac{a}{2}$$

an, und dieser ist gleich

$$(1-2)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2-1}} = -\frac{a^2}{4}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem Schluss überein, zu dem wir früher auf anderem Wege gekommen waren. Die Funktion $x^3 - 27x$ nimmt ihren kleinsten Wert für $x = \left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = 3$ an, und dieser ist $(1-3)\left(\frac{27}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}} = -54$.

Anmerkung: Wir vermerken für das Weitere, dass die Funktion

$$ax - x^\alpha = -(x^\alpha - ax)$$

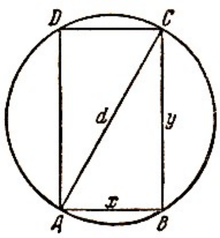
wobei $\alpha > 1$, $a > 0$, $x \geq 0$ ist, ihren größten Wert für:

$$x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

annimmt; dieser ist

$$(\alpha-1)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Aufgabe 2: Aus einem runden Stamm ist ein Balken größter Festigkeit auszusägen.[5]



Lösung: Es sei $AB = x$ die Breite des Balkens, $BC = y$; seine Höhe und $AC = d$ der Durchmesser des Stammes. Bezeichnen wir mit S die Festigkeit des Balkens, so erhalten wir

$$S = kxy^2 = kx(d^2 - x^2) = k(d^2x - x^3)$$

Die Funktion $d^2x - x^3$ nimmt ihren größten Wert an für

$$x = \left(\frac{d^2}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{d}{\sqrt{3}} y^2 = d^2 - x^2 = \frac{2}{3}d^2 y = \frac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = x\sqrt{2} \approx 1,4x = \frac{7}{5}x$$

[5]Die Festigkeit eines Balkens ist direkt proportional dem Produkt aus seiner Breite und dem Quadrat seiner Höhe.

Also hat der Balken die größte Festigkeit, wenn sich seine Höhe und seine Breite wie 7 : 5 verhalten.

Aufgabe 3: Man bestimme einen größten Wert der Funktion $y = \sin x \sin 2x$.

Lösung: Da $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ist, gilt

$$\sin x \sin 2x = 2 \cos x \sin^2 x = 2 \cos x(1 - \cos^2 x) = 2(z - z^3)$$

wo $z = \cos x$, also $-1 \leq z \leq 1$ ist. Die Funktion $z - z^3 = z(1 - z^2)$ hat negative Werte für $-1 \leq z < 0$. Für $0 \leq z \leq 1$ nimmt sie nichtnegative Werte an.
Folglich wird ein Maximum der Funktion im Intervall $0 < z \leq 1$ erreicht.

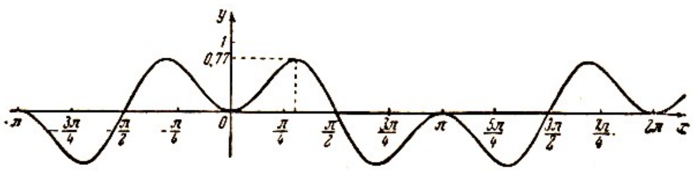
In Aufgabe 1 wurde gezeigt, dass die Funktion $z - z^3$, $z \geq 0$, ein Maximum für

$$z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

annimmt. Für diesen Wert ist

$$\sin x \sin 2x = 2z(1 - z^2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

Die Funktion $y = \sin x \sin 2x$ nimmt also dann ein Maximum an, wenn $z = \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, und zwar ist sein Wert $\frac{4}{3\sqrt{3}}$. Der Verlauf der Funktion $y = \sin x \sin 2x$ ist in Abb. 2 dargestellt.

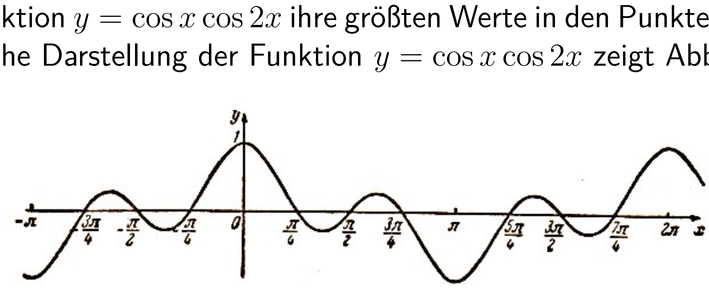


Aufgabe 4: Man bestimme einen größten Wert der Funktion $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

Lösung: Die Funktion $y = cosx \cdot \cos 2x$ wird nicht größer als 1, da jeder der Faktoren $\cos x$ und $\cos 2x$ die Zahl 1 nicht übertrifft. In den Punkten $= 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$, ... ist aber

$$\cos x \cdot \cos 2x = 1$$

Also nimmt die Funktion $y = \cos x \cos 2x$ ihre größten Werte in den Punkten $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$, ... an. Die graphische Darstellung der Funktion $y = \cos x \cos 2x$ zeigt Abb. 3.



Aufgabe 5: Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion

$$x^\alpha + \alpha x$$

falls $a > 0$, $\alpha < 0$, $x \geq 0$ ist.

Lösung: Da $\alpha < 0$ ist, gilt nach Ungleichung (12)

$$(1+z)^\alpha \geq 1 + \alpha z$$

wobei Gleichheit nur für $z = 0$ vorliegt. Wir setzen $1 + z = y$, $z = y - 1$ und erhalten

$$y^\alpha \geq 1 + \alpha(y-1), \qquad y \geq 0$$

wobei Gleichheit nur für $y = 1$ gilt. Aus dieser Ungleichung folgt:

$$y^\alpha - \alpha y \geq 1 - \alpha \qquad , \qquad (cy)^\alpha - \alpha c^{\alpha-1}(cy) \geq (1-\alpha)c^\alpha$$

Setzen wir $a = -\alpha c^{\alpha-1}$, $x = cy$, so erhalten wir

$$x^\alpha + ax \geq (1-\alpha)c^\alpha = (1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

wobei das Gleichheitszeichen wieder nur für $x = c = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ gilt.

Also nimmt die Funktion $x^\alpha + \alpha x$ ihren kleinsten Wert für $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ an, und zwar ist er gleich

$$(1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Z.B. nimmt die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 27x, \qquad x \geq 0$$

den kleinsten Wert an der Stelle

$$x = \frac{27}{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{-\frac{1}{3}-1}} = \frac{1}{27}$$

an. Dieser Wert ist

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{27}{\frac{1}{3}})^{\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-1}} = 4$$

Aufgabe 6: Man bestimme die sparsamsten Maße eines zylindrischen Gefäßes mit Boden und Deckel (Konservendose).[6]

Lösung: $V = \pi r^2 h$ ist der Inhalt des Gefäßes, wobei r der Radius und h die Höhe des Zylinders ist. Die gesamte Oberfläche des Gefäßes ist

$$F = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Wegen $h = \frac{V}{\pi r^2}$ gilt

$$F = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{2\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Setzen wir $x = \frac{1}{r}$, so erhalten wir

$$F = 2\pi x^{-2} + 2Vx = 2\pi\left(x^{-2} + \frac{V}{\pi}x\right)$$

[6] Die Maße des Gefäßes heißen sparsam, wenn bei gegebenem Rauminhalt zu seiner Herstellung eine möglichst geringe Menge Material erforderlich ist, d.h., wenn das Gefäß eine möglichst kleine Oberfläche hat.

Die Funktion $x^{-2} + \frac{V}{\pi}x$ nimmt laut Lösung der vorigen Aufgabe ihren kleinsten Wert für

$$x = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{-2-1}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$$

Kehren wir zu unseren früheren Bezeichnungen zurück, so finden wir

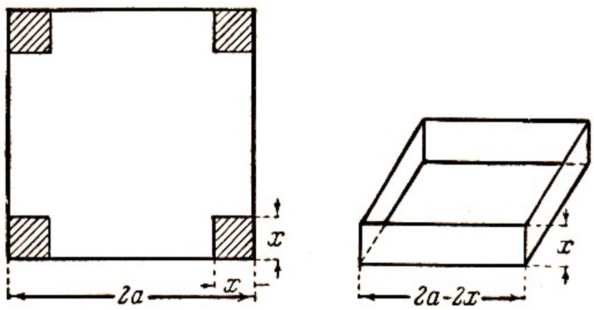
$$\frac{1}{r} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}, \qquad r^3 = \frac{V}{2\pi}, \qquad r = \frac{h}{2}, \qquad h = 2r = d$$

Also hat das Gefäß die sparsamsten Maße, wenn seine Höhe gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche ist.

Übungen

6. Man bestimme das Maximum der Funktion $x(6-x)^2$ für $0 < x < 6$.
Hinweis: Man setze $y = 6 - x$.

7. Aus einem quadratischen Blatt Papier mit der Seite $2a$ soll eine Schachtel ohne Deckel hergestellt werden, indem an den Ecken Quadrate ausgeschnitten und dann die überstehenden Streifen hochgebogen werden.
Die Schachtel soll größten Rauminhalt haben (Abb. 4). Wie groß muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate sein?



8. Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion $x^6 + 8x^2 + 5$.

9. Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion $x^6 - 8x^2 + 5$.

10. Man suche den größten Wert der Funktion $x^\alpha - \alpha x$, wenn $0 < \alpha < 1$, $a > 0$, ≥ 0.

11. Man beweise die Ungleichung

$$\sqrt{x} \leq \frac{3}{8} + 2x$$

12. Man zeige, dass für $n \geq 3$ folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

Hinweis: Man benutze die Ungleichung (7).

18. Man bestimme die größte der Zahlen

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, ..., \sqrt[n]{n}, ...$$

14. Man beweise die Ungleichung

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

15. Man beweise die Ungleichung

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+...+a_n$$

wenn die Zahlen a_i gleiches Vorzeichen haben und nicht kleiner als -1 sind.

16. Man beweise die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \tag{19}$$

Hinweis: Man beweise zuerst, dass das Polynom

$$\begin{aligned}&(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2 =\\ &\qquad = x^2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) - 2x(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n) + (b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\end{aligned}$$

nicht zwei verschiedene reelle Wurzeln haben kann.

17. Unter Benutzung der Ungleichung (19) zeige man, dass das arithmetische Mittel nicht größer als des quadratische Mittel ist.

18. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

19. Unter Benutzung der Ungleichung aus Übung 18 beweise man die Ungleichung

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2} > 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\sqrt[1]{\sqrt{n}}$$

20. Man gebe den größten Wert der Funktionen

$$\frac{x^3}{x^4+5}, \qquad x^6-0,6x^{10}$$

an.
Antwort: $\frac{3}{4\sqrt{15}}; 0,4.$

21. Für welchen Wert a ist der kleinste Wert der Funktion $\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}$ gleich 2,5?
Antwort: $a=8$.

§ 5

In diesem Paragraphen untersuchen wir noch einige wichtige Ungleichungen und zeigen ihre Anwendung bei der Berechnung gewisser Grenzwerte.

Aufgabe 1: Man zeige, dass für $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x>0$, $y>0$ die Beziehung

$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{p} \tag{20}$$

gilt.

Lösung: Zu Beginn des § 4 (Aufgabe 1) haben wir gezeigt, dass

$$x^\alpha - ax \geq (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

gilt, wenn $\alpha > 1$, $a > 0$, $x \geq 0$ ist.
Setzen wir in dieser Ungleichung $\alpha = p$, $a = py$, so erhalten wir

$$x^p - (py)x \geq (1-p)\left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} = (1-p)y^{\frac{p}{p-1}} \tag{21}$$

Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \quad , \quad q = \frac{p}{p-1} \quad , \quad p-1 = \frac{p}{q}$$

Setzen wir diese Werte in die Ungleichung (21) ein, so erhalten wir

$$x^p - pyx \geq -\frac{p}{q}y^q$$

Wenn wir alle Glieder der letzten Ungleichung durch p dividieren und die negativen Glieder auf die andere Seite bringen, so erhalten wir die Ungleichung (20).

Aufgabe 2: Man beweise: Sind $a_1, a_2, ..., a_n$ und $b_1, b_2, ..., b_n$ positive Zahlen und genügen p und q den Bedingungen der Aufgabe 1, so gilt die Höldersche Ungleichung

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \leq (a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \tag{22}$$

Lösung: Wir setzen

$$a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p = A^p, \qquad b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q = B^q$$

Dann erhält die rechte Seite der Ungleichung (22) die Form

$$(A^p)^{\frac{1}{p}}(B^q)^{\frac{1}{q}} = AB$$

Jetzt setzen wir

$$\begin{array}{llll} a_1 = Ac_1, & a_2 = Ac_2, & ..., & a_n = Ac_n \\ b_1 = Bd_1, & b_2 = Bd_2, & ..., & b_n = Bd_n \end{array}$$

Wegen

$$A^p = a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p = A^p c_1^p + c_2^p + ... + c_n^p = A^p(c_1^p + c_2^p + ... + c_n^p)$$

ist $c_1^p + c_2^p + ... + c_n^p = 1$.
Ebenso weist man nach, dass $d_1^q + d_2^q + ... + d_n^q = 1$ ist. Benutzen wir jetzt die Ungleichung (20), so erhalten wir

$$a_1b_1 = AB(c_1d_1) \leq AB\left(\frac{c_1^p}{p} + \frac{d_1^q}{q}\right),$$
$$a_2b_2 \leq AB\left(\frac{c_2^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}\right), ..., a_nb_n \leq AB\left(\frac{c_n^p}{p} + \frac{d_n^q}{q}\right) \tag{*}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$a_1b_1 + a_2b - 2 + ... + a_nb_n \leq AB\left(\frac{c_1^p + c_2^p + ... + c_n^p}{p} + \frac{d_1^q + d_2^q + ... + d_n^q}{q}\right)$$
$$= AB\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = AB$$

Wir erinnern daran, dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad c_1^p + c_2^p + ... + c_n^p = 1, \qquad d_1^q + d_2^q + ... + d_n^q = 1$$

ist. Damit ist gezeigt, dass die linke Seite der Ungleichung (22) höchstens gleich AB ist, also ist die Ungleichung bewiesen. Es ist unschwer zu zeigen, wenn in (22) das Gleichheitszeichen steht. In (21) gilt nur für

$$x = \left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{q}{p}}, \qquad x^p = y^q$$

Gleichheit (siehe Aufgabe 1, § 4).
Ebenso kann das Gleichheitszeichen in jeder Zeile von (*) nur dann stehen, wenn

$$c_1 = d_1^{\frac{q}{p}}, c_2 = d_2^{\frac{q}{p}}, ..., c_n = d_n^{\frac{q}{p}} \qquad \text{d.h.} \qquad c_1^p = d_1^q, c_2^p = d_2^q, ..., c_n^p = d_n^q$$

ist. Multiplizieren wir schließlich diese Gleichungen mit A^pB^q, so erhalten wir

$$B^q(Ac_1)^p = A^p(Bd_1)^q \qquad \text{d.h.} B^qa_1^p = A^pb_1^q$$
$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{A^p}{B^q}, \frac{a_2^p}{b_2^q} = \frac{A^p}{B^q}, ..., \frac{a_n^p}{b_n^q} = \frac{A^p}{B^q},$$

Daher steht in (22) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q}$$

ist.
Anmerkung: Setzen wir in (22) $p = 2$, $q = 2$, so erhalten wir (19) (Siehe Übung 15):

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)}$$

Aufgabe 3: Man beweise die Ungleichung[7]

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{23}$$

Lösung: Durch Vereinigung der Ungleichungen (7) und (8) aus § 2 erhalten wir

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

[7] $\ln$ bedeutet den Logarithmus zur Basis e

Logarithmieren wir diese Ungleichungen zur Basis e, so finden wir schließlich

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Aufgabe 4: Man setze

$$z_1 = 1+\frac{1}{2}, z_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, z_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}, z_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}, ...,$$
$$z_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$$

und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty}$.

Lösung: In der ersten der Ungleichungen (23) ersetzen wir n durch $n-1$ und erhalten

$$\frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) < \ln\frac{n}{n-1}$$

Daraus und aus der zweiten der Ungleichungen (23) folgt

$$\ln\frac{n+1}{n} < \ln\frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1} \tag{24}$$

Unter Benutzung der Ungleichungen (24) können wir jetzt die Ungleichungen ,

$$\begin{gathered}
\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1},\\
\ln\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n},\\
\ln\frac{n+3}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \ln\frac{n+2}{n+1},\\
...\\
\ln\frac{2n+1}{2n} < \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{2n-1}
\end{gathered}$$

aufschreiben. Addieren wir sie und beachten wir, dass der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren ist, so erhalten wir

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)...(2n+1)}{n(n+1)...2n} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} < \ln\frac{n(n+1)(n+2)...2n}{(n-1)n(n+1)...(2n-1)}$$

d.h.

$$\ln\frac{2n+1}{n} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{n-1} \tag{25}$$

Wegen

$$\frac{2n+1}{n} = 2+\frac{1}{n} \quad \text{gilt} \quad \lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln 2$$

Ebenso folgt aus

$$\frac{2n}{n-1} = 2+\frac{2}{n-1}$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n}{n-1} = \ln 2$$

Der linke und der rechte Teil (25) haben also denselben Grenzwert. Folglich hat auch der mittlere Teil diesen Grenzwert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} z_n = \ln 2$$

Aufgabe 5: Man setze

$$x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{1}{2}, x_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, ..., x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

und berechne $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lösung: Offenbar ist

$$\begin{aligned} x_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

In der vorigen Aufgabe setzen wir

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$

Folglich ist $x_{2n} = z_n - \frac{1}{n}$. Nun ist aber $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ln 2$ (siehe vorige Aufgabe). Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(z_n - \frac{1}{n}\right) = \ln 2$$

Wir bemerken noch, dass

$$x_{2n+1} = x_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

und folglich

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2$$

gilt. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2$$

Anmerkung: Die Zahlen

$$x_1 = a_1; \quad x_2 = a_1 + a_2; \quad x_3 = a_1 + a_2 + a_3; \quad ...; \quad x_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

heißen Partialsummen der Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Eine Reihe heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Teilsummen einen endlichen Grenzwert hat. In diesem Falle nennt man die Zahl $S = \lim_{n\to\infty} x_n$ die Summe der Reihe.

Aus Aufgabe 5 folgt, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - +... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + ...$$

konvergiert und ihre Summe $\ln 2$ ist.

Aufgabe 6: Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

heißt harmonische Reihe. Man beweise, dass die harmonische Reihe divergiert.

Lösung: Nach Ungleichung (23) ist

$$\frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}$$

Setzen wir diese Ungleichungen für $1, 2, 3, ..., n$ an, so erhalten wir

$$1 > \ln \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{2} > \ln \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3} > \ln \frac{4}{3}, \quad ..., \quad \frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}$$

Durch Addition folgt

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} > \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} = \ln(n+1)$$

Aus dieser Ungleichung folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} (n+1) \to \infty$$

folglich divergiert die harmonische Reihe.

Aufgabe 7: Man beweise, dass die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + + \frac{1}{n^\alpha} + ...$$

bei beliebigem $\alpha > 1$ konvergiert.

Lösung: Die Folge der Teilsummen dieser Reihe wächst monoton:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{1}{2^\alpha}, x_3 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}, ..., x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

d.h., es ist

$$x_1 < x_2 < x_3 < ...x_n < ...$$

Andererseits hat bekanntlich eine monoton wachsende beschränkte Zahlenfolge einen endlichen Grenzwert. Folglich wird die Konvergenz der Reihe (26) bewiesen sein, wenn wir zeigen können, dass die Zahlenfolge x_n beschränkt ist. Wir setzen

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + -... + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

Wegen

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - ... - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

ist $y_{2n} < 1$, da die Zahlen in jeder Klammer positiv sind. Es ist aber auch

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + -... + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{(n)^\alpha}\right) \end{aligned}$$

Aus

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{(n)^\alpha}$$

folgt

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n$$

Da $x_{2n} > x_n$, $y_{2n} < 1$ ist, gilt also

$$1 > y_{2n} > x_n - \frac{2}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n$$

Hieraus folgt

$$x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$$

d.h., die Zahlen x_n sind für $\alpha > 1$ beschränkt. Damit ist bewiesen, dass die Reihe (24) konvergiert und ihre Summe nicht größer ist als $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$.

Ist z.B. $\alpha = 2$, so ist

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{2^2 - 2} = 2$$
$$S = \lim_{n\to\infty} x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ... \leq 2$$

In den Vorlesungen über höhere Mathematik wird gezeigt, dass

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

ist.

Übungen

22. Man gebe die Summe der Reihe

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + ...$$

an.

Hinweis: Man benutze die Gleichung (27).
Antwort: $S = \frac{\pi^2}{12}$.

23. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + ... + n^\alpha < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0$$

24. Man beweise für $x_n = 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + ... + n^\alpha$ und $\alpha > 0$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

25. Man beweise

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + ... + a_nb_nc_n)^3 \leq (a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + ... + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + ... + c_n^3)$$

unter der Annahme, dass die Zahlen a_k, b_k, c_k positiv sind.
Hinweis: Man benutze die Ungleichung (10) und die Beweismethode aus § 5, Aufgabe 2.

26. Es sei

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{kn}$$

wobei k eine ganze positive Zahl ist; man beweise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln k$$

Hinweis: Man benutze die Lösungsmethode der Aufgabe 4 dieses Paragraphen.

Lösungen der Übungsaufgaben

1. Wir setzen in den Ungleichungen (1) $n = m, m + 1, ..., n$:

$$2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} < 2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1}$$
$$2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1} < \frac{1}{\sqrt{m+1}} < 2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m}$$
$$2\sqrt{m+3} - 2\sqrt{m+2} < \frac{1}{\sqrt{m+2}} < 2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1}$$
$$...$$
$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen erhalten wir

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}$$

2. Wir setzen in den Ungleichungen der Übung 1 $m = 10000$ und $n = 1000000$ und erhalten

$$2\sqrt{1000001} - 2\sqrt{10000} < \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2\sqrt{1000000} - 2\sqrt{19999}$$

Wegen

$$2\sqrt{1000001} > 2\sqrt{1000000} = 2000, \quad 2\sqrt{10000} = 200, \quad 2\sqrt{9999} = \sqrt{39996} > 199,98$$

(die letzte Ungleichung kann man leicht nachprüfen, indem man die Quadratwurzel auf 2 Dezimalen genau zieht) ist

$$2000 - 200 = 1800 < \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2000 - 199,98 = 1800,02$$

3. Wir multiplizieren die Ungleichungen aus Übung 2 mit 50 und erhalten in unseren Bezeichnungen $90000 < 50z < 90001$; hieraus folgt

$$[50z] = 90000$$

4. Für $n = 1$ gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

offensichtlich. Nehmen wir nun an, die Ungleichung sei für $n = k$ richtig:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \tag{a}$$

wir beweisen ihre Richtigkeit für $n = k + 1$, d.h., wir beweisen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \tag{b}$$

Durch Multiplikation der Ungleichung (a) mit $\frac{2k+1}{2k+2}$ erhalten wir

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$$

Zu beweisen bleibt

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung mit $(2k+2)\sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$ und erheben dann beide Seiten ins Quadrat, das ergibt

$$(2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(3k+1) \qquad \text{d.h.}$$

$$12k^3 + 28k^2 + 19k + 4 < 12k^3 + 28k^2 + 20k + 4$$

Diese Ungleichung ist richtig, da $k \geq 1$ ist. Damit ist bewiesen, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

für alle n richtig ist, da wir die letzten Schlüsse in umgekehrter Richtung machen können.

5. In der Ungleichung der Übung 4 setzen wir $n = 50$ und erhalten

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 50 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{151}} < \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}$$

6. Setzen wir $y = 6 - x$, also $x = 6 - y$, so führen wir die Aufgabe auf die Bestimmung des größten Wertes der Funktion

$$(6-y)y^2 = 6y^2 - y^3$$

für $0 < y < 6$ zurück. Wir setzen ferner $y^2 = z$ und erhalten die Funktion

$$6z - z^{\frac{3}{2}}$$

deren größter Wert (siehe Bemerkung am Schluss der Aufgabe 1 in § 4) gleich

$$\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}} = 0,5 \cdot 4^3 = 32$$

ist und an der Stelle

$$z = \left(\frac{6}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}} = 4^2$$

Die Funktion $6y^2 - y^3$ nimmt ihren größten Wert für $y = \sqrt{z} = 4$ an. Dieser Wert ist gleich 32. Die Funktion $x(6-x)^2$ nimmt den Wert 32 an der Stelle $x = 6 - y = 6 - 4 = 2$ an.

7. Der Inhalt der Schachtel (s. Abb. 4) ist

$$V = x(2a - 2x)^2 = 4x(a-x)^2, \quad 0 < x < a$$

Setzen wir $y = a - x$, $y^2 = z$, so erhalten wir

$$V = 4(az - z^{\frac{3}{2}})$$

Der größte Wert der Funktion $az - z^{\frac{3}{2}}$ wird an der Stelle

$$z = \left(\frac{a}{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}} = \left(\frac{2a}{3}\right)^2$$

erreicht. Folglich ist

$$y = \sqrt{z} = \frac{2a}{3} \qquad , \qquad x = a - y = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$$

Also ist der Rauminhalt der Schachtel am größten, wenn die Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrates gleich dem sechsten Teil der Seitenlänge des gegebenen Quadrates ist.

8. Der kleinste Wert der Funktion $x^6 + 8x^2 + 5$ ist gleich 5 und wird für $x = 0$ erreicht.

9. Setzen wir $y = x^2$, so führen wir die Aufgabe auf die Bestimmung des kleinsten Wertes der Funktion $y^3 - 8y + 5$ für positive Werte von y zurück. In der Aufgabe 1, § 4 haben wir gezeigt, dass das Minimum der Funktion $y^3 - 8y$ gleich

$$(1-3)\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{3-1}} = -2\frac{8^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = -\frac{32\sqrt{6}}{9}$$

ist. Der kleinste Wert der Funktion $y^3 - 8y + 5$ ist

$$-\frac{32\sqrt{6}}{9} + 5 = -3,6...$$

10. Setzen wir $y = x^\alpha$, so erhalten wir die Funktion

$$y - ay^{\frac{1}{\alpha}} = a\left(\frac{1}{a}y - y^{\frac{1}{\alpha}}\right), \qquad a > 0, \frac{1}{\alpha} > 1$$

Auf Grund der Aufgabe 1, § 4 ist das Maximum der Funktion $\frac{1}{a}y - y^{\frac{1}{\alpha}}$ gleich

$$\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}-1}} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Multiplizieren wir den letzten Ausdruck mit a, so finden wir gerade den größten Wert der Funktion $a\left(\frac{1}{a}y - y^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, der folglich gleich

$$(1-\alpha)\frac{a}{\alpha}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1+\frac{1}{\alpha-1}} = (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

ist.

11. Die Funktion

$$\sqrt[4]{x} - 2x, \qquad x \geq 0, \alpha = \frac{1}{4}, a = 2$$

hat als größten Wert den Wert

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}} = \frac{3}{4} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$$

Folglich ist für alle $x \geq 0$ die Ungleichung

$$\sqrt[4]{x} - 2x \geq \frac{8}{3} \qquad \text{d.h.} \qquad \sqrt[4]{x} \geq \frac{8}{3} + 2x$$

richtig.

12. Wir schreiben die Ungleichung (7) aus § 2 in der Form

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e, \qquad (n+1)^< en^n$$

Ist $n \geq 3 > e$, so ist

$$(n+1)^n < en^n < 3n^n \leq nn^n = n^{n+1}$$

Erheben wir beide Seiten der letzten Ungleichung in die $\frac{1}{n(n+1)}$-te Potenz, so erhalten wir

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

13. Wegen $1 < \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$ ist $\sqrt[3]{3}$ die größte der Zahlen 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$. Andererseits haben wir in der vorhergehenden Übungsaufgabe , gezeigt, dass die Zahlen $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ..., $\sqrt[n]{n}$, ... abnehmen. Folglich ist $\sqrt[3]{3}$ die größte der Zahlen 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, ..., $\sqrt[n]{n}$, ...

14. Wir setzen $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$. Erheben wir in die n-te Potenz, so erhalten wir

$$n = (1+\alpha_n)^n = \left[(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}}\right]^2$$

Nehmen wir $n \geq 2$, also $\frac{n}{2} \geq 1$ an, so ist auf Grund des Satzes 3

$$(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}} > 1 + \frac{n}{2}\alpha_n, \qquad n > (1+\alpha_n)^2 = 1 + n\alpha_n + \frac{n^2}{4}\alpha_n^2$$

Hieraus folgt

$$n > \frac{n^2}{4}\alpha_n^2, \quad \alpha_n^2 < \frac{4}{n}, \quad \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Anmerkung: Benutzt man den binomischen Satz, so kann man leicht sogar

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

beweisen. Es ist nämlich

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + n\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{2}{n} + ... > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{2}{n} = n$$

Hieraus folgt

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

15. Für $n = 1$ und $a_i > -1$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt:

$$1 + a_i \geq 1 + a_1$$

Wir nehmen an, die Ungleichung gelte für $n = k$, d.h., es sei

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + ... + a_k$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $(1 + a_{k+1})$, so erhalten

$$\begin{aligned}(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq (1 + a_1 + a_2 + ... + a_k)(1 + a_{k+1})\\ &= 1 + a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} + a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + ... + a_ka_{k+1}\end{aligned}$$

Da die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ gleiches Vorzeichen haben, ist

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + ... + a_ka_{k+1} \geq 0$$

und daher

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}$$

d.h., die Ungleichung ist auch für $n = k + 1$ richtig.
Damit ist die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$

für alle n bewiesen.

16. Hat das Polynom

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2$$

die reelle Nullstelle $x = x_1$, d.h., ist

$$(a_1x_1 - b_1)^2 + (a_2x_1 - b_2)^2 + ... + (a_nx_1 - b_n)^2 = 0$$

so ist jede der Zahlen

$$a_1x_1 - b_1, a_2x_1 - b_2, ..., a_nx_1 - b_n$$

Null, d.h., es ist

$$0 = a_1x_1 - b_1 = a_2x_1 - b_2 = ... = a_nx_1 - b_n, \qquad x_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}$$

Damit haben wir gezeigt, dass das Polynom

$$\begin{aligned}&(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2\\ &= x^2(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)\end{aligned}$$

nicht zwei verschiedene reelle Wurzeln haben kann; daher ist

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2 - (a_1^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \leq 0$$

Hieraus folgt gerade die Ungleichung (19)

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$$

Wir bemerken, dass das Gleichheitszeichen nur dann steht, wenn das von uns betrachtete Polynom eine reelle Nullstelle hat, d.h., wenn

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$$

ist.

17. Benutzen wir die Ungleichung (19), so erhalten wir

$$c_1^2 = \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$
$$\leq \left(\frac{a_1^2}{n} + \frac{a_2^2}{n} + ... + \frac{a_n^2}{n}\right)\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{n}\right) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} = c_2^2$$

Hieraus folgt $c_1 \leq c_2$. Das arithmetische Mittel ist höchstens gleich dem quadratischen Mittel.

18. Aus der Ungleichung

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2 = n + 1 + 2\sqrt{n^2 - 1} + n - 1 = 2n + 2\sqrt{n^2 - 1} < 2n + 2\sqrt{n^2} = 4n$$

folgt

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{2}$$

Durch Multiplikation mit 2 erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

19. In der Ungleichung der Übung 18 setzen wir $n = 2, 3, ..., n$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{4} - \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{4}} < \sqrt{5} - \sqrt{3}, ... \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Durch Addition der Ungleichungen erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} - 1$$

Wir addieren auf beiden Seiten der Ungleichung die Zahl 1 und finden

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$$

Anmerkung: In § 1 wurde die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + 1$$

bewiesen.

Die Zahlen $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}$ und $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+1$ unterscheiden sich voneinander um weniger als 0,42. Jede dieser Zahlen kann als Näherungswert für die Summe

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=z_n$$

genommen werden.
Wir teilen ohne Beweis mit, dass die $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}$ ein besserer Näherungswert für z_n ist als $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+1$.

20. Die Funktion $\dfrac{x^3}{x^4+5}$ nimmt für negative x negative Werte an. Da sie für positive x positive Werte annimmt, erreicht sie ihr Maximum für ein positives x.
Da.

$$\frac{x^3}{x^4+5}=\frac{1}{5\left(\frac{1}{5}x+x^{-3}\right)}$$

ist, wird der größte Funktionswert an der Stelle erreicht, an der die Funktion $\frac{1}{5}x+x^{-3}$ den kleinsten Wert annimmt. Aus der Aufgabe 5, § 4 folgt, dass der kleinste Wert dieser Funktion gleich

$$(1+3)\left(\frac{\frac{1}{5}}{3}\right)^{\frac{-3}{-3-1}}=4\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$$

ist; der größte Wert der Funktion $\frac{1}{5}x+x^{-3}$ ist also gleich

$$\frac{1}{5\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{15^{\frac{3}{4}}}{20}=\frac{15}{20\sqrt[4]{15}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{15}}$$

Um den größten Wert der Funktion $x^6-0,6x^{10}$ zu finden, setzen wir $y=x^6$. Es ist klar, dass $y\geq 0$ ist. Die Funktion

$$y-0,6y^{\frac{10}{6}}=0,6\left(\frac{10}{6}y-y^{\frac{10}{6}}\right)$$

nimmt den größten Wert (siehe Aufgabe 1, § 4)

$$0,6\left(\frac{10}{6}-1\right)\left(\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-1}}=0,4$$

an.

21. Setzen wir hier $y=\frac{1}{x^3}$ so erhalten wir

$$\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}=y^{-\frac{1}{4}}+ay$$

Der kleinste Wert der Funktion $y^{-\frac{1}{4}}+ay$ ist, wie aus Aufgabe 5 § 4 folgt, gleich

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)(4a)^{\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}}$$

Wir setzen $\frac{5}{4}(4a)^{\frac{1}{5}}=2,5$ und erhalten

$$(4a)^{\frac{1}{5}}=2,\quad 4a=32,\quad a=8$$

22.

$$\begin{aligned}
S &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - + ... \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + ...\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right) - \frac{2}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

(Wir benutzten die Gleichung (27)).

23. Aus $\alpha > 0$ folgt $\alpha + 1 > 1$, und daher gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 + \frac{1+\alpha}{n},$$
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 - \frac{1+\alpha}{n}$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungen mit $n^{1+\alpha}$, so erhalten wir

$$(n+1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} + (1+\alpha)n^\alpha \qquad , \qquad (n-1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} - (1+\alpha)n^\alpha$$

Daraus folgt

$$\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^\alpha < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

Wir betrachten diese Ungleichung für $n = 1, 2, 3, ..., n$:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1+\alpha} < 1 < \frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha}, \\
\frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < 2^\alpha < \frac{3^{1+\alpha} - 2^{1+\alpha}}{1+\alpha}, \\
... \\
\frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^\alpha < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}
\end{gathered}$$

Durch Addition erhalten wir

$$\frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + ... + n^\alpha < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

24. Aus den Ungleichungen der Übung 23 folgt

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{1+\alpha}} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

Die linke Seite der letzten Ungleichung ist die konstante Zahl $\frac{1}{1+\alpha}$. Die rechte Seite hat für $n \to \infty$ den Grenzwert ∞. Folglich strebt auch der Mittelteil der Ungleichung gegen diesen Grenzwert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha}$$

25. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$A^3 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3, \quad B^3 = b_1^3 + b_2^3 + ... + b_n^3, \quad C^3 = c_1^3 + c_2^3 + ... + c_n^3$$

$$x_1 = \frac{a_1}{A}, x_2 = \frac{a_2}{A}, ..., x_n = \frac{a_n}{A}, \quad y_1 = \frac{b_1}{B}, y_2 = \frac{b_2}{B}, ..., y_n = \frac{b_n}{B},$$
$$z_1 = \frac{c_1}{C}, z_2 = \frac{c_2}{C}, ..., z_n = \frac{c_n}{C}$$

Auf Grund der Ungleichung (10) gilt

$$\begin{aligned} a_1b_1c_1 &= ABCx_1y_1z_1 \leq ABC\frac{x_1^3 + y_1^3 + z_1^3}{3}, \\ a_2b_2c_2 &= ABCx_2y_2z_2 \leq ABC\frac{x_2^3 + y_2^3 + z_2^3}{3}, \\ &... \\ a_nb_nc_n &= ABCx_ny_nz_n \leq ABC\frac{x_n^3 + y_n^3 + z_n^3}{3} \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen erhalten wir

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + ... + a_nb_nc_n \leq ABC\left(\frac{x_1^3 + y_1^3 + z_1^3}{3} + \frac{x_2^3 + y_2^3 + z_2^3}{3} + ... + \frac{x_n^3 + y_n^3 + z_n^3}{3}\right)$$

Benutzt man die eingeführten Bezeichnungen, so ist leicht zu erkennen, dass

$$\begin{aligned} &x_1^3 + x_2^3 + ... + x_3^3 = \frac{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3}{A^3} = \frac{A^3}{A^3} = 1, \\ &y_1^3 + y_2^3 + ... + y_3^3 = 1, \qquad z_1^3 + z_2^3 + ... + z_3^3 = 1 \end{aligned}$$

gilt.
Folglich ist

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + ... + a_nb_nc_n \leq ABC\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = ABC$$

Wir erheben beide Seiten der Ungleichung in die 3-te Potenz und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} &(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + ... + a_nb_nc_n)^3 \leq A^3B^3C^3 \\ &\qquad = (a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + ... + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + ... + c_n^3) \end{aligned}$$

26. Wir schreiben die Ungleichungen (24) für verschiedene Werte von n auf:

$$\begin{aligned} \ln\frac{n+1}{n} &< \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1} \\ \ln\frac{n+2}{n+1} &< \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} \\ &... \\ \ln\frac{kn+1}{kn} &< \frac{1}{kn} < \ln\frac{kn}{kn-1} \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\ln \frac{(n+1)(n+2)...(kn+1)}{n(n+1)...(kn)} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{kn} < \ln \left[\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot ... \cdot \frac{kn}{kn-1} \right]$$

d.h.

$$\ln \frac{kn+1}{n} < \ln \left(k + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{kn} < \ln \frac{kn}{kn-1} = \ln \left(k + \frac{k}{n-1} \right)$$

Für $n \to \infty$ streben $\ln \left(k + \frac{1}{n} \right)$ und $\ln \left(k + \frac{k}{n-1} \right)$ gegen denselben Grenzwert $\ln k$. Folglich ist auch

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{kn} \right) = \ln k$$