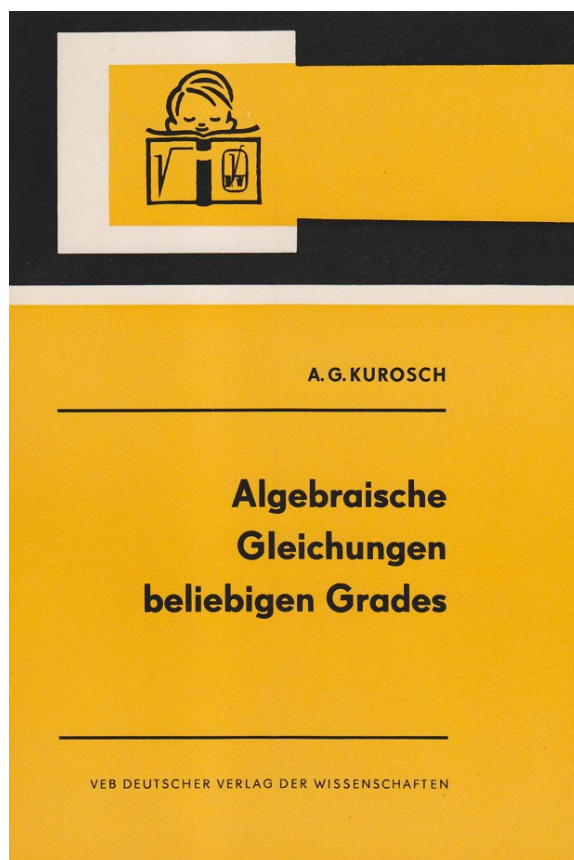

Algebraische Gleichungen beliebigen Grades

von A.G. Kurosch



Copyright 1967 by Deutscher Verlag der Wissenschaften
Übersetzung von Almut Welz
Mathematische Schülerbücherei: Band 21

Abschrift und LaTeX-Satz: Steffen Polster 2021
<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Diesem Büchlein liegt ein Vortrag zugrunde, den der Autor an der Staatlichen Lomonossow-Universität in Moskau für die Teilnehmer einer mathematischen Olympiade, Schüler der neunten und zehnten Klassen, gehalten hat.

Es ist dem Niveau eines Schülers der neunten Klasse angepasst; es wird eine Übersicht über die Ergebnisse und Methoden der allgemeinen Theorie algebraischer Gleichungen gegeben.

Beweise werden nicht vollständig durchgeführt, da man sonst fast die Hälfte eines Lehrbuches der höheren Algebra abschreiben müsste.

Die Lektüre des Büchleins ist jedoch selbst unter diesen Umständen keine einfache Unterhaltung.

Jedes mathematische Buch, selbst ein populärwissenschaftliches, erfordert vom Leser konzentrierte Aufmerksamkeit; er muss sämtliche Definitionen und Formulierungen durchdenken, die Rechnungen in Beispielen nachprüfen, die dargelegten Methoden auf andere, selbst ausgedachte Beispiele anwenden, usw.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
1 Einleitung	3
2 Komplexe Zahlen	4
3 Wurzelziehen. Quadratische Gleichungen	8
4 Kubische Gleichungen	10
5 Die Auflösung von Gleichungen durch Radikale; die Existenz der Lösungen von Gleichungen	13
6 Die Anzahl der reellen Lösungen	15
7 Die angenäherte Lösung von Gleichungen	17
8 Körper	20
9 Schlussbemerkungen	24
10 Literaturangaben	25

1 Einleitung

Der in der Schule zu behandelnde Stoff der Algebra ist sehr vielseitig; im Mittelpunkt steht jedoch das Problem der Gleichungen. Wir beschränken uns hier auf Gleichungen mit einer Unbekannten und erinnern an das Wenige, was darüber in Oberschulen gebracht wird.

Jeder Schüler vermag Gleichungen ersten Grades zu lösen: Ist die Gleichung

$$ax + b = 0$$

mit $a \neq 0$ gegeben, so ist die Zahl

$$x = -\frac{b}{a}$$

die eindeutig bestimmte Lösung dieser Gleichung.

Der Schüler kennt ferner die Formel für die Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wobei $a \neq 0$ ist; es ist nämlich

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sind die Koeffizienten dieser Gleichung reelle Zahlen, so liefert die Formel genau dann zwei verschiedene reelle Lösungen, wenn unter dem Wurzelzeichen eine positive Zahl steht, das heißt, wenn $b^2 - 4ac > 0$ ist.

Ist jedoch $b^2 - 4ac = 0$, so besitzt unsere Gleichung nur eine einzige Lösung; man nennt sie in diesem Fall Doppelwurzel. Für $b^2 - 4ac < 0$ hat die Gleichung überhaupt keine reellen Lösungen.

Schließlich kann der Schüler noch einige Typen von Gleichungen dritten und vierten Grades lösen, und zwar solche Gleichungen, deren Lösung man leicht auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückführen kann. So kann zum Beispiel die Lösung der kubischen Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

für die $x = 0$ eine Lösung ist, durch Abspalten des Faktors x auf die Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zurückgeführt werden.

Auf eine quadratische Gleichung führt man auch die Gleichung vierten Grades

$$ay^4 + by^2 + c = 0$$

zurück, die man "biquadratische" Gleichung nennt. Es genügt, in dieser Gleichung

$$y^2 = x$$

zu setzen, die Lösungen der so erhaltenen quadratischen Gleichung zu bestimmen und die Quadratwurzeln aus ihnen zu ziehen.

Wir betonen noch einmal, dass dies alles nur einige sehr spezielle Typen von Gleichungen dritten und vierten Grades sind. Für beliebige Gleichungen dieses Grades und erst recht für

beliebige Gleichungen höheren Grades lernt man in der (sowjetischen, d.Red.) Schule keine Lösungsmethoden.

Bei verschiedenen Problemen der Technik, der Mechanik und der Physik hat man es jedoch oft mit algebraischen Gleichungen ziemlich hohen Grades zu tun.

An der Theorie der algebraischen Gleichungen n -ten Grades, wobei n eine beliebige ganze positive Zahl ist, wird bereits seit einigen Jahrhunderten gearbeitet.

Die Theorie der algebraischen Gleichungen bildet heute einen der wichtigsten Teile der Vorlesungen über höhere Algebra, wie sie an Universitäten und Pädagogischen Instituten gehalten werden.

2 Komplexe Zahlen

Die Theorie der algebraischen Gleichungen stützt sich im wesentlichen auf die Theorie der komplexen Zahlen, deren Anfangsgründe man in den höheren Klassen der Oberschule behandelt. Dem Schüler bleiben jedoch oft Zweifel an der Zulässigkeit dieser Zahlen, an ihrer realen Existenz.

Solche Zweifel entstanden aber auch bei den Wissenschaftlern, als vor wenigen Jahrhunderten die komplexen Zahlen sich für den mathematischen Gebrauch als notwendig erwiesen.

Aus jener Zeit stammt daher auch der Name "imaginäre" (d.h. "scheinbare") Zahlen. Für die moderne Wissenschaft gibt es hingegen nichts Geheimnisvolles an den komplexen Zahlen, sie sind genau so wenig imaginär wie die negativen oder die irrationalen Zahlen.

Die komplexen Zahlen wurden notwendig, weil es nicht möglich ist, die Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl zu ziehen, ohne den Bereich der reellen Zahlen zu verlassen. Dies führt, wie wir wissen, dazu, dass manche Typen quadratischer Gleichungen keine reellen Lösungen haben; die einfachste dieser Art ist die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

Kann man nun den Zahlenbereich so erweitern, dass auch diese Gleichungen Lösungen haben?

Dem Schüler sind schon einige Erweiterungen des Zahlenbereichs begegnet. Er begann in der elementaren Arithmetik mit dem Studium der ganzen positiven Zahlen. Bald danach erschienen auch die Brüche. In der Algebra wurden dann die negativen Zahlen eingeführt und damit das System aller rationalen Zahlen.

Schließlich führte die Einführung der irrationalen Zahlen zum Bereich aller reellen Zahlen.

Jede dieser sukzessiven Erweiterungen des Zahlenbereichs ermöglichte es, solche Gleichungen zu lösen, die vor der betrachteten Erweiterung keine Lösung besaßen. So besitzt zum Beispiel die Gleichung

$$2x - 1 = 0$$

erst nach der Einführung der Brüche eine Lösung, die Gleichung

$$x + 1 = 0$$

erst nach der Einführung der negativen Zahlen und schließlich die Gleichung

$$x^2 - 2 = 0$$

erst nach der Einführung der irrationalen Zahlen.

All dies rechtfertigt voll und ganz noch einen Schritt auf dem Wege der Erweiterung des Zahlenbereichs, und wir wollen jetzt ganz allgemein zeigen, wie dieser letzte Schritt durchzuführen ist.



Ist eine Gerade gegeben, der eine positive Richtung zugeschrieben wird und auf welcher der Nullpunkt O und die Maßeinheit festgelegt sind, so kann man bekanntlich jedem Punkt A dieser Geraden seine "Koordinate" zuordnen (vgl. Abb. 1), d.h. eine reelle Zahl, die in der gewählten Maßeinheit die Entfernung zwischen A und O angibt, falls A rechts vom Punkt O liegt, oder die Entfernung mit negativem Vorzeichen, falls A links von O liegt.

Allen Punkten der Geraden werden auf diese Weise verschiedene reelle Zahlen zugeordnet. Man kann beweisen, dass auch jeder reellen Zahl ein Punkt entspricht. Die Punkte unserer Geraden können folglich als Bilder der ihnen entsprechenden reellen Zahlen aufgefasst werden, die reellen Zahlen sind also auf die Gerade abgebildet worden. Wir nennen unsere Gerade "Zahlengerade".

Kann man den Zahlenbereich derart erweitern, dass die neuen Zahlen sich auf eine ebenso natürliche Weise als Punkte der Ebene darstellen lassen?

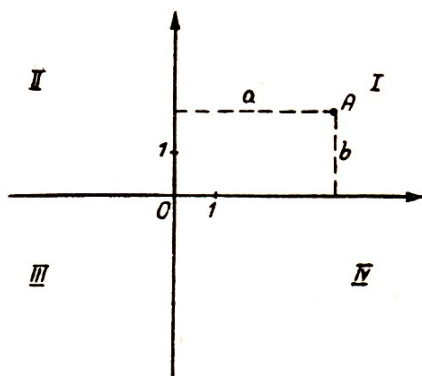
Wir verfügen bis jetzt noch nicht über ein derartiges Zahlensystem, das umfassender ist als der Bereich der reellen Zahlen; wir müssen es also konstruieren.

Zunächst muss erst einmal festgestellt werden, aus welchem "Material" das neue Zahlensystem "konstruiert" werden soll, d. h., welche Objekte die Rolle der neuen Zahlen spielen werden.

Dann müssen die algebraischen Operationen, die Addition und die Multiplikation, die Subtraktion und die Division, für diese Objekte, d. h. für diese zukünftigen Zahlen, definiert werden. Da wir solche Zahlen konstruieren wollen, die sich durch alle Punkte der Ebene darstellen lassen, ist es am einfachsten, die Punkte der Ebene selbst als diese neuen Zahlen anzusehen. Um diese Punkte wirklich als Zahlen auffassen zu können, braucht man für sie nur die algebraischen Operationen zu definieren; man muss also festsetzen, welcher Punkt die Summe zweier gegebener Punkte der Ebene genannt werden soll, welcher ihr Produkt usw.

So wie jeder Punkt auf der Geraden eindeutig durch eine reelle Zahl, und zwar durch ihre Koordinate, bestimmt ist, so lassen sich auch die Punkte der Ebene durch Paare reeller Zahlen eindeutig bestimmen.

Zu diesem Zweck nehmen wir in der Ebene zwei zueinander senkrechte Geraden, die sich im Punkt O schneiden. Auf jeder Geraden geben wir eine positive Richtung an und wählen eine Längeneinheit (vgl. Abb. 2).



Man nennt diese Geraden Koordinatenachsen, insbesondere heißt die horizontale Gerade Abszisse, die vertikale Ordinate. Die Koordinatenachsen teilen die gesamte Ebene in vier Quadranten, die wie in der Abbildung nummeriert werden.

Die Lage eines beliebigen Punktes A aus dem ersten Quadranten (vgl. Abb. 2) wird durch die Angabe zweier positiver reeller Zahlen eindeutig bestimmt:

Durch die Zahl a , die die Entfernung dieses Punktes bis zur Ordinatenachse (die Abszisse des Punktes A) in der gewählten Längeneinheit angibt, und durch die Zahl b , die seine Entfernung bis zur Abszissenachse (die Ordinate des Punktes A) in der gewählten Längeneinheit angibt. Umgekehrt kann man jedem Paar (a, b) positiver reeller Zahlen im ersten Quadranten den eindeutig bestimmten Punkt zuordnen, dessen Abszisse die Zahl a und dessen Ordinate die Zahl b ist.

Analog lassen sich auch die Punkte in den anderen Quadranten bestimmen. Um die Eineindeutigkeit der Zuordnung zwischen allen Punkten der Ebene und ihren Koordinatenpaaren (a, b) zu gewährleisten, um also zu vermeiden, dass verschiedenen Punkten der Ebene ein und dasselbe Koordinatenpaar (a, b) entspricht, nehmen wir die Abszissen der Punkte, die in den Quadranten II und III liegen, und die Ordinaten der Punkte, die in den Quadranten III und IV liegen, negativ.

Wir stellen fest, dass die Punkte auf der Abszissenachse offenbar durch Koordinaten der Form $(a, 0)$ und die Punkte auf der Ordinatenachse offenbar durch Koordinaten der Form $(0, b)$ gegeben sind:

a und b sind hierbei beliebige reelle Zahlen.

Wir können jetzt alle Punkte der Ebene durch Paare reeller Zahlen angeben. Wir werden von nun an nicht vom Punkt A mit den Koordinaten (a, b) , sondern einfach vom Punkt (a, b) sprechen.

Wir definieren jetzt die Addition und die Multiplikation von Punkten der Ebene. Diese Definition erscheint im ersten Moment recht künstlich; es lässt sich aber nachweisen, dass nur durch eben diese Definition unser Ziel erreicht wird; man kann nämlich auf Grund dieser Definition Quadratwurzeln aus negativen reellen Zahlen ziehen.

Es seien die Punkte (a, b) und (c, d) der Ebene gegeben. Wir wissen bis jetzt noch nicht, was man unter der Summe und dem Produkt dieser Punkte verstehen soll. Wir nennen den Punkt mit der Abszisse $a + c$ und der Ordinate $b + d$ die Summe dieser Punkte; d.h.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Andererseits nennen wir den Punkt mit der Abszisse $ac - bd$ und der Ordinate $ad + bc$ das Produkt der gegebenen Punkte:

$$(a, b) - (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Man kann leicht nachweisen, dass die so definierten Operationen mit den Punkten der Ebene alle gewöhnlichen Eigenschaften der Operationen mit Zahlen besitzen:

Die Addition und die Multiplikation der Punkte der Ebene sind kommutativ (d.h., man kann die Summanden bzw. die Faktoren vertauschen). Sie sind ferner assoziativ, d.h., die Summe und das Produkt dreier Punkte sind unabhängig von der Anordnung der Klammern. Durch das Distributivgesetz, d.h. durch die Regeln zum Auflösen von Klammern, sind die Addition und die Multiplikation miteinander verknüpft.

Die Assoziativität der Addition und der Multiplikation von Punkten ermöglicht es, die Summe und das Produkt einer beliebigen endlichen Anzahl von Punkten der Ebene eindeutig zu definieren.

Die Subtraktion und die Division lassen sich auch bei den Punkten der Ebene als Umkehrung der Addition bzw. der Multiplikation auffassen; d.h., in jedem Zahlensystem kann die Differenz

zweier Zahlen als die Zahl definiert werden, die so beschaffen ist, dass die Summe aus dieser Zahl und dem Subtrahend gleich dem Minuend ist, und der Quotient zweier Zahlen als die Zahl, deren Produkt mit dem Divisor gleich dem Dividend ist. Es gelten also die Beziehungen

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bc}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Der Leser prüft leicht nach, dass das Produkt des Punktes, der auf der rechten Seite der letzten Gleichung steht, mit dem Punkt (c, d) gerade den Punkt (a, b) ergibt. Die Multiplikation erfolgt hierbei gemäß obiger Definition.

Leichter noch überzeugt man sich davon, dass die Summe des Punktes, der auf der rechten Seite der ersten Gleichung steht, und des Punktes (c, d) tatsächlich gleich dem Punkt (a, b) ist.

Führen wir unsere Rechenoperationen für die Punkte der Abszissenachse, d.h. für die Punkte der Form $(a, 0)$, durch, so erhalten wir die Relationen

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad , \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

die Addition und die Multiplikation dieser Punkte laufen also einfach auf die Addition und die Multiplikation ihrer Abszissen hinaus.

Das gleiche gilt auch für die Subtraktion und für die Division: Es ist nämlich

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0) \quad , \quad \frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0 \right)$$

Fassen wir jeden Punkt $(a, 0)$ der Abszissenachse als Darstellung der reellen Zahl a , der Abszisse des Punktes, auf, d.h., identifizieren wir den Punkt $(a, 0)$ mit der Zahl a selbst, so wird die Abszissenachse einfach in die Zahlengerade umgewandelt. Wir können also sagen:

Das aus den Punkten der Ebene gebildete neue Zahlensystem umfasst insbesondere alle reellen Zahlen, und zwar in ihrer Eigenschaft, als Punkte der Abszissenachse.

Die Punkte der Ordinatenachse können allerdings nicht mit den reellen Zahlen identifiziert werden. Wir betrachten als Beispiel den Punkt $(0, 1)$, der oberhalb der Abszissenachse auf der Ordinatenachse liegt und die Entfernung 1 vom Nullpunkt hat. Wir bezeichnen diesen Punkt mit dem Buchstaben i :

$$i = (0, 1)$$

und bilden sein Quadrat im Sinne der für die Punkte der Ebene definierten Multiplikation:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

Der Punkt $(-1, 0)$ liegt jedoch nicht auf der Ordinaten-, sondern auf der Abszissenachse und stellt daher die reelle Zahl -1 dar. Es ist also

$$i^2 = -1$$

Wir fanden somit in unserem neuen Zahlensystem eine Zahl, deren Quadrat gleich der reellen Zahl -1 ist; wir sind also jetzt imstande, die Quadratwurzel aus der Zahl -1 zu ziehen.

Der andere Wert dieser Wurzel ist der Punkt $-i = (0, -1)$. Wir weisen darauf hin, dass der von uns mit dem Buchstaben i bezeichnete Punkt $(0, 1)$ ein wohlbestimmter Punkt der Ebene ist.

Man bezeichnet ihn gewöhnlich als die "imaginäre" Einheit, was aber seine reale Existenz auf der Ebene in keiner Weise beeinträchtigt.

Man nennt das auf diese Weise definierte Zahlensystem, das den Bereich der reellen Zahlen umfasst, das "System der komplexen Zahlen". Die Punkte der Ebene selbst mit den oben definierten Rechenoperationen heißen "komplexe Zahlen".

Unter Benutzung dieser Operationen kann man leicht zeigen, dass jede komplexe Zahl durch reelle Zahlen und durch die Zahl i ausgedrückt werden kann. Es sei z.B. der Punkt (a, b) gegeben. Auf Grund der Definition der Summe gilt die Gleichung

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Der Summand $(a, 0)$ liegt auf der Abszissenachse und stellt infolgedessen die reelle Zahl a dar. Der zweite Summand kann auf Grund der Definition des Produktes auch in der Form

$$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$$

geschrieben werden. Der erste Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung stimmt mit der reellen Zahl b überein, während der zweite Faktor gleich der Zahl i ist. Es ist also

$$(a, b) = a + bi$$

wobei Summe und Produkt im Sinne der für die Punkte der Ebene definierten Operationen aufzufassen sind.

Nachdem wir somit die übliche Schreibweise der komplexen Zahlen erhalten haben, können wir die oben angegebenen Rechenregeln für die komplexen Zahlen in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\(a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\(a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i\end{aligned}$$

Wir weisen noch darauf hin, dass unsere Definition des Produktes für die Punkte der Ebene auch das Distributivgesetz erfüllt:

Bilden wir auf der linken Seite der zweiten Gleichung das Produkt gemäß der Multiplikation zweier Binome, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung $i^2 = -1$ und durch Zusammenfassung ähnlicher Glieder gerade die rechte Seite dieser Gleichung.

3 Wurzelziehen. Quadratische Gleichungen

Da uns jetzt auch die komplexen Zahlen zur Verfügung stehen, können wir nicht nur aus der Zahl -1 , sondern auch aus jeder beliebigen negativen reellen Zahl die Quadratwurzel ziehen; wir erhalten natürlich auch hierbei zwei verschiedene Werte.

Ist nämlich $-a$ eine negative reelle Zahl, d.h. ist $a > 0$, so ist

$$\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}i$$

wobei \sqrt{a} der positive Wert der Quadratwurzel aus der positiven Zahl a ist.

Kommen wir noch einmal auf die Lösung der in der Einleitung betrachteten quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten zurück, so können wir jetzt sagen, dass diese Gleichung auch im Fall $b^2 - 4ac < 0$ zwei verschiedene, und zwar komplexe Lösungen hat.

Auch aus beliebigen komplexen Zahlen, also nicht nur aus reellen Zahlen, kann mit Hilfe der komplexen Zahlen die Quadratwurzel gezogen werden. Ist nämlich die komplexe Zahl $a + bi$ gegeben, so ergibt sich

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$$

wobei jedesmal nur der positive Wert der Wurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$ zu nehmen ist.

Der Leser sieht, dass für beliebiges a und b sowohl der erste Summand der rechten Seite als auch der Koeffizient von i reelle Zahlen sind. Jedes dieser beiden Radikale besitzt zwei Werte, die nach folgender Regel miteinander kombiniert werden:

Ist $b > 0$, so werden bei beiden Radikalen entweder die positiven Werte oder die negativen Werte verwendet. Ist dagegen $b < 0$, so wird jeweils der positive Wert des einen Radikals mit dem negativen Wert des anderen gewählt.

Beispiel: Es ist die Quadratwurzel aus der Zahl $21 - 20i$ zu ziehen. Es ist

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{441 + 400} = 29 \\ \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} &= \sqrt{\frac{1}{2}(21 + 29)} = \pm 5 \\ \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} &= \sqrt{\frac{1}{2}(-21 + 29)} = \pm 2\end{aligned}$$

Da $b = -20$, d.h. $b < 0$ ist, werden die Werte mit verschiedenen Vorzeichen der Radikale kombiniert; es ist also

$$\sqrt{21 - 20i} = \pm(5 - 2i)$$

Wir sind nun in der Lage, auch aus komplexen Zahlen Quadratwurzeln zu ziehen und können infolgedessen auch quadratische Gleichungen mit beliebigen komplexen Koeffizienten lösen; die Formel für die Lösung einer quadratischen Gleichung gilt nämlich auch im Fall komplexer Koeffizienten.

Die rechnerische Bestimmung der in dieser Formel auftretenden Quadratwurzel lässt sich, wie eben gezeigt wurde, auf das Ziehen von Quadratwurzeln aus zwei positiven reellen Zahlen zurückführen.

Eine quadratische Gleichung mit beliebigen komplexen Koeffizienten besitzt also stets zwei Lösungen, die gelegentlich zusammenfallen können, so dass man dann eine Doppellösung erhält.

Beispiel: Es ist die Gleichung

$$x^2 - (4 - i)x + (5 - 5i) = 0$$

zu lösen. Die Anwendung der Lösungsformel ergibt

$$x = \frac{(4 - i) \pm \sqrt{(4 - i)^2 - 4(5 - 5i)}}{2} = \frac{(4 - i) \pm \sqrt{-5 + 12i}}{2}$$

Ziehen wir die hierbei auftretende Quadratwurzel nach der angegebenen Methode, so finden wir

$$\sqrt{-5 + 12i} = \pm(2 + 3i)$$

woraus

$$x = \frac{(4 - i) \pm (2 + 3i)}{2}$$

folgt. Die Zahlen $x_1 = 3 + i$, $x_2 = 1 - 2i$ sind also die Lösungen unserer Gleichung. Man kann sehr leicht zeigen, dass jede dieser Zahlen tatsächlich die Gleichung befriedigt.

Wir wollen nun das Problem der Wurzeln n -ten Grades aus komplexen Zahlen behandeln, wobei n eine beliebige ganze positive Zahl ist. Man kann beweisen, dass für jede komplexe Zahl α genau n verschiedene komplexe Zahlen existieren, so dass jeweils die n -te Potenz dieser komplexen Zahlen, d.h. das Produkt von n mit dieser Zahl identischen Faktoren, die Zahl α ergibt. Es gilt also mit anderen Worten der folgende sehr wichtige Satz:

Die n -te Wurzel aus einer beliebigen komplexen Zahl hat genau n verschiedene komplexe Werte.

Dieser Satz gilt auch für reelle Zahlen, die ein Spezialfall der komplexen Zahlen sind:

Die n -te Wurzel aus irgendeiner reellen Zahl a hat genau n verschiedene, im allgemeinen komplexe Werte.

Ist a positiv und n gerade, so sind zwei davon reell; bei positivem a und ungeradem n gibt es eine reelle Wurzel. Ist a negativ, so gibt es bei ungeradem n eine und bei geradem n keine reelle unter den n -ten Wurzeln aus a .

So hat die Kubikwurzel aus der Zahl 1 drei Werte:

$$1; \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die dritte Potenz dieser drei Zahlen gleich 1 ist. Die Zahlen

$$1, \quad -1, \quad i \quad \text{und} \quad -i$$

sind die Werte der vierten Wurzel aus 1.

Wir führten in diesem Paragraphen eine Formel zur Bestimmung der Quadratwurzel aus der komplexen Zahl $a + bi$ ein.

Mittels dieser Formel lässt sich die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl auf Quadratwurzeln aus zwei positiven reellen Zahlen zurückführen. Für $n > 2$ existiert jedoch keine Formel, mit deren Hilfe man eine Wurzel n -ten Grades aus einer komplexen Zahl $a + bi$ durch reelle Werte von Radikalen aus mehreren reellen Hilfszahlen ausdrücken könnte.

Es ist auch bewiesen worden, dass eine solche Formel nicht aufgestellt werden kann. Man bestimmt Wurzeln n -ten Grades aus komplexen Zahlen, indem man zu einer neuen, der sogenannten trigonometrischen Schreibweise der komplexen Zahlen übergeht, die wir hier jedoch nicht betrachten wollen.

4 Kubische Gleichungen

Wir kennen die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung; diese Formel gilt auch für den Fall komplexer Koeffizienten. Es erweist sich, dass man auch für die Gleichungen dritten Grades, die sogenannten kubischen Gleichungen, eine Lösungsformel angeben kann.

Sie ist allerdings komplizierter und gibt die Lösung dieser Gleichung durch Radikale mit Hilfe ihrer Koeffizienten an. Diese Formel gilt ebenfalls für Gleichungen mit beliebigen komplexen

Koeffizienten.

Es sei die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

gegeben. Wir formen diese Gleichung um, indem wir

$$x = y - \frac{a}{3}$$

setzen, wobei y die neue Unbekannte ist. Setzen wir diesen Ausdruck für x in unsere Gleichung ein, so erhalten wir eine kubische Gleichung in der Unbekannten y . Diese Gleichung hat eine einfachere Form, da der Koeffizient von y^2 gleich 0 ist. Die Zahl

$$p = -\frac{a^2}{3} + b$$

ist der Koeffizient der ersten Potenz von y und die Zahl

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

das absolute Glied. In dieser reduzierten Darstellung hat also unsere Gleichung die Form

$$y^3 + py + q = 0$$

Wir erhalten nun die Lösung der Ausgangsgleichung, indem wir die Größe $\frac{a}{3}$ von den Lösungen dieser neuen Gleichung subtrahieren.

Die Lösungen unserer neuen Gleichung lassen sich durch ihre Koeffizienten mit Hilfe der Formel

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ausdrücken.

Jedes dieser hierbei auftretenden kubischen Radikale hat, wie wir wissen, drei Werte. Man kann sie jedoch nicht willkürlich kombinieren.

Es erweist sich, dass man zu jedem Wert des ersten Radikals genau einen Wert des zweiten Radikals finden kann, so dass ihr Produkt gleich der Zahl $-\frac{p}{3}$ ist.

Um eine Lösung der Gleichung zu erhalten, müssen diese beiden Werte natürlich addiert werden. Auf diese Weise ergeben sich die drei Lösungen unserer Gleichung. Jede kubische Gleichung mit beliebigen Koeffizienten hat folglich drei, im allgemeinen komplexe Lösungen; es können hierbei natürlich auch Lösungen zusammenfallen, d.h. mehrfache Wurzeln sein.

Diese Formel hat jedoch keinen allzu großen praktischen Wert. Es seien die Koeffizienten p und q reelle Zahlen. Hat die Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

drei verschiedene reelle Lösungen, so kann man zeigen, dass dann der Ausdruck

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

negativ ist. Dieser Ausdruck ist der Radikand der in der Formel auftretenden Quadratwurzel.

Ziehen wir diese Quadratwurzel, so erhalten wir als Radikand jeder der Kubikwurzeln eine komplexe Zahl.

Wir erwähnten jedoch im dritten Paragraphen, dass die Bestimmung der Kubikwurzel aus einer komplexen Zahl den Übergang zur trigonometrischen Schreibweise erfordert; selbst dann kann dies mit Hilfe von Tabellen nur angenähert durchgeführt werden.

Beispiel: Die Gleichung

$$y^3 - 19x + 30 = 0$$

enthält kein Quadrat der Unbekannten; wir wenden deshalb die obige Lösungsformel auf sie an, ohne vorher irgendwelche Veränderungen vornehmen zu müssen. Hier ist

$$p = -19, q = 30 \quad \text{folglich} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{784}{27}$$

also negativ. Das erste der in der Formel auftretenden kubischen Radikale hat die Form

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{-\frac{784}{27}}} = \sqrt[3]{-15 + i\sqrt{\frac{784}{27}}}$$

Wir können dieses kubische Radikal nicht durch Radikale aus reellen Zahlen ausdrücken und folglich mittels dieser Formel die Lösungen unserer Gleichung nicht finden. Nun sind aber, wie man durch Einsetzen sofort nachprüfen kann, die ganzen Zahlen 2, 3 und -5 die Lösungen dieser Gleichung.

Die für die Lösung einer kubischen Gleichung angegebene Formel führt praktisch nur in solchen Fällen zu einer Lösung der Gleichung, in denen der Ausdruck $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positiv oder Null ist. Im ersten Fall hat die Gleichung eine reelle und zwei komplexe Lösungen, im zweiten sind alle Lösungen reell, zwei davon fallen allerdings zusammen.

Beispiel: Es sei die kubische Gleichung

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0$$

zu lösen. Setzen wir

$$x = y + 3$$

so erhalten wir die reduzierte Gleichung

$$y^3 + 9y - 26 = 0$$

auf die man die Formel anwenden kann. Bei dieser Gleichung ist

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 196 = 14^2$$

und folglich ist

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{13 + 14} = \sqrt[3]{27}$$

Einer der Werte dieses kubischen Radikals ist die Zahl 3. Das Produkt dieses Wertes mit dem ihm entsprechenden Wert des zweiten in der Formel auftretenden kubischen Radikals muss

bekanntlich gleich der Zahl $-\frac{p}{3}$ sein, in unserem Fall also gleich der Zahl -3 . Folglich ist der gesuchte Wert des zweiten Radikale die Zahl -1 , und somit ist

$$v_1 = 3 + (-1) = 2$$

eine Lösung der reduzierten Gleichung.

Hat man nun eine Lösung der kubischen Gleichung erhalten, so lassen sich die beiden anderen Lösungen auf viele verschiedene Weisen finden. Man kann z.B. die zwei anderen Werte des Radikals $\sqrt[3]{27}$ bestimmen, die ihnen entsprechenden Werte des zweiten Radikals berechnen und die einander entsprechenden Werte der Radikale addieren.

Man kann auch anders vorgehen, indem man die linke Seite der reduzierten Gleichung durch $y - 2$ dividiert; es bleibt dann eine quadratische Gleichung zu lösen. Jede dieser Methoden ergibt, dass die Zahlen

$$-1 + i\sqrt{12} \quad \text{und} \quad -1 - i\sqrt{12}$$

die beiden anderen Lösungen unserer reduzierten Gleichung sind. Die Zahlen

$$5, \quad 2 + i\sqrt{12} \quad \text{und} \quad 2 - i\sqrt{12}$$

sind folglich die Lösungen der Ausgangsgleichung.

Selbstverständlich erhält man die Radikale bei weitem nicht immer so leicht wie in dem betrachteten speziell gewählten Beispiel; die Radikale müssen sehr oft durch Näherung bestimmt werden, so dass man nur Näherungslösungen der Gleichung erhält.

5 Die Auflösung von Gleichungen durch Radikale; die Existenz der Lösungen von Gleichungen

Für Gleichungen vierten Grades kann ebenfalls eine Formel aufgestellt werden, mit deren Hilfe man die Lösungen dieser Gleichungen aus den Koeffizienten berechnen kann. Diese Formel ist jedoch noch sehr viel komplizierter als die Formel zur Lösung einer kubischen Gleichung; sie enthält mehrstufige Radikale; ihre praktische Verwendbarkeit ist daher noch viel geringer.

Aus dieser Formel folgt jedoch, dass jede Gleichung vierten Grades mit beliebigen Koeffizienten vier im allgemeinen komplexe Lösungen hat, von denen einige oder auch alle reell sein können.

Die Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades wurden erst im 16. Jahrhundert gefunden. In dieser Zeit begann man auch nach einer Lösungsformel für Gleichungen fünften und höheren Grades zu suchen.

Wir weisen noch darauf hin, dass die allgemeine Form einer Gleichung n -ten Grades die folgende ist:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist. Diese Untersuchungen wurden bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts erfolglos fortgesetzt, dann wurde schließlich von N. H. Abel folgendes bemerkenswerte Ergebnis bewiesen:

Es gibt für die allgemeine Gleichung n -ten Grades, wenn n irgendeine Zahl größer oder gleich fünf ist, keine Formel, die die Lösungen der Gleichung durch die Koeffizienten mit Hilfe von Radikalen ausdrückt.

Man kann sogar zeigen, dass für eine Gleichung n -ten Grades mit ganzen Koeffizienten, wobei n wieder eine beliebige Zahl größer oder gleich fünf ist, die Lösungen nicht durch Radikale, auch nicht durch mehrstufige, ausgedrückt werden können, wenn in den unter den Radikalen stehenden Ausdrücken nur ganze oder gebrochene Zahlen benutzt werden.

Es sei z.B. die Gleichung

$$x^5 - 4x - 2 = 0$$

gegeben. Man kann beweisen, dass diese Gleichung fünf Lösungen, drei reelle und zwei komplexe, hat. Aber es kann nicht eine einzige dieser Lösungen durch Radikale ausgedrückt werden, d.h., diese Gleichung ist "nicht durch Radikale lösbar".

Somit ist der Bereich der reellen oder komplexen Zahlen, welche Lösungen von Gleichungen mit ganzen Koeffizienten sind, viel umfangreicher als der Bereich der Zahlen, die durch Radikale ausgedrückt werden können. (Zahlen, die Lösungen von Gleichungen mit ganzen Koeffizienten sind, nennt man "algebraisch" im Gegensatz zu den "transzendenten" Zahlen, die nicht Lösungen irgendwelcher Gleichungen mit ganzen Koeffizienten sind.)

Die Theorie der algebraischen Zahlen ist ein wichtiger Teil der Algebra; die russischen Mathematiker E. I. Solotarow (1847 bis 1878), G. F. Woronoi (1868-1908) und N. G. Tschebotarow (1894-1947) lieferten hierzu einen wesentlichen Beitrag.

Es war Abel (1802-1829), der die Unmöglichkeit bewies, allgemeine Formeln für die Lösung von Gleichungen n -ten Grades durch Radikale bei $n \geq 5$ zu finden.

Die Existenz von Gleichungen mit ganzen Koeffizienten, die nicht durch Radikale lösbar sind, wurde von Galois (1811-1832) bewiesen. Er fand auch die Bedingungen, unter denen eine Gleichung durch Radikale lösbar ist. Um diese Ergebnisse zu erzielen, war die Schaffung einer neuen tiefliegenden Theorie, der Gruppentheorie, notwendig.

Der Begriff der Gruppe ermöglichte es, die Frage nach der Lösbarkeit durch Radikale erschöpfend zu beantworten; er fand aber später zahlreiche andere Anwendungen in verschiedenen Zweigen der Mathematik und auch auf anderen Gebieten und wurde somit zu einem äußerst wichtigen Gegenstand algebraischer Untersuchungen.

Wir wollen diesen Begriff jetzt nicht definieren, wir weisen nur darauf hin, dass gegenwärtig die sowjetischen Algebraiker in der Gruppentheorie führend sind.

Dass es keine Lösungsformeln für Gleichungen n -ten Grades ($n \geq 5$) gibt, verursacht keine ernsthaften Schwierigkeiten, wenn es sich um die rechnerische Bestimmung der Lösungen von Gleichungen handelt. Es gibt nämlich zahlreiche Näherungsmethoden für die Auflösung von Gleichungen, die schon bei kubischen Gleichungen viel schneller zum Ziel führen als die Anwendung der Lösungsformel (selbst dann, wenn sie theoretisch anwendbar ist) und die anschließende angenäherte Berechnung der reellen Radikale.

Die Existenz von Lösungsformeln für Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades ermöglichte es jedoch, zu beweisen, dass diese Gleichung zwei bzw. drei oder vier Lösungen besitzen. Wie aber verhält es sich mit der Existenz von Lösungen für Gleichungen n -ten Grades bei beliebigem n ?

Würden Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten existieren, die weder eine reelle noch eine komplexe Lösung besitzen, so entstünde die Aufgabe, den Zahlenbereich von neuem zu erweitern. Dies ist jedoch nicht notwendig:

Das System der komplexen Zahlen ist hinreichend für die Auflösung von beliebigen Gleichungen mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Jede Gleichung n -ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten hat n komplexe Lösungen, von denen insbesondere einige oder auch alle reell sein können. Einige Lösungen können zusammenfallen, so dass man mehrfache Lösungen erhält.

Dieser Satz heißt Fundamentalsatz der Algebra. Er wurde nach Beweisansätzen von d'Alembert (1717-1783) zum ersten Male streng von Gauß (1777-1855) in seiner Dissertation (1799) bewiesen. Gauß lieferte später noch drei weitere Beweise. Heute existieren einige Dutzend verschiedener Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.

Der Begriff der Vielfachheit einer Lösung, der in die Formulierung dieses Satzes eingeht, hat folgenden Sinn:

Hat die Gleichung n -ten Grades

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

die n Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, so kann man beweisen, dass die linke Seite der Gleichung sich folgendermaßen in Faktoren zerlegen lässt:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$$

Ist umgekehrt für die linke Seite unserer Gleichung eine solche Zerlegung gegeben, so sind die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Lösungen dieser Gleichung. Von den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ können einige einander gleich sein. Ist z.B.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$$

aber

$$\alpha_1 \neq \alpha_l \quad \text{bei} \quad l = k + 1, k + 2, \dots, n$$

d.h., tritt in der betrachteten Zerlegung der Faktor $x - \alpha_1$ genau k -mal auf, so heißt die Lösung α_1 für $k > 1$ "mehrfach" oder genauer " k -fach".

6 Die Anzahl der reellen Lösungen

Der Fundamentalsatz der Algebra findet in vielen theoretischen Untersuchungen wesentliche Anwendungen. Er gibt aber keine Methode für das praktische Auffinden der Lösungen von Gleichungen.

Bei vielen Problemen der Technik treten jedoch Gleichungen (in der Regel mit reellen Koeffizienten) auf, wobei nähere Angaben über die Lösungen erforderlich sind. Es ist gewöhnlich nicht notwendig, diese Lösungen genau zu kennen, da man die Koeffizienten der Gleichung selbst als Ergebnis von Messungen erhält und sie infolgedessen nur mit einer Genauigkeit bekannt sind, die von der Genauigkeit der Messungen abhängig ist.

Es sei die Gleichung n -ten Grades

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

mit reellen Koeffizienten gegeben. Sie besitzt, wie wir wissen, n Lösungen. Es entstehen natürlich jetzt die folgenden Fragen:

Gibt es unter diesen Lösungen reelle, wieviel, und wo liegen sie ungefähr?

Man kann die Antwort auf diese Fragen folgendermaßen erhalten:

Wir bezeichnen das Polynom, das auf der linken Seite unserer Gleichung steht, mit $f(x)$, es ist also

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Der Leser, dem der Begriff der Funktion geläufig ist, bemerkt, dass wir die linke Seite der Gleichung als Funktion der Variablen x betrachten.

Wählt man für x einen beliebigen Wert α und setzt ihn in den Ausdruck für $f(x)$ ein, so erhält man nach Ausführung aller rationalen Operationen eine Zahl, die der Wert des Polynoms $f(x)$ heißt und mit $f(\alpha)$ bezeichnet wird. Ist

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

und $\alpha = 2$, so ergibt sich

$$f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = -7$$

Wir konstruieren die Kurve (graphische Darstellung) des Polynoms $f(x)$.

Hierzu zeichnen wir auf der Ebene die Koordinatenachsen (s.o.). Wir wählen für x einen Wert α , berechnen den entsprechenden Wert $f(\alpha)$ des Polynoms $f(x)$ und zeichnen dann in der Ebene den Punkt mit der Abszisse α und der Ordinate $f(\alpha)$, d.h. den Punkt $(\alpha, f(\alpha))$.

Könnten wir dies für alle α durchführen, so würden die von uns in der Ebene gezeichneten Punkte eine Kurve ergeben. Die Schnitt- oder Berührungspunkte dieser Kurve mit der Abszissenachse geben uns diejenigen α -Werte an, für welche $f(\alpha) = 0$ ist, d.h. also die reellen Lösungen unserer Gleichung.

Wir können leider nicht für alle Werte α die Punkte $(\alpha, f(\alpha))$ finden, da es unendlich viele gibt, während wir uns auf eine endliche Anzahl solcher Punkte beschränken müssen. Man kann der Einfachheit halber zunächst einige aufeinanderfolgende ganze positive und negative Werte α wählen, die ihnen in der Ebene entsprechenden Punkte zeichnen und sie dann nach Möglichkeit zu einer geschlossenen Kurve verbinden. Es genügt hierbei, wie sich zeigt, nur solche Werte α zu nehmen, die zwischen $-B$ und B liegen, wobei die Schranke B folgendermaßen definiert wird:

Ist $|a_0|$ der absolute Wert des Koeffizienten von x^n (wir erinnern daran, dass $|a| = a$ für $a > 0$ und $|a| = -a$ für $a < 0$ ist), A der größte der absoluten Beträge aller übrigen Koeffizienten an $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, so ist

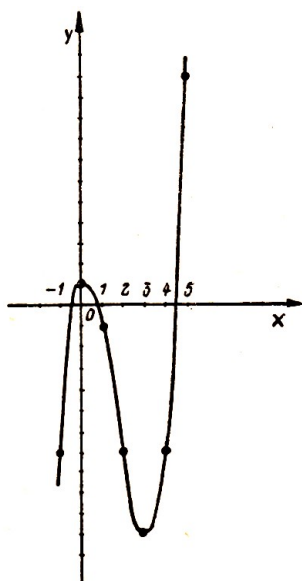
$$B = \frac{A}{|a_0|} + 1$$

Diese Schranken schließen oft ein sehr großes Intervall ein.

Beispiel: Man zeichne die Kurve des Polynoms

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

Hier ist $|a_0| = 1$, $A = 5$ und folglich $B = 6$. In Wirklichkeit kann man sich bei diesem Beispiel auf die Werte α beschränken, die zwischen -1 und 5 liegen. Wir stellen die Wertetabelle



α	$f(\alpha)$
-1	-7
0	1
1	-11
2	-7
3	-11
4	-7
5	11

des Polynoms $f(x)$ auf und konstruieren nun die Kurve (Abb. 3). Die graphische Darstellung zeigt, dass alle drei Lösungen α_1 , α_2 und α_3 unserer Gleichung reell sind und zwischen den Schranken

$$-1 < \alpha_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < 1, \quad 4 < \alpha_3 < 5$$

liegen. Wir weisen darauf hin, dass die Kurve nicht unbedingt konstruiert werden musste: Ihre Schnittpunkte mit der Abszissenachse liegen nämlich zwischen solchen benachbarten Werten α , für die die Zahlen $f(\alpha)$ verschiedene Vorzeichen haben. Es würde also genügen, die Wertetabelle $f(\alpha)$ zu untersuchen.

Würden wir bei unserem Beispiel nicht drei Schnittpunkte der Kurve mit der Abszissenachse finden, sondern weniger als drei, so könnten Zweifel entstehen, ob auf Grund der Unvollkommenheit unserer Konstruktion nicht noch weitere reelle Lösungen der Gleichung existieren; wir zeichneten ja die Kurve aus der Kenntnis von nur sieben ihrer Punkte.

Es gibt jedoch Methoden, mit deren Hilfe man die Anzahl der reellen Lösungen einer Gleichung genau feststellen kann; man kann sogar die Anzahl derjenigen Lösungen angeben, die zwischen beliebig vorgegebenen reellen Zahlen a und b ($a < b$) liegen. Wir wollen diese Methoden hier jedoch nicht erörtern.

Zuweilen finden die folgenden Sätze Anwendung, die die Aussagen über die Existenz von reellen oder sogar positiven Lösungen zusammenfassen :

Jede Gleichung ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat stets eine reelle Lösung.

Haben in einer Gleichung mit reellen Koeffizienten der höchste Koeffizient a_0 und das absolute Glied an verschiedene Vorzeichen, so hat die Gleichung stets eine positive Lösung. Ist überdies der Grad unserer Gleichung gerade, so besitzt sie auch mindestens eine negative Lösung.

So hat die Gleichung

$$x^7 - 8x^3 + x - 2 = 0$$

stets eine positive Lösung; die Gleichung

$$x^6 + 2x^5 - x^2 + 7x - 1 = 0$$

besitzt sowohl eine positive als auch eine negative Lösung. Man kann dies alles an der graphischen Darstellung bestätigen.

7 Die angenäherte Lösung von Gleichungen

Im vorigen Paragraphen fanden wir solche benachbarten ganzen Zahlen, zwischen denen reelle Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

liegen. Dieselbe Methode ermöglicht es, die Lösungen dieser Gleichung genauer festzustellen. Uns interessierte z.B. die Lösung α_2 , die zwischen Null und Eins liegt.

Berechnen wir die Werte der linken Seite unserer Gleichung $f(x)$ für $x = 0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9$, so finden wir, dass zwischen zwei dieser sukzessiven Werte für x dieser Kurve des Polynoms $f(x)$ die Abszissenachse schneidet, das heißt, wir können die Lösung α_2 bereits mit einer Genauigkeit von einem Zehntel berechnen.

Setzen wir dieses Verfahren fort, so können wir den Wert der Lösung mit einer Genauigkeit

von einem Hundertstel, von einem Tausendstel angeben. Grundsätzlich können wir so den Wert der Lösung mit jeder gewünschten Genauigkeit feststellen. Dieser Weg ist jedoch mit umfangreichen Rechnungen verbunden, die praktisch sehr bald undurchführbar sind. Deshalb sind verschiedene Methoden ausgearbeitet worden, mit deren Hilfe man Näherungswerte der reellen Lösungen von Gleichungen schneller berechnen kann.

Wir bringen hier die einfachste dieser Methoden und wenden sie sofort bei der Berechnung der Lösung α_2 der oben betrachteten kubischen Gleichung an. Hierbei ist es zunächst zweckmäßig, engere Schranken als die Schranken $0 < \alpha_2 < 1$ für diese Lösung zu finden, die wir schon kennen.

Wir berechnen zu diesem Zweck unsere Lösung mit einer Genauigkeit von einem Zehntel. Bestimmt der Leser den Wert des Polynoms

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

für $x = 0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9$, so findet er

$$f(0, 7) = 0, 293, \quad f(0, 8) = -0, 088$$

und da die Vorzeichen dieser Werte $f(x)$ verschieden sind, $0, 7 < \alpha_2 < 0, 8$.

Die Methode besteht nun in Folgendem:

Es sei eine Gleichung n -ten Grades gegeben, deren linke Seite wir mit $f(x)$ bezeichnen, und es sei bereits bekannt, dass zwischen a und b , wobei $a < b$, eine reelle Lösung α dieser Gleichung liegt, die nicht mehrfach ist.

Ist das Intervall $a < \alpha < b$ schon genügend klein, so kann man nach bestimmten Regeln neue Schranken c und d für die Lösung α finden, die viel näher beieinander liegen, d.h. die Lage dieser Lösung bedeutend genauer bestimmen. Es ist hierbei entweder

$$c < \alpha < d \quad \text{oder} \quad d < \alpha < c$$

Die Schranke c wird mit Hilfe der Formel

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

berechnet.

In unserem Beispiel ist $a = 0, 7$, $b = 0, 8$, und die Werte $f(a)$ und $f(b)$ sind oben angegeben. Daher ist

$$c = \frac{0, 8 \cdot 0, 293 - 0, 7 \cdot (-0, 088)}{0, 293 - (-0, 088)} = \frac{0, 2344 + 0, 0616}{0, 381} = 0, 7769\dots$$

Die Formel zur Bestimmung der Schranke d erfordert die Einführung eines neuen Begriffs, der für uns hier nur eine Hilfsrolle spielen soll; seinem Wesen nach gehört er zu einem anderen Teil der Mathematik, nämlich zur Differentialrechnung.

Es sei das Polynom n -ten Grades.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

gegeben. Unter der "Ableitung" dieses Polynoms, die wir mit $f'(x)$ bezeichnen, verstehen wir das folgende Polynom $(n - 1)$ -ten Grades:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n - 1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

Man erhält die Ableitung des Polynoms $f(x)$ nach folgender Regel:

Jedes Glied $a_k x^{n-k}$ des Polynoms $f(x)$ wird mit dem Exponenten $n - k$ von x multipliziert, und dieser Exponent selbst wird um Eins vermindert; dabei fällt das absolute Glied an weg, da man $a_n = a_n x^0$ setzen kann.

Man kann auch von dem Polynom $f'(x)$ die Ableitung bilden. Diese ist ein Polynom $(n-2)$ -ten Grades, man nennt es die "zweite Ableitung" des Polynoms $f(x)$ und bezeichnet sie mit $f''(x)$. Für unser Polynom

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

ist somit

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2 \quad , \quad f''(x) = 6x - 10$$

Man bestimmt die Schranke d jetzt nach einer der folgenden Formeln

$$d = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad , \quad d = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Die folgende Regel gibt an, welche von diesen beiden Formeln zu nehmen ist:

Sind die Schranken a, b derart, dass sie ein hinreichend enges Intervall einschließen, so hat die zweite Ableitung $f''(x)$ gewöhnlich bei $x = a$ und bei $x = b$ ein und dasselbe Vorzeichen, während die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ bekanntlich verschieden sind.

Haben $f''(a)$ und $f(a)$ gleiches Vorzeichen, so muss man die erste Formel zur Berechnung der Schranke d nehmen, d.h. die Formel, in der die Schranke a benutzt wird.

Haben die Größen $f''(b)$ und $f(b)$ gleiches Vorzeichen, so muss die zweite Formel genommen werden, die sich auf die Schranke b bezieht.

In unserem Beispiel ist die zweite Ableitung $f''(x)$ sowohl für $a = 0,7$ als auch für $b = 0,8$ negativ. Daher muss, da $f(a)$ positiv und $f(b)$ negativ ist, die zweite Formel zur Bestimmung der Schranke d genommen werden. Wegen

$$f'(0,8) = -4,08$$

gelten die Beziehungen .

$$d = 0,8 - \frac{-0,088}{-4,08} = 0,8 - 0,215\dots = 0,7784\dots$$

Wir fanden somit für die Lösung α_2 die folgenden Schranken, die ein kleineres Intervall als die uns bisher bekannten Schranken a und b einschließen. Es ist jetzt

$$0,7769\dots < \alpha_2 < 0,7784\dots$$

oder, wenn wir diese Schranken ein wenig erweitern,

$$0,7769 < \alpha_2 < 0,7785$$

Nehmen wir für α_2 den Mittelwert, d.h. die halbe Summe der gefundenen Schranken, $\alpha_2 = 0,7777$, so begehen wir einen Fehler, der die Zahl 0,0008, d.h. die halbe Differenz dieser Schranken, nicht übersteigt.¹

Ist die so erhaltene Genauigkeit nicht groß genug, so könnte man auf die gefundenen neuen

¹Eine genauere Näherungslösung ist 0,77812

Schranken c und d der Lösung α_2 die angegebene Methode noch einmal anwenden. Dies würde jedoch viel zu komplizierte Berechnungen erfordern.

Es existieren auch andere Methoden zur angenäherten Lösung von Gleichungen, die eine bessere Genauigkeit ergeben. Die vollkommenste unter ihnen, mit deren Hilfe man nicht nur die reellen, sondern auch die komplexen Lösungen einer Gleichung angenähert zu berechnen vermag, ist die von dem großen russischen Mathematiker N.I. Lobatschewski (1798-1856), einem der Begründer der nichteuklidischen Geometrie, entwickelte Methode.

8 Körper

Man kann die Frage nach der Existenz von Lösungen algebraischer Gleichungen, mit der wir uns bereits im § 5 beschäftigten, auch von allgemeineren Gesichtspunkten aus betrachten. Zu diesem Zweck muss man einen neuen Begriff einführen, der zu den wichtigsten Begriffen der Algebra gehört.

Wir betrachten zunächst die folgenden drei Zahlensysteme:

Den Bereich aller rationalen Zahlen, den Bereich aller reellen Zahlen und das System aller komplexen Zahlen. In jedem dieser Zahlensysteme kann man die Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division (außer der Division durch Null) unbeschränkt ausführen. Hierdurch unterscheiden sie sich von dem System aller ganzen Zahlen, in dem die Division nicht immer ausführbar ist - es ist z.B. unmöglich, die Zahl 5 ohne Rest durch die Zahl 2 zu teilen -, und von dem System aller positiven reellen Zahlen, in dem die Subtraktion nicht immer durchführbar ist.

Dem Leser sind bereits solche Fälle bekannt, in denen algebraische Operationen nicht an Zahlen ausgeführt werden: Wir erinnern an die Addition und Multiplikation von Polynomen und an die in der Physik vorkommende Addition von Kräften.

Außerdem mussten wir gerade bei der Einführung der komplexen Zahlen die Addition und Multiplikation von Punkten der Ebene betrachten.

Es sei nun eine beliebige Menge (oder Gesamtheit) P gegeben, die entweder aus Zahlen oder aus Objekten geometrischer Natur oder ganz allgemein aus Dingen besteht, die wir "Elemente" der Menge P nennen.

Man sagt, in P seien eine Addition und eine Multiplikation definiert, wenn zu jedem Paar von Elementen a, b aus P ein eindeutig bestimmtes Element c aus P existiert, das ihre Summe

$$c = a + b$$

und ein eindeutig bestimmtes Element d , das ihr Produkt

$$d = ab$$

genannt wird.

Die Menge P mit den in ihr definierten Verknüpfungen der Addition und Multiplikation heißt ein "Körper", wenn diese Verknüpfungen die folgenden Eigenschaften I - V besitzen.

I. Beide Verknüpfungen sind kommutativ, d.h., für beliebige a und b ist

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

II. Beide Verknüpfungen sind assoziativ, d.h., für beliebige a, b und c ist

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

III. Es gilt das Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition, d.h., für beliebige a, b, c ist

$$a(b + c) = ab + ac$$

IV. Die Subtraktion ist unbeschränkt ausführbar, d.h., für beliebige a und b kann man in P genau eine Lösung der Gleichung

$$a + x = b$$

finden.

V. Die Division ist unbeschränkt ausführbar, d.h., für von Null verschiedenes a und beliebiges b kann man in P genau eine Lösung der Gleichung

$$ax = b$$

finden.

In der Bedingung V wird die Null erwähnt. Ihre Existenz kann man aus den Bedingungen I - IV herleiten. Ist nämlich a ein beliebiges Element aus P , so existiert wegen IV in P ein eindeutig bestimmtes Element, das der Gleichung

$$a + x = a$$

genügt (für b haben wird das Element a selbst genommen). Dieses Element könnte von der Wahl des Elementes a abhängen, wir bezeichnen es daher mit 0_a , es ist dann

$$a + 0_a = a \tag{1}$$

Ist b ein beliebiges anderes Element aus P , so existiert ein eindeutig bestimmtes Element 0_b , für das

$$b + 0_b = b \tag{2}$$

ist. Können wir beweisen, dass $0_a = 0_b$ für alle a und b ist, so ist in der Menge P die Existenz eines Elementes, das die Rolle der Null für alle Elemente a spielt, bewiesen.

Es sei c eine Lösung der Gleichung

$$a + x = b$$

die wegen Bedingung IV existiert, es ist also

$$a + c = b$$

Addieren wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) das Element c , wobei die Gleichheit wegen der Eindeutigkeit der Summe nicht verletzt wird, so gilt die Beziehung

$$(a + 0_a) + c = a + c$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich b , und die linke Seite ist wegen der Bedingungen I und II gleich $b + 0_a$. Somit ist

$$b + 0_a = b$$

Führen wir dieselben Betrachtungen für die Gleichung (2) durch und berücksichtigen wir, dass wegen IV eine und nur eine Lösung der Gleichung $b + x = b$ existiert, so erhalten wir schließlich die Identität

$$0_a = 0_b$$

Hiermit ist bewiesen, dass in jedem Körper P (genau) eine Null existiert, d. h. ein Element 0 derart, dass für alle a aus P die Gleichung

$$a + 0 = a$$

erfüllt ist; daher ist die Formulierung der Bedingung V sinnvoll.

Wir kennen bereits drei Beispiele von Körpern, und zwar den Körper der rationalen Zahlen, den Körper der reellen Zahlen und den Körper der komplexen Zahlen, während die Menge aller ganzen Zahlen oder die Menge aller positiven reellen Zahlen keine Körper sind.

Außer den drei genannten Körpern existieren noch unendlich viele verschiedene andere Körper. Insbesondere sind viele verschiedene Körper im Körper der reellen Zahlen oder im Körper der komplexen Zahlen enthalten; es sind dies die sogenannten Zahlkörper.

Andererseits existieren Körper, die den Körper der komplexen Zahlen umfassen. Die Elemente dieser Körper werden bereits nicht mehr Zahlen genannt; aber auch solche Körper werden bei verschiedenen mathematischen Untersuchungen benutzt. Wir geben ein Beispiel eines solchen Körpers.

Wir betrachten die Gesamtheit aller Polynome

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$$

beliebigen Grades und mit beliebigen komplexen Koeffizienten.

Insbesondere sind die Polynome nullten Grades einfach die komplexen Zahlen selbst. Addieren, subtrahieren und multiplizieren wir Polynome mit komplexen Koeffizienten nach denselben, uns bekannten Regeln, die auch für Polynome mit reellen Koeffizienten gelten, so erhält man noch keinen Körper, da die Division eines Polynoms durch ein Polynom nicht immer ohne Rest ausführbar ist.

Wir betrachten jetzt die Quotienten der Polynome

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

oder wie man auch sagt, die rationalen Funktionen mit komplexen Koeffizienten. Wir wollen mit ihnen so umgehen, wie es bei gewöhnlichen Brüchen üblich ist. Es soll nämlich

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\phi(x)}{\psi(x)}$$

sein genau dann, wenn

$$f(x)\psi(x) = g(x)\phi(x)$$

ist. Ferner sollen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} \pm \frac{u(x)}{v(x)} &= \frac{f(x)v(x) \pm g(x)u(x)}{g(x)v(x)} \\ \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} &= \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \end{aligned}$$

gelten. Die Brüche, deren Zähler gleich Null ist, d.h. die Brüche der Form

$$\frac{0}{g(x)}$$

spielen die Rolle der Null. Es sind offenbar alle Brüche dieser Form gleich Null. Ist der Bruch $\frac{u(x)}{v(x)}$ ungleich Null, d.h., ist $u(x) \neq 0$, so soll schließlich

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x)}{g(x)u(x)}$$

gelten.

Man kann leicht nachprüfen, dass die angegebenen Operationen für die rationalen Funktionen allen Bedingungen genügen, die in der Definition eines Körpers enthalten sind. Man kann deshalb vom Körper der rationalen Funktionen mit komplexen Koeffizienten sprechen.

Der Körper der komplexen Zahlen ist vollständig in diesem Körper enthalten, da eine rationale Funktion, deren Zähler und Nenner Polynome nullten Grades sind, einfach eine komplexe Zahl ist, und da umgekehrt jede komplexe Zahl in dieser Form dargestellt werden kann.

Man darf jedoch nicht annehmen, dass entweder jeder Körper im Körper der komplexen Zahlen enthalten ist oder den Körper der komplexen Zahlen umfasst. Es existieren auch andere Körper, insbesondere solche, die nur aus endlich vielen Elementen bestehen.

Überall, wo Körper benutzt werden, wird man auf Gleichungen mit Koeffizienten aus diesen Körpern geführt. Daher entsteht die Frage nach der Existenz von Lösungen solcher Gleichungen.

Man stößt z.B. bei einigen Problemen der Geometrie auf Gleichungen mit Koeffizienten aus dem Körper der rationalen Funktionen; die Lösungen dieser Gleichungen heißen "algebraische Funktionen".

Der Fundamentalsatz der Algebra, der sich auf Gleichungen mit Zahlenkoeffizienten bezieht, kann im Fall einer Gleichung mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper schon nicht mehr benutzt werden. Er lässt sich durch die folgenden allgemeinen Sätze ersetzen.

Es sei P ein beliebiger Körper und

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0 = 0$$

eine Gleichung n -ten Grades mit Koeffizienten aus diesem Körper.

Es zeigt sich, dass diese Gleichung weder im Körper P selbst, noch in einem beliebigen umfassenderen Körper mehr als n Lösungen haben kann. Außerdem kann man den Körper P zu einem Körper Q erweitern, in dem unsere Gleichung bereits n Lösungen besitzt. (Es können hierbei auch mehrfache Lösungen auftreten.)

Es gilt sogar der folgende Satz:

Man kann jeden Körper P zu einem Körper \overline{P} erweitern, so dass jede Gleichung mit Koeffizienten aus P und sogar jede Gleichung mit Koeffizienten aus \overline{P} in \overline{P} Lösungen besitzt; dabei ist die Anzahl der Lösungen gleich dem Grad der Gleichung.

Ein Körper P der in der Formulierung dieses Satzes erwähnten Art heißt "algebraisch abgeschlossen". Der Fundamentalsatz der Algebra zeigt, dass der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist.

9 Schlussbemerkungen

Wir betrachteten bisher Gleichungen beliebigen Grades mit einer Unbekannten. Der Anfang dieser Theorie gehörte noch in das Gebiet der elementaren Algebra, in der man nach der Behandlung der Gleichungen ersten Grades zu den quadratischen Gleichungen übergeht.

In der elementaren Algebra wird jedoch auch in einer anderen Richtung ein Schritt getan: auf die Untersuchung einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten folgt die Betrachtung eines Systems zweier Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten und eines Systems von drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

In dieser Richtung wird die Theorie an der Universität in der Vorlesung über höhere Algebra weiter entwickelt. Hier lernt man Lösungsmethoden für Systeme von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten kennen; aber auch Lösungsmethoden für Systeme von Gleichungen ersten Grades, bei denen die Anzahl der Gleichungen nicht gleich der Anzahl der Unbekannten ist.

Die Theorie der Systeme von Gleichungen ersten Grades und die damit zusammenhängenden Theorien, insbesondere die sogenannte Matrizentheorie, bilden einen besonderen Zweig der Algebra, die lineare Algebra. Wegen ihrer Anwendungen in der Geometrie und anderen Gebieten der Mathematik, in der Physik und theoretischen Mechanik ist sie der wichtigste Zweig der Algebra.

Übrigens sind jetzt sowohl die Theorie der algebraischen Gleichungen als auch die lineare Algebra im großen und ganzen abgeschlossene Gebiete der Wissenschaft. Die Bedürfnisse benachbarter Gebiete der Mathematik und Physik führten dazu, dass in der Algebra die Untersuchung derjenigen Mengen an erster Stelle steht, in denen algebraische Operationen definiert sind.

Neben der Körpertheorie, wozu auch die Theorie der algebraischen Zahlen und die Theorie der algebraischen Funktionen gehört, wurde in letzter Zeit die Theorie der Ringe ausgearbeitet. Eine Menge, in welcher den Bedingungen I-IV der Definition eines Körpers genügende Operationen der Addition und Multiplikation erklärt sind, nennt man einen Ring; so bildet z.B. die Menge aller ganzen Zahlen einen Ring.

Wir erwähnten im § 5 noch ein anderes sehr wichtiges Gebiet der Algebra, die Gruppentheorie. Eine "Gruppe" ist eine Menge mit einer einzigen algebraischen Verknüpfung, der Multiplikation, die assoziativ sein muss; ferner muss die Division unbeschränkt ausführbar sein.

Es ist interessant zu bemerken, dass man in verschiedenen Anwendungen sehr oft auf nicht-kommutative algebraische Operationen stößt; das Produkt ändert sich bei Vertauschung der Faktoren. Es gibt aber auch nichtassoziative Operationen: das Produkt dreier Faktoren ist abhängig von der Verteilung der Klammern.

Insbesondere sind solche Gruppen nicht kommutativ, die bei der Behandlung des Problems der Auflösung von Gleichungen durch Radikale benutzt werden.

10 Literaturangaben

Eine systematische Darlegung der Grundlagen der Theorie der algebraischen Gleichungen und der Grundlagen der linearen Algebra findet man in Lehrbüchern der höheren Algebra. An Universitäten und pädagogischen Instituten der Sowjetunion werden im Augenblick hauptsächlich die folgenden Lehrbücher benutzt:

Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie. Moskau 1938. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 5. Auflage, Berlin 1965

Enzyklopädie der Elementarmathematik. I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 3. Auflage, Berlin 1966. (Übers. aus d. Russischen).

R. Kochendörffer. Einführung in die Algebra. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Auflage. Berlin 1966.

H. Lugowski und H. J. Weinert, Grundzüge der Algebra I-III. B. G. Teubner, Leipzig 1964 (2. Auflage), 1958 bzw. 1960.

I. R. Schafarewitsch. Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 22. Auflage, Berlin 1965.

W. I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik. III (lineare Algebra). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 4. Auflage, Berlin 1964.

B. L. van der Waerden, Algebra I. Springer-Verlag, 6. Auflage, Berlin 1964.