

---

**Horst Belkner**

**Matrizen**

BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1973  
MSB: Nr. 48  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

---

## Vorwort

Das vorliegende Bändchen der MSB, das die Kenntnis des in der gleichen Reihe erschienenen Büchleins "Determinanten" voraussetzt, gibt eine Einführung in die Matrizentheorie. Matrizen spielen in den verschiedensten mathematischen Disziplinen, in der Physik, in der Technik und in der Ökonomie eine wichtige Rolle.

Im ersten und dritten Abschnitt werden grundlegende Begriffe der Matrizentheorie eingeführt. Aus der Theorie der reellen Vektorräume werden im zweiten Abschnitt einige Begriffe, die zum Verständnis des Folgenden erforderlich sind, bereitgestellt. Der vierte Abschnitt gibt auf der Grundlage der ersten drei Abschnitte eine Einführung in die Theorie der linearen Gleichungssysteme von  $m$  Gleichungen mit  $n$  Variablen.

Definitionen, Sätze, ausführlich durchgerechnete Beispiele und in den Text eingestreute Aufgaben sind jeweils fortlaufend nummeriert. Die Aufgaben dienen nicht nur der Festigung des vorher behandelten Stoffes, sondern sie ergänzen ihn auch. Das Lösen dieser Aufgaben ist daher vor dem jeweiligen Weiterlesen unbedingt erforderlich.

Die Lösungen sind am Ende des Büchleins zusammengestellt.

Horst Belkner

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Matrizen (1. Teil)</b>	<b>4</b>
1.1 Grundbegriffe . . . . .	4
1.2 Addition von Matrizen . . . . .	6
1.3 Subtraktion von Matrizen . . . . .	7
1.4 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl . . . . .	9
1.5 Transponierte einer Matrix . . . . .	10
<b>2 Reelle Vektorräume</b>	<b>11</b>
2.1 Begriff des reellen Vektorraumes . . . . .	11
2.2 Linearkombination . . . . .	12
2.3 Lineare Abhängigkeit . . . . .	13
<b>3 Matrizen (2. Teil)</b>	<b>16</b>
3.1 Multiplikation von Matrizen . . . . .	16
3.2 Matrizen Schreibweise für lineare Gleichungssysteme . . . . .	21
3.3 Inverse einer regulären Matrix . . . . .	24
3.4 Rang einer Matrix . . . . .	29
<b>4 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>34</b>
4.1 Transformation auf Normalform . . . . .	34
4.2 Homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	38
4.3 Inhomogene lineare Gleichungssysteme . . . . .	46
<b>5 Lösungen der Aufgaben</b>	<b>59</b>
<b>6 Literaturverzeichnis</b>	<b>66</b>

# 1 Matrizen (1. Teil)

## 1.1 Grundbegriffe

Unter einem linearen Gleichungssystem von  $m$  Gleichungen mit  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  versteht man ein System der Form

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die reellen Zahlen  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$ ) heißen die Koeffizienten und die reellen Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_m$  die Absolutglieder des Gleichungssystems.

Sind alle Absolutglieder von (1) gleich null, so heißt das System homogen, ist wenigstens ein Absolutglied von null verschieden, so heißt das System inhomogen.

Ein  $n$ -Tupel von reellen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  heißt eine Lösung von (1), wenn dieses  $n$ -Tupel allen  $m$  Gleichungen von (1) genügt.

So besitzt beispielsweise das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wegen

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

auf Grund der Cramerschen Regel (siehe Belkner, Determinanten, Satz 1) die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

Das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 9x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

besitzt dagegen mehrere Lösungen. So sind etwa die drei Zahlenpaare

$$x_1 = 2, x_2 = -1; \quad x_1 = -1, x_2 = 1; \quad x_1 = -4, x_2 = 3 \quad (5)$$

Lösungen des Gleichungssystems, denn jedes dieser drei Zahlenpaare genügt allen drei Gleichungen von (4). Wie man diese Lösungen erhält, werden wir im Abschnitt 4.3., Beispiel 21, zeigen.

Untersuchen wir, ob das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

lösbar ist. Da das eindeutig lösbare Gleichungssystem (2) ein Teilsystem von (6) ist, ist die Lösung von (6), falls überhaupt eine existiert, das Zahlenpaar (3). Dieses Zahlenpaar genügt

aber nicht der dritten Gleichung von (6). Also ist das Gleichungssystem (6) nicht lösbar.

Wie wir an diesen drei Beispielen erkennen, gibt es lineare Gleichungssysteme, die nicht lösbar bzw. die lösbar sind.

Bei den lösbaren Systemen unterscheidet man noch lineare Gleichungssysteme mit eindeutig bestimmter Lösung und Systeme mit mehreren Lösungen. Ein Ziel des Buchleins wird die Beantwortung der Frage sein, wie man entscheiden kann, ob ein System der Form (1) lösbar ist und wie man im Fall der Lösbarkeit alle Lösungen erhält.

Auf diese Frage kommen wir im Abschnitt 4. zurück.

Die Koeffizienten des Gleichungssystems (1) fassen wir zu dem rechteckigen Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

zusammen, das man als Matrix oder im Hinblick auf das Gleichungssystem (1) als Koeffizientenmatrix bezeichnet.

Eine Matrix besitzt keinen Zahlenwert, sie ist lediglich ein geordnetes Schema von reellen Zahlen.

Wir bezeichnen Matrizen mit großen deutschen Buchstaben und schreiben

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Die Horizontal- bzw. die Vertikalreihen einer Matrix heißen Zeilen bzw. Spalten der Matrix. Zeilen und Spalten einer Matrix werden unter der gemeinsamen Bezeichnung Reihen zusammengefasst.

Stimmt in einer Matrix die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten überein, ist also  $m = n$ , so heißt  $\mathfrak{A}$  eine  $n$ -reihige Matrix oder quadratische Matrix.

Die reellen Zahlen  $a_{ik}$  in (7) heißen die Elemente der Matrix. Der erste bzw. der zweite Index der mit Doppelindizes versehenen Elemente einer Matrix gibt die Zeile bzw. die Spalte an, in der das Element in der Matrix steht.

Die Diagonale der Matrix, in der die Elemente  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$  stehen, heißt die Hauptdiagonale der Matrix. Sie ist nur im Fall  $m = n$  eine echte Diagonale der Matrix. Hat eine Matrix  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, so heißt das Zahlenpaar  $(m, n)$  der Typ der Matrix, und man schreibt  $\tau(\mathfrak{A}) = (m, n)$ . Für (8) ist auch die Schreibweise

$$\mathfrak{A} = (a_{ik})$$

gebräuchlich. Diese Kurzschreibweise setzt aber voraus, dass der Typ von  $\mathfrak{A}$  bekannt ist.

Da eine Matrix ein geordnetes rechteckiges Schema von reellen Zahlen ist, liegt folgende Definition nahe.

**Definition 1.** Zwei Matrizen  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ik})$  sind gleich genau dann, wenn sie den gleichen Typ haben und die entsprechenden Elemente beider Matrizen übereinstimmen.

So sind beispielsweise die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

die beide vom Typ (2, 3) sind, nicht gleich, da beispielsweise  $a_{22} \neq b_{22}$  ist.  
In den folgenden Abschnitten werden wir definieren, wie man mit Matrizen rechnet.

## 1.2 Addition von Matrizen

Definition 2. Sind  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ik})$  zwei Matrizen vom Typ  $(m, n)$ , so versteht man unter  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  die Matrix

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

in der Kurzschreibweise lautet diese Definition

$$(a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$$

Beim Beweis der folgenden Sätze machen wir von dieser Kurzschreibweise Gebrauch.

Beispiel 1. Es seien

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Satz 1. Für die Matrizenaddition gilt das Kommutativgesetz

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

Beweis. Wegen der Kommutativität der Addition reeller Zahlen können wir in der Matrix  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (a_{ik} + b_{ik})$  die Elemente  $a_{ik} + b_{ik}$  durch  $b_{ik} + a_{ik}$  ersetzen. Wir erhalten

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (b_{ik} + a_{ik}) = (b_{ik}) + (a_{ik}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

Satz 2. Für die Matrizenaddition gilt das Assoziativgesetz

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$$

Beweis. Wegen der Assoziativität der Addition reeller Zahlen können wir in der Matrix

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (a_{ik} + [b_{ik} + c_{ik}])$$

die Elemente  $a_{ik} + [b_{ik} + c_{ik}]$  durch  $[a_{ik} + b_{ik}] + c_{ik}$  ersetzen.  
Wir erhalten , .

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = ([a_{ik} + b_{ik}] + c_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) + c_{ik} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Der Satz 2 besagt, dass die beiden Matrizen  $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$  und  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$  gleich sind. Es kommt also nicht darauf an, auf welche der beiden möglichen Arten man die drei Summanden  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  durch Klammern zusammenfasst, so dass man diese auch weglassen kann.

Dasselbe gilt analog auch für eine beliebige endliche Anzahl von Matrizen gleichen Typs  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ . Auf den einfachen Beweis durch vollständige Induktion wollen wir verzichten.

Beispiel 2. Es seien

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 &= [(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) + \mathfrak{A}_3] + \mathfrak{A}_4 = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 1.3 Subtraktion von Matrizen

Wir untersuchen, ob die Addition von Matrizen eine umkehrbare Operation ist, d.h., ob die Gleichung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{B}$$

bei vorgegebenen Matrizen gleichen Typs  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  immer eine Lösung besitzt. Diese Frage beantwortet der

Satz 3. Zu zwei beliebig vorgegebenen Matrizen gleichen Typs  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ik})$  existiert genau eine Matrix  $\mathfrak{X}$ , die der Gleichung (1) genügt.

Beweis. Es seien  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  und  $\mathfrak{B} = (b_{ik})$  zwei Matrizen vom Typ  $(m, n)$ . Wir zeigen zunächst, dass die Matrix

$$\mathfrak{X} = (b_{ik} - a_{ik}) \tag{2}$$

mit  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  eine Lösung von (1) ist. Es gilt

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = (a_{ik}) + (b_{ik} - a_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik} - a_{ik}) = (b_{ik}) = \mathfrak{B}$$

Damit ist die Existenz einer Lösung von (1) nachgewiesen.

Wir müssen noch zeigen, dass es neben der Lösung  $\mathfrak{X} = (x_{ik})$  keine weitere Lösung gibt. Dazu nehmen wir an, es sei auch  $\mathfrak{Y} = (y_{ik})$  eine Lösung von (1).

Dann gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{Y} = \mathfrak{B}$$

woraus  $\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{A} + \mathfrak{Y}$  folgt. Die letzte Gleichung besagt auf Grund von Definition 1, dass für alle  $i, k$  gilt  $a_{ik} + x_{ik} = a_{ik} + y_{ik}$ . Hieraus folgt  $x_{ik} = y_{ik}$  für alle  $i, k$ . Das ist aber gleichbedeutend mit  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ , d.h., es gibt nur eine Lösung der Gleichung (1), womit der Satz bewiesen ist.

Das Ergebnis von Satz 3 führt zur

Definition 3. Die nach Satz 3 existierende und eindeutig bestimmte Lösung (2) der Gleichung (1) bezeichnen wir mit  $\mathfrak{X} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ . Sie heißt die Differenz der Matrizen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A}$ .

Auf Grund von Definition 3 gilt somit

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} & \dots & b_{1n} - a_{1n} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} & \dots & b_{2n} - a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} - a_{m1} & b_{m2} - a_{m2} & \dots & b_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Aus dem Satz 3 wollen wir in Verbindung mit (3) einige Folgerungen ziehen.

Folgerung 1. Für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$  vom Typ  $(m, n)$  hat die Gleichung  $\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{A}$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

als eindeutig bestimmte Lösung. Diese Matrix bezeichnen wir abkürzend mit  $\mathfrak{O}$ . Sie heißt die Nullmatrix vom Typ  $(m, n)$ .

Für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$  gilt demnach

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{O} = \mathfrak{A} \quad (3)$$

mit

$$\mathfrak{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung 2. Die Matrixgleichung  $\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{O}$  besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathfrak{O} - \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\mathfrak{O} - \mathfrak{A}$  bezeichnen wir abkürzend mit  $-\mathfrak{A}$ . Sie heißt die zu  $\mathfrak{A}$  entgegengesetzte Matrix.

Für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$  gilt demnach

$$\mathfrak{A} + (-\mathfrak{A}) = \mathfrak{O} \quad (5)$$

wobei

$$-\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ist.

Folgerung 3. Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Matrizen gleichen Typs, so gilt wegen (3) und (6)

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{B} + (-\mathfrak{A}) \quad (7)$$

## 1.4 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl

Definition 4. Ist  $\mathfrak{A}$  eine Matrix vom Typ  $(m, n)$  und  $\lambda$  eine reelle Zahl, so versteht man unter  $\lambda\mathfrak{A}$  die Matrix vom Typ  $(m, n)$ , die man erhält, wenn man jedes Element von  $\mathfrak{A}$  mit  $\lambda$  multipliziert.

In der Kurzschreibweise lautet diese Definition  $\lambda(a_{ik}) = (\lambda a_{ik})$ .

Wählen wir aus Beispiel 1, die Matrix  $\mathfrak{A}$ , so gilt

$$2\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Wegen  $1a_{ik} = a_{ik}$  gilt für alle Matrizen

$$1\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \tag{1}$$

Ferner gilt wegen  $(-1)a_{ik} = -a_{ik}$  für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$

$$(-1)\mathfrak{A} = -\mathfrak{A} \tag{2}$$

Auf Grund von (2) lässt sich 1.3.(7) auch in der Form

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{B} + (-1)\mathfrak{A} \tag{3}$$

schreiben.

Beispiel 3. Wir berechnen mit Hilfe von (3) die Differenz der Matrizen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A}$  von Beispiel 1. Es ist

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$0\mathfrak{A} = \mathfrak{O} \tag{4}$$

für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$ , und für alle reellen Zahlen  $\lambda$  gilt

$$\lambda\mathfrak{O} = \mathfrak{O} \tag{5}$$

Satz 4. Für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$  und für alle reellen Zahlen  $\lambda, \mu$  gilt

$$(\lambda\mu)\mathfrak{A} = \lambda(\mu\mathfrak{A})$$

Beweis. Wegen der Assoziativität der Multiplikation reeller Zahlen gilt unter Berücksichtigung von Definition 4 und der Kurzschreibweise

$$(\lambda\mu)\mathfrak{A} = ([\lambda\mu]a_{ik}) = (\lambda[\mu a_{ik}]) = \lambda(\mu a_{ik}) = \lambda(\mu\mathfrak{A})$$

Satz 5. Für alle Matrizen  $\mathfrak{A}$  und für alle reellen Zahlen  $\lambda, \mu$  gilt

$$(\lambda + \mu)\mathfrak{A} = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{A} \tag{6}$$

Beweis. Berücksichtigen wir die Kurzschreibweise, so folgt

$$(\lambda + \mu)\mathfrak{A} = ([\lambda + \mu]a_{ik}) = (\lambda a_{ik} + \mu a_{ik}) = (\lambda a_{ik}) + (\mu a_{ik}) = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{A}$$

Satz 6. Für alle Matrizen gleichen Typs  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und für alle reellen Zahlen  $\lambda$  gilt

$$\lambda(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \lambda\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B} \tag{7}$$

Beweis. Es ist

$$\lambda(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \lambda(a_{ik} + b_{ik}) = (\lambda[a_{ik} + b_{ik}]) = (\lambda a_{ik} + \lambda b_{ik}) = (\lambda a_{ik}) + (\lambda b_{ik}) = \lambda\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B}$$

Die Gesetze (6) und (7) lassen sich auf endlich viele Summanden ausdehnen. Auf die einfachen Beweise wollen wir verzichten.

Aufgabe 1. Es seien

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Man berechne  $2\mathfrak{A} - 3\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{C}$ . b) Man bestimme die Lösung der Matrixgleichung

$$4\mathfrak{A} + 5\mathfrak{X} + \mathfrak{B} = 3\mathfrak{C} + 3\mathfrak{X}$$

## 1.5 Transponierte einer Matrix

Werden in einer Matrix  $\mathfrak{A}$  vom Typ  $(m, n)$  die Zeilen mit den Spalten vertauscht, so erhält man eine Matrix vom Typ  $(n, m)$ .

Die auf diese Weise entstandene Matrix heißt die Transponierte der Matrix  $\mathfrak{A}$ , Sie wird mit  $\mathfrak{A}^T$  bezeichnet. Ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

so gilt also

$$\mathfrak{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4. Die Transponierte der Matrix  $\mathfrak{A}$  von Beispiel 1 ist

$$\mathfrak{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Definitionsgleichung für die Transponierte einer Matrix lautet in der Kurzschreibweise ,

$$(a_{ik})^T = (a_{ki}) \quad (1)$$

## 2 Reelle Vektorräume

### 2.1 Begriff des reellen Vektorraumes

Im folgenden verstehen wir unter  $\mathfrak{M}_{m,n}$  die Menge aller Matrizen vom Typ  $(m, n)$  mit festem  $m$  und  $n$ . Die Matrizen selbst bezeichnen wir als die Elemente der Menge  $\mathfrak{M}_{m,n}$ .

Für die Aussage " $\mathfrak{A}$  ist ein Element von  $\mathfrak{M}_{m,n}$ " schreiben wir kürzer " $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_{m,n}$ ". Unter " $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n \in \mathfrak{M}_{m,n}$ " verstehen wir dann analog " $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  sind Elemente von  $\mathfrak{M}_{m,n}$ ".

Zur Vorbereitung der folgenden Definition stellen wir einige der für Matrizen gefundenen Eigenschaften zusammen.

A. In  $\mathfrak{M}_{m,n}$  ist eine als Addition geschriebene Verknüpfung definiert, die je zwei Elementen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{M}_{m,n}$  eindeutig ein Element  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{M}_{m,n}$  zuordnet. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es gilt stets  $\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$ .
2. Zu zwei beliebig vorgegebenen Elementen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{M}_{m,n}$  existiert ein Element  $\mathfrak{X}$  von  $\mathfrak{M}_{m,n}$  mit  $\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{B}$ .<sup>1</sup>
3. Es gilt stets  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$ .

B. In  $\mathfrak{M}_{m,n}$  ist eine Verknüpfung mit reellen Zahlen definiert, die jeder reellen Zahl  $\lambda$  und jedem Element  $\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{M}_{m,n}$  eindeutig ein Element  $\lambda\mathfrak{A}$  von  $\mathfrak{M}_{m,n}$  zuordnet. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es gilt stets  $1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ .
2. Es gilt stets  $(\lambda\mu)\mathfrak{A} = \lambda(\mu\mathfrak{A})$ .
3. Es gilt stets  $(\lambda + \mu)\mathfrak{A} = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{A}$ .
4. Es gilt stets  $\lambda(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \lambda\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B}$ .

Die Eigenschaften A und B charakterisieren eine, wichtige algebraische Struktur, die als reeller Vektorraum bezeichnet wird. Die Elemente eines reellen Vektorraumes werden häufig mit kleinen deutschen Buchstaben  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$  bezeichnet und heißen Vektoren.

Definition 5. Eine nichtleere Menge heißt ein reeller Vektorraum, und ihre Elemente heißen Vektoren, wenn für diese Menge die Eigenschaften A und B erfüllt sind.

Auf Grund von Definition 5 gilt der

Satz 7. Die Menge  $\mathfrak{M}_{m,n}$  aller Matrizen vom Typ  $(m, n)$  ist mit den durch Definition 2 und Definition 4 eingeführten Verknüpfungen ein reeller Vektorraum, den wir mit  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{m,n}$  bezeichnen.

Für die Elemente von  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{m,n}$  mit  $m > 1$  und  $n > 1$  behalten wir die Bezeichnung Matrix und die Kennzeichnung durch große deutsche Buchstaben bei. Dagegen führen wir für die Elemente

$$(a_1 a_2 \dots a_n) \tag{1}$$

<sup>1</sup>Es wird in A.2. nur die Existenz einer Lösung der Gleichung  $\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = \mathfrak{B}$  aufgeführt, also weniger als in Satz 3 bewiesen wurde.

von  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{1,n}$  bzw. für die Elemente

$$\mathfrak{A}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

von  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{n,1}$  die Bezeichnung Zeilenvektor bzw. Spaltenvektor und die Kennzeichnung durch kleine deutsche Buchstaben ein.

Die reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in (1) bzw. (2) heißen auch die Koordinaten des Zeilen- bzw. des Spaltenvektors. Den Zeilenvektor (1) werden wir, um Verwechslungen zu vermeiden, immer in der Form

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

schreiben und den Spaltenvektor (2) aus drucktechnischen Gründen häufig in der Form

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

angeben. Den Zeilenvektor  $(0, 0, \dots, 0)$  bzw. den Spaltenvektor  $(0, 0, \dots, 0)^T$  bezeichnen wir mit 0. Er heißt Nullvektor.

In den beiden folgenden Abschnitten führen wir zwei Begriffe aus der Theorie der reellen Vektorräume ein, wobei wir uns im Rahmen dieses Büchleins auf den konkreten Vektorraum  $\widetilde{\mathfrak{M}}_{m,n}$  beschränken.

## 2.2 Linearkombination

Definition 6. Es seien  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{n,1}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_k$  reelle Zahlen. Dann heißt  $\mathfrak{B} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{n,1}$  mit

$$\mathfrak{B} = x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2 + \dots + x_k\mathfrak{A}_k$$

eine Linearkombination von  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k$ .

Beispiel 5. Wir untersuchen, ob

- der Zeilenvektor  $\mathfrak{b} = (1, 3, 2, 4)$  eine Linearkombination der Zeilenvektoren  $\mathfrak{a}_1 = (3, 5, 2, 0)$ ,  $\mathfrak{a}_2 = (1, 1, 0, -2)$  ist,
- der Spaltenvektor  $\mathfrak{b} = (1, 3, 1, 2)^T$  eine Linearkombination der Spaltenvektoren  $\mathfrak{a}_1 = (3, 5, 1, 1)^T$ ,  $\mathfrak{a}_2 = (1, 1, 0, 0)^T$  ist.

Dazu machen wir in beiden Fällen den Ansatz

$$x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} \quad (1)$$

a) Durch Einsetzen der Zeilenvektoren erhalten wir

$$x_1(3, 5, 2, 0) + x_2(1, 1, 0, -2) = (1, 3, 2, 4)$$

Machen wir von den Definitionen 4 und 2 in der angegebenen Reihenfolge Gebrauch, so folgt

$$\begin{aligned} (3x_1, 5x_1, 2x_1, 0) + (x_2, x_2, 0, -2x_2) &= (1, 3, 2, 4) \\ (3x_1 + x_2, 5x_1 + x_2, 2x_1, -2x_2) &= (1, 3, 2, 4) \end{aligned}$$

Auf Grund von Definition 1 ergibt sich hieraus das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 = 2 \\ -2x_2 = 4 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Das System

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 = 2 \\ -2x_2 = 4 \end{array} \right\}$$

ist ein Teilsystem von (2), und es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ . (3)

Dieses Zahlenpaar genügt aber auch den ersten beiden Gleichungen von (2). Damit ist (3) die Lösung des Gleichungssystems (2). Der Zeilenvektor  $\mathbf{b}$  lässt sich demnach auf genau eine Weise als Linearkombination der beiden Zeilenvektoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  darstellen. Wegen (3) gilt somit

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$$

b) Durch Einsetzen der Spaltenvektoren in (1) erhalten wir

$$c_1(3, 5, 1, 1)^T + x_2(1, 1, 0, 0)^T = (1, 3, 1, 2)^T$$

Machen wir wieder von den Definitionen 4, 2 und 1 Gebrauch, so ergibt sich in diesem Fall das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right\}$$

Dieses System ist nicht lösbar, da es ein nichtlösbares Teilsystem

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right\}$$

enthält. Der Spaltenvektor  $\mathbf{b}$  lässt sich also nicht als Linearkombination der beiden Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  darstellen.

4 6 Aufgabe 2. Man untersuche, ob die Matrix  $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$  eine Linearkombination der Matrizen

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

ist.

## 2.3 Lineare Abhängigkeit

Es seien  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{m,n}$ . Dann besitzt die Gleichung

$$x_1\mathfrak{A}_1 + x_2\mathfrak{A}_2 + \dots + x_k\mathfrak{A}_k = \mathfrak{O} \quad (1)$$

mit  $\mathfrak{D} \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{m,n}$  stets die Lösung

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0 \quad (2)$$

Die Lösung (2) bezeichnet man als die triviale Lösung von (1). Besitzt (1) neben (2) noch eine weitere Lösung, in der nicht alle  $x_i = 0$  sind, so nennt man diese Lösung eine nichttriviale Lösung von (1).

Definition 7. Es heißen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{m,n}$  linear abhängig bzw. linear unabhängig genau dann, wenn die Gleichung (1) eine nichttriviale Lösung bzw. nur die triviale Lösung (2) besitzt.

Beispiel 6. Wir untersuchen, ob

a) die Matrizen

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) die Spaltenvektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1, 1)^\top, \quad \mathfrak{a}_2 = (1, 2)^\top, \quad \mathfrak{a}_3 = (1, 3)^\top$$

c) die Zeilenvektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \mathfrak{a}_2 = (2, 0, 1, 0), \quad \mathfrak{a}_3 = (1, 0, 0, 1)$$

linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Aus dem Ansatz

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

bzw.

$$x_1(1, 1)^\top + x_2(1, 2)^\top + x_3(1, 3)^\top = (0, 0)^\top \quad (4)$$

bzw.

$$x_1(1, 1, 0, 0) + x_2(2, 0, 1, 0) + x_3(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \quad (5)$$

lesen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ab.

a) Das Gleichungssystem (6) ist wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

auf Grund von Satz 27 (Determinanten) nur trivial lösbar. Demnach besitzt die Gleichung (3) ebenfalls nur die triviale Lösung, die Matrizen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{2,2}$  sind also linear unabhängig.

b) Wir untersuchen, ob das System (7) neben der Lösung

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

noch eine weitere Lösung besitzt. Setzen wir beispielsweise  $x_3 = -1$ , so geht (7) über in

$$\left. \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

Dieses System besitzt die eindeutig bestimmte Lösung  $x_1 = -1, x_2 = 2$ , also ist

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

eine nichttriviale Lösung von (4). Die Spaltenvektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{2,1}$  sind also linear abhängig.

c) Das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

das nur trivial lösbar ist, ist ein Teilsystem des homogenen linearen Gleichungssystems (8). Folglich besitzt das System (8) und damit auch die Gleichung (5) nur diese Lösung. Die Zeilenvektoren  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{1,4}$  sind linear unabhängig.

Aufgabe 3. Man zeige, dass die Spaltenvektoren

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{x}_1 = (d_{11}, d_{21}, \dots, d_{r1}, d_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-r-1})^\top \\ \mathfrak{x}_2 = (d_{12}, d_{22}, \dots, d_{r2}, 0, d_2, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-r-2})^\top \\ \dots \\ \mathfrak{x}_{n-r} = (d_{1,n-r}, d_{2,n-r}, \dots, d_{r,n-r}, 0, 0, \dots, 0, d_{n-r})^\top \end{array} \right\}$$

wobei die  $d_{ik}$  beliebige und  $d_1, d_2, \dots, d_{n-r}$  von null verschiedene reelle Zahlen sind, linear unabhängig sind.

## 3 Matrizen (2. Teil)

### 3.1 Multiplikation von Matrizen

Zur Vorbereitung der beiden folgenden Definitionen betrachten wir die Systeme

$$\left. \begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= z_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 &= z_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und

$$\left. \begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= y_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= y_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

die die Koeffizientenmatrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

besitzen. Ersetzen wir  $y_1, y_2$  in (1) durch die linken Seiten von (2), so erhalten wir das System

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23})x_3 &= z_1 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23})x_3 &= z_2 \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})x_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})x_2 + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23})x_3 &= z_3 \end{aligned} \right\}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Die Matrix  $\mathfrak{C}$  heißt das Produkt der beiden Matrizen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ , und wir schreiben  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ .

Das Element  $c_{11}$  von  $\mathfrak{C}$  erhalten wir, indem wir das erste bzw. das zweite Element der ersten Zeile von  $\mathfrak{A}$  mit dem ersten bzw. dem zweiten Element der ersten Spalte von  $\mathfrak{B}$  multiplizieren und anschließend diese beiden Produkte addieren:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} \quad (4)$$

Für (4) sagt man auch: Um das Element  $c_{11}$  der Produktmatrix  $\mathfrak{C}$  zu erhalten, bilden wir die Produktsuppe der ersten Zeile von  $\mathfrak{A}$  und der ersten Spalte von  $\mathfrak{B}$ . Wie (3) zeigt, erhalten wir allgemein das Element  $c_{ik}$  von  $\mathfrak{C}$ , indem wir die Produktsuppe der  $i$ -ten Zeile von  $\mathfrak{A}$  und der  $k$ -ten Spalte von  $\mathfrak{B}$  bilden.

Mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  in (5) sind nicht vom gleichen Typ. Dagegen haben sie die Eigenschaft; dass  $\mathfrak{A}$  gerade soviel Spalten besitzt wie  $\mathfrak{B}$  Zeilen hat, eine Eigenschaft, die offenbar für die Bildung von  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  in der angegebenen Weise notwendig ist; Dies führt zunächst zur

Definition 8. Die Matrix  $\mathfrak{A}$  heißt mit der Matrix  $\mathfrak{B}$  verkettet, wenn die Anzahl der Spalten von  $\mathfrak{A}$  mit der Anzahl der Zeilen von  $\mathfrak{B}$  übereinstimmt.

Wir definieren nun in Verallgemeinerung von (3) für verkettete Matrizen eine Multiplikation wie folgt:

Definition 9. Die Matrix  $\mathfrak{A}$  sei mit der Matrix  $\mathfrak{B}$  verkettet, d.h., es seien  $\tau(\mathfrak{A}) = (m, n)$  und  $\tau(\mathfrak{B}) = (n, p)$ .

Dann ist  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$  diejenige Matrix vom Typ  $(m, p)$ , deren Elemente  $c_{ik}$  die Produktsummen der  $i$ -ten Zeile von  $\mathfrak{A}$  und der  $k$ -ten Spalte von  $\mathfrak{B}$  sind:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

In der Kurzschreibweise lautet diese Definition

$$(a_{ik})(b_{ik}) = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}) \quad (6)$$

Beispiel 7. Es seien

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\mathfrak{A}$  ist mit der Matrix  $\mathfrak{B}$  verkettet, die Produktmatrix  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  ist vom Typ  $(4, 2)$ , und es gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

In Beispiel 7 ist die Matrix  $\mathfrak{A}$  mit der Matrix  $\mathfrak{B}$  verkettet, aber die Matrix  $\mathfrak{B}$  ist nicht mit der Matrix  $\mathfrak{A}$  verkettet, da die Anzahl der Spalten von  $\mathfrak{B}$  nicht mit der Anzahl der Zeilen von  $\mathfrak{A}$  übereinstimmt. Wir können also nicht  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$  bilden.

Für die Matrizenmultiplikation gilt also offensichtlich nicht das Kommutativgesetz.

Aber auch dann, wenn die Matrix  $\mathfrak{A}$  mit der  $\mathfrak{B}$  und auch die Matrix  $\mathfrak{B}$  mit der Matrix  $\mathfrak{A}$  verkettet ist und beide Produktmatrizen  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$  vom selben Typ sind, braucht nicht  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$  übereinzustimmen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Man nennt zwei Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  vertauschbar genau dann, wenn  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$  gilt.

Aufgabe 4. Man zeige, dass die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

wobei  $a, b, c, d$  beliebige reelle Zahlen sind, vertauschbar sind.

Für jede Matrix  $\mathfrak{A}$  gilt offensichtlich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{O} = \mathfrak{O} \quad , \quad \mathfrak{O}\mathfrak{A} = \mathfrak{O} \quad (7)$$

Bekanntlich ist ein Produkt zweier reeller Zahlen gleich null genau dann, wenn wenigstens einer der Faktoren gleich null ist. Ein analoger Satz gilt nicht für Matrizen. Es kann  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$  sein, ohne dass  $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$  oder  $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$  ist, wie das Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt. Man nennt derartige Matrizen Nullteiler.

Wir führen die  $n$ -reihige Matrix

$$\mathfrak{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

ein. Verstehen wir unter  $\mathfrak{A}$  eine Matrix vom Typ  $(m, n)$ , so gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E}_n = \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{E}_m\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \quad (9)$$

d.h., jede Matrix  $\mathfrak{A}$  bleibt bei Multiplikation mit Matrizen der Form (8) unverändert. Matrizen der Form (8) spielen also bei der Matrizenmultiplikation eine ähnliche Rolle, wie die Zahl 1 bei der Multiplikation reeller Zahlen, denn analog zu (9) gilt für jede reelle Zahl  $a$

$$a \cdot 1 = a \quad , \quad 1 \cdot a = a$$

Die Matrix  $\mathfrak{E}_n$  heißt daher  $n$ -reihige Einheitsmatrix.

Aufgabe 5. Es seien

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Man berechne  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ .

Ein Vergleich der beiden Produktmatrizen in Aufgabe 5 liefert  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ . Dieses Ergebnis haben wir nicht etwa auf Grund einer geschickten Wahl der Elemente der Matrizen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  erhalten. Vielmehr gilt der

Satz 8. Für die Matrizenmultiplikation gilt das Assoziativgesetz

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \quad (10)$$

Beweis. Es seien  $\tau(\mathfrak{A}) = (m, n)$ ,  $\tau(\mathfrak{B}) = (n, p)$ ,  $\tau(\mathfrak{C}) = (p, q)$ .

Wir setzen  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{G}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} &= \mathfrak{F}\mathfrak{C} = (f_{i1}c_{1k} + f_{i2}c_{2k} + \dots + f_{ip}c_{pk}) \\ &= ([a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}]c_{1k} \\ &\quad + [a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}]c_{2k} + \dots \\ &\quad + [a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \dots + a_{in}b_{np}]c_{pk}) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) &= \mathfrak{A}\mathfrak{G} = (a_{i1}g_{1k} + a_{i2}g_{2k} + \dots + a_{ip}g_{pk}) \\ &= (a_{i1}[b_{11}c_{1k} + b_{12}c_{2k} + \dots + b_{1p}c_{pk}] \\ &\quad + a_{i2}[b_{21}c_{1k} + b_{22}c_{2k} + \dots + b_{2p}c_{pk}] + \dots \\ &\quad + a_{in}[b_{n1}c_{1k} + b_{n2}c_{2k} + \dots + b_{np}c_{pk}]) \end{aligned}$$

Durch Umordnen der Summanden erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) &= ([a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}]c_{1k} \\ &\quad + [a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}]c_{2k} + \dots \\ &\quad + [a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \dots + a_{in}b_{np}]c_{pk}) \end{aligned}$$

Die rechten Seiten von  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$  stimmen überein, womit (10) bewiesen ist.

Das Assoziativgesetz (10) lässt sich ebenfalls auf endlich viele Faktoren ausdehnen.

Satz 9. Für die Matrizenaddition und die Matrizenmultiplikation gelten die Distributivgesetze

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} \quad (11)$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} \quad (12)$$

Beweis von (11). Es seien  $\tau(\mathfrak{A}) = \tau(\mathfrak{B}) = (m, n)$ ,  $\tau(\mathfrak{C}) = (n, p)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} &= ([a_{i1} + b_{i1}]c_{1k} + [a_{i2} + b_{i2}]c_{2k} + \dots + [a_{in} + b_{in}]c_{nk}) \\ &= ([a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk}] + [b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \dots + b_{in}c_{nk}]) \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} = ([a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk}] + [b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \dots + b_{in}c_{nk}])$$

Die rechten Seiten von  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}$  stimmen überein.

Damit ist (11) bewiesen. Der Beweis für (12) verläuft analog. Die beiden Distributivgesetze (11) und (12) lassen sich ebenfalls auf endlich viele Summanden ausdehnen.

Satz 10. Für die Matrizenmultiplikation gilt stets

$$\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\lambda\mathfrak{A})\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\lambda\mathfrak{B})$$

für alle reellen Zahlen  $\lambda$ .

Beweis. Es seien  $\tau(\mathfrak{A}) = (m, n)$ ,  $\tau(\mathfrak{B}) = (n, p)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= (\lambda[a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}]) \\ &= (\lambda a_{i1} \cdot b_{1k} + \lambda a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + \lambda a_{in} \cdot b_{nk}) = (\lambda\mathfrak{A})\mathfrak{B} \end{aligned}$$

bzw.

$$\lambda \mathfrak{A} \mathfrak{B} = (a_{i1} \cdot \lambda b_{1k} + a_{i2} \cdot \lambda b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot \lambda b_{nk}) = \mathfrak{A}(\lambda \mathfrak{B})$$

Satz 11. Die Transponierte der Produktmatrix  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  ist gleich dem Produkt der Transponierten der beiden Matrizen in umgekehrter Reihenfolge, d.h., es gilt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^T = \mathfrak{B}^T \mathfrak{A}^T$$

Beweis. Es seien  $\tau(\mathfrak{A}) = (m, n)$ ,  $\tau(\mathfrak{B}) = (n, p)$ . Die Elemente von  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{A}^T$  bzw.  $\mathfrak{B}^T$  bezeichnen wir mit  $a_{ik}$  bzw.  $b_{ik}$  bzw.  $c_{ik}$  bzw.  $d_{ik}$ . Dann ist

$$c_{ik} = a_{ki} \quad , \quad d_{ik} = b_{ki} \quad (13)$$

und wegen (6) gilt

$$\mathfrak{B}^T \mathfrak{A}^T = (d_{ik})(c_{ik}) = (d_{i1}c_{1k} + d_{i2}c_{2k} + \dots + d_{in}c_{nk})$$

Berücksichtigen wir (13), so folgt

$$\mathfrak{B}^T \mathfrak{A}^T = (b_{1i}a_{k1} + b_{2i}a_{k2} + \dots + b_{ni}a_{kn})$$

Ferner ist

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^T = (a_{ik})(b_{ik})^T = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})^T$$

Anwendung von 1.5. (1) liefert

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^T = (a_{k1}b_{1i} + a_{k2}b_{2i} + \dots + a_{kn}b_{ni})$$

Wegen der Kommutativität der Multiplikation reellen Zahlen ist

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^T = (b_{1i}a_{k2} + b_{2i}a_{k1} + \dots + b_{ni}a_{kn})$$

Die rechten Seiten von  $\mathfrak{B}^T \mathfrak{A}^T$  und  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^T$  stimmen überein. Damit ist der Satz bewiesen.

Matrizen vom Typ  $(1, 1)$ , das sind Matrizen der Form  $(a)$  kann man mit den reellen Zahlen  $a$  identifizieren, denn die für Matrizen definierten Rechenoperationen

$$(a) + (b) = (a + b) \quad , \quad (a) \cdot (b) = (a \cdot b)$$

stimmen in diesem Sonderfall mit den Rechenoperationen für reelle Zahlen überein. Ist

$$\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{1,n} \quad , \quad \mathfrak{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{n,1}$$

so ist  $\mathfrak{a}_i \mathfrak{x}$  eine Matrix vom Typ  $(1, 1)$ , nach unserer obigen Vereinbarung also die reelle Zahl

$$\mathfrak{a}_i \mathfrak{x} = a_{i-1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (14)$$

### 3.2 Matrixschreibweise für lineare Gleichungssysteme

Unter  $\mathfrak{A}$  verstehen wir die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems 1.1.(1) und unter  $\mathfrak{x}$  bzw.  $\mathfrak{b}$  den Spaltenvektor

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \quad \text{bzw.} \quad (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top$$

Wir berechnen das Matrizenprodukt  $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ . Es gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Rechts steht eine Matrix vom Typ  $(m, 1)$ , also ein Spaltenvektor.

Seine Elemente sind die linken Seiten der Gleichungen des Systems 1.1.(1), so dass das Gleichungssystem 1.1.(1) in Matrixschreibweise die einfache Gestalt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b} \tag{1}$$

annimmt. Handelt es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem, so ist  $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ .

Die Nützlichkeit der Matrixschreibweise (1) für das lineare Gleichungssystem 1.1.(1) wird sich bei mehreren noch zu führenden Beweisen von Sätzen über lineare Gleichungssysteme zeigen. Ein Vektor  $\mathfrak{x}_1$ , der der Gleichung (1) genügt, heißt Lösungsvektor von (1).

Beispiel 8. Wir geben das Gleichungssystem 1.1.(4) in Matrixschreibweise an:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1'}$$

Es ist also

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispielsweise sind

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösungsvektoren des Gleichungssystems (1').

Satz 12. Es seien  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_k$  Lösungsvektoren eines homogenen linearen Gleichungssystems  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ . Dann ist auch

$$\mathfrak{x}_0 = t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2 + \dots + t_k\mathfrak{x}_k \tag{2}$$

für alle reellen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_k$  ein Lösungsvektor von  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 &= \mathfrak{A}(t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2 + \dots + t_k\mathfrak{x}_k) = \mathfrak{A}(t_1\mathfrak{x}_1) + \mathfrak{A}(t_2\mathfrak{x}_2) + \dots + \mathfrak{A}(t_k\mathfrak{x}_k) \\ &= t_1\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{A}\mathfrak{x}_2 + \dots + t_k\mathfrak{A}\mathfrak{x}_k \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Voraussetzung  $\mathfrak{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$ ,  $\mathfrak{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ , ...,  $\mathfrak{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{o}$ , so erhalten wir  $\mathfrak{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ . Diese Gleichung besagt, dass der Vektor (2) ein Lösungsvektor von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$  ist, womit der Satz bewiesen ist.

Aus Satz 12 folgt insbesondere, dass mit zwei Lösungsvektoren  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$  auch  $\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2$  ein Lösungsvektor von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$  ist und mit  $\mathbf{x}_1$  auch  $\lambda\mathbf{x}_1$  für jede reelle Zahl  $\lambda$  ein Lösungsvektor von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$  ist.

Damit besitzen die Lösungsvektoren von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ , die Matrizen vom Typ  $(n, 1)$  sind, ebenfalls die Eigenschaften A und B von 2.1. Dies führt zum

Satz 13. Die Menge aller Lösungsvektoren eines homogenen linearen Gleichungssystems ist mit den durch Definition 2 und Definition 4 eingeführten Verknüpfungen ein reeller Vektorraum.

Aufgabe 6.

a) Es seien  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  Lösungsvektoren eines inhomogenen linearen Gleichungssystems  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Man zeige, dass der Vektor (2) für alle reellen Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_k$  die der Bedingung

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = 1$$

genügen, wieder ein Lösungsvektor von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist.

b) Man bestätige diesen Sachverhalt an dem Gleichungssystem (1') für

$$\mathbf{x}_1 = (2, -1)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (-1, 1)^T, \quad \mathbf{x}_3 = (-4, 3)$$

und  $t_1 = 4, t_2 = -2, t_3 = -1$ .

c) Man zeige, dass die Menge aller Lösungsvektoren eines lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssystems  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit den durch Definition 2 und Definition 4 eingeführten Verknüpfungen kein reeller Vektorraum ist.

Wir wollen das Gleichungssystem 1.1.(1) noch in einer anderen Form angeben. Dazu führen wir die Zeilenvektoren

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \quad \dots, \quad \mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

ein. Mit Hilfe dieser Zeilenvektoren können wir auf Grund von 3.1.(14) das System 1.1.(1) auch in der Form

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{x} = b_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{x} = b_m \end{array} \right\}$$

schreiben.

Wir beweisen nun einen Satz, von dem wir häufig im Abschnitt 4. Gebrauch machen werden.

Satz 14. Entsteht ein lineares Gleichungssystem  $G_2$  aus einem linearen Gleichungssystem  $G_1$  dadurch, dass

I. zwei Gleichungen vertauscht werden,

II. beide Seiten einer Gleichung mit derselben von null verschiedenen reellen Zahl  $t$  multipliziert werden,

III. beide Seiten einer Gleichung von  $G_1$  mit derselben reellen Zahl  $t$  multipliziert und die

Ergebnisse zu den entsprechenden Seiten einer anderen Gleichung von  $G_1$  addiert werden, so sind beide Gleichungssysteme lösbar, und sie haben dieselben Lösungen, oder sie sind beide nicht lösbar.

Beweis. Dazu müssen wir zeigen, dass eine beliebige Lösung von  $G_1$  auch eine Lösung von  $G_2$  ist und umgekehrt eine beliebige Lösung von  $G_2$  auch eine Lösung von  $G_1$  ist.

Für die Umformungen I und II ist der Beweis der Behauptung trivial. Aus dem System

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \mathbf{x} = b_1 \\ \dots \\ \mathbf{a}_i \mathbf{x} = b_i \\ \dots \\ \mathbf{a}_j \mathbf{x} = b_j \\ \dots \\ \mathbf{a}_m \mathbf{x} = b_m \end{array} \right\} \quad (3)$$

mit  $i \neq j$  entstehe durch die Umformung III das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \mathbf{x} = b_1 \\ \dots \\ (\mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j) \mathbf{x} = b_i + tb_j \\ \dots \\ \mathbf{a}_j \mathbf{x} = b_j \\ \dots \\ \mathbf{a}_m \mathbf{x} = b_m \end{array} \right\} \quad (4)$$

Es sei  $\mathbf{x}_1$  eine Lösung von (3). Wir zeigen, dass  $\mathbf{x}_1$  auch eine Lösung von (4) ist. Da die beiden Systeme (3) und (4) sich nur in der  $i$ -ten Gleichung unterscheiden, brauchen wir nur noch nachzuweisen, dass  $\mathbf{x}_1$  auch die  $i$ -te Gleichung von (4) erfüllt. Dazu setzen wir  $\mathbf{x}_1$  in die linke Seite der  $i$ -ten Gleichung von (4) ein und erhalten

$$(\mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j)\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_i\mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}_j\mathbf{x}_1$$

Auf Grund der Voraussetzung gilt  $\mathbf{a}_i\mathbf{x}_1 = b_i$ ,  $\mathbf{a}_j\mathbf{x}_1 = b_j$  und folglich ist

$$(\mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j)\mathbf{x}_1 = b_i + tb_j$$

d.h.,  $\mathbf{x}_1$  genügt der  $i$ -ten Gleichung von (4). Damit ist gezeigt, dass  $\mathbf{x}_1$  auch eine Lösung von (4) ist.

Es sei umgekehrt  $\mathbf{x}_2$  eine Lösung von (4). Dann genügt  $\mathbf{x}_2$  jeder Gleichung von (4), insbesondere also der  $i$ -ten und  $j$ -ten Gleichung von (4):

$$(\mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j)\mathbf{x}_2 = b_i + tb_j \quad , \quad \mathbf{a}_j\mathbf{x}_2 = b_j$$

Hieraus folgt

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x}_2 = b_i + tb_j - t\mathbf{a}_j\mathbf{x}_2 = b_i + tb_j - tb_j = b_i$$

d.h.,  $\mathbf{x}_2$  genügt der  $i$ -ten Gleichung von (3). Damit ist  $\mathbf{x}_2$  auch eine Lösung von (3), womit der Satz bewiesen ist.

Entsteht ein lineares Gleichungssystem  $G_2$  aus einem linearen Gleichungssystem  $G_1$  mit Hilfe

der Umformungen I, II, III, so sagt man, das Gleichungssystem  $G_2$  entstehe durch elementare Umformungen des Gleichungssystems  $G_1$ .

Offensichtlich gilt ferner:

Entsteht ein lineares Gleichungssystem aus einem linearen Gleichungssystem durch Abänderung der Reihenfolge der Variablen, so sind beide Gleichungssysteme lösbar, und sie haben dieselben Lösungen, oder sie sind beide nicht lösbar. (5)

So entsteht beispielsweise aus dem System 1.1.(4), Seite 5, durch Abänderung der Reihenfolge der Variablen das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 9x_2 + 6x_1 &= 3 \\ 6x_2 + 4x_1 &= 2 \\ 3x_2 + 2x_1 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Dieses System besitzt offensichtlich auch die Lösungen 1.1.(5).

### 3.3 Inverse einer regulären Matrix

Bekanntlich ist die lineare Gleichung

$$ax = b \quad \text{mit} \quad a \neq 0 \quad (1)$$

für alle reellen Zahlen  $a, b$  eindeutig lösbar. Die Lösung schreiben wir in der Form

$$x = a^{-1}b \quad (2)$$

Wie wir in Verallgemeinerung zu (1) bewiesen haben (Determinanten, Satz 25), besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_1 + \frac{A_{21}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_2 + \dots + \frac{A_{n1}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_n \\ x_2 &= \frac{A_{12}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_1 + \frac{A_{22}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_2 + \dots + \frac{A_{n2}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_n \\ \dots & \\ x_n &= \frac{A_{1n}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_1 + \frac{A_{2n}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_2 + \dots + \frac{A_{nn}}{|\mathfrak{A}|} \cdot b_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Formelzeile (3), die für  $n = 1$  mit  $a_{11} = a, x_1 = x, b_1 = b$  in (1) übergeht, lässt sich in der übersichtlichen Kurzform

$$\mathfrak{A}x = b \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{A}| \neq 0$$

schreiben.

Unser Ziel ist es, die eindeutig bestimmte Lösung (4) ebenfalls in Matrixschreibweise anzugeben. Offensichtlich ist (4) äquivalent mit der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|\mathfrak{A}|} & \frac{A_{21}}{|\mathfrak{A}|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|\mathfrak{A}|} \\ \frac{A_{12}}{|\mathfrak{A}|} & \frac{A_{22}}{|\mathfrak{A}|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|\mathfrak{A}|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|\mathfrak{A}|} & \frac{A_{2n}}{|\mathfrak{A}|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|\mathfrak{A}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Vergleichen wir (5) mit (2), so werden wir in Analogie zu (2) die quadratische Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|\mathfrak{A}|} & \frac{A_{21}}{|\mathfrak{A}|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|\mathfrak{A}|} \\ \frac{A_{12}}{|\mathfrak{A}|} & \frac{A_{22}}{|\mathfrak{A}|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|\mathfrak{A}|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|\mathfrak{A}|} & \frac{A_{2n}}{|\mathfrak{A}|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|\mathfrak{A}|} \end{pmatrix} \quad (8)$$

die Inverse der Matrix  $\mathfrak{A}$  nennen und mit  $\mathfrak{A}^{-1}$  bezeichnen. Zu einer vorgegebenen quadratischen Matrix  $\mathfrak{A}$  können wir die Matrix (6) aber nur bilden, wenn  $|\mathfrak{A}| \neq 0$  ist. Das führt zunächst zur

Definition 10. Eine quadratische Matrix  $\mathfrak{A}$  heißt regulär bzw. singular genau dann, wenn ihre Determinante  $|\mathfrak{A}|$  von null verschieden bzw. gleich null ist.

So ist beispielsweise die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär, da  $|\mathfrak{A}| = 1 \neq 0$  ist. Dagegen ist die Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine singuläre Matrix.

Aufgabe 7. Man untersuche, ob die Matrizen

$$\text{a) } \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

regulär sind.

Berücksichtigt man, dass auf Grund von Definition 4 gilt

$$\lambda(a_{ik}) = (\lambda a_{ik})$$

so kann die Inverse einer Matrix auch wie folgt definiert werden:

Definition 11. Ist  $\mathfrak{A}$  eine reguläre Matrix, so heißt die Matrix

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

die zu  $\mathfrak{A}$  inverse Matrix oder die Inverse zu  $\mathfrak{A}$ .

Beispiel 9. Wir bestimmen die Inverse der regulären Matrix von Aufgabe 7a.

Es ist  $|\mathfrak{A}| = -1$ ,  $A_{22} = 1$ ,  $A_{12} = 1$ ,  $A_{13} = -3$ ,  $A_{21} = -2$ ,  $A_{22} = -2$ ,  $A_{23} = 5$ ,  $A_{31} = -1$ ,  $A_{32} = 0$ ,  $A_{33} = 1$  und damit

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. Es sei  $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  eine reguläre Matrix. Man bestimme die Inverse zu  $\mathfrak{A}$ .

In Verbindung mit den obigen Definitionen lässt sich die Cramersche Regel (Determinanten, Satz 25) auch wie folgt formulieren:

Satz 15. Ein lineares Gleichungssystem  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$  mit regulärer Koeffizientenmatrix besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{b}$$

Beispiel 10. Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{array} \right\} \quad (7)$$

ist regulär (vgl. Aufgabe 7a). Wir bestimmen mit Hilfe von Satz 15 die eindeutig bestimmte Lösung von (7). Es ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berücksichtigen wir das Ergebnis von Beispiel 9, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems (7) ist demnach

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -10$$

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine  $n$ -reihige reguläre Matrix. Bildet man das Produkt der beiden Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^{-1}$ , also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$$

so müssen wir auf Grund der Multiplikationsregel für Matrizen die Elemente der  $i$ -ten Zeile von  $\mathfrak{A}$  mit den entsprechenden Elementen der  $k$ -ten Spalte von  $\mathfrak{A}^{-1}$  multiplizieren und diese Produkte addieren, um das Element  $x_{ik}$  der Produktmatrix  $\mathfrak{X}$  zu erhalten. Es ist

$$x_{ik} = a_{i1} \frac{A_{k1}}{|\mathfrak{A}|} + a_{i2} \frac{A_{k2}}{|\mathfrak{A}|} + \dots + a_{in} \frac{A_{kn}}{|\mathfrak{A}|} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} (a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn})$$

Auf Grund von 8.(1) (Determinanten) gilt

$$x_{i1} = \dots = x_{i,i-1} = 0, \quad x_{ii} = 1, \quad x_{i,i+1} = \dots = x_{in} = 0$$

für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Damit sind in der Produktmatrix  $\mathfrak{X}$  die Elemente der Hauptdiagonale eins, alle übrigen Elemente jedoch null. Es ist also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}_n$$

Da Matrizen nicht stets vertauschbar sind, berechnen wir noch

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{Y}$$

Es ist

$$y_{ik} = a_{1k} \frac{A_{1i}}{|\mathfrak{A}|} + a_{2k} \frac{A_{2i}}{|\mathfrak{A}|} + \dots + a_{ni} \frac{A_{nk}}{|\mathfrak{A}|} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} (a_{1k}A_{1i} + a_{2k}A_{2i} + \dots + a_{nk}A_{ni})$$

Die Anwendung von 8.(2) (Determinanten) liefert

$$y_{i1} = \dots = y_{i,i-1} = 0, \quad y_{ii} = 1, \quad y_{i,i+1} = \dots = y_{in} = 0$$

für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , d.h. es ist auch

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$$

Damit haben wir bewiesen den

Satz 16. Ist  $\mathfrak{A}$  eine  $n$ -reihige reguläre Matrix, so gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$$

Satz 17. Ist  $\mathfrak{A}$  eine  $n$ -reihige reguläre Matrix, so besitzen die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_n \quad , \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$$

dieselbe eindeutig bestimmte Lösung  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{A}^{-1}$ .

Beweis. Auf Grund von Satz 16 ist  $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1}$  eine Lösung der Gleichung  $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_n$ . Wir müssen noch zeigen, dass neben dieser Lösung keine weitere Lösung existiert.

Dazu nehmen wir an, es sei auch  $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$  eine Lösung.

Dann gilt  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_n$ . Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung von links mit  $\mathfrak{A}^{-1}$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung von 3.1.(9),

$$\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{E}_n$$

Wegen der Assoziativität der Matrizenmultiplikation gilt

$$(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A})\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{E}_n$$

Hieraus folgt  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$ , d.h., die Lösung der Ausgangsgleichung ist eindeutig bestimmt. Analog beweist man, dass die Gleichung  $\mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$  ebenfalls die eindeutig bestimmte Lösung  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}^{-1}$  besitzt.

Der Nutzen des soeben bewiesenen Satzes wird sich beim Beweis des folgenden Satzes zeigen. Um nachzuweisen, dass eine quadratische Matrix  $\mathfrak{B}$  die Inverse der Matrix  $\mathfrak{A}$ , brauchen wir nur zu zeigen, dass  $\mathfrak{B}$  entweder der Gleichung  $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$  oder der Gleichung  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_n$  genügt.

Satz 18. Die Inverse der Produktmatrix  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  zweier  $n$ -reihiger regulärer Matrizen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ist gleich dem Produkt der Inversen der beiden Matrizen in umgekehrter Reihenfolge, d.h., es gilt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$$

Beweis. Wegen der Assoziativität der Matrizenmultiplikation gilt

$$(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1})\mathfrak{B}$$

Berücksichtigen wir Satz 16 und 3.1.(9), so erhalten wir

$$(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_n$$

Die Matrix  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$  ist also die Lösung der Gleichung  $\mathfrak{Y}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{E}_n$ . Auf Grund von Satz 17 ist damit  $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$  die Inverse der Produktmatrix  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Mit Hilfe unserer neuen Begriffsbildung sind wir in der Lage, auch die allgemeinere Matrixgleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{B} \tag{8}$$

zu lösen, in der  $\mathfrak{A}$  eine  $n$ -reihige reguläre Matrix und  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{B}$  von der Form

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

seien. Um die Lösung von (8) zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung von links mit  $\mathfrak{A}^{-1}$  und erhalten

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \tag{9}$$

Beispiel 11. Wir lösen die Matrixgleichung (8) für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf Grund von (9) und unter Berücksichtigung des Ergebnisses von Beispiel 9 erhalten wir

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

oder in ausgeschriebener Form

$$x_{11} = 2, \quad x_{12} = 0, \quad x_{21} = 1, \quad x_{22} = -1, \quad x_{31} = -3, \quad x_{32} = 2$$

Aufgabe 9. Man löse die Matrixgleichung (8) für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Rang einer Matrix

Wir führen nun im Zusammenhang mit Matrizen einen wichtigen Begriff ein, mit dessen Hilfe sich Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme einfach formulieren lassen.

Zur Vorbereitung dieses Begriffes knüpfen wir an frühere Überlegungen an. Streicht man in einer quadratischen  $n$ -reihigen Matrix  $\mathfrak{A}$  die  $i$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte und ordnet der aus den verbleibenden Elementen gebildeten quadratischen  $(n - 1)$ -reihigen Matrix ihre Determinante zu, so heißt diese Determinante auf Grund von Definition 8 (Determinanten) eine Unterdeterminante der Matrix  $\mathfrak{A}$ .

In Verallgemeinerung hierzu definieren wir für beliebige Matrizen vom Typ  $(m, n)$ :

Definition 12. Streicht man in einer Matrix  $m - k$  Zeilen und  $n - k$  Spalten und ordnet der aus den verbleibenden Elementen gebildeten quadratischen  $k$ -reihigen Matrix ihre Determinante zu, so heißt diese Determinante  $k$ -ter Ordnung eine Unterdeterminante  $k$ -ter Ordnung der Matrix  $\mathfrak{A}$ .

Streichen wir beispielsweise in der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

die vom Typ  $(4,3)$  ist, die zweite und die vierte Zeile und anschließend die zweite Spalte; so erhalten wir die zweireihige Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

eine Unterdeterminante zweiter Ordnung der Matrix  $\mathfrak{A}$ .

Diese Unterdeterminante ist von null verschieden. Alle Unterdeterminanten dritter Ordnung der Matrix (1) sind null, da nach dem Streichen jeweils einer Zeile in  $\mathfrak{A}$  in der entstehenden quadratischen Restmatrix wenigstens zwei Zeilen elementweise übereinstimmen.

In unserem Beispiel ist also die Zahl 2 die höchste Ordnung aller von null verschiedenen Unterdeterminanten der Matrix  $\mathfrak{A}$ . Die auf diese Weise charakterisierte Zahl heißt der Rang der Matrix  $\mathfrak{A}$ .

Definition 13. Ist  $r$  die höchste Ordnung aller von null verschiedenen Unterdeterminanten einer Matrix  $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O}$ , so heißt die Zahl  $r$  der Rang  $\rho(\mathfrak{A})$  der Matrix  $\mathfrak{A}$ . Ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$ , so ist  $\rho(\mathfrak{A}) = 0$ .

Aus der Definition 13 folgt unmittelbar, dass der Rang einer Matrix  $\mathfrak{A}$  vom Typ  $(m, n)$  niemals größer sein kann, als die kleinere der beiden Zahlen  $m, n$ , d.h., es gilt stets die Ungleichung

$$\rho(\mathfrak{A}) \leq \min(m, n)$$

Die unmittelbare Anwendung der Definition 13 zur Rangbestimmung einer Matrix kann einen größeren Rechenaufwand erfordern. Mit Hilfe des folgenden Satzes lässt sich die Rechenarbeit erheblich vereinfachen.

Satz 19. Entsteht eine Matrix  $\mathfrak{B}$  aus einer Matrix  $\mathfrak{A}$  dadurch, dass

- I. zwei parallele Reihen vertauscht werden,
- II. eine Reihe mit einer von null verschiedenen reellen Zahl  $t$  multipliziert wird,
- III. zu einer Reihe ein beliebiges Vielfaches einer parallelen Reihe addiert wird,

so haben die beiden Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  denselben Rang, d.h., es gilt

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{B})$$

Beweis. Die Behauptung für die Umformung I bzw. III folgt aus Determinanteneigenschaften (Determinanten, Satz 24 bzw. Satz 23).

Bei der Umformung II unterscheiden sich in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  entsprechende Unterdeterminanten, das sind solche Unterdeterminanten, die aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  durch Streichen dergleichen Zeilen und Spalten hervorgehen, höchstens um den Faktor  $t$ .

Das Verschwinden oder Nichtverschwinden dieser Unterdeterminanten wird aber durch den Faktor  $t \neq 0$  nicht beeinflusst. Der Rang bleibt also auch bei dieser Umformung unverändert, womit der Satz bewiesen ist.

Entsteht eine Matrix  $\mathfrak{B}$  aus einer Matrix  $\mathfrak{A}$  mit Hilfe der Umformungen I, II, III, so sagt man in Analogie zu 3.2., die Matrix  $\mathfrak{B}$  entstehe durch elementare Umformungen der Matrix  $\mathfrak{A}$ . Auf Grund von Satz 19 bleibt also der Rang einer Matrix bei elementaren Umformungen unverändert.

Satz 20. Jede von der Nullmatrix verschiedene Matrix  $\mathfrak{A}$  kann durch elementare Umformungen in die Form

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit

$$b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0 \quad (3)$$

übergeführt werden, und es gilt

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{B}) = r \quad (4)$$

Beweis. Wir können durch elementare Umformungen erreichen dass in

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

das Element  $a_{11}$  von null verschieden ist. Ist nämlich  $a_{11} = 0$ , aber  $a_{i1} \neq 0$ , so vertauschen wir in  $\mathfrak{A}$  die erste Zeile mit der  $i$ -ten Zeile. Verschwinden alle Elemente der ersten Spalte, so gibt es auf Grund der Voraussetzung  $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{D}$  in  $\mathfrak{A}$  mindestens ein von null verschiedenes Element  $a_{ik}$ , d.h., es verschwinden nicht alle Elemente der  $k$ -ten Spalte.

Vertauschen wir die erste Spalte mit der  $k$ -ten Spalte, so verschwinden nicht alle Elemente in der ersten Spalte. Damit haben wir das Problem auf den bereits besprochenen Fall zurückgeführt.

Addieren wir nun der Reihe nach die erste Zeile nach Multiplikation mit  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$  bzw.  $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$  ... bzw.  $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$  zur zweiten bzw. dritten bzw.  $m$ -ten Zeile, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

mit  $a_{11} \neq 0$ . Verschwinden in dieser Matrix alle Elemente der zweiten bis  $m$ -ten Zeile, so ist das Verfahren beendet.

Anderenfalls können wir durch analoge Umformungen innerhalb der zweiten bis  $m$ -ten Zeile bzw. der zweiten bis  $n$ -ten Spalte erreichen, dass  $a'_{22} \neq 0$  ist und die unterhalb von  $a'_{22}$  stehenden Elemente verschwinden. Die erste Zeile bleibt dabei unverändert.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir in dieser Weise die Form (2), (3). Die Bedingung (3) besagt, dass die von null verschiedenen Elemente der Hauptdiagonale von  $\mathfrak{B}$  unmittelbar aufeinanderfolgen müssen. Die Unterdeterminante  $r$ -ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\dots b_{rr}$$

von  $\mathfrak{B}$  ist wegen (3) von null verschieden. Alle Unterdeterminanten höherer als  $r$ -ter Ordnung von  $\mathfrak{B}$  verschwinden, da wenigstens in einer Zeile alle Elemente null sind.

Damit ist  $\rho(\mathfrak{B}) = r$ , und auf Grund von Satz 19 gilt  $\rho(\mathfrak{A}) = r$ , womit der Satz bewiesen ist.

Will man also den Rang einer Matrix  $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O}$  bestimmen, so kann man  $\mathfrak{A}$  mit Hilfe elementarer Umformungen auf die Form (2) bringen. Die Anzahl der unmittelbar aufeinanderfolgenden von null verschiedenen Elemente der Hauptdiagonale gibt dann den Rang der Ausgangsmatrix an.

Beispiel 12. Wir bestimmen den Rang der Matrizen

$$\text{a) } \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Wir subtrahieren von der zweiten bzw. dritten Zeile die erste Zeile. Auf Grund von Satz 19 gilt dann

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Anschließend subtrahieren wir von der dritten Zeile das Doppelte der zweiten Zeile und addieren zum Doppelten der vierten Zeile die zweite Zeile:

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die so erhaltene Matrix ist von der Form (2). Demnach ist

$$\rho(\mathfrak{A}) = 2$$

b) Die Matrix  $\mathfrak{B}$  besitzt nicht die Form (2), da die beiden von null verschiedenen Elemente der Hauptdiagonale nicht unmittelbar aufeinanderfolgen. Aus diesem Grund dürfen wir nicht schließen, dass die Matrix  $\mathfrak{B}$  den Rang 2 besitzt.

Um die Form (2) zu erhalten, können wir etwa folgende Umformungen vornehmen: Wir addieren zur zweiten Zeile die dritte Zeile und anschließend vertauschen wir die zweite und die vierte Spalte. Dann gilt

$$\rho(\mathfrak{B}) = \rho \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subtrahieren wir von der dritten Zeile das Doppelte der zweiten Zeile, so erhalten wir die Form (2), und es ist

$$\rho(\mathfrak{B}) = \rho \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

c) Vertauschen wir die erste und die fünfte Spalte, so folgt

$$\rho(\mathfrak{B}) = 2$$

Aufgabe 10. Man berechne den Rang der Matrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11. Man beweise, dass sich die Ränge der beiden Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

höchstens um eins unterscheiden können.

Eine Erweiterung von Satz 20 ist

Satz 21. Jede von der Nullmatrix verschiedene Matrix  $\mathfrak{A}$  kann durch elementare Umformungen in die sogenannte Normalform

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+2} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

mit

$$c_{11} \neq 0, \quad c_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad c_{rr} \neq 0 \quad (6)$$

übergeführt werden, und es gilt .

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{C}) = r \quad (7)$$

Beweis. Addieren wir der Reihe nach in (2) die  $r$ -te Zeile nach Multiplikation mit  $-\frac{b_{r-1,r}}{b_{rr}}$  bzw.  $-\frac{b_{r-2,r}}{b_{rr}}$  bzw.  $-\frac{b_{1r}}{b_{rr}}$  zur  $(r-1)$ -ten bzw.  $(r-2)$ -ten bzw. ersten Zeile, so erhalten wir eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & 0 & b'_{1,r+1} & \dots & b'_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 & b'_{2,r+1} & \dots & b'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

in der alle Elemente der  $r$ -ten Spalte bis auf das Element  $b_{rr}$  verschwinden. Anschließend addieren wir in dieser Matrix geeignete Vielfache der  $(r-1)$ -ten Zeile zur  $(r-2)$ -ten ... bzw. ersten Zeile so, dass in der entstehenden Matrix auch alle Elemente der  $(r-1)$ -ten Spalte bis auf das Element  $b'_{r-1,r-1}$  verschwinden.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir in dieser Weise die Form (5), (6). Die Matrix  $\mathfrak{C}$  hat auf Grund von Satz 19 denselben Rang wie die Matrix  $\mathfrak{B}$ , und in Verbindung mit (4) erhalten wir 7), womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 13. Wir überführen die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe elementarer Umformungen in die Normalform. Addieren wir zum Doppelten der ersten Zeile die zweite Zeile, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat die gewünschte Form.

## 4 Lineare Gleichungssysteme

### 4.1 Transformation auf Normalform

Die Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (1)$$

nennt man auch die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems.

Der folgende Satz wird uns die Überlegungen in den beiden folgenden Abschnitten erleichtern.

Satz 22. Jedes lineare Gleichungssystem der Form (1), in dem nicht alle Koeffizienten  $a_{ik}$  verschwinden, kann durch elementare Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen in die sogenannte Normalform

$$\left. \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n = q_1 \\ c_{22}x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n = q_2 \\ \dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n = q_r \\ \quad \quad \quad 0 = q_{r+1} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad 0 = q_m \end{array} \right\} \quad (2)$$

mit

$$c_{11} \neq 0, \quad c_{22} \neq 0, \quad c_{rr} \neq 0 \quad (3)$$

übergeführt werden.<sup>2</sup> Die Systeme (1) und (2) haben dieselbe Lösungsmannigfaltigkeit.

Zur Vorbereitung des Beweises, der den Beweisen der Sätze 20 und 21 völlig analog ist, führen wir zunächst die Transformation auf Normalform an einigen Beispielen durch.

Beispiel 14. Wir transformieren die linearen Gleichungssysteme

$$a) \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 2 \\ \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 3 \end{array} \right\}$$

mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen auf Normalform.

<sup>2</sup>Zur Vereinfachung der Bezeichnung haben wir in dem System (2) die gleiche Reihenfolge der Variablen wie im Ausgangssystem (1) gewählt, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

a) Zunächst eliminieren wir aus der zweiten und dritten Gleichung die Variable  $x_1$ , während wir die erste Gleichung unverändert lassen. Dazu multiplizieren wir zuerst beide Seiten der ersten Gleichung mit  $-1$  und addieren das Ergebnis zu den entsprechenden Seiten der zweiten Gleichung. Wir erhalten

$$\left. \begin{array}{rccccrc} x_1 & +x_2 & -4x_3 & & -4x_5 & = & 6 \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 \\ x_1 & -3x_2 & & -4x_4 & & = & 2 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 \end{array} \right\}$$

In den folgenden Schritten sind Faktoren zur Multiplikation der beiden Seiten einer Gleichung jeweils am Rande angegeben. Die ebenfalls angebrachten Pfeile führen zu der Gleichung, die durch eine andere ersetzt werden soll.

$$\begin{array}{rccccrc|c|c} x_1 & +x_2 & -4x_3 & & -4x_5 & = & 6 & -1 & | \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 & & | \\ x_1 & -3x_2 & & -4x_4 & & = & 2 & 1 & \downarrow \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 & & | \\ \hline x_1 & +x_2 & -4x_3 & & -4x_5 & = & 6 & & | \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 & & | \\ & -4x_2 & +4x_3 & -4x_4 & +4x_5 & = & -4 & & | \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 & & | \end{array}$$

Jetzt eliminieren wir analog aus der dritten und vierten Gleichung die Variable  $x_2$ , während wir die ersten beiden Gleichungen unverändert lassen:

$$\begin{array}{rccccrc|c|c|c} x_1 & +x_2 & -4x_3 & & -4x_5 & = & 6 & & | \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 & -2 & | & 1 & | \\ & -4x_2 & +4x_3 & -4x_4 & +4x_5 & = & -4 & 1 & \downarrow & & | \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 & & & 2 & \downarrow \\ \hline x_1 & +x_2 & -4x_3 & & -4x_5 & = & 6 & & | \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 & & | \\ & & & & 0 & = & 0 & & | \\ & & & & 0 & = & 0 & & | \end{array}$$

Aus dem letzten System erhalten wir die gewünschte Form (2), indem wir die zweite Gleichung unverändert lassen und aus der ersten Gleichung die Variable  $x_2$  eliminieren:

$$\begin{array}{rccccrc|c|c} x_1 & +x_2 & -4x_3 & & -4x_5 & = & 6 & 2 & \uparrow \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 & 1 & | \\ & & & & 0 & = & 0 & & | \\ & & & & 0 & = & 0 & & | \\ \hline x_1 & & -6x_3 & -2x_4 & -6x_5 & = & 10 & & | \\ & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & -2 & & | \\ & & & & 0 & = & 0 & & | \\ & & & & 0 & = & 0 & & | \end{array} \quad (3')$$

In unserem Beispiel ist also  $r = 2$  und  $c_{11} = 2$ ,  $c_{22} = -2$ ,  $q_1 = 10$ ,  $q_2 = -2$ ,  $q_3 = q_4 = 0$ .

b) Wir erhalten

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 3x_1 & +3x_2 & -x_3 & +5x_4 & = 0 & -5 & | & -4 & | \\
 5x_1 & +5x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = 0 & 3 & \downarrow & & | \\
 4x_1 & +4x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 & & & 3 & \downarrow \\
 \hline
 3x_1 & +3x_2 & -x_3 & +5x_4 & = 0 & & & & | \\
 & & 14x_3 & -34x_4 & = 0 & & & & | \\
 & & 7x_3 & -17x_4 & = 0 & & & & |
 \end{array}$$

Da in diesem Gleichungssystem in der zweiten und dritten Gleichung die Variable  $x_2$  nicht mehr auftritt, ändern wir die Reihenfolge der Variablen ab:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 3x_1 & -x_3 & +5x_4 & +3x_2 & = 0 & & & & | \\
 & 14x_3 & -34x_4 & & = 0 & & \frac{1}{2} & & | \\
 & 7x_3 & -17x_4 & & = 0 & & & & | \\
 \hline
 3x_1 & -x_3 & +5x_4 & +3x_2 & = 0 & & & & | \\
 & 7x_3 & -17x_4 & & = 0 & & 1 & | \\
 & 7x_3 & -17x_4 & & = 0 & & -1 & \downarrow \\
 \hline
 3x_1 & -x_3 & +5x_4 & +3x_2 & = 0 & & 7 & \uparrow \\
 & 7x_3 & -17x_4 & & = 0 & & 1 & | \\
 & & & & 0 & = 0 & & | \\
 \hline
 21x_1 & & +18x_4 & +21x_2 & = 0 & & & & | \\
 & 7x_3 & -17x_4 & & = 0 & & & & | \\
 & & & & 0 & = 0 & & & |
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 3x_1 & +x_2 & = 1 & 5 & | & 4 & | \\
 5x_1 & +x_2 & = 2 & -3 & \downarrow & & | \\
 4x_1 & +x_2 & = 3 & & & -3 & \downarrow \\
 \hline
 3x_1 & +x_2 & = 1 & & & & | \\
 & 2x_2 & = -1 & 1 & | & & | \\
 & x_2 & = -5 & -2 & \downarrow & & | \\
 \hline
 3x_1 & +x_2 & = 1 & 2 & \uparrow & & | \\
 & 2x_2 & = -1 & -1 & | & & | \\
 & 0 & = 9 & & & & | \\
 \hline
 6x_1 & & = 3 & & & & | \\
 & 2x_2 & = -1 & & & & | \\
 & 0 & = 9 & & & & |
 \end{array}$$

Beweis von Satz 22. Verschwinden in (1) alle Koeffizienten von  $x_1$ , so ändern wir die Reihenfolge der Variablen ab. Dieser Schritt entfällt, wenn wenigstens ein Koeffizient von  $x_1$  von null verschieden ist.

Dann können wir, falls erforderlich, durch Vertauschen der Gleichungen erreichen, dass der Koeffizient an von null verschieden ist.

Wir eliminieren jetzt aus der zweiten, dritten, ...,  $m$ -ten Gleichung die Variable  $x_1$ , während wir die erste Gleichung unverändert lassen;

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 & -a_{21} & | & -a_{m1} & | \\
 a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 & a_{11} & \downarrow & & | \\
 \dots & & & & & & & & | \\
 \hline
 a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m & & & a_{11} & \downarrow
 \end{array}$$

#### 4.1 Transformation auf Normalform

$$\begin{array}{cccc|c}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a'_{22}x_2 & +\dots & +a'_{2n}x_n & = b'_2 \\
 \dots & & & & \\
 & a'_{m2}x_2 & +\dots & +a'_{mn}x_n & = b'_m
 \end{array} \quad (4)$$

Verschwinden in diesem System alle Koeffizienten der zweiten bis  $m$ -ten Gleichung, so ist die Normalform bereits erreicht. Anderenfalls können wir durch eine eventuelle Abänderung der Reihenfolge der Variablen  $x_2, x_3, \dots, x_m$  und, falls erforderlich, durch Vertauschen der zweiten bis  $m$ -ten Gleichungen erreichen, dass  $a'_{22} \neq 0$  ist.

Wir eliminieren jetzt in (4) aus der dritten, ...,  $m$ -ten Gleichung die Variable  $x_2$ , während wir die ersten beiden Gleichungen unverändert lassen:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 & & \\
 & a'_{22}x_2 & +a'_{23}x_3 & +\dots & +a'_{2n}x_n & = b'_2 & -a'_{32} & | & -a'_{m2} & | \\
 & a'_{32}x_2 & +a'_{33}x_3 & +\dots & +a'_{3n}x_n & = b'_3 & a'_{22} & \downarrow & & | \\
 \dots & & & & & & & & & \\
 & a'_{m2}x_2 & +a'_{m3}x_3 & +\dots & +a'_{mn}x_n & = b'_m & & & a'_{22} & \downarrow \\
 \hline
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 & & & & \\
 & a'_{22}x_2 & +a'_{23}x_3 & +\dots & +a'_{2n}x_n & = b'_2 & & & & \\
 & & a''_{33}x_3 & +\dots & +a''_{3n}x_n & = b''_3 & & & & \\
 \dots & & & & & & & & & \\
 & & a''_{m3}x_3 & +\dots & +a''_{mn}x_n & = b''_m & & & & 
 \end{array}$$

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir in dieser Weise ein System der Form

$$\left. \begin{array}{cccccc}
 b_{11}x_1 & +b_{12}x_2 & +\dots & +b_{1r}x_r & +b_{1,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{1n}x_n & = p_1 \\
 & b_{22}x_2 & +\dots & +b_{2r}x_r & +b_{2,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{2n}x_n & = p_2 \\
 & & \dots & & & & & \\
 & & & b_{rr}x_r & +b_{r,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{rn}x_n & = p_r \\
 & & & & & & & 0 = p_{r+1} \\
 & & & & & & & \dots \\
 & & & & & & & 0 = p_m
 \end{array} \right\} \quad (5)$$

mit  $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0$ . (6)

Anschließend eliminieren wir in (5) aus der ersten, zweiten, ...,  $(r-1)$ -ten Gleichung die Variable  $x_r$  während wir die  $r$ -te Gleichung unverändert lassen:

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
 b_{11}x_1 & +b_{12}x_2 & +\dots & +b_{1r}x_r & +b_{1,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{1n}x_n & = p_1 & b_{rr} & \uparrow & & \\
 & b_{22}x_2 & +\dots & +b_{2r}x_r & +b_{2,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{2n}x_n & = p_2 & & & b_{rr} & \uparrow \\
 & \dots & & & & & & & & & & \\
 & & & b_{rr}x_r & +b_{r,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{rn}x_n & = p_r & -b_{1r} & | & -b_{2r} & | \\
 & & & & & & & 0 = p_{r+1} & & & & \\
 & & & & & & & \dots & & & & \\
 & & & & & & & 0 = p_m & & & & \\
 \hline
 b'_{11}x_1 & +b'_{12}x_2 & +\dots & +b'_{1r}x_r & +b'_{1,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b'_{1n}x_n & = p'_1 & & & & \\
 & b'_{22}x_2 & +\dots & +b'_{2r}x_r & +b'_{2,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b'_{2n}x_n & = p'_2 & & & & \\
 & & \dots & & & & & & & & & \\
 & & & b_{rr}x_r & +b_{r,r+1}x_{r+1} & +\dots & +b_{rn}x_n & = p_r & & & & \\
 & & & & & & & 0 = p_{r+1} & & & & \\
 & & & & & & & \dots & & & & \\
 & & & & & & & 0 = p_m & & & & 
 \end{array}$$

In gleicher Weise eliminieren wir in dem letzten System aus der ersten, zweiten, ...,  $(r - 2)$ -ten Gleichung die Variable  $x_{r-1}$  usw.; bis wir schließlich nach endlich vielen Schritten die Normalform (2), (3) erhalten.

Da die Normalform (2) aus dem System (1) durch elementare Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen hervorgegangen ist, besitzen beide Systeme auf Grund von Satz 14 und 3.2.(5) dieselbe Lösungsmannigfaltigkeit, d.h.; beide Gleichungssysteme haben dieselben Lösungen, oder beide Systeme sind nicht lösbar.

## 4.2 Homogene lineare Gleichungssysteme

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

von  $m$  Gleichungen mit  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzt stets die sogenannte triviale Lösung

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad (2)$$

Besitzt das System (1) neben (2) noch eine weitere Lösung, in der also nicht alle  $x_i = 0$  sind, so nennt man diese Lösung eine nichttriviale Lösung von (1).

In diesem Fall sagt man, das System (1) ist nichttrivial lösbar. Besitzt (1) dagegen nur die Lösung (2), so sagt man, das System ist nur trivial lösbar.

Wie wir in 4.1. bewiesen haben, lässt sich das System (1), falls in (1) nicht alle Koeffizienten verschwinden, mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen stets auf Normalform bringen. Das System (1) und die Normalform besitzen wegen Satz 14 und 3.2.(5) dieselbe Lösungsmannigfaltigkeit.

Im Fall eines homogenen linearen Gleichungssystems nimmt die Normalform 4.1.(2) die einfache Gestalt

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n &= 0 \\ c_{22}x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n &= 0 \\ &0 = 0 \\ &\dots \\ &0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

mit

$$c_{11} \neq 0, \quad c_{22} \neq 0, \quad \dots, c_{rr} \neq 0 \quad (3)$$

an. Das System (1) bzw. (1') lautet in Matrixschreibweise  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  bzw.  $\mathfrak{C}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  und es ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Beim Übergang vom Gleichungssystem (1) zum System (1') ist die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{C}$  aus der Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  durch elementare Umformungen entstanden, wobei die Umformungen des Typs II und III auf Zeilen beschränkt blieben. Auf Grund von Satz 21 gilt dann

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{C}) = r \quad (6)$$

Da beide Systeme (1) und (1') dieselbe Lösungsmannigfaltigkeit besitzen, ist es gleichgültig, an welchem der beiden Systeme wir im Fall  $r > 0$  unsere weiteren Untersuchungen vornehmen.

Die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  des Gleichungssystems (1) habe den Rang  $n$ . Es ist dann notwendigerweise  $m \geq n$ , d.h., die Anzahl der Gleichungen von (1) ist mindestens so groß wie die Anzahl der Variablen von (1). Unter der Voraussetzung  $\rho(\mathfrak{A}) = n$  gilt wegen (6) auch  $\rho(\mathfrak{C}) = n$ , d.h., (5) bzw. (1') geht über in

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$c_{11} \neq 0, \quad c_{22} \neq 0, \quad \dots, c_{nn} \neq 0 \quad (7)$$

bzw.

$$\left. \begin{array}{l} c_{11}x_1 = 0 \\ c_{22}x_2 = 0 \\ \dots \\ c_{nn}x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

wobei wir in (8) die letzten eventuell auftretenden  $m - n$  trivialen Gleichungen  $0 = 0$  bereits weggelassen haben.

Das System (8) besitzt wegen (7) offensichtlich die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

die auch die Lösung des Ausgangssystems (I) ist.

Damit haben wir bewiesen:

Hat die Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems mit  $n$  Variablen den Rang  $n$ , so ist das Gleichungssystem nur trivial lösbar. (9)

Durch Kontraposition erhalten wir aus (9) die zu (9) logisch äquivalente Aussage.

Ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit  $n$  Variablen nichttrivial lösbar, so ist der Rang der Koeffizientenmatrix von  $n$  verschieden. (10)

Da der Rang der Koeffizientenmatrix (4) nicht größer als  $n$  sein kann, geht (10) über in

Ist ein homogenes lineares Gleichungssystem (mit  $n$  Variablen nichttrivial lösbar, so ist der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als  $n$ . (11)

Von (11) gilt auch die Umkehrung. Diese lautet:

Ist der Rang der Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems mit  $n$  Variablen kleiner als  $n$ , so ist das Gleichungssystem nichttrivial lösbar. (12)

Beweis von (12). Mit  $r$  bezeichnen wir den Rang der Koeffizientenmatrix (4). Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1. Es sei  $r = 0$ .

Dann verschwinden auf Grund von Definition 13 alle Koeffizienten des Gleichungssystems (1), und es ist

$$x_1 = g_1, \quad x_2 = g_2, \quad \dots, x_n = g_n \quad (13)$$

wobei  $g_1, g_2, \dots, g_n$  beliebige reelle Zahlen sind, eine Lösung von (1), denn das Tupel (13) genügt jeder Gleichung des Systems (1).

Beispielsweise ist also

$$x_1 = \dots = x_{i-1} = 0, \quad x_i = d_i, \dots, \quad x_n = 0$$

mit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $d_i \neq 0$  eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems (1). Diese Lösung schreiben wir in Vektorform und bezeichnen den so entstehenden Vektor mit  $\mathfrak{x}_i$ :

$$\mathfrak{x}_i = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{i-1}, d_i, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-i} \quad (14)$$

Fall 2. Es sei  $0 < r < n$ .

Wir gehen vom System (1') aus, das wir in der Form

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 &= -c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1,r+i}x_{r+i} - \dots - c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2 &= -c_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{2,r+i}x_{r+i} - \dots - c_{2n}x_n \\ &\dots \\ c_{rr}x_r &= -c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{r,r+i}x_{r+i} - \dots - c_{rn}x_n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

schreiben. Setzen wir beispielsweise

$$x_{r+1} = 0, \dots, x_{r+i-1} = 0, \quad x_{r+i} = d_i, \quad x_{r+i+1} = 0, \dots, x_n = 0 \quad (15a)$$

mit  $i \in \{1, 2, \dots, n-r\}$  und  $d_i \neq 0$ , so geht (15) über in

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 &= -c_{1,r+i}d_i \\ c_{22}x_2 &= -c_{2,r+i}d_i \\ &\dots \\ c_{rr}x_r &= -c_{r,r+i}d_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Das Gleichungssystem (16) besitzt wegen (3) offensichtlich genau eine Lösung, die wir mit

$$x_1 = d_{1i}, x_2 = d_{2i}, \dots, x_r = d_{ri}$$

bezeichnen. Es ist dann

$$x_1 = d_{1i}, x_2 = d_{2i}, \dots, x_r = d_{ri}, x_{r+1} = 0, \dots, x_{r+i-1} = 0, x_{r+i} = d_i, x_{r+i+1} = 0, \dots, x_n = 0 \quad (17)$$

mit  $i \in \{1, 2, \dots, n - r\}$  und  $d_i \neq 0$  eine Lösung des Gleichungssystems (15) und damit auch des Ausgangssystems (1). Die Lösung (17) schreiben wir wieder in Vektorform und bezeichnen den so entstehenden Vektor mit  $\mathbf{x}_i$ :

$$\mathbf{x}_i = (d_{1i}, \dots, d_{ri}, \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, d_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r-i})^T \quad (18)$$

Da die  $(r + i)$ -te Koordinate  $d_i$  nicht verschwindet, ist  $\mathbf{x}_i$  ein nichttrivialer Lösungsvektor von (15) bzw. von (1), d.h., das System (1) ist also auch im Fall  $0 < r < n$  nichttrivial lösbar. Damit ist (12) bewiesen.

Ist in (1) die Anzahl  $m$  der Gleichungen kleiner als die Anzahl  $n$  der Variablen, so kann der Rang der Koeffizientenmatrix höchstens  $m$  betragen. Aus  $\rho(\mathfrak{A}) \leq m$  und  $m < n$  folgt  $\rho(\mathfrak{A}) < n$ . Damit ist die Voraussetzung in (12) erfüllt, und wir erhalten den

Satz 23. Ist in einem homogenen linearen Gleichungssystem mit  $n$  Variablen die Anzahl der Gleichungen kleiner als  $n$ , so ist das Gleichungssystem nichttrivial lösbar.

Beispiel 15. Da in dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

die Anzahl der Gleichungen ( $m = 4$ ) kleiner ist als die Anzahl der Variablen ( $n = 5$ ), so ist das System auf Grund von Satz 23 nichttrivial lösbar.

Die beiden Teilergebnisse (11) und (12) fassen wir zusammen zum

Satz 24. Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit  $n$  Variablen ist nichttrivial lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als  $n$  ist.

Dieser Satz ist logisch äquivalent mit

Satz 25. Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit  $n$  Variablen ist nur trivial lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich  $n$  ist.

Mit Hilfe von Satz 25 lässt sich die Untersuchung, ob die  $n$  Spaltenvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})^T \\ &\dots \\ \mathbf{a}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})^T \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

bzw. die  $n$  Zeilenvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ &\dots \\ \mathbf{a}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

linear unabhängig sind, vereinfachen. Entsprechend 2.3. müssen wir den Ansatz

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (20)$$

machen und prüfen, ob diese Gleichung nur die triviale Lösung besitzt. Aus dem Ansatz (20) lesen wir ein homogenes lineares Gleichungssystem  $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$  mit  $n$  Variablen ab, dessen Koeffizientenmatrix die Matrix (4) ist.

Die Elemente der ersten bzw. zweiten ... bzw.  $n$ -ten Spalte von  $\mathfrak{A}$  sind die Koordinaten des ersten bzw. zweiten ... bzw.  $n$ -ten Vektors von (19a) bzw. (19b).

Hat diese Matrix  $\mathfrak{A}$  den Rang  $n$ , so besitzt das homogene lineare Gleichungssystem und damit auch die Gleichung (20) nur die triviale Lösung. Die Spalten- bzw. Zeilenvektoren sind dann linear unabhängig.

Aufgabe 12. Man untersuche, ob die Zeilenvektoren

$$\mathfrak{a}_1 = (1, 2, 3, 4) \quad , \quad \mathfrak{a}_2 = (1, 3, 3, 4) \quad , \quad \mathfrak{a}_3 = (1, 2, 4, 5)$$

linear abhängig sind.

Aufgabe 13. Man zeige, dass die Spaltenvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= (d_1, 0, 0, \dots, 0, 0)^T \\ \mathfrak{x}_2 &= (0, d_2, 0, \dots, 0, 0)^T \\ &\dots \\ \mathfrak{x}_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, d_n)^T \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

wobei  $d_1, d_2, \dots, d_n$  beliebige von null verschiedene reelle Zahlen sind, linear unabhängig sind.

Der folgende Satz beantwortet die Frage, wie man alle Lösungen eines nichttrivial lösbaren homogenen linearen Gleichungssystems erhält.

Satz 26. Ist in einem homogenen linearen Gleichungssystem mit  $n$  Variablen der Rang  $r$  der Koeffizientenmatrix kleiner als  $n$ , so gibt es  $n - r$  linear unabhängige Lösungsvektoren, und jeder Lösungsvektor dieses Systems ist eine Linearkombination dieser  $n - r$  linear unabhängigen Lösungsvektoren.

Beweis.

Fall 1. Es sei  $r = 0$ .

Setzen wir in (14) für  $i$  der Reihe nach die Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ein, so erhalten wir die  $n$  Lösungsvektoren (21) des Gleichungssystems (1). Diese Vektoren sind, wie wir in Aufgabe 13 gezeigt haben, linear unabhängig. Auf Grund von Satz 12 ist auch eine beliebige Linearkombination dieser Vektoren, also der Vektor

$$t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2 + \dots + t_n\mathfrak{x}_n$$

ein Lösungsvektor von (1). Es bleibt noch zu zeigen, dass jeder Lösungsvektor

$$\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \quad (22)$$

von (1) eine Linearkombination der Vektoren (21) ist. Dazu machen wir mit unbekanntem  $t_1, t_2, \dots, t_n$  den Ansatz

$$t_1\mathfrak{x}_1 + t_2\mathfrak{x}_2 + \dots + t_n\mathfrak{x}_n = \mathfrak{g}$$

Aus diesem Ansatz lesen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} d_1 t_1 &= g_1 \\ d_2 t_2 &= g_2 \\ &\dots \\ d_n t_n &= g_n \end{aligned} \right\}$$

ab. Dieses Gleichungssystem besitzt wegen  $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \dots, d_n \neq 0$  die eindeutig bestimmte Lösung

$$t_1 = \frac{g_1}{d_1}, t_2 = \frac{g_2}{d_2}, \dots, t_n = \frac{g_n}{d_n}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{g} = \frac{g_1}{d_1} \mathbf{x}_1 + \frac{g_2}{d_2} \mathbf{x}_2 + \dots + \frac{g_n}{d_n} \mathbf{x}_n$$

Damit haben wir gezeigt, dass im Fall  $r = 0$  jeder Lösungsvektor von (1) als Linearkombination der  $n$  Lösungsvektoren (21) darstellbar ist.

Fall 2.

Es sei  $0 < r < n$ .

Setzen wir in (18) für  $i$  der Reihe nach die Zahlen  $1, 2, \dots, n - r$  ein, so erhalten wir die  $n_r$  Lösungsvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (d_{11}, d_{21}, \dots, d_{r1}, d_1, 0, 0, \dots, 0)^\top \\ \mathbf{x}_2 &= (d_{12}, d_{22}, \dots, d_{r2}, 0, d_2, 0, \dots, 0)^\top \\ &\dots \\ \mathbf{x}_{n-r} &= (d_{1,n-r}, d_{2,n-r}, \dots, d_{r,n-r}, 0, 0, 0, \dots, d - n - r)^\top \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

des Gleichungssystems (1) bzw. (15). Von diesen Vektoren haben wir in Aufgabe 3 gezeigt, dass sie linear unabhängig sind. Auf Grund von Satz 12 ist auch eine beliebige Linearkombination dieser Vektoren, also der Vektor

$$t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \dots + t_{n-r} \mathbf{x}_{n-r}$$

ein Lösungsvektor von (1) bzw. (15). Wir müssen noch zeigen, dass jeder Lösungsvektor (22) von (1) bzw. (15) eine Linearkombination der Vektoren (23) ist. (Dazu machen wir mit unbekanntem  $t_1, t_2, \dots, t_{n-r}$  den Ansatz

$$t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \dots + t_{n-r} \mathbf{x}_{n-r} = \mathbf{g} \quad (24)$$

aus dem wir das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11}t_1 + d_{12}t_2 + \dots + d_{1,n-r}t_{n-r} = g_1 \\ d_{21}t_1 + d_{22}t_2 + \dots + d_{2,n-r}t_{n-r} = g_2 \\ \dots \\ d_{r1}t_1 + d_{r2}t_2 + \dots + d_{r,n-r}t_{n-r} = g_r \\ d_1 t_1 = g_{r+1} \\ d_2 t_2 = g_{r+2} \\ \dots \\ d_{n-r} t_{n-r} = g_n \end{array} \right\} \quad (25,26)$$

ablesen. Wegen  $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \dots, d - n - r \neq 0$  besitzt das Teilsystem (26) des Gleichungssystem ((25), (26)) die eindeutig bestimmte Lösung

$$t_1 = \frac{g_{r+1}}{d_1}, t_2 = \frac{g_{r+2}}{d_2}, \dots, t_{n-r} = \frac{g_n}{d_{n-r}} \quad (27)$$

Wir zeigen, dass (27) die Lösung der Vektorgleichung (24) und damit auch des Systems ((25), (26)) ist. Dazu führen wir den Vektor

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{g} - \frac{g_{r+1}}{d_1} \mathbf{x}_1 - \frac{g_{r+2}}{d_2} \mathbf{x}_2 - \dots - \frac{g_n}{d_{n-r}} \mathbf{x}_{n-r} \quad (28)$$

ein, dessen letzten  $n - r$  Koordinaten verschwinden. Bezeichnen wir die noch unbekanntesten ersten  $r$  Koordinaten von  $\eta$  mit  $y_1, y_2, \dots, y_r$ , so gilt

$$\eta = (y_1, y_2, \dots, y_r, 0, 0, \dots, 0)^{\text{intercal}}$$

Da der Vektor  $\eta$  auf Grund von (28) eine Linearkombination der Lösungsvektoren  $\mathfrak{g}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_{n-r}$  des Gleichungssystems (1) bzw. (15) ist, so ist wegen Satz 12 auch  $\eta$  ein Lösungsvektor von (1) bzw. (15), d.h., seine Koordinaten genügen dem Gleichungssystem (15):

$$\left. \begin{aligned} c_{11}y_1 &= 0 \\ c_{22}y_2 &= 0 \\ c_{rr}y_r &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem besitzt wegen (3) die eindeutig bestimmte Lösung

$$y_1 = y_2 = \dots = y_r = 0$$

Demnach ist  $\eta = \mathfrak{o}$ , und (28) geht über in

$$\mathfrak{g} = \frac{g_{r+1}}{d_1}\mathfrak{x}_1 + \frac{g_{r+2}}{d_2}\mathfrak{x}_2 + \dots + \frac{g_n}{d_{n-r}}\mathfrak{x}_{n-r}$$

d.h., auch im Fall  $0 < r < n$  ist jeder Lösungsvektor von (1) auf genau eine Weise als Linearkombination der  $n - r$  Lösungsvektoren (23) darstellbar, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 16. Wir bestimmen die Lösungsmannigfaltigkeit des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Dieses System bringen wir mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen auf Normalform. Das ist bereits in 4.1.(3'), wenn wir dort die Absolutglieder durch null ersetzen, geschehen:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 6x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Die Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

des Systems (30) besitzt den Rang  $r = 2$ . Auf Grund von Satz 26 gibt es dann  $n - r = 5 - 2 = 3$  linear unabhängige Lösungsvektoren, die wir bestimmen wollen. Lassen wir in (30) die beiden letzten trivialen Gleichungen weg, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 6x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dieses System bringen wir auf die Form (15) und erhalten

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 3x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_2 &= x_3 - x_4 + x_5 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Setzen wir in (31) gemäß (15a) beispielsweise

$$x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_4 = 1, x_3 = x_5 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_5 = 1, x_3 = x_4 = 0$$

so erhalten wir

$$x_1 = 3, x_2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 1, x_2 = -1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 3, x_2 = 1$$

und damit die drei linear unabhängigen Lösungsvektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (3, 1, 1, 0, 0)^\top \\ \mathbf{x}_2 &= (1, -1, 0, 1, 0)^\top \\ \mathbf{x}_3 &= (3, 1, 0, 0, 1)^\top \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

des Systems (29). Auf Grund von Satz 26 lautet demnach die vollständige Lösung von (29)

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + t_3 \mathbf{x}_3 \quad (33)$$

bzw. in Koordinatenschreibweise

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 3t_1 + t_2 + 3t_3 \\ x_2 &= t_1 - t_2 + t_3 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= t_2 \\ x_5 &= t_3 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Von (31) gelangt man unmittelbar zur Koordinatenschreibweise (34), indem man in (31) für  $x_3$  bzw.  $x_4$  bzw.  $x_5$  beliebige reelle Zahlen  $t_1$  bzw.  $t_2$  bzw.  $t_3$  einsetzt, die freie Parameter heißen.

Da in (33) bzw. (34) drei freie Parameter auftreten, sagt man auch, die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems (29) sei dreifach unendlich.

Jede Lösung  $\mathbf{x}$  von (29) lässt sich als Linearkombination der  $n - r = 5 - 2 = 3$  linear unabhängigen Lösungsvektoren (32) darstellen.

Beispiel 17. Wir bestimmen die Lösungsmannigfaltigkeit des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Dieses System bringen wir mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen auf Normalform. Das ist bereits in Beispiel 14 b erfolgt:

$$\begin{array}{l|l} 21x_1 + 18x_4 + 21x_2 = 0 & 21x_1 + 18x_4 + 21x_2 = 0 \\ 7x_3 - 17x_4 = 0 & 7x_3 - 17x_4 = 0 \\ 0 = 0 & \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{6}{7}x_4 - x_2 \\ x_3 &= \frac{17}{7}x_4 \end{aligned} \right\}$$

Zur Vermeidung von Brüchen setzen wir  $x_4 = 7t_1$ ,  $x_2 = t_2$ .

Die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems (35) ist demnach

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -6t_1 - t_2 \\ x_2 &= t_2 \\ x_3 &= 17t_1 \\ x_4 &= 7t_1 \end{aligned} \right\}$$

Aufgabe 14. Man bestimme die Lösungsmannigfaltigkeit des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Aufgabe 15. Man untersuche, ob es zu der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in der  $a, b, c, d$  beliebige reelle Zahlen mit  $d \neq 0$  sind, zweireihige Matrizen  $\mathfrak{X}$  gibt, die der Bedingung

$$|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{X}| = |\mathfrak{A} + \mathfrak{X}|$$

genügen.

### 4.3 Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Bei inhomogenen linearen Gleichungssystemen der Form

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

betrachten wir neben der Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  noch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

vom Typ  $(m, n + 1)$ . Für diese Matrix schreibt man abkürzend  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ . Sie heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (1).

Es sei  $\rho(\mathfrak{A}) = r > 0$ . Das Gleichungssystem (1) lässt sich dann wegen  $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O}$  mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen auf die Normalform

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n &= q_1 \\ c_{22}x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n &= q_2 \\ &\dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n &= q_r \\ &0 = q_{r+1} \\ &\dots \\ &0 = q_m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

mit

$$c_{11} \neq 0, \quad c_{22} \neq 0, \quad \dots, c_{rr} \neq 0 \quad (4)$$

bringen. Das System (3) lautet in Matrixschreibweise

$$\mathfrak{C}x = q$$

mit

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(\mathfrak{C}, q) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & q_1 \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & q_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & q_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{r+1} \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

Beim Übergang vom Gleichungssystem (1) zum System (3) ist die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{C}$  aus der Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  und die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(\mathfrak{C}, q)$  aus der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(\mathfrak{A}, b)$  durch elementare Umformungen entstanden; wobei die Umformungen des Typs II und III auf Zeilen beschränkt blieben.

Auf Grund von Satz 21 bzw. Satz 19 gilt

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{C}) = r \quad , \quad \rho(\mathfrak{A}, b) = \rho(\mathfrak{C}, q) \quad (6,7)$$

Es sei

$$\rho(\mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{A}, b) = r \quad (8)$$

Dann ist  $r > 0$ , da in (1) wenigstens ein Absolutglied von null verschieden ist. Auf Grund von (6) und (7) gilt unter der Voraussetzung (8) für das System (3) in Verbindung mit (4) auch

$$\rho(\mathfrak{C}) = \rho(\mathfrak{C}, q) = r \quad (9)$$

Die Gleichung (9) besagt, dass wegen  $\rho(\mathfrak{C}, q) = r$  und auf Grund von (4) die Elemente  $q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_m$  in (5) verschwinden müssen. Damit geht das Gleichungssystem (3) über in

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n &= q_1 \\ c_{22}x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n &= q_2 \\ &\dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n &= q_r \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dieses System schreiben wir in der Form

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 &= q_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2 &= q_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{2n}x_n \\ &\dots \\ c_{rr}x_r &= q_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Setzen wir

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$$

so geht (11) über in

$$\left. \begin{array}{l} c_{11}x_1 = q_1 \\ c_{22}x_2 = q_2 \\ \dots \\ c_{rr}x_r = q_r \end{array} \right\} \quad (12)$$

Das Gleichungssystem (12) besitzt wegen (4) genau eine Lösung, die wir mit

$$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_r = x'_r$$

bezeichnen. Es ist dann

$$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_r = x'_r, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0 \quad (13)$$

eine Lösung des Gleichungssystems (10). Da das System (10) aus (1) durch elementare Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen hervorgegangen ist besitzt auch das lineare Gleichungssystem (1) die Lösung (13).

Die Lösung (13) von (1) geben wir in Vektorform an und bezeichnen den so entstehenden Vektor mit  $\mathfrak{x}_0$ :

$$\mathfrak{x}_0 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_r, 0, \dots, 0)^T \quad (14)$$

Das Gleichungssystem (1) ist also unter der Voraussetzung (8) lösbar. Damit haben wir bewiesen:

Stimmt in einem inhomogenen linearen Gleichungssystem mit  $n$  Variablen der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix überein, so ist das Gleichungssystem lösbar. (15)

Die spezielle Lösung (14) heißt auch eine partikuläre Lösung oder ein partikulärer Lösungsvektor des inhomogenen linearen Gleichungssystems (1).

Beispiel 18. In Beispiel 12a und Aufgabe 10 haben wir gezeigt, dass für das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{array} \right\} \quad (16)$$

$\rho(\mathfrak{A}) = 2$  und  $\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = 2$  gilt. Demnach ist das Gleichungssystem lösbar.

Zur Ermittlung eines partikulären Lösungsvektors  $\mathfrak{x}_0$  bringen wir das System (16) mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen auf Normalform. Das ist bereits in Beispiel 14a erfolgt. Lassen wir in dem System (3') die beiden letzten trivialen Gleichungen weg, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 6x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 10 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{array} \right\}$$

Dieses System bringen wir auf die Form (11):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 5 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 1 + x_3 - x_4 + x_5 \end{array} \right\} \quad (17)$$

Setzen wir  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ , so erhalten wir  $x_1 = 5, x_2 = 1$ . Demnach ist

$$\mathbf{x}_0 = (5, 1, 0, 0, 0)^T \quad (18)$$

ein partikulärer Lösungsvektor von (16).

Die Umkehrung von (15) lautet:

Ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit  $n$  Variablen lösbar, so stimmt der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix überein. (19)

Durch Kontraposition erhalten wir aus (19) die zu (19) logisch äquivalente Aussage

Stimmt in einem inhomogenen linearen Gleichungssystem mit  $n$  Variablen der Rang der Koeffizientenmatrix nicht mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix überein, so ist das Gleichungssystem nicht lösbar. (20)

Beweis von (20). Nach Voraussetzung gilt

$$\rho(\mathfrak{A}) \neq \rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \quad (21)$$

Es sei , .

$$\rho(\mathfrak{A}) = r \quad (22)$$

Wegen (21), (22) und Aufgabe 11 gilt dann

$$\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = r + 1 \quad (23)$$

Für den weiteren Beweis unterscheiden wir wieder die folgenden Fälle:

Fall 1. Es sei  $r = 0$ .

Dann verschwinden auf Grund von Definition 13 alle Koeffizienten des Gleichungssystems (1). In (1) ist wegen  $\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = 1$  wenigstens ein Absolutglied von null verschieden. Es sei  $b_i \neq 0$ . Es existiert dann kein Tupel von reellen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dass der  $i$ -ten Gleichung des Systems (1), also der Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b_i$$

genügt. Das System (1) ist nicht lösbar.

Fall 2. Es sei  $1 \leq r \leq n$ .

Auf Grund von (6) und (7) gilt wegen (22) und (23) für das System (3) in Verbindung mit (4) auch

$$\rho(\mathfrak{C}) = r \quad , \quad \rho(\mathfrak{C}, \mathfrak{q}) = r + 1 \quad (24,25)$$

Die Gleichung (25) besagt, dass in der Matrix (5) nicht alle Elemente  $q_{r+1}, \dots, q_m$  verschwinden können. Es sei etwa  $q_{r+i} \neq 0$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, m - r\}$ . Dann existiert aber kein Tupel reeller Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , das der  $(r + i)$ -ten Gleichung des Systems (3), also der Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = q_{r+i}$$

genügt. Das System (3) ist nicht lösbar.

Da (3) aus dem System (1) durch elementare Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen hervorgegangen ist, ist auf Grund von Satz 14 und 3.2.(5) auch das Ausgangssystem (1) nicht lösbar. Damit ist (20) und somit auch (19) bewiesen.

Die Teilergebnisse (15) und (19) fassen wir zusammen zum

Satz 27. Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem ist lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt.

Der Satz 27 ist logisch äquivalent mit

Satz 28. Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem ist nicht lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix nicht mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt.

Das Nichtübereinstimmen der Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems der Form (1) erkennt man, wie wir anschließend zeigen werden, bereits an der Form 4.1.(5), (6).

Das Gleichungssystem 4.1.(5) ist aus dem Ausgangssystem (1) durch elementare Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen hervorgegangen. Dieses System lautet in Matrixschreibweise

$$\mathfrak{B}x = p \tag{26}$$

mit

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(\mathfrak{B}, p) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} & p_1 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} & p_2 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} & p_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{r+1} \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_m \end{pmatrix}$$

wobei

$$b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0$$

gilt. Sind in der Matrix  $(\mathfrak{B}, p)$  nicht alle  $m - r$  Zahlen  $p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_m$  gleich null, so ist offensichtlich  $\rho(\mathfrak{B}, p) = r + 1$ , d.h., in diesem Fall ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

Beispiel 19. Wir untersuchen durch Rangbestimmung, ob das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

von 1.1.(6) lösbar ist.

Dieses System bringen wir mit Hilfe elementarer Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen auf die Form 4.1.(5), (6). Das ist bereits in Beispiel 14c

geschehen:

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 = -1 \\ 0 = 9 \end{array} \right\} \quad (27)$$

Dieses System besitzt die Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{p}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Beide Matrizen sind von der Form 3.4.(2), und es gilt

$$\rho(\mathfrak{B}) = 2 \quad , \quad \rho(\mathfrak{B}, \mathfrak{p}) = 3$$

Auf Grund von Satz 28 ist also das Gleichungssystem 1.1.(6) nicht lösbar, was wir bereits in 1.1. gezeigt haben.

Das in dem Beispiel 19 ausführlich beschriebene Verfahren zur Rangbestimmung kann noch etwas abgekürzt werden. Es ist nicht erforderlich, von dem System (26), das aus dem Ausgangssystem

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b} \quad (28)$$

durch elementare Umformungen und einer eventuellen Abänderung der Reihenfolge der Variablen hervorgegangen ist, die Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{B}$  und die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{p})$  gesondert zu notieren.

Das Nichtübereinstimmen der Ränge von  $\mathfrak{B}$  und  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{p})$  erkennt man daran, dass in dem System  $\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$  falsche Aussagen der Form  $0 = p_{r+i}$  mit  $p_{r+i} \neq 0$  und  $i \in \{1, 2, \dots, m - r\}$  auftreten, wie das in dem Gleichungssystem (27) der Fall ist.

Wir wenden uns nun der Beantwortung der Frage zu, wie man alle Lösungen eines lösbaren inhomogenen Systems (28) erhält.

Es sei  $\mathfrak{x}_0$  eine partikuläre Lösung von (28) und  $\mathfrak{x}^*$  irgendeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \quad (29)$$

Dann gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{b} \quad , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{x}^* = \mathfrak{o}$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert unter Berücksichtigung von Satz 9 die Gleichung

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}^*) = \mathfrak{b}$$

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}^* \quad (30)$$

wieder eine Lösung von (28) ist.

Lassen wir in (30) den Vektor  $\mathbf{x}^*$  alle Lösungen von (29) durchlaufen, so erhalten wir Lösungen des inhomogenen Systems (28). Es liegt die Frage nahe, ob wir auf diese Weise alle Lösungen von (28) erhalten.

Dazu müssen wir zeigen, dass sich jede Lösung  $\mathbf{x}_1$  von (28) in der Form (30) darstellen lässt. Auf Grund der Voraussetzung gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A}\mathbf{x}_1 = \mathfrak{b} \quad , \quad \mathfrak{A}\mathbf{x}_0 = \mathfrak{b}$$

Durch Subtraktion erhalten wir

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  eine Lösung von (29) ist. Trivialerweise gilt

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \tag{31}$$

Da  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  eine Lösung von (29) ist und somit auch von  $\mathbf{x}^*$  angenommen wird, besagt (31), dass sich jede Lösung  $\mathbf{x}_1$  von (28) in der Form (30) darstellen lässt.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 29.** Ist  $\mathbf{x}_0$  eine partikuläre Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, so erhält man alle Lösungen  $\mathbf{x}$  dieses Systems, wenn man in  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^*$  den Vektor  $\mathbf{x}^*$  alle Lösungen des zugehörigen homogenen Systems durchlaufen lässt.

**Beispiel 20.** In Beispiel 18 haben wir gezeigt, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

lösbar ist und

$$\mathbf{x}_0 = (5, 1, 0, 0, 0)^T$$

eine partikuläre Lösung von (32) ist. Die Lösungsmannigfaltigkeit des zu (32) gehörigen homogenen Systems

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

haben wir in dem Beispiel 16 bestimmt. Die Lösungsmannigfaltigkeit ist

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + t_3\mathbf{x}_3$$

mit

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 3t_1 + t_2 + 3t_3 \\ x_2 &= t_1 - t_2 + t_3 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= t_2 \\ x_5 &= t_3 \end{aligned} \right\}$$

Auf Grund von Satz 29 ist demnach

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + t_3 \mathbf{x}_3 \quad (33)$$

die vollständige Lösung von (32). In Koordinatenschreibweise lautet (33):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 5 + 3t_1 + t_2 + 3t_3 \\ x_2 &= 1 + t_1 - t_2 + t_3 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= t_2 \\ x_5 &= t_3 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Im Fall eines lösbaren inhomogenen linearen Gleichungssystems, können wir die beiden Teilschritte, Ermittlung einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems und Bestimmung der Lösungsmannigfaltigkeit des zugehörigen homogenen Systems, zusammenfassen.

Wir führen dies am System (32) durch. Dazu gehen wir von (17) aus und setzen in (17) für  $x_3$  bzw.  $x_4$  bzw.  $x_5$  beliebige reelle Zahlen  $t_1$  bzw.  $t_2$  bzw.  $t_3$  ein. Wir erhalten dann unmittelbar aus (17) die Lösungsmannigfaltigkeit (34), die dreifach unendlich ist;

Beispiel 21. Wir untersuchen das System

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 9x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

von 1.1.(4) auf Lösbarkeit und bestimmen gegebenenfalls die Lösungsmannigfaltigkeit.

$$\begin{array}{r|l|l|l} 6x_1 + 9x_2 = 3 & -2 & -1 & | \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 & 3 & \downarrow & | \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 & & 3 & \downarrow \\ \hline 6x_1 + 9x_2 = 3 & & & | \\ 0 = 0 & & & | \\ 0 = 0 & & & | \end{array}$$

Lassen wir die beiden letzten trivialen Gleichungen weg, so erhalten wir

$$6x_1 + 9x_2 = 3$$

Es ist

$$\rho(6, 9) = 1 \quad , \quad \rho(6, 9, 3) = 1$$

Da der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt, ist das Gleichungssystem lösbar. Wir bestimmen die Lösungsmannigfaltigkeit: Aus  $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2$  folgt

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + 3t \\ x_2 &= 2t \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Es ist (36) die vollständige Lösung von (35). Setzen wir in (36) beispielsweise  $t = -\frac{1}{2}$  bzw.  $t = \frac{1}{2}$  bzw.  $t = \frac{3}{2}$ , so erhalten wir drei partikuläre Lösungen

$$\mathfrak{x}_1 = (2, -1)^\top, \quad \mathfrak{x}_2 = (-1, 1)^\top, \quad \mathfrak{x}_3 = (-4, 3)^\top$$

von (35), die in 1.1.(5); Seite 6, angegeben sind.

Auf Grund von Satz 29 besteht die Lösungsmannigfaltigkeit eines inhomogenen linearen Gleichungssystems mit  $n$  Variablen aus einem einzigen Vektor genau dann, wenn das zugehörige homogene System nur trivial lösbar ist.

Das ist aber nach Satz 25 genau dann der Fall, wenn die Koeffizientenmatrix den Rang  $n$  besitzt. Berücksichtigen wir noch Satz 27, so erhalten wir den

Satz 30. Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit  $n$  Variablen ist eindeutig lösbar genau dann, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt und gleich  $n$  ist.

Beispiel 22. Wir untersuchen das System

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 &= 14 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

auf Lösbarkeit und bestimmen gegebenenfalls die Lösungsmannigfaltigkeit.

$$\begin{array}{r|l} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & 2 \quad | \quad 3 \quad | \quad 6 \quad | \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 & -1 \quad \downarrow \quad \quad | \quad \quad | \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 & \quad \quad \quad -1 \quad \downarrow \quad \quad | \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad -1 \quad \downarrow \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \\ 3x_2 + 3x_3 = 15 & \frac{1}{3} \\ 2x_2 + x_3 = 7 & \\ 5x_2 + 4x_3 = 22 & \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \\ x_2 + x_3 = 5 & 2 \quad | \quad 5 \quad | \\ 2x_2 + x_3 = 7 & -1 \quad \downarrow \quad \quad | \\ 5x_2 + 4x_3 = 22 & \quad \quad \quad -1 \quad \downarrow \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \\ x_2 + x_3 = 5 & \\ x_3 = 3 & 1 \quad \downarrow \\ x_3 = 3 & -1 \quad \downarrow \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \\ x_2 + x_3 = 5 & \\ x_3 = 3 & \\ 0 = 0 & \end{array}$$

Lassen wir die letzte triviale Gleichung weg, so erhalten wir das System

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_3 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Dieses System besitzt die Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{B}, \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Beide Matrizen sind von der Form 3.4.(2), und es gilt

$$\rho(\mathfrak{B}) = \rho(\mathfrak{B}, \mathfrak{p}) = 3 = n$$

Auf Grund von Satz 30 ist das System (38) und damit auch das Ausgangssystem (37) eindeutig lösbar. Die eindeutig bestimmte Lösung von (37) lässt sich aus (38) sehr einfach berechnen. Aus der dritten Gleichung von (38) ergibt sich  $x_3 = 3$ . Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so folgt  $x_2 = 2$ . Aus der ersten Gleichung erhalten wir schließlich  $x_1 = 1$ . Damit ist

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (37).

Beispiel 23 (VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR).

Wir untersuchen das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + ax_2 + x_3 = b \\ x_2 + ax_3 + x_4 = b \\ x_3 + ax_4 + x_1 = b \\ x_4 + ax_1 + x_2 = b \end{array} \right\} \quad (39)$$

für alle reellen Zahlen  $a, b$  auf Lösbarkeit und bestimmen gegebenenfalls die Lösungsmannigfaltigkeit.

$$\begin{array}{l|l|l} x_1 + ax_2 + x_3 = b & 1 & -a \\ x_2 + ax_3 + x_4 = b & & \\ x_1 + x_3 + ax_4 = b & -1 \downarrow & \\ ax_1 + x_2 + x_4 = b & & 1 \downarrow \\ \hline x_1 + ax_2 + x_3 = b & & \\ x_2 + ax_3 + x_4 = b & a & (a^2 - 1) \\ ax_2 - ax_4 = 0 & -1 \downarrow & \\ (1 - a^2)x_2 - ax_3 + x_4 = b(1 - a) & & 1 \downarrow \\ \hline x_1 + ax_2 + x_3 = b & & \\ x_2 + ax_3 + x_4 = b & & \\ a^2x_3 + 2ax_4 = ab & & \\ a(a^2 - 2)x_3 + a^2x_4 = ab(a - 1) & & \end{array}$$

Um eine vorzeitige Fallunterscheidung zu vermeiden, ändern wir die Reihenfolge der Variablen ab:

$$\begin{array}{l|l|l} x_1 + ax_2 + x_3 = b & & \\ x_2 + x_4 + ax_3 = b & & \\ 2ax_4 + a^2x_3 = ab & -a & \\ a^2x_4 + a(a^2 - 2)x_3 = ab(a - 1) & 2 \downarrow & \end{array}$$

und erhalten

$$\left. \begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= b \\ x_2 + x_4 + ax_3 &= b \\ 2ax_4 + a^2x_3 &= ab \\ a(a^2 - 4)x_3 &= ab(a - 2) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Fall 1. Für alle reellen Zahlen  $a$ , die der Bedingung  $a \neq 0$  und  $a \neq \pm 2$  genügen, und für alle reellen Zahlen  $b$  besitzt das Gleichungssystem (39) die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = \frac{b}{2+a}, \quad x_2 = \frac{b}{2+a}, \quad x_3 = \frac{b}{2+a}, \quad x_4 = \frac{b}{2+a}$$

Fall 2. Ist  $a = 0$ , so geht (40) über in

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_3 &= b \\ x_2 + x_4 &= b \end{aligned} \right\}$$

Hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b - x_3 \\ x_2 &= b - x_4 \end{aligned} \right\}$$

Für  $a = 0$  und alle reellen Zahlen  $b$  besitzt das Gleichungssystem (39) die zweifach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b - t_1 \\ x_2 &= b - t_2 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= t_2 \end{aligned} \right\}$$

Fall 3. Ist  $a = 2$ , so gilt:

$$\begin{array}{r|l} x_1 + 2x_2 + x_3 = b & \\ x_2 + x_4 + 2x_3 = b & \\ 4x_4 + 4x_3 = 2b & \frac{1}{2} \\ \hline 0 = 0 & \\ \hline x_1 + 2x_2 + x_3 = b & \\ x_2 + x_4 + 2x_3 = b & 2 \uparrow \\ 2x_4 + 2x_3 = b & -1 \mid \\ \hline x_1 + 2x_2 + x_3 = b & 1 \uparrow \\ 2x_2 + 2x_3 = b & -1 \uparrow \\ 2x_4 + 2x_3 = b & \\ \hline x_1 - x_3 = 0 & \\ 2x_2 + 2x_3 = b & \\ 2x_4 + 2x_3 = b & \end{array}$$

Hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}b - x_3 \\ x_4 &= \frac{1}{2}b - x_3 \end{aligned} \right\}$$

Für  $a = 2$  und alle reellen Zahlen  $b$  besitzt das Gleichungssystem (39) die einfach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= \frac{1}{2}b - t \\ x_3 &= tx_4 = \frac{1}{2}b - t \end{aligned} \right\}$$

Fall 4. Ist  $a = -2$  und  $b = 0$ , so geht (40) über in

$$\begin{array}{r|l}
 x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \\
 x_2 + x_4 - 2x_3 = 0 & 4 \uparrow \\
 -4x_4 + 4x_3 = 0 & 1 \mid \\
 \hline
 x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & 2 \uparrow \\
 4x_2 - 4x_3 = 0 & 1 \mid \\
 -4x_4 + 4x_3 = 0 & \\
 \hline
 2x_1 - 2x_3 = 0 & \\
 4x_2 - 4x_3 = 0 & \\
 -4x_4 + 4x_3 = 0 & 
 \end{array}$$

Für  $a = -2$  und  $b = 0$  besitzt das System (39) die einfach unendliche Lösungsmannigfaltigkeit

$$x_1 = t, x_2 = t, x_3 = t, x_4 = t$$

Fall 5. Für  $a = -2$  und alle reellen Zahlen  $b$  mit  $b \neq 0$  ist das Gleichungssystem (39) nicht lösbar, da in (40) die falsche Aussage  $0 = 8b$  auftritt.

Aufgabe 16. Man untersuche die Systeme

$$\begin{array}{l}
 a) \left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{array} \right\} \quad b) \left. \begin{array}{l} x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{array} \right\} \\
 \\
 c) \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right\} \quad d) \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

auf Lösbarkeit und bestimme gegebenenfalls die Lösungsmannigfaltigkeit.

Aufgabe 17. Es sollen für 70,- Mark 35 Geschenke zu 1,- Mark, 2,- Mark, 5,- Mark und 10,- Mark so gekauft werden, dass jede Preislage mindestens einmal vertreten ist. Man gebe die verschiedenen Einkaufsmöglichkeiten an.

Aufgabe 18. Man untersuche, ob der Zeilenvektor

$$\mathbf{b} = (0, 1, -1, 2, 3)$$

eine Linearkombination der Zeilenvektoren

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, 3, -1, 5, 7), \quad \mathbf{a}_3 = (1, 2, 0, 3, 4)$$

ist, und stelle  $\mathbf{b}$  gegebenenfalls als eine Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  dar.

Aufgabe 19 (VIII. Internationale Mathematikolympiade).

Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden insgesamt drei Aufgaben A, B, C gestellt. Unter allen Teilnehmern gab es genau 25 Schüler, von denen jeder wenigstens eine Aufgabe gelöst hatte.

Unter den Schülern, welche die Aufgabe A nicht gelöst hatten, war die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe B gelöst hatten, zweimal so groß wie die Anzahl derjenigen, welche die Aufgabe C gelöst hatten.

Die Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A gelöst hatten, war um eins größer als die Anzahl der übrigen Schüler, welche die Aufgabe A gelöst hatten.

Von den Schülern, die nur eine Aufgabe gelöst hatten, hatte die Hälfte die Aufgabe A nicht gelöst.

Wieviel Schüler hatten nur die Aufgabe B gelöst?

Aufgabe 20. In einer Urne befinden sich schwarze und weiße Kugeln gleicher Größe.

Bei jeder Ziehung entnehmen Alex, Bernd und Christoph je eine Kugel aus der Urne. Anschließend werden die Kugeln wieder in die Urne zurückgelegt.

Im Verlauf von 25 Ziehungen hat Alex 20 mal, Bernd 15 mal und Christoph 10 mal eine schwarze Kugel gezogen. Bei 10 Ziehungen haben Alex und Bernd, bei 5 Ziehungen Bernd und Christoph zugleich schwarze Kugeln gezogen.

Was lässt sich über die Anzahl der Ziehungen sagen, bei denen Alex, Bernd und Christoph Kugeln derselben Farbe gezogen haben?

## 5 Lösungen der Aufgaben

1.

$$a) \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad b) \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -8 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 10 \end{pmatrix}$$

2. Aus dem Ansatz

$$x_1 \mathfrak{A}_1 + x_2 \mathfrak{A}_2 + x_3 \mathfrak{A}_3 + x_4 \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}$$

lesen wir das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = 10 \end{array} \right\}$$

ab. Die Cramersche Regel liefert die eindeutig bestimmte Lösung:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

Die Matrix  $\mathfrak{B}$  ist also auf genau eine Weise als Linearkombination der Matrizen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$  darstellbar.

3. Aus dem Ansatz

$$x_1 \mathfrak{x}_1 + x_2 \mathfrak{x}_2 + \dots + x_{n-r} \mathfrak{x}_{n-r} = \mathbf{0}$$

lesen wir das homogene lineare Gleichungssystem (1)

$$\left. \begin{array}{l} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1,n-r}x_{n-r} = 0 \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2,n-r}x_{n-r} = 0 \\ \dots \\ d_{r1}x_1 + d_{r2}x_2 + \dots + d_{r,n-r}x_{n-r} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} d_1 x_1 = 0 \\ d_2 x_2 = 0 \\ \dots \\ d_{n-r} x_{n-r} = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

ab. Wegen  $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \dots, d_{n-r} \neq 0$  ist das Teilsystem (3) nur trivial lösbar. Folglich besitzt das System ((2), (3)) und damit auch die Gleichung (1) nur diese Lösung.

Die Spaltenvektoren  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_{n-r} \in \mathfrak{M}_{n-1}$  sind linear unabhängig.

4.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - db & cd + da \\ -da - cb & -db + ca \end{pmatrix} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

5.

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \begin{pmatrix} 31 & -23 \\ -71 & 51 \\ 111 & -79 \end{pmatrix}$$

6. a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{x}_0 &= \mathfrak{A}(t_1 \mathfrak{x}_1 + t_2 \mathfrak{x}_2 + \dots + t_k \mathfrak{x}_k) = t_1 \mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 + t_2 \mathfrak{A}\mathfrak{x}_2 + \dots + t_k \mathfrak{A}\mathfrak{x}_k \\ &= t_1 \mathfrak{b} + t_2 \mathfrak{b} + \dots + t_k \mathfrak{b} = (t_1 + t_2 + \dots + t_k) \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \end{aligned}$$

b) Der Vektor

$$\mathbf{x}_0 = 4\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = (14, -9)^\top$$

genügt der Gleichung 3.2.(1').

c) Es seien  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  Lösungsvektoren von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ .

Dann gelten die beiden Gleichungen  $\mathfrak{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ ,  $\mathfrak{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ .

Addition dieser beiden Gleichungen liefert unter Berücksichtigung von Satz 9 die Gleichung  $\mathfrak{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = 2\mathbf{b}$ .

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  keine Lösung von  $\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist.

7. a). Wegen  $|\mathfrak{A}| = -1 \neq 0$  ist die Matrix  $\mathfrak{A}$  regulär

b) Die Matrix  $\mathfrak{B}$  ist regulär, da  $|\mathfrak{B}| = -1$  ist.

c) Die Matrix  $\mathfrak{C}$  ist singulär, da  $|\mathfrak{C}| = 0$  ist.

8.

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

9.

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

10.

$$\rho(\mathfrak{D}) = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

11. Da jede Unterdeterminante von  $\mathfrak{A}$  auch eine Unterdeterminante von  $\mathfrak{B}$  ist, so hat  $\mathfrak{B}$  mindestens denselben Rang wie  $\mathfrak{A}$ , d.h., es ist  $\rho(\mathfrak{B}) \geq \rho(\mathfrak{A})$ . Andererseits gilt

$$\rho(\mathfrak{B}) \leq \rho(\mathfrak{A}) + 1 \tag{4}$$

Beweis von (4). Angenommen, es gelte

$$\rho(\mathfrak{B}) > \rho(\mathfrak{A}) + 1 \tag{5}$$

Es sei  $\rho(\mathfrak{A}) = r$ . Wegen (5) gibt es dann in  $\mathfrak{B}$  mindestens eine von null verschiedene Unterdeterminante  $k$ -ter Ordnung  $B_k$  mit  $k \geq r + 2$ .

Diese Unterdeterminante enthält, da wegen (5) auch  $\rho(\mathfrak{B}) > \rho(\mathfrak{A})$  gilt, eine Spalte, die nur aus Elementen der letzten Spalte von  $\mathfrak{B}$  besteht.

Entwickeln wir die Unterdeterminante  $B_k$  nach dieser Spalte, so können wegen  $B_k \neq 0$  nicht alle Unterdeterminanten der Elemente dieser Spalte verschwinden. Da diese Unterdeterminanten  $(k - 1)$ -ter Ordnung keine Elemente der letzten Spalte von  $\mathfrak{B}$  enthalten, sind sie auch Unterdeterminanten von  $\mathfrak{A}$ .

Demnach enthält  $\mathfrak{A}$  eine von null verschiedene Unterdeterminante  $(k - 1)$ -ter Ordnung, d.h., es ist  $\rho(\mathfrak{A}) \geq k - 1 \geq r + 1$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $\rho(\mathfrak{A}) = r$ . Also muss unsere Annahme (5) falsch gewesen sein. Damit ist (4) bewiesen.

12. Für die aus den Zeilenvektoren gebildete Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \rho(\mathfrak{A}) = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Die Zeilenvektoren  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{1,4}$  sind linear unabhängig.

13. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

besitzt wegen  $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \dots, d_n \neq 0$  den Rang  $n$ . Demnach sind die Spaltenvektoren  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{n,1}$  linear unabhängig.

14.

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 & \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 & \\ \hline x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 & \\ x_2 + x_3 = 0 & \\ \hline x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 & \\ 0 = 0 & \\ \hline x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & \\ x_2 + x_3 = 0 & \\ \hline x_1 + x_3 = 0 & \\ x_2 + x_3 = 0 & \end{array}$$

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_3$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \end{array} \right\}$$

15. Aus dem Ansatz

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + x_1 & b + x_2 \\ c + x_3 & d + x_4 \end{vmatrix}$$

folgt das homogene lineare Gleichungssystem

$$dx_1 - cx_2 - bx_3 + ax_4 = 0$$

Dieses System besitzt auf Grund der Voraussetzung  $d \neq 0$  wegen

$$x_1 = \frac{c}{d}x_2 + \frac{b}{d}x_3 - \frac{a}{d}x_4$$

die Lösungsmannigfaltigkeit

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = ct_1 + bt_2 - ct_3 \\ x_2 = dt_1 \\ x_3 = dt_2 \\ x_4 = dt_3 \end{array} \right\}$$

Alle zweireihigen Matrizen der Form

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} ct_1 + bt_2 - at_3 & dt_1 \\ & dt_2 \quad dt_3 \end{pmatrix}$$

erfüllen die Bedingung der Aufgabenstellung.

16.a)

$$\begin{array}{l|l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 & \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 & \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 & \\ \hline x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 & \\ 5x_2 + 7x_3 = 2 & \\ 10x_2 + 14x_3 = 4 & \\ \hline x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 & \\ 5x_2 + 7x_3 = 2 & \\ 0 = 0 & \\ \hline x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 & \\ 5x_2 + 7x_3 = 2 & \\ \hline 5x_1 + 4x_3 = 4 & \\ 5x_2 + 7x_3 = 2 & \\ \hline \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}x_3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{5} - 4t \\ x_2 = \frac{3}{5} - 7t \\ x_3 = 5t \end{array} \right\}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 & \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 & \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 & \\ \hline x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 & \\ \hline x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 & \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 & \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 & \\ 2x_4 - 2x_5 = 1 & \\ \hline 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 & \\ 2x_2 - 2x_3 = 1 & \\ 2x_3 = 3 & \\ 2x_4 - 2x_5 = 1 & \\ \hline 2x_1 - 2x_2 = 0 & \\ 2x_2 = 4 & \\ 2x_3 = 3 & \\ 2x_4 - 2x_5 = 1 & \\ \hline 2x_1 = 4 & \\ 2x_2 = 4 & \\ 2x_3 = 3 & \\ 2x_4 - 2x_5 = 1 & \\ \hline \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{3}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} + x_5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{3}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} + t \\ x_5 = t \end{array} \right\}$$

b)

$$\begin{array}{r|l}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \\
 x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 & \\
 x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 & \\
 x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 & \\
 \hline
 x_1 + x_3 + x_4 = 1 & \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \\
 \quad 2x_2 + 2x_4 = -4 & \\
 \quad \quad 2x_2 + 2x_3 = 0 & \\
 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 & \\
 \quad \quad x_2 = -1 & \\
 \hline
 x_1 + x_4 + x_3 + x_2 = 0 & \\
 \quad \quad x_4 + x_2 = -2 & \\
 \quad \quad \quad x_3 + x_2 = 0 & \\
 \quad \quad \quad \quad x_4 + x_3 + x_2 = -1 & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x_2 = -1 & \\
 \hline
 x_1 + x_4 + x_3 + x_2 = 0 & \\
 \quad \quad x_4 + x_2 = -2 & \\
 \quad \quad \quad x_3 + x_2 = 0 & \\
 \quad \quad \quad \quad x_3 = 1 & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x_2 = -1 & \\
 \hline
 x_1 + x_4 + x_3 + x_2 = 0 & \\
 \quad \quad x_4 + x_2 = -2 & \\
 \quad \quad \quad x_3 + x_2 = 0 & \\
 \quad \quad \quad \quad x_2 = -1 & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x_2 = -1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l}
 x_1 + x_4 + x_3 + x_2 = 0 \\
 x_4 + x_2 = -2 \\
 x_3 + x_2 = 0 \\
 x_2 = -1
 \end{array} \right\}$$

Das Gleichungssystem besitzt die eindeutig bestimmte Lösung  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -1$ .

d)

$$\begin{array}{r|l}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \\
 x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 & \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 & \\
 \hline
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \\
 \quad \quad 2x_2 + 2x_4 = 2 & \\
 \quad \quad \quad x_2 + x_4 = 3 & \\
 \hline
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \\
 \quad \quad 2x_2 + 2x_4 = 2 & \\
 \quad \quad \quad \quad 0 = 4 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

17. Mit  $x_1, x_2, x_3, x_4$  bezeichnen wir die Anzahl der Geschenke zu 1 Mark, 2 Mark, 5 Mark und 10 Mark:

$$\begin{array}{r|l}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 & \\
 x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 70 & \\
 \hline
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 35 & \\
 \quad \quad x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 35 & \\
 \hline
 \quad \quad \quad x_1 - 3x_3 - 8x_4 = 0 & \\
 \quad \quad \quad x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 35 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l}
 x_1 = 3x_3 + 8x_4 \\
 x_2 = 35 - 4x_3 - 9x_4
 \end{array} \right\}
 \quad \left. \begin{array}{l}
 x_1 = 3t_1 + 8t_2 \\
 x_2 = 35 - 4t_1 - 9t_2 \\
 x_3 = t_1 \\
 x_4 = t_2
 \end{array} \right\}$$

Da die  $x_1, x_2, x_3, x_4$  natürliche Zahlen sein müssen, ergeben sich die folgenden elf verschiedenen Einkaufsmöglichkeiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (11, 22, 1, 1)^\top, & \mathbf{x}_2 &= (19, 13, 1, 2)^\top, & \mathbf{x}_3 &= (27, 4, 1, 3)^\top, & \mathbf{x}_4 &= (14, 18, 2, 1)^\top, \\ \mathbf{x}_5 &= (22, 9, 2, 2)^\top, & \mathbf{x}_6 &= (17, 14, 3, 1)^\top, & \mathbf{x}_7 &= (25, 5, 3, 2)^\top, & \mathbf{x}_8 &= (20, 10, 4, 1)^\top, \\ & & \mathbf{x}_9 &= (28, 1, 4, 2)^\top, & \mathbf{x}_{10} &= (23, 6, 5, 1)^\top, & \mathbf{x}_{11} &= (26, 2, 6, 1)^\top \end{aligned}$$

18. Aus dem Ansatz

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

lesen wir folgendes Gleichungssystem ab:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 6x_2 + 3x_3 = 3 \end{array} \left. \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} - t \\ x_2 = \frac{1}{2} - t \\ x_3 = 2t \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

Der Vektor  $\mathbf{b}$  lässt sich auf unendlich viele Arten als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  darstellen. Setzen wir beispielsweise  $t = -\frac{3}{2}$ , so erhalten wir

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$$

19. Mit  $x_A, x_B, x_C, x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{ABC}$  bezeichnen wir die Anzahl der Schüler, die nur die im Index angegebenen Aufgaben gelöst haben:

$$\left. \begin{array}{l} x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 \\ x_B + x_{BC} = 2(x_C + x_{BC}) \\ x_A = x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} + 1 \\ x_A = x_B + x_C \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 \\ x_B - 2x_C - x_{BC} = 0 \\ x_A - x_{AB} - x_{AC} - x_{ABC} = 1 \\ x_A - x_B - x_C = 0 \end{array} \right\}$$


---


$$\left. \begin{array}{l} x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 \\ x_B - 2x_C - x_{BC} = 0 \\ x_A + x_C + 2x_{AB} + 2x_{AC} + x_{BC} + 2x_{ABC} = 24 \\ 2x_B + 2x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 \end{array} \right\}$$


---


$$\left. \begin{array}{l} x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 \\ x_B - 2x_C - x_{BC} = 0 \\ 3x_C + 2x_{AB} + 2x_{AC} + 2x_{BC} + 2x_{ABC} = 24 \\ 6x_C + x_{AB} + x_{AC} + 3x_{BC} + x_{ABC} = 25 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 & \\
 x_B - 2x_C - x_{BC} = 0 & \\
 3x_C + 2x_{AB} + 2x_{AC} + 2x_{BC} + 2x_{ABC} = 24 & \\
 3x_{AB} + 3x_{AC} + x_{BC} + 3x_{ABC} = 23 & \\
 \hline
 x_A + x_B + x_C + x_{AB} = 25 - x_{AC} - x_{BC} - x_{ABC} & \\
 x_B - 2x_C = x_{BC} & \\
 3x_C + 2x_{AB} = 24 - 2x_{AC} - 2x_{BC} - 2x_{ABC} & \\
 3x_{AB} = 23 - 3x_{AC} - x_{BC} - 3x_{ABC} & \\
 \hline
 3x_A + 3x_B + 3x_C = 52 - 2x_{BC} & \\
 x_B - 2x_C = x_{BC} & \\
 9x_C = 26 - 4x_{BC} & \\
 3x_{AB} = 23 - 3x_{AC} - x_{BC} - 3x_{ABC} & \\
 \hline
 9x_A + 9x_B = 130 - 2x_{BC} & \\
 9x_B = 52 + x_{BC} & \\
 9x_C = 26 - 4x_{BC} & \\
 3x_{AB} = 23 - 3x_{AC} - x_{BC} - 3x_{ABC} & \\
 \hline
 9x_A = 78 - 3x_{BC} & \\
 9x_B = 52 + x_{BC} & \\
 9x_C = 26 - 4x_{BC} & \\
 3x_{AB} = 23 - 3x_{AC} - x_{BC} - 3x_{ABC} & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 x_A = \frac{26}{3} - \frac{1}{2}t_1 \\
 x_B = \frac{52}{9} + \frac{1}{9}t_1 \\
 x_C = \frac{26}{9} - \frac{4}{9}t_1 \\
 x_{AB} = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}t_1 - t_2 - t_3 \\
 x_{BC} = t_1 \\
 x_{AC} = t_2 \\
 x_{ABC} = t_3
 \end{array} \right\}$$

Es sind  $x_A, x_B, x_C$  nur für  $t_1 = 2$  nichtnegative ganze Zahlen; Für  $t_1 = 2$  werden aber auch  $x_{AB}, x_{BC}, x_{AC}, x_{ABC}$  nichtnegative ganze Zahlen, falls für  $t_2$  bzw.  $t_3$  geeignete nichtnegative ganze Zahlen eingesetzt werden. Demnach hatten nur sechs Schüler die Aufgabe B gelöst.

20. Mit  $x_A, x_B, x_C, x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{ABC}$  bezeichnen wir die Anzahl der Ziehungen, bei denen nur die jeweils im Index angegebenen Personen eine schwarze Kugel gezogen haben, und mit  $x$  die Anzahl der Ziehungen, bei denen Alex, Bernd und Christoph nur weiße Kugeln gezogen haben.

$$\begin{array}{r|l}
 x + x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 & \\
 x_A + x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = 20 & \\
 x_B + x_{AB} + x_{BC} + x_{ABC} = 15 & \\
 x_C + x_{BC} + x_{AC} + x_{ABC} = 10 & \\
 x_{AB} + x_{ABC} = 10 & \\
 x_{BC} + x_{ABC} = 5 & \\
 \hline
 x + x_A + x_B + x_C + x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{ABC} = 25 & \\
 x_A + x_{AB} + x_{AC} + x_{ABC} = 20 & \\
 x_B + x_{AB} = 10 & \\
 x_C + x_{AC} = 5 & \\
 x_{AB} + x_{ABC} = 10 & \\
 x_{BC} + x_{ABC} = 5 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + x_A + x_B + x_C + x_{AC} - x_{ABC} = 10 \\
 x_A + x_{AC} = 10 \\
 x_B - x_{ABC} = 0 \\
 x_C + x_{AC} = 5 \\
 x_{AB} + x_{ABC} = 10 \\
 x_{BC} + x_{ABC} = 5
 \end{array}
 \left| \right.$$


---


$$\left. \begin{array}{l}
 x = -5 + x_{AC} \\
 x_A = 10 - x_{AC} \\
 x_B = x_{ABC} \\
 x_C = 5 - x_{AC} \\
 x_{AB} = 10 - x_{ABC} \\
 x_{BC} = 5 - x_{ABC}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 x = -5 + t_1 \\
 x_A = 10 - t_1 \\
 x_B = t_2 \\
 x_C = 5 - t_1 \\
 x_{AB} = 10 - t_2 \\
 x_{BC} = 5 - t_2 \\
 x_{AC} = t_1 \\
 x_{ABC} = t_2
 \end{array}$$

Da die  $x_A, x_B, x_C, x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{ABC}, x$  nichtnegative ganze Zahlen sein müssen, folgt  $t_1 = 5$  und  $t_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Somit haben Alex, Bernd und Christoph in keiner Ziehung zugleich eine weiße Kugel gezogen. Die Anzahl der Ziehungen, in denen alle drei schwarze Kugeln gezogen haben, ist höchstens fünf.

## 6 Literaturverzeichnis

1. BREHMER, S., und H. BELKNER, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 2. Aufl., Berlin 1968.
2. GANTMACHER, F. R., Matrizenrechnung I, 2. Aufl., Berlin 1965.
3. KOCHENDÖRFFER, R., Determinanten und Matrizen, 5. Aufl., Leipzig 1967.
4. v. MANGOLDT, H., und K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, Band 1, 13. Aufl., Leipzig 1966.