**Koordinatengeometrie**

Aufgabe 1

Gegeben sind der Punkt P (-1; 9) sowie die Geraden g: $3x - y + 6 = 0$ und h: $x + 4y - 8 = 0$.

a) Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt S. Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunkts und den Schnittwinkel beider Geraden auf Zehntel Grad genau!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden k, die parallel zu g und durch den Punkt P verläuft!

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden l, die senkrecht zu g und durch den Punkt P verläuft!!

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Punkte A (-4; -2); B (7; 0) und C (-1; 4).

a) Untersuchen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist!

b) Ermitteln Sie die Geradengleichung der Höhe $h_c$ in expliziter Form!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!

d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Umkreises und geben Sie die Gleichung des Umkreises an!

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M (1; 3). Der Ursprung $P_0$ (0; 0) liegt auf diesem Kreis.

a) Stellen Sie die Gleichung des Kreises k auf!

b) Der Kreis k verläuft durch den Punkt $P_1$ (0; $y_1$) mit $y_1 \neq 0$. Berechnen Sie $y_1$!

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x^2 + 6x}$.

a) auf waagerechte Asymptoten,

b) senkrechte Asymptoten!

c) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an!

d) Für welche reelle Zahl a besitzt die Funktion $f_a(x) = \frac{x^2 - 9}{ax^2 + 6x}$ die waagerechte Asymptote $y = 1,5$?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung eines Kreises durch k: $x^2 - 14x + y^2 + 8y - 7 = 0$.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises k!

b) Für welche Zahl p hat der Kreis mit der Gleichung $k_P$: $x^2 - 14x + y^2 + 8y + p = 0$ zwei Schnittpunkte, genau einen Schnittpunkt bzw. keinen Schnittpunkt mit der y-Achse?

**Lösungen**

1. a) g : $y = 3x + 6$ und h : $y = -1/4\,x + 2$ $\rightarrow$ $3x + 6 = -1/4\,x + 2$ $\rightarrow$ $x = -16/13$
   $\rightarrow$ S (-16/13 ; 30/13)
   $\tan\alpha = 13$; $\alpha \approx 85{,}6°$
   b) k : $y = 3x + n$ P (-1; 9): $9 = 3\cdot(-1)+n \rightarrow n = 12 \rightarrow y = 3x + 12$
   c) l : $y = -1/3\,x + n$ P (-1; 9): $9 = -1/3(-1)+n \rightarrow n = 26/3 \rightarrow y = -1/3x + 26/3$

2. a) $a = |BC| = \sqrt{80}$ $b = |AC| = \sqrt{45}$ $c = |AB| = \sqrt{125}$
   $a^2 + b^2 = 80 + 45 = 125 = c^2$ $\rightarrow$ Dreieck ABC ist rechtwinklig (Umkehrung des Satzes des Pythagoras)
   b) $m_c = 2/11$ $\rightarrow$ $m_h = -11/2$ $\rightarrow$ $h_c$: $y = -11/2\,x + n$
   C: $4 = -11/2 + n$ $\rightarrow$ $n = -3/2$ $\rightarrow$ $h_c$: $y = -11/2\,x - 3/2$
   c) $A = 1/2\,|AC|\,|BC| = 30$ FE
   d) Wegen des rechten Winkels liegt C auf dem Thaleskreis über AB.
   Daher ist der Mittelpunkt M der Strecke AB zugleich Umkreismittelpunkt:
   M (3/2 ; -1) $r = 1/2|AB| = 1/2\sqrt{125} \rightarrow$ k : $(x - 1{,}5)^2 + (y + 1)^2 = 125/4$

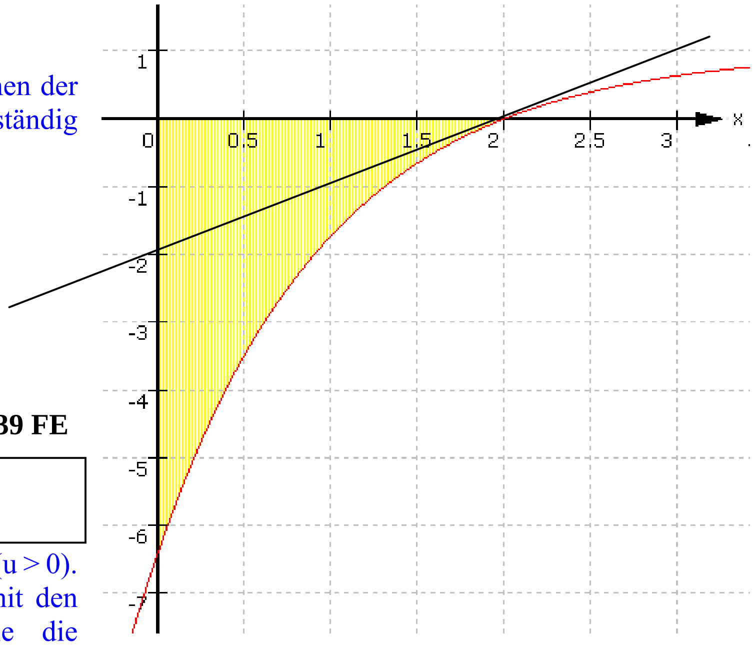
3. a) k : $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$
   $P_0$ : $(0 - 1)^2 + (0 - 3)^2 = r^2$ $\rightarrow$ $r^2 = 10$ $\rightarrow$ k : $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$
   b) k : $(0 - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ $\rightarrow$ $y \cdot (y - 6) = 0$ $\rightarrow$ $y_1 = 6$

4. a) Grenzwert 1/3 $\rightarrow$ $y = 1/3$
   b) $3x^2 + 6x = 0$ $\rightarrow$ $x = (-2)$ und $x = 0$
   c) $D = R \setminus \{-2; 0\}$
   d) Grenzwert $1/a = 3/2 \rightarrow a = 2/3$

5. a) $(x - 7)^2 - 49 + (y + 4)^2 - 16 - 7 = 0$ $\rightarrow$ $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 72$ $\rightarrow$ M (7; -4) und $r = 6\sqrt{2}$
   b) $x = 0$ $\rightarrow$ $y^2 + 8y + p = 0$ $\rightarrow$ $y_{12} = -4 \pm \sqrt{(16-p)}$
   keinen Schnittpunkt, wenn $p > 16$; einen Schnittpunkt, wenn $p = 16$ und zwei Schnittpunkte, wenn $p < 16$

# Klausur GK 12: Koordinaten- und Vektorgeometrie

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 - e^{2-x}$ $(x \in \mathbb{R})$.




   a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion und den beiden Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird!

   Nullstelle: $0 = 1 - e^{2-x}$
   $e^{2-x} = 1$
   $2 - x = 0$, denn $e^0 = 1$
   $\mathbf{x_0 = 2}$

   Ansatz: $A = \int_2^0 (1 - e^{2-x})\,dx$

   GTR / OPTN / CALC / ∫dx : $\int(1 - e(2-x), 2, 0) \approx$ **4,39 FE**

   b) P (u; v) sei ein Punkt auf dem Graphen der Funktion (u > 0). Die Tangente an den Graphen im Punkt P bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, sodass dieses Dreieck gleichschenklig ist!

   Anstieg der Tangente: m = 1, also $f'(x) = e^{2-x} = 1$, also x = 2, also **P (2; 0)**

   c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen!

   $\lim\limits_{x\to-\infty}(1 - e^{2-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-x} = 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-x} = \mathbf{(-\infty)}$

   $\lim\limits_{x\to\infty}(1 - e^{2-x}) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} e^{2-x} = 1 - 0 = \mathbf{1}$

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-4; -2); B(3; -3) und C(-2; 2) gegeben.

   a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist!

   $|\overline{AB}| = \sqrt{(-4-3)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

   $|\overline{BC}| = \sqrt{(3+2)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

   $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, also ist ABC gleichschenklig. (Die Länge von $\overline{AC}$ ist völlig unerheblich!)

   b) Der Umkreis des Dreiecks ABC sei k. Ermitteln Sie eine Gleichung des Kreises k!

   Strecke $\overline{AB}$: Anstieg $m_1 = \frac{-3+2}{3+4} = \left(-\frac{1}{7}\right)$ und Mittelpunkt $M_1$ (-0.5; -2.5)

   Mittelsenkrechte g: $y = 7x + n$
   $-2{,}5 = 7 \cdot (-0{,}5) + n \;\rightarrow\; n = 1 \;\rightarrow\; \mathbf{y = 7x + 1}$

   Strecke $\overline{AC}$: Anstieg $m_2 = \frac{2+2}{-2+4} = 2$ und Punkt B (3; -3)

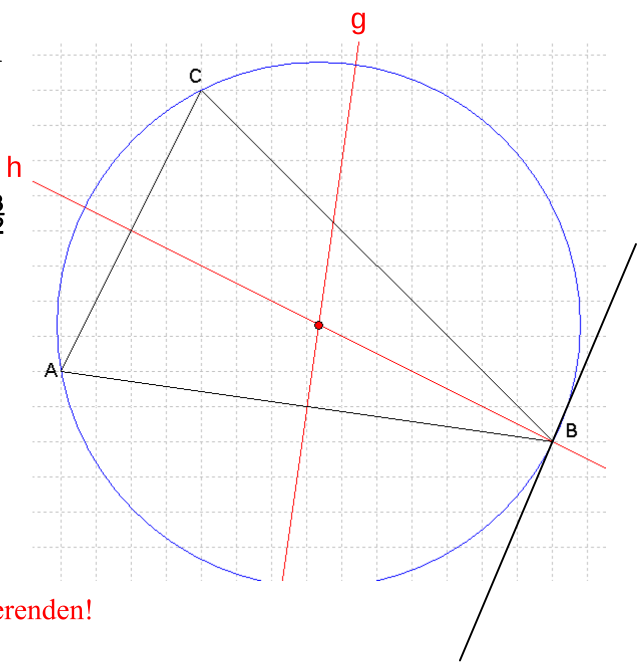
   Mittelsenkrechte h: $y = -\frac{1}{2}x + n$
   $-3 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + n \;\rightarrow\; n = -\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \mathbf{y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$

   $g \cap h$: $7x + 1 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
   $14x + 2 = -x - 3$
   $15x = (-5) \qquad x = (-\frac{1}{3}) \;\rightarrow\; y = (-\frac{4}{3})$

   Mittelpunkt: $\mathbf{M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)}$

   Radius: $r^2 = |\overline{AM}|^2 = \left(-4 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-2 + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{125}{9}$

   Kreis k: $\mathbf{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{125}{9}}$




   Der Umkreismittelpunkt ist nicht der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden!

   c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Kreis k, die durch den Punkt B (3; -3) verläuft!

   t: $y = 2x + n$
   $-3 = 2 \cdot 3 + n \;\rightarrow\; n = (-9) \;\rightarrow\; \mathbf{y = 2x - 9}$

   Die Bestimmung mit Hilfe der Gleichung $(x - c) \cdot (3 - c) + (y - d) \cdot (-3 - d) = r^2$ ist extrem aufwändig!

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2; 2; -2); B(4; -4; 2); C(8; 2; 2) und D(6; 8; -2) gegeben.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen! Ermitteln Sie die parameterfreie Gleichung dieser Ebene in allgemeiner Form!

Ansatz: E: $Ax + By + Cz = 1$

I $\quad 2A + 2B - 2C = 1$ $\qquad\qquad A = \frac{3}{11}$

II $\quad 4A - 4B + 2C = 1$ $\qquad$ GTR / EQUA / SIML : $\quad B = -\frac{2}{11}$

III $\quad 8A + 2B + 2C = 1$ $\qquad\qquad C = -\frac{9}{22}$

E: $\frac{3}{11}x - \frac{2}{11}y - \frac{9}{22}z = 1 \;|\; \cdot 22$

Probe für D: $\frac{18}{11} - \frac{16}{11} + \frac{18}{22} = \frac{36-32+18}{22} = \frac{22}{22} = 1 \;\rightarrow\;$ D liegt in der Ebene E.

Ebenengleichung: $6x - 4y - 9z = 22 \;\rightarrow\; \mathbf{6x - 4y - 9z - 22 = 0}$

Mit dem Ansatz $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ macht man sich die doppelte Arbeit, da ohnehin die parameterfreie Form der Ebenengleichung verlangt ist!

b) Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD ein Trapez ist!

$\overrightarrow{AB} = (2; -6; 4)$ und $\overrightarrow{CD} = (-2; 6; -4)$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, also $\overline{AB} \,||\, \overline{CD} \;\rightarrow\;$ ABCD ist ein Trapez.

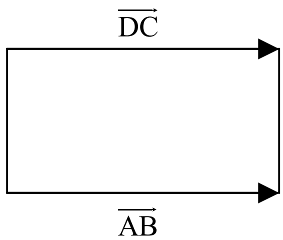
(Ob $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ parallel zueinander sind, ist völlig unerheblich!)

c) Die Gerade h durch die Punkte B und C schneidet die **x-z-Ebene** im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S!

$h:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = 0 \;\rightarrow\; 0 = (-4) + 6t \;\rightarrow\; t = \mathbf{\tfrac{2}{3}} \;\rightarrow\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \mathbf{S\left(\tfrac{20}{3}; 0; 2\right)}$

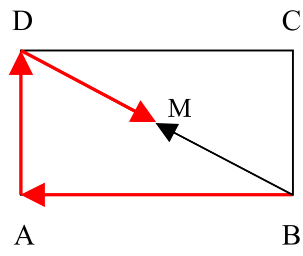
4. Gegeben sind die Punkte A (1; 2; 1); B (1; 5; 1) und D (1; 2; 4).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C, sodass ABCD ein Rechteck ist!




$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, also $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{matrix} \;\rightarrow\; \mathbf{C\ (1; 5; 4)}$

b) M sei der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks. Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{BM}$ als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ dar!




$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BM}$

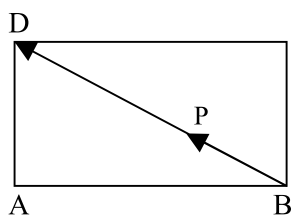
$2\,\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Die Berechnung der Koordinaten von M bzw. $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ist überflüssig!

c) Auf der Diagonalen BD gibt es einen Punkt P, der die Strecke $\overline{BD}$ im Verhältnis 1:2 teilt. Bestimmen Sie die Koordinaten von P!

$\overline{BD}:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \mathbf{P\ (1; 4; 2)}$




$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

5. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1; 2; 2) und P(2; -3; 5) sowie die Ebene

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\vec{a} + s\vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $r, s \in R$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AP}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind! Was folgt daraus für die Lage des Punktes P bezüglich der Ebene E?

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen: $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 3 = 0 \quad$ f. A.

Also sind die drei Vektoren linear unabhängig und **P liegt nicht in der Ebene E.**

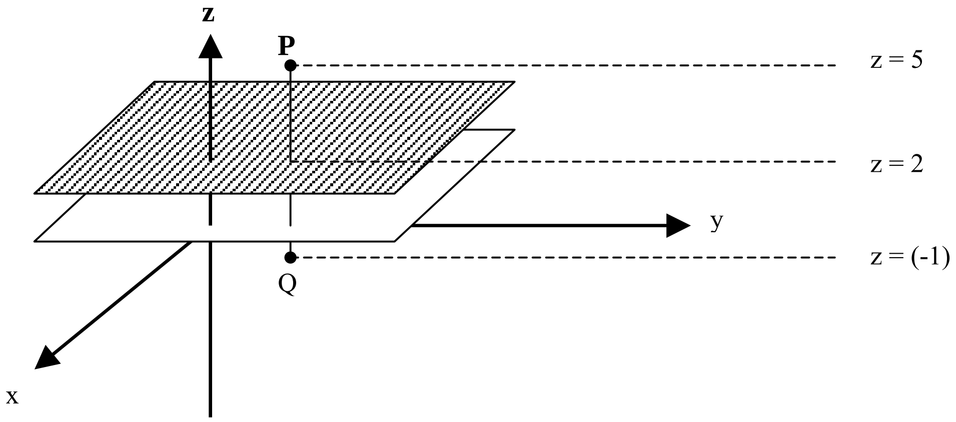
b) Stellen Sie die parameterfreie Gleichung der Ebene in allgemeiner Form auf! Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem?

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A (1; 2; 2) | | A + 2B + 2C = 1 | | A = 0 | | | | | | |
| B (2; 2; 2) | → | 2A + 2B + 2C = 1 | → | B = 0 | → | 0x + 0y + 0,5 z = 1 | → | **z = 2** | → | z – 2 = 0 |
| C (4; 3; 2) | | 4A + 3B + 2C = 1 | | C = 0,5 | | | | | | |

Die Ebene liegt parallel zur x-y-Ebene, um 2 LE nach oben versetzt.

c) Die Punkte P und Q (x; y; z) liegen bezüglich der Ebene E spiegelbildlich zueinander. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q!

P (2; -3; 5) liegt 3 LE oberhalb der Ebene z = 2. Daher muss Q genau 3 LE unterhalb dieser Ebene, also in der Höhe z = -1 liegen: **Q (2; -3; -1)**




Dargestellt ist ein ähnlicher Sachverhalt mit den Punkten P (0; 2; 5) und Q (0; 2; -1).