Berechnung pythagoräischer Tripel

Autor: Dieter Behrendt, 2020

Im rechtwinkligen Dreieck gilt u.a. der Satz des Pythagoras. Wir schreiben ihn in der Form

$$a^2 + x^2 = (x + m)^2 \tag{1}$$

a, x und m sind natürliche Zahlen (außer Null). Gleichung 1 umgeformt nach a^2 ergibt

$$a^2 = 2mx + m^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a = \sqrt{2mx + m^2} \tag{2}$$

Für $m = 1$ wird Gleichung 2 zu

$$a_1 = \sqrt{2x + 1} \tag{2.1}$$

Nachstehende Wertetafel zeigt die Werte für a_1 in Anhängigkeit von x:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 12 & \ldots & 24 & \ldots & 39 & 40 & \ldots & 60 & \ldots \\
a_1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} & \underline{\sqrt{9}} & \sqrt{11} & & \underline{\sqrt{25}} & & \underline{\sqrt{49}} & & \sqrt{79} & \underline{\sqrt{81}} & & \sqrt{121} &
\end{array}$$

Nur die a_1 bilden mit den zugehörigen x (und $x + 1$) pythagoräische Zahlentripel, bei denen in der Wurzel eine Quadratzahl steht (unterstrichene Wurzelausdrücke).
Tabelle 1 zeigt die ersten fünf Tripel für $m = 1$. In der gleichen Weise können die Zahlentripel für weitere m ermittelt werden, Tabellen 2 bis 6.

Der Anschaulichkeit halber sind den Tabellen 1, 3 und 5 auch die ungeraden Werte 1, 3 und 5 für m zugeordnet, sowie den Tabellen 2, 4 und 6 die geradzahligen 2, 4 und 6.
Dabei sind auch hier die jeweils ersten fünf Tripel aufgelistet. Die Nummerierung der einzelnen Tripel in den Tabellen erfolgt fortlaufend von $n = 1 - 5$ für ungerade m und von $n = 2 - 6$ für gerade m (Erklärung dafür weiter unten).

Tabellen 1, 3, 5 ; $m =$ ungerade

$m = 1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2x + 1}$ Gl. 2.1

n	x	a	$x + m$	x^2	a^2	$(x + m)^2$
1	4	3	4+1=5	16	9	25
2	12	5	12+1=13	144	25	169
3	24	7	24+1=25	576	49	625
4	40	9	40+1=41	1600	81	1681
5	60	11	60+1=61	3600	121	3721

$m = 3 \Rightarrow a_3 = \sqrt{6x + 9}$ Gl. 2.3

n	x	a	$x + m$	x^2	a^2	$(x + m)^2$
1	12	9	12+3=15	144	81	225
2	36	15	36+3=39	1295	225	1521
3	72	21	72+3=75	5184	441	5625
4	120	27	120+3=123	14400	729	15129
5	180	33	180+3=183	32400	1089	33489

$m = 5 \Rightarrow a_5 = \sqrt{10x + 25}$ Gl. 2.5

n	x	a	$x + m$	x^2	a^2	$(x + m)^2$
1	20	15	20+5=25	400	225	625
2	60	25	60+5=65	3600	625	4225
3	120	35	120+5=125	14400	1225	15625
4	200	45	200+5=205	40000	2025	42025
5	300	55	300+5=305	90000	3025	93025

Tabellen 2, 4, 6 ; $m =$ gerade

$m = 2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{4x+4} = 2\sqrt{x+1}$ Gl. 2.2

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
2	3	4	3+2=5	9	16	25
3	8	6	8+2=10	64	36	100
4	15	8	15+2=17	225	64	289
5	24	10	24+2=26	576	100	676
6	35	12	35+2=37	1225	144	1369

$m = 4 \Rightarrow a_4 = \sqrt{8x+16} = 2\sqrt{2x+4}$ Gl. 2.4

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
2	6	8	6+4=10	36	64	100
3	16	12	16+4=20	256	144	400
4	30	16	30+4=34	900	256	1156
5	48	20	48+4=52	2304	400	2704
6	70	24	70+4=74	4900	576	5476

$m = 6 \Rightarrow a_6 = \sqrt{12x+36} = 2\sqrt{3x+9}$ Gl. 2.6

n	x	a	$x+m$	x^2	a^2	$(x+m)^2$
2	9	12	9+6=15	81	144	225
3	24	18	24+6=30	576	324	900
4	45	24	45+6=51	2025	576	2601
5	72	30	72+6=78	5184	900	6084
6	105	36	105+6=111	11025	1296	12321

Aus den Tabellen 1-6 ist zu erkennen, dass die Werte für a in besonderer Weise mit m und n verknüpft sind. Danach lässt sich a_{un} für ungerade m durch die Beziehung

$$a_{un} = m(2n+1) \tag{3.1}$$

und a_{ge} für gerade m durch die Beziehung

$$a_{ge} = m \cdot n \tag{3.2}$$

ausdrücken. Damit können pythagoräische Zahlentripel über die frei wählbaren Variablen m und n berechnet werden, wobei für die Berechnung von x, je nachdem ob m ungerade oder gerade ist, die Gleichung 3.1 oder Gleichung 3.2 in Gleichung 1 eingesetzt werden müssen.
Gleichung 1 wird damit mit Gleichung 3.1 für ungerade m zu

$$x_{un} = \frac{a^2 - m^2}{2m} = \frac{m^2(2n+1)^2 - m^2}{2m} = 2m(n^2+n) \tag{4.1}$$

und mit Gleichung 3.2 für gerade m zu

$$x_{ge} = \frac{m^2n^2 - m^2}{2m} = \frac{m}{2}(n^2-1) \tag{4.2}$$

Für $n = 1$ wird $x_{ge} = 0$ zu null, d.h. $a = m$, was natürlich keine Lösung im o.g. Sinne ist. Daher gilt Gleichung 4.2 nur für $n \geq 2$.

Addiert man in Gleichung 4.1 und 4.2 das zugehörige m, erhält man:

$$(x+m)_{un} = 2m(n^2+n) + m = m(2n^2+2n+1) \tag{5.1}$$

sowie

$$(x+m)_{ge} = \frac{m}{2}(n^2-1) + m = \frac{m}{2}(n^2+1) \tag{5.2}$$

Einfacher ist es natürlich zum ermittelten x sofort m zu addieren um die dritte Zahl des Tripels zu erhalten.

Noch einige Zahlenbeispiele:

1. $m = 5$, $n = 6$

Gl. 3.1	$a_{un} = m(2m+1) = 5(2 \cdot 6 + 1) = 65$
Gl. 4.1	$x_{un} = 2m(m^2 + n) = 2 \cdot 5(6^2 + 6) = 420$
Gl. 5.1	$(x+m)_{un} = m(2n^2 + 2n + 1) = 5(2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1) = 425$

   Probe: $65^2 + 420^2 = 425^2$, d.h. $4225 + 176400 = 180625$

2. $m = 7$, $n = 3$

$$\begin{aligned} a_{7/3} &= 7(2 \cdot 3 + 1) = 49 \\ x_{7/3} &= 2 \cdot 7(3^2 + 3) = 168 \\ (x+m)_{7/3} &= 175 \end{aligned}$$

   Probe: $49^2 + 168^2 = 175^2$, d.h. $2401 + 28224 = 30625$

3. $m = 8$, $n = 2$

Gl. 3.2	$a_{8/2} = m \cdot n = 16$
Gl. 4.2	$x_{8/2} = \frac{m}{2}(n^2 - 1) = 12$
Gl. 5.2	$(x+m)_{8/2} = \frac{n}{2}(n^2 + 1) = 20$

   Probe: $16^2 + 12^2 = 20^2$, d.h. $256 + 144 = 400$

4. $m = 2$, $n = 7$

$$\begin{aligned} a_{2/7} &= 2 \cdot 7 = 14 \\ x_{2/7} &= \frac{2}{2}(7^2 - 1) = 48 \\ (x+m)_{2/7} &= (48 + 2) = 50 \end{aligned}$$

   Probe: $14^2 + 48^2 = 50^2$, d.h. $196 + 2304 = 2500$

Berechnung pythagoräischer Tripel der Form $a^2 + (a+i)^2 = c^2$

Autor: Dieter Behrendt, 2020

Gemäß der obigen Gleichung ist die größere Kathete im rechtwinkligen Dreieck um i größer (i ganze Zahl) als die kleinere. Es genügt, wenn man diese Aufgabe für $i = 1$ löst.
Alle weiteren Tripel ergeben sich dann durch Multiplikation der gefundenen Lösungen für $i = 1$ mit den Faktoren $f = 2, 3, ..., j$.

Aus $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ ergibt sich für a die quadratische Gleichung in der Normalform

$$a^2 + a + \frac{1}{2} - \frac{c^2}{2} = 0 \tag{1}$$

mit der Lösungsgleichung

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{c^2}{2}} \tag{1.1}$$

Umgeformt ergibt sich daraus die positive Lösung für a in Abhängigkeit von c zu:

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2c^2 - 1} - 1\right) \tag{1.2}$$

Die erste Lösung ist sofort bekannt, schon das einfachste (und erste) Tripel 3, 4 und 5 ergibt für a eine ganze Zahl

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{49} - 1\right) = 3$$

mit $b = a + 1$ wird $b = 4$, so dass das erste Tripel dieser Form komplett ist.

Leider geht es nicht so bequem weiter, da der Wurzelausdruck in (1.2) eine ungerade Quadratzahl sein muss, damit sich in Verbindung mit dem Subtrahenden 1 in der Klammer und dem Faktor $\frac{1}{2}$ vor der Klammer für a eine natürliche Zahl ergibt.
Die ersten sechs Tripel, bei denen $b - a = 1$ gilt, sind in nachstehender Tabelle aufgelistet:

Nr.	c	c^2	a	$b = a + 1$	a^2	$b^2 = (a+1)^2$
1	5	25	3	4	9	16
2	29	841	20	21	400	441
3	169	28561	119	120	14161	14400
4	985	970225	696	697	484416	485809
5	5741	32959081	4059	4060	16475481	16483600
6	33461	1119638521	23660	23661	559795600	559842921

Berechnung pythagoräischer Tripel

Verknüpfung $x + m$-Methode (S. 1-3) mit $u - v - w$-Methode

Autor: Dieter Behrendt, 2020

1. m ist ungerade

Es gelten Gl. 3.1 $a_{un} = m(2n + 1)$, Gl. 4.1 $x_{un} = 2m(n^2 + n)$, Gl. 5.1 $c_{un} = m(2n^2 + 2n + 1)$ und $c_{un} = x + m$.

1.1. geg.: m und n; ges.: u und v (und w)

Nach der $u - v - w$-Methode gilt

$$\begin{array}{ll} \text{I} & u^2 + v^2 = c \\ \text{II} & u^2 - v^2 = a \\ \text{III} & 2 \cdot u \cdot v = w = x \end{array}$$

Wir setzen gleich: Gl. I und Gl. 5.1, sowie Gl. II und Gl. 3.1:

$$\begin{array}{ll} \text{A:} & u^2 + v^2 = m(2n^2 + 2n + 1) \\ \text{B:} & u^2 - v^2 = m(2n + 1) \\ \hline \text{A-B:} & 2v^2 = m(2n^2 + 2n + 1) - m(2n + 1) \\ & v^2 = m \cdot n^2 \qquad (1.1.1) \\ \text{und} & u^2 = m(2n + 1) + v^2 \\ & u^2 = m(2n + 1) + m \cdot n^2 \\ & u^2 = m(n^2 + 2n + 1) \qquad (1.1.2) \end{array}$$

Zahlenbeispiel: $m = 3$, $n = 2$

$$\begin{array}{ll} 1.1.1 & v^2 = 3 \cdot 2^2 = 12 \\ 1.1.2 & u^2 = 3(2^2 + 2 \cdot 2 + 1) = 27 \\ \text{Gl. III} & w = 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{324} = 36 \\ & c = u^2 + v^2 = 27 + 12 = 39 \\ & a = u^2 - v^2 = 27 - 12 = 15 \end{array}$$

Das Tripel lautet somit: 15, 36 und 39, damit $15^2 + 36^2 = 39^2$ bzw. $225 + 1296 = 1521$.
Probe: $m = 3$, $n = 2$

$$\begin{array}{lll} \text{Gl. 3.1} & a = 3(2 \cdot 2 + 1) = 15 & \\ \text{Gl. 4.1} & x = 2 \cdot 3(2^2 + 2) = 36 & \text{und} \\ \text{Gl. 5.1} & c = 3(2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1) = 39 & \text{oder} \\ & c = x + m = 26 + 3 = 39 & \end{array}$$

1.2. geg.: u und v (und w); ges.: m und n

Wieder setzen wir gleich gemäß Pkt. 1.1, subtrahieren und erhalten wieder Gleichung 1.1.1. Diese umgestellt nach m ergibt

$$m = \frac{v^2}{n^2} \qquad (1.2.1)$$

Gleichung 1.2.1 eingesetzt in B ergibt:

$$u^2 - v^2 = \frac{v^2}{n^2}(2n + 1) \tag{1.2.2}$$

Wir setzen $E = \dfrac{u^2 - v^2}{v^2}$. Damit wird 1.2.2 zu:

$$E = \frac{1}{n^2}(2n + 1)$$

eine quadratische Gleichung mit der Normalform

$$n^2 - \frac{2}{E} \cdot n - \frac{1}{E} = 0 \tag{1.2.2.a}$$

Die Lösungsformel für das positive n ist dann:

$$n = \frac{1}{E} + \sqrt{\frac{1}{E^2} + \frac{1}{E}} \tag{1.2.2.b}$$

Wir übernehmen das Zahlenbeispiel von 1.1 $u^2 = 27$ und $v^2 = 12$. Damit wird die positive Lösung von Gl. 1.2.2.b zu:

$$n = \frac{12}{27 - 12} + \sqrt{\frac{144}{225} + \frac{12}{25}} = \frac{12}{15} + \frac{18}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Aus Gl. 1.2.1 folgt dann $m = \dfrac{12}{2^2} = 3$.

Es geht natürlich auch anders. Wir berechnen aus I und II $c = u^2 + v^2 = 27 + 12 = 39$ und $a = u^2 - v^2 = 27 - 12 = 15$ und aus III schließlich $w = 2 \cdot \sqrt{27}\sqrt{15} = 2\sqrt{324} = 36$.
Dann wird $m = 39 - 36 = 3$ und Gl. 3.1 nach n umgestellt ergibt:

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{3} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

2. m ist gerade

Es gelten Gl. 3.2 $a_{ge} = m \cdot n$, Gl. 4.2 $x_{ge} = \dfrac{m}{2}(n^2 - 1)$, Gl. 5.2 $c_{ge} = \dfrac{m}{2}(n^2 + 1)$ und $c_{ge} = x + m$.

2.1. geg.: m und n; ges.: u und v (und w)

Wir setzen gleich:

$$\begin{array}{ll} \text{C:} & u^2 + v^2 = \dfrac{m}{2}(n^2 + 1) = c \\ \text{D:} & u^2 - v^2 = m \cdot n = a \\ \hline \text{C-D:} & 2v^2 = \dfrac{m}{2}(n^2 + 1) - m \cdot n \end{array}$$

$$v^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} - n\right) \tag{2.1.1}$$

und

$$u^2 = m \cdot n + v^2$$

$$u^2 = m \cdot n + \frac{m}{2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} - n\right)$$

$$u^2 = m\left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \tag{2.1.2}$$

Zahlenbeispiel: $m = 2$, $n = 3$

$$2.1.1 \qquad v^2 = \frac{2}{2}\left(\frac{3^2}{2} + \frac{1}{2} - 3\right) = 2$$

$$2.1.2 \qquad u^2 = 2\left(\frac{3^2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = 8$$

$$\text{Gl. III} \qquad w = x = 2\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{16} = 8$$

$$\text{Gl. I} \qquad u^2 + v^2 = 8 + 2 = 10 = c$$

$$\text{Gl. II} \qquad u^2 - v^2 = 8 - 2 = 6 = a$$

Das Tripel lautet somit: 6, 8 und 10, damit $6^2 + 8^2 = 10^2$ bzw. $36 + 64 = 100$.
Probe: $m = 2$, $n = 3$

$$\text{Gl. 3.2} \qquad a = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{Gl. 4.2} \qquad x = \frac{2}{2}(3^2 - 1) = 8 \qquad \text{und}$$

$$\text{Gl. 5.2} \qquad c = \frac{2}{2}(3^2 + 1) = 10$$

2.2. geg.: u und v (und w); ges.: m und n

Gl. D umgeformt ergibt für m

$$m = \frac{u^2 - v^2}{n} \tag{2.2.1}$$

Gleichung 1.2.1 eingesetzt in C ergibt:

$$\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} = \frac{1}{2n}(n^2 + 1) \tag{2.2.2}$$

Mit $\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} = F$ wird 2.2.2 zu:

$$F = \frac{1}{2n}(n^2 + 1)$$

und umgeformt zur Normalform der quadratischen Gleichung

$$n^2 - \frac{2}{F} \cdot n + 1 = 0 \tag{2.2.2.a}$$

mit der Lösungsformel für das n_1:

$$n_1 = F + \sqrt{F^2 - 1} \tag{2.2.2.b}$$

Zahlenbeispiel:
Wir übernehmen die Zahlen von 2.1, $u^2 = 8$, $v^2 = 2$ und $w = 2\sqrt{16} = 8$. Mit $F = \frac{8+2}{8-2} = \frac{5}{3}$ folgt für n_1, Gl. 2.2.2.b

$$n = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

Aus Gl. 2.2.1 folgt dann $m = \frac{8-2}{3} = 2$. Damit werden

$$\text{Gl. 3.2} \qquad a = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{Gl. 4.2} \qquad x = \frac{2}{2}(3^2 - 1) = 8 \qquad \text{und}$$

$$\text{Gl. 5.2} \qquad c = \frac{2}{2}(3^2 + 1) = 10$$

Der andere Weg

$$
\begin{aligned}
\text{I:} \qquad & u^2 + v^2 = 8 + 2 = 10 = c \\
& w = x = 2\sqrt{16} = 8 \\
\text{II:} \qquad & u^2 - v^2 = 8 - 2 = 6 = a \\
& m = c - x = 10 - 8 = 2 \qquad \text{und} \\
& n = \frac{a}{m} = \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}
$$

Die Tabellen I und II zeigen Beispiele für die Verknüpfung der $m-n$-Methode mit der $u-v-w$-Methode bei vorgegebenen m und n. In Tabelle III sind Beispiele für die Verknüpfung beider Methoden bei vorgegebenen u und v und gesuchten m und n aufgelistet.

3. Verknüpfung Berechnungsmethode Seite 4 mit Methode Seiten 1-3 bzw. $u-v-w$-Methode

Die Berechnung von PZT der Form $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ erfolgte über einen anderen Lösungsweg (quadratische Gleichung zur Berechnung von a bei Vorgabe von c bzw. c^2).
Die beiden betrachteten Verfahren müssen natürlich auch hier zum Ziel führen. Wir nehmen Tabelle IV, Zeile 3 als Beispiel zur Bestimmung von m und n bzw. von u und v.

Das Tripel lautet: $a = 119$, $a + 1 = 120$ und $c = 169$, also $119^2 + 120^1 = 169^2$.
Damit wird $m = 169 - 120 = 49$, es gelten die Gleichungen für ungerade m.
Gl. 3.1 umgestellt nach n ergibt:

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{m} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{119}{49} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{49} = \frac{5}{7}$$

Mit Gl. 4.1 wird $x = a + 1$ berechnet:

$$x = a + 1 = 2m(m^2 + n) = 2 \cdot 49 \left(\frac{5^2}{7^2} + \frac{5}{7}\right) = 2 \cdot 60 = 120$$

Gl. 5.1 liefert dann c:

$$c = m(2n^2 + 2n + 1) = 49\left(2 \cdot \frac{5^2}{7^2} + 2 \cdot \frac{5}{7} + 1\right) = 49 \cdot \frac{169}{49} = 169$$

u und v können wir auf verschiedene Weise berechnen:

$$
\begin{aligned}
\text{Gl. 1.1.1} \qquad & v^2 = m \cdot n^2 = 49 \cdot \frac{5^2}{7^2} = 25 \Rightarrow v = \sqrt{25} = 5 \\
\text{Gl. 1.1.2} \qquad & u^2 = m(n^2 + 2n + 1) = 49\left(\frac{5^2}{7^2} + 2 \cdot \frac{5}{7} + 1\right) \\
& u^2 = 49 \cdot \frac{144}{49} = 144 \Rightarrow u = \sqrt{144} = 12 \\
\text{und Gl. III} \qquad & w = a + 1 = x = 2 \cdot u \cdot v = 2 \cdot 12 \cdot 5 = 120
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
\text{Gl. I} \qquad & u^2 + v^2 = 169 \\
\text{Gl. II} \qquad & u^2 - v^2 = 119
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2v^2 = 50 \Rightarrow v = \sqrt{25} = 5 \\
& u^2 = 119 + 25 = 144 \Rightarrow u = \sqrt{144} = 12 \qquad \text{und} \\
& w = b = x = 2 \cdot u \cdot v = 2 \cdot 12 \cdot 5 = 120
\end{aligned}
$$

Weiteres Beispiel, Tabelle IV, Zeile 2
$c = 29$, $a = 20$, $b = 21$
$m = c - b = 29 - 21 = 8$, d.h. m ist gerade
Gl. 3.2 ergibt für n: $n = \frac{a}{m} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$; Gl. 4.2 für $x = b = \frac{m}{2}(n^2 - 1) = \frac{8}{2}\left(\frac{5^2}{2^2} - 1\right) = 21$
Gl. 5.2 für $c = \frac{m}{2}(n^2 + 1) = \frac{8}{2}\left(\frac{5^2}{2^2} + 1\right) = 29$

$$\begin{array}{ll} \text{Gl. I} & u^2 + v^2 = 29 \\ \text{Gl. II} & u^2 - v^2 = 20 \\ \hline & 2v^2 = 9 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{9}{2}} \\ & u^2 = 20 + v^2 = 20 + \frac{9}{2} = \frac{49}{2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{49}{2}} \\ \text{Gl. III} & w = x = b = 2 \cdot u \cdot v = 2 \cdot \sqrt{\frac{49}{2}}\sqrt{\frac{9}{2}} = 21 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ll} \text{Gl. 2.1.1} & v^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} - n\right) = \frac{8}{2}\left(\frac{5^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{2} \\ \text{Gl. 2.1.2} & u^2 = m\left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{2}\left(\frac{5^2}{4 \cdot 2^2} + \frac{5}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{49}{2} \end{array}$$

Gl. III wie oben

4. Diskussion der Ergebnisse

Jede der beiden Methoden führt bei Verwendung von natürlicher Zahlen für die Parameter n sowie u und v zu einem pythagoräischen Zahlentripel.
Es ist aber nicht so, dass ein bestimmtes nach der einen Methode berechnetes Tripel bei der anderen Methode ebenfalls durch natürliche Zahlen der Parameter darstellbar sein muss (siehe Beispielrechnungen und Tabellen I-IV).

Das bedeutet wiederum nicht, dass man mit beiden Methoden für sich betrachtet (und Einsatz ganzer Zahlen bei den Parametern) alle existierenden Tripel vorausberechnen kann. Die Verknüpfung beider Methoden zeigt, dass es eine Vielzahl von Tripeln gibt, bei denen entweder n oder u und v Brüche und Wurzelausdrücke mit keinen ganzzahligen Wurzeln sind.

Bei der Berechnung von Tripeln der Form $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$ gibt es sogar in einigen Fällen die Besonderheit, dass alle Parameter nicht natürliche Zahlen sind (Tabelle IV).
Die Größe m ist als Differenz zweier natürlicher Zahlen $m = c - b$ immer eine natürliche Zahl. Genauso ist bei der $u - v - w$-Methode $w = x = b = 2 \cdot u \cdot v$ ebenfalls immer eine natürliche Zahl, selbst wenn u oder v (und im Einzelfall sogar deren Quadrate) keine natürlichen Zahlen sind, wohl aber deren Summen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass sich die betrachteten Berechnungsmethoden durch ihre Verknüpfung miteinander bei der Vorausberechnung der unendlich vielen pythagoräischen Zahlentripel sinnvoll ergänzen.

Tabelle I: Verknüpfung, m und n gegeben, m ungerade, gesucht u und v

$m = 1$

n	a	x	$x + m = c$	a^2	x^2	c^2	u^2	v^2	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$x = w = 2uv$
1	3	4	4+1=5	9	16	25	4	1	4+1=5	4-1=3	4
2	5	12	12+1=13	25	144	169	9	4	9+4=13	9-4=5	12
3	7	24	24+1=25	49	576	625	16	9	16+9=25	16-9=7	24
4	9	40	40+1=41	81	1600	1681	25	16	26+16=41	25-16=9	40

$m = 3$

n	a	x	$x + m = c$	a^2	x^2	c^2	u^2	v^2	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$x = w = 2uv$
1	9	12	12+3=15	81	144	225	12	3	12+3=15	12-3=9	12
2	15	36	36+3=39	225	1296	1521	27	12	27+12=39	27-12=15	36
3	21	72	72+3=75	441	5184	5625	48	27	48+27=74	48-27=21	72
4	27	120	120+3=123	729	14400	15129	75	48	75+48=123	75-48=27	120

Tabelle II: Verknüpfung, m und n gegeben, m gerade, u und v gesucht

$m = 2$

n	a	x	$x + m = c$	a^2	x^2	c^2	u^2	v^2	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$x = w = 2uv$
2	4	3	3+2=5	16	9	25	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$	$\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 5$	3
3	6	8	8+2=10	36	64	100	8	2	8+2=10	8-2=6	8
4	8	15	15+2=17	64	225	289	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 17$	$\frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$	15
5	10	24	24+2=26	100	576	676	18	8	18+8=26	18-8=10	24

$m = 4$

n	a	x	$x + m = c$	a^2	x^2	c^2	u^2	v^2	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$x = w = 2uv$
2	8	6	6+4=10	64	36	100	9	1	9+1=10	9-1=8	6
3	12	16	16+4=20	144	256	400	16	4	16+4=20	16-4=12	16
4	16	30	30+4=34	256	900	1156	25	9	25+9=34	25-9=16	30
5	20	48	48+4=52	400	2304	2704	36	16	36+16=52	36-16=20	48

Tabelle III: Verknüpfung, u und v gegeben, m und n gesucht

u	v	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$w = b = x = 2 \cdot u \cdot v$	a^2	b^2	c^2	$c - b = m$	n
2	1	4+1=5	4-1=3	$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$	9	16	25	5-4=1	1
3	1	9+1=10	9-1=8	$2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$	64	36	100	10-6=4	2
4	1	16+1=17	16-1=15	$2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$	225	64	289	17-8=9	$\frac{1}{3}$
5	1	25+1=26	25-1=24	$2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$	576	100	676	26-10=16	$\frac{3}{2}$
3	2	9+4=13	9-4=5	$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$	25	144	169	13-12=1	2
4	2	16+4=20	16-4=12	$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$	144	256	400	20-6=4	3
5	2	25+4=29	25-4=21	$2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$	441	400	841	29-20=9	$\frac{2}{3}$
6	2	36+4=40	36-4=32	$2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$	1024	576	1600	40-24=16	1
4	3	16+9=25	16-9=7	$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$	49	576	625	25-24=1	3
5	3	25+9=34	25-9=16	$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$	256	900	1156	34-30=4	4
6	3	36+9=45	36-9=27	$2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$	729	1296	2025	45-36=9	1
7	3	49+9=58	49-9=40	$2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$	1600	1764	3364	58-24=16	$\frac{5}{2}$
5	4	25+16=41	25-16=9	$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$	81	1600	1681	41-40=1	4
6	4	36+16=52	36-16=20	$2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$	400	2304	2704	452-48=4	5
7	4	49+16=64	49-16=33	$2 \cdot 7 \cdot 4 = 56$	1089	3136	4225	65-56=9	$\frac{4}{3}$
8	4	64+16=80	64-16=48	$2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$	2304	4096	6400	80-64=16	3

Tabelle IV: Verknüpfung Berechnung von PZT der Form $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ mit Methoden I und II

Nr.	c	c^2	a	$b = a+1$	a^2	$b^2 = (a+1)^2$
1	5	25	3	4	9	16
2	29	841	20	21	400	441
3	169	28561	119	120	14161	14400
4	985	970225	696	697	484416	485809
5	5741	32959081	4059	4060	16475481	16483600
6	33461	1119638521	23660	23661	559795600	559842921

Nr.	m	n	u	v	$w = b = 2 \cdot u \cdot v$	u^2	v^2	$w^2 = b^2 = 4u^2 \cdot v^2$
1	1	1	2	1	4	4	1	16
2	8	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{\frac{49}{2}}$	$\sqrt{\frac{9}{2}}$	21	$\frac{49}{2}$	$\frac{9}{2}$	441
3	49	$\frac{5}{7}$	12	5	120	144	25	14400
4	288	$\frac{29}{12}$	$\sqrt{\frac{1681}{2}}$	$\sqrt{\frac{289}{2}}$	697	$\frac{1681}{2}$	$\frac{289}{2}$	485809
5	1681	$\frac{29}{41}$	70	29	4060	4900	841	16483600
6	9800	$\frac{169}{70}$	$\sqrt{\frac{57121}{2}}$	$\sqrt{\frac{9801}{2}}$	23661	$\frac{57121}{2}$	$\frac{9801}{2}$	559842921