
Tamás Varga

Mathematische Logik für Anfänger
Aussagenlogik

Übersetzung und Bearbeitung: Christa Pfeiffer, Christa Dürr

Illustrationen: Harri Parschau

1970 Volk und Wissen Berlin

MSB: Nr. 7

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist mathematische Logik ?	4
1.1 Hänschens Schluss	4
1.2 Der Gebrauch von Buchstaben	5
1.3 Eine zweite Schlussfigur	6
1.4 Die Richtigkeit einer Schlussfigur	7
1.5 Die Richtigkeit eines Schlusses	8
1.6 Der Gegenstand unseres Buches	9
1.7 Aufgaben	10
2 Einige logische Operationen	12
2.1 Zweifel und ihre Entkräftung	12
2.2 Die Wahrheit ist unteilbar	13
2.3 Das logische Einmaleins: die Wahrheitstafel der Konjunktion	14
2.4 Eine zweite logische Operation: die Alternative	15
2.5 Die Disjunktion	16
2.6 Wenn zweierlei „oder“ dasselbe bedeuten	17
2.7 Noch ein drittes „oder“	17
2.8 Ist die Logik oder die lebendige Sprache falsch?	18
2.9 Filtriert die mathematische Logik die farbige Wirklichkeit?	19
2.10 „Es ist nicht alles Gold, was glänzt“	20
2.11 Die Negation	20
2.12 Die Aufklärung eines möglichen Missverständnisses	21
2.13 Die mehrfache Negation	21
2.14 Negation und Alternative miteinander	22
2.15 Die Implikation	24
2.16 Die Beziehungen zwischen Implikation und Alternative	25
2.17 Ist es mit der Implikation übel bestellt?	25
2.18 Implikationen mit falschem Vorderglied	27
2.19 Wir führen den Beweis für die Richtigkeit einer Schlussfigur	28
2.20 Dasselbe in Kürze	29
3 Algebra und Logik	32
3.1 Wir versuchen, Parallelen zu ziehen	32
3.2 Die Kommutativität und die Assoziativität als Eigenschaft der Konjunktion	33
3.3 Die Wertverlaufsgleichheit	34
3.4 Beispiele für die Eigenschaften der Konjunktion	35
3.5 Die entsprechenden Eigenschaften der Alternative	35
3.6 Die Verallgemeinerung auf mehrere Glieder	36
3.7 Substitution	37
3.8 Das Gesetz der Kontraposition	38
3.9 Ersetzung	38
3.10 Welcher Vergleich ist der bessere ?	39
3.11 Die Gegenprobe	41
3.12 Beispiele für die beiden Distributionsgesetze	42
3.13 Die Verallgemeinerung der Distributivität auf mehrere Glieder	42
3.14 Idempotenz	43
3.15 Negation und Konjunktion, Negation und Alternative	44
3.16 Eine andere Beweisführung - die Verallgemeinerung	45
3.17 Beispiele für die de Morganschen Regeln	46
3.18 Dualismus	46

4	Überblick über die logischen Operationen	50
4.1	Die einstelligen logischen Operationen	50
4.2	Die zweistelligen Operationen	51
4.3	Die Äquivalenz	52
4.4	Die Äquivalenz als Implikation in zwei Richtungen	53
4.5	Der Zusammenhang von Äquivalenz und Disjunktion	53
4.6	Äquivalenz und Wertverlaufsgleichheit	53
4.7	Die übrigen drei Operationen	55
4.8	Wir begnügen uns mit möglichst wenig Operationen	55
4.9	Überblick über die 16 zweistelligen Operationen	56
4.10	Kann die Anzahl der Operationen noch weiter verringert werden ?	56
4.11	Die mehrstelligen Operationen	57
4.12	Bildung mehrstelliger Operationen mit Hilfe von Negation, Konjunktion und Alternative	58
4.13	Die vollständige alternative Normalform	60
4.14	Die Ermittlung der Wahrheitswertetafel aus der vollständigen alternativen Normalform	60
4.15	Die vollständige konjunktive Normalform	62
4.16	Die zeichnerische Darstellung der Operationen	63
4.17	Die elementare Aussage	66
4.18	Der Aussagenkalkül	67
5	Die Wertverlaufsgleichheit und der Schluss	70
5.1	Mehrere Prämissen statt einer, eine Prämisse statt mehrerer	70
5.2	Die Umkehrbarkeit und die Nichtumkehrbarkeit von Schlussfiguren	71
5.3	Von der richtigen Schlussfigur zur allgemeingültigen Implikation	72
5.4	Von einer allgemeingültigen Implikation zur richtigen Schlussfigur	73
5.5	Umkehrbare Schlussfiguren und allgemeingültige Äquivalenzen	74
5.6	Umkehrbare Schlussfiguren und Wertverlaufsgleichheit	75
5.7	Zusammenfassung	75
5.8	Der indirekte Beweis	76
6	Wir suchen die Konklusion	80
6.1	Wir kennen die Prämissen und suchen die Konklusion	80
6.2	Wer begleitet Susi ?	80
6.3	Dasselbe mit anderen Bezeichnungen	81
6.4	Direkter Schluss kontra Gleichung	83
6.5	Wer ist der Täter?	85
6.6	Nicht immer ist entscheidbar, welchen Wahrheitswert die Variablen besitzen	87
6.7	Logisches Schließen durch Probieren	88
6.8	Haben wir richtig geschlossen?	89
6.9	Logisches Schließen ohne Herumprobieren	90
7	Die Brücke von der Theorie zur Praxis	93
7.1	Wodurch werden praktische Anwendungen ermöglicht?	93
7.2	Die Konjunktion und die Reihenschaltung	93
7.3	Alternative und Parallelschaltung	94
7.4	Mehr als zwei Konjunktionen oder Alternativen	94
7.5	Mehrere Operationen zugleich	95
7.6	Eine interessante Anwendung	95
8	Lösungen der Aufgaben	98
9	Nachwort	126

1 Was ist mathematische Logik ?

1.1 Hänschens Schluss

"Wenn ich hundert Meter unter 10,0 Sekunden laufe", sagte Hänschen, "werde ich zur Olympiade delegiert. Leider laufe ich aber die hundert Meter nicht unter 10,0 Sekunden, folglich werde ich nicht zur Olympiade delegiert."

Nun kann Hänschen aber unabhängig davon, dass er hundert Meter nicht unter 10,0 Sekunden läuft, ein guter Sportler, beispielsweise ein guter Kugelstoßer sein, und in dieser sportlichen Disziplin zur Olympiade delegiert werden.

Sein Schluss ist also falsch.

Wer das nicht glaubt, bedenke, dass man mit dieser Schlussweise auch zu dem folgenden falschen Schluss gelangen kann.

Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.
Das Benzin geht nicht aus.

Das Auto bleibt nicht stehen.



Das Wort "folglich" wird hier durch den langen horizontalen Strich ersetzt. Die über dem Strich stehenden Aussagen¹, aus denen wir schließen, nennen wir Prämissen², die unter dem Strich stehende Aussage, auf die wir schließen, Konklusion.

Offensichtlich kann man aus diesen Prämissen nicht auf die niedergeschriebene Konklusion schließen, denn, auch wenn das Benzin nicht ausgegangen ist, kann das Auto stehenbleiben, zum Beispiel dann, wenn der Fahrer anhält oder das Auto gegen einen Baum prallt. Hat der Leser herausgefunden, dass dieser Schluss denselben Fehler enthält wie Hänschens Schluss?

Heben wir einmal das Gemeinsame an beiden Schlüssen hervor. Beide Schlüsse haben die Form:

Wenn ... , so —
Nicht ...

Nicht —

Wir haben hier ein erstes Beispiel einer Schlussfigur vor uns. Sie ist nur die äußere Form, das Schema, das Skelett eines Schlusses und kann ähnlich einem Formular in mannigfacher Weise

¹Wenn wir von Aussagen sprechen, so möge sich der Leser darunter einen Satz vorstellen, der entweder wahr oder falsch ist.

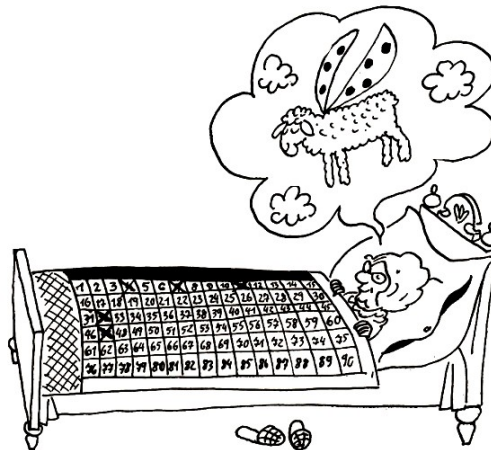
²prämissa ist ein lateinisches Wort. Wörtlich bedeutet es "die Vorausgehenden".

ausgefüllt werden. In ihr kommen keine Aussagen, sondern nur die Strukturen von Aussagen vor.

Die oben angegebenen Beispiele deuten nun darauf hin, dass die Schlussfigur fehlerhaft ist.

Es ist möglich, dass jemand die folgende Meinung vertritt: Ich schließe im täglichen Leben häufig auf diese Weise, ohne dabei Fehler zu machen.

Aber dieses Argument hat den gleichen Wert wie der Traum der alten Frau, die im Lotto fünf Richtige hatte. In ihrem Traum sah sie ein fliegendes Schaf mit Tupfen auf den Flügeln. Sie erzählte: "Vier Beine hatte das Schaf und sieben Tupfen auf den Flügeln, gerade wie ein Marienkäfer. Ich kreuzte folgende Zahlen auf dem Lottoschein an: die 4, die 7, die 47, dann 11, wegen $4 + 7 = 11$, und weiter die 32, weil nämlich $4 \cdot 7 = 32$ ist.



Als jemand zu ihr sagte: "Gute Frau, $4 \cdot 7$ ist doch 28", antwortete sie:

"Aber geh, wie kann es 28 sein? Glauben Sie mir, es ist bestimmt 32. Ich weiß das, ich habe ja mit der 32 das viele Geld gewonnen."

1.2 Der Gebrauch von Buchstaben

Was wollten wir damit ausdrücken, wenn wir in der vorangegangenen Schlussfigur an manche leeren Stellen Punkte, an andere Stellen Striche setzten? Der Leser wird sicherlich auf Grund der Beispiele verstehen, dass gleiche Zeichen für gleiche Aussagen stehen.

In der Mathematik ist es üblich, statt solcher Zeichen besser Buchstaben zu verwenden. Das folgende Beispiel zeigt uns, dass die Verwendung von Buchstaben in vielen Fällen bequemer ist. Betrachten wir einmal den folgenden Schluss³

$$\begin{array}{r} a > b \\ c > 0 \\ \hline a c > b c \end{array}$$

Überall in der Schlussfigur soll der Buchstabe a stets dieselbe Zahl bedeuten, desgleichen der Buchstabe b und der Buchstabe c . Selbstverständlich könnten wir diesen Schluss auch in der folgenden Form niederschreiben:

³In Worten: Wenn ich zwei verschiedene Zahlen mit ein und derselben positiven Zahl multipliziere, so ist das Produkt aus der größeren Zahl und der positiven Zahl größer als das Produkt aus der kleineren Zahl und der positiven Zahl.

$$\begin{array}{r} \dots > - \\ \dots > 0 \\ \hline \dots \text{ mal } \dots > - \text{ mal } \dots \end{array}$$

Aber diese Schreibweise ist länger und unübersichtlicher als die vorangegangene. Deshalb verwendet man nicht nur für Zahlen, sondern auch an Stelle von Aussagen Buchstaben. Zum Beispiel können wir die obengenannte fehlerhafte Schlussfigur auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{array}{r} \text{Wenn } A, \text{ so } B \\ \text{Nicht } A \\ \hline \text{Nicht } B \end{array} \quad (1)$$

Auch in dieser Schlussfigur stehen übereinstimmende Buchstaben stellvertretend für übereinstimmende Aussagen. Aber verschiedene Buchstaben bedeuten in einer Schlussfigur nicht unbedingt verschiedene Aussagen beziehungsweise Zahlen. Wir können doch die Ungleichung $5 > 3$ auch mit 5 multiplizieren. Würden nun aber in der Schlussfigur

$$\begin{array}{r} a > b \\ c > 0 \\ \hline a c > b c \end{array}$$

die Buchstaben a , b und c stets verschiedene Zahlen bedeuten, so könnten wir diese Schlussfigur bei der Multiplikation der Ungleichung $5 > 3$ mit 5 nicht anwenden.

1.3 Eine zweite Schlussfigur

Wir modifizieren die Schlussfigur (1) jetzt folgendermaßen:

$$\begin{array}{r} \text{Wenn } A, \text{ so } B \\ \text{Nicht } B \\ \hline \text{Nicht } A \end{array} \quad (2)$$

Es ist gegenüber (1) nichts weiter verändert worden, als dass das zweite A und das zweite B gegeneinander ausgetauscht wurden. Ist diese Schlussfigur nun richtig, oder ist sie immer noch fehlerhaft ?

Zur Beantwortung dieser Frage sehen wir uns einige Beispiele an:

Wenn Paul die 100-m-Strecke unter 10 Sekunden läuft, so wird er zur Olympiade geschickt.
Paul wird nicht zur Olympiade geschickt.

Paul läuft die 100-m-Strecke nicht unter 10 Sekunden.

Wir sind uns hoffentlich über die Richtigkeit dieses Schlusses einig.
Ein weiteres Beispiel:

Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.
Das Auto bleibt nicht stehen.

Das Benzin ist nicht ausgegangen.

Hierzu sagte mir mein Freund, der selbst Kraftfahrer ist: "Das ist eine völlig falsche Schlussfolgerung. Es ist doch durchaus möglich, dass das Auto nicht stehenbleibt, obwohl das Benzin ausgegangen ist, denn auf glatter Strecke, besonders, wenn sie etwas Gefälle hat, kann das

Auto auch ohne Benzin noch eine ganze Strecke rollen."

Hatte mein Freund recht? Was das Weiterrollen des Autos betrifft, ja; bezüglich seiner Bemerkung über die Schlussfolgerung hatte er unrecht.

Er vergaß einfach die erste Prämisse. Und so stellte er sich vor, dass wir allein aus der zweiten Prämisse auf die Konklusion schließen könnten (darauf, dass das Benzin nicht ausgegangen ist).

Das wäre allerdings eine falsche Schlussweise, denn es sind uns doch zwei Prämissen gegeben! Mein Freund zweifelt zu Recht an der Gültigkeit der ersten Prämisse, wenn er sich auf die Trägheit (das Beharrungsvermögen) oder beim Gefälle auf die Massenanziehung (Gravitation) bezieht. Seine Zweifel an der Richtigkeit der ersten Prämisse müssen aber von seinem Zweifel, ob aus den gegebenen Prämissen auch die gegebene Konklusion folgt, sorgfältig unterschieden werden, da die Frage nach der Richtigkeit einer Prämisse und die Frage, ob eine gegebene Konklusion aus gegebenen Prämissen wirklich folgt, zwei voneinander zu trennende Probleme sind.

1.4 Die Richtigkeit einer Schlussfigur

An unseren Beispielen erkennen wir, dass von den beiden untersuchten Schlussfiguren

$$(1) \quad \frac{\text{Wenn } A, \text{ so } B}{\text{Nicht } A} \quad \text{Nicht } B \quad (2) \quad \frac{\text{Wenn } A, \text{ so } B}{\text{Nicht } B} \quad \text{Nicht } A$$

die Schlussfigur (1) auf alle Fälle fehlerhaft ist. Was verstehen wir darunter?

Wir setzen an Stelle von A und B Aussagen ein.

Erhalten wir in wenigstens einem Falle eine falsche Konklusion, obwohl beide Prämissen wahr sind, so nennen wir die Schlussfigur fehlerhaft.

Die Schlussfigur (2) hingegen, vermuten wir, ist richtig, das heißt:

Wenn die Prämissen wahr sind, ist auch immer die Konklusion wahr, unabhängig davon, welche Aussagen wir an Stelle von A und B einsetzen.

(Das vermuten wir zunächst nur. Später werden wir das beweisen.)⁴

Selbstverständlich verlangen wir von einer richtigen Schlussfigur, dass bei wahren Prämissen ihre Konklusion immer wahr ist. Folgt bei einer Schlussfigur in auch nur einem Falle aus wahren Prämissen eine falsche Konklusion, so ist diese Schlussfigur sicher fehlerhaft.⁵

Damit wird aber nicht gesagt, dass bei einer gegebenen fehlerhaften Schlussfigur aus wahren Prämissen nie eine wahre Konklusion folgen kann. Das kommt in der Tat auch manchmal vor.

Schreiben wir in der fehlerhaften Schlussfigur (1) für A und B die gleiche Aussage "wir werden nass", so gelangen wir zu dem nicht eben tiefsinnigen Schluss:

⁴Die richtige Schlussfigur (2) nennt man *modus tollens* (lateinischer Ausdruck, wörtlich bedeutet er: erhaltende Art).

⁵Der eine oder andere unserer Leser findet es vielleicht komisch, dass wir von "wahren Prämissen", von der "wahren Konklusion" sprechen. Der Gebrauch der Begriffe "richtige Prämisse" und "richtige Konklusion", die besser klingen würden, ist aber in der mathematischen Logik nicht üblich. Das Wort "richtig" nahmen wir in Beschlag für die Schlüsse und Schlussfiguren. Diese nennen wir entweder richtig oder fehlerhaft; aber Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

Wenn wir nass werden, dann werden wir nass.
 Wir werden nicht nass.

 Wir werden nicht nass.

Die erste Prämisse ist nichtssagend, aber zweifellos wahr. Ist auch die zweite Prämisse wahr? Das ist von den Umständen abhängig. Sie kann wahr sein, sie kann aber auch falsch sein. Ist sie aber wahr, so ist auch die Konklusion wahr, denn sie stimmt ja mit der zweiten Prämisse überein.

Können wir diesen Schluss nur aus (1) erhalten? Ist das nicht auch zufällig aus (2) möglich? Das ist keinesfalls nur zufällig möglich, denn setzen wir für A und B jeweils die Aussage "wir werden nass" ein, so erhalten wir den gleichen Schluss.

Wie ist nun der obenstehende Schluss geformt? Entspricht er der Schlussfigur (1) oder der Schlussfigur (2)?

Wir können sagen: Der Schluss hat sowohl die Form (1) als auch die Form (2), weil wir dasselbe Ergebnis erhalten, wenn wir die Aussagen, die eine oder die andere, durch Buchstaben ersetzen (substituieren).

Diese Schlussfigur hat die Gestalt:

$$(3) \quad \frac{\begin{array}{l} \text{Wenn } A, \text{ so } A \\ \text{Nicht } A \end{array}}{\text{Nicht } A}$$

Unsere Antwort auf die Frage nach der Form des genannten Schlusses lautet: Der obenstehende Schluss hat die Form (3).

Ist diese Schlussfigur richtig?

Sie ist offensichtlich richtig: ihre erste Prämisse ist zwar nichtssagend, aber wahr, und wenn ihre zweite Prämisse wahr ist, so ist auch die Konklusion wahr, unabhängig davon, welche Aussage wir für A einsetzen.

1.5 Die Richtigkeit eines Schlusses

Wie das Beispiel zeigt, kann ein und derselbe Schluss aus verschiedenen Schlussfiguren durch Substitution entstehen und kann somit die eine oder die andere Form haben. Trotzdem lässt sich die Figur eines jeden Schlusses ermitteln.⁶

Wie kann das geschehen?

Wir gehen dazu den folgenden Weg:

⁶Zur Vermeidung von Missverständnissen ist folgendes zu beachten:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Wenn } B, \text{ so } B \\ \text{Nicht } B \end{array}}{\text{Nicht } B}$$

ist dieselbe Schlussfigur wie (3), wenn auch mit anderen Buchstaben. Die Schlussfiguren

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Wenn } B, \text{ so } A \\ \text{Nicht } A \end{array}}{\text{Nicht } B} \quad \text{und} \quad \frac{\begin{array}{l} \text{Wenn } W, \text{ so } Q \\ \text{Nicht } Q \end{array}}{\text{Nicht } W}$$

hingegen sind nicht identisch mit (3) und auch nicht mit (1), sondern mit (2). Nicht die Wahl der Buchstaben ist dafür entscheidend, sondern des Auftreten gleicher Buchstaben an einander entsprechenden Stellen in den Schlussfiguren.

Wir suchen in den Schlüssen die vorkommenden elementaren Aussagen⁷ (das sind solche Aussagen, die man nicht mehr in einfachere Aussagen zerlegen kann) und schreiben für jede einen Buchstaben, für gleiche Aussagen gleiche Buchstaben, für verschiedene Aussagen verschiedene Buchstaben. Und nun vereinbaren wir folgendes:

Wenn wir auf diese Weise zu einer richtigen Schlussfigur gelangen, dann ist auch der ursprüngliche Schluss richtig.

Wir zerlegen also die Aussagen eines Schlusses für die Ermittlung seiner Schlussfigur nur so weit, bis wir als Teile wiederum Aussagen erhalten. Aussagen, deren Teile selbst nicht mehr Aussagen sind, zerlegen wir nicht weiter.

Betrachten wir zum Beispiel den folgenden Schluss:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Pferde sind Säugetiere.} \\ \text{Alle Säugetiere sind Wirbeltiere.} \\ \hline \text{Alle Pferde sind Wirbeltiere.} \end{array}$$

Keine dieser Aussagen können wir weiter in Teilaussagen zerlegen; es sind elementare Aussagen. Wir schließen also wie folgt:

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline C \end{array}$$

Diese Schlussfigur ist aber ungenau. Wäre sie richtig, so würde das bedeuten, dass es immer möglich ist, aus zwei beliebigen Aussagen auf irgendeine dritte Aussage zu schließen. Ist der obenstehende Schluss also falsch ?

Kein Wort davon! Wir sagten nur, dass alle Schlüsse richtig sind, die eine richtige Schlussfigur haben.

Wir sehen aber, dass es außer diesen auch andere richtige Schlüsse gibt, zum Beispiel den obenstehenden.

Die mathematische Logik befähigt uns, auch die elementaren Aussagen in ihre Bestandteile zu zerlegen. Mit ihrer Hilfe kann man also auch die Richtigkeit von Schlüssen, wie die des obenstehenden, beweisen. Damit werden wir uns aber in diesem Band nicht beschäftigen.

1.6 Der Gegenstand unseres Buches

Jetzt können wir schon umschreiben - wenn auch nur in erster Annäherung -, wovon in diesem Buch die Rede sein wird.

Wir beschäftigen uns mit der Logik, wir lernen, wie man von einem Schluss entscheiden kann, ob er falsch oder richtig ist. Wir behaupten nicht, dass sich die Logik nur mit diesem Problem beschäftigt; es ist aber eine ihrer wichtigsten Aufgaben.

Unser Gegenstand ist hierbei auch nur die formale Logik. Darunter verstehen wir in erster Annäherung folgendes: Wir untersuchen, welche Schlüsse lediglich vermöge ihrer äußeren Form richtig sind. Das "vermöge ihrer äußeren Form" verstehen wir so: wir sehen vom Inhalt der in den Schlüssen vorkommenden Aussagen ab und achten nur darauf, ob diese Aussagen wahr sind oder falsch.

⁷In den folgenden Kapiteln werden wir sehen, wie man Aussagen in elementare Aussagen anlegen kann.

Die Logik ist eine alte Wissenschaft, sie kann auf eine mehr als 2000jährige Geschichte zurückblicken. Ihr erster großer Vertreter war Aristoteles (384–322 v.u.Z.). Ihre eigentliche Entwicklung begann aber erst in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts, als sich Beziehungen zur Mathematik anbahnten und sie deren Methoden und Techniken übernahm. Diese neue, sehr fruchtbringende Entwicklungsrichtung bezeichnet man als mathematische Logik.⁸

Dieses Buch möchte den Leser mit dem Gedankenkreis der mathematischen Logik und ihren einfachsten Schlüssen bekannt machen.

Die Bedeutung der mathematischen Logik beginnen heute auch schon Vertreter anderer Wissenszweige zu erkennen, insbesondere im Zusammenhang mit den elektronischen Rechenmaschinen.

Von den elektronischen Rechenmaschinen hat der Leser sicher schon gehört, und er weiß auch, welche große Rolle sie bei der Automatisierung der Produktion spielen. Aber was hat das mit der mathematischen Logik zu tun? Sogar in doppelter Hinsicht!

Einerseits haben beide ein gemeinsames Ziel: Sie vermögen den Menschen von ermüdender geistiger Arbeit zu befreien. Das geschieht dadurch, dass sie diese Arbeit mechanisieren. Andererseits ist die mathematische Logik bereits heute ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der Automation.

Ende des vergangenen Jahrhunderts skizzierte der deutsche Philosoph G.W.F. Hegel eine nicht formale, sondern dialektische Logik.⁹

F. Engels und W.I. Lenin gaben Anregungen, wie die Hegelsche dialektische Logik auf eine materialistische Grundlage gestellt werden sollte.¹⁰

Unser Buch beschäftigt sich nicht mit dialektischer Logik.¹¹

1.7 Aufgaben

1. Ein Sportsachverständiger verteidigt Hänschens Schluss folgendermaßen:

"Eigentlich hat Hänschen recht. Am meisten hinkt an diesem Schluss, dass die Weltrekordzeit im 100-m-Lauf 10,0 Sekunden sei. Es ist aber eine irrealer Forderung, die Delegation zur Olympiade an diese Rekordleistung zu knüpfen.

Nehmen wir an, dass man Hänschen sagt: 'Wenn du 100 Meter in weniger als 10,3 Sekunden läufst, schicken wir dich zur Olympiade.'

Hänschen ist aber zu dieser Leistung nicht fähig.

Er kann daher mit Recht sagen: 'Ich laufe 100 Meter nicht in weniger als 10,3 Sekunden. Folglich kann ich nicht zur Olympiade delegiert werden.'"

⁸Andere Bezeichnungen: logischer Kalkül, symbolische Logik, Logistik. Die letzteren beiden Bezeichnungen - besonders die allerletzte - werden häufig in anderem Sinne, meist im verächtlichen gebraucht, zum Beispiel für eine philosophische Richtung, nach der die Logik das Primäre und die Mathematik nur die weiterentwickelte Logik ist (diese Richtung bezeichnet man auch als Logismus oder Logistizismus).

⁹G.W.F. Hegel: Wissenschaft der Logik.

¹⁰F. Engels: Dialektik der Natur - Ludwig Feuerbach - Anti-Dühring. W.I. Lenin: Philosophischer Nachlass.

¹¹Ein Buch, das sich mit formaler und dialektischer Logik beschäftigt und dabei auch die neueren Ergebnisse der mathematischen Logik berücksichtigt, ist: G. Klaus: Einführung in die formale Logik, Berlin 1958. Erwähnen wir hier, dass Klaus und andere Gelehrte, unter ihnen Laszlo Kalmar die Frage aufwerfen, ob nicht die mathematische Logik so gewachsen ist, dass man sie in ihrer Gesamtheit nicht mehr zur formalen Logik zählen kann. Dafür spricht die Tatsache, dass die mathematische Logik viele der Züge zeigt, mit denen Engels die dialektische Logik charakterisiert.

Welche Meinung hat der Leser zu diesem Einwand ? Ist unsere Feststellung, dass die Schlussfigur (1) fehlerhaft ist, übereilt?

2. Untersuchen Sie den folgenden Schluss!

Wenn ich die Telefonnummer 188888 wähle, so ertönt der Kammerton a.
Der Kammerton a ertönt nicht.

Ich wählte nicht die Nummer 1888888.

- a) Ist dieser Schluss richtig ?
- b) Sind wir einer derartigen Schlussfigur bereits begegnet ?



3. Welche von den folgenden Schlüssen halten Sie für richtig ?

- a) Wenn das Opfer des Mörders am Freitag abend zu Hause war, so spielte sein Radio. Sein Radio spielte nicht. Also war das Opfer am Freitag abend nicht zu Hause.
- b) Wenn heute der 29. Februar ist, so ist die diesjährige Jahreszahl durch 4 teilbar. Die diesjährige Jahreszahl ist nicht durch 4 teilbar. Also ist heute nicht der 29. Februar.
- c) Wenn ich in einem Raumschiff säße, wäre ich ein berühmter Mensch. Aber ich sitze nicht in einem Raumschiff. Also bin ich kein berühmter Mensch.
- d) Wenn Chaplin im Raumschiff säße, wäre er ein berühmter Mensch. Aber er sitzt nicht im Raumschiff. Also ist Chaplin kein berühmter Mensch.
- e) Wenn Peter im Raumschiff säße, wäre er ein berühmter Mensch. Peter ist kein berühmter Mensch. Also sitzt Peter nicht im Raumschiff.

4. In welchen der unter 3. genannten Schlüssen verwenden wir dieselbe Schlussfigur ?

5. Versuchen Sie an Hand von Beispielen zu entscheiden, ob die folgenden Schlussfiguren richtig sind!

- a)
$$\frac{\text{Wenn A, so B}}{A \quad B}$$
- b)
$$\frac{\text{Wenn A, so B}}{B \quad A}$$

2 Einige logische Operationen

2.1 Zweifel und ihre Entkräftung

Wir lernten Beispiele von Schlüssen, wie

$$\begin{array}{l} \text{Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.} \\ \text{Das Auto bleibt nicht stehen.} \\ \hline \text{Das Benzin geht nicht aus} \end{array}$$

und Beispiele von Schlussfiguren, wie

$$\begin{array}{l} \text{Wenn A, so B} \\ \text{Nicht B} \\ \hline \text{Nicht A} \end{array}$$

kennen.

Wir definierten bereits, wann wir eine Schlussfigur als richtig bezeichnen. Wiederholen wir nochmals diese Definition.

Eine Schlussfigur ist richtig, wenn es unabhängig davon, welche speziellen Aussagen wir für die Buchstaben einsetzen, niemals vorkommen kann, dass jede ihrer Prämissen wahr, ihre Konklusion aber trotzdem falsch ist. Wir nannten sie fehlerhaft, wenn dieser Fall jedoch eintreten konnte.

Von einem Schluss sagten wir, er sei auf alle Fälle richtig, wenn die auf ihn zutreffende Schlussfigur richtig ist. (Es gibt aber auch andere Fälle richtiger Schlüsse. Wir werden diese Fälle in unserem Buch jedoch nicht behandeln.)

Der intelligente Leser aber gibt sich mit diesem Ergebnis nicht zufrieden. Gerne würde er sich zum Beispiel davon überzeugen, dass die Schlussfigur (2) tatsächlich richtig ist, und darum schüttelt er zweifelnd seinen Kopf. Das hat auch seine gewichtigen Gründe.

1. Grund für das Kopfschütteln:

Wenn wir die Schlussfigur (2) als zweifellos richtig gelten lassen wollen, so müssen wir an Stelle der Buchstaben A und B alle auf der gesamten Welt denkbaren Aussagen setzen und dann bei jeder Gelegenheit prüfen, ob nicht zufällig bei wahren Prämissen die Konklusion falsch ist.

2. Grund für das Kopfschütteln:

Wir wissen zwar, wann wir eine Schlussfigur richtig nennen, es ist jedoch bisher unklar, wie wir bei den Prämissen und bei der Konklusion entscheiden (wenn auch nur in einem speziellen Fall), ob sie richtig oder falsch sind.

Die Zweifel des Lesers sind begründet, keiner der beiden ist aber ein Grund zur Verzweiflung. Erstens haben wir das Recht, vom Inhalt der Aussagen abzusehen, und die Richtigkeit unserer Schlüsse nur von der äußeren Form abhängig zu machen.

Erfüllt oder nicht erfüllt, wahr oder falsch - nur von diesem Standpunkt sehen wir die Aussagen. Und deshalb brauchen wir bei der Untersuchung der Schlussfiguren nicht alle Aussagen auf der Welt zu nehmen. Das wäre auch unmöglich. Wir brauchen nur die vier folgenden Fälle zu betrachten:

1. A wahr, B wahr; 2. A wahr, B falsch;

3. A falsch, B wahr; 4. A falsch, B falsch.¹²

Wir werden also bei der Untersuchung der Schlussfiguren nicht mit den Aussagen selbst arbeiten, sondern mit ihren Wahrheitswerten, mit den Werten "wahr" und "falsch" (kürzer: W oder F).

Damit ist der erste Grund für das Kopfschütteln gegenstandslos.

Zweitens geht die Entscheidung, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, nur teilweise die Logik an.



Ob das Opfer am Freitag abend zu Hause war, ob das Radio spielte oder nicht, das muss die polizeiliche oder gerichtliche Untersuchung ergeben, das ist nicht Gegenstand der Logik.

Es ist dagegen eine Frage der Logik, von den vier obengenannten Fällen ausgehend, zu entscheiden, in welchen Fällen die etwa folgendermaßen zusammengesetzten Aussagen wahr oder falsch sind:

Wenn das Opfer am Freitag abend zu Hause war, so spielte sein Radio.

Das Opfer war am Freitag abend zu Hause und sein Radio spielte.

Das Opfer war am Freitag abend zu Hause oder sein Radio spielte.

Das Opfer war am Freitag abend nicht zu Hause oder sein Radio spielte.

2.2 Die Wahrheit ist unteilbar

Von diesen Beispielen lassen wir einstweilen das erste beiseite, denn diese Art der Zusammensetzung ist die komplizierteste.

Wann ist die zweite Aussage wahr ? Schreiben wir die vier Fälle in Form einer Tabelle nieder:

A	B	A und B
Das Opfer war am Freitag abend zu Hause	Sein Radio spielte	Das Opfer war am Freitag abend zu Hause und sein Radio spielte
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

Hält es der Leser für unberechtigt, dass wir uns in den beiden mittleren Zeilen der Tabelle für "falsch" entschieden haben ?

¹²Warum wählten wir gerade diese Reihenfolge der vier Fälle? Auf diese Frage kann der Leser später im Buch eine Antwort finden.

Ist der Leser etwa der Meinung, dass diese zusammengesetzte Aussage doch nicht vollständig falsch ist, da ja die eine von ihnen wahr ist ?

Das meinte auch Hänschen, als er aus der Schule kam und berichtete:

"In Geographie bekam ich eine zwei und in der Arithmetikarbeit eine drei." Aber am folgenden Tag nahm Hänschens Mutter an einer Elternkonferenz teil, und dort stellte sich heraus, dass die Arithmetikarbeit nicht mit drei bewertet worden war, sondern mit einer fünf.

"Warum hast du gelogen ?" fragte die Mutter Hänschen.

"Aber Mutter, in Geographie bekam ich tatsächlich eine zwei", entgegnete Hänschen.

Ich glaube, wir stimmen darin überein, dass Hänschen wirklich gelogen hat, auch dann, wenn er in Geographie wirklich eine zwei bekommen hat. Nur die vollständige Wahrheit ist Wahrheit, die Halbwahrheit, ja sogar die 9/10-Wahrheit ist Lüge. Die Wahrheit ist unteilbar.

2.3 Das logische Einmaleins: die Wahrheitstafel der Konjunktion

Andere Beispiele, wie:

Es regnet und die Sonne scheint,

Es hungert mich und ich friere

zeigen die gleiche Gesetzmäßigkeit.

Die ganze Aussage ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Wenn wir also zwei Aussagen durch "und" verbinden, dann können wir aus dem Wahrheitswert der Einzelaussagen den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage im strengen Sinn des Wortes berechnen:

W und W = W,

W und F = F,

F und W = F,

F und F = F.

Diese formal-logische Operation erinnert uns an bestimmte arithmetische Rechenoperationen, zum Beispiel an die Multiplikation der Zahlen 1 und 0 miteinander:

$$1 \cdot 1 = 1,$$

$$1 \cdot 0 = 0,$$

$$0 \cdot 1 = 0,$$

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Auf Grund dieser Ähnlichkeit hat man sich angewöhnt, zuweilen den Wahrheitswert "wahr" mit der Ziffer "1", den Wahrheitswert "falsch" mit "0" zu bezeichnen. Mit dem Bindewort "und" drückt man die logische Operation aus, die man oft als die logische Multiplikation bezeichnet. (Wir werden aber später sehen, dass wir diese Operation mit gleichem Recht auch als logische Addition bezeichnen könnten.)

Diese Operation wird für gewöhnlich als Konjunktion¹³ bezeichnet. Als Zeichen benutzt man ein auf dem Kopf stehendes v, also \wedge . Man liest das Zeichen als "und".

¹³Lateinisches Wort; es hatte die ursprüngliche Bedeutung von "Verbindung".

Das Einmaleins der Konjunktion lautet dann:

$$\begin{aligned} W \wedge W &= W, \\ W \wedge F &= F, \\ F \wedge W &= F, \\ F \wedge F &= F \end{aligned}$$

Eine Konjunktion¹⁴ zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Wenn auch nur eine von ihnen falsch ist, dann ist also die Konjunktion falsch.

2.4 Eine zweite logische Operation: die Alternative

Das Opfer war am Freitag abend zu Hause oder sein Radio spielte.

Wenn wir das "oder" ebenso wie das "und" als Verbindung untersuchen wollen, müssen wir prüfen, welche Wahrheitswerte wir für die zusammengesetzte Aussage in den bereits bekannten vier Fällen erhalten. Dazu müssen wir zunächst klären, wie wir die obengenannte Aussage zu verstehen haben.

Wir stellen uns vor, dass derjenige, der die oben angeführte Aussage macht, Stimmen aus dem Zimmer des Opfers hörte und glaubte, die Stimme des Opfers zu erkennen. Aber er ist sich nicht sicher, ob das Radio spielte. Es ist aber auch möglich, dass das Opfer zu Hause war und auch sein Radio spielte. Es kann aber auch sein, dass das Opfer nicht zu Hause war, sein Radio aber spielte, weil es jemand anders eingeschaltet hatte.

Es ist auch nicht ausgeschlossen, dass das Opfer zu Hause war, sein Radio aber nicht spielte. In allen diesen Fällen ist die zusammengesetzte Aussage wahr.

Wenn aber das Opfer nicht zu Hause war und sein Radio nicht spielte, dann ist die obige Aussagenverbindung falsch. (Die Aussage bleibt auch dann falsch, wenn tatsächlich jemand anderes im Zimmer des Opfers sprach, das Opfer selbst aber nicht zu Hause und sein Radio nicht eingeschaltet war.)

Wir schreiben uns alle vier Fälle übersichtlich auf:

A	B	A oder B
Das Opfer war am Freitag abend zu Hause	Sein Radio spielte	Das Opfer war am Freitag abend zu Hause oder sein Radio spielte
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Dieses Beispiel und andere entsprechende Beispiele zeigen, dass wir mit "oder" folgendermaßen rechnen können:

wahr oder wahr = wahr,
wahr oder falsch = wahr,
falsch oder wahr = wahr,
falsch oder falsch = falsch.

¹⁴In der Arithmetik gibt es ein besonderes Wort für Multiplikation und ein besonderes Wort für des Ergebnis der Multiplikation, das Produkt. In der mathematischen Logik drückt dasselbe Wort Operation und Ergebnis aus.

Wenn wir das "oder" mit " \vee " symbolisieren, ergibt sich:

$$\begin{aligned} W \vee W &= W, \\ W \vee F &= W, \\ F \vee W &= W, \\ F \vee F &= F. \end{aligned}$$

Diese logische Operation nennen wir Alternative.¹⁵

Freilich haben diese Wahrheitstafel und auch die entsprechenden Wahrheitstafeln der Konjunktion sowie die der übrigen Operationen für sich selbst keinen Sinn. Sie sind nur der symbolische Ausdruck dafür, dass die mit Hilfe von "und" beziehungsweise "oder" zusammengesetzten Aussagen einen bestimmaren Wahrheitswert haben, wenn die zwei Teilaussagen nacheinander die in der Tabelle angegebenen Werte annehmen.

Die Wahrheitstafel der Alternative können wir mit Worten folgendermaßen wiedergeben: Eine Alternative zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine Aussage wahr ist; wenn beide Aussagen falsch sind, dann ist auch ihre Alternative falsch.

2.5 Die Disjunktion

"Gehen wir heute in eine Konditorei und ins Kino?" fragte Elisabeth.

"Entweder gehen wir in eine Konditorei, oder wir gehen ins Kino", antwortete Karlchen.

Es ist durchaus möglich, dass Karlchen Elisabeth schließlich doch in eine Konditorei und ins Kino führt; das geschieht dann aber im Gegensatz zu seiner obenstehenden Aussage.

Daraus wird ersichtlich, dass das "oder" hier in einem anderen Sinn gebraucht wird. Es schließt die Fälle aus, wenn alle beide Aussagen wahr oder falsch sind:

Wir gehen in eine Konditorei	Wir gehen ins Kino	Entweder gehen wir in eine Konditorei, oder wir gehen ins Kino
wahr	wahr	falsch
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Dieses "oder" unterscheidet sich von dem zuerst untersuchten. Es wird durch " $\succ\prec$ " symbolisiert und "entweder-oder" gelesen. Die Wahrheitstafel dieser neuen logischen Operation hat folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} W \succ\prec W &= F, \\ W \succ\prec F &= W, \\ F \succ\prec W &= W, \\ F \succ\prec F &= F. \end{aligned}$$

Die Disjunktion zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn eine und nur eine Aussage wahr, die andere falsch ist.

Wenn alle beide wahr oder alle beide falsch sind, dann ist ihre Disjunktion falsch.

¹⁵Im ungarischen Original wird diese logische Operation als Disjunktion bezeichnet. In der deutschen Logikliteratur hat sich jedoch die Bezeichnung "Alternative" für diese Operation eingebürgert. Mit "Alternative" ist also das nichtausschließende "oder" gemeint, während das ausschließende "oder" als Disjunktion bezeichnet wird.

2.6 Wenn zweierlei „oder“ dasselbe bedeuten

"Welche Station kommt jetzt ?", fragt einer der Passagiere den anderen.

"Entweder Selyp oder Apc", antwortet ihm dieser.

In welchem Sinn benutzt er das Wort "oder"?

Die Antwort überrascht: er gebraucht das "oder" in einem zweifachen Sinn, und doch bedeutet dieses zweierlei "oder" dasselbe. Es ist einfach davon die Rede, dass die erste Zeile der Wahrheitswertetafel ausscheidet, weil nicht zugleich gelten kann "Selyp folgt" und "Apc folgt".

Selyp folgt	Apc folgt	Entweder folgt Selyp, oder es folgt Apc
wahr	wahr	(nicht möglich)
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	falsch	falsch

Jedoch weicht die Tabelle der zweierlei "oder" nur in der ersten Zeile von den beiden anderen ab, in den anderen drei Zeilen stimmt sie mit der Wahrheitswertetafel der Disjunktion und Alternative überein. Das ausschließende "oder" wird in jedem der Fälle, in denen zwei Teilaussagen von vornherein nicht auf einmal wahr sein können, durch das nichtausschließende "oder" ersetzt.¹⁶

Nur dann, wenn zwei Teilaussagen wohl zugleich wahr sein können, wir aber aussagen wollen, dass sie nicht zugleich wahr sein sollen, sondern nur die eine, ersetzen wir das ausschließende "oder" nicht durch das nichtausschließende "oder".

2.7 Noch ein drittes „oder“

Stefan las ein aufregendes Buch. Und als er sich zu Tisch setzte, sah er während des Essens hinein. "Ich bitte dich, Stefan, lege jetzt das Buch weg", sagte sein Vater, "entweder der Mensch isst, oder er liest."



Stefans Vater hat natürlich nicht daran gedacht, dass der Mensch essen kann, lesen kann oder beides zu gleicher Zeit tun kann.

Hier handelt es sich also keineswegs um ein nichtausschließendes "oder".

Ist es vielleicht ein ausschließendes "oder"? Um diese logische Operation würde es sich dann

¹⁶Freilich würden wir in solchen Fällen umgekehrt das nichtausschließende "oder" auch durch das ausschließende "oder" ersetzen können. Später versteht der Leser schon, warum die mathematische Logik lieber das nichtausschließende "oder" verwendet.

handeln, wenn Stefans Vater gedacht hätte: "Entweder der Mensch isst, oder er liest. Beides zusammen geht nicht, aber eines muss er davon tun."

Das heißt, sogleich nach dem Essen müsste er mit dem Lesen anfangen, er müsste bis zum Abendbrot lesen, nach dem Abendbrot beginnt er erneut und liest die ganze Nacht, - dann frühstückt er, und abermals vertieft er sich in das Buch ... Nein, an eine solche, Aussage hatte Stefans Vater nicht gedacht.

Er wollte das "entweder - oder" folgendermaßen verstanden wissen: "Entweder der Mensch isst, oder er liest oder keines von beiden, aber beides zusammen niemals."

In diesem Fall soll die zusammengesetzte Aussage nur falsch sein, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Alle anderen Wahrheitswertkombinationen sollen zu einer wahren Aussage führen. Mit anderen Worten: Zwei Teilaussagen mit dem Wahrheitswert "wahr" vertragen sich nicht. Diese Operation bezeichnen wir als Unverträglichkeit.

Sie wird durch einen senkrechten Strich "|" symbolisiert, den man als "unverträglich mit" liest. Für die Wahrheitswertetafel erhalten wir:

$$\begin{aligned}W | W &= F, \\W | F &= W, \\F | W &= W, \\F | F &= W.\end{aligned}$$

2.8 Ist die Logik oder die lebendige Sprache falsch?

"Die mathematische Logik dürfte eine recht unsichere Basis haben", denkt sich der Leser, "wenn die Übersetzung eines so einfachen Bindewortes wie ‚oder‘ in die Sprache der mathematischen Logik bereits recht schwierig ist. Es wird mal so, mal so übersetzt".

Es ist wirklich eine Tatsache, dass es mit dieser Übertragung übel bestellt ist. Aber der Fehler stammt nicht aus der mathematischen Logik, sondern es ist die lebendige Sprache, die häufig ungenau, unbestimmt, vieldeutig ist. Das sind aber auch ihre Vorzüge, zum Beispiel in der Poesie.

Die Wissenschaftler sehen zumeist nur den Nachteil. Deshalb ist es von großer Bedeutung, dass eine andere Sprache, die Sprache der mathematischen Logik, fähig ist, diese Vieldeutigkeit abzuschaffen und uns die Möglichkeit gibt, klar und unmissverständlich zu sagen, was wir auch wirklich sagen wollen. Damit hilft sie nicht nur der Mathematik, sondern auch der Linguistik und anderen Wissenschaften.

Solange wir eine Aussage aus der ungenauen lebendigen Sprache in die genaue Sprache der mathematischen Logik noch nicht übertragen haben, solange besteht immer die Gefahr eines Missverständnisses. Eine exakte Klassifizierung einer Aussage können wir erst dann vornehmen, wenn wir die Zufälligkeiten der lebenden Sprache ausschalten, indem wir ihre Aussagen in die Sprache der mathematischen Logik übersetzen, indem wir "formalisieren".

Hier liegt ein ähnlicher Sachverhalt vor wie bei einer Messung:

Niemand kann absolut genau feststellen, dass eine in einem Heft gezeichnete Strecke von 3 cm wirklich 3 cm lang ist. Nicht nur unsere Messgeräte sind unvollkommen, selbst die gezeichnete Strecke ist unbestimmt, denn ihre Endpunkte sind nicht scharf begrenzt, sondern recht verschwommen.

In Wirklichkeit ist sie keine Gerade, sie ist nicht einmal eine Linie. Wenn wir die 3-cm-Strecke um eine Strecke von 2 cm verlängern, erhalten wir eine ebenso ungenaue Strecke von 5 cm

Länge, wie es die beiden Teilstrecken sind.

Wir können also nur soviel sagen: Vorausgesetzt, dass die eine Strecke genau 3 cm, die andere genau 2 cm lang ist, so sind beide zusammen genau 5 cm lang.

2.9 Filtriert die mathematische Logik die farbige Wirklichkeit?

Ich hasse ihn, aber ich achte ihn.

Ich besuche dich morgen, aber es kann sein, erst morgen nachmittag.

Mit Hilfe welcher logischen Operationen fügen wir hier die Teilaussagen aneinander? Wenn wir sie nicht sofort erkennen, kann uns die Anfertigung von Wahrheitswertetafeln davon überzeugen, dass es sich beim ersten Satz um eine Konjunktion, beim zweiten Satz um eine Alternative handelt.

Also kann man in der Umgangssprache die Konjunktion nicht nur durch "und" und die Alternative nicht nur durch "oder" wiedergeben. Für die Bedeutung eines Satzes ist entscheidend, durch welche logischen Operationen er entstanden ist, und nicht, durch welche Worte diese logischen Operationen wiedergegeben werden. Vom Inhalt können wir uns nur dann unabhängig machen, wenn es gelingt, eine Aussage der lebenden Sprache in das System der formalen Logik einzufügen.

Freilich, wenn wir nur sagen:

Ich hasse ihn und achte ihn.

Ich besuche dich morgen oder morgen nachmittag,

so gehen viele sprachliche Nuancen verloren, und es bleibt nur das rohe logische Gerüst der Aussage.

Jemand könnte eventuell vorwurfsvoll sagen: "Die mathematische Logik filtriert die tausendfach farbige Wirklichkeit, die an Bildern und Ausdrücken so reiche lebende Sprache, so dass sie aussieht, als sei sie aus schwarzen und weißen Punkten zusammengesetzt."

An dieser Feststellung ist etwas Wahres, aber es ist kein Fehler der mathematischen Logik, sondern ihr Charakteristikum.

Eine wunderbare Erfindung unserer Zeit, das Fernsehen, gibt ebenfalls mit derartigen Bildern die Wirklichkeit wieder. Es ist wahr, noch fehlt ein ganzes Stück an der Vollkommenheit der Widerspiegelung der Wirklichkeit, im Laufe der Zeit wird das Fernsehen aber immer vollkommener werden. Wo heute noch graue Bilder zu sehen sind, werden es morgen farbige sein.

Die mathematische Logik hat ebenso wie das Fernsehen ihre Grenzen. Würde man der mathematischen Logik ihre Unvollkommenheit verübeln, so wäre das eine eigenartige Haltung, denn unvollkommen ist nicht nur die Logik. Ein anderer Vergleich zeigt die Situation vielleicht in noch klarerem Licht.

Auch die Geometrie vereinfacht die Wahrheit, wenn sie von Geraden, von Kreisen, von Vierecken und von anderen solchen Gebilden spricht, die in der realen Welt in dieser vollkommenen Form gar nicht existieren. Sie vereinfacht, weil auf diese Weise korrekte Festsetzungen möglich sind, weil sie sich auf diese Art den komplizierten Formen der Wirklichkeit am besten nähert. Dasselbe tut auch die mathematische Logik.

2.10 „Es ist nicht alles Gold, was glänzt“

Wir sahen, dass man in der Umgangssprache die Konjunktion nicht immer durch "und" und die Alternative nicht immer durch "oder" ausdrückt. Aber analog zu dem Sprichwort "Es ist nicht alles Gold, was glänzt" kann man sagen: "Es ist nicht alles eine Konjunktion, was mit ‚und‘ geschrieben wird."

Die Aussage 'Käte und Gisela sind heute sehr hübsch' können wir auf folgende Weise in Teilaussagen zerlegen:

Käte ist heute sehr hübsch und Gisela ist heute sehr hübsch.

Hier handelt es sich wirklich um eine Konjunktion.



Aber 'Käte und Gisela sind einander ähnlich' können wir nicht auf die gleiche Art trennen: 'Käte ist ähnlich einander und Gisela ist ähnlich einander'.

Es handelt sich hierbei nicht um eine zusammengesetzte, sondern um eine elementare Aussage, die mit unseren bisherigen Mitteln nicht weiter in Teilaussagen zerlegt werden kann.

Das "und" hat in dieser Aussage mit der Konjunktion nichts zu tun. Von einer Konjunktion können wir nur dann sprechen, wenn das "und" oder das Wort, was es vertritt, Aussagen verknüpft.

Jede Aussage muss aber einen Wahrheitswert haben, sie muss entweder wahr oder falsch sein. Zum Beispiel sind die Sätze

Wie geht es dir?

Komm hierher!

Eine Nacht in Venedig

keine Aussagen, denn wir können hier nicht von Wahrheit oder Falschheit der Sätze sprechen. Die Aussage Käte und Gisela sind heute sehr hübsch ist jedoch eine Konjunktion, aber nicht zwischen den Worten Käte und Gisela, sondern zwischen den Aussagen, die sich auf sie beziehen. Die Worte heute sehr hübsch haben wir nur der Kürze wegen hinter Kätes Namen weggelassen.

2.11 Die Negation

Die bisher besprochenen logischen Operationen verknüpfen stets zwei Aussagen zu einer einzigen.

Die Aussage

Ich liebe den Krieg nicht

hat eine sehr einfache Struktur, wenn man sie mit anderen zusammengesetzten Aussagen vergleicht.

Hier ist es das Wort "nicht", das aus der Aussage 'Ich liebe den Krieg' eine gegenteilige Aussage macht. Dadurch wurde der Wahrheitswert dieser Aussage geändert, und zwar in der Form, dass der Wert F in den Wert W übergeht. Aus einer falschen Aussage wurde eine wahre. Das ist ebenfalls eine logische Operation.

Sie trägt den Namen Verneinung; häufiger gebraucht man die lateinische Bezeichnung Negation.

Die Negation wird durch das Zeichen " \sim " symbolisiert, das man als "nicht" liest. Die Wahrheitstafel dieser Operation hat folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}\sim W &= F, \\ \sim F &= W.\end{aligned}$$

Das ist jetzt keine vierreihige Tabelle, sondern nur eine zweireihige, weil es für den Wahrheitswert jeder Aussage nur zwei Möglichkeiten gibt.

Manchmal bezeichnen wir die Negation der Kürze wegen auch mit einem quergestellten Strich. Die Wahrheitstafel für die Negation hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned}\overline{W} &= F, \\ \overline{F} &= W.\end{aligned}$$

2.12 Die Aufklärung eines möglichen Missverständnisses

Um die Negation kann es leicht zu einem Missverständnis kommen. Die Negation der Aussage

$$12 \cdot 14 - 13^2 \quad \text{ist negativ}$$

lautet nicht

$$12 \cdot 14 - 13^2 \quad \text{ist positiv}$$

sondern diese lautet:

$$12 \cdot 14 - 13^2 \quad \text{ist nicht negativ}$$

Das bedeutet, entweder ist $12 \cdot 14 - 13^2$ gleich 0 oder positiv. Ebenso ist die Aussage 'Das Ebenholz ist schwarz' nicht die Negation der Aussage 'Das Ebenholz ist weiß', sondern diese lautet: 'Das Ebenholz ist nicht weiß'.

Und das bedeutet, das Ebenholz könnte zum Beispiel bunt oder kariert, aber nicht weiß sein. Negativ und positiv, weiß und schwarz, sind im gewissen Sinn Gegensätze, bedeuten ihr Gegenteil. Die Negation ändert aber nicht die Aussage in einem derartigen Sinn in ihr Gegenteil, sondern sie verändert den Wahrheitswert der Aussage.

Die Negation verändert den Wahrheitswert einer Aussage.

2.13 Die mehrfache Negation

Es ist nicht wahr, dass der Schmied seine Arbeit nicht ordnungsgemäß beendete.

Kürzer können wir den Sachverhalt auf folgende Weise wiedergeben:

Der Schmied beendete seine Arbeit ordnungsgemäß.

Wir wollen die letztere Aussage mit A bezeichnen. Dann entspricht der Aussage Der Schmied beendete seine Arbeit nicht ordnungsgemäß die Form $\sim A$. Die obige erste Formulierung hat die Form:

$$\sim (\sim A)$$

Die Klammern setzen wir jetzt so, wie wir es in der Algebra gewöhnt sind, $-a$ ist die zu a bezüglich der Addition entgegengesetzte (inverse) Zahl, $-(-a)$ ist zu $(-a)$ invers. In der Logik pflegen wir die Klammern oft wegzulassen, wir schreiben für

$$\sim (\sim A) \quad \text{dann} \quad \sim\sim A$$

So wie in der Algebra $-(-a) = a$ gilt, so hat auch in der Logik $\sim\sim A$ (oder anders geschrieben: $\overline{\overline{A}}$) denselben Wahrheitswert wie A , unabhängig davon, welche spezielle Aussage der Buchstabe A hier bezeichnet.

Wir sagen dann: $\sim\sim A$ und A sind wertverlaufsgleich. (Kürzer werden wir das folgendermaßen schreiben:

$$\sim\sim A \equiv A$$

Wir dürfen an Stelle von A jede beliebige, also auch eine falsche Aussage schreiben. Wer weiß, vielleicht hat der Schmied seine Arbeit doch nicht so ordnungsgemäß beendet ?

Ist $\sim A$ eine wahre Aussage, so ist $\sim\sim A$ falsch. Es ist ebenso wie in der Algebra: a kann auch eine negative Zahl bedeuten. Dann ist aber $-a$ eine positive Zahl und $-(-a)$ eine negative Zahl. Ein Negationszeichen ändert den Wahrheitswert, ein weiteres ändert den Wahrheitswert erneut, führt also auf den ursprünglichen Wahrheitswert zurück.

Also hat $\sim\sim\sim A$ die gleiche Bedeutung wie $\sim A$, $\sim\sim\sim\sim A$ bedeutet dasselbe wie $\sim\sim A$, das heißt wie A , und so weiter. Wenn wir eine Aussage nacheinander mehrfach negieren, so können wir eine geradzahlige Anzahl von Negationszeichen immer weglassen.

2.14 Negation und Alternative miteinander

Das Opfer war Freitag abend nicht zu Hause oder sein Radio spielte.

Hier kommen die einfachen Aussagen

Das Opfer war Freitag abend zu Hause und sein Radio spielte

vor. Wir wollen sie mit A beziehungsweise mit B bezeichnen. Dann kann die Aussagenverbindung 'Das Opfer war am Freitag abend nicht zu Hause oder sein Radio spielte' symbolisch durch die Formel $\sim A \vee B$ ausgedrückt werden. Ihre Wahrheitswertetafel hat folgendes Aussehen:

A Das Opfer war Freitag abend zu Hause	B Sein Radio spielte	$\sim A$ Das Opfer war Freitag abend nicht zu Hause	$\sim A \vee B$ Das Opfer war Freitag abend nicht zu Hause oder sein Radio spielte
W	W	F	W
W	F	F	F
F	W	W	W
F	F	W	W

Wir erhalten die Wahrheitswerte in der dritten Spalte dadurch, dass wir die Wahrheitswerte der ersten Spalte durch die entsprechenden entgegengesetzten Wahrheitswerte ersetzen. In der vierten Spalte ergibt sich der Wert F genau dann, wenn in den Spalten 2 und 3 gleichzeitig der Wahrheitswert F auftritt.

Die obige Aussage ist also genau dann falsch, wenn das Opfer am Freitag abend zu Hause war, sein Radio aber nicht spielte. Die Verteilung der Wahrheitswerte hätten wir auch mit weit weniger Schreibaufwand ermitteln können. Es genügt, wenn wir nur die letzte Formel, hier $\sim A \vee B$, aufschreiben.

Unter A beziehungsweise B schreiben wir ihre möglichen Wahrheitswerte nieder. Danach schreiben wir den Wahrheitswert der Aussage, die sich durch die Anwendung der Operation ergibt, für jeden einzelnen Fall unter das Operationszeichen. Also schreiben wir zuerst:

\sim	$A \vee B$
W	W
W	F
F	W
F	F

Dann schreiben wir die Wahrheitswerte für den Ausdruck $\sim A$ unter das Negationszeichen:

\sim	$A \vee B$
F	W W
F	W F
W	F W
W	F F

Schließlich füllen wir auch die Spalte unter dem Symbol für die Alternative aus: (Dazu haben wir jetzt nur noch die 1. und die 3. Spalte zu beachten.)

\sim	A	\vee	B
F	W	W	W
F	W	F	F
W	F	W	W
W	F	W	F
Reihenfolge	2	1	3 1

Das Negationszeichen bezieht sich hier nur auf die mit A bezeichnete Aussage, ganz ähnlich wie sich in $-a + b$ das Minuszeichen auch nur auf das a bezieht.

Wenn wir dagegen sagen wollen:

Es ist nicht wahr, dass das Opfer am Freitag abend zu Hause war oder sein Radio spielte, so müssen wir den entsprechenden Ausdruck $A \vee B$ als Ganzes verneinen. Diese Verneinung symbolisieren wir so, dass wir $A \vee B$ in Klammern einschließen und das Negationszeichen vor die Klammer setzen:

$$\sim (A \vee B)$$

Etwas ganz Analoges geschieht in der Algebra dann, wenn beispielsweise die zu $a + b$ bezüglich der Addition inverse Zahl geschrieben werden soll: $-(a + b)$. Die Verneinung von $A \vee B$ können wir auch so schreiben: $\overline{A \vee B}$. In dieser Schreibweise sind dann keine Klammern erforderlich.

Fertigen wir nun eine Wahrheitswertetafel für den Ausdruck $\sim (A \vee B)$ an. Jetzt müssen wir nach dem Ausfüllen der Spalten unter A und B erst die Spalte unter dem Alternativzeichen ausfüllen:

$$\sim (A \vee B)$$

W	W	W
W	W	F
F	W	W
F	F	F

Die Spalte, die nun negiert werden soll, ist jetzt nicht die unter A , sondern die unter dem Alternativzeichen stehende, denn es soll ja nicht A verneint werden, sondern die ganze Alternative:

$$\sim (A \vee B)$$

F	W	W	W
F	W	W	F
F	F	W	W
W	F	F	F

Reihenfolge 3 1 2 1

Wie wir sehen, verändern die Klammern im Ausdruck die Verteilung der Wahrheitswerte "wahr" und "falsch" völlig. Statt des bisherigen "wahr", "falsch", "wahr", "wahr" steht jetzt unter dem Operationszeichen, das die zuletzt angewendete Operation symbolisiert, "falsch", "falsch", "falsch", "wahr". (Die einzelnen Wahrheitswerte einer Spalte schrieben wir, um Platz zu sparen, oben waagrecht nebeneinander.)

2.15 Die Implikation

Jetzt können wir auf den schon genannten ersten Beispielsatz zurückkommen.

Wenn das Opfer am Freitag abend zu Hause war, so spielte sein Radio.

Wie ist diese Aussage zu verstehen ?

Wer diese Aussage macht, weiß vielleicht, dass das Opfer allabendlich oder nur freitags (eventuell gerade an jenem bestimmten Freitag), wenn es zu Hause war, sein Radio einschaltete und es den ganzen Abend spielen ließ. Das besagt aber nicht, dass dann, wenn das Opfer nicht zu Hause war, niemand anders das Radio hätte einschalten können.

Vielleicht wurde es eingeschaltet, vielleicht auch nicht; diese beiden Fälle sind mit der obigen Aussage verträglich. Falsch ist aber die Aussage, wenn das Opfer an jenem Freitag abend zu Hause war, jedoch sein Radio nicht spielte. Nur in diesem Fall können wir die obige Aussage für falsch halten, in den drei anderen Fällen ist sie wahr.

Demgemäß hat die Wertetafel das folgende Aussehen:

A	B	Wenn A, so B
Das Opfer war am	Sein Radio spielte	Wenn das Opfer am Freitag abend
Freitag abend zu Hause		zu Hause war, so spielte sein Radio
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Diese logische Operation nennen wir Implikation¹⁷, und wir symbolisieren sie durch einen Pfeil, der auf die zweite Aussage weist " \rightarrow ". Das Symbol wird "Pfeil" oder "Implikation" gelesen.

¹⁷Das ist auch ein lateinisches Wort, es entstammt dem Zeitwort *implicare* und hat die Bedeutung von "enthalten", "nach sich ziehen".

Die erste Aussage in der Implikation (hier: Das Opfer war am Freitag abend zu Hause) heißt Vorderglied der Implikation.

Die zweite Aussage (hier: sein Radio spielte) heißt Nachglied der Implikation. Die Wahrheitstafel unserer neuen Operation können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} W \rightarrow W &= W, \\ W \rightarrow F &= F, \\ F \rightarrow W &= W, \\ F \rightarrow F &= W. \end{aligned}$$

Die Implikation ist genau dann falsch, wenn ihr Vorderglied wahr, ihr Nachglied jedoch falsch ist. Ist das Vorderglied falsch, dann ist der Wahrheitswert der Implikation W , unabhängig davon, welchen Wahrheitswert ihr Nachglied hat.

Wenn das Nachglied wahr ist, dann hat die Implikation immer den Wahrheitswert "wahr", unabhängig davon, welches Vorderglied sie hat.

2.16 Die Beziehungen zwischen Implikation und Alternative

Vergleichen wir die Wahrheitstafeln der Aussage Wenn A , so B (oder symbolisch geschrieben $A \rightarrow B$) und $\sim A \vee B$.

Die beiden Tafeln stimmen überein! Wenn wir die Werte der Teilaussagen in gewohnter Reihenfolge niederschreiben, dann haben beide zusammengesetzte Aussagen die Wahrheitswerte:

$$WFWW$$

Die Implikation $A \rightarrow B$ drückt also dasselbe aus wie die entsprechende Alternative, in der das Vorderglied negiert wird: $\sim A \vee B$.

(kürzer: $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$, das heißt, $A \rightarrow B$ ist mit $\sim A \vee B$ wertverlaufsgleich).

Die Aussage 'Wenn du fortgehst, so werde ich böse' ist völlig gleichwertig mit 'Du gehst nicht fort oder ich werde böse'. Dasselbe können wir auch auf andere Art ausdrücken:

'Wenn du nicht hierbleibst, so werde ich böse' oder 'Du bleibst hier oder ich werde böse'.

Das heißt nichts anderes, als dass $\sim A \rightarrow B$ mit $A \vee B$ wertverlaufsgleich ist. Das ist nach dem oben Gesagten nicht im mindesten merkwürdig, denn wenn wir in $\sim A \rightarrow B$ das Vorderglied $\sim A$ negieren, dann erhalten wir wieder A . ($\sim\sim A$ bedeutet bekanntlich dasselbe wie A .)

Lesen wir den obengenannten Satz über die Implikation noch einmal durch!

Wie wir uns eben an einem Beispiel überlegten, gilt auch:

Eine Implikation, in der das Vorderglied negiert wird ($\sim A \rightarrow B$), drückt dasselbe aus wie die entsprechende Alternative ohne diese Negation ($A \vee B$).

2.17 Ist es mit der Implikation übel bestellt?

Eine Konjunktion, die aus zwei beliebigen Aussagen gebildet wird, liefert eine neue, zusammengesetzte Aussage. Aus den Wahrheitswerten der beiden Teilaussagen können wir eindeutig den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage bestimmen.

Ebenso ist es auch mit der Alternative. Sehen wir uns beispielsweise die folgenden zwei Aussagen an:

Das Pferd ist ein Vogel.
Der Mars ist ein Planet.

Die erste Aussage ist falsch, die zweite ist wahr. Also ist die Konjunktion

Das Pferd ist ein Vogel und der Mars ist ein Planet

falsch. Richtig ist dagegen die Alternative:

Das Pferd ist ein Vogel oder der Mars ist ein Planet.

Beide zusammengesetzten Aussagen klingen wohl ungewöhnlich, und doch haben sie einen Sinn. Wir bilden nun die zusammengesetzte Aussage:

Wenn das Pferd ein Vogel ist, so ist der Mars ein Planet.

Das ist mehr als ungewöhnlich. Wir haben das Empfinden, als sei dies eine sinnlose Aussage. Liegt das eventuell am falschen Vorderglied der Implikation? Keineswegs, denn die Aussage

Wenn das Pferd ein Säugetier ist, so ist der Mars ein Planet

klingt ebensowenig vernünftig.



Diese letzten beiden zusammengesetzten Aussagen stören uns deshalb, da wir hier Teilaussagen zusammensetzen, von denen wir genau wissen, dass sie wahr sind (Das Pferd ist ein Säugetier, der Mars ist ein Planet) oder umgekehrt von denen wir genau wissen, dass sie falsch sind (Das Pferd ist ein Vogel) und dabei so tun, als wäre das eine ungeklärte Frage.

Wenn ..., so ... - diese Worte benutzen wir im alltäglichen Leben dann, wenn wir nicht wissen, ob die beiden Aussagen, die diesen Worten nachfolgen, wahr oder falsch sind.¹⁸

Das war in unseren bisherigen Beispielen auch der Fall, deshalb hörten sie sich vernünftig an.

Wir wissen nicht, ob das Opfer am Freitag abend zu Hause war, und wir wissen auch nicht, ob bei ihm das Radio spielte, deshalb hat es einen Sinn, davon zu Sprechen, dass, wenn das Opfer zu Hause war, sein Radio spielte.

¹⁸Vielleicht deshalb nicht, weil ihre Wahrheit oder Falschheit von etwas abhängt. zum Beispiel "Wenn morgen schönes Wetter ist, so machen wir einen Ausflug", oder: "Wenn Peter sieben Jahre alt ist, so kann er mit einem Kinderfahrschein fahren."

Wir wissen auch nicht, ob unser Gast weggeht, und folglich wissen wir auch nicht, ob wir darüber erzürnt sein werden, wir wissen nur, dass wir, wenn er geht, böse werden. (Jedenfalls behaupten wir das.)

Was tun wir nun? Werden wir nun genau festlegen, unter welchen Bedingungen wir die Implikation von Aussagen bilden können?

Damit würden wir ein fundamentales Prinzip der formalen Logik aufgeben, nämlich, dass sie den Inhalt der Aussagen nur unter der Sicht sieht, ob sie wahr oder falsch sind. Das wenn ..., so ... und seine Synonyme übersetzen wir in die Sprache der mathematischen Logik mit der Operation Implikation, wie es die Tafel der Wahrheitswerte mit wahr, falsch, wahr, wahr zeigt.

Die Implikation wenden wir in der Logik auch auf zwei Aussagen an, für die wir in unserer Umgangssprache nicht gerne die Formulierung wenn .. , so ... gebrauchen. Wenn wir die Implikation dennoch in die lebendige Sprache übertragen wollen, dann müssen wir an Stelle von wenn ..., so ..., nicht ... oder ... (im nichtausschließenden Sinne) gebrauchen.¹⁹

2.18 Implikationen mit falschem Vorderglied

Es ist aber doch möglich, dass jemand nachdenklich meint:

"Weshalb wollen wir denn einer Implikation auch einen Sinn geben, wenn ihr Vorderglied falsch ist ? Wäre es in diesen Fällen nicht besser, diese Frage offenzulassen, sie als unentschieden zu betrachten und darin übereinzukommen, dass die Operation Implikation nur dann erklärt werden kann, wenn das Vorderglied wahr ist ?"

Eine ähnliche Beschränkung gilt beispielsweise in der Arithmetik: "Eine Division ist nur dann erklärt, wenn der Divisor von Null verschieden ist."

Aber diese Übereinkunft hätte viele Nachteile. Die Beziehung zwischen Implikation und Alternative würde nicht mehr gültig sein, und eine Reihe anderer Gesetzmäßigkeiten, die wir später kennenlernen werden, würde fortfallen. Wir würden bei den allereinfachsten Beweisen steckenbleiben (siehe zum Beispiel auf den folgenden Seiten).

Wir würden den indirekten Schluss nicht verwenden können und so weiter. Aber so weit dürfen wir nicht gehen.

Ist der Leser mit den Lösungen der Aufgaben aus dem 1. Kapitel einverstanden ? Auch mit der Antwort, die wir auf die Aufgabe 5b) gaben ? Dann hat er bereits die Übereinkunft $F \rightarrow W = W$ und $F \rightarrow F = W$ in einem Fall akzeptiert, denn er hat dann die folgende Aussage als wahr anerkannt.

Wenn die Anzahl meiner Lebensjahre durch 6 teilbar ist, so ist sie gerade.

Diese Aussage ist nicht nur dann wahr, wenn sie ein 30jähriger Mensch ausspricht:

$$W \rightarrow W = W$$

sondern auch dann, wenn ein 31jähriger diese Worte spricht:

$$F \rightarrow F = W$$

und auch dann, wenn diese Aussage ein 32jähriger Mensch macht:

$$F \rightarrow W = W$$

¹⁹Das entspricht dem Übergang von einer Aussage der Form $A \rightarrow B$ zur wertverlaufsgleichen Aussage der Form $\sim A \vee B$.

2.19 Wir führen den Beweis für die Richtigkeit einer Schlussfigur

Im 1. Kapitel wurde eine bestimmte Schlussfigur:

$$(2) \frac{\begin{array}{l} \text{Wenn } A, \text{ so } B \\ \text{Nicht } B \end{array}}{\text{Nicht } A}$$

häufig erwähnt. Mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden Zeichen können wir diese Schlussfigur auch so schreiben:

Wir führen den Beweis für die Richtigkeit einer Schlussfigur Im 1. Kapitel wurde eine bestimmte Schlussfigur:

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \sim B \end{array}}{\sim A}$$

Wir sagten schon, dass wir auf Grund der Beispiele vermuten, dass diese Schlussfigur richtig ist. Beweisen wollten wir das aber erst später. Jetzt ist die Zeit gekommen, den Beweis zu führen.

Wir müssen zeigen, dass, sooft die beiden Prämissen dieser Schlussfigur wahr sind, jedesmal auch ihre Konklusion wahr ist.

Wir wissen, dass eine Prüfung dieses "sooft" undurchführbar ist, denn wir würden alle möglichen Aussagen durchprobieren müssen.

Es genügt aber völlig, wenn wir alle möglichen Variationen für die Wahrheitswerte der Aussagen durchprobieren. Das bedeutet im vorliegenden Fall die Untersuchung von vier Fällen.

		Prämissen		Konklusion
A	\rightarrow	B	$\sim B$	$\sim A$
W		W	W	
W		F	F	
F		W	W	
F		F	F	

Wir schreiben unter A und B ihre Wahrheitswerte. Danach schreiben wir den Wahrheitswert der verknüpften Aussage unter das Operationszeichen.

A	\rightarrow	B	Prämissen		Konklusion	
			\sim	B	\sim	A
W	W	W	F	W	F	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	F
F	W	F	W	F	W	F
Die Wahrheitswerte der ersten Prämisse			Die Wahrheitswerte der zweiten Prämisse		Die Wahrheitswerte der Konklusion	

Wann sind beide Prämissen gleichzeitig wahr? Nur im letzten Fall, und dann ist auch die Konklusion wahr (nicht genau dann, aber das wird auch nicht behauptet).

Die Schlussfigur (2) ist also tatsächlich richtig. Jedesmal, wenn beide Prämissen wahr sind, ist auch ihre Konklusion wahr.

2.20 Dasselbe in Kürze

Dieses Beweisverfahren hat den großen Vorteil, dass es völlig mechanisch abläuft, es ist dagegen aber sehr weitschweifig.

Wenn wir uns ein klein wenig hineingedacht haben, welche Bedeutung die Operationen haben, die hierbei vorkommen, wird der Beweis schneller gehen. Wir müssen nur den Fall berücksichtigen, für den beide Prämissen wahr sind.

Am einfachsten beginnen wir mit der zweiten Prämisse; $\sim B$ ist genau dann wahr, wenn B falsch ist. Dann kann aber $A \rightarrow B$ nur in einem Fall wahr sein, wenn nämlich A auch falsch ist; $\sim A$ ist in diesem Fall aber wahr. Damit ist der Beweis geführt.

Aufgaben

1. Von den unten genannten Zitaten sind manche Aussagen, manche nicht.

Die Aussagen sind symbolisch durch Formeln wiederzugeben, und zwar so, dass wir die einzelnen, nicht weiter zerlegbaren Aussagen der Reihe nach mit A , mit B und so weiter bezeichnen (möglicherweise übereinstimmende Aussagen überall mit dem gleichen Buchstaben).

Welche speziellen Aussagen bezeichnen dann die einzelnen Buchstaben ?

- a) Es welkt schon unser Wäldchen, und seine Zierde fällt. (Berszenyi: Der nahende Winter)
- b) Es gibt kein Rosenlabyrinth, und mit Balsamdüften weht kein Zephyr. (Berszenyi: Der nahende Winter)
- c) Deinem Vaterland sei unerschütterlich getreu, o Ungar ... (Vörösmarty: Stimme)
- d) Ein kalvinistischer Priester und Csokonai Einander gute Freunde waren. (Petöfi: Csokonai)
- e) Den Hahn, den Priester, alles, alles vergaß Vitez Michael Csokonai. (Petöfi: Csokonai)
- f) Vielleicht bewundere ich dich, doch liebe ich dich nicht ... (Petöfi: Das Tiefland)
- g) Wenn das Leben in die Schule kommt, Dann wird auch das Leben eine heit're Schule sein. (Ady: Botschaft an meine ehemalige Schule)
- h) Wenn wir sterben, also sterben wir. (Ady: Milchstraße)
- i) Bürger - Herren, groß wird das Weh dann sein, Wenn rot die Fata Morgana kommt. (Ady: Die Botschaft der Fata Morgana)
- k) Morgen schon wird alles unser sein, Wenn wir wollen, wenn wir wagen. (Ady: Das Lied des ungarischen Jacobiners)
- l) Ich bin König, ich verfüge über große Macht, Wenn du es nicht gibst, werd' ich mit Gewalt es nehmen. (Jozsef Attila: Ballade des armen Mannes)
- m) Gab es schon ein Leben zorniger als das meine? Und ob ich böse war oder in meinem Glauben irrte? (Ady: Wer hat mich gesehen ?)

2. Stefan und Johannes stehen vor einer verschlossenen Tür und streiten sich. Stefan behauptet: "Wenn das Licht im Zimmer brennt, so ist jemand darin." Johannes ist der Meinung, dass Stefan unrecht hat. Schließlich wetten sie, sie öffnen das Zimmer.

Welche Fälle sind möglich ? Wann gewinnt Stefan die Wette, wann Johannes ?

3. Es soll entschieden werden, welchen Sinn das oder in den folgenden Aussagen haben kann.

- a) Wenn du die Straße verunreinigst oder spuckst, so verstößt du gegen die öffentliche Sauberkeit.

- b) Entweder du bist still, oder ich schicke dich aus dem Zimmer!
- c) Die Anzahl der Stellen der Zahl 230 ist gerade oder ungerade.
- d) Entweder nehme ich Nikolaus mit mir oder Gabriel.
- e) Nikolaus oder Gabriel nehme ich mit mir.

*4.²⁰ Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit den logischen Operationszeichen!
(Das 'oder' ist hier und auch später immer, wenn wir nicht auf sein Gegenteil hinweisen, als nichtausschließendes oder zu verstehen.)

- a) Nicht nur A , sondern auch B .
- b) A , und nicht auch B .
- c) Obwohl nicht A , so dennoch B .
- d) Weder A , nach B .
- e) Es ist nicht wahr, dass A und B .
- f) Nicht A oder nicht B .
- g) Es ist nicht wahr, dass A oder B .
- h) Nicht A oder B .
- i) B , vorausgesetzt dass A .
- k) Nicht A , wenn nicht B .
- l) Wenn A , so nicht B .
- m) Wenn nicht A , so zumindest B .
- n) Es ist nicht wahr, dass wenn A , so ebenfalls B .
- o) Wenn A , so B , aber wenn nicht A , so nicht B .
- p) Wenn A , dann, aber nur dann B .
- q) Wenn A , so nicht B , aber wenn nicht A , so B .
- r) Dann, aber nur dann A , wenn nicht B .
- s) A oder B , aber nicht alle beide.
- t) Höchstens dann B , wenn A .

* 5. Unter den obenstehenden Aussagenverbindungen sind einige, die logisch gleichwertig sind, das heißt, ihre Wahrheitswertetafeln stimmen überein.
Versuchen Sie zu entscheiden, welche voneinander verschieden sind und welche logisch gleichwertig sind!

6. Sind unter den in der Aufgabe 4 aufgeführten Aussagen solche, die dasselbe ausdrücken wie die Alternative " A oder B "?

7. Die folgenden symbolisch geschriebenen Aussagen sind sprachlich zu formulieren.

- | | |
|--|---|
| a) $A \wedge B \wedge \sim C$ | b) $\sim A \rightarrow B$ |
| c) $(A \rightarrow B) \wedge (\sim A \rightarrow C)$ | d) $A \succ\prec B \succ\prec (A \wedge B)$ |
| e) $(A \vee B) \wedge (\sim A \vee \sim B)$ | f) $(A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$ |

Gibt es unter ihnen solche, die dasselbe ausdrücken ?

8. Es ist die Richtigkeit der in Aufgabe 5 des ersten Kapitels in a) beziehungsweise b) vorkommenden Schlussfiguren zu beweisen beziehungsweise zu beweisen, dass sie fehlerhaft sind.

9. Von den folgenden Schlussfiguren ist zu entscheiden, ob sie richtig sind.
(Erst ohne Rechnung, nur durch einfache Überlegung; dann durch Rechnung zur Kontrolle, ob das durch Überlegung erhaltene Ergebnis richtig ist.)

²⁰Schwierige Aufgaben bezeichnen wir vor der laufenden Nummer oder vor dem Buchstaben mit einem Stern.

a) Die Straßenbahn ist defekt, oder es ist Stromsperre.

Es ist keine Stromsperre.

Also ist die Straßenbahn defekt.

b) Ich sehe die Venus im Sternbild des Orion oder den Jupiter.

Ich sehe nicht die Venus im Sternbild des Orion.

Also sehe ich den Jupiter.

c) Wir erhöhen die mathematische Bildung, oder wir bleiben im Atomzeitalter im wirtschaftlichen Wettbewerb zurück.

Wir bleiben im Atomzeitalter im wirtschaftlichen Wettbewerb nicht zurück.

Also erhöhen wir die mathematische Bildung.

d) Gabriel empfing die Botschaft nicht, oder er war anderweitig in Anspruch genommen.

Er bekam die Botschaft nicht.

Er war also nicht anderweitig in Anspruch genommen.

3 Algebra und Logik

3.1 Wir versuchen, Parallelen zu ziehen

In vielem erinnert uns die mathematische Logik an die Mathematik, besonders an die Arithmetik - Algebra.²¹

Es gibt jedoch auch große Unterschiede. Diese werden wir am besten erkennen, wenn wir zwischen ihnen Parallelen ziehen.

Kätchen möchte wissen, wieviel sie wiegt. Sie stellt sich auf eine Waage. Diese zeigt 62,3 kg an.

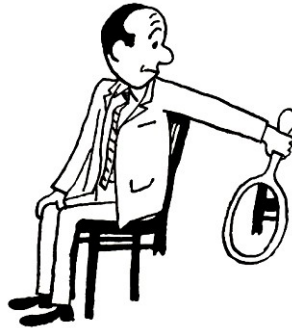
Ist diese Angabe ganz genau?

Nein, denn jede Wägung ist nur bis zu einem gewissen Grad genau, auch wenn sie noch so sorgfältig durchgeführt wurde.

"Onkel Theodor hat heute schlechte Laune", sagt Hänschen. Ich sehe des Onkels finsternen Blick und nehme deshalb an, dass diese Aussage den Wahrheitswert W hat.

Ist es auch wirklich so ?

Diese Angabe ist mehr oder weniger genau.



"Wieviel Beine hat der Stuhl, auf dem ich sitze ?" Darauf kann ich eine ganz genaue Antwort geben: vier.

(Obwohl es vorkommen kann, dass eines der Beine zerbrochen, verstümmelt ist, und schließlich könnte man bestreiten, ob es überhaupt ein Bein ist ...)

Die Erde steht still und die Sonne dreht sich um sie. Diese Aussage ist sicher falsch, das heißt, ihr Wahrheitswert ist F . (Obwohl jede Bewegung relativ ist, denn wir könnten ein Bezugssystem wählen, in dem die Erde fest steht ...)

Wir haben also auf der einen Seite Größen (Masse, Anzahl), auf der anderen Seite Aussagen (Onkel Theodor hat heute schlechte Laune, Die Erde steht still und die Sonne dreht sich um sie). Sowohl die Größen als auch die Aussagen betreffen die reale Welt.

Wie wir sehen, können die Größen mehr oder weniger genau durch Zahlen (62,3; 4) angegeben werden. Ebenso lassen sich die Aussagen mehr oder weniger genau durch Wahrheitswerte charakterisieren.

Der Mathematiker benutzt zur Verallgemeinerung seiner Rechnungen an Stelle von Größen und Zahlen häufig Variablen (q, t, n, x usw.). Aus den gleichen Gründen verwendet der Logiker logische Variablen (A, B, C usw.).

Bei der Spezialisierung eines allgemeinen Ergebnisses werden dann an die Stelle solcher Variablen wieder Zahlen bzw. Wahrheitswerte gesetzt und bei der Anwendung dieser Ergebnisse in der Praxis geht man dann zu den Größen und Aussagen über.

In der reinen Mathematik bzw. in der reinen mathematischen Logik arbeitet man nur mit

²¹In Ermangelung eines besseren Wortes bezeichnen wir damit die Disziplin der Mathematik, die wir heute gekünstelt in Arithmetik und Algebra zu teilen pflegen.

Zahlen bzw. Wahrheitswerten oder mit den ihnen entsprechenden Variablen. Unsere Parallele beginnt also folgendermaßen:

Größen	Aussagen
Zahlen	Wahrheitswerte
Variablen	logische Variablen

Wofür stehen eigentlich die logischen Variablen (A, B, C usw.), für Aussagen (Onkel Theodor hat heute schlechte Laune, Das Pferd ist ein Vogel) oder für Wahrheitswerte (W, F)?

Wir verwenden sie für beide Zwecke. Von der angewandten Mathematik her sind wir es ja bereits gewohnt, dass die Variablen manchmal für Größen (Geschwindigkeit, Masse usw.), manchmal für reine Zahlen stehen. Man könnte diese zweifache Benutzung gleicher Buchstaben vermeiden, indem man für verschiedene Zwecke auch verschiedene Variablen verwendet. In der Logik kommt eine solche Unterscheidung zuweilen vor.

Der Einfachheit wegen treffen wir diese Unterscheidung nicht.

3.2 Die Kommutativität und die Assoziativität als Eigenschaft der Konjunktion

Verfolgen wir die Parallelen zwischen den Zahlen und den Wahrheitswerten weiter. Sowohl mit Zahlen als auch mit Wahrheitswerten können wir Operationen durchführen. Bisher hatten wir erkannt, dass der Multiplikation die Konjunktion entspricht. Ob wohl beide Operationen die gleichen Eigenschaften haben?

Von der Multiplikation wissen wir, dass für sie das Kommutationsgesetz gilt, zum Beispiel $4 \cdot 25 = 25 \cdot 4$.

Ferner gilt auch das Assoziationsgesetz. Das bedeutet, dass wir beispielsweise für $4 \cdot (25 \cdot 39)$ auch rechnen können: $(4 \cdot 25) \cdot 39$.

Allgemein gilt:

Unabhängig davon, welche Zahlen a, b und c bedeuten, stets ist

$$ab = ba \quad \text{und} \quad a(bc) = (ab)c$$

Besitzt auch die Konjunktion diese Eigenschaft? Zunächst gilt

$$W \wedge W = W \wedge W \quad , \quad F \wedge F = F \wedge F$$

In diesem Fall ist das Kommutationsgesetz erfüllt. Aber ebenso gilt

$$W \wedge F = F \wedge W \quad \text{und} \quad F \wedge W = W \wedge F$$

weil der Wahrheitswert der Konjunktion in jedem dieser Fälle F ist. Wie wir sehen, ist also auch die Konjunktion kommutativ.

Wie ist es nun mit der Assoziativität? Hier müssen wir schon mehr Fälle betrachten:

$W \wedge (W \wedge W) = (W \wedge W) \wedge W$, weil beide Seiten den Wahrheitswert W ergeben,

$W \wedge (W \wedge F) = (W \wedge W) \wedge F$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben,

$W \wedge (F \wedge W) = (W \wedge F) \wedge W$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben,

$W \wedge (F \wedge F) = (W \wedge F) \wedge F$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben,

$F \wedge (W \wedge W) = (F \wedge W) \wedge W$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben,

$F \wedge (W \wedge F) = (F \wedge W) \wedge F$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben,
 $F \wedge (F \wedge W) = (F \wedge F) \wedge W$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben,
 $F \wedge (F \wedge F) = (F \wedge F) \wedge F$, weil beide Seiten den Wahrheitswert F ergeben. '

In welcher Reihenfolge schreiben wir die Wahrheitswerte auf? Wir beginnen wie bisher mit der Variierung der Wahrheitswerte an der letzten, in diesem Falle also an der 3. Stelle: W, F, W, F . Dann ergibt sich für die zweite Stelle die Reihenfolge: W, W, F, F .

Beide Folgen müssen wir nun zweimal untereinander schreiben, da an der 1. Stelle ein "W" (siehe die ersten 4 Fälle), aber auch ein "F" stehen kann (siehe die letzten 4 Fälle).

Nachträglich erkennen wir, dass es eigentlich überflüssig war, so vieles zu schreiben, wenn wir beachtet hätten, dass überall dort, wo ein "F" in irgendeine Konjunktion hineingelangte, der Wahrheitswert der ganzen Konjunktion F ist. Die Konjunktion ist also auch assoziativ und nicht nur kommutativ.

Wir sahen alle Fälle durch und konnten uns davon überzeugen, dass, unabhängig von der Wahl der Wahrheitswerte für A , B und C , immer gilt:

Wert von $A \wedge B =$ Wert von $B \wedge A$,
 Wert von $A \wedge (B \wedge C) =$ Wert von $(A \wedge B) \wedge C$.

3.3 Die Wertverlaufsgleichheit

Wenn die Zahlenwerte von $a \cdot b$ und $b \cdot a$ für alle Zahlen a und b übereinstimmen, so drücken wir das gewöhnlich durch $a \cdot b \equiv b \cdot a$ aus, das heißt also, der Zahlenwert von $a \cdot b$ ist gleich dem Zahlenwert von $b \cdot a$, unabhängig davon, welche Zahlen wir an Stelle von a und b setzen.

Dasselbe ist auch der Fall, wenn die Wahrheitswerte von $A \wedge B$ und von $B \wedge A$ für alle Wahrheitswerte von A und B übereinstimmen, das heißt, wenn die Wahrheitswertetafeln von $A \wedge B$ und $B \wedge A$ einander gleich sind. Dann schreiben wir das in der Form:²²

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

und lesen das so: $A \wedge B$ und $B \wedge A$ sind wertverlaufsgleich.

Im Gegensatz zu den Zeichen \wedge , \vee , \sim , \rightarrow , $\succ\prec$ ist das Zeichen \equiv kein Symbol für eine neue logische Operation.

Deshalb ist auch $A \wedge B \equiv B \wedge A$ kein neuer aus den Teilausdrücken $A \wedge B$ und $B \wedge A$ zusammengesetzter Ausdruck, sondern lediglich eine Abkürzung für den bereits obenerwähnten Sachverhalt:

Die Wahrheitswertetafeln von $A \wedge B$ und $B \wedge A$ stimmen überein.

Es handelt sich also bei $A \wedge B \equiv B \wedge A$ um eine Aussage über zwei Ausdrücke. Die Verwendung des Zeichens \equiv ermöglicht es uns, eine solche Aussage in kurzer Form symbolisch niederzuschreiben. Aus diesem Grunde führten wir auch das Zeichen \equiv ein.

Setzen wir nun für die logischen Variablen A und B spezielle Aussagen ein (für A etwa die

²²Das Zeichen " \equiv " symbolisiert hier nicht die Identität der beiden Ausdrücke, das heißt die völlige Übereinstimmung der links und rechts von dem Zeichen "*equiv*"stehenden Zeichenreihen (hier: $A \wedge B$ und $B \wedge A$). Es soll vielmehr zum Ausdruck bringen, dass es sich um solche Ausdrücke handelt, deren Wahrheitswerte unabhängig von der Wahl der Wahrheitswerte für die Variablen, aus denen die Ausdrücke aufgebaut sind, übereinstimmen.

Aussage 'Der Mars ist ein Planet' und für B die Aussage 'Die Sonne dreht sich um die Erde'), so erhalten wir aus $A \wedge B$ eine Aussage, die uns etwas über zwei ganz konkrete Subjekte, nämlich über den Mars und über die Sonne aussagt. Mit dieser speziellen Bedeutung von A und B ist dann $A \wedge B \equiv B \wedge A$ eine Aussage über zwei Aussagen. Wir bezeichnen solche Aussagen in der Logik als Metaaussagen.²³

Da die Wertverlaufsgleichheit von Ausdrücken beim logischen Schließen eine sehr wichtige Rolle spielt, werden wir die Metaaussagen, die besagen, dass zwei Ausdrücke wertverlaufsgleich sind, besonders hervorheben. Wir lernten solche Aussagen bereits kennen. Im folgenden werden einige wichtige unter ihnen nummeriert.

(Der Buchstabe W vor der Zahl weist darauf hin, dass von wertverlaufsgleichen Ausdrücken die Rede ist.)²⁴

(W1) $\sim\sim A \equiv A$,

(W2) $\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$,

(W3) $A \wedge B \equiv B \wedge A$,

(W4) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

3.4 Beispiele für die Eigenschaften der Konjunktion

Wir wenden das Kommutationsgesetz der Konjunktion (W 3) auf konkrete Aussagen an:

Es fällt der Regen, und es bläst der Wind.

Ihr Wahrheitswert ist derselbe wie der der Aussage

Es bläst der Wind, und es fällt der Regen.

Das heißt, wenn irgendeine der beiden Aussagen wahr ist, so ist auch die andere wahr, wenn eine falsch ist, so ist auch die andere falsch.

Ähnliche triviale Wahrheiten drückt auch das Assoziationsgesetz (W 4) aus.

'Es fällt der Regen, außerdem bläst der Wind und es ist kalt' ist genau dann wahr, wenn die Aussage 'Es fällt der Regen, es bläst der Wind und außerdem ist es kalt' wahr ist.

3.5 Die entsprechenden Eigenschaften der Alternative

Wenn eine Arbeitsstelle frei wäre und der Bewerber müsste die Bedingung: "Besitzer eines Diploms, das ihn als Chemieingenieur ausweist, oder eines an irgendeiner Universität erworbenen Chemikerdiploms zu sein" erfüllen, dann könnten sich dieselben Bewerber melden, als wenn die Bedingung die folgende wäre: "Besitzer eines auf irgendeiner Universität erworbenen Chemikerdiploms oder Besitzer eines Diploms zu sein, das ihn als Chemieingenieur ausweist."

(Natürlich ist es auch kein Hindernis, wenn man zufällig beide Abschlüsse besitzt, obgleich es in der Praxis kaum üblich ist.)

²³Meta ist ein griechisches Wort. Es hat die ursprüngliche Bedeutung von darüber, danach.

²⁴Am Ende des Buches führen wir die in dem Buch vorkommenden wichtigsten wertverlaufsgleichen Ausdrücke der laufenden Nummer nach auf. Wenn wir also irgendwo beispielsweise auf die Beziehung (W 2) Bezug nehmen und der Leser erinnert sich nicht, welche Beziehung wir so benannten, dann blättert er zu Ende. Dort findet er sie wieder. Dort gehen wir auch an, auf welcher Seite sie zum ersten mal vorkam. Das erleichtert dem Leser die Wiederholung, wie und woraus sich die Wertverlaufsgleichheit der entsprechenden Ausdrücke ergibt.

Ebenso gleichwertig sind die Bedingungen:

"Ein Diplom als Chemieingenieur zu besitzen oder aber auf einer Universität das Chemikerdiplom erworben zu haben oder in der chemischen Industrie bedeutende Neuerungen eingeführt zu haben"

und

"Ein Diplom als Chemieingenieur zu besitzen oder auf einer Universität das Chemikerdiplom erworben zu haben oder aber²⁵ in der chemischen Industrie bedeutende Neuerungen eingeführt zu haben."

Natürlich empfinden wir, dass diese logisch gleichbedeutend sind; das beweist aber nicht, dass die Alternative kommutativ und assoziativ ist; höchstens kann man es ahnen.

Zum Zweck des Beweises wählen wir uns alle möglichen Wahrheitswerte für die Teilaussagen und prüfen, ob die zusammengesetzten Aussagen in allen Fällen den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Betrachten wir als Beispiel das Gesetz der Kommutativität:

$$\begin{aligned}W \vee W &= W \vee W = W, \\F \vee F &= F \vee F = F, \\W \vee F &= F \vee W = W, \\F \vee W &= W \vee F = W.\end{aligned}$$

Es wäre langweilig, die acht Fälle der Assoziativität zu untersuchen. Das ist aber auch überflüssig, denn wir wissen: Wenn auch nur ein „ W “ in irgendeine Alternative hineingelangt, so besitzt die ganze Alternative den Wahrheitswert W . Eine Alternative ist genau dann falsch, wenn alle Teilaussagen falsch sind.

(Wenn das aber jemandem nicht klar ist, ist es besser, wenn er es durchprobiert!)

Die Alternative ist also ein zur Konjunktion ganz analoger Fall, nur ist die Rolle von „ W “ und „ F “ vertauscht. Selbst die Eigenschaften sind dieselben:

$$\begin{aligned}(W5) \quad A \vee B &\equiv B \vee A, \\(W6) \quad A \vee (B \vee C) &\equiv (A \vee B) \vee C.\end{aligned}$$

3.6 Die Verallgemeinerung auf mehrere Glieder

Wegen der Gültigkeit des Assoziationsgesetzes kann man in den Fällen, in denen lauter Konjunktionen oder lauter Alternativen auftreten, auf die Klammern verzichten:

$$A \wedge B \wedge C$$

Wir können also einfach von der Konjunktion beziehungsweise Alternative dreier Aussagen sprechen.

Die Eigenschaften der Kommutativität und der Assoziativität gelten wie in der Algebra für beliebig viele Variable. So sind demnach nicht nur drei, sondern beliebig viele Aussagen durch eine Konjunktion beziehungsweise Alternative sinnvoll verknüpfbar.

Eine Konjunktion beliebig vieler Aussagen ist genau dann wahr, wenn jede der Teilaussagen wahr ist. Ist das nicht der Fall, so ist sie also falsch. (Falsch also, wenn von den sogenannten

²⁵Das Wort "aber" nach einem oder drückt aus, welches der drei Worte oder im Satz am stärksten trennt.

Konjunktionsgliedern auch nur eines falsch ist.)

Eine Alternative beliebig vieler Aussagen ist genau dann wahr, wenn Wenigstens eine der? Teilaussagen wahr ist. Ist das nicht der Fall, so ist sie also falsch. (Genau dann ist sie falsch, wenn jedes Alternativglied falsch ist.)

3.7 Substitution

Das Gesetz der Kommutativität können wir auch dann in der Arithmetik und Algebra anwenden, wenn die Glieder selbst zusammengesetzte Ausdrücke sind. Zum Beispiel stellt

$$(a - b)^2 + 2ab \quad \text{dieselbe Zahl wie} \quad 2ab + (a - b)^2$$

dar, unabhängig von der speziellen Auswahl der Zahlen für die Variablen a und b . Ebenso stimmt der Zahlenwert von

$$(a + b) \cdot (a - b) \quad \text{mit dem von} \quad (a - b) \cdot (a + b)$$

überein, unabhängig davon, welche speziellen Zahlen wir an die Stelle von a und b setzen.

Dasselbe gilt auch für beliebige Ausdrücke. (Wenn die arithmetischen Ausdrücke irgendwo eine bestimmte Bedeutung haben, so haben sie diese freilich auch in allen Beziehungen, in denen sie auftreten.)

Beispielsweise ist der Zahlenwert von $a + \frac{1}{a}$ immer gleich dem von $\frac{1}{a} + a$. Wenn aber $a = 0$ ist, dann ist jeder dieser Ausdrücke sinnlos, weil man durch 0 nicht dividieren kann.)

Das soeben Gesagte ist fast Wort für Wort auch in der mathematischen Logik gültig. Hier kann es nur nicht vorkommen, dass ein Ausdruck für bestimmte Aussagen nicht erklärt ist. Wenn wir in der mathematischen Logik in wertverlaufsgleichen Ausdrücken eine oder mehrere Variable durch einen beliebigen logischen Ausdruck substituieren (an Stelle übereinstimmender Buchstaben tritt dann derselbe Ausdruck), so erhalten wir wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

Beispiel:

$$(A \rightarrow B) \wedge B \equiv B \wedge (A \rightarrow B)$$

Die Glieder der Konjunktion sind hier $A \rightarrow B$ und B . Diese Beziehung können wir aus der Beziehung

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

erhalten, indem wir für A auf beiden Seiten den Ausdruck $A \rightarrow B$ schreiben. Wir können aber ein falsches Ergebnis erhalten, wenn wir für A an der einen Stelle der obigen Beziehung etwas anderes schreiben als für A an einer anderen Stelle der gleichen Beziehung.

Das Ergebnis kann auch dann falsch sein, wenn wir für die Variable an einer Stelle einen gewissen Ausdruck einsetzen, an einer anderen Stelle in der gleichen Beziehung dagegen A unverändert lassen.

Zum Beispiel stimmen die Wahrheitswerte von $(A \rightarrow B) \wedge B$ nicht immer mit den Wahrheitswerten von $B \wedge A$ überein (der erste Ausdruck ist nämlich auch dann wahr, wenn A falsch, B aber wahr ist).

3.8 Das Gesetz der Kontraposition

Schreiben wir in $A \vee B \equiv B \vee A$ an die Stelle von A den einfachsten zusammengesetzten Ausdruck $\sim A$, so erhalten wir:

$$\sim A \vee B \equiv B \vee \sim A$$

Für die linke Seite können wir auch schreiben:

$$A \rightarrow B$$

Können wir nicht auch die rechte Seite auf die Form einer Implikation bringen? Das ist nicht schwer, da doch $\sim\sim B$ logisch dasselbe bedeutet wie B . Für die rechte Seite des obenstehenden Beispiels schreiben wir also:

$$\sim\sim B \vee \sim A$$

Das ist gleichwertig mit

$$\sim B \rightarrow \sim A$$

Damit bringen wir die obenstehende Beziehung auf die Form:

$$(W7) \quad A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$$

Zum Beispiel ist die Aussage

'Wenn das Opfer am Freitag abend zu Hause war, so spielte sein Radio'²⁶
gleichwertig mit

'Wenn am Freitag abend das Radio des Opfers nicht spielte, so war das Opfer nicht zu Hause.'

Der Satz (W 7) ist das sogenannte Kontrapositionsgesetz²⁷. Dieses ist durchaus nicht so selbstverständlich wie die bisherigen Sätze von ähnlicher Form und sollte beachtet werden. (Lies in diesem Zusammenhang die Aufgaben 1 und 2 und unsere Lösung)

3.9 Ersetzung

Wir betonen besonders, dass das Ergebnis falsch werden kann, wenn man in wertverlaufsgleichen Ausdrücken für eine Variable an einer Stelle einen anderen Ausdruck schreibt als für die gleiche Variable an einer anderen Stelle, bzw. für eine Variable an einer Stelle etwas anderes einsetzt und die gleiche Variable an anderen Stellen unverändert lässt.

Und nun sind wir in diesen Fehler verfallen!

Zuerst substituierten wir im rechten Ausdruck die Variable B durch $\sim\sim B$. Auf diese Weise wurde aus $B \vee \sim A$ der Ausdruck $\sim\sim B \vee \sim A$ und danach hieraus der Ausdruck $\sim B \rightarrow \sim A$. Im linken Ausdruck versäumten wir aber statt B auch $\sim\sim B$ zu schreiben.

Doch hier liegt der Sachverhalt ganz anders. Wir sprachen davon, dass wir für eine Variable in wertverlaufsgleichen Ausdrücken einen beliebigen Ausdruck schreiben können, und dass wir dann wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke erhalten. Jetzt dagegen ersetzen wir eine Variable (B) auf der rechten Seite der Ausgangsbeziehung entsprechend der Beziehung $B \equiv \sim\sim B$, das heißt, wir schreiben für B den mit B wertverlaufsgleichen Ausdruck $\sim\sim B$.

²⁶Wir verstehen das freilich so, dass am Freitag abend sein Radio spielte, nur ist es nicht erforderlich, das noch ein zweites Mal einzufügen.

²⁷Lateinisches Wort, es bedeutet "entgegensetzen".

B unterscheidet sich von $\sim\sim B$ nur durch die äußere Form, ihre Wahrheitswerte aber stimmen überein. Also vertritt der eine Ausdruck den anderen vollständig, ob wir ihn nur an einer Stelle oder ob wir ihn an mehreren Stellen der Ausgangsbeziehung schreiben.

Zur Unterscheidung sprechen wir in solchen Fällen nicht von Substitution, sondern von Ersetzung.²⁸

Es ist verständlich, dass wir nicht nur eine Variable durch einen wertverlaufsgleichen Ausdruck ersetzen können, sondern gleichgültig, welchen Teilausdruck wir auch immer durch einen wertverlaufsgleichen Ausdruck ersetzen, aus wertverlaufsgleichen Ausgangsausdrücken werden wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

Derartige Umformungen zeigen die folgenden zwei Beispiele:

1. Den Ausdruck

$$\sim A \vee B \quad \text{ersetzen wir durch} \quad A \rightarrow B$$

Das ist möglich, weil $\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$ gilt.

2. Den Ausdruck

$$\sim\sim B \vee \sim A$$

ersetzen wir durch den Ausdruck

$$\sim B \rightarrow \sim A$$

Das ist möglich, weil $\sim\sim B \vee \sim A \equiv \sim B \rightarrow \sim A$ gilt.

(Diese erhalten wir aus $\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$, wenn wir für A den Ausdruck $\sim B$ und für B den Ausdruck $\sim A$ substituieren.)

Offensichtlich erhalten wir erneut wertverlaufsgleiche Ausdrücke, wenn wir $\sim A \vee B$, das an mehreren Stellen in den Ausdrücken vorkommen möge, an einigen Stellen durch $A \rightarrow B$ ersetzen, an anderen unverändert stehenlassen.

Zum Beispiel erhält man aus

$$\sim\sim (\sim A \vee B) \equiv \sim A \vee B$$

durch Ersetzung

$$\sim\sim (A \rightarrow B) \equiv \sim A \vee B$$

Wenn wir in wertverlaufsgleichen Ausdrücken einen Teilausdruck an einer oder an mehreren Stellen durch wertverlaufsgleiche Ausdrücke ersetzen, so erhalten wir wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

3.10 Welcher Vergleich ist der bessere ?

Wenn wir die Konjunktion mit der Multiplikation vergleichen, dann können wir die Alternative in einen Zusammenhang mit der Addition bringen. Wir wissen, dass die Addition ebenso wie die Multiplikation kommutativ und assoziativ ist, das heißt, es gilt

$$a + b \equiv b + a \quad \text{und} \quad a + (b + c) \equiv (a + b) + c$$

Wir könnten die Parallele auch so ziehen. Der Konjunktion entspricht die Addition, der Alternative die Multiplikation. Die bisher untersuchten zwei Eigenschaften machten keinen Unterschied

²⁸Von Substitution sprechen wir denn, wenn für eine Variable gleichzeitig an allen Stellen ihres Auftretens eine endete Variable beziehungsweise ein anderer Ausdruck geschrieben werden soll.

zwischen den beiden Operationen. Aber die Addition und die Multiplikation haben auch eine Eigenschaft gemeinsam: die Distributivität.

Zum Beispiel können wir 21 (das heißt $20 + 1$) so mit 4 multiplizieren, indem wir die 20 mit 4 und auch die 1 mit 4 multiplizieren:

$$(20 + 1) \cdot 4 = (20 \cdot 4) + (1 \cdot 4)$$

Auf beiden Seiten erhalten wir 84.²⁹

Diese Eigenschaft zeigt bereits einen Unterschied zwischen den beiden Operationen, denn wenn wir die Rollen von Addition und Multiplikation vertauschen, so sind die Ergebnisse auf beiden Seiten im allgemeinen nicht gleich. Als Beispiel betrachten wir die obenstehenden Zahlen:

$$(20 \cdot 1) + 4 \neq (20 + 4) \cdot (1 + 4)$$

Jetzt erhalten wir auf der einen Seite 24, auf der anderen Seite 120. Die Resultate sind also nicht gleich. Wir werden also untersuchen müssen, ob in irgendeiner Form die Distributivität zwischen Konjunktion und Alternative gültig ist. Es wird sich jetzt entscheiden, welche Parallele richtig ist.

Wir bleiben zunächst bei unserer ursprünglichen Annahme und sehen nach, ob die Wahrheitswerte der folgenden zwei Ausdrücke übereinstimmen:

$$(A \vee B) \wedge C \quad \text{und} \quad (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

gleichgültig, welche Wahrheitswerte wir auch immer den logischen Variablen A , B und C geben.

Die Reihenfolge der Wahrheitswerte soll jetzt auch dieselbe sein wie früher:

A lassen wir die Wahrheitswerte W, W, W, W, F, F, F, F durchlaufen, B nimmt nacheinander die Wahrheitswerte W, W, F, F, W, W, F, F an, und C hat nacheinander die Wahrheitswerte W, F, W, F, W, F, W, F.

Wo mehrere Operationen auftreten, wird es gut sein, auch Teilergebnisse niederzuschreiben. So, wie wir es gewöhnt sind, schreiben wir die Wahrheitswerte unter die Operationszeichen. Zuerst erledigen wir die in der Klammer stehenden Operationen, danach die anderen auf beiden Seiten.

	(A	∨	B)	∧	C	(A	∧	C)	∨	(B	∧	C)
	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
	W	W	W	F	F	W	F	F	F	W	F	F
	W	W	F	W	W	W	W	W	W	F	F	W
	W	W	F	F	F	W	F	F	F	F	F	F
	F	W	W	W	W	F	F	W	W	W	W	W
	F	W	W	F	F	F	F	F	F	W	F	F
	F	F	F	F	W	F	F	W	F	F	F	W
	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
Reihenfolge	1	2	1	3	1	1	2	1	3	1	2	1

²⁹Wir können die Klammern auf der rechten Seite ruhig fortlassen. Aber wenn das auch durchaus richtig ist, so wird es später nützlich sein, die Klammern zu belassen. (Dass gleiche gilt auch für die linke Seite der folgenden Formel.)

Wie wir sehen, ist das Endergebnis auf beiden Seiten das folgende: im ersten, dritten und fünften Fall ergibt sich der Wert W, in den übrigen fünf Fällen der Wert F. Das hätten wir auch ohne Tabelle herausfinden können. Zum Beispiel mit dem folgenden Schluss:

Wenn C den Wert F besitzt, dann sind die Werte beider Formeln F, der erste, weil das eine Glied der Konjunktion den Wert F besitzt, der zweite, weil beide Glieder der Alternative den Wert F haben.

Der Wert der ersten Formel ist auch dann gleich F, wenn der Wert von C gleich W ist, aber A und B den Wert F haben. Aber auch der Wert der zweiten Formel ist dann gleich F, weil beide Glieder der Alternative in diesem Fall ebenfalls den Wert F haben.

Es bleibt der Fall zu untersuchen, wenn der Wert von C gleich W ist und mindestens eine der Aussagen A und B den Wert W besitzen. In diesem Falle ist der Wert der ersten Formel gleich W, weil ihre beiden Glieder den Wert W haben.

Auch für die zweite Formel erhält man dann den Wahrheitswert W, weil dann wenigstens ein Glied der Alternative den Wert W haben muss. (Wenn der Wert von A gleich W ist, dann ist die erste Teilaussage wahr, wenn der Wert von B gleich W ist, dann ist die zweite Teilaussage wahr, wenn A und ebenfalls B den Wert W besitzen, dann sind beide Teilaussagen wahr.)

Die Werte der beiden Ausdrücke stimmen in jedem Fall überein, also gilt die Distributivität in der Form:

$$(W8) \quad (A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Das genaue Gegenstück ist aus der Algebra bekannt, denn es gilt:

$$(a + b)c \equiv ac + bc$$

Das zeigt uns, dass der Multiplikation die Konjunktion, der Addition die Alternative entspricht.

3.11 Die Gegenprobe

Untersuchen wir jedoch, wie vorher mit den Zahlen, was sein wird, wenn wir die Rolle der beiden Operationen vertauschen:

	(A	∧	B)	∨	C	(A	∨	C)	∧	(B	∨	C)
	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
	W	W	W	W	F	W	W	F	W	W	W	F
	W	F	F	W	W	W	W	W	W	F	W	W
	W	F	F	F	F	W	W	F	F	F	F	F
	F	F	W	W	W	F	W	W	W	W	W	W
	F	F	W	F	F	F	F	F	F	W	W	F
	F	F	F	W	W	F	W	W	W	F	W	W
	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
Reihenfolge	1	2	1	3	1	1	2	1	3	1	2	1

Jetzt tritt in den ersten drei, sowie im fünften und siebenten Fall, auf beiden Seiten der Wahrheitswert W auf, in den übrigen Fällen der Wahrheitswert F. Aber auch jetzt stimmen in allen Fällen die Wahrheitswerte beider Seiten überein:

$$(W9) \quad (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Wir könnten diesen Fall ebenso wie den vorigen ohne Tabelle behandeln, und zwar durch einfache Überlegungen. Wir beginnen zum Beispiel mit dem Fall: C falsch; fahren wir damit fort,

wenn C wohl falsch, jedoch A und B wahr sind. Was für ein Fall liegt dann vor ?

Wir gelangen schließlich wie schon früher mit der Tabellenmethode zu dem überraschenden Ergebnis, dass für Konjunktion und Alternative nicht nur ein Distributionsgesetz, wie für Multiplikation und Addition gilt, sondern dass es zwei Distributionsgesetze gibt.

Dieses Ergebnis weist darauf hin, dass - wie wir bereits andeuteten - die Konjunktion ebenso sehr der Addition ähnelt wie der Multiplikation, und dass die Alternative ebenso der Multiplikation wie der Addition ähnelt.

Damit verloren wir die in gewissem Sinn bereits hinkende Analogie zwischen der Algebra und der mathematischen Logik. Im anderen Sinne gewannen wir eine neue Einsicht: Innerhalb der mathematischen Logik trafen wir die bisher vollkommenste Parallele zwischen Konjunktion und Alternative an.

3.12 Beispiele für die beiden Distributionsgesetze

'Wenn das Kind morgen noch fiebrig ist oder stark hustet und wir erreichen den Arzt, dann rufen wir ihn.'

Wir kümmern uns nur um das Vorderglied der Implikation.³⁰ Auf dessen logische Form $(A \vee B) \wedge C$ wenden wir das entsprechende Distributionsgesetz an, das heißt, wir formen den Teil des Satzes um in $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$:

'Wenn das Kind morgen noch fiebrig ist und wir erreichen den Arzt oder stark hustet und wir erreichen den Arzt, ...'

Der Sinn des Satzes ist derselbe wie vorher, nur wird der Satz weitschweifiger.

Mit Worten pfelegen wir zu sparen, deshalb wollen wir das Gesagte lieber in der Form $(A \vee B) \wedge C$ als in der Form $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ ausdrücken. Dasselbe können wir auch von der Anwendung des zweiten Distributionsgesetzes sagen.

Zum Beispiel könnte man statt der Behauptung:

'Der Film ist übermäßig kompliziert und inkonsequent oder ich verlor den Faden'
sagen:

'Der Film ist übermäßig kompliziert oder ich verlor den Faden, ferner ist er auch inkonsequent oder ich verlor den Faden.'

Ja, man könnte das sagen, aber wenn man so spräche, würde man faseln.

3.13 Die Verallgemeinerung der Distributivität auf mehrere Glieder

In der Algebra gilt das Distributionsgesetz für beliebig viele Glieder:

$$(a_1 + \dots + a_k)n = a_1n + \dots + a_kn$$

Es ist leicht einzusehen, dass wir auch in der mathematischen Logik die beiden Distributionsgesetze verallgemeinern können. Die vielen Glieder in der Tafel der Wahrheitswerte wären

³⁰Die Implikation dient hier nur dazu, dass durch sie das oder eindeutig wird. Es ist offenkundig, dass wir, wenn das Kind fiebert und stark hustet, dann ebenfalls (oder noch eher) den Arzt rufen, als wenn es fiebert, aber nicht lautet, oder nicht fiebert, aber hustet. Dieses oder ist also auf alle Fälle ein nichtausschließendes oder.

unübersichtlich, aber durch einfache Überlegungen lässt sich der Beweis für die verallgemeinerten Distributionsgesetze wie in den bereits behandelten Fällen führen.³¹

Die Verallgemeinerung auf beliebig viele Glieder ist also ebenfalls gültig:

$$(A_1 \vee \dots \vee A_k) \wedge B \equiv (A_1 \wedge B) \vee \dots \vee (A_k \wedge B)$$

$$(A_1 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B \equiv (A_1 \vee B) \wedge \dots \wedge (A_k \vee B)$$

3.14 Idempotenz

Bezüglich der Distributivität besteht kein Unterschied zwischen der Konjunktion und der Alternative.

Die Addition und die Multiplikation aber verhalten sich auch in anderer Hinsicht verschiedenartig:

Die Multiplikation mit einer positiven ganzen Zahl ist nichts anderes als eine wiederholte Addition gleicher Zahlen. Dagegen führt die Multiplikation gleicher Zahlen nicht auf die Addition zurück, sondern auf eine neue Operation, auf das Potenzieren.

Wie verhalten sich in diesen Fragen die Konjunktion und die Alternative ?



Wenn Ady schreibt:

"Ich liebe dich und ich liebe dich und ich liebe dich"

drückt er eine andere Stimmung aus, als wenn er nur schreibt

"Ich liebe dich",

aber vom logischen Standpunkt aus bedeuten beide Aussagen dasselbe. Offensichtlich ist die obige zusammengesetzte Aussage wahr, wenn wenigstens eine Teilaussage wahr ist (weil dann alle Teilaussagen wahr sind), sie ist aber falsch, wenn eine Teilaussage falsch ist.

Symbolisch aufgeschrieben, sieht das wie folgt aus:

A	$\underbrace{A \wedge A \wedge A}$
W	W
F	F

³¹Mit Hilfe des Beweises durch vollständige Induktion können wir die verallgemeinerten Distributionsgesetze auf die Wertverlaufgleichheiten (W 8) und (W 9) zurückführen. In gleicher Weise lassen sich auch die Verallgemeinerungen der Beziehungen (W 3) bis (W 6) auf beliebig viele Glieder beweisen. Wir wollen uns jedoch auf verhältnismäßig einfache Vorkenntnisse stützen und wenden deshalb das Prinzip des Beweises durch vollständige Induktion nicht an.

$$\begin{array}{rcc} & A & \underbrace{A \vee A \vee A} \\ \text{Ebenso:} & W & W \\ & F & F \end{array}$$

Nicht nur für genau drei, für beliebig viele Konjunktionsglieder beziehungsweise Alternativglieder sind diese Zusammenhänge gültig.

Wir sehen, dass die Konjunktion und die Alternative nicht auf weitere neue Operationen führen, wenn ihre Glieder gleich sind. Das Potenzieren hat also kein Gegenstück in der mathematischen Logik, für die Einführung einer neuen Operation in diesem Sinne liegt keine Notwendigkeit vor. Die Beziehungen

$$(W10) \quad A \wedge A \equiv A \quad \text{und} \quad (W11) \quad A \vee A \equiv A$$

und ihre Verallgemeinerungen auf mehrere Glieder bezeichnet man als die Eigenschaft der Idempotenz.³²

3.15 Negation und Konjunktion, Negation und Alternative

Die Addition und die Multiplikation in der Algebra verhalten sich auch noch von einem anderen Standpunkt aus abweichend von der Konjunktion und der Alternative. An einem Beispiel zeigen wir das:

$$-(3 + 5) = (-3) + (-5)$$

das heißt, beide Seiten ergeben die Zahl -8, aber es gilt

$$-(3 \cdot 5) \neq (-3) \cdot (-5)$$

weil die linke Seite die Zahl -15, die rechte Seite dagegen die Zahl +15 ergibt. Generell gilt: $-(a + b) \equiv (-a) + (-b)$. Aber $-(ab) \not\equiv (-a)(-b)$ sondern $-(ab) \equiv (-a)b \equiv a(-b)$

Zwischen der Negierung einer Aussage und der Bildung des Inversen einer Zahl fanden wir bisher recht gute Parallelen.

Untersuchen wir, ob nicht die Negierung einer Konjunktion oder die Negierung einer Alternative ähnliche Gesetzmäßigkeiten zeigen wie die Bildung des Inversen einer Summe.

Ein entsprechender Zusammenhang besteht für die Konjunktion beziehungsweise Alternative, wenn von den untenstehenden vier Ausdrücken die zwei linksstehenden beziehungsweise die zwei rechtsstehenden dieselben Wahrheitswerte haben.

Überall müssten wir die folgenden vier Fälle durchsehen.

	\sim	$(A$	\wedge	$B)$	\sim	A	\wedge	\sim	B	\sim	$(A$	\vee	$B)$	\sim	A	\vee	\sim	B
	F	W	W	W	F	W	F	F	W	F	W	W	W	F	W	F	F	W
	W	W	F	F	F	W	F	W	F	F	W	W	F	F	W	W	W	F
	W	F	F	W	W	F	F	F	W	F	F	W	W	W	F	W	F	W
	W	F	F	F	W	F	W	W	F	W	F	F	F	W	F	W	W	F
R	3	1	2	1	2	1	3	2	1	3	1	2	1	2	1	3	2	1

³²Das Wort ist lateinischer Herkunft und heißt etwa "Selbstpotenz". Ähnlich wie z.B. $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$, $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ usw. ist, nimmt jede "Potenz" beider Wahrheitswerte immer denselben Wert an, auch wenn man unter "Potenz" die Wiederholung der Konjunktion und auch die der Alternative versteht:

$$W \wedge \dots \wedge W = W, \quad F \wedge \dots \wedge F = F, \quad W \vee \dots \vee W = W, \quad F \vee \dots \vee F = F$$

Von den zwei vermeintlichen Beziehungen erfüllt sich nicht eine. Unter den Endergebnissen (hier die mit 3 bezeichnete Spalte) stehen ganz andere Wahrheitswerte. Viel überraschender ist der Zusammenhang zwischen den zwei äußeren Ausdrücken, die den Wahrheitswertetafeln nach dieselben sind.

Ebenfalls gleichen einander die Wahrheitswertetafeln der beiden mittleren Ausdrücke. Mit anderen Worten bedeutet das: wenn wir eine Konjunktion oder eine Alternative negieren, dann erhalten wir dasselbe, als wenn wir alle beide Teilaussagen gesondert negieren und dabei aber die Konjunktion in die Alternative und die Alternative in die Konjunktion umändern.

Es ergibt sich dann:

$$(W12) \quad \sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$$

$$(W13) \quad \sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$$

Ähnlich wäre es, wenn $-(a + b)$ für alle a und b gleich wäre mit $(-a) \cdot (-b)$ oder $\bar{a}b$ gleich wäre mit $(-a) + (-b)$.

Das ist jedoch keineswegs der Fall.

Wir trafen bei unseren Untersuchungen auf zwei wichtige logische Gesetze, die man die "de Morgansche Regeln"³³ nennt.

Die Ausdrücke auf beiden Seiten von (W 12) trafen wir bereits im 2. Kapitel in der Lösung der Aufgabe 4 e), f) an. In der Lösung der Aufgabe 5 begründeten wir auch, weshalb unsere Wahrheitswertetafeln übereinstimmen. Ja, die Wahrheitswertetafel erkennen wir auch wieder: es ist die Wahrheitswertetafel der dritten oder-Operation, der Unverträglichkeit.

Die Ausdrücke auf beiden Seiten von (W 13) trafen wir schon im 2. Kapitel in der Aufgabe 4 g) und d) an.

In der Aufgabe 5 begründeten wir ebenfalls, weshalb unsere Wahrheitswertetafeln übereinstimmen.

3.16 Eine andere Beweisführung - die Verallgemeinerung

Auch ohne Benutzung der Wahrheitswertetafel können wir die Gültigkeit der de Morganschen Regeln beweisen:

Wenn A wahr und B auch wahr ist, dann ist in (W 12) die linke Seite falsch (weil das Wahre verneint wird), und ihre rechte Seite ist auch falsch (weil alle beide Glieder der Alternative falsch sind).

Wenn aber wenigstens eine der beiden Aussagen falsch ist, dann ist die linke Seite von (W 12) wahr (weil wir das Falsche verneinen). Die rechte Seite ist ebenfalls wahr (weil ein Glied der Alternative wahr ist).

(W 13) können wir auf ähnliche Weise überprüfen. Hier lohnt es sich, den Fall, wo A und auch B beide falsch sind, von den anderen zu trennen.

Der große Vorteil der Beweisführung liegt darin, dass sie auf beliebig viele Glieder übertragbar ist (mit einer geringfügigen Abänderung des Wortlautes, zum Beispiel müssen wir anstatt " A und auch B " sagen "eine jede Variable").

³³de Morgan (lies: de morgen), englischer Mathematiker und Logiker (1806-1871), einer der großen Wegbereiter der mathematischen Logik. Die obenstehenden Zusammenhänge waren übrigens schon weitaus früher, auch den scholastischen Logikern, bekannt (W. Ockham, erste Hälfte des 14. Jahrhunderts), nur gerieten sie mit der Zeit in Vergessenheit.

Es gilt also auch:

$$\begin{aligned}\sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_k) &\equiv \sim A_1 \vee \dots \vee \sim A_k \\ \sim (A_1 \vee \dots \vee A_k) &\equiv \sim A_1 \wedge \dots \wedge \sim A_k\end{aligned}$$

3.17 Beispiele für die de Morganschen Regeln

Die de Morganschen Regeln werden im täglichen Leben auch oft von dem angewendet, der den Namen de Morgan nie gehört hat. Zum Beispiel könnten wir die Aussage:

'Das Hemd ist aus Dederon und knitterfrei'

(sie hat die Form: $A \wedge B$) nicht nur folgendermaßen verneinen:

'Es ist nicht wahr, dass das Hemd aus Dederon und knitterfrei ist'

[sie hat die Form: $\sim (A \wedge B)$], sondern auch so:

'Das Hemd ist nicht aus Dederon oder nicht knitterfrei.'

Die letzte Aussage (sie hat die Gestalt $\sim A \vee \sim B$) betrachten wir als wahr - auch dann, wenn das Hemd nicht aus Dederon und auch nicht knitterfrei ist.

Andererseits können wir die Aussage:

'Morgen wird Schnee fallen oder zumindest Schneeregen'

(sie hat die Form: $A \vee B$) nicht nur folgendermaßen verneinen:

'Es ist nicht wahr, dass morgen Schnee fallen wird oder zumindest Schneeregen'

[sie hat die Form: $\sim (A \vee B)$], sondern auch so:

'Morgen wird kein Schnee fallen und auch kein Schneeregen.'



Diese letztere Form und ihre stilistischen Abarten (weder ... noch ...; nicht ..., und nicht ...; nicht ..., doch auch ... nicht und so weiter) sind offenbar von der Form $\sim A \wedge \sim B$.

3.18 Dualismus

Die de Morganschen Regeln geben ein weiteres Beispiel für die bisherigen Parallelen zwischen Konjunktion und Alternative:

$$(W12) \quad \sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B \quad , \quad (W13) \quad \sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$$

Wenn wir in (W 12) das Zeichen \vee an Stelle des Zeichens \wedge und das Zeichen \wedge an Stelle des Zeichens \vee schreiben, gelangen wir zu (W 13), und ebenso, wenn wir in (W 13) wieder diese Zeichen vertauschen, gelangen wir zu (W 12) zurück.

Einen solchen Zusammenhang gibt es auch zwischen anderen wertverlaufsgleichen Ausdrücken, wir beobachteten das schon oft:

$$\begin{aligned}(W3) \quad A \wedge B &\equiv B \wedge A \quad , \quad (W5) \quad A \vee B \equiv B \vee A \\ (W4) \quad A \wedge (B \wedge C) &\equiv (A \wedge B) \wedge C \quad , \quad (W6) \quad A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \\ (W8) \quad (A \vee B) \wedge C &\equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad , \quad (W9) \quad (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (W10) \quad A \wedge A &\equiv A \quad , \quad (W11) \quad A \vee A \equiv A\end{aligned}$$

Von den in einer Reihe aufgeführten Beziehungen sagen wir, dass sie zueinander dual³⁴ sind. Wir stellen uns nun die Frage:

Erhalten wir stets wieder zwei wertverlaufsgleiche Ausdrücke, wenn wir, ausgehend von wertverlaufsgleichen Ausdrücken, dort jedes Zeichen \vee durch das Zeichen \wedge und stets jedes Zeichen \wedge durch das Zeichen \vee ersetzen? Sehen wir uns zum Beispiel (W 2) an:

$$\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$$

Wenn wir das Zeichen \vee durch das Zeichen \wedge ersetzen, erhalten wir:

$$\sim A \wedge B \equiv A \rightarrow B$$

Die beiden neu erhaltenen Ausdrücke sind offensichtlich nicht wertverlaufsgleich, weil der linke Ausdruck nur in einem Fall wahr wird, nämlich dann, wenn der Wert von A gleich F, der von B gleich W ist, der rechte wird dagegen in drei Fällen wahr (nur dann nicht, wenn der Wert von A gleich W, der Wert von B gleich F ist). Unsere Vermutung erfüllt sich also nicht.

Es ist aber möglich, folgendes zu beweisen (wir führen hier nur den Sachverhalt an, ohne ihn zu beweisen):

Wenn man in wertverlaufsgleichen Ausdrücken, in denen keine andere Operation, außer der Negation, Konjunktion und Alternative auftritt, überall an die Stelle von \wedge das Zeichen \vee , an die Stelle von \vee das Zeichen \wedge schreibt, so erhält man wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke. Diese These nennen wir das Dualitätstheorem.³⁵

Aufgaben

1. Welche Form haben die untenstehenden Schlüsse? Entscheiden Sie von jedem, ob er richtig ist oder falsch!

- (1) Wenn man den Briefkasten gestern nachmittag entleerte, so erhält Georg heute meinen Brief.

Wenn Georg meinen Brief nicht bekommt, so entleerte man gestern nachmittag den Briefkasten nicht.

- (2) Wenn die Feder meiner Uhr zerbrach, dann kostet die Reparatur nicht unter 50 Forint.
Wenn die Reparatur unter 50 Forint kostet, so zerbrach die Feder meiner Uhr nicht.

- (3) Wenn die Rakete nicht über die erste kosmische Geschwindigkeitsstufe hinauskommt, so kreist sie nicht um die Erde.

Wenn die Rakete über die erste kosmische Geschwindigkeitsstufe hinauskommt, so kreist sie um die Erde.

- (4) Wenn das Lied nicht schön ist, so bin ich nicht musikalisch.

Wenn ich musikalisch bin, so ist das Lied schön.

2. Sind die folgenden Schlussfiguren richtig ?

- (1) $\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$ (2) $\frac{A \rightarrow B}{\sim A \rightarrow \sim B}$

3. Substituieren Sie in $A \rightarrow \sim B \equiv B \rightarrow \sim A$

³⁴Das lateinische duo bedeutet "zwei".

³⁵Eigentlich ist das duale Prinzip um vieles allgemeiner. Wir gehen darauf nicht näher ein und geben uns mit diesem speziellen Fall zufrieden.

- (1) A durch $B \rightarrow C$; (2) B durch $A \vee B$;
 (3) A durch B und B durch $\sim A$!

Prüfen Sie, ob Sie wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke erhalten!

4. Erhält man wertverlaufsgleiche Ausdrücke, wenn man in $A \rightarrow \sim B \equiv B \rightarrow \sim A$ an Stelle des auf der rechten Seite auftretenden $\sim A$

- (1) A , (2) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \sim B)$ schreibt ?

5. Sind $\sim A$ und $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \sim B)$ wertverlaufsgleiche Ausdrücke ?

6. Wir wissen, dass wir wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke erhalten, wenn wir in wertverlaufsgleichen Ausdrücken einen vorkommenden Teilausdruck an einer Stelle³⁶ durch einen anderen wertverlaufsgleichen Ausdruck ersetzen. Gilt auch die folgende Umkehrung dieses Theorems ?

Wenn in wertverlaufsgleichen Ausdrücken ein vorkommender Teilausdruck an einer Stelle durch einen anderen ersetzt wird und wenn dadurch wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke entstehen, so sind der Teilausdruck und der Ausdruck, durch den er ersetzt wurde, wertverlaufsgleich.

7. Untersuchen Sie, ob der folgende Satz wahr ist!

Wenn in einem Ausdruck ein Teilausdruck mehrmals auftritt und wenn wir, vorausgesetzt, dass wir ihn an einer Stelle durch einen anderen Ausdruck ersetzen, an anderer Stelle dagegen nicht, wertverlaufsgleiche Ausdrücke erhalten, dann sind die beiden Ausdrücke (derjenige, der als Teilausdruck mehrmals auftritt, der andere, durch den ersetzt wird) wertverlaufsgleich.

8. Vergleichen Sie die folgenden Aussagen!

'Wenn du die Straße beschmutzt oder spuckst, verstößt du gegen die öffentliche Sauberkeit'
 und

'Wenn du die Straße beschmutzt, verstößt du gegen die öffentliche Sauberkeit, oder wenn du auf die Straße spuckst, verstößt du gegen die öffentliche Sauberkeit.'

Verspürt der Leser zwischen den zwei Aussagen einen inhaltlichen Unterschied ?

Wie würden wir die eine Aussage mit einer kleinen Abänderung (mit der Veränderung eines Bindewortes) schreiben müssen, so dass beide Aussagen gleichbedeutend werden? Der Leser beweise auch, dass die entsprechenden Ausdrücke wertverlaufsgleich sind.

9. a) Beweisen Sie durch Vergleich der entsprechenden Ausdrücke, dass die untenstehenden zwei Aussagen dasselbe bedeuten!

Wenn morgen gutes Wetter ist, so werden wir, wenn Sie Lust dazu haben, spazierengehen
 und

Wenn morgen gutes Wetter ist und Sie Lust dazu haben, so werden wir spazierengehen.

b) Vergleichen Sie die folgende Aussage mit den obenstehenden zwei Aussagen!

Wenn Sie Lust dazu haben, so werden wir, wenn morgen gutes Wetter ist, spazierengehen.

³⁶Freilich auch dann, wenn an mehreren Stellen ersetzt wird. Das aber folgt schon aus dem oben Gesagten. (Wenn wir nämlich einen Ausdruck an einer Stelle durch einen wertverlaufsgleichen Ausdruck ersetzen und erhalten wertverlaufsgleiche Ausdrücke, so können wir dasselbe wiederholen und so weiter.)

*10. Folgender Beispielsatz:

'Wenn das Kind morgen noch fiebrig ist oder stark hustet und wir erreichen den Arzt, so rufen wir ihn.'

Beweisen Sie durch den Vergleich der entsprechenden Ausdrücke, dass dieser Satz gleichbedeutend ist mit dem folgenden!

'Wenn das Kind fiebrig ist, so rufen wir den Arzt, falls wir ihn erreichen, und, wenn wir den Arzt erreichen, so werden wir ihn, wenn das Kind stark hustet, rufen.'

11. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen!

(1) $A \wedge B \equiv \sim (\sim A \vee \sim B)$,

(2) $A \vee B \equiv \sim (\sim A \wedge \sim B)$,

(3) $A \rightarrow B \equiv \sim (A \wedge \sim B)$ (W 14).

Es ist je ein Beispielsatz zu nennen.

4 Überblick über die logischen Operationen

4.1 Die einstelligen logischen Operationen

Zu den bisher betrachteten logischen Operationen gelangten wir durch Untersuchungen an der Umgangssprache:

Wir untersuchten die logische Rolle von und, oder und von anderen Bindewörtern. Gern würden wir schon jetzt ein vollständiges Bild davon erhalten, welche logischen Operationen es überhaupt gibt.

Wie ist das zu erreichen? Wollen wir ein Wörterbuch oder ein Sprachlehrbuch durchblättern und uns eine Tabelle aller Bindewörter zusammenstellen? Das wäre langweilig, und schließlich würden wir auch nicht sicher sein, ob wir nicht dennoch irgendeine logische Operation übersehen haben.

Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit: Wir versuchen, uns von den Wahrheitswertetafeln her den logischen Operationen zu nähern. Nachträglich können wir dann immer noch untersuchen, wie wir die so entdeckten Operationen mit den Mitteln der Umgangssprache wiedergeben können. Betrachten wir zuerst, welche einstelligen logischen Operationen möglich sind.

Diese logischen Operationen haben folgende Wahrheitswertetafeln:

	1.	2.	3.	4.
A				
W	W	W	F	F
F	W	F	W	F

Wir erkennen in der dritten Spalte unserer Wertetafel die Operation Negation. Im Kopf der Tafel können wir hier $\sim A$ schreiben. Die 1. Operation liefert unabhängig von dem Wert von A stets den Wert W, die 4. Operation immer den Wert F. Das werden wir auch im Kopf der Tafel angeben.

Wir könnten diese beiden logischen Operationen beispielsweise mit folgenden Worten wiedergeben:

" $2 \cdot 2 = 4$, unabhängig davon, dass ...", beziehungsweise

" $2 \cdot 2 = 5$, unabhängig davon, dass ..."

(Was für eine Aussage wir auch an die Stelle der Punkte schreiben, die erste zusammengesetzte Aussage ist wahr, die zweite ist falsch.)

Schließlich ähnelt die mit 2. bezeichnete Operation der Multiplikation mit 1 oder der Addition von 0 in der Arithmetik. A bleibt unverändert. Im Kopf der Tafel schreiben wir A .

Wie drücken wir diese Operation mit Worten aus? Zum Beispiel so:

"Es ist Tatsache, dass ..."

oder so: " $2 \cdot 2 = 4$ und..."

Sogar auch so: " $2 \cdot = 5$ oder ..."

Die möglichen vier einstelligen Operationen sind also die folgenden:

	1.	2.	3.	4.
A	W	A	$\sim A$	F
W	W	W	F	F
F	W	F	W	F

Von diesen vier Operationen sind strenggenommen nur die zwei mittleren einstellig. Die zwei äußeren würden wir auch nullstellig nennen können. (Denken wir an die konstanten Funktionen, deren Funktionswerte überall dieselben sind.)

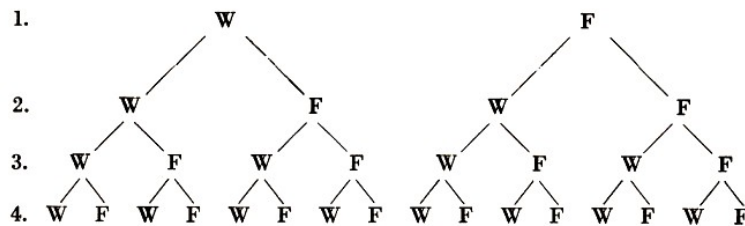
4.2 Die zweistelligen Operationen

Für die Verteilung der Wahrheitswerte von zwei miteinander verknüpften Aussagen gibt es vier Möglichkeiten.

Wir müssen in jeder Wahrheitswertetafel vier Stellen ausfüllen. An jeder Stelle kann einer der beiden Wahrheitswerte auftreten. Wieviel verschiedene Wahrheitswertetafeln werden es also insgesamt sein ?

Nein, nicht acht, übereilen wir die Antwort nicht. An erster Stelle können zwei verschiedene Werte stehen, W oder F.

In beiden Fällen können wir auch die zweite Stelle auf zweierlei Art ausfüllen, also vier verschiedene Möglichkeiten. An dritter Stelle könnte in allen vier Fällen auch W oder F stehen, das sind acht Möglichkeiten. Betrachten wir nun noch die letzte Stelle. Entsprechend der vorgegangenen Verteilung der Wahrheitswerte kann auch hier W oder F auftreten, so dass jede der acht genannten Möglichkeiten noch einmal in je zwei Mutanden zerfällt. Insgesamt sind es also 16.



Es ergeben sich also die folgenden Wahrheitswertetafeln.

A	B	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F

Unter ihnen finden wir freilich unsere bisherigen Operationen wieder: die Konjunktion (8); ferner die drei oder-Operationen: die Alternative (2.), die Disjunktion (10.) und die Unverträglichkeit (9.).

Schließlich finden wir dort auch die Implikation (5). Leicht zu finden sind wiederum die Operationen, deren Ergebnis von den Variablen unabhängig ist. Stets ergibt sich in der 1. Spalte der Wert W beziehungsweise in der 16. Spalte der Wert F.

Hier sind auch solche Operationen, deren Ergebnis nur von einer Variablen abhängig ist: Sein Wert stimmt entweder immer mit dem Wert dieser Variablen überein oder ist: immer gleich dem entgegengesetzten Wahrheitswert.

Solche zweistelligen Operationen finden wir in den Spalten 4, 13, 6 und 11. In der 4. Spalte ist der Wahrheitswert gleich dem von A , in der 13. Spalte gleich dem von $\sim A$, in der 6. Spalte gleich dem von B und in der 11. Spalte gleich dem von $\sim B$.

Wenn wird die zuletzt genannten sechs Operationen abrechnen, verbleiben noch zehn zwei-stellige Operationen. Fünf von ihnen kennen wir schon. Noch nicht kennengelernt haben wir bisher die folgenden:

A	B	3.	7.	12.	14.	15.
W	W	W	W	F	F	F
W	F	W	F	W	F	F
F	W	F	F	F	W	F
F	F	W	W	F	F	W

Sind sie wirklich unbekannt ? Wer die Aufgaben des 2. Kapitels löste, begegnete schon all diesen Wahrheitswertetafeln (Aufgabe 4 und 5), manchen auch schon des öfteren. Wir schreiben nun unter jede Wahrheitswertetafel, welcher Ausdruck dieser Operation entspricht (die Kleinbuchstaben verweisen auf die Lösungen der Aufgabe 4.).

A	B	3.	7.	12.	14.	15.
W	W	W	W	F	F	F
W	F	W	F	W	F	F
F	W	F	F	F	W	F
F	F	W	W	F	F	W
		t) $\sim A \rightarrow \sim B$	o), p) $(A \rightarrow B)$	b) $A \wedge \sim B$	c) $\sim A \wedge B$	d) $\sim A \wedge \sim B$
			$\wedge (\sim A \rightarrow \sim B)$	n) $\sim (A \rightarrow B)$		g) $\sim (A \vee B)$

Die Spalte 3 entspricht der Formel $\sim A \rightarrow \sim B$, die wir durch Anwendung der Kontraposition (siehe (W 7), hier sind nur die Buchstaben vertauscht) aus $B \rightarrow A$ erhalten. Diese Operation ist also auch nicht neu. Es handelt sich um eine einfache Implikation, nur deshalb erkannten wir sie nach der Wahrheitswertetafel nicht sogleich wieder, weil A und B ihre Rolle vertauscht hatten.

4.3 Die Äquivalenz

In der Spalte 7 sehen wir die Wahrheitswerte der Ergebnisse einer neuen Operation. Ihr entspricht der Ausdruck

$$(A \rightarrow B) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)$$

Übersetzen wir ihn in die Umgangssprache: 'Wenn A , so B , und wenn nicht A , so nicht B '.

Üblicher ist die folgende Formulierung (wir verwendeten sie bereits im 2. Kapitel, Aufgabe 4o): 'Wenn A , so B , aber wenn nicht A , so nicht B ;

in 4 p) kam dieselbe Operation vor, jedoch in der Fassung: 'Wenn A , dann, aber nur dann B '.

In der Lösung der Aufgabe 4 des 1. Kapitels war ebenfalls schon die Rede von derartig geformten Aussagen. Mit diesem Ausdruck verwechselte der in Aufgabe 4 erwähnte Sportfachmann die Implikation.

Es war dort davon die Rede, dass derartige Aussagen in der Mathematik gebräuchlicher in der folgenden Fassung sind:

Dann und nur dann A , wenn B .

Man nennt diese Operation Äquivalenz.³⁷

³⁷Ursprünglich ein lateinisches Wort. Im Deutschen sagen wir manchmal auch: Gleichwertigkeit. Aber verbreiteter ist die lateinische Form des Wortes.

4.4 Die Äquivalenz als Implikation in zwei Richtungen

In der Spalte 3 wurde eine Formel für das zweite Glied der Äquivalenz angegeben. Wir schrieben sie um in $B \rightarrow A$. Wir schreiben jetzt für die Äquivalenz:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

In die Umgangssprache übertragen:

Wenn A , so B , wenn dagegen B , so A .

Das heißt, A und B implizieren einander wechselseitig. Im weiteren benutzen wir die folgende symbolische Schreibweise für die Äquivalenzoperation:

$$A \leftrightarrow B$$

Wir lesen das so: A äquivalent mit B .

$$(W15) \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Aus den obenstehenden Formeln, aber noch schneller aus der Wahrheitwertetafel, können wir ablesen:

Die Äquivalenz von zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr oder beide falsch sind. Wenn aber die eine wahr, die andere falsch ist, dann ist ihre Äquivalenz falsch.

4.5 Der Zusammenhang von Äquivalenz und Disjunktion

Welche Operation charakterisierten wir fast wörtlich mit den gleichen Worten wie die Äquivalenz? - Die Disjunktion.

Zwischen diesen beiden Operationen besteht der folgende Unterschied:

Wenn beide Aussagen wahr oder beide Aussagen falsch sind (die zwei äußeren Fälle), dann ist die Äquivalenz wahr, die Disjunktion hingegen falsch.

Wenn die eine Aussage wahr, die andere falsch ist (die zwei mittleren Fälle), dann ist die Äquivalenz falsch, die Disjunktion dagegen wahr.

Wo in der Wahrheitwertetafel der einen Operation „W“ steht, dort steht in der Tafel der anderen „F“ und umgekehrt. Wenn wir also die Werte der einen Operation negieren, erhalten wir stets genau die Werte der anderen Operation.

$$A \succ B \equiv \sim (A \leftrightarrow B)$$

Wir würden also auch so schreiben können:

$$\sim (A \succ B) \equiv A \leftrightarrow B$$

4.6 Äquivalenz und Wertverlaufgleichheit

Ebenso wie andere Operationen können wir auch die Äquivalenz nicht nur auf eine Aussage oder eine Variable anwenden, sondern auch auf zusammengesetzte Aussagen.

$$(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B) \quad , \quad (A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge B)$$

Der Begriff der Äquivalenz erinnert uns an den Begriff der Wertverlaufsgleichheit. Überhaupt, worin besteht der Unterschied zwischen ihnen ?

Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir die folgende Aussage über zwei Ausdrücke

$$A \wedge B \equiv \sim A \rightarrow B$$

dem Ausdruck $(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B)$ gegenüberstellen.

$A \wedge B \equiv \sim A \rightarrow B$ besagt die Übereinstimmung der Wertetafeln der beiden Ausdrücke $A \vee B$ und $\sim A \rightarrow B$. Wenn wir dagegen diese beiden Ausdrücke durch das logische Operationszeichen " \leftrightarrow " miteinander verbinden, gewinnen wir zwar einen neuen, zusammengesetzten Ausdruck. Wir haben dadurch aber keine Aussage über die Wahrheitswertetafel des neuen Ausdrucks gemacht. Wollen wir auch das jetzt noch erreichen, so können wir z.B.

$$(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B) \equiv W$$

schreiben.

Dadurch ist eine Aussage über den Ausdruck $A \vee B \leftrightarrow \sim A \rightarrow B$ entstanden, die uns folgendes mitteilt:

Überall in der Wertetafel von $(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B)$ steht der Wert W . Wir sagen dazu auch: Der Ausdruck $(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B)$ ist allgemeingültig.

Nach den Bemerkungen über die Äquivalenz müssen deshalb die auf beiden Seiten des Zeichens " \leftrightarrow " stehenden Ausdrücke übereinstimmende Wertetafeln besitzen. Somit beschreiben

$A \vee B \equiv \sim A \rightarrow B$ (Aussage über zwei Ausdrücke) und

$(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B) \equiv W$ (Aussage über einen Ausdruck)

den gleichen Sachverhalt.

Betrachten wir hierzu ein ähnliches Beispiel aus der Arithmetik. $(a + a) - 2a \equiv 0$ sagt dasselbe aus wie $a + a \equiv 2a$.

Wenn man den Ausdruck $(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B)$ mit der Aussage $(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \rightarrow B) \equiv W$ oder mit $(A \vee B) \equiv \sim A \rightarrow B$ verwechselt, macht man den gleichen Fehler, als wenn man den Term³⁸ $(a + a) - 2a$ mit der Aussage $(a + a) - 2a \equiv 0$ verwechselt.

Sehen wir uns ein anderes Beispiel an. In dem Term $(a + a) - (a \cdot a)$ kann die Differenz der beiden Ausdrücke gleich 0 sein (in zwei Fällen ist sie in der Tat gleich 0), aber sie braucht nicht immer gleich 0 zu sein. Darum ist $a + a \equiv a \cdot a$ falsch.

Ebenso kann der Wahrheitswert des Ausdrucks

$$A \vee B \leftrightarrow (A \wedge B)$$

der Wert W sein, aber das ist nicht immer der Fall. Darum ist die Aussage über zwei Ausdrücke $(A \vee B) \equiv (A \wedge B)$ falsch.

³⁸Mit dem Wort Term bezeichnen wir in der Arithmetik bestimmte Teile eines Ausdrucks. So sind z.B. die Variablen a, b, c, \dots , sowie $a + b$ und $a \cdot b$ Terme. Sie bedeuten in der Arithmetik bestimmte Zahlen, die man erhält, wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt. Verbindet man beliebige Terme mit Hilfe des Gleichheitszeichens oder des <-Zeichens, so entsteht ein arithmetischer Ausdruck. Man kann z.B. mit Hilfe der Terme $a + b$ und $a \cdot b$ den Ausdruck $a + b < a \cdot b$ oder mit Hilfe der Terme $c, a + b$ den Ausdruck $a + b = c$ bilden. Für die Bildung von Tonnen und für die Bildung von Ausdrücken mit Hilfe von Term gibt es bestimmte Regeln, die wir hier nicht näher angeben wollen.

4.7 Die übrigen drei Operationen

Von drei Operationen der 16 möglichen zweistelligen Operationen sprachen wir noch nicht. Das wollen wir noch schnell erledigen.

Die Operation, der die Wahrheitstafel in der Spalte 12 entspricht, steht in ähnlichem Zusammenhang mit der Operation, der die Wahrheitstafel der Spalte 5 entspricht, der Implikation, wie die Äquivalenz mit der Disjunktion: Wo die eine wahr ist, dort ist die andere falsch.

Die Negation der Implikation $A \rightarrow B$ lautet: $\sim (A \rightarrow B)$. Auch die Tafel der Wahrheitswerte in der Spalte 14 verrät uns, dass die ihr entsprechende Operation nichts anderes ist als die Negation der Operation, der die Spalte 3 entspricht, also die Negation von $B \rightarrow A$.

Die Operation mit der Wahrheitstafel, der die Spalte 15 entspricht, ist schließlich, wie die Formel auch zeigt, die Negation der Alternative.

Das Charakteristische an dieser Operation ist die mit d) bezeichnete Formel nicht A und nicht B , die wir sprachlich lieber mit weder A noch B wiedergeben. Das ist die weder-noch-Operation. Es ist manchmal üblich, diese Operation mit besonderen Zeichen, zum Beispiel mit zwei senkrechten Linien, zu bezeichnen: $A||B$.

4.8 Wir begnügen uns mit möglichst wenig Operationen

Wir können durchaus für jede der 16 zweistelligen Operationen oder zumindest für jede der zehn eigentlichen zweistelligen Operationen besondere Zeichen einführen. Das wäre ein wenig viel.

Besonders die Beziehungen der zehn Operationen untereinander wären viel zu verwickelt. Deshalb kommen wir darin überein, dass wir, wenn wir eine Operation durch die Negation einer anderen Operation ausdrücken können, dann nur für eine der beiden Operationen ein besonderes Zeichen verwenden wollen.

So können wir mittels des Negationszeichens auch die übrigen Operationen hinreichend einfach niederschreiben, und schon sind nur fünf zweistellige Operationen erforderlich. Eigentlich sogar nur vier, denn in $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ haben nur das Vorderglied und das Nachglied verschiedene Bezeichnungen, aber der Pfeil drückt dieselbe Operation aus.

Die genannte Vereinbarung hat zur Folge, dass wir die bisher eingeführten Operationen reduzieren müssen:

Wenn von zweien die eine der Negation der anderen gleicht, müssen wir die eine fortlassen. Ob es aber solche Paare gibt? Ein Paar dieser Art sind die Äquivalenz und die Disjunktion.

Welche lassen wir nun fort?

Die mathematischen Anwendungen sprechen in jedem Fall dafür, dass die Äquivalenz als Operation erhalten bleibt. Die zweite oder-Operation, die Disjunktion, fällt damit der Ordnung zum Opfer. Statt $A \succ \prec B$ schreiben wir fortan generell: $\sim (A \leftrightarrow B)$.

Der dritten oder-Operation, der Unverträglichkeit, ergeht es auch nicht besser, denn wie wir wissen, ist sie die Negation der Konjunktion.³⁹

³⁹Wir stellten fest, dass die Wahrheitstafel der Unverträglichkeit lautet: F W W W, die Wahrheitstafel der Konjunktion hingegen W F F F. Also ist die eine Operation die Negation der anderen. (Siehe noch Kapitel 2, die Aufgaben 4. e) und 5 und ihre Lösung)

Wir halten uns lieber an die Konjunktion, auf die Unverträglichkeit als besondere Operation verzichten wir. Für $A|B$ schreiben wir fortan: $\sim (A \wedge B)$.

Ähnlich ist die Situation auch im Falle der zuletzt erwähnten weder-noch-Operation, der Negation der Alternative. Wir behalten die Alternative, denn die weder-noch-Operation brauchen wir als besondere Operation nicht.

Statt $A||B$ schreiben wir generell: $\sim (A \vee B)$.

4.9 Überblick über die 16 zweistelligen Operationen

Wenn wir uns die 16 Operationen der Tafel betrachten, dann sehen wir, dass die Wahrheitstafeln der Operationen, die einander negieren, symmetrisch zu der dick eingezeichneten Linie stehen. Und zwar von den wirklich zweistelligen Operationen sind es genau die links von der dicken Linie, für die wir entschieden haben, sie beizubehalten.

Die übrigen Operationen stehen rechts von der Linie. Schreiben wir nun die Tafel der 16 Operationen so auf, dass in eine Spalte die gelangen, die wir auseinander durch Negation erhalten können, kurz gesagt, wir klappen die Tafel um. Fetter Satz hebt die vier allerwichtigsten zweistelligen Operationen hervor.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	$A \vee B$	$B \rightarrow A$	A	$A \rightarrow B$	B	$A \leftrightarrow B$	$A \wedge B$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	W	F	F	F	F
W	W	F	F	W	W	F	F
W	F	W	F	W	F	W	F
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	W	W	W	W
F	F	W	W	F	F	W	W
F	W	F	W	F	W	F	W
	$\sim (A \vee B)$	$\sim (B \rightarrow A)$	$\sim A$	$\sim (A \rightarrow B)$	$\sim B$	$\sim (A \leftrightarrow B)$	$\sim (A \wedge B)$
16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.

4.10 Kann die Anzahl der Operationen noch weiter verringert werden ?

Es erhebt sich die Frage, ob wir nicht noch einige Operationen weglassen können. Dabei gäbe es kein Hindernis. Die Äquivalenz könnten wir beispielsweise durch die Implikation und die Konjunktion ausdrücken (W 15):

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Wir würden auch die Implikation entbehren können (W 2):

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$$

Sogar die Alternative könnten wir entbehren [siehe 11. (2)]:

$$A \vee B \equiv \sim (\sim A \wedge \sim B)$$

(Freilich könnten wir umgekehrt auch die Konjunktion durch die Alternative ausdrücken.)

Wir können also mit einer einzigen zweistelligen Operation und der Negation, also insgesamt mit zwei Operationen, jeden beliebigen Ausdruck, welcher es auch sei, niederschreiben. Was würde aber das Ergebnis sein ?

Die Ausdrücke würden sehr lang und zum Teil unübersichtlich. Zum Aufschreiben einer einzigen Alternative, Implikation beziehungsweise Äquivalenz mit Hilfe der Negation und Konjunktion brauchten wir z.B. so viele Zeichen:

$$\sim (\sim A \wedge \sim B), \quad \sim (A \wedge \sim B), \quad \sim (A \wedge \sim B) \wedge \sim (B \wedge \sim A)$$

Eine kompliziertere Formel würde noch unübersichtlicher. Dabei würde auch die Parallele zwischen Konjunktion und Alternative nicht so deutlich sichtbar. Der letztere Nachteil droht nicht, wenn wir die Anzahl der Operationen nicht auf zwei, sondern auf drei senken (Negation, Konjunktion, Alternative). Für viele wichtige Anwendungen ist es tatsächlich vorteilhaft, sich auf die Benutzung dieser drei Operationen zu beschränken. In vielen anderen Fällen dagegen wäre der Ausschluss der Implikation und der Äquivalenz nachteilig.

Es ist interessant, dass es auch mit einer einzigen Operation möglich ist, sämtliche übrigen Operationen auszudrücken. Aber die eine Operation kann nicht die Negation, nicht die Konjunktion, nicht die Alternative, nicht die Implikation und auch nicht die Äquivalenz sein. (Lies in Verbindung damit die Aufgaben 6 und 7 und unsere Lösung!)

4.11 Die mehrstelligen Operationen

Bisher sprachen wir von ein- und zweistelligen Operationen, obwohl wir bereits auch mehrstelligen Operationen begegneten. Solche sind beispielsweise die dreistellige Konjunktion und die dreistellige Alternative.

Sogar alle die Ausdrücke, die drei oder mehr Variable enthalten und die wir mit den bisherigen ein- und zweistelligen Operationen aufschrieben, drücken selbst eine drei- oder mehrstellige Operation aus.

Wieviel n -stellige Operationen gibt es wohl ? Ob es möglich ist, sie mit Hilfe der bisherigen Operationen auszudrücken?

Versuchen wir, auf die erste Frage zu antworten. In der Wahrheitwertetafel der einstelligen Operationen müssten wir zwei Stellen ausfüllen:

A	
W	
F	

in der Wahrheitwertetafel der zweistelligen Operationen vier:

A	B	
W	W	
W	F	
F	W	
F	F	

in der Wahrheitwertetafel der dreistelligen Operationen acht:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
W	W	W	
W	W	F	
W	F	W	
W	F	F	
F	W	W	
F	W	F	
F	F	W	
F	F	F	

und so weiter, stets doppelt soviel; in der Wahrheitwertetafel der vierstelligen Operationen $2^4 = 16$ Stellen, in der Wahrheitwertetafel der fünfstelligen Operationen $2^5 = 32$ Stellen, allgemeiner: in der Wahrheitwertetafel der n -stelligen Operation würden wir 2^n Stellen ausfüllen müssen.

Auf wievielerlei Art können wir diese Stellen ausfüllen? Es genügt, wenn wir auf die Abbildung sehen, damit wir verstehen, dass jede neue Stelle die Anzahl der Möglichkeiten bei der Ausfüllung einer Wahrheitwertetafel verdoppelt:

eine Stelle 2 Möglichkeiten
 zwei Stellen 4 Möglichkeiten
 drei Stellen 8 Möglichkeiten

allgemein: k -Stellen können wir auf 2^k mögliche Arten ausfüllen.

Speziell für die Ausfüllung der 2^n Stellen gibt es also 2^{2^n} verschiedene Möglichkeiten. Das bedeutet nicht die n -te Potenz von 2^n , sondern die 2^n -te Potenz von 2! So viel n -stellige Operationen gibt es also. Einen Überblick über die wachsende Anzahl gibt die folgende Tafel:

n	Die Anzahl der n -stelligen logischen Operationen, 2^{2^n}
1	4
2	16
3	256
4	65 536
5	4 294 967 296
6	18 446 744 073 709 551616
7	340 282 366 920 938 463 374 607 431 768 211 456

Die letzte Zahl ist bereits ein bisschen groß. Doch benötigt die mathematische Logik in ihrer Anwendung oft auch 10- bis 15stellige Operationen.

Wie können die Logiker mit diesen arbeiten ?

Einfach so, dass sie sie mit Hilfe der Negation, der Konjunktion und der Alternative ausdrücken. Wir werden sogleich an einem Beispiel sehen, wie das geschieht.

4.12 Bildung mehrstelliger Operationen mit Hilfe von Negation, Konjunktion und Alternative

Der Einfachheit halber nehmen wir eine dreistellige Operation.

Ihre Wahrheitwertetafel können wir wie immer aus 256 möglichen auswählen. Wir werden sehen, dass das, was wir sagen, nicht davon abhängt, welche Wahrheitwertetafel wir von den vielen nehmen, auch nicht davon, dass die Beispieloperation dreistellig ist. Wir wählen unter den 256 möglichen die folgende Tafel als Beispiel.

A	B	C	?
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	F
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

Wir wollen einen solchen Ausdruck aufschreiben, dessen Wahrheitswert genau dann W beziehungsweise F ist, wenn es die Wahrheitswertetafel vorschreibt. Das heißt, der zusammengesetzte Ausdruck muss dann wahr sein, wenn der Wert von A gleich W, der Wert von B gleich W und der Wert von C gleich W ist, außerdem dann, wenn der Wert von A gleich F, der Wert von B gleich F, jedoch der Wert von C gleich W ist. In allen anderen Fällen muss der Ausdruck falsch sein.

Versuchen wir zuerst, jede dieser zwei Bedingungen gesondert zu erfüllen. Welche logische Verknüpfung ist dann und nur dann wahr, wenn A und B und C wahr sind? Wir wissen, dass die Konjunktion von A , B und C diese Bedingung erfüllt:

$$A \wedge B \wedge C$$

Man kann die zweite Bedingung, die der Ausdruck zu erfüllen hat, sprachlich etwa wie folgt formulieren:

"Dann und nur dann besitzt der Ausdruck den Wert W, wenn der Wert von A gleich F, der Wert von B gleich F, aber der Wert von C gleich W ist."

Leichter wird die Antwort, wenn wir folgendermaßen formulieren:

"Dann und nur dann ergibt sich der Wert W, wenn der Wert von $\sim A$ gleich W, Wert von $\sim B$ gleich W, der Wert von C gleich W ist."

Diese Bedingung erfüllt natürlich der Ausdruck

$$\sim A \wedge \sim B \wedge C$$

Wir forderten aber einen solchen Ausdruck, der genau dann wahr wird, wenn der erstgenannte Ausdruck wahr ist oder wenn der zweitgenannte Ausdruck wahr ist oder wenn alle beide Ausdrücke wahr sind. Er soll nur dann falsch sein, wenn die beiden vorgenannten Ausdrücke falsch sind. Diesen Forderungen wird offensichtlich die Alternative der obengenannten Ausdrücke gerecht:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\sim A \wedge \sim B \wedge C)$$

Diesen Ausdruck können wir also in die Tabelle an Stelle des Fragezeichens setzen.

Warum besteht diese Alternative gerade aus zwei Gliedern? Deshalb, weil in der vorher gegebenen Wahrheitswertetafel an zwei Stellen der Wert W vorkam. Wenn er an drei Stellen aufgetreten wäre, dann wäre es eine Alternative aus drei Gliedern; wenn er an acht Stellen aufgetreten wäre, dann eine aus acht.

Wenn er nur an einer Stelle vorgekommen wäre, dann wäre die Anwendung der Alternative nicht nötig gewesen. In einem solchen Falle sagen wir: "Die Alternative ist eingliedrig."

Es ist auch üblich, in der Algebra zum Beispiel den Ausdruck $2ab$ als eingliedrige Summe zu bezeichnen, kurz eingliedrig zu nennen.

Wenn der Wert W an keiner Stelle vorgekommen wäre, sondern überall nur der Wert F , dann hätten wir die Operation nicht mit Hilfe eines derartigen Ausdrucks ausdrücken können. Dagegen hätten wir sie mit dem Wahrheitswert F ausdrücken können. In diesem Falle sagen wir, die Alternative ist nullgliedrig.

Warum gibt es in beiden Gliedern der Alternative drei durch die Konjunktion verknüpfte Glieder ?

Deshalb, weil uns eine dreistellige Operation gegeben war. Eine vierstellige Operation können wir analog ausdrücken: Wenn in ihrer Wahrheitswerttafel kein W auftritt, so können wir sie durch das Zeichen F ausdrücken. Ist das aber nicht der Fall, so können wir sie durch eine Alternative ausdrücken, deren sämtliche Glieder Konjunktionen von vier Gliedern sind.

Warum kommen in der zweiten Konjunktion die Glieder A und B negiert vor ? Deshalb, weil dort, wo in der Wahrheitswerttafel das zweite Mal der Wert W vorkommt, die Wahrheitswerte von A und B gleich F sind. (Erinnern wir uns daran, wie wir diese Konjunktion erhielten.)

4.13 Die vollständige alternative Normalform

Dieses mechanische Verfahren zeigte uns einen Weg, wie wir eine n -stellige Operation mit Hilfe der Negation, der Konjunktion und der Alternative ausdrücken können, wenn wir ihre Wahrheitswerttafel kennen:

Wir beginnen damit, dass wir in ihrer Wahrheitswerttafel die Zeilen suchen, in der für die n -stellige Operation der Wert W auftritt. Haben wir eine solche Zeile gefunden, so bilden wir die Konjunktion aller Variablen. In dieser Konjunktion müssen wir eine Variable genau dann negieren, wenn in der betreffenden Zeile für sie der Wert F steht.

Die Anzahl dieser Zeilen bestimmt die Anzahl der zu bildenden Konjunktionen. Von den so erhaltenen Konjunktionen bilden wir die Alternative; sie ist der Ausdruck, der die betreffende Operation charakterisiert. (Wenn der Wert W nur einmal in der Wahrheitswerttafel auftritt, dann ist die Alternative eingliedrig. Wenn in der Wahrheitswerttafel nur der Wert F auftritt, so ist F der gesuchte Ausdruck, die Alternative ist "nullgliedrig".)

Die so erhaltenen Ausdrücke nennen wir vollständige alternative Normalformen.⁴⁰

"Vollständig" deshalb, weil in jedem ihrer Glieder jede Veränderliche vorkommt (entweder negiert oder nicht negiert), wenn in ihnen überhaupt Veränderliche enthalten sind. "Alternative" deshalb, weil die zuletzt angewandte Operation die Alternative ist, wenn überhaupt eine Alternative vorkommt. "Normalform" deshalb, weil sie jede erdenkliche Operation in eine einheitliche Form überführt.

4.14 Die Ermittlung der Wahrheitswerttafel aus der vollständigen alternativen Normalform

Es war zuerst davon die Rede, dass eine Wahrheitswerttafel einer dreistelligen Operation gegeben war:

⁴⁰Eine andere Bezeichnung dafür ist: "ausgezeichnete alternative Normalform". In der deutschen Literatur ist auch die Bezeichnung "kanonische alternative Normalform" gebräuchlich.

4.14 Die Ermittlung der Wahrheitstafel aus der vollständigen alternativen Normalform

Wir konstruieren mit Hilfe der Negation, der Konjunktion und der Alternative einen Ausdruck, der die in der Tafel angegebenen Werte annimmt. Die Lösung dieses Problems führte uns zur vollständigen alternativen Normalform.

Wir können aber auch die Problematik umkehren. Gegeben sei eine vollständige alternative Normalform, beispielsweise

$$(A \wedge B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee (\sim A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

Wie lautet ihre Wahrheitstafel?

Nicht nur die Wahrheitstafel der vollständigen alternativen Normalform, sondern auch die Wahrheitstafel jedes beliebigen Ausdrucks können wir zusammenstellen; es ist alles eine Frage der Geduld.

Wir müssen nur der Reihe nach jede mögliche Werteanordnung der Variablen aufschreiben. (Für vier Variable haben wir die Werteanordnung $W W W W$, $W W W F$, ..., $F F F W$, $F F F F$ zu betrachten, insgesamt $2^4 = 16$ Werteanordnungen.)

Und wir müssen in jedem Fall die vorgeschriebenen Operationen durchsehen (hier vier Negationen, neun Konjunktionen und zwei Alternativen, insgesamt bedeutet es die Erledigung von 15 Operationen). So erhalten wir der Reihe nach alle in der Wahrheitstafel auftretenden 16 Werte. Nun genug des langweiligen Handwerks!

Zum Glück können wir von der vollständigen alternativen Normalform die Wahrheitstafel viel einfacher ablesen. Wer verstanden hat, wie wir zu einer solchen Normalform gelangten, der ist bereits in der Lage, das vorliegende Problem zu lösen.

Warum bestand die niedergeschriebene Normalform aus zwei Gliedern ?

Deshalb, weil in der Wahrheitstafel an zwei Stellen der Wert W vorkam. Wie viele W -Werte werden in der Wahrheitstafel der oben gegebenen Normalform auftreten ? Natürlich drei, denn sie besteht aus drei alternativ verbundenen Gliedern.

In welcher Zeile der Wahrheitstafel erscheinen diese W -Werte ? Ein W wird dort stehen, wo der Wert des ersten Gliedes gleich W ist, das heißt, wo die Werte von A , B und C gleich W , der Wert von D aber gleich F ist.

Ein zweites W steht dort, wo der Wert von A gleich W , der Wert von B gleich W , der Wert von C gleich F , der Wert von D gleich F ist.

Das dritte W dort, wo der Wert von A gleich F , der Wert von B gleich W , der Wert von C gleich W und der Wert von D gleich W ist.

Die übrigen in der Tafel auftretenden 13 Werte für die Normalform sind gleich F . Dasselbe würden wir natürlich auch dann erhalten, wenn wir 16 mal die 15 Operationen ausführten. Aber so gelangen wir auf jeden Fall schneller ans Ziel.

Fassen wir zusammen:

Wie oft tritt in der Wahrheitstafel einer alternativen Normalform der Wert W auf ?

- Er tritt so oft auf, wie Alternativglieder vorhanden sind; jedem Glied der Normalform entspricht ein W -Wert in der Wahrheitstafel.

In welche Zeile der Wahrheitstafel schreiben wir den Wert W ?

Wir schreiben ihn in die Zeile, wo die im vorliegenden Alternativglied negiert vorkommenden Variablen den Wert F , die übrigen den Wert W haben.

An allen anderen Stellen der Wertetafel einer alternativen Normalform steht ein F .

4.15 Die vollständige konjunktive Normalform

Wenn wir von Ausdrücken der Form:

$$(A \wedge B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee (\sim A \wedge B \wedge C \wedge D) \quad (1)$$

so leicht die Wahrheitstafel ablesen können, dann liegt die Vermutung nahe - als Kriterium für die Parallele zwischen Konjunktion und Alternative -, dass man die Wahrheitstafel des folgenden Ausdrucks ebenfalls mit nicht mehr Schwierigkeiten bestimmen kann:

$$(A \vee B \vee C \vee \sim D) \wedge (A \vee B \vee \sim C \vee \sim D) \wedge (\sim A \vee B \vee C \vee D) \quad (2)$$

Die unter (1) genannte dreigliedrige Alternative hat dann den Wahrheitswert W, wenn wenigstens eines ihrer Glieder den Wahrheitswert W hat; sie hat den Wert F, wenn jedes ihrer Glieder den Wahrheitswert F hat.

Die unter (2) genannte dreigliedrige Konjunktion hat dann den Wahrheitswert W, wenn jedes ihrer Glieder den Wahrheitswert W hat; sie hat den Wahrheitswert F, wenn wenigstens eines ihrer Glieder den Wahrheitswert F hat.

Das können wir auch folgendermaßen formulieren, und dabei wird die Parallele noch auffällender:

Die Wahrheitswerte von (1) sind dann und nur dann gleich W, wenn der Wahrheitswert wenigstens eines Gliedes gleich W ist.

Die Wahrheitswerte von (2) sind dann und nur dann gleich F, wenn der Wahrheitswert wenigstens eines ihrer Glieder gleich F ist.

Wann wird der Wert von (1) gleich W sein? Das ist dann der Fall, wenn der Wahrheitswert des ersten Gliedes gleich W ist, das heißt, wenn der Wert von A , B und C gleich W ist und der Wert von D gleich F ist und noch in zwei weiteren Fällen. Wann wird der Wert von (2) gleich F sein?

Erstens dann, wenn der Wert des ersten Gliedes der Konjunktion, der Wahrheitswert von $A \vee B \vee C \vee \sim D$, gleich F ist. Wann tritt das ein? Das ist dann der Fall, wenn die Wahrheitswerte von A , B , C und $\sim D$ gleich F sind. Das heißt dann, wenn der Wert von A , B und C gleich F und der von D gleich W ist.

Zweitens dann, wenn der Wahrheitswert von $A \vee B \vee \sim C \vee \sim D$ gleich F ist, das heißt, wenn der Wert von A und B gleich F, der Wert von C und D gleich W ist. Schließlich drittens dann, wenn der Wahrheitswert von $\sim A \vee B \vee C \vee D$ gleich F ist, das heißt, wenn der Wert von A gleich W, der Wert von B , C und D gleich F ist.

Wie wir sehen, kann man die Wahrheitstafeln solcher Ausdrücke wie Formel (2) ebenfalls leicht aufstellen. Einen derartigen Ausdruck nennen wir vollständige konjunktive Normalform.

Wir wollen nun versuchen, die wichtigsten Parallelen zwischen der vollständigen alternativen und der vollständigen konjunktiven Normalform herauszuarbeiten.

Eine n -stellige vollständige alternative Normalform ist eine Alternative von Konjunktionen, in denen jede der n Variablen einmal vorkommt, entweder negiert oder nicht negiert; eine n -stellige vollständige alternative Normalform ist außerdem die Konstante F.

Eine n -stellige vollständige konjunktive Normalform ist eine Konjunktion von Alternativen, in denen jede der n -Variablen einmal vorkommt, entweder negiert oder nicht negiert; eine n -stellige vollständige konjunktive Normalform ist außerdem die Konstante W.

Vergessen wir nicht, dass wir eine Konjunktion einer einzigen Variablen und eines Ausdrucks auch eingliedrige Alternative nennen können; nur so ist die Definition genau.

Beispielsweise, so sonderbar es auch klingt, ist

$$A \wedge \sim B$$

eine zweistellige vollständige alternative Normalform. (Das heißt, die eingliedrige Alternative einer Konjunktion, in der beide Variablen einmal vorkommen.)

$$A \vee \sim B$$

eine zweistellige vollständige konjunktive Normalform. (Das heißt, die eingliedrige Konjunktion einer Alternative, in der beide Variablen einmal vorkommen.)

Freilich sind A (und ebenso auch $\sim A$, C , $\sim D$ und so weiter) einstellige vollständige alternative Normalformen und gleichzeitig auch einstellige vollständige konjunktive Normalformen. (Nämlich eine aus einer eingliedrigen Konjunktion bestehende eingliedrige Alternative und zugleich auch eine aus einer eingliedrigen Alternative bestehende eingliedrige Konjunktion.)

Der Leser scheue keine Mühe und durchdenke einmal, wie wir zum Begriff der vollständigen alternativen Normalform gelangten.

Danach versuche er, die beiden Normalformen und die Sätze über sie so zu fassen, dass er statt der Konjunktion die Alternative, statt der Alternative die Konjunktion, F statt W und W statt F schreibt.

Er wird erkennen:

Man kann alle logischen Operationen, wie viele Variable auch auftreten, nicht nur mit der vollständigen alternativen, sondern auch mit der vollständigen konjunktiven Normalform darstellen.

Es wäre zu weitschweifig, das alles erneut aufzuschreiben.

4.16 Die zeichnerische Darstellung der Operationen

Wir schrieben zur Aufstellung der Wahrheitwertetafeln die möglichen logischen Wahrheitswerte stets in derselben Reihenfolge auf:

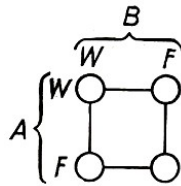
			A	B		A	B	C
			W	W		W	W	W
			W	W		W	W	F
			W	F		W	F	W
			F	W		F	W	W
			F	F		F	W	F
			F	F		F	F	W
			F	F		F	F	F

Es sind auch mehr als drei Variable möglich. Die möglichen Wahrheitswerte schreiben wir dann auch nach dem gleichen Prinzip auf. Das System ist einfach, es ist beinahe unmöglich, etwas falsch zu machen.

Es gibt aber einen großen Nachteil. In einer Wahrheitwertetafel ändern sich die logischen Werte von A auf andere Weise als die von B , C , D und so weiter. Dadurch kam leider nicht die Gleichberechtigung der logischen Variablen untereinander zum Ausdruck.

Deshalb machen wir uns jetzt mit einer anderen Art der Anordnung der Wahrheitswerte von Variablen bekannt. Betrachten wir zuerst den Fall zweier Variablen.

Wir schreiben die Werte von A wie bisher, mit W beginnend, untereinander, die Werte von B dagegen, ebenfalls mit W beginnend, nebeneinander:



Die Kreise bleiben einstweilen leer; in sie schreiben wir später die Werte, die wir nach Anwendung der einzelnen Operationen erhalten. Die Wahrheitswertetafeln der Operationen fertigen wir jetzt nach dem Muster der Multiplikationstafeln an:

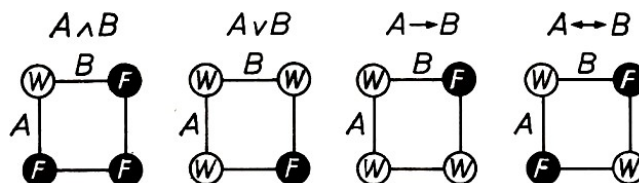
		b			
		1	2	3	4
a	1	1	2	3	4
	2	2	4	6	8
	3	3	6	9	12
	4	4	8	12	16

Die Ergebnisse (hier das Produkt der Zahlen) können wir dort ablesen, wo die Reihen und Spalten zusammentreffen. Zum Beispiel können wir das Produkt $3 \cdot 4$ dort ablesen, wo die dritte Reihe und vierte Spalte zusammentreffen. (Freilich, auch beim Zusammentreffen der vierten Reihe und der dritten Spalte stehen dieselben Ziffern, weil die Multiplikation kommutativ ist.)

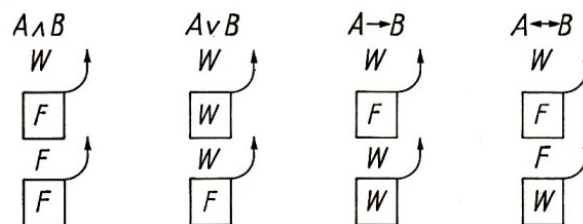
Die Wahrheitswertetafel der logischen Operationen ist viel einfacher; jede Tabelle hat nur zwei Reihen und zwei Spalten, die den zwei möglichen Wahrheitswerten entsprechen. Das Ergebnis der Operation kann auch nur zwei Wahrheitswerte haben, W oder F .

Wenn sich der Wert W ergibt, dann wollen wir der besseren Anschauung halber schwarze Buchstaben auf weißem Grund benutzen; wenn sich F ergibt, schreiben wir weiße Buchstaben auf schwarzem Grund.

Die Wahrheitswertetafeln der vier allerwichtigsten zweistelligen Operationen mit diesen Bezeichnungen haben folgendes Aussehen:

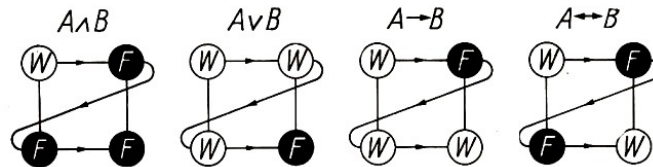


Wir schrieben die Wahrheitswertetafeln dieser Operationen bisher so:

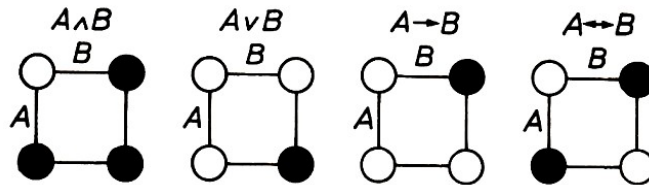


Wenn wir die beiden umrandeten Wahrheitswerte so neben die anderen beiden Wahrheitswerte setzen, wie die Pfeile zeigen, dann erhalten wir gerade die oben beschriebenen Wahrheitswertetafeln.

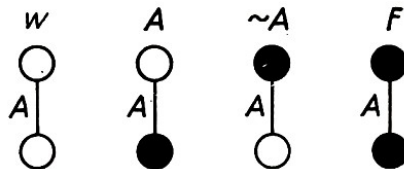
Wenn wir umgekehrt die in den Wahrheitswertetafeln mit zwei Eingängen auftretenden Wahrheitswerte in der Reihenfolge, wie die Pfeile in den folgenden Abbildungen zeigen, lesen, dann gelangen wir zurück zur alten Wahrheitswertetafel.



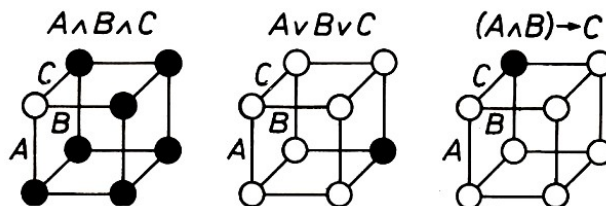
Der Leser zeichne sich diese Wahrheitswertetafeln mit den zwei Eingängen selbst ab. Der Einfachheit halber kann er auch die Buchstaben W und F weglassen. Die weißen Kreise bezeichnen dann den Wahrheitswert wahr, die schwarzen den Wahrheitswert falsch. Diese Vereinfachung werden wir auch künftig benutzen.



Die einstelligen Operationen können wir mit dieser Methode ebenfalls zeichnerisch darstellen.



Die dreistelligen Operationen stellen wir in folgender Weise dar:



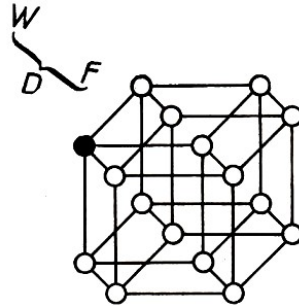
Hierbei ist zu beachten, dass von den Wahrheitswerten von C der Wert W "vorn", der Wert F "hinten" ist.



Beispiel: Wann ist der Ausdruck $(A \wedge B) \rightarrow C$ falsch ?

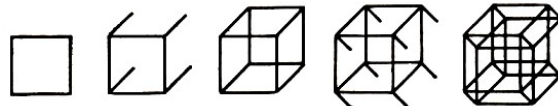
Genau dann, wenn $A \wedge B$ wahr ist (das heißt, A und B sind wahr), jedoch C falsch ist. Sonst ist dieser Ausdruck immer wahr.

Auch die vierstelligen Operationen können wir recht einfach darstellen. Von den Wahrheitswerten von D ist jetzt links oben der Wert W und der Wert F rechts unten. Es ist nicht schwer, die entsprechende Abbildung zu zeichnen. Zur dreidimensionalen Wiedergabe verschieben wir die Abbildung des Quadrates in irgendeine Richtung, ebenso lassen wir jetzt die Abbildung des dreidimensionalen Würfels in eine andere Richtung gleiten.



In der Mitte der Abbildung unten ist kein dreidimensionaler Würfel sichtbar, sondern die zweidimensionale Projektion eines dreidimensionalen Würfels. Ebenso ist unsere Abbildung rechts oben die zweidimensionale Projektion eines vierdimensionalen Würfels.

Die Quadrate, mit denen wir die zweistelligen Operationen darstellen, können wir als zweidimensionale Würfel ansehen und die Strecke als eindimensionalen Würfel.



Zur Darstellung der fünfstelligen Operationen müssten wir die Ecken eines fünfdimensionalen Würfels mit zweierlei Farbe ausmalen. Diese Darstellung ist bereits etwas schwerfällig; wenn sogar Operationen mit noch mehr Stellen dargestellt werden sollen, wird es ganz unübersichtlich.

4.17 Die elementare Aussage

Versuchen wir, die logische Form der folgenden Aussage aufzuschreiben:

'Es wundert mich, dass die Fledermaus kein Vogel ist, obwohl sie fliegen kann.'

Das Wort "obwohl" täuscht uns, denn es ist nicht leicht dahinterzukommen, dass es die Konjunktion ausdrückt. Welche Aussagen verbindet diese Konjunktion?

Vielleicht sind es die Aussagen 'Es wundert mich, dass die Fledermaus kein Vogel ist' und 'Die Fledermaus kann fliegen', die verknüpft werden? Aber die Gültigkeit der Konjunktion erstreckt sich nur auf den Teil nach dem "dass". Die obige Aussage hat also die folgende Form:

$$\text{Es wundert mich, dass } (\sim V \wedge K)$$

(Zeichenerklärung: V = die Fledermaus ist ein Vogel, K = die Fledermaus kann fliegen.)

Wenn wir den Satz "Es wundert mich" mit C , das Bindewort "dass" mit einem Doppelpunkt abkürzen, dann erhalten wir die elegante Formel:

$$C : (\sim V \wedge K)$$

Aber welche Operation drückt das Wort "dass" aus ? Es kann nur eine zweistellige Operation sein, soviel ist sicher. Wie wir jedoch die 16 zweistelligen Operationen auch immer betrachten, mit keiner können wir das Wort "dass" identifizieren.

Das Bindewort "dass" drückt keine logische Operation aus. Deshalb ist die obige Aussage - vergeblich verbunden sich darin die drei vernünftigen Teilaussagen - eine elementare Aussage. Ihre logische Form ist also A (oder irgendeine andere Variable).

Jetzt endlich können wir den Begriff elementare Aussage klären, den wir im ersten Kapitel nur zum Teil näher erläuterten.

Mit dem Wort "elementar" bezeichnen wir alle die Aussagen, die man nicht aus anderen Aussagen mit Hilfe der betrachteten logischen Operationen zusammensetzen kann. (Es genügt, wenn wir zum Beispiel nur an die Negation, die Konjunktion und die Alternative denken, da es möglich ist, schon mit diesen die übrigen Operationen auszudrücken.)

4.18 Der Aussagenkalkül

In diesem Buch zerlegen wir die Aussagen nur so weit (hierin kamen wir überein), bis wir wieder Aussagen erhalten, weiter nicht, das heißt, höchstens so weit, bis wir zu elementaren Aussagen gelangen. Den Teil der mathematischen Logik, der die elementaren Aussagen nicht weiter in ihre Teile zerlegt, nennen wir den Aussagenkalkül.

Die Variablen, die Konstanten W und F und die aus ihnen mit Hilfe logischer Operationen gebildeten Formeln nennen wir Ausdrücke des Aussagenkalküls, kurz: Ausdrücke.

Nun müssen wir manchem unserer Leser eine kleine Enttäuschung bereiten; nämlich denen, die sich folgendes vorstellten: Mit den Mitteln der mathematischen Logik kann man nach allen Seiten hin die grammatikalische Analyse von Aussagen durchführen, und vielleicht ist für denjenigen, der die mathematische Logik kennt, das Studium der Grammatik überflüssig. Nein, davon kann nicht die Rede sein.

Nicht nur der Aussagenkalkül, sondern auch die anderen Teile der mathematischen Logik beschäftigen sich nicht mit der Analyse solcher Aussagen, wie beispielsweise: 'Es wundert mich, dass die Fledermaus kein Vogel ist, obwohl sie fliegen kann'; das überlässt sie der Grammatik.

Warum betonten wir also, dass wir in diesem Band die Zusammensetzung der Aussagen nur bis auf elementare Aussagen untersuchen? Und warum sagten wir, dass wir den Teil der mathematischen Logik, in dem die Aussagen nicht weiter als bis zur elementaren Aussage zerlegt werden, Aussagenkalkül nennen ?

Deshalb, weil es auch elementare Aussagen gibt - wenn auch nicht gerade die oben genannte - , die wir mit den Mitteln der mathematischen Logik noch weiter zerlegen können. Derartige Aussagen sind beispielsweise solche mit A , mit B und mit C bezeichneten Aussagen. ('Alle Pferde sind Säugetiere und so weiter.')

Oder führen wir ein anders geartetes Beispiel an; es ist die elementare Aussage: 'Es gibt ein Tier, das kein Vogel ist, obwohl es fliegen kann.'

Aufgaben

1. Schreiben Sie die Figur der folgenden Schlüsse auf!
Stellen Sie fest, ob die erhaltenen Schlussfiguren richtig sind!

- (1) Wenn Alexander jetzt ein Tor schießt, so gewinnen wir das Spiel, aber wenn er das Tor jetzt nicht schießt, so gewinnen wir es nicht.

Alexander schießt jetzt das Tor und wir gewinnen das Spiel, oder er schießt das Tor nicht und wir gewinnen es nicht.



- (2) Alexander schießt kein Tor, oder wir gewinnen das Spiel.

Entweder schießt Alexander das Tor oder wir gewinnen das Spiel nicht.

2. Von den vier wichtigsten zweistelligen Operationen (Konjunktion, Alternative, Implikation und Äquivalenz) sind einige kommutativ, andere nicht. Können wir die Kommutativität beziehungsweise die Nicht-Kommutativität aus der Abbildung (S. 64) ablesen ?

3. (1) Ist die Implikation assoziativ?

(2) Ist die Äquivalenz assoziativ ?

(3) Bedeuten die folgenden drei Aussagen dasselbe ?

a) Johann ist dann und nur dann ärgerlich, wenn Klara dann die Einbrenne verbrennt, wenn ihre Schwiegermutter anwesend ist, sonst nicht.



b) Das, dass Johann ärgerlich ist, wenn Klara die Einbrenne verbrennt, aber nicht ärgerlich ist, wenn Klara sie nicht verbrennt, ist dann und nur dann wahr, wenn Klaras Schwiegermutter anwesend ist.

c) Johann ist dann ärgerlich, wenn Klara die Einbrenne verbrennt, sonst nicht. Klara hingegen verbrennt dann die Einbrenne, wenn die Schwiegermutter anwesend ist, sonst nicht. (Diese Frage entscheiden wir durch Vergleich der zugehörigen Ausdrücke.)

*4. Welche Distributivitäten bestehen unter den vier wichtigsten zweistelligen Operationen ? Mit anderen Worten: In welchen Fällen erhalten wir wertverlaufsgleiche Ausdrücke, wenn wir in

$$(A * B) \circ C \equiv (A \circ C) * (B \circ C) \quad \text{und in} \quad (1)$$

$$A \circ (B * C) \equiv (A \circ B) * (A \circ C) \quad (2)$$

* und \circ durch irgend zwei der Zeichen $\wedge, \vee, \rightarrow$ und \leftrightarrow ersetzen (nicht unbedingt zwei verschiedene)?

5. Wir kennen algebraische Beziehungen, in denen nur eine Variable vorkommt:

$$\begin{array}{ll} a + 0 \equiv a & \text{und} \quad a \cdot 1 \equiv a \\ a - 0 \equiv a & \text{und} \quad a : 1 \equiv a \\ a - a \equiv 0 & \text{und} \quad a : a \equiv 1 \\ a \cdot 0 \equiv 0 & \text{und} \quad -(-a) \equiv a \end{array}$$

Suchen Sie in der Logik entsprechende einstellige Beziehungen!

6. In dieser Aufgabe und in der folgenden wenden wir zwei logische Operationszeichen an, die wir sonst im allgemeinen mit Hilfe anderer Operationen ausdrücken.

Die eine ist die weder ... noch-Operation (Symbol: $||$), die andere ist die Unverträglichkeit (Symbol: $|$).

(1) Sagen Sie kürzer: 'Weder ist das Pferd ein Vogel, noch ist das Ross ein Vogel.'

(2) Sagen Sie so kurz wie möglich: 'Weder ist wahr, dass weder der Hund zu Hause ist, noch sein Herr, noch ist wahr, dass weder der Hund zu Hause ist, noch sein Herr.'

(3) Beweisen Sie, dass $A||A \equiv \sim A$ gilt!

(4) Beweisen Sie, dass $(A||B)||A \equiv A \vee B$ gilt!

(5) Beweisen Sie, dass wir mit Hilfe der weder ... noch-Operation alle anderen Operationen ausdrücken können!

(6) Drücken Sie mit Hilfe der weder ... noch-Operation die Konjunktion so einfach wie möglich aus!

(7) Drücken Sie mit Hilfe der weder ... noch-Operation auch die Implikation so einfach wie möglich aus!

(8) Drücken Sie mit Hilfe der weder ... noch-Operation die Äquivalenz aus!

7. Drücken Sie mit Hilfe der Unverträglichkeit (1) die Negation, (2) die Konjunktion, (3) die Alternative, (4) die Implikation und (5) die Äquivalenz aus!

(5) Bei der Lösung gehen Sie beispielsweise von

$$(W16) \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$$

aus.

Wenden Sie die aus $A|B \equiv \sim (A \wedge B)$ leicht herleitbare Beziehung $\sim (A|B) \equiv A \wedge B$ (von links nach rechts) an:

$$A \leftrightarrow B \equiv \sim (A|B) \vee \sim [(A|A)|(B|B)] \equiv (A|B) | [(A|A)|(B|B)]$$

5 Die Wertverlaufsgleichheit und der Schluss

5.1 Mehrere Prämissen statt einer, eine Prämisse statt mehrerer

Betrachten wir die zwei Schlüsse:

Wenn das Telegramm gestern ankam, so trifft Michael mit dem Abendzug ein.

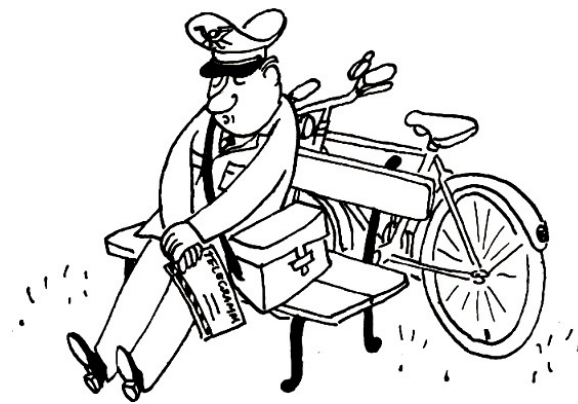
Wenn das Telegramm gestern nicht ankam, so trifft Michael mit dem Abendzug nicht ein.

Wenn das Telegramm gestern ankam, so trifft Michael mit dem Abendzug ein.

Wenn das Telegramm gestern nicht so trifft Michael mit dem Abendzug nicht ein.

Das Telegramm kam gestern an, und Michael trifft mit dem Abendzug ein, oder es kam nicht an und Michael trifft mit dem Abendzug nicht ein.

Wenn Michael nicht mit dem Abendzug eintrifft, so kam das Telegramm gestern nicht an.



Diese Schlüsse haben die Form

$$(1) \frac{T \rightarrow M}{\sim T \rightarrow \sim M} \quad (2) \frac{T \rightarrow M}{\sim T \rightarrow \sim M} \quad \frac{\sim M \rightarrow \sim T}{\sim M \rightarrow \sim T}$$

Wir wissen, dass ein Schluss sicher richtig ist, wenn seine Konklusion wahr ist, sooft eine jede seiner Prämissen wahr ist. Wie können wir die Voraussetzung "Eine jede seiner Prämissen ist wahr" anders formulieren ?

Etwa wie folgt: "Die Konjunktion der Prämissen ist wahr". Die obigen Schlussfiguren können wir also auch so schreiben:

$$(1') \frac{(T \rightarrow M) \wedge (\sim T \rightarrow \sim M)}{(T \wedge M) \vee (\sim T \wedge \sim M)} \quad (2') \frac{(T \rightarrow M) \wedge (\sim T \rightarrow \sim M)}{\sim M \rightarrow \sim T}$$

Allgemein gilt:

Wenn mehrere Prämissen in einer Schlussfigur auftreten, so können wir sie derart umformen, dass wir diese Prämissen (oder einige von diesen) mit Hilfe der Konjunktion verbinden.

Beispielsweise formen wir die Schlussfigur

$$(3) \frac{\sim Q \quad P \vee Q \quad P \rightarrow R}{R}$$

in die gleichbedeutende

$$(4) \quad \frac{\sim Q \vee (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R)}{R}$$

um oder auch in

$$(5) \quad \frac{\sim Q \wedge (P \rightarrow R)}{P \vee Q}$$

"Gleichbedeutend" heißt, wir können auch die Umformung in umgekehrter Richtung durchführen: wenn in irgendeiner Prämisse eine Konjunktion auftritt, zum Beispiel in (4) oder wie in die ersten Prämisse von (5), dann können wir sie in mehrere Prämissen zerlegen. Die Glieder der Konjunktion können wir einzeln als Prämisse aufschreiben.

Weder die eine noch die andere Richtung der Umformung führt zur Veränderung einer Schlussfigur in dem Sinne, dass aus einer richtigen eine fehlerhafte Schlussfigur wird oder umgekehrt.

5.2 Die Umkehrbarkeit und die Nichtumkehrbarkeit von Schlussfiguren

Kehren wir zurück zu den Schlussfiguren (1) und (2) und versuchen wir schon jetzt zu entscheiden, ob sie richtig sind. In den Prämissen und auch in der Konklusion der Schlussfigur (1) können wir die Äquivalenz wiedererkennen (W 15 und W 16).

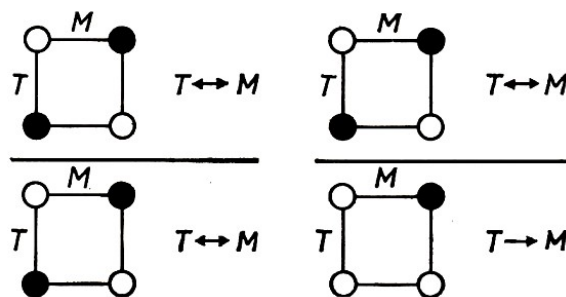
Die Konklusion der Schlussfigur (2) dagegen können wir durch Kontraposition auf die Form $T \rightarrow M$ bringen:

$$(1'') \quad \frac{T \leftrightarrow M}{T \leftrightarrow M} \quad (2'') \quad \frac{T \leftrightarrow M}{T \rightarrow M}$$

Offensichtlich sind beide Schlussfiguren richtig.

Was bedeutet es aber, dass eine Schlussfigur mit der Prämisse⁴¹ richtig ist? Das bedeutet, dass aus einer wahren Prämisse eine wahre Konklusion folgt. Mit anderen Worten heißt das: Wo in der Wahrheitstafel der Prämisse der Wert W steht, dort steht auch in der Wahrheitstafel der Konklusion der Wert W.

(Wo in der Wahrheitstafel der Prämisse ein weißer Kreis auftritt, dort tritt er auch in der Wahrheitstafel der Konklusion auf.)



⁴¹Schlussfiguren mit mehr als einer Prämisse brauchen nicht gesondert betrachtet zu werden, weil doch aus mehreren Prämissen, wie wir sahen, eine Prämisse gebildet werden kann.

beide Schlussfiguren sind richtig, es gibt aber zwischen ihnen einen wesentlichen Unterschied.

Die Umkehrung der ersten ist richtig, die der zweiten aber nicht. Was verstehen wir darunter, dass die Umkehrung einer richtigen Schlussfigur auch richtig ist? Das bedeutet, dass die Schlussfigur, die man erhält, wenn man die Prämissen und die Konklusion gegeneinander austauscht, ebenfalls richtig ist.

Betrachtet man die Wahrheitstafel, so heißt das, dass dort, wo die Prämisse den Wert W besitzt, auch die Konklusion den Wahrheitswert W hat, und dass dort, wo die Konklusion den Wert W besitzt, auch die zugehörige Prämisse den Wahrheitswert W hat.

Mit anderen Worten: Die Wahrheitstafeln der Prämisse und der Konklusion stimmen überein. In der bildhaften Darstellung bedeutet das folgendes: Die Abbildungen der Prämisse und Konklusion stimmen überein, die weißen und schwarzen Kreise liegen jeweils an gleicher Stelle.

Die Prämisse und die Konklusion kann man durch verschiedene Ausdrücke darstellen [siehe den Ausdruck (1')], aber es ist auch möglich, sie auf die gleiche Form zu bringen [siehe den Ausdruck (1'')]

Diese Aussagen treffen aber nicht auf die rechte Schlussfigur zu.

Wo in der Wahrheitstafel für die Prämisse der Wert W steht, dort ist der Wahrheitswert der Konklusion ebenfalls gleich W , jedoch gilt das nicht in der umgekehrten Richtung. Die beiden Abbildungen stimmen nicht überein, in der bildhaften Darstellung der Konklusion gibt es an mehr Stellen weiße Kreise (sie entsprechen dem Wahrheitswert W) als in der bildhaften Darstellung der Prämisse.

Die zwei Ausdrücke sind verschieden. Es ist nicht möglich, sie auf die gleiche Form zu bringen.

5.3 Von der richtigen Schlussfigur zur allgemeingültigen Implikation

Zwischen den Schlussfiguren und den allgemeingültigen Implikationen finden wir eine enge Beziehung. Hier und auch dort ist von folgendem die Rede: Wenn etwas wahr ist (die Prämisse, das Vorderglied), so ist etwas anderes auch wahr (die Konklusion, das Nachglied).

Was ist überhaupt der Unterschied zwischen ihnen? Schreiben wir die obenstehenden Schlussfiguren (1'') und (2'') in die Form einer Implikation um, indem wir unsere Prämissen zum Vorderglied, unsere Konklusion zum Nachglied machen.

$$(1^*) \quad (T \leftrightarrow M) \rightarrow (T \leftrightarrow M) \quad , \quad (2^*) \quad (T \leftrightarrow M) \rightarrow (T \rightarrow M)$$

Vergleichen wir diese mit einer gewöhnlichen Implikation, beispielsweise mit

$$T \rightarrow M$$

Worin besteht der Unterschied? Es handelt sich um einen gewaltigen Unterschied:

$T \rightarrow M$ kann wahr, aber auch falsch sein, je nachdem, welche Wahrheitswerte T und M besitzen; oder anders ausgedrückt: Die Wahrheit beziehungsweise die Falschheit von $T \rightarrow M$ ist nur von den Wahrheitswerten von T und M abhängig. ($T \rightarrow M$ ist wahr, wenn M wahr ist, aber auch dann, wenn T falsch ist, sonst nicht.) Dagegen sind (1*) und (2*) immer richtig, unabhängig von den Wahrheitswerten von T und M .

Mit anderen Worten: Die Ausdrücke (1*) und (2*) sind allgemeingültig. Das verraten (1*) und

(2') noch nicht, dazu müssen wir (1*) und (2*) noch umschreiben:

$$(T \leftrightarrow M) \rightarrow (T \leftrightarrow M) \equiv W \quad (1^{**})$$

$$(T \leftrightarrow M) \rightarrow (T \rightarrow M) \equiv W \quad (2^{**})$$

Wir überzeugen uns von der Allgemeingültigkeit dieser beiden Ausdrücke mit Hilfe ihrer Wahrheitstafeln. Wer ein wenig nachdenkt, sieht ein, dass das nicht eines besonderen Zufalls wegen, sondern notwendigerweise so ist:

Eine Implikation, deren Vorderglied die Prämisse (beziehungsweise die Konjunktion der Prämissen) einer richtigen Schlussfigur ist und deren Hinterglied die Konklusion dieser Schlussfigur ist, ist allgemeingültig.

Warum? Deshalb, weil zwei Fälle möglich sind, wenn wir an Stelle der Variablen alle möglichen Wahrheitswerte setzen:

1. Das Vorderglied (die Prämisse) hat den Wahrheitswert W . Da die Schlussfigur richtig ist, muss der Wahrheitswert der Konklusion auch gleich W sein. Also ist der Wahrheitswert der Implikation auch gleich W , denn

$$W \rightarrow W = W$$

2. Das Vorderglied (die Prämisse) hat den Wahrheitswert F . Der Wahrheitswert der Implikation ist dann unabhängig vom Wert des Hintergliedes stets gleich W , denn

$$F \rightarrow A \equiv W$$

(Das heißt $F \rightarrow W = W$ und $F \rightarrow F = W$.)

5.4 Von einer allgemeingültigen Implikation zur richtigen Schlussfigur

Alle richtigen Schlussfiguren können wir also in eine allgemeingültige Implikation umformen. Ob das auch umgekehrt gilt?

Betrachten wir beispielsweise die folgende Implikation:

$$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$$

Es ist leicht einzusehen, dass sie allgemeingültig ist:

$$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B) \equiv W$$

Überlegen wir, warum das so ist. Entweder sind A und auch B wahr, dann ist auch das Vorderglied wahr; wahr ist dann aber auch das Hinterglied, und deshalb gilt für den Wahrheitswert der Implikation

$$W \rightarrow W = W$$

oder eine der beiden Teilaussagen ist falsch (eventuell alle beide). Dann ist es gleichgültig, welchen Wahrheitswert das Hinterglied hat, der Wahrheitswert der Implikation ist auf jeden Fall gleich W , weil das Vorderglied den Wahrheitswert F hat. Wir formen das jetzt um zur Schlussfigur

$$\frac{A \wedge B}{A \vee B}$$

Wir können sogar schreiben:

$$\frac{A \\ B}{A \vee B}$$

Sind diese Schlussfiguren richtig ? Problematisch ist nur: Was geschieht, wenn die Prämisse (die Konjunktion der Prämissen) wahr ist ? Ist dann auch die Konklusion wahr ?

Wir können uns zufriedengeben, sie ist wahr, und somit ist die Schlussfigur richtig. Wir sehen aber auch sofort ein, dass das nicht infolge irgendeines Zufalls, sondern notwendigerweise immer so ist:

Eine Schlussfigur, deren Prämisse (die Konjunktion der Prämissen) das Vorderglied einer allgemeingültigen Implikation ist und deren Konklusion das Hinterglied dieser Implikation ist, ist richtig.

Warum ? Wir müssen nur den Fall betrachten, dass die Prämisse (das Vorderglied) wahr ist. Ob es möglich ist, dass bei solchen Wahrheitswerten der Variablen die Konklusion (das Hinterglied) falsch ist ? Nein, es ist nicht möglich, weil dann die Implikation nicht allgemeingültig wäre. In der Wahrheitstafel würde irgendwo wegen $W \rightarrow F = F$ ein F als Wahrheitswert vorkommen. Wenn also die Prämisse wahr ist, dann ist auch die Konklusion wahr.

Das heißt, die Schlussfigur ist richtig.

5.5 Umkehrbare Schlussfiguren und allgemeingültige Äquivalenzen

Nach dem bisher Gesagten ist es eigentlich überflüssig zu sagen, was der Leser sicher längst herausgefunden hat:

Wir können die umkehrbaren Schlussfiguren in eine allgemeingültige Äquivalenz umformen. (Unter einer umkehrbaren Schlussfigur verstehen wir eine richtige Schlussfigur, deren Umkehrung auch richtig ist.)

Andererseits kann man auch jede allgemeingültige Äquivalenz in eine umkehrbare Schlussfigur umformen.

In beiden Fällen handelt es sich darum, dass zwei Wahrheitstafeln übereinstimmen: die der Prämisse und der Konklusion beziehungsweise die der Ausdrücke auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichens.

Beispielsweise ist

$$\frac{A \rightarrow \sim B}{B \rightarrow \sim A}$$

eine umkehrbare Schlussfigur, also gilt:

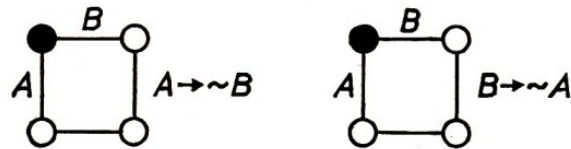
$$(A \rightarrow \sim B) \leftrightarrow (B \rightarrow \sim A) \equiv W$$

Wir können es auch umgekehrt sagen: Es gilt

$$(A \rightarrow \sim B) \leftrightarrow (B \rightarrow \sim A) \equiv W \quad \text{also ist}$$

$$\frac{A \rightarrow \sim B}{B \rightarrow \sim A}$$

eine umkehrbare Schlussfigur. In beiden Fällen ist davon die Rede, dass die Wahrheitstafeln beider Ausdrücke übereinstimmen:



5.6 Umkehrbare Schlussfiguren und Wertverlaufsgleichheit

Wenn zwei Ausdrücke in ihren Wahrheitstafeln übereinstimmen, so schreiben wir das gewöhnlich nicht als allgemeingültige Äquivalenz auf, sondern mit Hilfe des Zeichens " \equiv ", wobei auf beiden Seiten dieses Zeichens die zwei betreffenden Ausdrücke stehen:

$$A \rightarrow \sim B \equiv B \rightarrow \sim A$$

Diese Beziehung und

$$(A \rightarrow \sim B) \leftrightarrow (B \rightarrow \sim A) \equiv W$$

drücken auf verschiedene Weise den gleichen Fakt aus, wie wir das schon besprochen und auch mit algebraischen Beispielen erklärten.

Die Tatsache der Wertverlaufsgleichheit von Ausdrücken können wir also auch mit Hilfe einer umkehrbaren Schlussfigur zum Ausdruck bringen, indem wir den einen Ausdruck als Prämisse und den anderen als Konklusion wählen.

Die umkehrbare Schlussfigur, die allgemeingültige Äquivalenz und die Wertverlaufsgleichheit drücken alle ein und dieselbe Tatsache aus, nämlich die Übereinstimmung der Wahrheitstafeln von zwei Ausdrücken.

5.7 Zusammenfassung

Wir wollen nun Ordnung zwischen den vielen Begriffen und Bezeichnungen schaffen.

Der Einfachheit halber gehen wir von einer Schlussfigur mit zwei Prämissen aus. Wir bezeichnen diese mit **P** und mit **Q**, ihre Konklusion mit **K**. (Wir verwenden fett gedruckte Buchstaben, weil sie nicht nur stellvertretend für logische Variable stehen können, sondern auch für beliebige kompliziert zusammengesetzte Ausdrücke.)

Die folgenden Aussagen sind dann alle wahr, oder keine ist wahr:

(1) $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{K}$ ist eine richtige Schlussfigur.

(2) $\frac{\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}}{\mathbf{K}}$ ist eine richtige Schlussfigur.

(3) Wenn **P** und auch **Q** wahr sind, so ist auch **K** wahr.

(4) Wo für **P** \wedge **Q** in der Wahrheitstafel der Wert **W** steht (weißer Kreis), dort steht auch in der Wahrheitstafel von **K** der Wahrheitswert **W**.

(5) In der Wahrheitstafel von $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{K}$ tritt nur der Wahrheitswert **W** auf (weißer Kreis).

(6) $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{K} \equiv \mathbf{W}$.

Auch die folgenden Aussagen sind entweder alle wahr oder alle falsch.

(7) $\frac{P \wedge Q}{K}$ und $\frac{K}{P \wedge Q}$ sind richtige Schlussfiguren.

(8) $\frac{P \wedge Q}{K}$ ist eine umkehrbare Schlussfigur.

(9) Wenn $P \wedge Q$ wahr ist, so ist auch K wahr, und wenn K wahr ist, so ist auch $P \wedge Q$ wahr.

(10) Die Wahrheitwertetafel von $P \wedge Q$ stimmt mit der Wahrheitwertetafel von K überein.

(11) In der Wahrheitwertetafel von $(P \wedge Q) \leftrightarrow K$ tritt an allen Stellen nur das Wahrheitswert W auf (weiße Kreise).

(12) $(P \wedge Q) \leftrightarrow K \equiv W$

(13) $(P \wedge Q) \equiv K$

Zwischen (1) bis (6) und (7) bis (13) besteht aus mehreren Gründen keine vollkommene Parallele. Der eine Grund ist der, dass wir in einer Schlussfigur immer nur von einer Konklusion sprechen, und deshalb können wir auch nur die Schlussfiguren mit einer Prämisse umkehren. Das ist mehr oder minder Angelegenheit der Vereinbarung; wir können bei einer Schlussfigur- oder bei einem Schluss- nicht nur von mehreren Prämissen, sondern auch von mehreren Konklusionen sprechen, denn wir können diese Fälle ebenfalls behandeln: Wir setzen dazu voraus, dass von mehreren Schlüssen die Rede ist, die dieselben Prämissen haben und in jedem Falle nur eine Konklusion.

5.8 Der indirekte Beweis

Wenn ich das Motorrad kaufe, dann muss ich all mein Geld ausgeben, und dann kann ich kein neues Radio kaufen. Wenn ich das alte Radio veräußere und das neue nicht nehme, dann kann ich zu Hause nicht die Übertragung vom Wettkampf hören.

Wir untersuchen nun, ob aus diesen Prämissen folgt, dass ich dann, wenn ich das alte Radio veräußere und das Motorrad kaufe, zu Hause die Übertragung nicht hören kann. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

M = ich kaufe das Motorrad,

G = ich gebe all mein Geld aus,

K = ich kaufe ein neues Radio (oder kann kaufen, das ist hier einerlei),

V = ich veräußere das alte Radio,

H = ich kann zu Hause die Übertragung vom Wettkampf hören.

Versuchen wir, die Richtigkeit der folgenden Schlussfigur zu beweisen:

$$\frac{M \rightarrow (G \wedge \sim K) \quad (V \wedge \sim K) \rightarrow \sim H}{(V \wedge M) \rightarrow \sim H}$$

das heißt, es ist zu beweisen, dass

$$\{[M \rightarrow (G \wedge \sim K)] \wedge [(V \wedge \sim K) \rightarrow \sim H]\} \rightarrow [(V \wedge M) \rightarrow \sim H] \equiv W$$

gilt.

Der Anblick dieser Formel ist nicht sehr ermutigend.

Es gibt fünf Variable, das bedeutet $2^5 = 32$ Werteanordnungen. Wir verspüren nicht viel Lust, die Wahrheitswerte dieses monströsen Ausdrucks in allen 32 Fällen auszurechnen. Schließlich

sind wir auch nicht so sicher darin, ob aus den Prämissen auch diese Konklusion folgt, das heißt, ob dieser Ausdruck wirklich allgemeingültig ist.

Wenn wir also um den zwanzigsten oder dreißigsten Fall herum irgendwo ein F erhalten, dann ist die ganze bisherige Rechnung umsonst gewesen!

Versuchen wir also lieber, dieses Problem von der anderen Seite her zu lösen. Wir gehen von der Annahme aus, dass es eine solche Werteanordnung der Variablen gibt, bei dem der angegebene Ausdruck den Wert F annimmt.

Da der Ausdruck eine Implikation ist, muss auf Grund dieser Annahme das Vorderglied den Wert W, das Hinterglied aber den Wahrheitswert F haben. Die Implikation ist nämlich - wie wir wissen - in allen anderen Fällen wahr. Das Vorderglied ist eine Konjunktion, deren Werte genau dann gleich W sind, wenn ihre beiden Glieder den Wahrheitswert W haben.

Das Hinterglied ist wiederum eine Implikation. Sie hat nach unserer Annahme den Wert F. Also muss ihr Vorderglied den Wert W, ihr Hinterglied den Wert F besitzen. Wenn also der Wert des obigen Ausdrucks bei irgendeiner Werteanordnung gleich F ist, dann wissen wir auf alle Fälle das folgende:

$$\{[M \xrightarrow[W]{3} (G \wedge \sim K)] \wedge [V \xrightarrow[W]{2} \sim H]\} \xrightarrow[F]{1} [(V \wedge M) \xrightarrow[F]{2} \sim H]$$

Die Zahlen bezeichnen die Reihenfolge:

Die 1 schreiben wir unter die Ausgangshypothese,

die 2 unter die sich daraus ergebenden Wahrheitswerte,

die 3 unter die Wahrheitswerte der Teilausdrücke, aus denen die Ausdrücke, deren Wahrheitswerte mit 2 bezeichnet wurden, zusammengesetzt sind.

In dem Vorderglied der ursprünglichen Implikation (in der geschweiften Klammer) können wir jetzt nicht eindeutig weiterkommen: Die Wahrheitswerte der Glieder einer Implikation mit dem Wahrheitswert W sind nicht eindeutig bestimmt.

In der letzten eckigen Klammer aber können wir weitergehen und die Wahrheitswerte von V, M und H bestimmen. Der Wahrheitswert des gesamten Ausdrucks in der ganzen Klammer ist nur dann gleich F, wenn die Wahrheitswerte von V, M und H gleich W sind.

Führen wir nun für den ursprünglichen Ausdruck die Untersuchung weiter:

$$\{[M \xrightarrow[W]{5} (G \wedge \sim K)] \wedge [(V \wedge \sim K) \xrightarrow[W]{3} \sim H]\} \xrightarrow[F]{1} [(V \wedge M) \xrightarrow[F]{2} \sim H]$$

Jetzt rühren wir an den wunden Punkt der geschweiften Klammer: Das Hinterglied der ersten Implikation kann nur den Wert W besitzen, denn ihr Vorderglied hat den Wert W und ebenso die ganze Implikation. In der zweiten Implikation dagegen ist es genau umgekehrt, das Hinterglied hat - wie wir sehen - den Wert F. Da aber die Implikation selbst den Wahrheitswert W hat, kann das Vorderglied ebenfalls nur den Wert F haben.

$$\{[M \xrightarrow[W]{5} (G \wedge \sim K)] \wedge [(V \wedge \sim K) \xrightarrow[W]{3} \sim H]\} \xrightarrow[F]{1} [(V \wedge M) \xrightarrow[F]{2} \sim H]$$

Nun müssen wir die Werte von G und K bestimmen. Der Wert der Konjunktion in der ersten runden Klammer ist gleich W, also ist nur folgende Werteverteilung möglich: der Wert von G und der Wert von $\sim K$ sind gleich W, der Wert von K ist also gleich F.

In der zweiten runden Klammer hingegen hat die Konjunktion den Wahrheitswert F, ihr erstes

Glied hat jedoch den Wert W , also muss der Wert des zweiten Gliedes gleich F sein: Wert von $\sim K$ gleich F , Wert von K gleich W .

Aber nun bestimmten wir vorhin genau den umgekehrten Wert für K ! Hatten wir uns irgendwo geirrt ?

Unsere Schlussweise war richtig, nur am Beginn unserer Überlegungen können wir den Fehler suchen: Es ist unmöglich, was wir annahmen; wir können den Variablen nicht solche Werte geben, dass die ganze Implikation den Wahrheitswert F hat.

Wir müssen also nicht 32 Fälle durchrechnen, sondern nur einen in entgegengesetzter Richtung. Diese eine Rechnung garantiert uns, dass die Formel in allen 32 Fällen den Wahrheitswert W hat, das heißt aber, dass die Schlussfigur richtig ist. Aus den Prämissen folgt also:

Wenn ich das alte Radio veräußere und das Motorrad kaufe, dann kann ich zu Hause nicht die Übertragung vom Wettkampf hören.

Die Beweisart, die wir hier anwandten, benutzt man in der Mathematik sehr oft. Man nennt sie indirekten Beweis.

Aufgaben

1. Auf Seite 70/71 schrieben wir eine Schlussfigur auf dreierlei Art [siehe (3), (4) und (S)].

(1) Ist diese Schlussfigur richtig ?

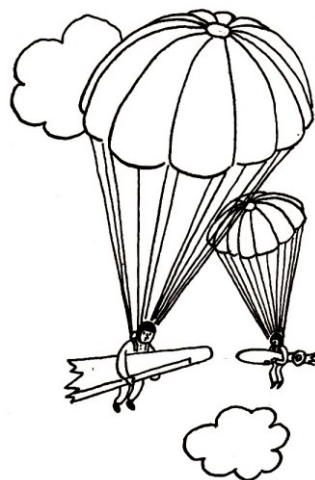
(2) Ist die Umkehrung der Schlussfigur in der Gestalt (4) richtig?

(3) Welche wertverlaufsgleichen Ausdrücke ergeben sich für die genannten Schlussfiguren ?

2. An den folgenden Schlüssen ist leicht erkennbar, ob sie richtig sind oder nicht. Schreiben Sie die Schlussfiguren eines jeden Schlusses auf, den Sie für richtig halten! Beweisen Sie die Richtigkeit!

- (1) Wenn die Tragfläche des Flugzeuges abbricht oder sich der Motor entzündet, dann ist das Leben der Reisenden in Gefahr.

Wenn die Tragfläche des Flugzeuges abbricht, dann ist das Leben der Reisenden in Gefahr.



- (2) Wenn sich die Tinte verfärbt, dann füllte ich meinen Füllhalter aus einer Flasche mit schlechter Tinte oder ich habe meinen Füllhalter nicht gründlich genug ausgewaschen.

Wenn sich die Tinte verfärbt, dann füllte ich meinen Füllhalter aus einer Flasche mit schlechter Tinte.

- (3) Wenn genug Regen fällt und wir reichlich sprengen, dann wird es voraussichtlich eine gute Ernte geben.

Wenn genug Regen fällt, dann wird es voraussichtlich eine gute Ernte geben.



- (4) Wenn es eine gute Ernte geben wird, dann ist der Wert der Arbeitseinheit hoch, und dann können wir das Klavier kaufen.

Wenn es eine gute Ernte geben wird, dann können wir das Klavier kaufen.

6 Wir suchen die Konklusion

6.1 Wir kennen die Prämissen und suchen die Konklusion

Jetzt sind wir darin schon große Meister, von einer gegebenen Konklusion zu entscheiden, ob sie aus den gegebenen Prämissen folgt oder nicht. Wir stellen dazu zum Beispiel die Wahrheitstafel der Konjunktion der Prämissen auf und sehen nach, ob dort, wo in ihrer Wertetafel der Wahrheitswert W steht, auch der Wahrheitswert der Konklusion gleich W ist.

Wie wir bewiesen haben, führt die folgende Methode zu demselben Ergebnis: Wir fertigen die Wahrheitstafel einer Implikation an, deren Vorderglied die Konjunktion der Prämissen, deren Hinterglied die Konklusion ist. Und nun sehen wir nach, ob diese Implikation allgemeingültig ist, das heißt, ob sie stets den Wahrheitswert W besitzt.

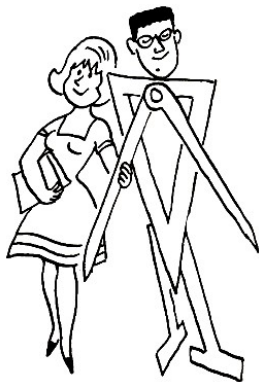
Leider wissen wir nicht immer vorher, wie die voraussichtliche Konklusion lautet. Manchmal müssen wir sie erst finden.

Sehen wir zu, ob wir nicht wenigstens in einfachen Fällen dahinterkommen können, was aus den gegebenen Prämissen folgt.

6.2 Wer begleitet Susi ?

Betrachten wir zuerst ein ganz einfaches Beispiel. Ich gehe auf der Straße und erblicke auf der anderen Straßenseite ein Mädchen und einen Jungen. Sie sind noch so weit entfernt, dass ich niemanden erkennen kann, aber das Mädchen könnte Susi sein.

Ich stelle für mich fest:



"Wenn es Susi ist, dann begleitet sie Kurt oder dieser Ingenieurstudent, mit dem ich sie seit einigen Tagen häufig zusammen sehe."

Sie kommen näher. Ich erkenne:

"Das ist Susi!"

Jetzt sehe ich auch den Jungen besser.

"Es ist nicht Kurt, der sie begleitet."

Was folgt daraus ?

Der Leser weiß sicherlich schon die Antwort. Aber wir geben auf Vermutungen nichts. Sehen wir lieber, wie nicht nur ein nachdenkender Mensch antworten würde, sondern auch eine Maschine. Schreiben wir die Prämissen abgekürzt auf:

$$S \rightarrow (K \vee I)$$

$$S$$

$$\sim K$$

Nur der Fall interessiert uns, wenn der Wert jeder Prämisse gleich W ist. Den Wert von zwei Variablen können wir sofort bestimmen:

Einerseits ist der Wert von S gleich W , andererseits ist der Wert von $\sim K$ gleich W , das heißt, der Wert von K ist F . Das Vorderglied der ersten Prämisse ist also wahr. Beachten wir weiterhin, dass diese erste Prämisse selbst auch wahr ist:

Wert von $W \rightarrow (F \vee I)$ gleich W .

Stellen wir uns eine Maschine vor. Wie "schließt" sie weiter ? Sie "sieht" in dem Vorderglied

der Implikation den Wert W . Sie "weiß", dass die erste Prämisse nur dann wahr ist, wenn der Wert des Hintergliedes gleichfalls W ist. Sie notiert automatisch, dass das Hinterglied, $K \vee I$, den Wert W hat: Wert von $F \vee I$ gleich W .

Wann kann eine Alternative wahr sein, wenn eines ihrer Glieder falsch ist? Nur dann, wenn ihr anderes Glied wahr ist: Daraus folgt, dass der Wert von I gleich W ist. Wir erhalten: Wenn der Wert jeder Prämisse wahr ist, dann ist auch der Wahrheitswert von I gleich W . Das heißt, aus diesen Prämissen folgt, dass der Ingenieurstudent Susi begleitet:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow (K \vee I) \\ S \\ \sim K \\ \hline I \end{array}$$

6.3 Dasselbe mit anderen Bezeichnungen

Wenn die Formeln schwieriger werden, dann ist es eintönig, jede Möglichkeit immer wieder aufzuschreiben mit dem einen Unterschied, dass wir an die Stelle von manchen Variablen ihren schon festgestellten Wahrheitswert schreiben. Für die Rationalisierung unserer Arbeit bieten sich mehrere Möglichkeiten an.

Eine Möglichkeit besteht darin, dass wir die einzelnen Schritte mit Bleistift auf Papier schreiben und dann wieder ausradieren, oder sie mit dem Schwamm löschen, wenn wir sie mit Kreide an eine Tafel schreiben. Der Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass wir, wenn wir einen Fehler machten, noch einmal von vorn beginnen müssten, weil die dazwischenliegenden Schritte fehlen; die Kontrolle ist schwerer, besonders wenn die Ausdrücke kompliziert sind.

Eine andere Möglichkeit: Wir radieren (wischen) die Wahrheitswerte, die die Variablen annehmen, nicht weg, sondern schreiben die ermittelten Wahrheitswerte darunter. Die im vorangehenden Abschnitt vorgetragene Ableitung hat dann folgendes Aussehen:

Zuerst schreiben wir die Prämissen recht weit auseinander, dass auch Platz für die Wahrheitswerte vorhanden ist. Auf dem Papier (oder auf der Tafel) schreiben wir diese Ausdrücke nicht mehrmals auf. (Hier im Buch kommen sie nur deshalb öfter vor, weil wir filmartig vorführen wollen, wie die Ableitung vor sich geht):

$$\begin{array}{l} S \rightarrow (K \vee I) \\ S \\ \sim K \end{array}$$

Wir schreiben unter jede Prämisse (wenn sie eine Operation enthält, dann unter das zuletzt angewandte Operationszeichen, wenn sie nur aus einer einzigen Variablen besteht, dann unter die Variable) den Wahrheitswert W .

$$\begin{array}{l} S \rightarrow (K \vee I) \\ W \\ S \\ W \\ \sim K \\ W \end{array}$$

Aus der zweiten Prämisse können wir unmittelbar den Wahrheitswert der Variablen S ablesen, und auf Grund der dritten Prämisse können wir sogleich auch den der Variablen K bestimmen. Diese schreiben wir überall unter S bzw. unter K :

$$\begin{array}{l}
 S \rightarrow (K \vee I) \\
 W \ W \ F \\
 S \\
 W \\
 \sim K \\
 W \ F
 \end{array}$$

Die erste Prämisse - sie ist eine wahre Implikation, deren Vorderglied wahr ist - hat auch ein wahres Hinterglied. Wir schreiben also W unter das Operationszeichen dieses Hinterglied:

$$\begin{array}{l}
 S \rightarrow (K \vee I) \\
 W \ W \ F \ W \\
 S \\
 W \\
 \sim K \\
 W \ F
 \end{array}$$

Das Hinterglied der ersten Prämisse ist eine solche Alternative, deren eine Variable den Wert F hat. Somit muss die andere Variable in dieser Alternative den Wert W haben. Unter I schreiben wir also W:

$$\begin{array}{l}
 S \rightarrow (K \vee I) \\
 W \ W \ F \ W \ W \\
 S \\
 W \\
 \sim K \\
 W \ F
 \end{array}$$

Von der Annahme ausgehend, dass jede Prämisse wahr ist, konnten wir die Wahrheitswerte aller Variablen bestimmen. Aus dem Wahrheitswert der zweiten Prämisse ergab sich unmittelbar der Wert von S, aus dem Wahrheitswert der dritten Prämisse sofort der Wahrheitswert von K. Als neues Ergebnis erhielten wir also den Wahrheitswert der Variablen I. Das heißt, wenn die gegebenen Prämissen wahr sind, folgt, dass der Wahrheitswert von I gleich W ist; die Konklusion ist also I:

$$\begin{array}{l}
 S \rightarrow (K \vee I) \\
 W \ W \ F \ W \ W \\
 S \\
 W \\
 \sim K \\
 W \ F \\
 \hline
 I
 \end{array}$$

Freilich hätten wir als Konklusion auch S oder $\sim K$ hinschreiben können, wir hätten auch die erste Prämisse völlig hinschreiben können, ebenso aber auch die aus diesen Prämissen gebildeten Konjunktionen. Aber das sind keine interessanten Konklusionen, ja es versteht sich von selbst, dass sich eine Prämisse aus sich selbst ergibt (auch dann, wenn es noch andere Prämissen gibt).

Interesse verdient nur die Konklusion I, die wir niederschrieben.

6.4 Direkter Schluss kontra Gleichung

Nicht ohne Grund wird der Leser nach dem vorangegangenen Beispiel zu der Feststellung gelangen, die man mit Worten etwa wie folgt ausdrücken kann:

"Die mathematische Logik ist die Wissenschaft, mit deren Hilfe man einfache Schlüsse auf schwierige Weise bewältigen kann."

Dasselbe freilich kann man mit gleichem Recht auch von der Algebra sagen. Als Beispiel betrachten wir die folgende Aufgabe:

"In einem Hof sind Hühner und Hasen. Insgesamt haben sie sieben Köpfe und zwanzig Beine. Wieviel Hühner und wieviel Hasen befinden sich auf dem Hof?"

Wir können diese Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung oder auch eines Gleichungssystems lösen. Bezeichnen wir die Anzahl der Hühner mit t , die der Hasen mit n . Dann gilt

für die Anzahl der Köpfe: $t + n = 7$,
für die Anzahl der Beine: $2t + 4n = 20$.

Die erste Gleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit 2:

$$2t + 2n = 14$$

Diese Gleichung subtrahieren wir von der Gleichung $2t + 4n = 20$ in der Weise, dass wir die linke Seite von der linken und die rechte Seite von der rechten subtrahieren:

$$2n = 6$$

Daraus folgt:

$$n = 3$$

Substituieren wir diesen Wert für n in die erste Gleichung:

$$t + 3 = 7$$

Daraus folgt:

$$t = 4$$

Auf diese Art lösen die Sechzehnjährigen diese Aufgabe. Die Achtjährigen hingegen lösen sie so:

Ein jedes Tier hat einen Kopf. Wir zeichnen:



Jedes Tier hat wenigstens zwei Beine; zeichnen wir auch das hin:



Von den zwanzig Beinen verteilen wir 14, bleiben noch 6. Diese zeichnen wir noch neben 3 Köpfe hin. Das werden die Hasen.



Es ist also zu sehen, dass es drei Hasen und vier Hühner sind.

Welche Lösung gefällt dem Leser besser? Die des Achtjährigen ? Mir auch. Auf Grund dieser Überlegung ist denkbar, dass jemand zu dem folgenden Standpunkt gelangt:

"Durch den Unterricht in Algebra zwingen wir das Denken der Kinder in die Fesseln des Formalismus. Entwickeln wir doch lieber eine vernünftige natürliche Denkart, damit die Kinder leichter und schneller die Aufgaben lösen lernen und sich nicht mit irgendeiner Gleichung oder mit dem Gleichungssystem herumplagen müssen. Lassen wir die Gleichungen, hoch lebe der gesunde Menschenverstand!"

Ja ? Nun, dann wollen wir die Kinder mit klugem, gesundem Menschenverstand beispielsweise diese Aufgabe lösen lassen:

"Die zwei Enden eines zwölf Meter langen Seiles befestigt man an je einer Säule, das eine um 2 Meter höher als das andere. Der Abstand der Säulen beträgt zehn Meter. Am dritten Teil der Seillänge vom niedriger befestigten Seilende entfernt hängen wir eine Masse an. Um wieviel zieht sie das Seil herunter ?"

Diese Aufgabe ist charakteristisch für die Aufgaben aus dem Lehrbuch der 2. Klasse des Gymnasiums. Sie führt zu einer Gleichung zweiten Grades, ihr Ergebnis lautet

$$\frac{\sqrt{1375} - 7}{13} \text{ m}$$

(auf den Zentimeter genau: 2,31 m).

Hier weiß der gesunde Menschenverstand nur noch herumzustolpern.

Wenn wir eine solche Aufgabe auch ohne Gleichung zu lösen verstehen, desto besser. Aber oft ist die Gleichung unentbehrlich. Das Lösen von Gleichungen können wir nicht am allerschwersten Fall erlernen. Deshalb lohnt es sich, manchmal auch solche Aufgaben zu suchen, zu deren Lösung man auch ohne das Lösen einer Gleichung gelangt.

Das Lösen von Aufgaben mit Gleichungen oder ohne Gleichungen ist nur ein Beispiel von vielen.

Dasselbe Verhältnis besteht zwischen Kopfrechnen und schriftlichem Rechnen:

Es lohnt sich nicht, 999 und 786 schriftlich zu addieren; wer ein wenig Grüzte im Kopf hat, weiß gleich, dass die Summe um 1 geringer ist als 1786, das heißt genau 1785. Aber schon bei der Addition von 97856 und 36577 ist es überflüssig, unsere Köpfe zu bemühen; leichter ist es, die Zahlen untereinanderzuschreiben und nach der guten alten Methode die Addition zu beenden.

Entsprechend ist es auch mit der Logik. Ein Stückchen kommen wir mit dem gesunden Verstand weiter, und die Lösung mit gesundem Verstand ist leichter als mit einem Formalismus. Aber danach gelangen wir zu einem Punkt - früher oder später -, an dem der gesunde Verstand müde wird und sich die Gedanken verwirren. Zu diesem Zeitpunkt führen diese verachteten Ausdrücke und mechanischen Verfahren zum Ziel.

Wichtig ist die Tatsache, dass wir gegebenenfalls wieder unseren gesunden Verstand zu Hilfe nehmen können.

6.5 Wer ist der Täter?

Sehen wir uns jetzt ein Beispiel an, in dem die logische Formelsprache, wenn auch nicht unentbehrlich, aber auf alle Fälle brauchbar ist.



In einem Warenhaus wurde eingebrochen. Die Untersuchung ergab folgende Feststellungen:

Wenn der Täter ein Mann ist, dann ist er von kleinem Wuchs. Wenn er von kleinem Wuchs ist, dann stieg er durch das Fenster ein.

Der Täter ist ein Mann, oder er trug zumindest Männerkleidung. Wenn er Männerkleidung trug, dann vorausgesetzt, dass die Aussage des Augenzeugen zuverlässig ist, stieg er durch das Fenster ein.

Die Tatortbesichtigung ergab außerdem, dass der Täter nicht durch das Fenster eingedrungen war. Unsere Aufgabe ist es nun, auf Grund aller dieser Feststellungen den Täter zu ermitteln.

Beispielsweise können wir zu entscheiden versuchen, ob der Täter ein Mann ist oder nicht, ob er Männerkleidung trug oder nicht, ob die Aussage des Augenzeugen zuverlässig ist oder nicht. Natürlich können wir nicht im voraus sicher darin sein, dass wir auf alle diese Fragen - oder nur auf eine von ihnen - eine Antwort bekommen.

Denkbar ist auch, dass wir nur feststellen können, welche Möglichkeiten es gibt. (Beispielsweise: Entweder trug er Männerkleidung und ist von kleinem Wuchs, oder wenn nicht, dann ist die Aussage des Augenzeugen unzuverlässig. Viele andere solcher zusammengesetzten Konklusionen sind auch denkbar.)

Also los, der Leser sei Detektiv; versuchen wir festzustellen, was auf Grund der Angaben ermittelt werden kann! Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir die folgenden Abkürzungen:

- M = Der Täter ist ein Mann;
- K = Der Täter ist von kleinem Wuchs;
- S = Er stieg durch das Fenster ein;
- A = Er trug Männerkleidung;
- Z = Die Aussage des Augenzeugen ist zuverlässig.

Unsere Prämissen sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
 M &\rightarrow K \\
 K &\rightarrow S \\
 M &\vee A \\
 A &\rightarrow (Z \rightarrow S) \\
 &\sim S
 \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir uns nicht mehr um die Bedeutung der Buchstaben kümmern; wir können mechanisch denken. Wir setzen voraus: jede der Prämissen ist wahr. Also hat S den Wahrheitswert F. Wo nun S vorkommt, schreiben wir an seine Stelle den Wahrheitswert F. Die letzte Prämisse können wir jetzt bereits fortlassen.

$$\begin{aligned} M &\rightarrow K \\ K &\rightarrow F \\ M \vee A \\ A &\rightarrow (Z \rightarrow F) \end{aligned}$$

In der zweiten Prämisse ist das Hinterglied der Implikation falsch. Also kann die Implikation nur dann wahr sein, wenn auch ihr Vorderglied falsch ist. Daraus folgt, dass der Wert von K gleich F ist. Und diesen Wert können wir an die Stelle von K schreiben.

Schon jetzt erledigten wir auch die zweite Prämisse: Die für uns nichtssagende Aussage $F \rightarrow F$, die übriggeblieben ist, schreiben wir nicht mehr nieder:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow F \\ M \vee A \\ A &\rightarrow (Z \rightarrow F) \end{aligned}$$

(Stoppen wir für einen Moment die Maschine, und bedenken wir auch mit dem gesunden Verstand, warum der Wert von K gleich F sein muss. Deshalb, weil, wenn K wahr wäre, auch S wahr wäre. Aber S ist falsch, das sagte die letzte Prämisse. Wir wendeten einen indirekten Schluss an.)

Daraus, dass die Implikation $M \rightarrow F$ wahr ist, folgt, dass der Wert von M gleich F ist. Wir schreiben das an die Stelle von M (die aus der ersten Prämisse entstehende nichtssagende Aussage können wir wieder weglassen):

$$\begin{aligned} F \vee A \\ A &\rightarrow (Z \rightarrow F) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der noch verbliebenen zwei Prämissen können wir aus der ersten sogleich den Wert der Variablen A ermitteln. Diese Prämisse nämlich — wie alle Prämissen - setzen wir als wahr voraus, aber das eine ihrer Glieder ist falsch, also muss das andere Glied wahr sein: Wert von A gleich W .

Uns bleibt nun noch eine einzige Prämisse:

$$W \rightarrow (Z \rightarrow F)$$

Aus dieser einen Prämisse können wir zu guter Letzt den Wert von Z bestimmen. Das Vorderglied der Implikation ist wahr, wir setzten voraus, dass die Implikation, die Prämisse, selbst auch wahr ist, also muss auch das Hinterglied wahr sein. Aber dieses Hinterglied ist selbst eine Implikation, deren Hinterglied falsch ist.

Eine solche Implikation kann nur dann wahr sein, wenn ihr Vorderglied falsch ist. Also gilt: Wert von Z gleich F . Es war unser Glück, wir konnten die Wahrheitswerte aller Variablen eindeutig bestimmen.

Der Einbrecher ist noch nicht in unserer Hand, seinen Namen wissen wir nicht, aber einige wichtige Tatsachen klären sich auf:

1. M ist falsch, das heißt, der Täter ist kein Mann;
2. K ist falsch, das heißt, der Täter ist nicht von kleinem Wuchs,
3. A ist wahr, das heißt, der Täter trug Männerkleidung,
4. Z ist falsch, das heißt, die Aussage des Augenzeugen ist nicht zuverlässig.

Die Rolle der Logik ist hierbei zu Ende: Aus den vorliegenden Angaben kann man nur so viel feststellen, wie oben angegeben wurde. Das ist nicht alles, aber auch nicht wenig.

Wenn wir die Ausdrücke nicht mehrmals aufschreiben wollen, dann können wir die Ableitung in folgender Form wiedergeben:

<p>1. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $K \rightarrow S$ $M \vee A$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $\sim S$ W	<p>2. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $K \rightarrow S$ $M \vee A$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $\sim S$ $W \quad F$	<p>3. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $K \rightarrow S$ $M \vee A$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $\sim S$ $W \quad F$	<p>4. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $K \rightarrow S$ $M \vee A$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $\sim S$ $W \quad F$
<p>5. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $F \quad W \quad F$ $K \rightarrow S$ $F \quad W \quad F$ $M \vee A$ $F \quad W \quad W$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $W \quad W \quad F$ $\sim S$ $W \quad F$	<p>6. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $F \quad W \quad F$ $K \rightarrow S$ $F \quad W \quad F$ $M \vee A$ $F \quad W \quad W$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $W \quad W \quad W \quad F$ $\sim S$ $W \quad F$	<p>7. Schritt</p> $M \rightarrow K$ $F \quad W \quad F$ $K \rightarrow S$ $F \quad W \quad F$ $M \vee A$ $F \quad W \quad W$ $A \rightarrow (Z \rightarrow S)$ $W \quad W \quad F \quad W \quad F$ $\sim S$ $W \quad F$	

6.6 Nicht immer ist entscheidbar, welchen Wahrheitswert die Variablen besitzen

'Wenn das Gerät richtig angeschlossen ist und die Spannung 220 Volt beträgt, so ist das Gerät entzwei oder es beginnt sogleich zu funktionieren.'

'Der Anschluss ist in Ordnung aber das Gerät beginnt nicht zu funktionieren.'

Was folgt daraus ? Schreiben wir die Prämissen symbolisch auf

$$(A \wedge S) \rightarrow (Z \vee B)$$

$$A \wedge \sim B$$

Die zweite Prämisse können wir in zwei getrennte Prämissen zerlegen. Daraus erhalten wir sogleich den Wert von A und B : Wert von A gleich W , Wert von B gleich F . Diese Werte können wir auch in die erste Prämisse an die Stelle der Variablen setzen:

$$(W \wedge S) \rightarrow (Z \vee F)$$

(Zum gleichen Ergebnis wären wir auch dann gelangt, wenn wir die zweite Prämisse unverändert gelassen hätten. Ist der Leser bereits selbst darauf gekommen?)

Betrachten wir jetzt die erste Prämisse. Ihr Vorderglied ist eine Konjunktion, deren erstes Glied wahr ist. Der Wert der Konjunktion kann W oder F sein, und zwar je nachdem, ob der Wert des zweiten Gliedes W oder F ist. Kurz gesagt:

Wir können die Beziehung $W \wedge S \equiv S$ anwenden (mit anderen Buchstaben und anderer Reihenfolge der Glieder siehe (W 26)). Auf das Hinterglied können wir dagegen die Beziehung $Z \vee F = Z$ anwenden (siehe (W 19)). Von der ersten Prämisse verbleibt also

$$S \rightarrow Z$$

Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist diese Implikation auch wahr, aber wir wissen nicht, ob S oder ob Z wahr ist. Aus den Werten der Prämissen ergeben sich also nicht die Wahrheitswerte von S und Z , aber es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen S und Z . Mit anderen Worten:

Wenn die Spannung 220 Volt beträgt, so ist das Gerät entzwei.

Drücken wir diesen Sachverhalt mit Hilfe der Kontraposition aus (W7):

Wenn das Gerät nicht entzwei ist, so beträgt die Spannung nicht 220 Volt.

Wenn wir die Ausdrücke nur einmal abschreiben, dann erhalten wir folgendes:

$(A \wedge S) \rightarrow (Z \vee B)$	$(A \wedge S) \rightarrow (Z \vee B)$	$(A \wedge S) \rightarrow (Z \vee B)$
W	W	WS
A	A	W
W	W	W
$\sim B$	$\sim B$	$\sim B$
W	W	W
F	F	F

6.7 Logisches Schließen durch Probieren

In unseren bisherigen Beispielen kamen wir nie an einen Scheideweg. Von den Prämissen ausgehend, gelangten wir immer eindeutig zu irgendeiner Konklusion. Aber das ist nicht immer so. Es kommt vor, dass wir herumraten müssen, als wenn wir die Wurzeln einer Gleichung durch Herumprobieren würden bestimmen wollen. Zum Glück kann in der Logik jede Variable nur zwei Werte haben, und so führt hier die Lösung durch Probieren schneller zum Ziel.

Betrachten wir zum Beispiel die folgenden Prämissen:

Wenn der Himmel wolzig ist, oder wenn der Mond nicht zur Zeit aufgeht, so sehe ich die Mondfinsternis nicht.

Wenn das Wetter sich nicht ändert, so ist der Himmel wolzig.

Wenn das Wetter sich ändert, so sehe ich die Mondfinsternis.

Was folgt aus diesen Prämissen? Schreiben wir die Prämissen symbolisch auf :

$$\begin{aligned} (H \vee \sim Z) &\rightarrow \sim M \\ \sim A &\rightarrow H \\ A &\rightarrow M \end{aligned}$$

Wir kennen von keiner Variablen ihren Wahrheitswert, also machen wir die Probe.

Wir nehmen an, dass der Himmel bewölkt sein wird, das heißt, der Wert von H ist gleich W.

Was folgt daraus ?

Betrachten wir zunächst die erste Prämisse:

$$(W \vee \sim Z) \rightarrow \sim M$$

Das Vorderglied ist eine Alternative, deren eines Glied wahr ist. Also ist das ganze Vorderglied wahr.

$$W \rightarrow \sim M$$

Die Implikation kann aber in diesem Fall nur wahr sein, wenn ihr Hinterglied wahr ist, das heißt, wenn der Wert von M gleich F ist. Wir setzen die Werte von H und M in die beiden anderen Prämissen ein:

$$\begin{aligned} \sim A &\rightarrow W \\ A &\rightarrow F \end{aligned}$$

Die erste Implikation gibt keine Aufklärung über den Wert von A , denn wenn das Hinterglied einer Implikation wahr ist, dann ist diese Implikation stets wahr, gleichgültig, welchen Wahrheitswert das Vorderglied hat.

Aber die zweite Implikation legt fest, dass A den Wahrheitswert F hat; nur in diesem Fall kann die Prämisse wahr sein. Was erfahren wir daraus ? Wir erfahren folgendes:

Wenn H den Wahrheitswert W hat, dann haben M und A den Wahrheitswert F. Das heißt:

Wenn der Himmel bewölkt ist, dann sehe ich die Mondfinsternis nicht, und das Wetter ändert sich nicht.

Aus den Prämissen erhielten wir also die Konklusion:

$$H \rightarrow (\sim M \wedge \sim A)$$

Auch andere zusammengesetzte Konklusionen ergeben sich aus diesen Prämissen.

6.8 Haben wir richtig geschlossen?

Durchdenken wir noch einmal, wie wir im vorigen Beispiel geschlossen haben. Wir nahmen an, dass W der Wahrheitswert von H ist. Das bedeutet dasselbe, als wenn wir in der üblichen Schreibweise H zu den anderen Prämissen hinzugefügt hätten:

$$\begin{aligned} (H \vee \sim Z) &\rightarrow \sim M \\ \sim A &\rightarrow H \\ A &\rightarrow M \\ H & \end{aligned}$$

Aus diesen Prämissen folgt auch $\sim M$ und $\sim A$. (Wir schreiben an die Stelle von H den Wahrheitswert W und schließen weiter wie vorher.) Ist unsere Schlussweise auch richtig, wenn wir den Wahrheitswert von H nicht als gegeben annehmen und wenn wir dagegen aus den weiteren drei Prämissen auf

$$H \rightarrow \sim M \quad \text{und} \quad H \rightarrow \sim A$$

schließen ?

Allgemein formuliert: Wenn die Schlussfigur

$$\begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \hline \mathbf{K} \end{array}$$

richtig ist, ist dann auch der Schluss

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{K}}$$

richtig ?

(P bedeutet hier die Konjunktion der ursprünglichen Prämissen, Q aber eine nachträgliche Annahme, die ebenfalls vielleicht aus einem zusammengesetzten Ausdruck besteht und nicht nur aus einer einzigen Variablen, wie vorhin H .) Die Richtigkeit der ersten Schlussfigur ist gleichbedeutend mit

$$(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{K} \equiv \mathbf{W}$$

die der zweiten aber mit

$$\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{K}) \equiv \mathbf{W}$$

Wir wissen aber, dass gilt:

$$(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{K} \equiv \mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{K})$$

Ist das hier nicht irgendein Betrug? In der dort genannten Beziehung bedeuten die Buchstaben Variable, hier dagegen - wir sagten es bereits - können **P**, **Q** und **K** stellvertretend für zusammengesetzte Ausdrücke stehen.

Erinnern wir uns jedoch daran, was wir beim Besprechen der Substitution sagten: Wenn wir in wertverlaufsgleichen Ausdrücken an die Stelle einer oder mehrerer Variablen einen beliebigen Ausdruck setzen (an Stellen übereinstimmender Buchstaben überall denselben Ausdruck), dann erhalten wir wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke. Also ist die aufgeschriebene Beziehung auch dann richtig, wenn darin **P**, **Q** und **K** beliebige Ausdrücke bedeuten.

Wenn also $(P \wedge Q) \rightarrow K \equiv W$ gilt, dann gilt gleichzeitig $P \rightarrow (Q \rightarrow K) \equiv W$, das heißt, wenn die Schlussfigur

$$\frac{P \quad Q}{K}$$

richtig ist, dann ist auch die Schlussfigur

$$\frac{P}{Q \rightarrow K}$$

richtig.⁴²

(Freilich ist das auch umkehrbar, jedoch ist ein Beweis nicht nötig, denn wir verwendeten diese Tatsache bei der Lösung der Aufgabe, die von der Mondfinsternis handelte.)

6.9 Logisches Schließen ohne Herumprobieren

Kommen zwischen den Prämissen selbständige Variable vor, ob negiert oder nicht negiert, so können wir unsere Überlegungen ohne Herumprobieren beginnen. (Das bedeutet nicht, dass wir später möglicherweise nicht steckenbleiben und schließlich doch herumprobieren müssen.)

Wenn aber alle Prämissen zusammengesetzte Ausdrücke sind - das heißt, wenn sie aus mehreren Variablen bestehen -, können wir nicht anders beginnen als herumzuprobieren. Und doch gibt es den Fall, dass wir scheinbar auch ohne Herumprobieren leichter durch geschicktes Schließen zum Ziel gelangen. Betrachten wir das folgende einfache Beispiel:



⁴²Dieser Satz ist ein einfacher spezieller Fall eines sehr wichtigen Satzes der mathematischen Logik, des sogenannten Deduktionstheorems.

Wenn schönes Wetter wird, machen wir einen Ausflug. Wenn wir keinen Ausflug machen, werden wir nicht nass. Wenn das Wetter nicht schön wird, werden wir nass.

Was folgt daraus? Symbolisch:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ \sim A &\rightarrow \sim N \\ \sim S &\rightarrow N \end{aligned}$$

Oder mit Hilfe der Alternative ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \sim S &\vee A \\ A &\vee \sim N \\ S &\vee N \end{aligned}$$

Es gibt also drei Prämissen. Jede dieser Alternativen ist wahr. Also ist in jeder Reihe mindestens eine Aussage wahr, insgesamt sind wenigstens drei Aussagen wahr. Aber von S und $\sim S$ ist nur die eine wahr, auch von N und $\sim N$. Das sind insgesamt zwei wahre Aussagen. Welches ist die dritte?

Es kann nur A sein, weil eine andere Aussage nicht mehr vorhanden ist. Also machen wir einen Ausflug.

Leicht können wir zu dieser Konklusion durch Herumprobieren mit Fallunterscheidung gelangen, siehe Aufgabe 2.

Aufgaben

1. Welche weiteren Konklusionen können Sie aus den auf Seite 88 aufgeführten Prämissen ziehen? Gibt es unter ihnen einstellige Konklusionen?

(Mit anderen Worten: Können Sie den Wahrheitswert irgendeiner Variablen aus der Annahme, dass die Prämissen wahr sind, unmittelbar ermitteln?)

2. Lösen Sie das allerletzte Musterbeispiel (S. 91) auf die in den vorigen Beispielen angewandte Weise, auch durch Probieren!



3. 'Wenn meine Uhr richtig geht, dann treffe ich zur Beginn der Vorstellung ein, falls die Straßenbahn pünktlich kommt.'
'Die Straßenbahn kommt pünktlich, doch ich treffe nicht vor Beginn der Vorstellung ein.'

Welche Konklusion können wir aus diesen Prämissen ziehen? (Bestätigen Sie diese auch mit der formalen Schlussweise !)

4. 'Wenn wir die Ernte nicht zur Zeit beenden, dann fällt viel Korn aus.'

'Wenn viel Korn ausfällt, dann erfüllen wir den Plan nicht.'

'Wenn wir den Plan nicht erfüllen, dann erhalten wir keine Prämie.'

'Wenn wir keine Prämie erhalten, dann können wir die Küchenmöbel nicht kaufen.'

'Wir kaufen die Küchenmöbel.'

Was folgt daraus ? Beenden wir die Ernte zur Zeit ? Fällt viel Korn aus ? Erfüllen wir den Plan ? Erhalten wir keine Prämie ?

5. 'Wenn ich morgen abend zu Onkel Johann gehe, dann treffe ich dort Tante Anna an, aber ich treffe mich nicht mit Elisabeth.'

'Wenn ich mich nicht mit Elisabeth treffe, dann kann ich ihr nicht die Botschaft ausrichten.'

'Ich übergebe ihr die Botschaft.'

Was folgt daraus ?

6. 'Wenn sie mich nicht übervorteilten, dann habe ich noch meinen Hunderter. Es ist unmöglich, dass sie mich übervorteilten oder dass ich das Geld verlor.'

'Wenn ich das Geld nicht in meine Brieftasche tat, dann verlor ich es sicher.'

Was folgt daraus ?

7. 'Wenn Gabriel nicht zur Zeit ankommt, oder er hat das Seil nicht bei sich, dann können wir nicht auf den Felsen klettern oder nur unter großer Anstrengung.'

'Wenn Gabriel das Seil nicht bei sich hat, oder wenn wir nicht auf den Felsen klettern können, dann wird Paul böse. Aber Gabriel kommt zur Zeit an, und Paul wird nicht böse.'

Was folgt daraus ?



8. 'Wenn wir nach Tihany fahren, dann, aber nur dann fahren wir auch nach Füred.'

'Wenn wir nicht nach Almadi fahren, dann fahren wir auch nicht nach Füred.'

'Es ist sicher, dass wir nicht nach Almadi und nach Tihany fahren, aber wir fahren nach Almadi oder nach Tihany.'

Wohin fahren wir also ? Nach Tihany? Nach Füred ? Nach Almadi ? An mehrere Orte ? An keinen dieser Orte ?

9. Das beginnende Beispiel (Wenn ich das Motorrad kaufe ...) ist auch auf folgende Art zu lösen: Wir nehmen das Vorderglied der Konklusion als weitere Prämisse hinzu.

7 Die Brücke von der Theorie zur Praxis

7.1 Wodurch werden praktische Anwendungen ermöglicht?

In dem knappen Rahmen unseres Buches können wir nicht nur annähernd ein Bild von der praktischen Anwendung der mathematischen Logik geben. Aber kurz müssen wir dennoch hier in diesem letzten Kapitel darauf hinweisen, wodurch unter anderem diese praktischen Anwendungen ermöglicht werden.

Die Antwort darauf lautet kurz gesagt: Durch die weitgehende Analogie der geistigen und der materiellen Prozesse.

Für denjenigen, der weiß, dass hinter jedem geistigen Prozess ein materieller Prozess steht - die Tätigkeit der Hirnzellen -, ist auch diese Analogie nicht merkwürdig.

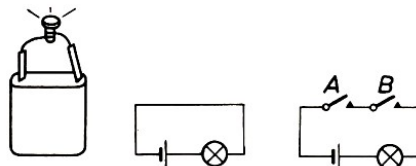
Eher ist es erstaunlich, wie einfach die Verbindung zwischen den Operationen der mathematischen Logik und den in der Arbeit des Gehirns eine große Rolle spielenden elektrischen Stromkreisen ist. Die Gelehrten kennen den Mechanismus und die Wirkungsgrundsätze des Gehirns, dieses bewundernswürdigen Organe, ja erst in kleinem Umfang, und manche seiner Funktionen wird vielleicht niemals eine Maschine ausüben können.

Einer der allergrößten wissenschaftlichen Erfolge unseres Zeitalters besteht darin, und das widerspricht keineswegs dem vorher Gesagten, dass die für den Menschen durch den Menschen geschaffenen "denkenden" Maschinen einen immer größeren Anteil der Arbeit des Gehirns verrichten können.

Dabei spielen die elektrischen Stromkreise die allergrößte Rolle. Sprechen wir also kurz von diesen, aber besonders davon, in welcher Beziehung sie zur Logik stehen.

7.2 Die Konjunktion und die Reihenschaltung

Stellen wir uns einen Stromkreis vor: Zum Beispiel zwei Pole eines Trockenelements, die wir verbinden, indem wir eine Glühlampe zwischenschalten.



Mit Hilfe von Kontakten können wir den Stromkreis öffnen und schließen.

Wir schalten nun zwei Schalter in den Stromkreis (in der Abbildung mit *A* und *B* bezeichnet).

Wann leuchtet die Lampe auf? Dann, *wenn der Schalter A geschlossen ist und auch der Schalter B geschlossen ist.*

Diese kursiv gedruckten Aussagen - ebenso wie die Schalter selbst - können wir mit *A* und *B* bezeichnen. Die Lampe brennt dann, wenn der Wert von *A* und der von *B* gleich *W* ist (*W W*-Fall). Wenn nur eine der beiden Aussagen wahr ist (*W F*- und *F W*-Fall) oder keine von beiden wahr ist (*F F*-Fall), bleibt die Lampe dunkel.

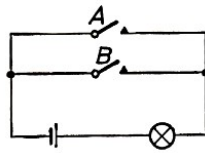
Freilich können anstatt der kursiv gedruckten Aussagen auch beliebige andere Aussagen an ihre Stelle treten. Das Aufleuchten der Lampe drückt immer aus, dass die Konjunktion der zwei Aussagen wahr ist. Wir fanden in der Schaltung die einfachste zweistellige logische Operation, die Konjunktion, wieder. So einfach wie diese Operation ist, so einfach ist auch ihre Schaltung.

Wer sich jemals mit der Physik beschäftigte, der versteht, was wir mit dem folgenden Satz ausdrücken wollen:

Die Reihenschaltung der Schalter A und B entspricht der Konjunktion zweier Aussagen A und B .

7.3 Alternative und Parallelschaltung

Es ist recht einleuchtend, nun auch zu fragen: Welcher Operation entspricht die Parallelschaltung? Den unbewanderten Lesern zuliebe beschreiben wir daher, was wir unter der Parallelschaltung verstehen.



Bezeichnen wir die Aussage der Schalter A ist geschlossen wieder mit A , die Aussage der Schalter B ist geschlossen mit B . Wann leuchtet die Lampe auf?

Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn beide Aussagen wahr sind (W W-Fall), aber auch dann, wenn nur eine von ihnen wahr, die andere falsch ist (W F- und F W-Fall), weil dann, wenn in nur einem Zweig Strom fließt, bereits der Stromkreis geschlossen ist.

Nur dann bleibt die Lampe dunkel, wenn beide Aussagen falsch sind (F F-Fall).

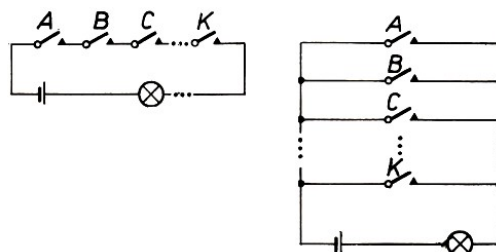
Die Parallelschaltung der Schalter A und B entspricht der Alternative zweier Aussagen A und B , der nichtausschließenden oder-Operation.

7.4 Mehr als zwei Konjunktionen oder Alternativen

Nicht nur zwei Schalter kann man in Reihe oder parallel schalten, sondern auch mehrere. Dann gelangen wir zum Schaltbild einer mehrstelligen Konjunktion bzw. mehrstelligen Alternative. Wir bezeichnen die Aussagen Der Schalter A (B, C, \dots, K) ist geschlossen⁴³ wieder mit den Buchstaben A, B, C, \dots, K .

Wann brennt nach der linken Abbildung die Lampe im Stromkreis?

Natürlich dann, wenn A und B und C, \dots und K geschlossen sind, das heißt, wenn die Aussagen A, B, C, \dots, K alle wahr sind. Mit anderen Worten dann, wenn $A \wedge B \wedge C \wedge \dots \wedge K$ wahr ist.



⁴³Das sind natürlich die Aussagen "Der Schalter A ist geschlossen" und "Der Schalter B ist geschlossen" und ... "Der Schalter K ist geschlossen". Wir schrieben sie nur aus Gründen der Platzersparnis in der oben angegebenen verkürzten Form.

Wann brennt nach der rechten Abbildung die Lampe ?

Dann, wenn von den Schaltern A, B, C, \dots, K wenigstens einer geschlossen ist, das heißt, wenn von den mit den Buchstaben A, B, C, \dots, K bezeichneten Aussagen wenigstens eine wahr ist, mit anderen Worten dann, wenn $A \vee B \vee C \vee \dots \vee K$ wahr ist.

7.5 Mehrere Operationen zugleich

Versuchen wir, ein Schaltbild für folgenden Ausdruck zu entwickeln:

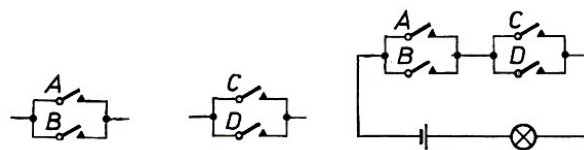
$$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$$

Wir denken dabei an die folgende Aussage: Der Schalter A oder der Schalter B ist geschlossen, und der Schalter C oder der Schalter D ist geschlossen.

(Der Leser versteht sicherlich auch aus dieser knappen Fassung, dass wir hier in den obigen Ausdruck vier einfache Aussagen der Form: "... ist geschlossen" einsetzen.)

Zuerst fertigen wir gesondert die den Alternativen $A \vee B$ und $C \vee D$ entsprechenden Parallelschaltungen an. Danach bilden wir aus diesem die der Konjunktion entsprechende Reihenschaltung in einem einzigen Stromkreis.

Bedenken wir: Die Lampe leuchtet nur dann auf, wenn die obige Aussage wahr ist - und sonst nicht.



Welcher zusammengesetzten Aussage entspricht ein elektrisches Netz?

Die Modelle der Konjunktion und der Alternative sind bereits elektrische Netze.

Die Negation ist ebenfalls mit einfachen Mitteln zu realisieren. Folgender Gedanke ist naheliegend: Wenn A jetzt die Aussage bedeutet, dass der Schalter A geöffnet ist, dann leuchtet die Lampe genau dann auf, wenn die Aussage $\sim A$ richtig ist.

Mit der Konjunktion, mit der Alternative und mit der Negation aber, wie wir schon sahen, kann man ohne Schwierigkeiten jede beliebige mehrstellige logische Operation ausdrücken, wenn wir deren Wahrheitswertetafel kennen. Und zwar so, dass wir die Negation nur auf Variablen anwenden, auf zusammengesetzte Ausdrücke aber nicht.⁴⁴

In unserer Hand liegt also der Schlüssel, mit dessen Unterstützung die materiellen Vorgänge - das Aufleuchten einer Glühlampe - uns zeigen, in welchen Fällen ein zusammengesetzter Ausdruck wahr ist. Man kann aber auch die Untersuchung der Richtigkeit der Schlussfiguren auf die Analyse von Ausdrücken zurückführen. In unserer Hand liegt also die Grundidee, nach der die logischen Maschinen arbeiten.

7.6 Eine interessante Anwendung

Um dem Leser ein konkretes Beispiel zu zeigen, stellen wir eine von Laszlo Kalmar stammende interessante Anwendung der elektrischen Stromkreise vor.

⁴⁴Das ist deshalb wesentlich, weil wir nur die Negation der Variablen in der genannten Form auf einfache Weise im Stromkreis verwirklichen können.

Für das Abteil eines Schlafwagens mit drei Betten wollen wir einen solchen Stromkreis entwickeln, mit dessen Hilfe auf der Grundlage des Mehrheitsbeschlusses für das Abteil entschieden wird, ob das gemeinsame Licht brennen soll oder nicht.

Derjenige, der möchte, dass es brennt, drückt einen Knopf an seinem Bett, wer nicht möchte, dass es brennt, drückt den Knopf nicht.

Wie wird der Stromkreis aufgebaut sein, wenn nach Beendigung der "Abstimmung" dann und nur dann das Licht brennt, wenn wenigstens zwei den Knopf drückten ?

Zuerst schreiben wir die Wahrheitwertetafel des dreistelligen Ausdrucks auf, dessen Wahrheitswerte dann und nur dann gleich W sind, wenn von mindestens zwei Teilausdrücken die Wahrheitswerte gleich W sind.

A	B	C	Wert des gesuchten Ausdrucks
W	W	W	W
F	W	W	W
W	F	W	W
F	F	W	F
W	W	F	W
F	W	F	F
W	F	F	F
F	F	F	F

Wir sahen im Kapitel 4, wie man einen solchen Ausdruck aufstellen kann. Allen W-Werten des Ausdrucks entspricht ein Alternativglied, den ersten drei Wahrheitswerten W entsprechen die Ausdrücke:

$$A \wedge B \wedge C; \quad \sim A \wedge B \wedge C; \quad A \wedge \sim B \wedge C;$$

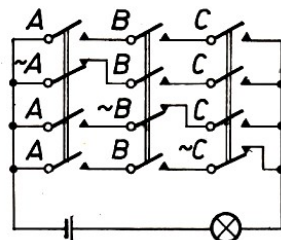
dem in der fünften Reihe stehenden Wert W aber entspricht:

$$A \wedge B \wedge \sim C$$

Der gesuchte Ausdruck ist die Alternative dieser Konjunktionen. Er lautet:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\sim A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C)$$

Das entsprechende Schaltbild hat folgendes Aussehen:



Freilich muss man zwischen den Schaltern mit gleichen Buchstaben eine Verbindung herstellen, beispielsweise auf einfachem mechanischem Wege. (Jedenfalls mit Isolierung, damit dort der Strom nicht durchfließen kann.) Das heißt, man muss erreichen, dass sich dann, wenn die Reisenden irgendeinen der Schalter schließen, die mit den gleichen Buchstaben bezeichneten Schalter ebenfalls schließen, falls kein Negationszeichen vor dem Buchstaben steht.

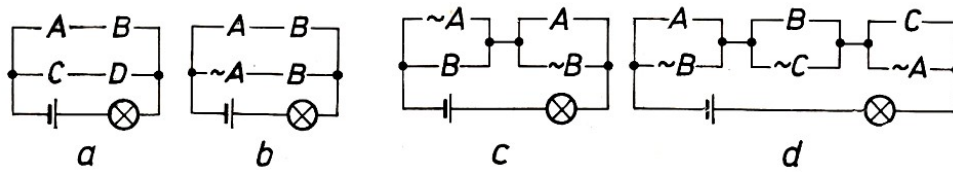
Sie öffnen sich aber, wenn vor dem Buchstaben ein Negationszeichen steht. Wenn die Reisenden hingegen keinen Schalter schließen, dann - genau umgekehrt - bleiben die mit gleichen

Buchstaben (ohne Negationszeichen) bezeichneten Schalter geöffnet, aber wenn ein Negationszeichen vor dem Buchstaben steht, dann bleiben sie geschlossen.

Durch einen einfachen Mechanismus kann man erreichen, dass beispielsweise die "nicht negierten" Schalter in der Grundstellung stets geöffnet sind und sich auf Knopfdruck schließen, die "negierten" Schalter in der Grundstellung geschlossen sind und sich auf den Knopfdruck hin öffnen, und zwar so, dass alle die mit gleichen Buchstaben versehenen Schalter gleichzeitig in Aktion treten.

Aufgaben

1. Schreiben Sie die Ausdrücke auf, die den in den Abbildungen a) bis d) dargestellten Schaltungen entsprechen! Jeder Schalter gilt dann als geschlossen, wenn die mit den gleichen Buchstaben bezeichneten Aussagen wahr sind, sonst sind sie offen.



2. Zeichnen Sie die Bilder der Schaltungen, die den folgenden Ausdrücken entsprechen:

- $A|B$,
- $A||B$,
- $A \wedge (A \vee B)$,
- $A \vee (A \wedge B)$,
- $A \rightarrow \{B \rightarrow [C \rightarrow (B \rightarrow C)]\}$,
- $[A \wedge (B \rightarrow C)] \vee C$,
- $(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)]$,
- $[A \rightarrow (\sim B \wedge C)] \wedge (B \rightarrow A) \wedge [(A \rightarrow C) \rightarrow B]$.

3. Wir möchten gern, dass wir die Beleuchtung eines langen Korridors an beiden Enden des Korridors durch dort befindliche Schalter ein- und ausschalten können. Entwerfen Sie die dazu erforderliche Schaltung!

Schreiben Sie den Ausdruck für diese Schaltung auf!

8 Lösungen der Aufgaben

1. Kapitel

1. Wenn sich Hänschens Schluss in dieser veränderten Form als richtig erweisen würde, so bliebe die Schlussfigur (1) dennoch fehlerhaft. Es genügt nämlich, dass wir auf ein Gegenbeispiel stoßen, dessen Schlussfigur nicht richtig ist. Ein solches ist unter anderem das Autobispiel: Es kann vorkommen, dass ihre Prämissen wahr sind, die Konklusion dennoch falsch ist. Aber nicht nur davon ist die Rede. Hänschens Schlussweise ist in dieser Form ebenfalls fehlerhaft.

Der Sportfachmann empfindet wahrscheinlich deshalb richtig, weil er das mit der Delegation verbundene Versprechen so deutet: "Wenn du die hundert Meter unter 10,3 Sekunden läufst, delegieren wir dich zur Olympiade, sonst nicht."

Oder in anderer Fassung:

"Wenn du die hundert Meter unter 10,3 Sekunden läufst, delegieren wir dich zur Olympiade, aber nur dann."

Oder in der Sprache der Mathematiker:

"Dann und nur dann delegieren wir dich zur Olympiade, wenn du die hundert Meter unter 10,3 Sekunden läufst."

Aber hier verwenden wir nicht die Schlussfigur (1), sondern eine andere.

2. a) Der Schluss ist richtig. b) Es handelt sich um die bekannte Schlussfigur (2).

3. und zugleich 4.

a), b) und e) sind richtig, es sind Schlüsse der Form (2).

c) und d) sind nicht richtig; diese Schlüsse haben die Form (1).

5. a) Einige Beispiele lassen vermuten, dass sie richtig ist.⁴⁵ Ein Beispiel von vielen:

Wenn 1969 durch 11 teilbar ist, dann ist es eine zusammengesetzte Zahl.
1969 ist durch 11 teilbar.

1969 ist eine zusammengesetzte Zahl.

b) Diese Schlussfigur ist nicht richtig. Zum Beweis genügt es bereits, einen Schluss anzugeben, bei dem die Prämissen wahr sind, dessen Konklusion aber falsch ist:

Wenn die Anzahl meiner Lebensjahre durch 6 teilbar ist, so ist sie eine gerade Zahl.
Die Anzahl meiner Lebensjahre ist eine gerade Zahl.

Die Anzahl meiner Lebensjahre ist durch 6 teilbar.

Die erste Prämisse ist wahr, ihre Wahrheit hängt natürlich nicht davon ab, wie alt ich augenblicklich bin. Die zweite Prämisse ist jährlich wechselnd wahr oder nicht wahr. Die Konklusion ist alle sechs Jahre je ein Jahr hindurch wahr. Es kann also vorkommen (zum Beispiel in meinem 2., 4., 6., ..., 98., 100. Lebensjahr), dass die Prämissen des Schlusses wahr sind, aber ihre Konklusion nicht.

2. Kapitel

1. a) $A \wedge B$

A = Es welkt schon unser Wäldchen; B = Seine Zierde fällt.

⁴⁵Die in der 5. Aufgabe vorkommende Schlussfigur a) nennt man modus ponens. (Lateinische: Ausdruck, wörtlich "legende Art".)

b) $\sim A \wedge \sim B$

A = Es gibt ein Rosenlabyrinth; B = Mit Balsamdüften weht ein Zephyr.

c) Keine Aussage.

d) A Es handelt sich um eine unzerlegbare Aussage.

e) $A \wedge B \wedge C$

A = Den Hahn vergaß Vitéz Michael Csokonai; B = Den Priester vergaß Vitéz Csokonai; C = Alles vergaß Vitéz Michael Csokonai.

f) $A \wedge \sim B$

A = Ich bewundere dich⁴⁶; B = Ich liebe dich.

g) $A \rightarrow B$

A = Das Leben kommt in die Schule. B = Das Leben wird auch eine heitere Schule sein.

h) $A \rightarrow A$

A = Wir sterben.

i) $A \rightarrow B$

A = Rot kommt die Fata Morgana; B = groß wird das Weh sein.⁴⁷

k) $(A \wedge B) \rightarrow C$

A = Wir wollen. B = Wir wagen. C = Morgen schon wird alles das unser sein.

l) $A \wedge B \wedge (\sim C \rightarrow D)$

A = Ich bin König; B = Ich verfüge über große Macht; C = Du gibst es; D = Ich werde es mit Gewalt nehmen.

m) Keine Aussage.

2. Vier Fälle sind möglich.

1. Das Licht brennt, und es ist jemand im Zimmer.

2. Das Licht brennt nicht, und es ist jemand im Zimmer.

3. Das Licht brennt, und es ist niemand im Zimmer.

4. Das Licht brennt nicht, und es ist auch niemand im Zimmer.

Im 3. Fall gewinnt Johannes die Wette (weil $W \rightarrow F = F$), sonst Stefan (weil $W \rightarrow W = W$, $F \rightarrow W = W$ und $F \rightarrow F = W$).

3. a) Es kann nur im nicht ausschließenden Sinne verwendet worden sein. (Auch der verstößt gegen die öffentliche Sauberkeit, der sowohl die Straße verunreinigt als auch spuckt.)

b) Es kann im anschließenden Sinn gebraucht werden sein.

(Wenn du nicht still bist, schicke ich dich aus dem Zimmer, wenn du still bist, kannst du bleiben), aber auch im nicht ausschließenden Sinn (wenn du nicht still bist, dann schicke ich dich auf alle Fälle aus dem Zimmer; wenn du still bist, dann wollen wir mal sehen, von diesem Fall spreche ich jetzt nicht).

Es hängt von der Situation ab, in welchem Sinn ich entscheide.

c) Die ausschließende und die nicht ausschließende Auslegung fällt hier zusammen, weil die Anzahl der Stellen von 2^{30} nicht zugleich gerade und ungerade sein kann.

d) Es kann das ausschließende oder ausdrücken, aber auch die Unverträglichkeit.

⁴⁶Das Wort vielleicht gehört nicht zur Aussage.

⁴⁷Die Anrede Bürger - Herren gehört nicht zur Aussage.

Das ist davon abhängig, in welchem Zusammenhang und in welcher Situation diese Aussage gemacht wird.

e) Es kann das nicht ausschließende oder bedeuten, aber auch das ausschließende oder. Das hängt davon ab, in welchem Zusammenhang und in welcher Situation diese Aussage gemacht wird.

4.a) $A \wedge B$; b) $A \wedge \sim B$; c) $\sim a \wedge B$; d) $\sim a \wedge \sim b$; e) $\sim (A \wedge B)$ oder $A|B$;

f) $\sim A \vee \sim B$ oder $A|B$; g) $\sim (A \vee B)$; h) $\sim A \vee B$; i) $A \rightarrow B$; k) $\sim B \rightarrow \sim A$;

l) $A \rightarrow \sim B$; m) $\sim A \rightarrow B$; n) $\sim (A \rightarrow B)$; o) $(A \rightarrow B)(\sim A \wedge \rightarrow \sim B)$;

p) $(A \rightarrow B) \wedge (\sim A \wedge \sim B)$; q) $(A \rightarrow \sim B) \wedge (\sim A \rightarrow B)$; r) $(\sim B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow \sim A)$;

s) $(A \vee B) \wedge \sim (A \wedge B)$

t) Mit anderen Worten können wir das so sagen: "Wenn nicht A , dann keineswegs auch nicht B ." Diese Aussage hat also die Form: $\sim A \rightarrow \sim B$. (Wir können das auch noch auf mehrere andere Arten schreiben.)

5. Unter den neunzehn Ausdrücken gibt es nur 10 wertverlaufsverschiedene. Folgende Aussagen bedeuten dasselbe:

b) und n); d) und g); e) f) und l); h), i) und k); o) und p); q), r) und s).

Wenn wir in der gewohnten Reihenfolge die möglichen Wahrheitswerte von A und B aufschreiben, dann stimmen die Wahrheitswertetafeln der Ausdrücke überein (daher können wir auch die obenstehenden Übereinstimmungen sogleich ablesen):

a) W F F F;	h) W F W W;	o) W F F W;	b) F W F F;	i) W F W W;
p) W F F W;	c) F F W F;	k) W F W W;	q) F W W F;	d) F F F W;
l) F W W W;	r) F W W F;	e) F W W W;	m) W W W F;	s) F W W F;
f) F W W W;	n) F W F F;	t) W W F W.	g) F F F W;	

6. Ja, die Aussage m).

7. Richtige sprachliche Formulierungen sind beispielsweise die folgenden:

a) A und B , aber nicht C ; b) Wenn nicht A , so B ; c) Wenn A , so B ; aber wenn nicht A , so C ;

d) Entweder von A und B genau eine oder alle beide. (Diese Aussage können wir auch kurz durch $A \vee B$ symbolisieren.)

e) Von A und B und ebenso von nicht A und nicht B ist wenigstens eine wahr; kurz: A oder B , aber nicht alle beide. (Wir können das auch kurz durch $A \succ \prec B$ symbolisieren.)

f) A , aber nicht B , oder nicht A , aber B .

b) bedeutet dasselbe wie d), e) dasselbe wie f).

	Prämissen				Konklusion
	A	\rightarrow	B	A	B
8. a)	W	W	W	W	W
	W	F	F	W	F
	F	W	W	F	W
	F	W	F	F	F

Von den vier Fällen sind nur in dem ersten alle beide Prämissen wahr, dann ist aber auch die Konklusion wahr. Diese Schlussfigur (der modus ponens) ist also richtig.

Zu diesem Ergebnis führt auch der folgende Gedankengang:

Setzen wir voraus, dass alle beide Prämissen wahr sind. Wenn aber A (die zweite Prämisse) wahr ist, dann bleibt nur eine Möglichkeit dafür, dass $A \rightarrow B$ (die erste Prämisse) ebenfalls wahr ist, nämlich die, dass auch B wahr ist. Wenn also die zwei Prämissen wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr.

	Prämissen				Konklusion
	A	\rightarrow	B	B	A
b)	W	W	W	W	W
	W	F	F	F	W
	F	W	W	W	F
	F	W	F	F	F

Es gibt hier zwei Fälle, in denen alle beide Prämissen wahr sind: die erste und die dritte Zeile. Von diesen ist nur in dem ersten Fall auch die Konklusion wahr.

Es kann auch vorkommen, dass alle beide Prämissen wahr sind, die Konklusion dennoch falsch ist, nämlich dann, wenn A falsch, aber B wahr ist. (Die schon gegebene Lösung gibt dafür ein Beispiel: Die Anzahl der Lebensjahre eines 100jährigen Menschen ist nicht durch 6 teilbar, sie ist aber eine gerade Zahl.)

Ohne Tabelle: Wenn die zweite Prämisse (B) wahr ist, dann ist auf jeden Fall die erste Prämisse wahr, entweder ist ihr Vorderglied (A) wahr oder falsch (weil jede Implikation wahr ist, deren Hinterglied wahr ist). Es kann also vorkommen, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion (A) dennoch falsch ist.

9. Die ersten drei Schlüsse sind richtig⁴⁸, der vierte ist falsch. (Wir können nur beweisen, dass seine Schlussfigur fehlerhaft ist).

a) und e) sind aus der folgenden Schlussfigur herleitbar:

	Prämissen				Konklusion	
	A	\vee	B	\sim	B	A
	W	W	W	F	W	W
	W	W	F	W	F	W
	F	W	W	F	W	F
	F	F	F	W	F	F

Nur in der zweiten Zeile sind beide Prämissen wahr. Dann ist auch die Konklusion wahr.

Ohne Tabelle: Daraus, dass die zweite Prämisse wahr ist, folgt, dass B falsch ist. Aber die Alternative von A und B ist nur dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen wahr ist. Wenn also B falsch ist, so muss A richtig sein. Also, sooft die Prämissen wahr sind, ist jedesmal auch die Konklusion wahr.

b) ist aus der folgenden Schlussfigur herleitbar:

	Prämissen			Konklusion		
	A	\vee	B	\sim	A	B
	A	\vee	B	\sim	A	B

Mit Tabelle oder ohne Tabelle können wir auf ähnliche Weise wie im vorher betrachteten Fall übersehen, dass auch diese Schlussfigur richtig ist.

Schließlich ist (d) aus der folgenden Schlussfigur herleitbar:

⁴⁸Ihre Namen aus der klassischen Logik lauten: Disjunktiver Syllogismus oder modus tollendo ponens.

Prämissen		Konklusion
$\sim A \vee B$	$\sim A$	$\sim B$
F W W W	F W	F W
W F W W	W F	F W
F W F F	F W	W F
W F W F	W F	W F

In der zweiten Zeile sind alle beide Prämissen wahr, die Konklusion ist aber falsch.
 Ohne Tabelle: Die Wahrheit der zweiten Prämisse garantiert bereits, dass die erste wahr ist.
 ($\sim A$ ist zugleich zweite Prämisse.) Deshalb kann B wahr, aber auch falsch sein.

3. Kapitel

1. Die angeführten Schlüsse haben die Schlussfiguren:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad \frac{A \rightarrow B}{\sim B \rightarrow \sim A} & (2) \quad \frac{A \rightarrow \sim B}{B \rightarrow \sim A} \\
 (3) \quad \frac{\sim A \rightarrow \sim B}{A \rightarrow B} & (4) \quad \frac{\sim A \rightarrow \sim B}{B \rightarrow A}
 \end{array}$$

Nach dem Gesetz der Kontraposition gilt $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$, das heißt, die Wahrheitswerte von $A \rightarrow B$ und $\sim B \rightarrow \sim A$ stimmen stets überein.

Wenn also der erste Ausdruck den Wahrheitswert W besitzt, so gilt das auch für den zweiten, das heißt, die Schlussfigur (1) ist richtig. Richtig ist natürlich auch die Umkehrung dieses Schlusses, wir können die Prämissen und die Konklusion auch miteinander vertauschen. Demnach ist auch (4) richtig, da sie ja (abgesehen davon, dass A und B ihre Rolle vertauschten) die Umkehrung der Schlussfigur (1) ist.

(2) ist gleichfalls richtig. Wenn wir nämlich in $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$ den Ausdruck B durch $\sim B$ substituieren und in der so erhaltenen Beziehungen $A \rightarrow \sim B \equiv \sim \sim B \rightarrow \sim A$ den Ausdruck $\sim \sim B$ durch B ersetzen, dann gelangen wir zu $A \rightarrow \sim B \equiv B \rightarrow \sim A$.

Die Schlussfigur (3) ist falsch. Zum Beweis genügt es, je einen Wahrheitswert von A und B anzugeben, bei dem die Prämisse wahr, die Konklusion trotzdem falsch ist. Die Konklusion ist aber nur in einem Fall falsch, nämlich dann, wenn ihr Vorderglied wahr, ihr Hinterglied jedoch falsch ist. Das heißt dann, wenn der Wahrheitswert von A gleich W, der Wahrheitswert von B gleich F ist. Dann ist aber die Prämisse wahr. Damit ist bewiesen, dass diese Schlussfigur falsch ist.

2. Wenn (1) richtig ist, dann kann die Konklusion nicht falsch sein, wenn die Prämisse wahr ist. Wann aber ist die Konklusion falsch?

Das ist genau dann der Fall, wenn der Wahrheitswert von B der Wert W ist, der Wahrheitswert von A jedoch der Wert F ist. In diesem Falle ist aber die Prämisse wahr. Diese Schlussfigur ist also fehlerhaft. Ebenso ist auch (2) fehlerhaft, denn ihre Prämisse ist dieselbe wie die Prämisse von (1), und ihre Konklusion und die Konklusion von (1) sind wertverlaufsgleich.

Die Aussage 'Wenn B , so A ' nennen wir die Umkehrung der Aussage 'Wenn A , so B '. Wie die Lösung der Aufgabe 2 zeigt, ist es nicht möglich, solche Aussagen ohne weiteres umzukehren. Es ist möglich, dass eine Aussage der obigen Form wahr, ihre Umkehrung jedoch falsch ist, oder umgekehrt ist es möglich, dass eine solche Aussage falsch, aber ihre Umkehrung dennoch wahr ist.

(Ein Beispiel für den ersten Fall: Wenn es regnet, steht eine Wolke am Himmel; ein Beispiel für den zweiten Fall: Wenn eine Wolke am Himmel steht, regnet es. Von den beiden Aussagen ist jede die Umkehrung der anderen; die erste ist wahr, die zweite ist falsch.)

3. (1) Die linke Seite ergibt den Ausdruck: $(B \rightarrow C) \rightarrow \sim B$, die rechte Seite den Ausdruck: $B \rightarrow \sim (B \rightarrow C)$.

Auf allen beiden Seiten steht eine Implikation. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn ihr Vorderglied wahr, ihr Hinterglied jedoch falsch ist. Das ist auf allen beiden Seiten aber nur dann der Fall, wenn B und auch C wahr ist. Auf der linken Seite nämlich ist das Hinterglied nur in diesem Falle falsch, und auf der rechten Seite ist das Vorderglied nur dann wahr, wenn der Wert von B gleich W ist.

Dagegen ist auf der linken Seite das Vorderglied nur dann wahr und auf der rechten Seite ist das Hinterglied nur dann falsch, wenn auch der Wert von C gleich W ist. Alle beide Seiten sind nur in diesem einen Fall falsch, sonst sind sie wahr; wir erhalten also wirklich wertverlaufsgleiche Ausdrücke und können $(B \rightarrow C) \rightarrow \sim B \equiv B \rightarrow \sim (B \rightarrow C)$ schreiben.

Allgemein sahen wir auch schon ein, dass durch Substitution aus wertverlaufsgleichen Ausdrücken stets wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke entstehen; dieser letzte Gedankengang war nur eine Kontrolle.

Eine andere Kontrolle: Wir formen die Implikationen - es genügen die außerhalb der Klammer - auf Grund von

$$\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B \quad (W2)$$

in Alternativen um und verwenden die Eigenschaft der Kommutativität der Alternative [(W 5)]. Dann ergibt sich auf der linken und rechten Seite derselbe Ausdruck:

$$\sim B \vee (B \rightarrow C)$$

Eine dritte Kontrolle: mit Hilfe der Wertetabelle.

(2) Die linke Seite ergibt den Ausdruck

$$A \rightarrow \sin(A \vee B)$$

Die rechte Seite ergibt den Ausdruck

$$(A \vee B) \rightarrow \sim A$$

Wir behaupten, dass es sich hier wieder um wertverlaufsgleiche Ausdrücke handelt, dass also $A \rightarrow \sim (A \vee B) \equiv (A \vee B) \rightarrow \sim A$ gilt.

Kontrolle mit Hilfe der alternativen Umformung:

Linke Seite: $\sim A \vee \sim (A \vee B)$. Rechte Seite: $\sim (A \vee B) \vee \sim A$.

Wegen der Kommutativität erhalten wir daraus die zu beweisende Beziehung.

(3) Linke Seite: $B \rightarrow \sim \sim A$. Rechte Seite: $\sim A \rightarrow \sim B$.

Wenn man $\sim \sim A$ durch A ersetzt, so lautet die Behauptung:

$$B \rightarrow A \equiv \sim A \rightarrow \sim B$$

Von der Bezeichnung abgesehen, stimmt das mit (W 7) überein, es ergeben sich also wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

4. (1) Linke Seite: $A \rightarrow \sim B$. Rechte Seite: $B \rightarrow A$. Diese Ausdrücke sind nicht wertverlaufsgleich, weil der linke Ausdruck den Wert F besitzt, wenn die Werte von A und B gleich W sind, der rechte Ausdruck hat dagegen in diesem Fall den Wert W.

(2) Betrachten wir die Tabelle:

Linke Seite:				Rechte Seite:			
A	B	$\sim B$	$A \rightarrow \sim B$				
W	W	F	F	$B \rightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \sim B)]$			
W	F	W	W	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W	W
1	2	3	4	5	6	7	8

Das Ergebnis auf der linken Seite (in der mit 4 bezeichneten Spalte) stimmt mit dem Ergebnis auf der rechten Seite überein (die mit 5 bezeichnete Spalte). Also erhielten wir wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

5. Die Wahrheitwertetafel des rechten Ausdrucks ist genau die obige 7. Spalte. Daraus ist ersichtlich, dass sie mit der Wahrheitwertetafel von $\sim A$ übereinstimmt.

6. Auf Grund der Aufgaben 4. und 5. könnte irgendwer meinen, dass diese Umkehrung des Theorems wahr ist. Aber die Vermutung ist falsch, denn leicht können wir uns davon überzeugen, dass zum Beispiel $A \vee \sim A \vee B \equiv A \vee \sim A$ und $A \vee \sim A \vee \sim B \equiv A \vee \sim A$ gilt.

Aus der ersten Beziehung können wir die letztere erhalten, indem wir darin an Stelle von B den Ausdruck $\sim B$ schreiben, obwohl B und $\sim B$ offenbar nicht wertverlaufsgleich sind. (Denken wir daran, dass $0 \cdot 5 = 0$ und $0 \cdot 8 = 0$ ist, aber trotzdem $5 \neq 8$ ist.)

7. An dem in der Lösung der vorangegangenen Aufgabe gegebenen Gegenbeispiel können wir nach einer kleinen Änderung einsehen, dass die Vermutung ebenfalls nicht zutrifft. Zum Beispiel tritt in $A \vee \sim A \vee B \vee C \equiv A \vee \sim A \vee (B \vee C)$ der Ausdruck $B \vee C$ zweimal auf. Wir erhalten stets wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke, wenn wir $B \vee C$ an irgendeiner Stelle durch einen anderen Ausdruck ersetzen, zum Beispiel durch $D \vee E$. Das ergibt:

$$A \vee \sim A \vee D \vee E \equiv A \vee \sim A \vee (B \vee C)$$

Aber $B \vee C$ ist nicht wertverlaufsgleich mit $D \vee E$.

8. Wenn wir in der zweiten Aussage und an die Stelle von oder schreiben, haben die zwei Aussagen einen übereinstimmenden Sinn. Ebenso auch dann, wenn wir in der ersten Aussage oder durch und ersetzen. Symbolisch geschrieben sieht das so aus:

- (1) $(S \vee K) \rightarrow V \equiv (S \rightarrow V) \wedge (K \rightarrow V)$
- (2) $(S \wedge K) \rightarrow V \equiv (S \rightarrow V) \vee (K \rightarrow V)$

Wir wollen beweisen, dass es sich hierbei tatsächlich um wertverlaufsgleiche Ausdrücke handelt. Zum Beweis drücken wir jede Implikation mit Hilfe der Alternative aus. Das ergibt

- (1') $\sim (S \vee K) \vee V \equiv (\sim S \vee V) \wedge (\sim K \vee V)$
- (2') $\sim (S \wedge K) \vee V \equiv (\sim S \vee V) \vee (\sim K \vee V)$

Wenden wir auf der linken Seite die de Morganschen Regeln [(W 12) und (W 13)] an:

$$(1'') \quad (\sim S \wedge \sim K) \vee V \equiv (\sim S \vee V) \wedge (\sim K \vee V)$$

$$(2'') \quad (\sim S \vee \sim K) \vee V \equiv (\sim S \vee V) \vee (\sim K \vee V)$$

Jetzt ist bereits an allen beiden sichtbar, dass sich wertverlaufsgleiche Ausdrücke ergeben. Man muss nur auf (1'') das Distributionsgesetz (W 9), auf (2'') das Assoziationsgesetz (W 6), das Kommutationsgesetz (W 5) und die Tautologie (W 11) anwenden. Eine jede Umformung ist auch in umgekehrter Richtung ausführbar, also handelt es sich in (1) und (2) um wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

9. a) Mit den Bezeichnungen:

M = morgen ist gutes Wetter,

L = Sie haben Lust,

P = wir werden promenieren gehen

ergeben sich die Ausdrücke:

$$M \rightarrow (L \rightarrow P) \quad \text{und} \quad (M \wedge L) \rightarrow P$$

Wir drücken jede Implikation durch eine Alternative aus:

$$\sim M \vee (\sim L \vee P) \quad \text{und} \quad \sim (M \wedge L) \vee P$$

Wir wenden auf der rechten Seite eine der de Morganschen Regeln (W 12) an. Wegen der Assoziativität können wir auf beiden Seiten die Klammern weglassen:

$$\sim M \vee L \vee P \quad \text{und} \quad \sim M \vee \sim L \vee P$$

Beide Ausdrücke stimmen überein. Die Umformung können wir auch in umgekehrter Richtung vornehmen, also gilt:

$$M \rightarrow (L \rightarrow P) \equiv (M \wedge L) \rightarrow P$$

Das ist das sogenannte Exportationsgesetz.⁴⁹

b) Der dritten Aussage entspricht

$$L \rightarrow (M \rightarrow P)$$

Wenden wir das Exportationsgesetz an und die Eigenschaft der Kommutativität, so erhalten wir:

$$L \rightarrow (M \rightarrow P) \equiv (L \wedge M) \rightarrow P \equiv (M \wedge L) \rightarrow P$$

Also auch das bedeutet dasselbe wie die vorherigen zwei Aussagen. (Dieses Ergebnis könnten wir freilich auch ohne die Mittel der formalen Logik auf Grund unseres gesunden Verstandes und unseres natürlichen Sprachgefühls erhalten.)

10. Wir benutzen folgende Symbole:

F = das Kind ist fiebrig;

H = das Kind hustet stark;

A = wir erreichen den Arzt;

R = wir rufen den Arzt.

⁴⁹Exportation ist ein lateinisches Wort. Es bedeutet: Herausbringen. (Wir können nämlich das in Klammer befindliche Vorderglied der Implikation herausbringen, und mit Hilfe der Konjunktion können wir es dem äußeren Vorderglied der Implikation angliedern.) In der deutschen Logik-Literatur wird dieses Gesetz als Satz der Prämissenverbindung bezeichnet.

Dann ergeben die beiden Aussagen die folgenden Ausdrücke:

$$((F \vee H) \wedge A) \rightarrow R \quad \text{und} \quad (F \rightarrow (A \rightarrow R)) \wedge (A \rightarrow (H \rightarrow R)) \quad (1,2)$$

Erst in (1), danach in (2) drücken wir die Implikation mit Hilfe der Alternative aus. Wir wenden die de Morganschen Regeln, das Assoziationsgesetz und das Kommutationsgesetz an. Seitlich schreiben wir kurz die Namen und die Zeichen der angewendeten Beziehungen nieder:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sim ((F \vee H) \wedge A) \vee R && \text{([Implikation (W 2)])} \\ & (\sim (F \vee H) \vee \sim A) \vee R && \text{([de Morgan (W 12)])} \\ & \sim (F \vee H) \vee (\sim A \vee R) && \text{([Assoziationsgesetz (W 6)])} \\ & (\sim F \wedge \sim H) \vee (\sim A \vee R) && \text{([de Morgan (W 13)])} \\ & (\sim F \vee (\sim A \vee R)) \wedge (\sim H \vee (\sim A \vee R)) && \text{([Distributionsgesetz (W 9)])} \\ (2) \quad & (\sim F \vee (\sim A \vee R)) \wedge (\sim A \vee (\sim H \vee R)) && \text{([Implikation (W 2)])} \\ & (\sim F \vee (\sim A \vee R)) \wedge (\sim H \vee (\sim A \vee R)) && \text{([Assoziationsgesetz (W 6), Kommutationsgesetz (W 5)])} \end{aligned}$$

Wie wir sehen, gelangten wir in beiden Fällen zu demselben Ausdruck. (Die Alternative ist assoziativ und kommutativ.)

11. Die Gültigkeit aller drei Beziehungen können wir auf Grund der de Morganschen Regeln beweisen:

$$\begin{aligned} (W12) \quad & \sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B \\ (W13) \quad & \sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B \end{aligned}$$

Wenn wir beide Seiten von (W 12) negieren, dann stimmen die Wahrheitswerte der beiden Seiten auch weiterhin immer überein, und mit der Anwendung von (W 1) erhalten wir (1). Ebenso erhalten wir aus (W 13) schließlich (2). Endlich erhalten wir (3) aus (2), indem wir in (2) A durch $\sim A$ substituieren und die Beziehungen (W 1) und (W 2) anwenden.

[Oder auch unmittelbar auf folgende Weise: $A \rightarrow B$ ist in genau einem Fall falsch, nämlich genau dann, wenn der Wert von A gleich W und der Wert von B gleich F ist; $A \wedge \sim B$ ist in diesem Fall wahr, also ist $\sim (A \wedge \sim B)$ dann gerade falsch.]

Beispiele:

- (1) 'Heute und morgen wird es schneien' bedeutet dasselbe wie 'Es ist nicht wahr, dass es heute oder morgen nicht schneien wird'.
- (2) 'Heute oder morgen wird es schneien' bedeutet dasselbe wie 'Es ist nicht wahr, dass es heute nicht schneien wird und dass es morgen nicht schneien wird'.
- (3) 'Wenn es heute schneien wird, dann wird es auch morgen schneien' bedeutet dasselbe wie 'Es ist nicht wahr, dass es heute schneien wird, morgen dagegen nicht schneien wird'.

4. Kapitel

$$1. (1) \frac{(T \rightarrow S) \wedge (\sim T \rightarrow \sim S)}{(T \wedge S) \vee (\sim T \wedge \sim S)}$$

Die Prämisse würden wir auch $T \leftrightarrow S$ schreiben können [(W 15) und (W 7)]. Wir wissen, dass sie genau dann wahr ist, wenn T und S beide wahr sind, oder T und S beide falsch sind. Auch die Konklusion ist gerade in diesen Fällen wahr. Also ist die Schlussfigur richtig.

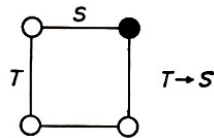
Sie ist auch in umgekehrter Form richtig, denn die Prämisse drückt dasselbe aus wie die Konklusion. Zugleich gelangten wir auch zu einer interessanten neuen Beziehung. Sie lautet mit anderen Bezeichnungen :

$$(W16) \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$$

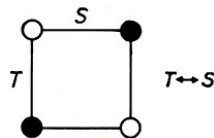
[Beachten wir, dass in der Schlussfigur (1) die Konklusion gerade die vollständige alternative Normalform der Prämisse ist.]

Die Schlussfigur (2) $\frac{\sim T \vee S}{T \succ \sim S}$ oder nach Anwendung von (W 2): $\frac{T \rightarrow S}{\sim (T \leftrightarrow \sim S)}$

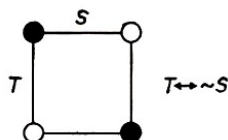
Die Wahrheitstafel der Prämisse:



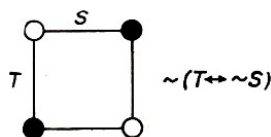
Die Wahrheitstafel der Konklusion erhalten wir aus der Wahrheitstafel von $T \leftrightarrow S$:



indem wir einerseits die Spalten vertauschen (weil $\sim S$ dort wahr, wo S falsch ist und umgekehrt):



und andererseits die Wahrheitswerte W (weißer Kreis) in F (schwarzer Kreis) umändern und umgekehrt:



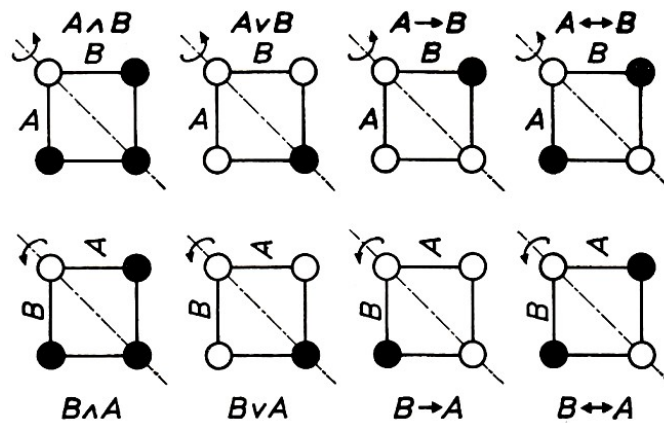
Auf diese Weise haben wir wieder die Wahrheitstafel von $T \leftrightarrow S$ erhalten. Also gilt: $\sim (T \leftrightarrow \sim S) \equiv T \leftrightarrow S$, und die Schlussfigur können wir wie folgt schreiben:

$$\frac{T \rightarrow S}{T \leftrightarrow S}$$

Ist das richtig? Die Prämisse ist nur in einem Fall falsch (das heißt, wenn T wahr, S hingegen falsch ist, aber das ist jetzt nicht wichtig). Die Konklusion ist dagegen in zwei Fällen falsch. Auch daraus folgt schon, dass es einen Fall gibt, in dem die Prämisse wahr, die Konklusion dennoch falsch ist. Die Schlussfigur ist also nicht richtig. (Der Leser beachte, dass wir eine richtige Schlussfigur erhalten, wenn wir Prämisse und Konklusion vertauschen.)

2. Von der Konjunktion und Alternative wissen wir schon, dass sie kommutativ sind.

Die Kommutativität bedeutet, dass durch Vertauschen der Plätze der Variablen die Wahrheitswertetafel der Operation nicht verändert wird. In unserer neuen Abbildungsart bedeutet das Vertauschen der Plätze der zwei Variablen, dass die Plätze in waagerechter Richtung mit denen in senkrechter Richtung vertauscht werden. Das können wir auch wie folgt ausdrücken: Wir drehen die Abbildung um 180° um die nordwestlich-südöstlich gerichtete Diagonale (die sogenannte Hauptdiagonale), das heißt, wir spiegeln an dieser Diagonalen:



Aus den Abbildungen ist ersichtlich, dass auch $A \leftrightarrow B$ kommutativ ist:

$$(W17) \quad A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$$

weil durch die Spiegelung die Plätze der Wahrheitswerte "wahr" und "falsch" (die weißen und die schwarzen Kreise) nicht verändert werden. $A \rightarrow B$ ist dagegen nicht kommutativ (das bedeutet, dass man Aussagen der Form wenn A , so B im allgemeinen nicht umkehren kann).

3. (1) Es ist zu klären, ob die Wahrheitswertetafeln von

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \text{und} \quad (A \rightarrow B) \rightarrow C$$

übereinstimmen oder nicht.

Anstatt Wahrheitswertetafeln anzufertigen, ändern wir beide Ausdrücke, indem wir die Implikation mit Hilfe der Alternative ausdrücken:

$$\sim A \vee (\sim B \vee C) \quad \text{und} \quad \sim (\sim A \vee B) \vee C$$

In dem linken Ausdruck können wir die Klammer wegen der Assoziativität weglassen, auf den Ausdruck rechts wenden wir die de Morganschen Regeln und (W 1) an. Dann ergibt sich:

$$\sim A \vee \sim B \vee C \quad \text{und} \quad (A \wedge \sim B) \vee C$$

Daraus können wir schon jetzt ablesen, dass die zwei Ausdrücke nicht wertverlaufsgleich sind, denn der linke Ausdruck ist in genau einem Fall falsch (dann, wenn alle drei Alternativglieder zugleich falsch sind), der rechts stehende Ausdruck dagegen in drei Fällen (dann, wenn C falsch und außerdem, wenn allein A , wenn allein $\sim B$ oder wenn alle beide falsch sind). Für die Implikation gilt also das Assoziationsgesetz nicht.

(2) Wir stellen die zugehörigen Wahrheitswertetafeln auf. Das ist leicht, den zwei Aussagen sind dann wertverlaufsgleich, wenn ihre Wahrheitswerte übereinstimmen (entweder sind alle beide wahr oder keine von beiden):

A	B	C	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$				$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$					
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	
W	W	F	W	F	W	F	F	W	W	W	F	
W	F	W	W	F	F	F	W	W	F	F	W	
W	F	F	W	W	F	W	F	W	F	F	W	
F	W	W	F	F	W	W	W	F	F	W	F	
F	W	F	F	W	W	F	F	F	F	W	W	
F	F	W	F	W	F	F	W	F	W	F	W	
F	F	F	F	F	F	W	F	F	W	F	F	
Reihenfolge			1	3	1	2	1	1	2	1	3	1

Wie wir sehen, ist die Äquivalenz - ebenso wie die Konjunktion und die Alternative - assoziativ, das heißt, es gilt

$$(W18) \quad A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$$

(3) Die drei Aussagen haben die folgenden Formen:

- a) $J \leftrightarrow (K \leftrightarrow S)$;
- b) $(J \leftrightarrow K) \leftrightarrow S$;
- c) $(J \leftrightarrow K) \wedge (K \leftrightarrow S)$.

Die ersten zwei Aussagen sind, wie wir vorhin sahen, zugleich wahr oder nicht wahr, und deshalb bedeuten die ersten beiden Aussagen dasselbe. Über die dritte Aussage können wir auch ohne Anfertigung der Wahrheitwertetafel folgendes sagen: Sie ist dann wahr, wenn J zugleich mit K wahr oder falsch ist, K aber zugleich mit S wahr oder falsch ist; das heißt, in zwei Fällen ist die dritte Aussage wahr: wenn J, K und auch S wahr sind, ferner auch, wenn J, K und S falsch sind.

a) und b) sind in vier Fällen wahr; e) kann schon deshalb nicht dasselbe bedeuten wie jene beiden Aussagen.

4. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

(1)	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow	(2)	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
	D	D	-	-		D	D	D	-
*	D	D	-	-	*	D	D	D	-
	-	D	-	-		-	D	D	-
	-	D	-	-		-	D	D	-

In den Fällen, wo der Buchstabe D eingetragen ist, erfüllt sich die Distributivität, sonst nicht. Die in der ersten Reihe der Tabelle (1) befindlichen Zeichen D, D, —, — bedeuten zum Beispiel, dass:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

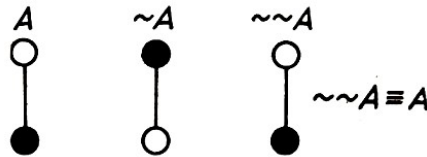
gilt.

Wenn wir aber in der letzteren Beziehung \rightarrow oder \leftrightarrow an Stelle von \vee schreiben, erhalten wir nicht wieder wertverlaufsgleiche Ausdrücke.

5. Einige kennen wir schon:

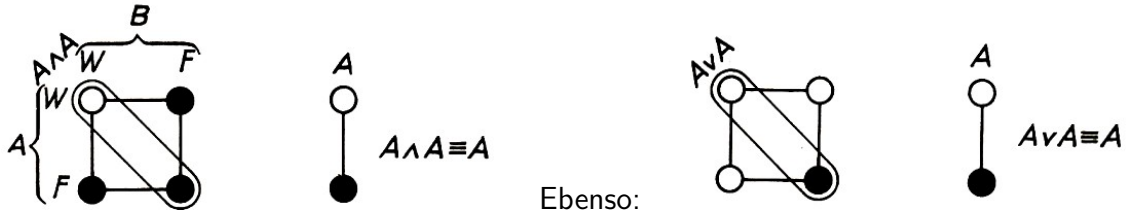
$$(W 1) \quad \sim \sim A \equiv A; \quad (W 10) \quad A \wedge A \equiv A; \quad (W 11) \quad A \vee A \equiv A.$$

Betrachten wir diese mit Hilfe unserer neuen Darstellungsart.

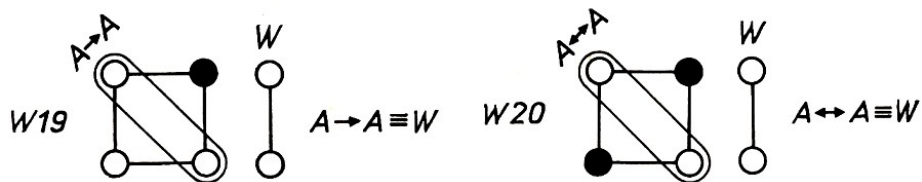


Nach zweimaligem Farbenwechsel erhalten wir dasselbe.

Die Werte von $A \wedge A$ erhalten wir aus den Werten von $A \wedge B$, aber in $A \wedge A$ sind nur zweierlei Werteanordnungen zu betrachten: Entweder ist der Wert beider Glieder gleich W oder beide haben den Wert F. Das bedeutet, dass wir nur die in der Hauptdiagonalen befindlichen Werte betrachten:



Die der Implikation und der Äquivalenz entsprechenden wertverlaufsgleichen Ausdrücke sind:

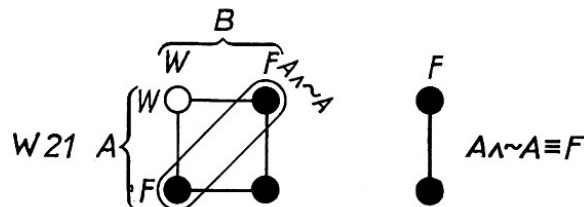


Wir suchen jetzt zu den folgenden Ausdrücken wertverlaufsgleiche Ausdrücke:

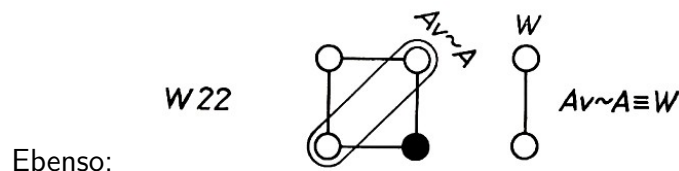
$$A \wedge \sim A, \quad A \vee \sim A, \quad A \rightarrow \sim A, \quad A \leftrightarrow \sim A$$

Auch die Werte von $A \wedge \sim A$ lassen sich aus $A \wedge B$ ermitteln, und von den möglichen vier Werteanordnungen spielen auch hier, wie in dem Fall $A \wedge A$, nur zwei eine Rolle. Um welche handelt es sich ?

Es ist möglich, dass der Wert des ersten Gliedes gleich W, der des anderen gleich F ist; es kann sein, dass der Wert des ersten Gliedes gleich F, der des anderen aber gleich W ist. Was bedeutet das in der Abbildung? Das bedeutet, dass wir die zweite Diagonale, die Nebendiagonale, betrachten:

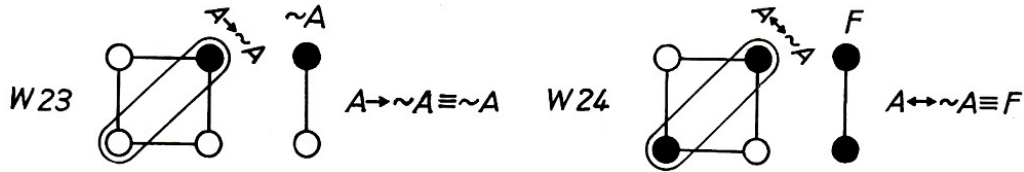


Zum Beispiel ist die Aussage 'Heute ist Donnerstag, aber es ist nicht Donnerstag' falsch, denn von den zwei Teilaussagen ist die eine sicher falsch.



Zum Beispiel ist die Aussage 'Morgen ist Donnerstag, oder morgen ist nicht Donnerstag' wahr, denn von den zwei Teilaussagen ist die eine sicher wahr.

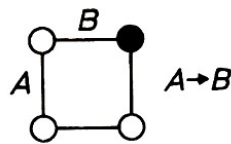
(W 22) und (W 23) drücken in knapper Form zwei wichtige Grundsätze der klassischen Logik aus, das Gesetz des Widerspruchs und den Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Entsprechend ergibt sich für die Implikation und die Äquivalenz:



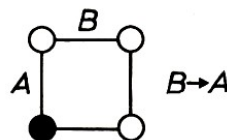
Die Konjunktion, die Alternative und die Äquivalenz sind kommutativ, deshalb ist es bei diesen einerlei, welches Glied wir negieren, also gilt auch:

$$\sim A \wedge A \equiv F, \quad \sim A \vee A \equiv W, \quad \sim A \leftrightarrow A \equiv F$$

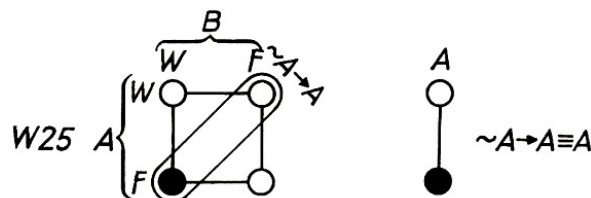
Aber die Implikation ist nicht kommutativ, deshalb müssen wir den Ausdruck $\sim A \rightarrow A$ gesondert betrachten. Wenn der Wert von A gleich W ist, dann ist der Wahrheitswert dieses Ausdrucks gleich W (weil sein Vorderglied den Wert F hat), wenn der Wert von A gleich F ist, dann ist der Wert des gesamten Ausdrucks gleich F , weil sein Vorderglied wahr ist, sein Hinterglied jedoch den Wert F besitzt. Also stimmt der Wert dieses Ausdrucks mit A in allen Fällen überein. Auf ähnliche Weise wie bisher können wir das ebenfalls ablesen, wenn wir statt der Abbildung der Implikation $A \rightarrow B$



die Abbildung der Implikation $B \rightarrow A$ betrachten.



An ihrer Nebendiagonale sehen wir sogleich:

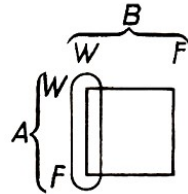


Die in der Aufgabe aufgezählten meist algebraischen Beziehungen sind von der Art, dass auf der linken Seite eine Variable und eine Konstante auftreten, das heißt, wir schreiben in der Operation an die Stelle der einen Variablen einen bestimmten Wert (in der Aufgabe 0 oder 1). Mit Hilfe der logischen Operationen können wir das auch so schreiben:

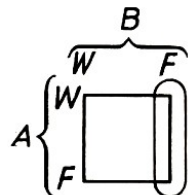
$$\begin{aligned} A \wedge W, \quad A \vee W, \quad A \rightarrow W, \quad W \rightarrow A, \quad A \leftrightarrow W, \\ A \wedge F, \quad A \vee F, \quad A \rightarrow F, \quad F \rightarrow A, \quad A \leftrightarrow F. \end{aligned}$$

(Im Fall der Implikation müssen wir einen Unterschied zwischen dem Vorderglied und dem Hinterglied machen, die anderen Operationen sind kommutativ, bei diesen ist es gleich, an welche Stelle wir die Variablen schreiben und an welche Stelle die Konstanten.)

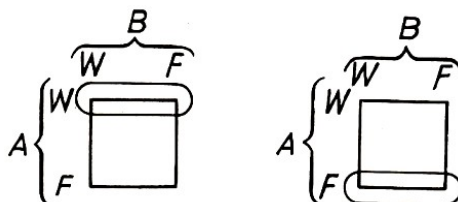
Was bedeutet es in der Sprache der neuen Abbildungsart, wenn wir an die Stelle des zweiten Gliedes W schreiben ?



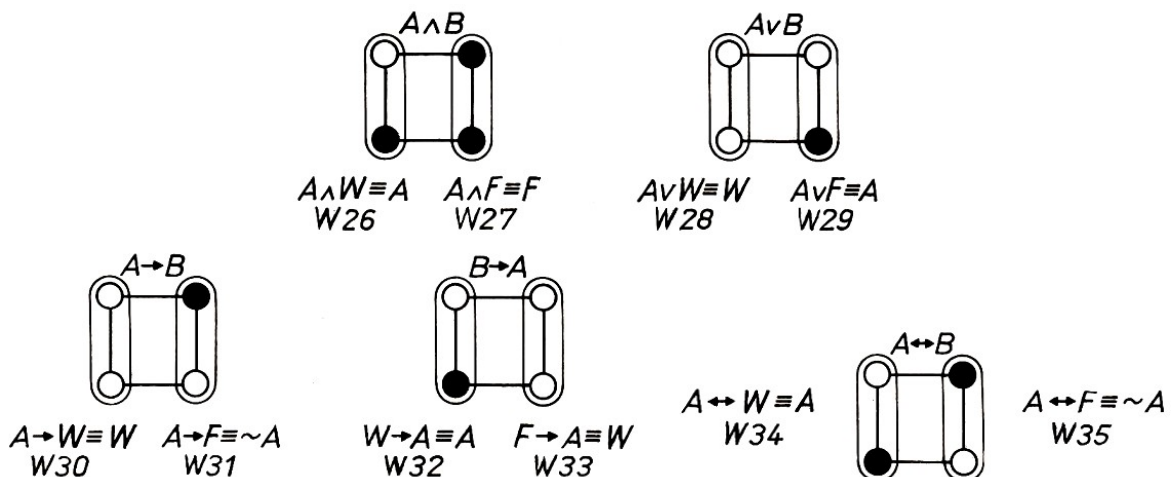
Die Abbildung antwortet auf diese Frage. Hier ist B das zweite Glied. Aber jetzt muss man nur die eingekreisten Werte sehen, diejenigen, wo der Wert des zweiten Gliedes B gleich W ist. Was aber bedeutet es, wenn wir an die Stelle des zweiten Gliedes F schreiben ? Die Antwort gibt die folgende Abbildung.



Wenn wir an die Stelle des ersten Gliedes die Werte W oder F schreiben, dann sieht das in der Abbildung so aus:



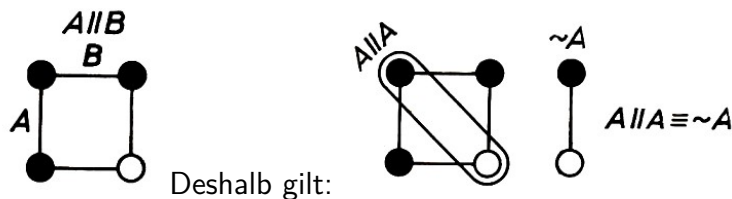
Jetzt können wir die vier Operationen leicht von den fünf folgenden Abbildungen ablesen (von der Implikation gibt es zwei). Die aufgeführten zehn Ausdrücke haben die folgende bildliche Darstellung:



6. (1) 'Das Pferd ist kein Vogel' (Ross bedeutet auch Pferd). Wir hätten in der Aufgabe auch sagen können: 'Weder das Pferd ist ein Vogel, noch ist das Pferd ein Vogel'.

(2) Der Satz ist beide Male derselbe, also das weder ... noch drückt ebenso die einfache Verneinung aus wie in der vorangehenden Aufgabe: 'Es ist nicht wahr, dass weder der Hund zu Hause ist noch sein Herr.' Das dagegen bedeutet dasselbe wie 'Der Hund oder sein Herr sind zu Hause' (das oder im nichtausschließenden Sinne genommen).

(3) Die Werte der weder ... noch-Operation sind dann und nur dann gleich W, wenn der Wert aller beiden Variablen gleich F ist, also hat sie die folgende Wahrheitswertetafel (in unserer neuen Schreibweise):



Ein Beispiel hierfür war die Aufgabe (1).

		A	B	$(A B) (A B)$	$A \vee B$
(4)	W	W	W	F	W
	W	F	F	F	W
	F	W	F	F	W
	F	F	W	W	F

(Unter die Variablen schreiben wir nur vom die Werte, die sie besitzen können, damit die Tabelle übersichtlicher wird.) Ein Beispiel für die jetzt bewiesene Beziehung $(A||B)|| (A||B) \equiv A \vee B$ war die Aufgabe (2).

Wir können sie übrigens auf Grund von $A||A \equiv \sim A$ auch so umformen:

$$(A||B)|| (A||B) \equiv \sim (A||B) \equiv \sim (\sim A \wedge \sim B) \equiv A \vee B$$

(5) Wir wissen, dass man mit Hilfe der Negation, der Konjunktion und der Alternative jede beliebige Operation zwischen beliebig vielen Variablen ausdrücken kann. Sogar nur mit Hilfe der Negation und der Alternative können wir die Konjunktion ausdrücken [Aufgabe 11 (1)]. Umgekehrt können wir die Negation und die Alternative mit Hilfe der weder ... noch-Operation ausdrücken [siehe (3) und (4)]. Also kann man mit der weder ... noch-Operation alle anderen Operationen ausdrücken.

(Das ist freilich nur theoretisch interessant; deshalb wird niemand anstatt nicht A sagen weder A , noch A , und noch kürzer anstatt A oder B , sagen weder weder A , noch B , noch weder A , noch B .)

(6) Wir wissen, dass $A \wedge B \equiv \sim (\sim A \vee \sim B)$ gilt. Wenn wir auf der rechten Seite die Negation und die Alternative mit Hilfe der weder ...-noch-Operation ausdrücken, dann erhalten wir einen hinreichend langen Ausdruck

$$\{[(A||A)|| (B||B)]|| [(A||A)|| (B||B)]\}|| \{[(A||A)|| (B||B)]|| [(A||A)|| (B||B)]\}$$

Aber einfacher können wir die Konjunktion ausdrücken, wenn wir bedenken, dass $A||B$ (weder A noch B) dasselbe bedeutet wie $\sim A \wedge \sim B$ (nicht A und nicht B), das heißt, $\sim A|| \sim B$

bedeutet dasselbe wie $A \wedge B$; die Negation ist aber mit Hilfe der weder ... noch-Operation ausdrückbar:

$$A \wedge B \equiv (A|A)|(B|B)$$

(7) Wir wissen, dass $A \vee B \equiv (A|B)|(A|B)$ gilt. Also gilt auch:

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B = [(A|A)|B]|[(A|A)|B]$$

Dasselbe erhalten wir auch dann, wenn wir von $A \rightarrow B \equiv \sim (A \wedge \sim B)$ ausgehen.

$$A \wedge \sim B \equiv \sim \sim A \wedge \sim B \equiv \sim A|B \equiv (A|A)|B$$

und deren Negation ist $A \rightarrow B$.

(8) Gehen wir von (W 15) aus:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Auf der rechten Seite haben wir die Konjunktion zweier nicht negierter Ausdrücke, für die weder-noch-Operation dagegen sind negierte Konjunktionsglieder erforderlich. Diesem ist leicht abzuhelpfen. Wir drücken die Implikationen mit Hilfe der Alternative aus, danach wenden wir von rechts nach links die als (W 12) bezeichnete de Morgansche Regel und den Satz über die doppelte Negation (W 1) an:

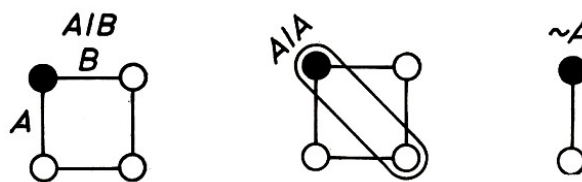
$$A \leftrightarrow B \equiv (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A) \equiv \sim (A \wedge \sim B) \wedge \sim (B \wedge \sim A) \equiv (A \wedge \sim B)|(B \wedge \sim A)$$

Auch die in der Klammer befindlichen Ausdrücke schreiben wir mit Hilfe der weder-noch-Operation auf.

Wir benutzen zu diesem Zweck die in der zweiten Lösung der Aufgabe 6 (7) angewandte Umformung

$$A \leftrightarrow B \equiv [(A|A)|B]|[(B|B)|A]$$

7. (1) Auf Grund der Abbildung folgt $A|A \equiv \sim A$.



(2) Wie wir wissen, ist die Unverträglichkeit die Negation der Konjunktion:

$$A|B \equiv \sim (A \wedge B)$$

ebenso wie die Negation der Alternative die weder ... noch-Operation ist:

$$A||B \equiv \sim (A \vee B)$$

Deshalb erhalten wir mit Hilfe einer gleichartigen Schlussweise wie in Aufgabe 6 (4):

$$A \wedge B \equiv (A|B)|(A|B)$$

(Daraus ergibt sich sofort, dass man mit Hilfe der Unverträglichkeit ebenfalls alle Operationen ausdrücken kann, nicht nur mit Hilfe der weder ... noch-Operation.)

(3) Auf ähnlich Art, wie wir $A \wedge B \equiv (A||A)|| (B||B)$ erhalten haben, können wir die folgende Beziehung erhalten:

$$A \vee B \equiv (A|A)|(B|B)$$

(4) Wegen $A|B \equiv \sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ können wir die Implikation mit Hilfe der Unverträglichkeit einfacher als mit der weder ... noch-Operation ausdrücken:

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B \equiv \sim A \vee \sim \sim B \equiv A| \sim B \equiv A|(B|B)$$

5. Kapitel

1. (1) Betrachten wir die Form (3) der Schlussfigur. Es ist die Frage zu beantworten, ob ihre Konklusion jedesmal wahr ist, wenn ihre Prämissen wahr sind.

Ihre erste Prämisse ist nur dann wahr, wenn der Wert von Q gleich F ist. Wenn der Wert von Q gleich F ist, dann kann die zweite Prämisse nur noch in einem Fall wahr sein; nämlich dann, wenn der Wert von P gleich W ist. Wenn der Wert von P gleich W ist, dann kann die dritte Prämisse nur in einem Fall wahr sein, nämlich dann, wenn auch der Wert von R gleich W ist. Wenn also alle drei Prämissen wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr. Die Schlussfigur ist richtig.

(2) Diese Frage können wir auch so auffassen: Ist die in der Prämisse stehende Konjunktion wahr [das heißt, ist jede Prämisse von (3) wahr], wenn die Konklusion wahr ist?

Offensichtlich ist das nicht der Fall. Wenn nämlich die Konklusion wahr ist, dann ist in der Form (3) der Schlussfigur die dritte Prämisse wohl wahr, aber von den ersten zwei Prämissen kann jede falsch sein. (Ist der Wert von Q gleich W, so ist beispielsweise die erste falsch, welchen Wert P auch immer hat.)

$$(3) (\sim Q \wedge (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow)) \rightarrow R \equiv W$$

2. Auf Grund des Textes können wir herausfinden, dass die Schlussfiguren (1) und (4) richtig sind aber (2) und (3) nicht. Warum? Wiederum nur auf Grund des Textes können wir auf diese Frage antworten: Deshalb, weil die einzige Prämisse von (1) dasselbe bedeutet wie die folgenden zwei Prämissen zusammen: 'Wenn die Tragfläche des Flugzeuges abbricht, dann ist das Leben der Reisenden in Gefahr.' 'Wenn sich der Motor des Flugzeuges entzündet, dann ist das Leben der Reisenden in Gefahr.'

Die Konklusion stimmt mit der ersten Prämisse überein, also aus der Prämisse folgt die Konklusion.

Eine ähnliche Erklärung können wir auch für (4) geben, hier können wir die Prämisse durch die zwei folgenden Prämissen substituieren:

Wenn es eine gute Ernte geben wird, dann ist der Wert der Arbeitseinheit hoch.

Wenn es eine gute Ernte geben wird, dann können wir das Klavier kaufen.

Die eine Prämisse ist auch hier die gleiche wie die Konklusion.

Warum ist der Schluss (2) falsch? Deshalb, weil entsprechend der Prämisse die Verfärbung nicht nur dadurch erklärt werden kann, dass ich den Füllfederhalter aus einer Flasche mit schlechter Tinte füllte, sondern auch dadurch, dass ich meinen Füllfederhalter nicht gut ausgewaschen habe.

Schließlich empfinden wir die Schlussfigur (3) als fehlerhaft, weil der Regen nicht zu einer guten Ernte genügt, es muss auch ausgiebig besprengt werden. Betrachten wir das alles formal:

(1) Die Form des Schlusses können wir zum Beispiel so wiedergeben:

$$\frac{(T \vee M) \rightarrow G}{T \rightarrow G}$$

Gemäß unserer Vorstellung ist diese Schlussfigur richtig, weil ihre Prämisse gleichbedeutend mit den folgenden zwei Prämissen ist:

$$T \rightarrow G \quad , \quad M \rightarrow G$$

das heißt, mit der einen Prämisse

$$(T \rightarrow G) \wedge (M \rightarrow G)$$

. Wir können vermuten, dass die folgende Beziehung gültig ist (mit dem in die Klammer gesetzten Fragezeichen drücken wir aus, dass wir vorläufig ihre Gültigkeit nur vermuten):

$$(T \vee M) \rightarrow G \equiv (T \rightarrow G) \wedge (M \rightarrow G) \quad (?)$$

Einer ähnlichen Beziehung begegneten wir bereits; ihre Richtigkeit ist offensichtlich, nur müssen wir alle Implikationen in Alternativen umändern und einige schon bekannte Gesetze und Regeln anwenden (de Morgansche Regeln, Distributionsgesetz):

$$\sim (T \vee M) \vee G \equiv (\sim T \vee G) \wedge (\sim M \vee G) \quad (?)$$

$$(\sim T \wedge \sim M) \vee G \equiv (\sim T \vee G) \wedge (\sim M \vee G) \quad (?)$$

$$(\sim T \vee G) \wedge (\sim M \vee G) \equiv (\sim T \vee G) \wedge (\sim M \vee G)$$

Auf beiden Seiten ergibt sich dieselbe Konjunktion. Also trifft obige Beziehung wirklich zu. Wenn diese Konjunktion wahr ist, dann ist auf alle Fälle auch ihr erstes Glied wahr. Die Schlussfigur ist also richtig.

(2) Schreiben wir die Schlussfigur so:

$$\frac{V \rightarrow (S \vee \sim R)}{V \rightarrow S}$$

Formen wir die Implikation um in eine Alternative:

$$\frac{\sim V \vee (S \vee \sim R)}{\sim V \vee S}$$

Wegen der Assoziativität der Alternative erhalten wir daraus:

$$\frac{(\sim V \vee S) \vee \sim R}{\sim V \vee S}$$

Wenn die Prämisse wahr ist, dann ist von den Aussagen $\sim V \vee S$ und $\sim R$ mindestens eine Aussage wahr. Aber es ist überhaupt nicht sicher, dass das gerade die Aussage $\sim V \vee S$ ist. Es kann auch $\sim R$ sein und dann kann $\sim V \vee S$ (das heißt $V \rightarrow S$) falsch sein.

Das heißt, um auf die inhaltliche Schlussweise zurückzukommen, es kann tatsächlich möglich sein, dass ich den Füllfederhalter nicht auswusch, und deshalb kann ich aus der Verfärbung nicht darauf schließen, dass ich ihn aus einer Flasche mit schlechter Tinte füllte.

(3) Schreiben wir die Schlussfigur so:

$$\frac{(R \wedge S) \rightarrow E}{R \rightarrow E}$$

Formen wir die Implikationen wieder um:

$$\frac{\sim (R \wedge S) \vee E}{\sim R \vee E}$$

das heißt nach einer der de Morganschen Regeln [(W 12)]:

$$\frac{(\sim R \vee \sim S) \vee E}{\sim R \vee E}$$

Auf Grund der Eigenschaften der Alternative können wir jetzt auch die Prämisse, wie vorher, zu einer Alternative umformen, deren eines Glied die Konklusion ist:

$$\frac{(\sim R \vee E) \vee \sim S}{\sim R \vee E}$$

Auch jetzt sehen wir wie vorhin: Die Schlussfigur ist fehlerhaft, weil $\sim S$ wahr, aber $\sim R \vee E$ (das heißt $R \rightarrow E$) falsch sein kann, wenn die Prämisse wahr ist. Vom Standpunkt des Textes bedeutet das:

'Es kann sein, dass wir nicht sprengen, und daraus, dass es ausreichend regnet, können wir nicht darauf schließen, dass es eine gute Ernte geben wird.'

(4) Die Schlussfigur können wir jetzt so wiedergeben:

$$\frac{E \rightarrow (A \wedge K)}{E \rightarrow K}$$

Das können wir umformen in:

$$\frac{\sim E \vee (A \wedge K)}{E \rightarrow K}$$

Wendet man das Distributionsgesetz an, (W 9), so erhält man

$$\frac{(\sim E \vee A) \wedge (\sim E \vee K)}{E \rightarrow K}$$

Das können wir auch so schreiben:

$$\frac{\sim E \vee A}{\sim E \vee K} \\ \frac{\sim E \vee K}{E \rightarrow K}$$

Wir können auf Grund von (W 2) die Alternativen in Implikationen umändern:

$$\frac{E \rightarrow A}{E \rightarrow K} \\ \frac{E \rightarrow K}{E \rightarrow K}$$

Wir trennten die Prämisse durch formale Umformungen, wie wir das auf Grund des Textes bereits vermuteten. Die Schlussfigur ist tatsächlich richtig.

6. Kapitel

1. Aus der Annahme, dass H wahr ist, zogen wir bereits zwei Konklusionen (M und A falsch). Was folgt aus der Annahme, dass H falsch ist ?

Auf Grund der zweiten Prämisse folgt aus ihr, dass auch $\sim A$ falsch, das heißt A wahr ist. Daraus folgt auf Grund der dritten Prämisse, dass M wahr ist. Schließlich folgt daraus auf Grund der ersten Prämisse, dass $H \vee \sim Z$ falsch ist (weil $\sim M$ falsch ist und eine Implikation mit einem falschen Hinterglied nur dann wahr sein kann, wenn auch ihr Vorderglied falsch ist). Aber die Alternative kann nur dann falsch sein, wenn beide Glieder falsch sind. Von H nahmen wir das auch an, aber wie wir sehen, ist auch $\sim Z$ falsch, das heißt, Z ist wahr. Wenn also H falsch ist, dann folgt aus den drei Prämissen:

$$(H \vee \sim Z) \rightarrow \sim M, \quad \sim A \rightarrow H, \quad A \rightarrow M$$

dass A , M und Z wahr sind. Mit anderen Worten: Diese Konklusionen folgen aus den vier Prämissen:

$$(H \vee \sim Z) \rightarrow \sim M, \quad \sim A \rightarrow H, \quad A \rightarrow M, \quad \sim H$$

Aus den ursprünglichen Prämissen folgt also $\sim H \rightarrow (A \wedge M \wedge Z)$, und selbstverständlich gilt auch jede der Konklusionen $\sim H \rightarrow A$, $\sim H \rightarrow M$, $\sim H \rightarrow Z$ für sich.

In Worten:

Wenn der Himmel nicht wolkig ist, dann ändert sich das Wetter, der Mond geht zur Zeit auf und ich sehe die Mondfinsternis.

Mit Hilfe von Vermutungen über die Wahrheitswerte der anderen Variablen können wir ebenfalls zusammengesetzte Konklusionen erhalten; zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \sim Z \rightarrow \sim M, \quad \sim Z \rightarrow A, \quad M \rightarrow \sim H, \quad M \rightarrow Z \\ \sim M \rightarrow \sim A, \quad \sim M \rightarrow H, \quad A \rightarrow \sim H, \quad A \rightarrow Z \end{aligned}$$

Aber eine einstellige Konklusion, aus der man den Wert einer einzigen Variablen auch ohne jede Vermutung bestimmen würde, ergibt sich aus diesen Prämissen nicht.

2. Das S tritt in dem Vorderglied der einen Implikation nicht negiert auf, in einem anderen jedoch negiert.

Also können wir daraus schließen, dass S wahr ist (dass es schönes Wetter wird) und auch darauf, dass S falsch ist (dass es schlechtes Wetter wird).

In dem ersten Fall folgt dann, dass der Wert von A gleich W ist (wir machen einen Ausflug), im zweiten, dass der Wert von N gleich W ist (wir werden nass). Im letzteren Fall können wir aus der zweiten Prämisse weiter schließen: Der Wert von $\sim N$ ist gleich F, das ist aber nur dann möglich, wenn $\sim A$ den Wert F hat, das heißt, wenn A wahr ist. Das heißt also, dass wir in diesem Fall einen Ausflug machen. Aber entweder ist S wahr oder falsch, einen dritten Fall gibt es nicht.

Also machen wir auf jeden Fall einen Ausflug. (Am allereinfachsten können wir zu der Konklusion gelangen, wenn wir die zweite Prämisse durch Anwendung der Kontraposition umändern in $N \rightarrow A$. Auf andere Art können wir auch damit beginnen, dass N entweder wahr oder falsch ist.)

3. Ohne Formalisierung folgt offensichtlich, dass meine Uhr nicht richtig geht. Wir betrachten das auch formalisiert:

$$R \rightarrow (P \rightarrow V), \quad P, \quad \sim V$$

Der zweiten und der dritten Prämisse zufolge ist der Wert von P gleich W, der Wert von V gleich F. Setzen wir diese in die erste Prämisse ein:

$$R \rightarrow (W \rightarrow F)$$

das heißt $R \rightarrow F$. Aus der Voraussetzung, dass diese Prämisse wahr ist, folgt darum, dass der Wert von R gleich F ist.

4. Mit der inhaltlichen Schlussweise erhalten wir aus der letzten Prämisse Schritt für Schritt in umgekehrter Richtung, dass wir unsere Prämie erhalten, dass wir den Plan erfüllen, dass nicht viel Korn ausfällt und dass wir die Ernte zur Zeit beenden. (Bei allen Schritten wenden wir den indirekten Beweis an; zum Beispiel: Wenn wir die Prämie nicht erhalten würden, dann würden wir die Küchenmöbel nicht kaufen können, aber wir kaufen sie.)

Wir formalisieren die Prämissen:

1. $\sim E \rightarrow A$; 2. $A \rightarrow \sim P$; 3. $\sim P \rightarrow G$; 4. $G \rightarrow \sim K$; 5. K

Gang der Lösung (mechanisch):

1.-3. Schritt	4.-5. Schritt	6.-7. Schritt	8.-9. Schritt
$\sim E \rightarrow A$	$\sim E \rightarrow A$	$\sim E \rightarrow A$	$\sim E \rightarrow A$
W	W	W	W
$A \rightarrow \sim P$	$A \rightarrow \sim P$	$A \rightarrow \sim P$	$A \rightarrow \sim P$
W	W	W	F W F W
$\sim P \rightarrow G$	$\sim P \rightarrow G$	$\sim P \rightarrow G$	$\sim P \rightarrow G$
W	W F	F W W F	F W W F
$G \rightarrow \sim K$	$G \rightarrow \sim K$	$G \rightarrow \sim K$	$G \rightarrow \sim K$
W F W	F W F W	F W F W	F W F W
K	K	K	K
W	W	W	W
	10.-11. Schritt	12. Schritt	
	$\sim E \rightarrow A$	$\sim E \rightarrow A$	
	F W F	F W W F	
	$A \rightarrow \sim P$	$A \rightarrow \sim P$	
	F W F W	F W F W	
	$\sim P \rightarrow G$	$\sim P \rightarrow G$	
	F W W F	F W W F	
	$G \rightarrow \sim K$	$G \rightarrow \sim K$	
	F W F W	F W F W	
	K	K	
	W	W	

Aus 5: Wert von K gleich W ;

aus 4: Wert von $G \rightarrow \sim W = W$, das heißt Wert von $G \rightarrow F = W$, also Wert von G gleich F ;

aus 3: Wert von $\sim P \rightarrow F = W$, das heißt Wert von $\sim P = F$, also Wert von P gleich W ;

aus 2: Wert von $A \rightarrow F = W$, das heißt Wert von A gleich F ;

aus 1: Wert von $\sim E \rightarrow F = W$, das heißt Wert von $\sim E$ gleich F , also Wert von E gleich W .

Die Konklusion hat die Form

$$\sim G \wedge P \wedge \sim A \wedge E$$

5. Von der letzten Prämisse zur ersten Prämisse schreitend, können wir den Wahrheitswert jeder Variablen mit Ausnahme von T bestimmen.

Die Prämissen lauten: 1. $O \rightarrow (T \wedge \sim E)$; 2. $\sim E \rightarrow \sim B$; 3. B .

Gang der Lösung (mechanisch):

1.-3. Schritt	4.-5. Schritt	6.-8. Schritt
$O \rightarrow (T \wedge \sim E)$	$O \rightarrow (T \wedge \sim E)$	$O \rightarrow (T \wedge \sim E)$
W	W	F W F F
$\sim E \rightarrow \sim B$	$\sim E \rightarrow \sim B$	$\sim E \rightarrow \sim B$
W F	F W W F W	F W W F W
B	B	B
W	W	W

Aus 3: Wert von B gleich W ;

aus 2: Wert von $\sim E \rightarrow \sim W = W$, das heißt Wert von $\sim E \rightarrow F = W$, also Wert von $\sim E$ gleich F und deshalb Wert von E gleich W ;

aus 1: Wert von $O \rightarrow (T \wedge F) = W$, das heißt Wert von $O \rightarrow F = W$, also Wert von O gleich F .

Die Konklusion lautet: $E \wedge \sim O$, das heißt, ich treffe mich mit Elisabeth und gehe morgen abend nicht zu Onkel Johannes. (Ob ich mich morgen abend mit Tante Anna treffe oder nicht, ist auf Grund der Prämissen nicht entscheidbar.)

6. Die Prämissen sind:

1. $\sim \ddot{U} \rightarrow H$; 2. $\sim (\ddot{U} \vee V)$; 3. $\sim B \rightarrow V$

Die zweite Prämisse können wir mit Hilfe einer der de Morganschen Regeln (W 13) in $\sim \ddot{U} \wedge \sim V$ umformen, und diesen Ausdruck können wir in zwei Prämissen zerlegen:

1. $\sim \ddot{U} \rightarrow H$; 2a. $\sim \ddot{U}$; 2b. $\sim V$; 3. $\sim B \rightarrow V$

Gang der Lösung (mechanisch):

1.-3. Schritt	4.-5. Schritt	6.-7. Schritt	8. Schritt
$\sim \ddot{U} \rightarrow H$	$\sim \ddot{U} \rightarrow H$	$\sim \ddot{U} \rightarrow H$	$\sim \ddot{U} \rightarrow H$
W	$W \quad W$	$W \quad W$	$W \quad W$
$\sim \ddot{U}$	$\sim \ddot{U}$	$\sim \ddot{U}$	$\sim \ddot{U}$
$W \quad F$	$W \quad F$	$W \quad F$	$W \quad F$
$\sim V$	$\sim V$	$\sim V$	$\sim V$
$W \quad F$	$W \quad F$	$W \quad F$	$W \quad F$
$\sim B \rightarrow V$	$\sim B \rightarrow V$	$\sim B \rightarrow V$	$\sim B \rightarrow V$
W	W	$F \quad W \quad F$	$F \quad W \quad W \quad F$

Aus 2a: Wert von \ddot{U} gleich F ; aus 2b: Wert von V gleich F ;

aus 1: $W \rightarrow$ Wert von $H = W$, also Wert von H gleich W ;

aus 3; Wert von $\sim B \rightarrow F = W$, also Wert von $\sim B$ gleich F und Wert von B gleich W .

Die Konklusion lautet:

$$\sim \ddot{U} \wedge \sim V \wedge H \wedge B$$

das heißt, sie übervorteilten mich nicht und ich verlor nicht das Geld, ich habe meinen Hundert, ich tat ihn in meine Brieftasche.

7. Die Prämissen lauten: 1. $(\sim G \vee \sim S) \rightarrow (\sim K \vee A)$; 2. $(\sim S \vee \sim K) \rightarrow P$; 3. G ; 4. $\sim P$.

Aus 3: Wert von G gleich W ; aus 4: Wert von P gleich F ;

aus 2: Wert von $(\sim S \vee \sim K) \rightarrow F = W$, also Wert von $\sim S \vee \sim K = F$; daraus folgt, dass $\sim S$ und $\sim K$ den Wert F haben, das heißt, S und K sind wahr;

aus 1: $(F \vee F) \rightarrow (F \vee \text{Wert von } A)$, das heißt $F \rightarrow$ Wert von $A = W$. Daraus folgt, dass wir den Wert von A nicht bestimmen können. Dagegen sind die Werte der anderen Variablen und auch die anderen drei Prämissen eindeutig bestimmt. Die erste Prämisse war also überflüssig.

Die Konklusion lautet:

$$S \wedge K$$

Das heißt, Gabriel hat das Seil bei sich, und wir können auf den Felsen klettern. Ob das schwer oder leicht sein wird, bleibt ein ewiges Geheimnis. (Zur Bestimmung der Werte von S und K genügen auch schon zwei von den vier Prämissen. Welche zwei und warum ?)

8. Die Prämissen lauten 1. $T \leftrightarrow R$; 2. $\sim A \rightarrow \sim R$; 3. $\sim (A \wedge T) \wedge (A \vee T)$.

Die dritte Prämisse würden wir mit unseren alten Bezeichnungen $A \succ \prec T$ schreiben können. Wie wir wissen, drückt zum Beispiel auch $\sim (A \leftrightarrow T)$ und $\sim A \leftrightarrow T$ dasselbe aus. Wir wählen

die letztgenannte Form und schreiben auch die zweite Prämisse ohne Negation [Kontraposition, (W 7)]:

$$T \leftrightarrow R; \quad R \rightarrow A; \quad \sim A \leftrightarrow T$$

Wenn die erste Prämisse wahr ist, bedeutet das: Die Wahrheitswerte von T und R sind dieselben. Wenn die dritte Prämisse wahr ist, bedeutet das: Die Wahrheitswerte von T und A sind einander entgegengesetzt. Diese zwei Prämissen gestatten also nur zwei Möglichkeiten für die Variablen:

1. Fall: Wert von T und R gleich W, Wert von A gleich F,
2. Fall : Wert von T und R gleich F, Wert von A gleich W.

Aber die zweite Prämisse schließt den 1. Fall aus, sie lässt nur den 2. Fall zu. Also fahren wir weder nach Tihany noch nach Füred, sondern nach Almadi.

9. Wir bewiesen schon, dass die folgende Schlussfigur richtig ist:

$$\frac{M \rightarrow (P \wedge \sim V) \quad (E \wedge \sim V) \rightarrow \sim H}{(E \wedge M) \rightarrow \sim H}$$

Wie wir wissen, ist die Richtigkeit dieser Schlussfigur gleichbedeutend damit, dass nachfolgende Schlussfigur richtig ist:

$$\frac{M \rightarrow (P \wedge \sim V) \quad (E \wedge \sim V) \rightarrow \sim H \quad E \wedge M}{\sim H}$$

Daraus, dass die letzte Prämisse wahr ist, folgt, dass sowohl E als auch M wahr ist. Wir setzen das in die zwei Prämissen ein:

$$W \rightarrow (P \wedge \sim V) \quad , \quad (W \wedge \sim V) \rightarrow \sim H$$

In der ersten Prämisse ist das Vorderglied wahr also muss auch das Hinterglied wahr sein, das ergibt für P und $\sim V$ den Wert W. Aus der zweiten Prämisse erhalten wir deswegen

$$(W \wedge W) \rightarrow \sim H$$

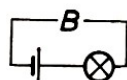
In dem Vorderglied sind beide Konjunktionsglieder wahr, also ist auch die Konjunktion selbst wahr. Aber diese Prämisse kann nur dann wahr sein, wenn das Hinterglied der Implikation auch wahr ist. Aus den Prämissen folgt also wirklich $\sim H$, und so ist auch die ursprüngliche Schlussfigur richtig - wie wir das bereits auf anderem Wege bewiesen haben.

7. Kapitel

1a) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$,

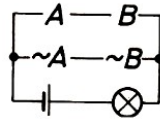
b) $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B) \equiv (A \vee \sim A) \wedge B \equiv W \wedge B \equiv B$

Diesen Ausdruck können wir auch mit dem folgenden viel einfacheren Stromkreis realisieren :

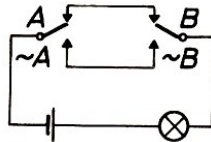


c) $(\sim A \vee B) \wedge (A \vee \sim B)$ oder anders: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, das heißt $A \leftrightarrow B$.

Die Äquivalenz können wir auch mit Hilfe der drei fundamentalen logischen Operationen ausdrücken: $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$. Mit Hilfe eines Stromkreises können wir die Äquivalenz deshalb folgendermaßen verwirklichen:



Hier sind auch keine vier besonderen Schalter nötig, nur zwei Wechselschalter.

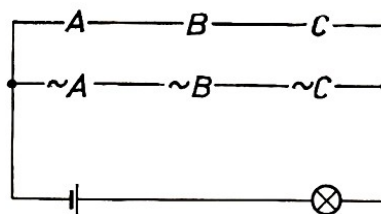


d) $(A \vee \sim B) \wedge (B \vee \sim C) \wedge (C \vee \sim A) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C)$.

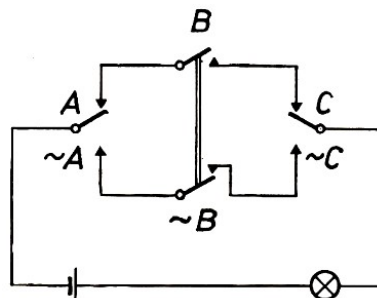
Der Leser kann mit Hilfe mehrmaliger Anwendung des Distributionsgesetzes nachrechnen, dass die auf der linken Seite stehende dreigliedrige Konjunktion wertverlaufsgleich ist mit der auf der rechten Seite stehenden zweigliedrigen Alternative.

Viel mechanisches Rechnen kann man sich aber ersparen, wenn man, auf die Analogie in der Algebra achtend, die drei zweigliedrigen Produkte der linken Seite betrachtet und bedenkt, dass das "Ausmultiplizieren" auf solche "Produkte" mit drei Faktoren (auf dreigliedrige Konjunktionen) führt, in denen meistens dieselbe Variable negiert und auch nicht negiert vorkommt, und somit Alternativglieder mit dem Wert F entstehen.

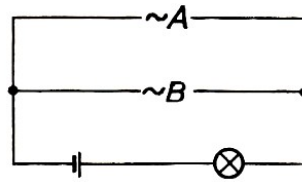
Diese ändern jedoch am Wahrheitswert der gesamten Alternative nichts. Nur die Wahrheitswerte von zwei unserer Alternativglieder werden von F verschieden sein; nämlich genau die, die auf der rechten Seite der Ausgangsbeziehung sichtbar sind. Danach funktioniert auch der folgende Stromkreis:



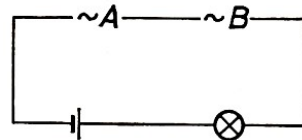
Mit Wechselschaltern können wir die Schaltung vereinfachen:



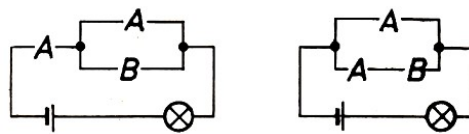
2. a) Wie bereits bekannt ist, gilt $A|B \equiv \sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ (W 12). Das gesuchte Schaltbild sieht folgendermaßen aus:



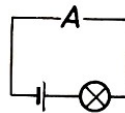
b) $A||B \equiv \sim A \wedge \sim B$ (W 13). Das Schaltbild hat folgendes Aussehen:



c) und d): Wir erhalten folgende Schaltbilder:



Freilich sind die mit A bezeichneten Schalter in beiden Fällen "miteinander verknüpft": entweder sind alle beide geöffnet oder alle beide sind geschlossen. An den Abbildungen ist sofort zu sehen, dass der Stromkreis geöffnet ist, wenn die Schalter A alle geöffnet sind, in welcher Stellung sich B auch immer befindet. Wenn hingegen die Schalter A geschlossen sind, dann ist, in welcher Stellung sich B auch immer befindet, in beiden Fällen der Stromkreis geschlossen. Wie wir sehen, ist das allereinfachste Schaltbild von $A \wedge (A \vee B)$ und auch das allereinfachste Schaltbild von $A \vee (A \wedge B)$ das folgende:



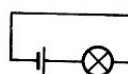
Zugleich erhalten wir zwei wichtige Beziehungen:

$$(W36) \quad A \wedge (A \vee B) \equiv A \quad , \quad (W37) \quad A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

Diese Beziehungen nennt man Absorptionsgesetze.⁵⁰

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad A \rightarrow \{B \rightarrow [C \rightarrow (B \rightarrow C)]\} &\equiv \sim A \vee \{\sim B \vee [\sim C \vee (\sim B \vee C)]\} \\ &\equiv \sim A \vee \sim B \vee \sim C \vee \sim B \vee C \equiv \sim A \vee \sim B \vee W = W \end{aligned}$$

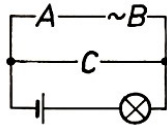
Der gegebene Ausdruck ist also allgemeingültig, d.h., der Stromkreis ist stets (d.h. bei jeder Stellung des Schalters) geschlossen, die Lampe brennt immer. Dazu ist keine komplizierte Schaltung nötig:



⁵⁰Absorption: Lateinische: Wort, es bedeutet Verschlucken. Das Konjunktionsglied A "verschluckt" die Alternative $A \vee B$, und ebenso verschluckt das Alternativglied A auch die Konjunktion $A \wedge B$.

(Offensichtlich entspricht jedem allgemeingültigen Ausdruck ein Stromkreis, der stets geschlossen ist.)

f) $[A \wedge (B \rightarrow C)] \vee C \equiv [A \wedge (\sim B \vee C)] \vee C \equiv (A \wedge \sim B) \vee (A \wedge C) \vee C \equiv (A \wedge \sim B) \vee C$
 Das Schaltbild ist folgendes:



g) Wir formen diesen Ausdruck mit Hilfe von W 2 um:

$$\sim (\sim A \vee B) \vee [\sim (\sim C \vee A) \vee (\sim C \vee B)]$$

Daraus erhält man [unter anderem mit Hilfe von (W 13)]:

$$(A \wedge \sim B) \vee B \vee (C \wedge \sim A) \vee \sim C$$

Daraus ergibt sich [unter anderem mit Hilfe von (W 22)]:

$$[(A \vee B) \wedge W] \vee [W \wedge (\sim A \vee \sim C)]$$

Schließlich gilt:

$$[(A \vee B) \wedge W] \vee [W \wedge (\sim A \vee \sim C)] \equiv (A \vee B) \vee (\sim A \vee \sim C)$$

und

$$A \vee \sim A \vee B \vee \sim C \equiv W \vee B \vee \sim C \equiv W$$

Der gegebene Ausdruck ist also allgemeingültig. Die Schaltung ist somit dieselbe wie bei Aufgabe e).

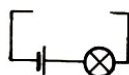
h) Wir versuchen es, statt zu rechnen, mit Hilfe einer einfachen Überlegung. Diese dreigliedrige Konjunktion kann nur dann wahr sein, wenn jedes einzelne Konjunktionsglied wahr ist.

Nehmen wir an, dass A falsch ist. Wenn die gesamte Aussage wahr sein soll, muss auch B falsch sein. Aber dann kann das dritte Glied nur in dem Fall wahr sein, wenn $A \rightarrow C$ auch falsch ist.

Jedoch $A \rightarrow C$ ist wahr, denn wir gingen davon aus, dass A falsch ist. Die Aussage kann dann also nicht wahr sein, wenn A falsch ist. Es scheint also, dass A wahr ist, wenn der Wert des Ausdrucks W sein soll.

Dann ist das zweite Konjunktionsglied aber auf jeden Fall wahr. Das erste wird dann wahr sein, wenn $\sim B$ und auch C wahr sind, das heißt, wenn die Werte von $\sim B$ und C gleich W sind. Aber nun ist in dem dritten Konjunktionsglied das Vorderglied ($A \rightarrow C$) wahr, das Hinterglied hingegen falsch.

Also kann die Aussage auch dann nicht wahr werden, wenn A wahr ist. Da aber der Wert von A eine der Werte W oder F sein muss, ist der Wert des Ausdrucks stets gleich F .



(Es ist klar, dass alle immer falschen Aussagen einem Stromkreis entsprechen, der stets geöffnet ist.)

3. Alle beide Schalter können zweierlei Stellungen einnehmen:

Der Stromkreis ist geschlossen (Schalthebel zeigt nach oben) oder der Stromkreis ist geöffnet (Schalthebel zeigt nach unten).

Die Aufgabe gilt dann als gelöst, wenn wir erreichen, dass das Licht genau dann brennt, falls entweder alle beide Schalthebel nach oben oder beide nach unten zeigen.

(Freilich ist auch eine umgekehrte Schaltung denkbar, bei der die Beleuchtung im ersten Fall ausgeschaltet, im zweiten Fall eingeschaltet ist.)

Die Aufgabe verlangt von uns einfach die Anfertigung einer der Äquivalenz entsprechenden Schaltung. Diese Schaltung sahen wir schon (Lösung der Aufgabe 1 c).

9 Nachwort

"Die mathematische Logik kann auf eine kurze, die traditionelle aristotelische auf eine lange Vergangenheit zurückblicken. Zwischen beiden besteht kein anderer Unterschied als der, dass es sich um ein und dieselbe Wissenschaft in verschiedenen Entwicklungsstadien handelt. Die traditionelle klassische Logik verhält sich so zur mathematischen Logik wie der Embryo zum erwachsenen Organismus".

Diese Worte stammen nicht von besonders voreingenommenen Mathematikern. Philosophie-Professoren schrieben sie als erste Sätze in einem Buch über die mathematische Logik⁵¹. Es ist möglich, dass jemand eine andere Meinung hat (sogar verschiedene, damit im Widerspruch stehende Ansichten gibt es); aber der Vergleich verdient auch dann Aufmerksamkeit.

Es wäre ein Fehler, das geschichtlich Interessante der traditionellen Logik zu bezweifeln. Als einen guten Arzt wird man wohl kaum den bezeichnen, der die Tätigkeit des Organismus eines erwachsenen Menschen kennt, der aber kein Wissen über die Entwicklungsgeschichte des Individuum oder der ganzen Menschheit hat. In die Hände eines Arztes, der wohl die Entwicklungsgeschichte des Menschen vollständig bis zu seiner Geburt hervorragend kennt, von da an aber gar nicht oder nur wenig, würde sich aber ebenfalls keiner von uns gern begeben.

Wir sind Zeuge eines Prozesses, der dem ähnlich ist, als die gebildete Menschheit stufenweise der so lange alleinherrschenden römischen Zahlenschrift Lebewohl sagte und die arabischen Ziffern schreiben lernte.

Viele Lehrmeister sträubten sich damals gegen die "neue Mode", viele prophezeiten, dass sich diese komplizierte neuartige Schreibweise niemals verbreiten wird und begründeten ihre Ansicht folgendermaßen:

Jedermann versteht I, II, III auf den ersten Blick, aber wer würde verstehen, dass die Zwei durch 2 und die Drei durch 3 dargestellt werden ?

Bei der V kann auch jedermann sehen, dass sie durch eine geöffnete Handfläche mit fünf Fingern symbolisiert wird, X bedeutet zweimal soviel, das heißt zehn, die XII überdies noch zwei mehr, das heißt zwölf.

Aber was für eine verrückte Idee, das Zeichen für die Fünf so zu verformen, dass 5 daraus entsteht, und für zwölf 12 zu schreiben? Wenn es auch gelingt, zu erklären, dass 1 die Eins bedeutet und 2 die Zwei, unter 12 wird sicher jeder drei verstehen.

Die neuartige Zahlenschrift verbreitete sich dennoch. Ihre Verbreitung war sowohl aus wissenschaftlichen als auch aus praktischen Gründen unbedingt notwendig. Wir würden sie in ihrer Bedeutung neben die Buchstabenschrift (vielleicht sogar darüber) setzen können. Kaum traf man im Verlauf der Kulturgeschichte der Menschheit eine glücklichere Bezeichnungsweise an.

Die mathematische Logik aber - das ist besonders zu betonen - unterscheidet sich nicht nur in ihrer Bezeichnungsweise von der klassischen Logik, sondern sie hat einen ungleich größeren Vorzug.

"Wieso denn", so mag der eine oder der andere unserer Leser fragen, "will die mathematische Logik für sich selbst das gesamte Gebiet der Logik in Anspruch nehmen ? Begnügt sie sich nicht damit, dass sie die Logik der Mathematik ist und den logischen Apparat der in der Mathematik vorkommenden Gedankengänge liefert ?"

⁵¹Lies im Literaturverzeichnis unter 2.

Die mathematische Logik abstrahiert viele Ergebnisse aus mathematischen Schlüssen, und ihr erstes Anwendungsgebiet ist auch die Mathematik. Aber das menschliche Denken ist eine Einheit und unteilbar!

Nichts, und auch nicht die Logik, kann nur auf die Mathematik angewendet, auf andere Wissenschaften und Gedankengänge im täglichen Leben jedoch nicht angewendet werden. Der mathematischen Logik gebührt nicht wegen ihres Gegenstandes, sondern wegen ihrer Methodik das Attribut "mathematisch".

Zum Zweck der Illustrierung - und auch deshalb, weil wir uns auf sowenig Vorkenntnisse wie möglich stützen - entlehnte unser Buch die Beispiele überwiegend aus dem Bereich des täglichen Lebens.

Am Schluss des Buches schulden wir dem Leser Rechenschaft.

Womit beschäftigten wir uns ? Welchen Teil der mathematischen Logik stellten wir vor ?

Leider nur ein ganz kleines Bruchstück. Aus der Vogelperspektive hätten wir einen viel größeren Teil überblicken können.

Aber es war nicht unser Ziel, dass wir mit entlegenen oberflächlichen Kenntnissen dienen, sondern dass wir das Wenige, mit dem wir den Leser bekannt machten, in seinem Wirken vorstellen. Aus diesem Grunde machten wir schon zu Beginn des Buches eine sehr starke Einschränkung.

Wir sagten, dass wir in diesem Band die Aussagen nur so weit zerlegen, bis wir wieder zu Aussagen, den nicht weiter in ihre Bestandteile zerlegbaren "elementaren Aussagen" gelangen. Damit verzichteten wir darauf, in diesem Band sogar das enge Teilgebiet der Logik, das die klassische Logik umfasst, zu untersuchen.

Wir beschränkten uns auf ein noch engeres Teilgebiet der Logik, auf den Aussagenkalkül. Wir sprachen z.B. nicht von den in der klassischen Logik so typischen syllogistischen Schlussweisen. Hierher gehört zum Beispiel der Schluss, den wir anführten:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Pferde sind Säugetiere.} \\ \text{Alle Säugetiere sind Wirbeltiere.} \\ \hline \text{Alle Pferde sind Wirbeltiere.} \end{array}$$

Dieser Schluss ist nahe verwandt mit der folgenden (offensichtlich richtigen) Schlussfigur:⁵²

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

doch können wir nicht sagen, dass die Richtigkeit des ersteren Schlusses allein auf Grund der Richtigkeit der letzteren Schlussfigur beweisbar wäre. Wenn wir dessen Richtigkeit oder die Richtigkeit jedes anderen syllogistischen Schlusses nachweisen wollen, dann müssen wir die Theorie der "von den Variablen abhängigen Aussagen", die Theorie der logischen Funktionen benutzen.

In diesem Buch beschränkten wir unsere Aufmerksamkeit auf die "konstanten Aussagen", zum Beispiel "12 · 14 - 13² ist negativ". Vielmehr nannten wir nur diese Formen Aussagen (deshalb

⁵²In der klassischen Logik nennt man das "bedingten Syllogismus". Der bedingte Syllogismus ist eine ebensolche in den Aussagenkalkül gehörende Schlussform wie der disjunktive Syllogismus, die eigentlichen Syllogismen aber gehören in ein weiteres Kapitel der Logik, in den Funktionenkalkül.

setzten wir die ungenau benutzten Worte von den Variablen abhängige Aussagen und konstante Aussagen in Anführungsstriche).

Wenn zum Beispiel jemand sagt: " $12 \cdot 14 - n$ ist negativ", dann können wir nicht entscheiden, ob er die Wahrheit sagt oder nicht, es hat sogar keinen Sinn, davon zu sprechen, ob das wahr ist oder nicht; das ist einfach keine Aussage, sondern eine von n abhängige logische Funktion⁵³.

Erst wenn wir für n konkrete Werte wählen (zum Beispiel $n = 1, n = 168, n = 200, n = 1000$), erhalten wir stets eine Aussage. (Die Wahrheitswerte der so erhaltenen Aussage sind dann der Reihe nach: falsch, falsch, wahr, wahr).

Die logischen Funktionen können nicht nur von derartigen Zahlenvariablen abhängen, sondern auch von anderen Variablen. Sehen wir uns eine sehr einfache logische Funktion an:

Peter ist sieben Jahre alt. Ist das wahr oder nicht? Das ist davon abhängig, auf welchen der vielen auf der Erde lebenden Peter es sich bezieht, außerdem auch davon, zu welchem Zeitpunkt wir es sagen. Es kann sein, dass es jetzt auf den einen Peter bezogen wahr ist, aber nicht wahr, wenn wir es auf einen anderen Peter beziehen; im nächsten Jahr kann es jedoch genau umgekehrt sein.

Die klassische Logik gelangt nicht über die einstelligen logischen Funktionen hinaus⁵⁴; sie untersucht Funktionen von höchstens einer Variablen.

Die mathematische Logik dagegen setzte einerseits einen Punkt hinter die Theorie der einstelligen Funktionen dadurch, dass sie bewies: alle einschlägigen Probleme sind mechanisch lösbar; andererseits erzielte sie gewaltige Ergebnisse auch in der Theorie der mehrstelligen Funktionen.

Von ein- und mehrstelligen logischen Funktionen wird in einem später erscheinenden II. Band dieses Buches die Rede sein. Bis dahin geben wir im Literaturverzeichnis die Titel einiger Bücher für die Leser an, die Lust zum weiteren Studium haben.

Wir vermieden in diesem Band die Probleme der logischen Funktionen. So setzten wir stets voraus, dass von einem bestimmten Peter die Rede war, in einem bestimmten Zeitpunkt, und dann war Peter ist sieben Jahre alt bereits keine logische Funktion mehr, sondern eine Aussage. Aber letzten Endes müssen wir noch sagen, dass es logische Funktionen überall gibt, und die allertiefsten Probleme der mathematischen Logik beziehen sich gerade auf diese.

⁵³Das Wort Funktion benutzen wir, nebenbei bemerkt, im ganzen Nachwort ungenau. Wir würden genauer sagen müssen: "die Bedingung $12 \cdot 14 - n$ ist negativ ergibt eine logische Funktion (wenn wir außerdem noch festlegen, welchem Zahlbereich wir die Werte für n entnehmen wollen). Ebenso ungenau sprechen die Mathematiker zum Beispiel von der "Funktion 2^x " anstatt von der "durch den Term 2^x gegebenen Funktion".

Wir würden die zweideutige Verwendung des Wortes Funktion vermeiden können, wenn wir sagen, dass auch die Zahl 2^x nur eine von x abhängige Zahl, und die Aussage " $12 \cdot 14 - n$ ist negativ" nur eine von n abhängige Aussage ist (wie wir das vorher in Anführungsstrichen auch niederschrieben); dann würden wir aber die Worte Zahl und Aussage in zweierlei Sinn benutzen.

⁵⁴Einstellige logische Funktionen kommen zum Beispiel - in verkleideter Form - jetzt auf S. 127 wieder zitierten Schluss vor. Die erste Prämisse können wir zum Beispiel in folgender Form abfassen: "Für alle Dinge ist wahr: Wenn das Ding ein Pferd ist, dann ist das Ding ein Säugetier". Ähnlich können wir die andere Prämisse und auch die Konklusion formulieren. Das erscheint ungewöhnlich spitzfindig, doch sie ermöglicht es, mit den bisherigen Methoden bereits nicht analysierbare Aussagen weiter zu zerlegen; wenn wir die Worte "für alle Dinge ist wahr" weglassen, dann bleibt eine Implikation, deren Vorderglied und deren Hinterglied auch eine einstellige logische Funktion ist. Es sind dies die Funktionen: "das Ding ist ein Pferd" und "das Ding ist ein Säugetier", die man auch in der Form " x ist ein Pferd" bzw. " x ist ein Säugetier" schreiben könnte. Es hat keinen Sinn davon zu sprechen, ob sie wahr sind, das hängt davon ab, was "das Ding" ist.

Literaturverzeichnis

Die Aufzählung ist eine Auswahl. Eine annähernd vollständige Bibliographie der mathematischen Logik ist in dem 1. und 3. Jahrgang und in den Rezensionen der folgenden Jahrgänge des Journal of Symbolic Logic zu finden. Nach den Titeln publizieren wir in der Klammer die Zeichen der fünf allerwichtigsten logischen Operationen nach der Bezeichnung in den betreffenden Büchern, in der Reihenfolge: Negation, Konjunktion, Alternative, Implikation, Äquivalenz.

1. Kalmar, Laszlo: Grundlagen der Mathematik. Bd. 2. (Mathematische Logik, grundsätzliche Fragen der Mathematik.) Budapest, 1955.

($\neg, \&, \vee, \rightarrow, \sim$)

Von den in anderen Sprachen erschienenen mathematischen logischen Büchern führen wir zuerst einige auf, die man auch mit geringen Vorkenntnissen hinreichend gut verfolgen kann:

2. Basson, A. H., und O'Connor, D. J.: Introduction to Symbolic Logic, 2nd ed., London, 1957.

($\sim, \cdot, \vee, \supset, \equiv$)

3. Copi, I. M.: Symbolic Logic, New York, 1954.

($\sim, \cdot, \vee, \supset, \equiv$)

4. Quine, W. V.: Methods of Logic, New York, 1950.

($\neg, \cdot, \vee, \supset, \equiv$)

5. Popow, A. H. : Einführung in die mathematische Logik, Leningrad, 1959 (russisch) (Überwiegend eine historische Übersicht, die Bezeichnungen, werden auf verschiedene Weise verwendet.)

6. Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik, Wien, 1937.

(Die logischen Operationen umschreibt er mit Worten.)

Als einführende, mehr mathematische Orientierung erfordernde Bücher kann man ansehen:

7. Asser, G.: Einführung in die mathematische Logik, Teil 1, Leipzig 1959.

($\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

8. Hilbert, D., und Ackermann, W.: Grundzüge der theoretischen Logik, 4. Aufl., Berlin, 1959.

($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

9. Nowikow, P.S.: Elemente der mathematischen Logik, Moskau, 1959 (russisch)

($\neg, \&, \vee, \rightarrow, \sim$)

10. Quine, W.V.: Mathematical Logic, rev. ed., Cambridge (Mass.), 1951.

($\sim, \cdot, \vee, \supset, \equiv$)

Die folgenden Bücher fordern eine gründliche Beschäftigung mit der Logik:

11. Church, A.: Introduction to Mathematical Logic, Vol. I., Princetown, 1956.

(\sim , nebeneinander schreiben, \wedge, \supset, \equiv)

12. Hilbert, D., und Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik, Berlin, 1. Band 1934, II. Band 1939.

($\neg, \&, \vee, \rightarrow, \sim$)

13. Kleene, S. C.: Introduction to Metamathematics, New York, 1952.

($\neg, \&, \vee, \supset, \sim$)

14. Suranyi, Janos: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, Budapest, 1959.

$(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$

In erster Linie philosophisch interessant:

15. Klaus, G.: Einführung in die formale Logik, Berlin, 1958.

$(\neg, \cdot, \vee, \rightarrow, \sim)$

Zeitschriften, die sich auf die mathematische Logik und ihre Anwendung spezialisierten: Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung,

The Journal of Symbolic Logic,

Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.

Auch in vielen anderen Zeitschriften erscheinen Artikel, die sich mit der mathematischen Logik beschäftigen; auch diese beziehen sich auf die Rezensionen der obigen Zeitschriften.

Die wichtigsten wertverlaufsgleichen Ausdrücke

- (W 1) $\sim\sim A \equiv A$
(W 2) $\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$
(W 3) $A \wedge B \equiv B \wedge A$
(W 4) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
(W 5) $A \vee B \equiv B \vee A$
(W 6) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
(W 7) $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$
(W 8) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
(W 9) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
(W 10) $A \wedge A \equiv A$
(W 11) $A \vee A \equiv A$
(W 12) $\sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$
(W 13) $\sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$
(W 14) $A \rightarrow B \equiv \sim (A \wedge \sim B)$
(W 15) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
(W 16) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$
(W 17) $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$
(W 18) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
(W 19) $A \rightarrow A \equiv W$
(W 20) $A \leftrightarrow A \equiv W$
(W 21) $A \wedge \sim A \equiv F$
(W 22) $A \vee \sim A \equiv W$
(W 23) $A \rightarrow \sim A \equiv \sim A$
(W 24) $A \leftrightarrow \sim A \equiv F$
(W 25) $\sim A \rightarrow A \equiv A$
(W 26) $A \wedge W \equiv A$
(W 27) $A \wedge F \equiv F$
(W 28) $A \vee W \equiv W$
(W 29) $A \vee F \equiv A$
(W 30) $A \rightarrow W \equiv W$
(W 31) $A \rightarrow F \equiv A$
(W 32) $W \rightarrow A \equiv A$
(W 33) $F \rightarrow A \equiv W$
(W 34) $A \leftrightarrow W \equiv A$
(W 35) $A \leftrightarrow F \equiv \sim A$
(W 36) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
(W 37) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$