
H. Belkner, S. Brehmer

Lebesguesche Integrale

1984 Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

MSB: Nr. 113

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Der vorliegende Band gibt eine Einführung in die Lebesguesche Integrationstheorie.

Im ersten Kapitel werden zunächst wichtige Verbandsoperationen mit Funktionen entwickelt. Ferner wird die Unzulänglichkeit des Riemannsches Integrals gezeigt, und hieraus werden Forderungen abgeleitet, die ein allgemeinerer Integralbegriff erfüllen sollte.

Im wesentlichen ist dies der Satz von Beppo Levi, der als charakterisierende Eigenschaft des Lebesgueschen Integrals herausgestellt wird. Aus der Annahme, dass ein solches Integral auf einem Vektorverband $L[a, b]$ existiere, werden dann die wichtigsten Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals, insbesondere der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, abgeleitet.

Mit diesem Vorgehen soll dem Leser möglichst zeitig der Nutzen des verallgemeinerten Integralbegriffs bewusst gemacht werden.

Das folgende Kapitel widmet sich den Zusammenhängen zwischen Maß und Integral. Erst hier wird der für die Lebesguesche Integrationstheorie so fundamentale Begriff der Menge vom Maße Null eingeführt, und seine wichtigsten Eigenschaften werden abgeleitet.

Im dritten Kapitel erfolgt dann der Nachweis, dass ein Integral mit den geforderten Eigenschaften tatsächlich existiert. Dieses Kapitel stellt ebenso wie das nachfolgende an den Leser recht hohe Anforderungen.

Das letzte Kapitel gibt schließlich einen Ausblick auf zweidimensionale Lebesguesche Integrale. Insbesondere wird als dritter Hauptsatz der Lebesgueschen Integrationstheorie der Satz von Fubini über die Berechnung des zweidimensionalen Lebesgueschen Integrals durch ein Doppelintegral bewiesen.

Die ausführlichen Beweisführungen, die zahlreichen in den Text eingestreuten Beispiele und die am Schluss eines Abschnittes zusammengestellten Aufgaben sollen dem Leser das Eindringen in die Grundbegriffe der Lebesgueschen Integrationstheorie erleichtern und seine Freude an dieser mathematischen Disziplin wecken helfen.

Unser Dank gilt dem Verlag sowie der Druckerei für die angenehme Zusammenarbeit und die sorgfältige Gestaltung des vorliegenden Bändchens.

Potsdam, im Sommer 1984

H. Belkner, S. Brehmer

Inhaltsverzeichnis

1	Begriff und Eigenschaften Lebesguescher Integrale	4
1.1	Rechenoperationen in Vektorverbänden	4
1.2	Levi-Folgen und Levi-Funktionen	8
1.3	Der Satz von Beppo Levi	15
1.4	Der Satz über die majorisierte Konvergenz	22
2	Lebesgue-messbare Mengen und Lebesgue-messbare Funktionen	29
2.1	Lebesgue-messbare Mengen	29
2.2	Lebesgue-messbare Funktionen	39
2.3	Verallgemeinerte Integrale nichtnegativer Lebesgue-messbarer Funktionen . . .	53
2.4	Der Begriff „fast überall“	58
2.5	Integration über Teilintervalle, Substitutionsregel	65
2.6	Integration über Lebesgue-messbare Teilmengen von \mathbb{R}	68
3	Konstruktion Lebesguescher Integrale	80
3.1	Lebesguesche Elementarintegrale	80
3.2	Verallgemeinerte Integrale von Levi-Funktionen	82
3.3	Lebesguesche Fortsetzung eines Lebesgueschen Elementarintegrals	83
3.4	Monoton wachsende Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen	86
4	Das zweidimensionale Lebesguesche Integral	91
4.1	Konstruktion des zweidimensionalen Lebesgueschen Integrals	91
4.2	Der Satz von Fubini	98
5	Lösungen der Aufgaben	103

1 Begriff und Eigenschaften Lebesguescher Integrale

1.1 Rechenoperationen in Vektorverbänden

Das System $E[a, b]$ aller über das Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen bildet eine Verbandsalgebra, die die Verbandsalgebra $C[a, b]$ aller auf $[a, b]$ stetigen Funktionen umfasst. Für jede Funktion $f \in E[a, b]$ ist das Riemannsche Integral

$$J_R(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (1.1.1)$$

definiert. Für alle Funktionen $f, g \in E[a, b]$ und alle reellen Zahlen λ gelten die Rechenregeln

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad (1.1.2)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (1.1.3)$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0, \quad \text{falls } f \leq 0 \text{ ist} \quad (1.1.4)$$

Aus ihnen hatten wir¹ die weiteren Regeln

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{falls } f \leq g \text{ ist} \quad (1.1.5)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.1.6)$$

abgeleitet.

Es gibt bereits relativ einfache beschränkte reelle Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Dies gilt beispielsweise für die Dirichletsche Funktion

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rationale Zahl} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrationale Zahl} \end{cases}$$

(vgl. MSB 109, Beispiel 2.6.1). In Abschnitt 1.2 werden wir zeigen, dass der Riemannsche Integralbegriff auch in anderer Hinsicht unvollkommen ist. Unser Ziel ist es daher, den Riemannschen Integralbegriff so zu erweitern, dass wir eine $E[a, b]$ umfassende Menge $L[a, b]$, das System der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten, denen ebenfalls ein Integral zugeordnet werden kann.

Die Anwendung des verallgemeinerten Integralbegriffs auf Funktionen $\varphi \in E[a, b]$ soll dabei auf das bereits definierte Riemannsche Integral führen.

Bei der Konstruktion des neuen Integralbegriffs benötigen wir einige weitere Operationen mit Funktionen, die wir zunächst bereitstellen wollen. Es seien f, g reelle Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich. Dann verstehen wir unter²

$$f^+, \quad f^-, \quad f \sqcup g, \quad f \sqcap g$$

¹Im Buch "Riemannsche Integrale", MSB Nr. 109

²Gelesen: f plus bzw. f minus bzw. Supremum von f und g bzw. Infimum von f und g .

die durch

$$f^* := \frac{|f| + f}{2} \quad (1.1.7)$$

$$f^- := \frac{|f| - f}{2} \quad \text{bzw. durch} \quad (1.1.8)$$

$$(f \sqcup g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad (1.1.9)$$

$$(f \sqcap g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (1.1.10)$$

für alle $x \in D$ definierten reellen Funktionen. Wegen

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{f(x)+f(x)}{2} = f(x) & \text{für } f(x) \geq 0 \\ \frac{-f(x)+f(x)}{2} = 0 & \text{für } f(x) < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$f^-(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x)}{2} = 0 & \text{für } f(x) \geq 0 \\ \frac{-f(x)-f(x)}{2} = -f(x) & \text{für } f(x) < 0 \end{cases}$$

heißt die Funktion f^+ bzw. f^- der positive bzw. der negative Teil von f und die Funktion $f \sqcup g$ bzw. $f \sqcap g$ das Supremum bzw. das Infimum der Funktionen f, g . In Abb. 1.1.1 sind die Bilder von f, f^+ und f^- bzw. in Abb. 1.1.2 die Bilder der Funktionen f, g und $f \sqcup g, f \sqcap g$ veranschaulicht.

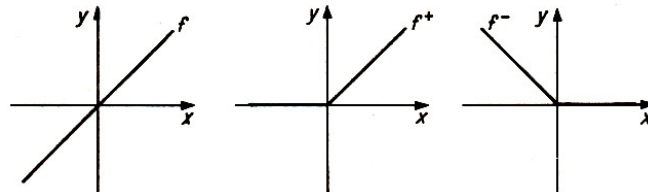


Abb. 1.1.1

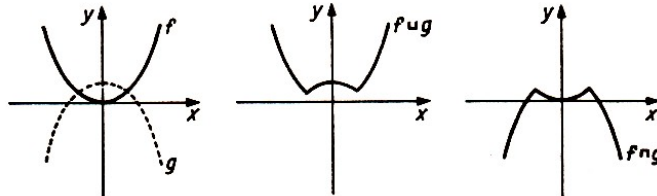


Abb. 1.1.2

Satz 1.1.1. Es seien f, g, h reelle Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich D . Dann gelten folgende Rechenregeln:

$$f \sqcup g = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] \quad (1.1.11)$$

$$f \sqcap g = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|] \quad (1.1.12)$$

$$f \sqcup g = g \sqcup f \quad (1.1.13)$$

$$(f \sqcup g) \sqcup h = f \sqcup (g \sqcup h) \quad (1.1.14)$$

$$(f \sqcup g) = (f + h) \sqcup (g + h) \quad (1.1.15)$$

$$(-f) \sqcup (-g) = -(f \sqcap g) \quad (1.1.16)$$

$$(f \sqcap g) \sqcap h = f \sqcap (g \sqcap h) \quad (1.1.17)$$

Beweis. a) Es sei x beliebig mit $x \in D$. Für $f(x) \geq g(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] &= \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + f(x) - g(x)] = f(x) \\ &= \max\{f(x), g(x)\} = f(\sqcup g)(x) \end{aligned}$$

bzw. für $f(x) < g(x)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] &= \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - f(x) + g(x)] = g(x) \\ &= \max\{f(x), g(x)\} = f(\sqcup g)(x) \end{aligned}$$

b) Analog zu a.) beweist man (1.1.12). c) Auf Grund von (1.1.11) gilt

$$f \sqcup g = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] = \frac{1}{2}[g + f + |g - f|] = g \sqcup f$$

d) Es sei x beliebig mit $x \in D$. Dann ist

$$a := [(f \sqcup g) \sqcup h](x) = \max\{(f \sqcup g)(x), h(x)\} = \max\{\max\{f(x), g(x)\}, h(x)\}$$

bzw.

$$b := [f \sqcup (g \sqcup h)](x) = \max\{f(x), \max\{g(x), h(x)\}\}$$

d1) Im Fall $f(x) \leq g(x)$ ist $a = \max\{g(x), h(x)\}$.

Es sei $g(x) \leq h(x)$. Dann ist auch $f(x) \leq h(x)$, und es gilt $a = h(x)$, $b = \max\{f(x), h(x)\} = h(x)$

Ist $g(x) > h(x)$, so erhalten wir $a = g(x)$, $b = \max\{f(x), g(x)\} = g(x)$.

d2) Falls $f(x) > g(x)$ ist, so gilt $a = \max\{f(x), h(x)\}$.

Es sei $f(x) \leq h(x)$. Dann ist auch $g(x) < h(x)$, und es gilt $a = h(x)$, $b = \max\{f(x), h(x)\} = h(x)$.

Es sei $f(x) > h(x)$. Wegen $f(x) > g(x)$ und $f(x) > h(x)$ ist dann $a = f(x)$, $b = \max\{f(x), \max\{g(x), h(x)\}\} = f(x)$.

e) Auf Grund von (1.1.11) ist

$$\begin{aligned} (f + h) \sqcup (g + h) &= \frac{1}{2}[f + h + g + h + |f + h - g - h|] = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] + h \\ &= (f \sqcup g) + h \end{aligned}$$

f) Es ist

$$(-f) \sqcup (-g) = \frac{1}{2}[-f - g + |-f + g|] = -\frac{1}{2}[f + g - |f - g|] = -(f \sqcap g)$$

g) Mit Hilfe von (1.1.16) und (1.1.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} (f \sqcap g) \sqcap h &= -[[-(f \sqcap g)] \sqcup (-h)] = -[(-f) \sqcup (-g)] \sqcup (-h) \\ &= -[(-f) \sqcup [(-g) \sqcup (-h)]] = -[(-f) \sqcup [-(g \sqcap h)]] = f \sqcap (g \sqcap h) \end{aligned}$$

Auf Grund von (1.1.7), (1.1.8), (1.1.11) und (1.1.12) gilt der

Satz 1.1.2.: Jeder Vektorverband enthält mit den Funktionen f, g auch die Funktionen $f^+, f^-, f \sqcup g$ und $f \sqcap g$.

Die Beziehungen (1.1.14) und (1.1.17) besagen, dass die Operationen \sqcup und \sqcap assoziativ sind und die Klammern in (1.1.14) und (1.1.17) also auch weggelassen werden können. Dies rechtfertigt folgende Festlegungen:

Es seien f_0, f_1, \dots, f_n reelle Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich D . Dann verstehen wir unter

$$\bigsqcup_{k=0}^n f_k \quad \text{bzw.} \quad \bigsqcap_{k=0}^n f_k$$

die durch

$$\left(\bigsqcup_{k=0}^n f_k \right) (x) := \max\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\} \quad (1.1.18)$$

bzw.

$$\left(\bigsqcap_{k=0}^n f_k \right) (x) := \min\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\} \quad (1.1.19)$$

für alle $x \in D$ definierte reelle Funktion. In Abb. 1.1.3 sind die Bilder der Funktionen f_0, f_1, f_2 und $f_0 \sqcup f_1 \sqcup f_2$ veranschaulicht.

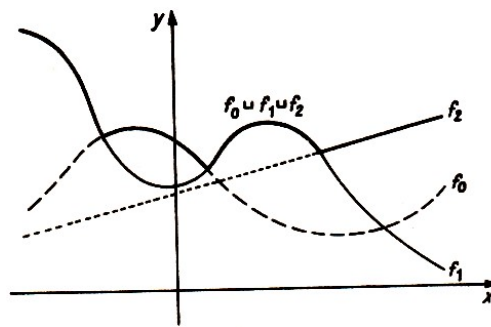


Abb. 1.1.3

Sind a_0, a_1, \dots, a_n reelle Zahlen, so setzen wir analog

$$\bigsqcup_{k=0}^n a_k := \max\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \quad , \quad \bigsqcap_{k=0}^n a_k := \min\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \quad (1.1.20,21)$$

Aufgabe 1.1.1. Es seien f, g, h reelle Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich D . Man beweise die folgenden Rechenregeln:

$$f \sqcap g = g \sqcap f \quad (1.1.22)$$

$$(f \sqcap g) + h = (f + h) \sqcap (g + h) \quad (1.1.23)$$

$$f \sqcup g + f \sqcap g = f + g \quad (1.1.24)$$

$$(f \sqcup g) \sqcap h = (f \sqcap h) \sqcup (g \sqcap h) \quad (1.1.25)$$

$$(f \sqcap g) \sqcup h = (f \sqcup h) \sqcap (g \sqcup h) \quad (1.1.26)$$

$$(-f) \sqcap (-g) = -(f \sqcup g) \quad (1.1.27)$$

$$f^+ = f \sqcup 0 \quad (1.1.28)$$

$$f^- = -(f \sqcap 0) \quad (1.1.29)$$

$$|f| = f^+ + f^- \quad (1.1.30)$$

$$f = f^+ - f^- \quad (1.1.31)$$

Aufgabe 1.1.2. Es sei $f(x) := x^3$. Man zeichne das Bild der durch $\varphi := (f \sqcap 1) \sqcup (-1)$ definierten reellen Funktion auf $[-2, 2]$.

Aufgabe 1.1.3. Es seien f, g reelle Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich. Man beweise die Rechenregel

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$$

1.2 Levi-Folgen und Levi-Funktionen

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt genau dann, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl K gibt derart, dass $|a_n| \leq K$ ist für alle natürlichen Zahlen n .

Insbesondere heißt die reelle Zahlenfolge (a_n) nach oben bzw. nach unten beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl K_1 bzw. K_2 gibt derart, dass $a_n \leq K_1$ bzw. $K_2 \leq a_n$ ist für alle natürlichen Zahlen n .

Eine reelle Zahlenfolge ist beschränkt genau dann, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist. Für jede nach oben bzw. nach unten beschränkte reelle Zahlenfolge (a_n) verstehen wir unter

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{bzw.} \quad \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke der Folge. Ist (a_n) nicht nach oben bzw. nicht nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} := \infty \quad \text{bzw.} \quad \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} := -\infty$$

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend genau dann, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ ist für alle natürlichen Zahlen n . Eine monoton wachsende reelle Zahlenfolge ist stets nach unten und eine monoton fallende reelle Zahlenfolge nach oben beschränkt. Für monotone reelle Zahlenfolgen gilt der folgende wichtige

Satz 1.2.1. Für jede monoton wachsende bzw. monoton fallende reelle Zahlenfolge (a_n) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (1.2.1, 1.2.2)$$

Beweis. a) Es sei (a_n) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Zahlenfolge, $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl.

Da die reelle Zahl a die kleinste obere Schranke der Folge (a_n) ist, ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von (a_n) . Somit gibt es, da (a_n) eine monoton wachsende Zahlenfolge ist, eine von ε abhängige natürliche Zahl $n(\varepsilon)$ derart, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\text{Wenn } n \geq n(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } a - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq a_n$$

Da $a_n \leq a$, also $0 \leq a - a_n$ ist, gilt:

$$\text{Wenn } n \geq n(\varepsilon) \text{ ist, so folgt } 0 \leq a - a_n < \varepsilon$$

Dies besagt aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

b) Es sei (a_n) eine monoton wachsende, nicht nach oben beschränkte reelle Zahlenfolge. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl K stets ein Folgenglied $a_{n(K)}$ mit $a_{n(K)} > K$. Da (a_n) eine monoton wachsende Zahlenfolge ist, gilt für alle natürlichen Zahlen n :

$$\text{Wenn } n \geq n(K) \text{ ist, so folgt } a_n \geq a_{n(K)} > K$$

Dies besagt aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Andererseits ist $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$, wenn (a_n) nicht nach oben beschränkt ist.

c) Analog beweist man (1.2.2), falls (a_n) eine monoton fallende reelle Zahlenfolge ist.

Wir verallgemeinern den Begriff der monotonen Zahlenfolge auf Funktionen. Eine auf $[a, b]$

definierte Funktionenfolge (f_n) , deren Glieder f_n auf $[a, b]$ definierte reelle Funktionen sind, heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend genau dann, wenn $f_n \leq f_{n+1}$ bzw. $f_n \geq f_{n+1}$ ist für alle natürlichen Zahlen n .

Dabei bedeutet $f_n \leq f_{n+1}$ bzw. $f_n \geq f_{n+1}$, dass $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ bzw. $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ist für alle $x \in E[a, b]$. In Abb. 1.2.1 sind die ersten Glieder einer auf $[a, b]$ definierten monoton wachsenden Funktionenfolge (f_n) veranschaulicht.

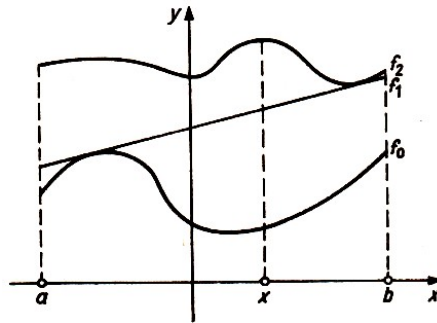


Abb. 1.2.1

Ist (f_n) eine monoton wachsende Funktionenfolge, so ist für jedes feste $x \in E[a, b]$ die Folge $(f_n(x))$ eine monoton wachsende reelle Zahlenfolge, die auf Grund von Satz 1.2.1 konvergent ist oder den uneigentlichen Grenzwert ∞ besitzt.³ Demnach wird durch

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \tag{1.2.3}$$

auf $[a, b]$ eine neue Funktion F definiert (Abb. 1.2.2), die an gewissen Stellen $x \in [a, b]$ auch den Funktionswert ∞ annehmen kann, aber niemals den Funktionswert $-\infty$.

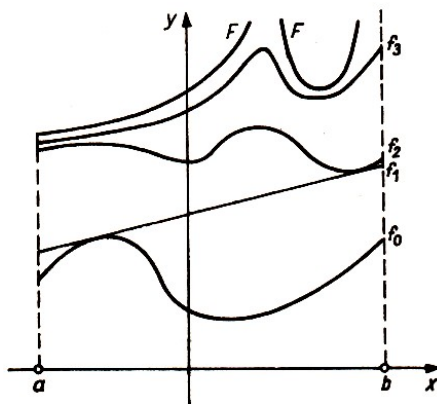


Abb. 1.2.2

Ist (f_n) also eine monoton wachsende Funktionenfolge, so gilt für alle $x \in [a, b]$ stets

$$-\infty < F(x) \leq \infty$$

Die Funktion F heißt Grenzfunktion der monoton wachsenden Funktionenfolge (f_n) . Für (1.2.3) ist die Kurzschreibweise

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \tag{1.2.3}$$

oder auch $f_n \uparrow F$ gebräuchlich.

Analog versteht man unter $f_n \downarrow F$, dass die Funktionenfolge (f_n) monoton fallend und F die Grenzfunktion dieser Folge ist. In diesem Fall ist

$$-\infty \leq F(x) < \infty$$

³Zum Gebrauch der Symbole " $-\infty$ ", " $+\infty$ " siehe 3.2.

für alle zu $x \in [a, b]$, da auf Grund von Satz 1.2.1 für festes $x \in [a, b]$ die monoton fallende reelle Zahlenfolge $(f_n(x))$ entweder konvergent ist oder den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$ besitzt.

Eine auf $[a, b]$ definierte monotone Funktionenfolge (f_n) heißt eigentlich konvergent genau dann, wenn der Grenzwert der reellen Zahlenfolge $(f_n(x))$ für jedes $x \in [a, b]$ eine reelle Zahl ist. In diesem Fall wird durch (1.2.3) eine reellwertige Funktion auf $[a, b]$ definiert.

Definition 1.2.1. Es sei J ein auf $E[a, b]$ definiertes positives lineares Funktional. Eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E[a, b]$ heißt eine Levi-Folge bezüglich J genau dann, wenn (f_n) monoton wachsend und die reelle Zahlenfolge $(J(f_n))$ nach oben beschränkt ist.

Satz 1.2.1. Für jede Levi-Folge (f_n) bezüglich J ist die Zahlenfolge $(J(f_n))$ eigentlich konvergent.

Beweis. Auf Grund von (1.1.5) ist die Folge $(J(f_n))$ monoton wachsend. Nach Voraussetzung ist sie beschränkt, und hieraus folgt die Behauptung.

Ist (f_n) eine Levi-Folge, so kann die ebenfalls monotone Zahlenfolge $(f_n(x))$ aber einen endlichen oder unendlichen Grenzwert $F(x)$ besitzen.

Definition 1.2.2. Eine auf $[a, b]$ definierte Funktion F heißt Levi-Funktion bezüglich J genau dann, wenn es auf $[a, b]$ eine Levi-Folge (f_n) bezüglich J gibt derart, dass F Grenzfunktion von (f_n) ist.

Eine Levi-Funktion F kann den Funktionswert ∞ , aber nicht $-\infty$ annehmen. Insbesondere heißt F eine endliche Levi-Funktion bezüglich J , wenn für alle $x \in E[a, b]$ stets

$$-\infty < F(x) < \infty$$

gilt.

Beispiel 1.2.1. Es sei α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$. Wir beweisen, dass die durch

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktion F eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R ist (Abb. 1.2.3).

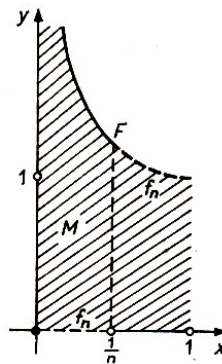


Abb. 1.2.3

Beweis. Die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.2.5)$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ besitzt folgende Eigenschaften:

a) Wegen

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{x^\alpha} - 0 = \frac{1}{x^\alpha} \geq 0 & \text{für } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} = 0 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

gilt stets $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Dies besagt $f_n \leq f_{n+1}$.

b) Wir zeigen, dass für alle $x \in [0, 1]$ stets

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

ist: Für $x = 0$ ist wegen $F(0) = 0$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

die Übereinstimmung offensichtlich. Ist $x \in (0, 1]$, so gibt es stets eine natürliche Zahl n_0 derart, dass $x \geq \frac{1}{n_0}$ gilt. Damit ist aber für $n \geq n_0$ auch $x \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$, also $f_n(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Dies besagt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} = F(x)$$

Damit gilt $f_n \uparrow F$, und es ist $0 \leq F(x) < \infty$ für alle $x \in [0, 1]$.

c) In diesem Beispiel und in den folgenden Beispielen werden wir von dem Satz der Riemannschen Integrationstheorie Gebrauch machen, der besagt, dass eine reelle Funktion f über $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist genau dann, wenn f über die beiden Teilintervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ Riemann-integrierbar ist, wobei $a < c < b$ ist. Da

$$J_R(f_n) = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} 0 dx + \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_{x=1/n}^{x=1}$$

also

$$J_R(f_n) = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right) \tag{1.2.6}$$

ist, gilt

$$J_R(f_n) < \frac{1}{1-\alpha} \tag{1.2.7}$$

Die reelle Zahl $K := \frac{1}{1-\alpha}$ erfüllt also die Bedingung $J_R(f_n) \leq K$ für alle positiven natürlichen Zahlen n , d.h., die reelle Zahlenfolge $(J_R(f_n))_{n \geq 1}$ ist nach oben beschränkt. Damit haben wir bewiesen, dass die auf $[0, 1]$ durch (1.2.4) definierte Funktion F eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R ist.

Aus (1.2.6) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_R(f_n) = \frac{1}{1-\alpha} \tag{1.2.8}$$

Die durch (1.2.4) definierte Funktion F ist nicht nach oben beschränkt auf $[0, 1]$ und damit auch nicht beschränkt auf $[0, 1]$ und daher über $[0, 1]$ nicht Riemann-integrierbar.

Die Zahl $\frac{1}{1-\alpha}$ kann aber als "Inhalt" der unbeschränkten Punktmenge M in Abb. 1.2.3 gedeutet werden. Die Menge M wird vom Bild der Funktion F , der Abszissenachse und den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ begrenzt.

Beispiel 1.2.2. Wir beweisen, dass die durch

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktion F eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R ist.

Beweis. Dazu wählen wir die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ (Abb. 1.2.4).

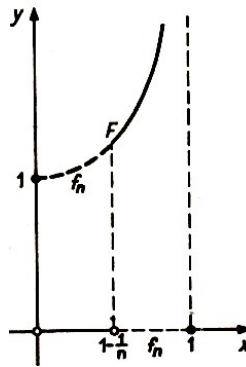


Abb. 1.2.4

a) Es ist

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 & \text{für } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1 - \frac{1}{n+1} \\ 0 & \text{für } 1 - \frac{1}{n+1} < x \leq 1 \end{cases}$$

also $f_n \leq f_{n+1}$.

b) Wir zeigen, dass für alle $x \in [0, 1]$ stets

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (1.2.10)$$

ist. Offensichtlich gilt (1.2.10) für $x = 1$. Ist $x \in [0, 1)$, so gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass $1 - x \geq \frac{1}{n_0}$ bzw. $x \leq 1 - \frac{1}{n_0}$ ist. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$ auch $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ bzw. $-\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{n_0}$ bzw. $1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{n_0}$ bzw. $1 - \frac{1}{n_0} \leq 1 - \frac{1}{n}$ und somit $x \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Dies besagt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = F(x)$$

Damit gilt $f_n \uparrow F$, und es ist $0 \leq F(x) < \infty$ für alle $x \in [0, 1]$.

c) Wegen

$$J_R(f_n) = \int_0^{1-(1/n)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{x=0}^{x=1-(1/n)} = \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1.2.11)$$

gilt

$$J_R(f_n) \leq \frac{\pi}{2}$$

Die reelle Zahlenfolge $(J_R(f_n))_{n \geq 1}$ ist also nach oben beschränkt. Damit haben wir bewiesen, dass die auf $[0, 1]$ durch (1.2.9) definierte nicht nach oben beschränkte Funktion F eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R ist.

Wegen der Stetigkeit der Arkus-Sinusfunktion folgt aus (1.2.11) die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_R(f_n) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad (1.2.12)$$

Es sei A eine Teilmenge von \mathbb{R} . Dann heißt die durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases} \quad (1.2.13)$$

definierte reelle Funktion χ_A die charakteristische Funktion der Menge A .

So ist beispielsweise die charakteristische Funktion $\chi_{\{c\}}$, wobei $c \in [a, b]$ ist, über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$J_R(\chi_{\{c\}}) = \int_a^b \chi_{\{c\}}(x) dx = 0 \quad (1.2.14)$$

Beispiel 1.2.3. Es sei A die Menge aller rationalen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$. Wir beweisen, dass die Dirichletsche Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (1.2.15)$$

auf $[0, 1]$ eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R ist.

Beweis. Zunächst konstruieren wir uns eine Folge (r_n) rationaler Zahlen, in der jede rationale Zahl des Intervalle $[0, 1]$ genau einmal vertreten ist. Dazu gehen wir von dem nachfolgenden Schema aus.

1		2		3		4		5	...
$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$...
$\frac{1}{3}$	→	$\frac{2}{3}$		1		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$...
$\frac{1}{4}$	—	$\frac{1}{2}$	→	$\frac{3}{4}$		1		$\frac{5}{4}$...
$\frac{1}{5}$	→	$\frac{2}{5}$	→	$\frac{3}{5}$	→	$\frac{4}{5}$		1	...
$\frac{1}{6}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{2}{3}$	→	$\frac{5}{6}$...
.	

In der ersten Zeile dieses Schemas stehen alle positiven ganzen rationalen Zahlen, in der k -ten Zeile ($k = 2, 3, \dots$) stehen alle rationalen Zahlen, die aus den Zahlen der ersten Zeile durch Multiplikation mit $\frac{1}{k}$ hervorgegangen sind.

Unter Berücksichtigung unserer Aufgabenstellung kommen nur die rationalen Zahlen des Schemas in Frage, die unterhalb der durch die Folge $(1, 1, 1, \dots)$ gebildeten Diagonalen stehen und in den vorangehenden Zeilen noch nicht aufgetreten sind. Wir können etwa

$$(r_k) := \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots \right) \quad (1.2.16)$$

setzen. Dann ist

$$\chi_A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{r_k\}}(x) \quad (1.2.17)$$

für alle $x \in [0, 1]$. Wir überzeugen uns von der Gültigkeit von (1.2.17), indem wir die Gleichheit der Funktionswerte auf beiden Seiten für irrationale Zahlen $x \in [0, 1]$ und rationale Zahlen $x \in [0, 1]$ überprüfen. Wegen (1.2.15) ist im ersten Fall $\chi_A(x) = 0$, und da $\chi_{\{r_k\}}(x) = 0$ ist für alle natürlichen Zahlen k , gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{r_k\}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = \chi_A(x)$$

Im zweiten Fall ist $\chi_A(x) = 1$, und da $\chi_{\{r_k\}}(x)$ für genau eine natürliche Zahl $k = p$ gleich eins und in allen übrigen Fällen gleich null ist, gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq p$ stets

$$\sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x) = 1$$

Demnach ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{r_k\}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = \chi_A(x)$$

Setzen wir

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x) \quad (1.2.18)$$

so lässt sich (1.2.17) auch in der Form

$$\chi_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (1.2.19)$$

schreiben. Wir zeigen, dass die auf $[0, 1]$ durch (1.2.18) definierte Funktionenfolge (f_n) monoton wachsend und die reelle Zahlenfolge $(J_R(f_n))$ nach oben beschränkt ist. Zunächst ist

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \chi_{\{r_{n+1}\}} \geq 0$$

für alle $x \in [0, 1]$ und demnach $f_n \leq f_{n+1}$. Ferner ist

$$J_R(f_n) = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 \chi_{\{r_k\}}(x) dx$$

Berücksichtigung von (1.2.14) ergibt

$$J_R(f_n) = 0 \quad (1.2.20)$$

Damit haben wir bewiesen, dass die Dirichletsche Funktion χ_A auf $[0, 1]$ eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R ist. Wegen (1.2.20) gilt offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_R(f_n) = 0 \quad (1.2.21)$$

Beispiel 1.2.4. Wir beweisen, dass die auf $[0, 1]$ durch

$$F(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (1.2.22)$$

definierte Funktion F eine Levi-Funktion bezüglich J_R ist.

Beweis. Es sei (r_k) die Folge (1.2.16) und (f_n) die monoton wachsende, nichtnegative Funktionenfolge (1.2.18). Setzen wir $g_n := n f_n$, so ist

$$g_{n+1} - g_n = (n+1)f_{n+1} - n f_n = n(f_{n+1} - f_n) + f_{n+1} \geq 0$$

also $g_n \leq g_{n+1}$. Ferner ist

$$J_R(g_n) = \int_0^1 g_n(x) dx = n \int_0^1 f_n(x) dx = n J_R(f_n)$$

Berücksichtigung von (1.2.20) ergibt

$$J_R(g_n) = 0 \tag{1.2.23}$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktionenfolge (g_n) monoton wachsend und die Folge $(J_R(g_n))$ nach oben beschränkt ist.

Es bleibt noch der Nachweis der Gültigkeit der Beziehung

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \tag{1.2.24}$$

für alle $x \in [0, 1]$ übrig: Es sei x eine beliebige irrationale Zahl des Intervalls $[0, 1]$. Dann gilt

$$g_n(x) = n f_n(x) = 0$$

für alle natürlichen Zahlen, d.h., es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$. Auf Grund von (1.2.22) ist andererseits $F(x) = 0$, womit die Gültigkeit von (1.2.24) für irrationale Zahlen $x \in [0, 1]$ bewiesen ist.

Es sei x eine beliebige rationale Zahl des Intervalls $[0, 1]$, etwa $x = r_p$. Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq p$ gilt dann

$$g_n(r_p) = n f_n(r_p) = n \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x) = n \chi_{\{r_p\}}(x) = n$$

Da die Folge $(n) = (0, 1, 2, \dots)$ den uneigentlichen Grenzwert ∞ besitzt, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(r_p) = \infty$$

Entsprechend (1.2.22) ist auch $F(r_p) = \infty$. Damit ist auch die Gültigkeit von (1.2.24) für rationale Zahlen $x \in [0, 1]$ nachgewiesen.

Somit haben wir bewiesen, dass die durch (1.2.22) auf $[0, 1]$ definierte Funktion F eine Levi-Funktion bezüglich J_R ist. Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_r(g_n) = 0 \tag{1.2.25}$$

1.3 Der Satz von Beppo Levi

Wie wir in den Beispielen 1.2.1, 1.2.2 und 1.2.3 gezeigt haben, braucht die endliche Grenzfunktion F einer eigentlich konvergenten Levi-Folge (f_n) , deren Glieder f_n über $[a, b]$ Riemannintegrierbare Funktionen sind, nicht zu $E[a, b]$ zu gehören. Das ist ein Mangel des Riemannschen Integralbegriffs.

Wir werden aber ein $E[a, b]$ umfassendes lineares Funktionensystem $L[a, b]$ konstruieren, so dass die Grenzfunktion F einer jeden eigentlich konvergenten Levi-Folge (f_n) integrierbar ist und dass ihr Integral als Grenzwert der Folge der Integrale der Funktionen f_n berechnet werden kann. In Kapitel 3 werden wir das folgende Theorem beweisen.

Theorem 1.3.1. Es gibt einen Vektorverband $L[a, b]$ von auf $[a, b]$ definierten reellwertigen Funktionen und ein positives lineares Funktional J_L auf $L[a, b]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Jede Funktion $\varphi \in E[a, b]$ liegt auch in $L[a, b]$, und es ist

$$J_L(\varphi) = J_R(\varphi)$$

(ii) Die Grenzfunktion φ einer jeden eigentlich konvergenten Levi-Folge (φ_n) bezüglich J_L liegt in $L[a, b]$, und es ist

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n)$$

(iii) Zu jeder Funktion $\varphi \in L[a, b]$ gibt es zwei Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich des Riemannschen Integrals mit $f_n, g_n \in C[a, b]$ und

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

(iv) Ist $\varphi \in L[a, b]$ und $J_L(|\varphi|) = 0$, so folgt aus $|\psi| \leq |\varphi|$ stets $\psi \in L[a, b]$.

Um die große Bedeutung dieses Theorems deutlich zu machen, wollen wir im Rest dieses Kapitels und im Kapitel 2 wichtige Folgerungen ableiten.

Zunächst führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Eine Funktion $\varphi \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar (oder auch -summierbar) genau dann, wenn $\varphi \in L[a, b]$ ist. Somit ist $L[a, b]$ das System aller über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbaren reellwertigen Funktionen. Für jede Funktion $\varphi \in L[a, b]$ heißt $J_L(\varphi)$ das Lebesguesche Integral der Funktion φ .

Die Bedingung (i) besagt, dass das Lebesguesche Integral eine Fortsetzung des Riemannschen Integrals ist. Es führt daher zu keinem Missverständnis, wenn wir auch für das Lebesguesche Integral einer Funktion $\varphi \in L[a, b]$ die Schreibweise

$$\int_a^b \varphi(x) dx := J_L(\varphi) \tag{1.3.1}$$

verwenden.

Eines der wichtigsten Probleme der Integrationstheorie besteht in der Untersuchung der Frage, unter welchen Voraussetzungen für eine Funktionenfolge (φ_n) , deren Glieder φ_n über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar sind, die Relation

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \tag{1.3.2}$$

gilt, wann also Grenzwertbildung und Integration miteinander vertauscht werden können. Die Bedingung (ii) in Theorem 1.3.1 besagt, dass (1.3.2) für jede eigentlich konvergente Levi-Folge (φ_n) erfüllt ist. Wir formulieren diesen nach Beppo Levi benannten Satz nochmals in einer leicht verallgemeinerten Fassung.

Satz 1.3.2. Ist (φ_n) eine eigentlich konvergente monotone Funktionenfolge mit $\varphi_n \in L[a, b]$

und ist die reelle Zahlenfolge $(J_L(\varphi_n))$ beschränkt, so ist die Grenzfunktion φ der Folge (φ_n) über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (1.3.3)$$

Beweis. a) Ist die Folge (φ_n) monoton wachsend, so ist sie eine Levi-Folge bezüglich J_L , und die Behauptung folgt aus der Bedingung (ii) in Theorem 1.3.1.

b) Die Folge (φ_n) sei monoton fallend. Dann ist $-\varphi_n \in L[a, b]$, da $L[a, b]$ ein linearer Funktionenraum ist. Die Folge $(-\varphi_n)$ ist daher eine Levi-Folge mit $-\varphi_n \uparrow -\varphi$.

Somit ist $-\varphi \in L[a, b]$, und es gilt $J_L(-\varphi_n) \uparrow J_L(-\varphi)$. Hieraus folgt $J_L(\varphi_n) \downarrow J_L(\varphi)$, womit (1.3.3) bewiesen ist.

Beispiel 1.3.1. Es sei α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$. Wir beweisen, dass die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen das Lebesguesche Integral von φ über $[0, 1]$.

Beweis. In Beispiel 1.2.1 haben wir gezeigt, dass die auf $[0, 1]$ durch (1.3.4) definierte Funktion φ eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R und damit auch bezüglich J_L ist. Somit ist $\varphi \in L[a, b]$.

Wir haben ferner bewiesen, dass die durch

$$\varphi(x)_n := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine Levi-Folge bezüglich J_R und damit auch bezüglich J_L und φ Grenzfunktion dieser Folge ist. Auf Grund von (1.3.3) gilt dann

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_R(\varphi_n)$$

Berücksichtigung von (1.2.8) liefert

$$J_L(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Beispiel 1.3.2. Wir beweisen, dass die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad (1.3.5)$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen das Lebesguesche Integral von φ über $[0, 1]$.

Beweis. In Beispiel 1.2.2 haben wir bewiesen, dass die auf $[0, 1]$ durch (1.3.5) definierte Funktion φ eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_R und damit auch bezüglich J_L ist. Somit ist $\varphi \in L[a, b]$.

Ferner haben wir bewiesen, dass die durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine Levi-Folge bezüglich J_R und damit auch bezüglich J_L und φ Grenzfunktion der Folge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ist.

Demnach gilt auf Grund des Satzes von Levi und wegen (1.2.12)

$$J_L(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel 1.3.3. Wir beweisen, dass die Dirichletsche Funktion χ_A über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen das Lebesguesche Integral von χ_A über $[0, 1]$.

Beweis. In Beispiel 1.2.3 haben wir bewiesen, dass die Dirichletsche Funktion χ_A auf $[0, 1]$ eine endliche Levi-Funktion bezüglich J_L und damit über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist. Ferner haben wir bewiesen, dass die durch

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}(x)$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge (φ_n) eine Levi-Folge bezüglich J_L und φ Grenzfunktion dieser Folge ist. Berücksichtigung von (1.2.20) und (1.3.3) ergibt

$$J_L(\varphi) = \int_0^1 \chi_A(x) dx = 0 \tag{1.3.6}$$

Beispiel 1.3.4. Wir untersuchen, ob die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \ln x & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{1.3.7}$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen gegebenenfalls das Lebesguesche Integral von φ über $[0, 1]$ (Abb. 1.3.1).

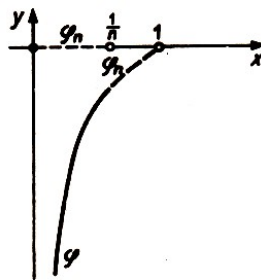


Abb. 1.3.1

Dazu führen wir die durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \ln x & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.3.8}$$

auf $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ein. Wegen

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ \ln x \leq 0 & \text{für } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende Funktionenfolge. Offensichtlich ist φ Grenzfunktion der Folge (1.3.8), wobei wegen $\varphi_n \in E[0, 1]$ auch $\varphi_n \in L[0, 1]$ ist.

Damit haben wir zunächst bewiesen, dass $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine eigentlich konvergente monotone Funktionenfolge mit $\varphi_n \in L[0, 1]$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass die reelle Zahlenfolge $(J_L(\varphi_n))_{n \geq 1}$ beschränkt ist. Es ist

$$J_L(\varphi_n) = J_R(\varphi_n) = \int_{1/n}^n \ln x dx$$

Es ist

$$J_R(\varphi_n) = [x \ln x]_{x=1/n}^{x=1} - \int_{1/n}^n dx = -\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}$$

also

$$J_L(\varphi_n) = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - 1 \tag{1.3.9}$$

Die für alle positiven reellen Zahlen x durch $f(x) := \frac{\ln x}{x}$ definierte reelle Funktion f besitzt die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Wegen $f'(x) > 0$ für $0 < x < e$, $f'(x) < 0$ für $x > e$ und $f'(e) = 0$ nimmt f an der Stelle $x = e$ auf $(0, \infty)$ ein absolutes Maximum an. Daher ist

$$|J_L(\varphi_n)| \leq \frac{\ln e}{e} + 1 + 1 = \frac{1}{e} + 2 < 3$$

Auf Grund des Satzes 1.3.2 ist damit die Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar. Als bekannt setzen wir den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

voraus. Da die Logarithmusfunktion stetig ist, gilt

$$0 = \ln 1 = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \sqrt[n]{n} \right) \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \tag{1.3.10}$$

Wegen (1.3.3), (1.3.9) und (1.3.10) gilt demnach

$$J_L(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx = -1$$

Eine reelle Funktion ψ heißt eine Majorante bzw. Minorante einer Funktionenfolge (φ_n) genau dann, wenn für alle natürlichen Zahlen n stets $\varphi_n \leq \psi$ bzw. $\psi \leq \varphi_n$ ist.

Satz 1.3.3. Besitzt eine monoton wachsende bzw. monoton fallende Funktionenfolge (φ_n) mit $\varphi_n \in L[a, b]$ eine über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Majorante ψ' bzw. Minorante ψ'' , so ist die Grenzfunktion φ der Folge (φ_n) über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt (1.3.3).

Beweis. Ist (φ_n) monoton wachsend, so ist $\varphi_n \leq \psi'$, und aus (1.1.5) folgt

$$J_L(\varphi_n) \leq J_L(\psi')$$

Die Zahlenfolge $(J_L(\varphi_n))$ ist also beschränkt, und die Behauptung folgt aus Satz 1.3.2. Ebenso wird die Behauptung für monoton fallende Folgen bewiesen.

Satz 1.3.4. Es sei $\varphi \in L[a, b]$ und

$$A := \{x \in [a, b] : \varphi(x) > 0\}$$

Dann ist die charakteristische Funktion χ_A der Menge A über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar (Abb. 1.3.2).

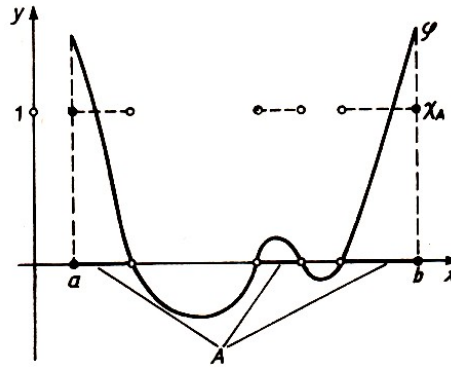


Abb. 1.3.2

Beweis. Da $1 \in E[a, b] \subset L[a, b]$ und $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, sind auf Grund von Satz 1.1.2 die Funktionen

$$\psi_n := 1 \sqcap (n\varphi^+)$$

über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es ist $\psi_n \leq 1$. Somit besitzt (ψ_n) die Majorante $1 \in L[a, b]$. Aus $n\varphi^+ \leq (n+1)\varphi^+$ folgt $\psi_n \leq \psi_{n+1}$. Nach Satz 1.3.3 ist also

$$\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \in L[a, b]$$

Wir zeigen, dass $\psi = \chi_A$ ist. Für $x \in A$ ist $\varphi(x) > 0$, und folglich gibt es ein n_0 mit $n\varphi^+(x) \geq 1$ für $n \geq n_0$. Damit ist

$$\psi_n(x) = 1 \sqcap (n\varphi^+(x)) = 1$$

für alle n mit $n \geq n_0$. Hieraus folgt

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = 1 = \chi_A(x)$$

Ist aber $x \notin A$, so ist $\varphi(x) \leq 0$ und damit $\varphi^+(x) = 0$, $n\varphi^+(x) = 0$, also $\psi_n(x) = 0$. Daher ist

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \chi_A(x)$$

Somit ist $\chi_A \in L[a, b]$.

Satz 1.3.5. Es sei $\varphi \in L[a, b]$ und A eine Teilmenge von $[a, b]$ mit $\chi_A \in L[a, b]$. Dann ist $\varphi\chi_A \in L[a, b]$ (Abb. 1.3.3a, b).

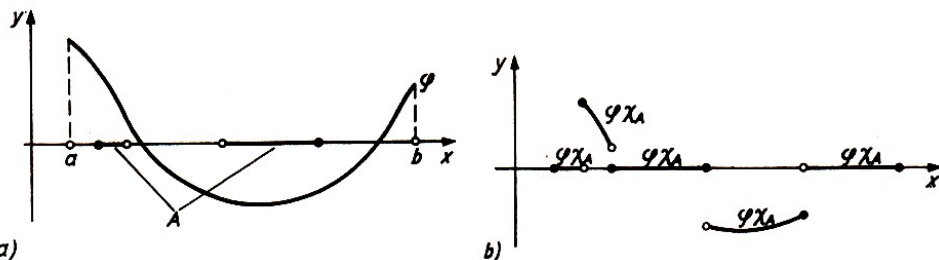


Abb. 1.3.3,1.3.4 a)

b)

Beweis. a) Es sei $\varphi \geq 0$. Die Funktionen

$$\psi_n := \varphi \cap (n\chi_A)$$

sind über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1} \leq \varphi \in L[a, b]$$

Somit ist

$$\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \in L[a, b]$$

Wir zeigen, dass $\psi = \varphi\chi_A$ ist. Ist $x \in A$, so ist $\chi_A(x) = 1$, und es gibt ein n_0 mit $n\chi_A(x) \geq \varphi(x)$ für $n \geq n_0$. Damit ist

$$\psi_n(x) = \varphi(x) \cap [n\chi_A(x)] = \varphi(x)$$

für alle n mit $n \geq n_0$. Dies besagt

$$\psi(x) = \varphi(x) = \varphi(x)\chi_A(x)$$

Ist aber $x \notin A$, so ist $\chi_A(x) = 0$ und $\psi_n(x) = 0$, also

$$\psi(x) = 0 = \varphi(x)\chi_A(x)$$

Somit ist $\varphi\chi_A \in L[a, b]$.

b) Es sei φ beliebig mit $\varphi \in L[a, b]$. Da $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, enthält $L[a, b]$ auf Grund von Satz 1.1.2 auch die beiden Funktionen φ^+ , φ^- , die der Bedingung $\varphi^+ \geq 0$, $\varphi^- \geq 0$ genügen. Damit erfüllen die Funktionen φ^+ , φ^- die Voraussetzungen des Beweisteils a). Demnach ist $\varphi^+\chi_A, \varphi^-\chi_A \in L[a, b]$ und somit auch

$$\varphi^+\chi_A - \varphi^-\chi_A \in L[a, b] \quad \text{bzw.} \quad (\varphi^+ - \varphi^-)\chi_A \in L[a, b]$$

Berücksichtigung von (1.1.31) liefert die Behauptung $\varphi\chi_A \in L[a, b]$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 1.3.3 ist der

Satz 1.3.6. Jede monoton fallende Folge (φ_n) nichtnegativer über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbarer Funktionen φ_n besitzt eine über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Grenzfunktion φ , und es gilt (1.3.3).

Beweis. Die Nullfunktion ist eine über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Minorante der Funktionenfolge (φ_n) .

Aufgabe 1.3.1. Man untersuche, ob die durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechne gegebenenfalls das Lebesguesche Integral von φ über $[0, 1]$.

1.4 Der Satz über die majorisierte Konvergenz

Während bisher nur monotone Folgen integrierbarer Funktionen betrachtet wurden, sollen nun auch allgemeinere Folgen untersucht werden.

Eine Funktionenfolge (φ_n) heißt punktweise konvergent, in Zeichen

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \quad (1.4.1)$$

oder kurz $\varphi_n \rightarrow \varphi$ genau dann, wenn für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich D der Funktionen φ, φ_n die Relation

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \quad (1.4.2)$$

erfüllt ist. Ist der Grenzwert für alle $x \in D$ endlich, so heißt die Folge eigentlich konvergent.

Zunächst zeigen wir an einem Beispiel, dass aus der Voraussetzung (1.4.1) und aus der Integrierbarkeit der Funktionen φ_n und der Grenzfunktion φ nicht gefolgert werden kann, dass auch die Folge der Integrale $J_L(\varphi_n)$ gegen $J_L(\varphi)$ konvergiert.

Beispiel 1.4.1. Es sei $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ die auf $[0, 1]$ durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad (1.4.3)$$

definierte Funktionenfolge, deren Funktionen φ_n wegen

$$J_L(\varphi_n) = J_R(\varphi_n) = \int_0^{1/n} n^2 x dx = \frac{1}{2}$$

integrierbare Funktionen sind (Abb. 1.4.1).

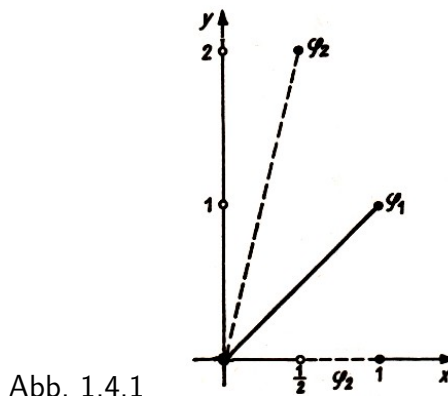


Abb. 1.4.1

Wir zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$$

ist für alle $x \in [0, 1]$. Wegen (1.4.3) gilt für $x = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Ist $x \in (0, 1]$, so gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass $x > \frac{1}{n_0}$ gilt. Dann ist aber für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$ auch $x > \frac{1}{n}$, also $\varphi_n(x) = 0$, d.h., es gilt ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$$

Damit genügt die Funktion $\varphi := 0$, die über $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist, der Bedingung (1.4.1). Es ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_I(\varphi_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = J_L(\varphi)$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann aber ein wichtiger Konvergenzsatz hergeleitet werden.

Eine reelle Funktion ψ heißt eine absolute Majorante einer Funktionenfolge (φ_n) genau dann, wenn für alle natürlichen Zahlen n stets $|\varphi_n| \leq \psi$ ist.

In Abb. 1.4.2 ist der Sachverhalt für eine absolute Majorante ψ einer auf $[a, b]$ definierten Funktionenfolge (φ_n) veranschaulicht.

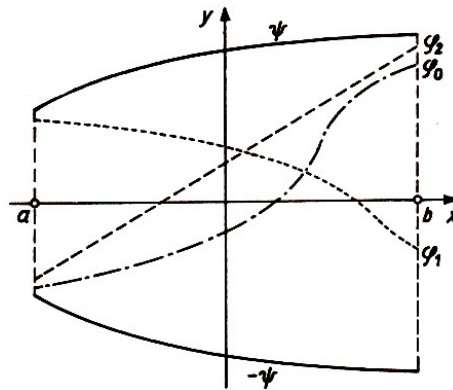


Abb. 1.4.2

Die Bilder aller Funktionen φ_n liegen in einem Streifen, der von den Bildern der Funktionen ψ , $-\psi$ und den beiden Geraden $x = a$, $x = b$ begrenzt wird.

Für eine beliebige Funktionenfolge (φ_n) mit gemeinsamem Definitionsbereich D wird durch

$$\varphi_n^* := \bigsqcup_{k=0}^n \varphi_k \quad \text{bzw.} \quad \varphi_n^{**} := \bigsqcap_{k=0}^n \varphi_k \quad (1.4.4, 1.4.5)$$

eine monoton wachsende Funktionenfolge (φ_n^*) bzw. eine monoton fallende Funktionenfolge (φ_n^{**}) definiert. Die Grenzfunktion

$$\varphi^* = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \varphi_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \bigsqcup_{k=0}^n \varphi_k \quad \text{bzw.} \quad \varphi^{**} = \bigsqcap_{k=0}^{\infty} \varphi_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \bigsqcap_{k=0}^n \varphi_k \quad (1.4.6, 1.4.7)$$

kann auch den Funktionswert ∞ bzw. $-\infty$ annehmen. Besitzt aber die Folge $(\varphi_n(x))$ für ein $x \in D$ eine obere bzw. untere Schranke K , so ist stets $\varphi_n^*(x) \leq K$ bzw. $\varphi_n^{**} \geq K$, und folglich ist auch $\varphi^*(x) \leq K$ bzw. $\varphi^{**} \geq K$.

Für monoton wachsende bzw. fallende Funktionenfolgen (φ_n) geht (1.4.4) bzw. (1.4.5) in $\varphi_n^* = \varphi_n$ bzw. $\varphi_n^{**} = \varphi_n$ über. In diesem Fall ist also

$$\bigsqcup_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \quad \text{bzw.} \quad \bigsqcap_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \quad (1.4.8, 1.4.9)$$

Beispiel 1.4.2. Es sei (φ_n) die durch

$$\varphi_n(x) := 1 + \frac{2x}{x+1}$$

auf $[-2, 2]$ definierte Funktionenfolge (Abb. 1.4.3).

Dann ist

$$\left(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} \varphi_k\right)(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + 2x & \text{für } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

und

$$\left(\bigsqcap_{k=0}^{\infty} \varphi_k\right)(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

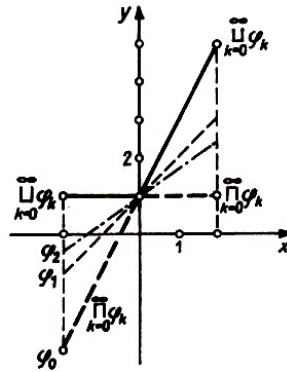


Abb. 1.4.3

Satz 1.4.1. Besitzt eine Funktionenfolge (φ_n) , wobei die φ_n über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktionen sind, eine über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Majorante ψ' bzw. Minorante ψ'' , so sind die Funktionen

$$\varphi^* := \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \varphi_k \quad \text{bzw.} \quad \varphi^{**} := \bigsqcap_{k=0}^{\infty} \varphi_k \quad (1.4.10, 1.4.11)$$

über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\varphi^* \leq \psi'$ bzw. $\psi'' \leq \varphi^{**}$.

Beweis. Da $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, sind die Funktionen

$$\varphi_n^* := \bigsqcup_{k=0}^n \varphi_k$$

über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\varphi_n^* \leq \psi'$ sowie $\varphi_n^* \uparrow \varphi^*$, da

$$\left(\bigsqcup_{k=0}^n \varphi_k\right)$$

eine monoton wachsende Funktionenfolge ist, die φ^* auf Grund von (1.4.6) als Grenzfunktion besitzt.

Es folgt $\varphi^* \leq \psi'$, und auf Grund von Satz 1.3.3 ist $\varphi^* \in L[a, b]$. Ebenso wird die zweite Behauptung bewiesen.

Satz 1.4.2. Es sei (φ_n) eine Folge reellwertiger Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich D . Dann wird durch

$$\varphi_n' := \bigsqcup_{k=n}^{\infty} \varphi_k \quad \text{bzw.} \quad \varphi_n'' := \bigsqcap_{k=n}^{\infty} \varphi_k \quad (1.4.12, 1.4.13)$$

eine monoton fallende bzw. monoton wachsende Funktionenfolge mit

$$\varphi_n'' \leq \varphi_n \leq \varphi_n' \quad (1.4.14)$$

definiert. Ist die Folge (φ_n) punktweise konvergent und

$$\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \quad (1.4.15)$$

so gilt $\varphi'_n \downarrow \varphi$ und $\varphi''_n \uparrow \varphi$.

Beweis. Für $p > n \geq 1$ ist

$$\prod_{k=n-1}^p \varphi_k \leq \prod_{k=n}^p \varphi_k \leq \varphi_n \leq \prod_{k=n}^p \varphi_k \leq \prod_{k=n-1}^p \varphi_k$$

Der Grenzübergang $p \rightarrow \infty$ ergibt

$$\varphi''_{n-1} \leq \varphi''_n \leq \varphi_n \leq \varphi'_n \leq \varphi'_n$$

Somit gilt (1.4.14), und die Folge (φ'_n) bzw. (φ''_n) ist monoton fallend bzw. monoton wachsend. Wir können daher wegen (1.4.9) bzw. (1.4.8)

$$\varphi' := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi'_n = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \varphi_k \quad (1.4.16)$$

$$\varphi'' := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi''_n = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi''_n = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \varphi_k \quad (1.4.17)$$

setzen, und es gilt

$$\varphi'_n \downarrow \varphi' \quad , \quad \varphi''_n \uparrow \varphi'' \quad (1.4.18)$$

Die Folge (φ_n) sei nun konvergent, und φ sei ihr Grenzwert. Wegen (1.4.14) und (1.4.16), (1.4.17) haben wir dann $\varphi'' \leq \varphi \leq \varphi'$. Nehmen wir an, für ein $x \in D$ sei $\varphi(x) < \varphi'(x)$. Dann gibt es eine reelle Zahl c mit

$$\varphi(x) < c < \varphi'(x) \quad (1.4.19)$$

Wegen $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x)$ und (1.4.19) gibt es eine natürliche Zahl n mit $\varphi_k(x) \leq c$ für $k \geq n$. Dann ist aber

$$\varphi'_n(x) = \prod_{k=n}^{\infty} \varphi_k(x) \leq c$$

und wir erhalten, da $(\varphi'_n(x))$ eine monoton fallende reelle Zahlenfolge mit dem Grenzwert $\varphi'(x)$ ist, unter Berücksichtigung von (1.4.19) den Widerspruch

$$c < \varphi'(x) \leq \varphi''_n(x) \leq c$$

Somit ist $\varphi(x) = \varphi'(x)$ für alle $x \in D$, und ebenso wird $\varphi''(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in D$ bewiesen, womit (1.4.18) in die Behauptung des Satzes übergeht.

Bemerkung. Die durch (1.4.16) bzw. (1.4.17) definierte Funktion φ' bzw. φ'' heißt der Limes superior bzw. Limes inferior der Funktionenfolge (φ_n) .

Für konvergente Funktionenfolgen stimmen diese beiden Funktionen mit „dem Grenzwert der Funktionenfolge“ überein.

Jetzt sind die Hilfsmittel für den Beweis des nach H. Lebesgue benannten Satzes über die majorisierte Konvergenz bereitgestellt.

Satz 1.4.3. Besitzt eine punktweise konvergente Funktionenfolge (φ_n) mit $\varphi_n \in L[a, b]$ eine

über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare absolute Majorante ψ , so ist die Grenzfunktion φ der Folge (φ_n) über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (1.4.20)$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist stets $-\psi \leq \varphi_n \leq \psi$, und aus Satz 1.4.1 folgt, dass die Funktionen

$$\varphi'_n := \bigsqcup_{k=n}^{\infty} \varphi_k = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \varphi_{n+k} \quad , \quad \varphi''_n := \bigsqcap_{k=n}^{\infty} \varphi_k = \bigsqcap_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \varphi_{n+k}$$

über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar sind. Auf Grund von (1.4.14) genügen sie ferner der Bedingung

$$-\psi \leq \varphi''_n \leq \varphi_n \leq \varphi'_n \leq \psi \quad (1.4.21)$$

Aus Satz 1.4.2 folgt $\varphi'_n \downarrow \varphi$ und $\varphi''_n \uparrow \varphi$. Da die monoton fallende bzw. monoton wachsende Funktionenfolge (φ'_n) bzw. (φ''_n) die Lebesgue-integrierbare Minorante $-\psi$ bzw. Majorante ψ besitzt, folgt unter Berücksichtigung von Satz 1.3.3, dass $\varphi \in L[a, b]$ und

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi''_n) \quad (1.4.22)$$

ist. Wegen (1.4.21) ist

$$J_L(\varphi''_n) \leq J_L(\varphi_n) \leq J_L(\varphi'_n) \quad (1.4.23)$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt, wenn wir (1.4.22) berücksichtigen,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = J_L(\varphi)$$

womit auch (1.4.20) bewiesen ist.

Beispiel 1.4.3. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue untersuchen wir, ob die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen gegebenenfalls das Lebesguesche Integral von φ über $[0, 1]$.

Offensichtlich ist die reelle Funktion φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$. Wegen $\varphi_n \in E[0, 1]$ ist $\varphi \in L[0, 1]$. Ferner gilt

$$|\varphi_n(x)| = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Setzen wir

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

so erfüllt die so definierte Funktion ψ die Bedingung $|\varphi_n| \leq e\psi$ für alle positiven natürlichen Zahlen n . Entsprechend Beispiel 1.3.1 ist $\psi \in L[0, 1]$ und damit auch $e\psi \in L[0, 1]$. Demnach besitzt die durch (1.4.24) definierte Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbare absolute Majorante. Auf Grund von Satz 1.4.3 ist somit $\varphi \in L[0, 1]$.

Weiter ist

$$J_L(\varphi_n) = J_R(\varphi_n) = \int_{1/n}^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Mit Hilfe der Substitution $x := z^2$ erhalten wir

$$J_L(\varphi_n) = 2 \int_{1/\sqrt{n}}^1 e^z dz = 2 [e^z]_{z=1/\sqrt{n}}^{z=1} = 2(e - e^{1/\sqrt{n}})$$

Berücksichtigen wir die Stetigkeit der Exponentialfunktion, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = 2(e - 1)$$

und demnach

$$J_L(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx = 2(e - 1)$$

Beispiel 1.4.4. Es sei $\varphi \in L[a, b]$. Unter $\operatorname{sgn} \varphi$ verstehen wir die durch

$$(\operatorname{sgn} \varphi)(x) := \operatorname{sgn} \varphi(x)$$

auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue beweisen wir, dass auch die Funktion $\operatorname{sgn} \varphi$ über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar ist.

Zunächst zeigen wir; dass die reelle Funktion $\operatorname{sgn} \varphi$ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n := (n\varphi \sqcap 1) \sqcup (-1) \tag{1.4.25}$$

auf $[a, b]$ definierten Funktionenfolge (φ_n) ist, wobei die Funktionen φ_n wegen $n\varphi, 1, -1 \in L[a, b]$ und Satz 1.1.2 über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar sind.

Ist $\varphi(x) > 0$, so gibt es ein n_0 mit $n\varphi(x) \geq 1$ für $n \geq n_0$. Dann ist $(n\varphi \sqcap 1)(x) = 1$ bzw. $\varphi_n(x) = 1$ für alle n mit $n \geq n_0$. Dies besagt $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 1$. Andererseits ist $\operatorname{sgn} \varphi(x) = 1$.

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \operatorname{sgn} \varphi(x) \tag{1.4.26}$$

Ist $\varphi(x) = 0$, so ist $\varphi_n(x) = 0$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0 = \operatorname{sgn} \varphi(x)$$

Ist $\varphi_n(x) < 0$, so ist $(m\varphi \sqcap 1)(x) = n\varphi(x) < 0$. Dann gibt es ein n_0 mit $n\varphi(x) \leq -1$ für $n \geq n_0$. Somit ist $\varphi_n(x) = -1$ für alle n mit $n \geq n_0$, d.h., es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = -1$.

Da $\operatorname{sgn} \varphi(x) = -1$ ist, gilt (1.4.26) auch für alle $x \in [a, b]$ mit $\varphi(x) < 0$. Damit ist $\operatorname{sgn} \varphi$ Grenzfunktion der durch (1.4.25) definierten Funktionenfolge.

Ferner gilt

$$-1 \leq \varphi_n(x) \leq 1$$

für alle $x \in [a, b]$ und alle natürlichen Zahlen n . Demnach ist $|\varphi_n| \leq 1$ für alle natürlichen Zahlen n . Somit besitzt (φ_n) die absolute Majorante $1 \in L[a, b]$. Auf Grund von Satz 1.4.3 ist demnach $\text{sgn } \varphi \in L[a, b]$.

Aufgabe 1.4.1. Man untersuche, ob die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} & \text{für } 0 < \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 1.4.2. Man untersuche, ob die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte reelle Funktion φ über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist, und berechne gegebenenfalls das Lebesguesche Integral von φ über $[0, 1]$.

2 Lebesgue-messbare Mengen und Lebesgue-messbare Funktionen

2.1 Lebesgue-messbare Mengen

Im folgenden beschränken wir uns auf Teilmengen eines fest vorgegebenen Intervalls $[a, b]$. Ist beispielsweise I ein Teilintervall von $[a, b]$ und sind α, β seine Begrenzungspunkte, wobei also I eines der Intervalle $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ oder (α, β) sein kann, so heißt $m(I) := \beta - \alpha$ die Länge des Intervalls I .

Die Lote, die vom Bild der Funktion χ_I auf die x -Achse gefällt werden, bilden ein Rechteck der Höhe 1 (Abb. 2.1.1, $I = [\alpha, \beta]$).

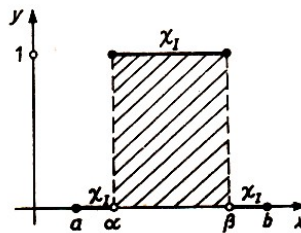


Abb. 2.1.1

Als seinen Inhalt hatten wir die reelle Zahl $J_R(\chi_I)$ bezeichnet. Der Inhalt eines Rechtecks ist bekanntlich gleich dem Produkt aus der Länge der Grundseite und der Höhe, in unserem Fall also - dem Zahlenwert nach - gleich der Länge des Intervalle I , d.h., es gilt

$$m(I) = \int_a^b \chi_I(x) dx \quad (2.1.1)$$

In der Theorie der reellen Funktionen wird nun der Begriff der Länge eines Intervalle zum Begriff des Maßes einer Teilmenge A von $[a, b]$ verallgemeinert.

Bevor wir diesen neuen Begriff einführen, beweisen wir zunächst einige Regeln für das Rechnen mit charakteristischen Funktionen.

Satz 2.1.1. Stets gilt:

- a) $\chi_\emptyset = 0$, b) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$
- c) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$, d) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$
- e) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi(A) \leq \chi_B$
- f) Es ist $\chi_A = \sum_{k=0}^n \chi_{A_k}$ genau dann, wenn $A = \bigcup_{k=0}^n A_k$ ist und die Mengen A_0, A_1, \dots, A_n paarweise disjunkt sind.

Beweis. Die erste Beziehung gilt offensichtlich. Von der Richtigkeit der folgenden drei Regeln überzeugt man sich durch Überprüfen der Gleichheit der Funktionswerte auf beiden Seiten in den folgenden vier Fällen:

$$x \in A, x \in B; \quad x \in A, x \notin B; \quad x \notin A, x \in B; \quad x \notin A, x \notin B$$

e₁) Es gelte $A \subseteq B$. Für alle x mit $\chi_B(x) = 1$ ist stets $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, da $0 \leq 1$ oder $1 \leq 1$ eine wahre Aussage ist. Für alle x mit $\chi_B(x) = 0$ gilt $x \notin B$.

Auf Grund der Voraussetzung ist dann $x \notin A$ bzw. $\chi_A(x) = 0$, also $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$.

e₂) Es sei $\chi_A \leq \chi_B$ und $x \in A$. Dann ist $\chi_A(x) = 1$ und somit auch $\chi_B(x) = 1$. Dies besagt

$x \in B$. Folglich ist $A \subseteq B$.

f₁) Es gelte

$$\chi_A = \sum_{k=0}^n \chi_{A_k}$$

Im Fall $x \in A$ ist $\sum_{k=0}^n \chi_{A_k}(x) = 1$. Dies besagt, dass es genau ein m mit $0 \leq m \leq n$ gibt derart, dass $\chi_{A_m} = 1$ bzw. $x \in A_m$ ist. Folglich sind die Mengen A_0, A_1, \dots, A_n paarweise disjunkt, und es gilt $x \in \bigcup_{k=0}^n A_k$ und damit

$$A \subseteq \bigcup_{k=0}^n A_k$$

Es sei $x \notin A$. Dann ist $\sum_{k=0}^n \chi_{A_k}(x) = 0$. Dies besagt, dass $\chi_{A_0}(x) = \dots = \chi_{A_n}(x) = 0$ bzw. $x \notin \bigcup_{k=0}^n A_k$ ist. Folglich gilt $\bigcup_{k=0}^n A_k \subseteq A$.

Aus beiden Teilergebnissen ergibt sich die Behauptung.

f₂) Es gelte $A = \bigcup_{k=0}^n A_k$, wobei die Mengen A_0, A_1, \dots, A_n paarweise disjunkt sind.

Ist $x \in A$, so gibt es genau ein m mit $0 \leq m \leq n$ und $x \in A_m$, also mit $\chi_{A_m}(x) = 1$. Somit ist

$$\chi_A(x) = 1 = \sum_{k=0}^n \chi_{A_k}(x)$$

Ist aber $x \notin A$, so ist $x \notin A_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$, woraus

$$\chi_A(x) = 0 = \sum_{k=0}^n \chi_{A_k}(x)$$

folgt. Somit ist $\chi_A(x) = \sum_{k=0}^n \chi_{A_k}(x)$.

Definition 2.1.1. Eine Teilmenge A eines Intervalle $[a, b]$ heißt Lebesgue-messbar genau dann, wenn ihre charakteristische Funktion χ_A über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall heißt die nichtnegative reelle Zahl

$$m(A) := J_L(\chi_A) = \int_a^b \chi_A(x) dx \tag{2.1.2}$$

das Lebesguesche Maß der Menge A .

Demnach sind die Intervalle

$$[\alpha, \beta], \quad (\alpha, \beta], \quad [\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$$

Lebesgue-messbar, und ihr Lebesguesches Maß ist $\beta - \alpha$.

Beispiel 2.1.1. Jede Einermenge $\{c\} \in [a, b]$ ist Lebesgue-messbar, da $\chi_{\{c\}} \in E[a, b]$ und somit auch $\chi_{\{c\}} \in L[a, b]$ ist. Wegen (1.2.14) hat diese Menge des Lebesguesche Maß Null, es ist also

$$m(\{c\}) = 0 \tag{2.1.3}$$

Beispiel 2.1.2. Jede endliche Menge reeller Zahlen $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \in [a, b]$ mit $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ ist eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null.

Beweis. Wegen $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \bigcup_{k=1}^n \{c_k\}$ und $\{c_i\} \cap \{c_j\} = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt auf Grund von Satz 2.1.1f zunächst $\chi_{\{c_1, c_2, \dots, c_n\}} = \sum_{k=1}^n \chi_{\{c_k\}}$. Da $\chi_{\{c_1\}}, \dots, \chi_{\{c_n\}} \in L[a, b]$ und $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, folgt $\chi_{\{c_1, c_2, \dots, c_n\}} \in L[a, b]$. Ferner ist

$$\begin{aligned} m(\{c_1, c_2, \dots, c_n\}) &= \int_a^b \chi_{\{c_1, c_2, \dots, c_n\}}(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^n \chi_{\{c_k\}}(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b \chi_{\{c_k\}}(x) dx = \sum_{k=1}^n m(\{c_k\}) \end{aligned}$$

Berücksichtigung von (2.1.3) liefert die Behauptung

$$m(\{c_1, c_2, \dots, c_n\}) = 0$$

Beispiel 2.1.3. Die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ ist eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null.

Beweis. In Beispiel 1.3.3 bewiesen wir $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} \in L[0, 1]$. Auf Grund von (2.1.2) und (1.3.6) gilt dann

$$m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0 \tag{2.1.4}$$

Mit $\mathfrak{A}[a, b]$ bezeichnen wir das System aller Lebesgue-messbaren Teilmengen von $[a, b]$. Es gilt der

Satz 2.1.2. Das System $\mathfrak{A}[[a, b]$ aller Lebesgue-messbaren Teilmengen von $[a, b]$ besitzt folgende Eigenschaften:

- a) Die leere Menge \emptyset gehört zu $\mathfrak{A}[a, b]$.
- b) Mit $A, B \in \mathfrak{A}[a, b]$ gehören auch die Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B$ und $\overline{A} := [a, b] \setminus A$ zu $\mathfrak{A}[a, b]$.

Beweis. a) Die Behauptung folgt aus $\chi_{\emptyset} = 0 \in L[a, b]$.

b) Auf Grund der Voraussetzung gilt $\chi_A, \chi_B \in L[a, b]$. Berücksichtigung von Satz 2.1.1b und Satz 1.3.5, indem dort $\varphi := \chi_B$ gesetzt wird, ergibt $\chi_{A \cap B} \in L[a, b]$ und damit $A \cap B \in \mathfrak{A}[a, b]$. Da $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, gilt auf Grund von Satz 2.1.1 c, d auch $\chi_{A \setminus B}, \chi_{A \cup B} \in L[a, b]$ und somit $A \setminus B, A \cup B \in \mathfrak{A}[a, b]$. Wegen $[a, b] \in \mathfrak{A}[a, b]$ ist auch $\overline{A} \in \mathfrak{A}[a, b]$, womit der Satz bewiesen ist.

Durch vollständige Induktion beweist man die

Folgerung 2.1.1. Es seien $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$. Dann gehören auch die Mengen $\bigcup_{k=0}^n A_k$ und $\bigcap_{k=0}^n A_k$ zu $\mathfrak{A}[[a, b]$.

Satz 2.1.3. Es seien $A, B \in \mathfrak{A}[a, b]$. Dann gelten die Rechenregeln

$$m(\emptyset) = 0 \tag{2.1.5}$$

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B) \tag{2.1.6}$$

Beweis. a) Es ist $m(\emptyset) = \int_a^b 0 dx = 0$.

b) Wegen $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B}$, $\chi_A + \chi_B \in L[a, b]$ und der Tatsache, dass J_L ein positives lineares Funktional auf $L[a, b]$ ist, folgt aus $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$ in Verbindung mit (2.1.2) die Behauptung (2.1.6).

In Abb. 2.1.2 ist (2.1.6) für den Fall veranschaulicht, dass A und B abgeschlossene Intervalle sind.

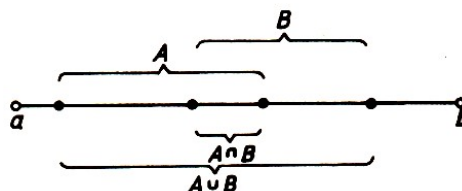


Abb. 2.1.2

Folgerung 2.1.2. Es seien $A, B \in \mathfrak{A}[a, b]$. Dann gelten die Rechenregeln

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) \quad (2.1.7)$$

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad \text{falls } A \cap B = \emptyset \text{ ist} \quad (2.1.8)$$

$$m(A) = m(A \cap B) + m(A \setminus B) \quad (2.1.9)$$

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A) \quad (2.1.10)$$

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A), \quad \text{falls } A \subseteq B \text{ ist} \quad (2.1.11)$$

$$m(A) \leq m(B), \quad \text{falls } A \subseteq B \text{ ist} \quad (2.1.12)$$

Beweis. a.) Da stets $m(A \cap B) \geq 0$ ist, folgt die Behauptung (2.1.7) unmittelbar aus (2.1.6).

b) Da $A \cap B = \emptyset$ ist, geht (2.1.6) unter Berücksichtigung von (2.1.5) in (2.1.8) über.

c) Aus

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$$

folgt unter Berücksichtigung von (2.1.8) die Behauptung (2.1.9).

d) Die Mengen A und $B \setminus A$ sind disjunkt, und ihre Vereinigungsmenge ist $A \cup B$. Wegen (2.1.8) gilt somit (2.1.10).

e) Wegen $A \subseteq B$ gilt $B = A \cup (B \setminus A)$. Da $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ist, folgt aus (2.1.8) die Beziehung

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \quad (2.1.13)$$

und hieraus die Behauptung (2.1.11).

f) Da $m(B \setminus A) \geq 0$ ist, folgt (2.1.12) unmittelbar aus (2.1.13).

Beispiel 2.1.4. Es ist $[0, 1] \in \mathfrak{A}[0, 1]$, und auf Grund von Beispiel 2.1.3 ist auch $A := [0, 1] \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{A}[0, 1]$. Die Menge aller irrationalen Zahlen des Intervalle $[0, 1]$, also die Menge $[0, 1] \setminus A$, ist gemäß Satz 2.1.2b ebenfalls eine Lebesgue-messbare Teilmenge von $[0, 1]$. Da $A \subseteq [0, 1]$ ist, erhalten wir wegen (2.1.11) und (2.1.4) die Beziehung

$$m([0, 1] \setminus A) = m([0, 1]) - m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$$

Durch vollständige Induktion beweist man die Verallgemeinerungen von (2.1.7) und (2.1.8).

Folgerung 2.1.3. Es seien $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$. Dann ist

$$m\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n m(A_k) \quad (2.1.14)$$

und es gilt, falls die Mengen A_0, A_1, \dots, A_n paarweise disjunkt sind,

$$m\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n m(A_k) \quad (2.1.15)$$

Definition 2.1.1. Es seien A, A_0, A_1, \dots Teilmengen von $[a, b]$. Die Folge (A_n)

a) konvergiert von unten gegen A , in Zeichen $A_n \uparrow A$, genau dann, wenn $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ und stets $A_n \subseteq A_{n+1}$ ist,

b) konvergiert von oben gegen A , in Zeichen $A_n \downarrow A$, genau dann, wenn $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ und stets $A_n \supseteq A_{n+1}$ ist.

Beispiel 2.1.5. Es seien

$$A_n := \left[\frac{1}{n+2}, 1\right] \quad , \quad B_n := \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$$

Wir beweisen, dass die Folge (A_n) von unten gegen $A := (0, 1]$ (vgl. Abb. 2.1.3) und die Folge (B_n) von oben gegen $B := \{0\}$ konvergiert (vgl. Abb. 2.1.4).

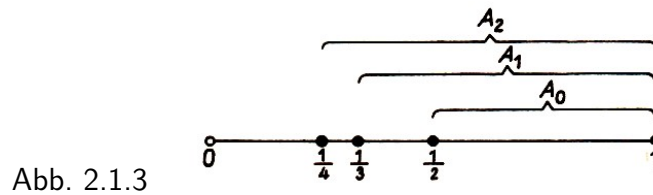


Abb. 2.1.3

Beweis. Offensichtlich ist $A_n \subseteq A_{n+1}$ bzw. $B_n \supseteq B_{n+1}$.

a) Es sei $x \in A$, also $0 < x \leq 1$. Dann existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $\frac{1}{n+2} \leq x \leq 1$. Dies besagt $x \in A_n$ bzw. $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Somit ist $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Ist andererseits $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, so gibt es ein k mit $x \in A_k$. Dies bedeutet $\frac{1}{k+2} \leq x \leq 1$.

Hieraus folgt $0 < x \leq 1$ bzw. $x \in A$. Folglich gilt $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq A$. Aus beiden Teilergebnissen erhalten wir $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

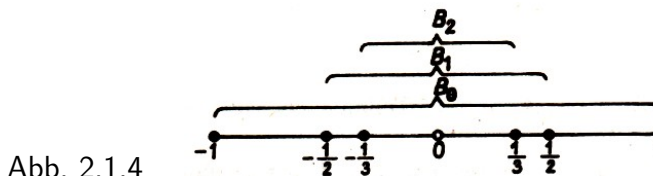


Abb. 2.1.4

b) Es ist $\{0\} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$, da die Bedingung $0 \in B_n$ für jede natürliche Zahl n erfüllt ist.

Umgekehrt folgt aus $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$, dass die reelle Zahl x die Ungleichung

$$-\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n+1}$$

für jede natürliche Zahl n erfüllen muss. Dies ist aber nur für $x = 0$ möglich. Also ist $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq \{0\}$. Aus beiden Teilergebnissen folgt $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$.

Satz 2.1.4. Es seien A, A_0, A_1, \dots Teilmengen von $[a, b]$. Dann gilt

a) $A_n \uparrow A \Leftrightarrow \chi_{A_n} \uparrow \chi_A$

b) $A_n \downarrow A \Leftrightarrow \chi_{A_n} \downarrow \chi_A$

Beweis. a₁) Es gelte $A_n \uparrow A$, d.h., es ist $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ und $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle n . Auf Grund von Satz 2.1.1e ist denn stets $\chi_{A_n} \leq \chi_{A_{n+1}}$, d.h. (χ_{A_n}) ist eine monoton wachsende Funktionenfolge.

Es sei $x \in A$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass $x \in A_{n_0}$ ist. Wegen $A_{n_0} \subseteq A_n$ für alle $n \geq n_0$, ist auch $x \in A_n$ für alle $n \geq n_0$. Somit gilt $\chi_A(x) = 1$ und $\chi_{A_n} = 1$ für alle $n \geq n_0$, d.h., es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_A(x) \tag{2.1.16}$$

Es sei $x \notin A$. Dann ist auch $x \notin A_n$ für alle n , d.h., es gilt $\chi_A(x) = \chi_{A_n}(x) = 0$ für alle n . Dies bedeutet, dass ebenfalls (2.1.16) erfüllt ist.

a₂) Es gelte $\chi_{A_n} \uparrow \chi_A$, d.h., es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_A$ und $\chi_{A_n} \leq \chi_{A_{n+1}}$ für alle n .

Auf Grund von Satz 2.1.1e ist dann stets $A_n \subseteq A_{n+1}$.

Es sei $x \in A$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = 1$. Dies besagt, dass es eine natürliche Zahl n_0 gibt derart, dass $\chi_{A_n}(x) > 0$, also $\chi_{A_n}(x) = 1$ bzw. $x \in A_n$ ist für alle $n \geq n_0$. Somit ist zu $x \in \bigcup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Folglich gilt $A \subseteq \bigcup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Es sei $x \notin A$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = 0$. Dies besagt, dass es eine natürliche Zahl n_0 , gibt derart, dass $\chi_{A_n}(x) = 0$ bzw. $x \notin A_n$ ist für alle $n \geq n_0$. Wegen $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{n_0}$ gilt dann aber auch $x \notin A_n$ für alle $n < n_0$.

Folglich ist $x \notin \bigcup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Damit haben wir $\bigcup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq A$ bewiesen.

Aus beiden Teilergebnissen folgt $A = \bigcup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

b₁) Es gelte $A_n \downarrow A$, d.h., es ist $A = \bigcap_{n \rightarrow \infty} A_n$ und $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle n .

Auf Grund von Satz 2.1.1e ist dann stets $\chi_{A_n} \geq \chi_{A_{n+1}}$, d.h., (χ_{A_n}) ist eine monoton fallende Funktionenfolge.

Es sei $x \in A$. Dann ist $x \in A_n$ für alle n . Dies bedeutet $\chi_A(x) = 1$ und $\chi_{A_n}(x) = 1$ für alle n , d.h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_A(x) \tag{2.1.17}$$

Es sei $x \notin A$. Wegen $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 , derart, dass $x \notin A_n$ ist für alle $n \geq n_0$. Dies bedeutet, dass (2.1.17) ebenfalls erfüllt ist.

b₂) Es gelte $\chi_{A_n} \downarrow \chi_A$, d.h., es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_A$ und $\chi_{A_n} \geq \chi_{A_{n+1}}$ für alle n . Dann ist auch $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle n .

Es sei $x \in A$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = 1$, d.h., es ist $\chi_{A_n}(x) = 1$ bzw. $x \in A_n$ für alle $n \geq n_0$. Wegen $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_{n_0}$ gilt dann aber auch $x \in A_n$ für alle $n < n_0$. Also ist $x \in \bigcap_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Folglich gilt $A \subseteq \bigcap_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Es sei $x \notin A$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = 0$, d.h., es gilt $\chi_{A_n}(x) = 0$ bzw. $x \notin A_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist aber auch $x \notin \bigcap_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Damit haben wir $\bigcap_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq A$ bewiesen.

Aus beiden Teilergebnissen folgt $A = \bigcap_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Satz 2.1.5. Es seien $A_0, A_1, \dots \in \mathfrak{A}[a, b]$ und $A \subseteq [a, b]$ mit $A_n \uparrow A$ bzw. $A_n \downarrow A$. Dann ist auch $A \in \mathfrak{A}[a, b]$, und es gilt

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \quad (2.1.18)$$

Beweis. Auf Grund von Satz 2.1.4 gilt zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_A$, d. h., (χ_{A_n}) ist eine eigentlich konvergente Funktionenfolge, deren Glieder χ_{A_n} wegen $A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktionen sind.

Da stets $|\chi_{A_n}| \leq 1$ und $1 \in L[a, b]$ ist, besitzt die Folge (χ_{A_n}) eine über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare absolute Majorante. Demnach ist die Grenzfunktion χ_A auf Grund von Satz 1.4.3 über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, d.h., es ist $A \in \mathfrak{A}[a, b]$. Wegen (1.4.20) gilt ferner

$$m(A) = \int_a^b \chi_A(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \chi_{A_n}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

Beispiel 2.1.6. Es seien

$$A_n := \left[\frac{1}{n+2}, 1 \right], \quad B_n := \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right], \quad A := (0, 1], \quad B := \{0\}$$

Wie in Beispiel 2.1.5 bewiesen wurde, gilt $A_n \uparrow A$ und $B_n \downarrow B$. Wegen $A_n, B_n \in \mathfrak{A}[0, 1]$ und $A, B \subseteq [0, 1]$ sind die Voraussetzungen des Satzes 2.1.5 erfüllt. Seine Anwendung führt auf die bereits bekannten Resultate $A, B \in \mathfrak{A}[0, 1]$,

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{1}{n+2}, 1 \right] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1$$

$$m(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Satz 2.1.6. Es seien $A_0, A_1, \dots \in \mathfrak{A}[a, b]$. Dann gehören auch die Mengen $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ zu $\mathfrak{A}[a, b]$, und es ist

$$m \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) \quad (2.1.19)$$

Falls die Mengen A_0, A_1, \dots paarweise disjunkt sind, gilt

$$m \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) \quad (2.1.20)$$

Die letzte Eigenschaft wird σ -Additivität des Lebesgueschen Maßes genannt.

Beweis. Wir setzen

$$B_n := \bigcup_{k=0}^n A_k, \quad C_n := \bigcap_{k=0}^n A_k, \quad B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n, \quad C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

a) Es ist $B, C \subseteq [a, b]$, und es gilt stets $B_n \subseteq B_{n+1}$, $C_n \supseteq C_{n+1}$. Folglich ist $B_n \uparrow B$, $C_n \downarrow C$.

b) Wir zeigen $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

b₁) Es sei $x \in B$. Dann existiert eine natürliche Zahl m mit $x \in B_m$. Dies bedeutet, dass es eine natürliche Zahl m_0 mit $m_0 \leq m$ und $x \in A_{m_0}$ gibt. Folglich gilt $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ und somit

$$B \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

b₂) Es sei $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Dann existiert eine natürliche Zahl m mit $x \in A_m$. Folglich ist $x \in B_m$ und damit auch $x \in B$. Somit ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq B$.

c) Wir zeigen $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

c₁) Es sei $x \in C$. Dann gilt $x \in C_n$ für alle n und damit auch $x \in A_n$ für alle n . Folglich ist $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ und somit $C \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

c₂) Es sei zu $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Dann gilt $x \in A_n$ für alle n , also auch $x \in C_n$ für alle n . Dies bedeutet $x \in C$. Folglich gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq C$.

d) Wegen $A_0, A_1, \dots \in \mathfrak{A}[a, b]$ sind auf Grund von Folgerung 2.1.1 auch $B_n, C_n \in \mathfrak{A}[a, b]$. In a) wurde $B_n \uparrow B$, $C_n \downarrow C$ bewiesen, wobei $B, C \subseteq [a, b]$ ist. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.1.5 erfüllt.

Folglich ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$.

e) Auf Grund von (2.1.18) gilt

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

Berücksichtigung von (2.1.14) bzw. (2.1.15) liefert

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n m(A_k) \quad \text{bzw.} \quad m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n m(A_k)$$

Dies ist mit den Behauptungen (2.1.19) bzw. (2.1.20) äquivalent.

Beispiel 2.1.7. Wir untersuchen, ob die durch

$$A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2^{2n}}, 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$$

definierte Menge A Lebesgue-messbar ist, und bestimmen gegebenenfalls das Lebesguesche Maß dieser Menge (Abb. 2.1.5).

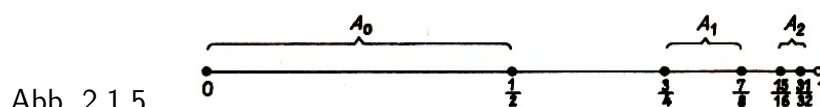


Abb. 2.1.5

Es ist

$$A_n := \left[1 - \frac{1}{2^{2n}}, 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right] \in \mathfrak{A}[0, 1]$$

für alle n . Auf Grund von Satz 2.1.6 ist demnach $A \in \mathfrak{A}[0, 1]$. Um $m(A)$ mit Hilfe von (2.1.20) berechnen zu können, müssen wir zunächst zeigen, dass die Mengen A_0, A_1, \dots paarweise disjunkt sind. Es sei $i < j$. Dann gilt $2^{2i+1} < 2^{2j}$ bzw. $\frac{1}{2^{2i+2}} > \frac{1}{2^{2j}}$ bzw. $1 - \frac{1}{2^{2i+2}} < 1 - \frac{1}{2^{2j}}$. Dies bedeutet $A_i \cap A_j = \emptyset$. Wegen

$$m(A_k) = 1 - \frac{1}{2^{2k+1}} - 1 + \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

ist auf Grund von (2.1.20) demnach

$$m(A) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Von großer Bedeutung für die Lebesguesche Integrationstheorie sind Mengen vom Lebesgueschen Maße Null.

Definition 2.1.3. $A \subseteq [a, b]$ heißt eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null genau dann, wenn $A \in \mathfrak{A}[a, b]$ und $m(A) = 0$ ist.

Satz 2.1.7. Es sei $A \subseteq [a, b]$ eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null. Dann ist jede Teilmenge B von A wieder vom Lebesgueschen Maße Null.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung ist $\chi_A \in L[a, b]$ und $m(A) = 0$. Wegen $B \subseteq A$ gilt

$$0 \leq \chi_B \leq \chi_A \tag{2.1.21}$$

Ferner ist

$$J_L(|\chi_A|) = J_L(\chi_A) = m(A) = 0$$

und $|\chi_B| \leq |\chi_A|$. Entsprechend Theorem 1.3.1(iv) ist dann aber $\chi_B \in L[a, b]$ und somit $B \in \mathfrak{A}[a, b]$. Da J_L ein positives lineares Funktional auf $L[a, b]$ ist, folgt aus (2.1.21) in Verbindung mit der Voraussetzung die Beziehung

$$0 \leq m(B) \leq m(A) = 0 \quad \text{bzw.} \quad m(B) = 0$$

Satz 2.1.8. Es seien $A, B \subseteq [a, b]$ Mengen vom Lebesgueschen Maße Null. Dann sind auch die Mengen $A \cup B$, $A \setminus B$ und $A \cap B$ vom Lebesgueschen Maße Null.

Beweis. Auf Grund von Satz 2.1.2b gilt $A \cup B, A \setminus B, A \cap B \in \mathfrak{A}[a, b]$.

Da $m(A) = m(B) = 0$ ist, folgt aus (2.1.7) die Ungleichung $0 \leq m(A \cup B) \leq 0$. Dies besagt $m(A \cup B) = 0$. Mit Hilfe dieses Ergebnisses geht (2.1.10), falls wir dort A und B vertauschen, über in die Behauptung $m(A \setminus B) = 0$. Dies in (2.1.9) eingesetzt, ergibt $m(A \cap B) = 0$.

Satz 2.1.9. Es seien $A_0, A_1, \dots \subseteq [a, b]$ Mengen vom Lebesgueschen Maße Null. Dann ist auch die Menge $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ vom Lebesgueschen Maße Null.

Beweis. Entsprechend Satz 2.1.6 ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$. Da auf Grund der Voraussetzung $m(A_n) = 0$ ist für alle n , folgt aus (2.1.19) die Beziehung

$$0 \leq m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 0$$

Da jede Einermenge $\{c_n\} \subseteq [a, b]$ eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null ist, ergibt sich aus Satz 2.1.9 unmittelbar die

Folgerung 2.1.4. Jede abzählbare Menge reeller Zahlen $\{c_0, c_1, \dots\} \subseteq [a, b]$ ist eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null.

Beispiel 2.1.8. Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ durch die Punkte $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ in drei Teile und entfernen daraus das Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Jedes der beiden verbleibenden Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ zerlegen wir wiederum in drei Teile, und zwar das erste durch die Punkte $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ und das zweite durch die Punkte $\frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ und entfernen jeweils die mittleren Intervalle $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

Schließlich zerlegen wir jedes der vier Intervalle $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$ abermals in drei Teile, und zwar das erste durch die Punkte $\frac{1}{27}, \frac{2}{27}$, das zweite durch die Punkte $\frac{7}{27}, \frac{8}{27}$, das dritte durch die Punkte $\frac{19}{27}, \frac{20}{27}$ und das vierte durch die Punkte $\frac{25}{27}, \frac{26}{27}$ und entfernen jeweils die mittleren Intervalle $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ (Abb. 2.1.6). Dieses Verfahren setzen wir unbeschränkt fort. Dadurch wird aus $[0, 1]$ eine Menge

$$A := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right] \cup \left[\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)\right] \dots$$

entfernt, die die Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten Intervallen ist.

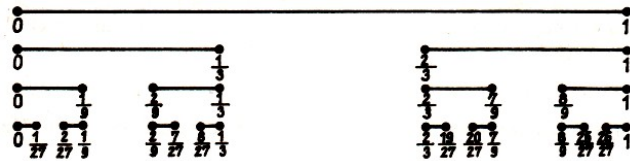


Abb. 2.1.6

Jedes dieser Intervalle ist eine Lebesgue-messbare Menge. Setzen wir

$$\begin{aligned} A_0 &:= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ A_1 &:= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\ A_2 &:= \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \dots \end{aligned}$$

so ist $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, wobei die A_0, A_1, \dots ebenfalls paarweise disjunkte Lebesgue-messbare Mengen sind. Es ist

$$\begin{aligned} m(A_0) &= \frac{1}{3} \\ m(A_1) &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2^1}{3^2} \\ m(A_2) &= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2^2}{3^3} \\ &\dots \\ m(A_k) &= \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \end{aligned}$$

Entsprechend Satz 2.1.6 gilt $A \in \mathfrak{A}[0, 1]$ und

$$m(A) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Auf Grund von Satz 2.1.2b ist wegen $[0, 1], A \in \mathfrak{A}[0, 1]$ auch die Menge

$$C := [0, 1] \setminus A$$

die Cantorsche Menge heißt, eine Lebesgue-messbare Menge. Entsprechend (2.1.11) ist dann

$$m(C) = m([0, 1]) - m(A) = 0$$

Die Cantorsche Menge ist also eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null. Von dieser Menge lässt sich zeigen, dass sie eine überabzählbare Menge reeller Zahlen ist. Auf den Beweis dieser Tatsache wollen wir im Rahmen dieses Bändchens verzichten.

Aufgabe 2.1.1. Man beweise, dass jedes $A \in \mathfrak{A}[a, b]$ der Ungleichung $0 \leq m(A) \leq b - a$ genügt.

Aufgabe 2.1.2. Man untersuche, ob die durch

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right]$$

definierte Menge A Lebesgue-messbar ist, und berechne gegebenenfalls das Lebesguesche Maß dieser Menge.

2.2 Lebesgue-messbare Funktionen

Zur Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen fügen wir noch die beiden Elemente $-\infty$ und ∞ hinzu. Diese Elemente hängen miteinander und mit allen reellen Zahlen a durch die Ungleichung

$$-\infty < a < \infty$$

und durch die Rechenregeln

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty + \infty = \infty \\ a + (-\infty) &= -\infty + a = -\infty + (-\infty) = -\infty \\ a \cdot \infty &= \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -\infty & \text{für } a < 0 \end{cases} \\ \infty \cdot \infty &= (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \\ \infty \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot \infty = -\infty \\ a \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot a = -(a \cdot \infty) \\ -(-\infty) &= \infty \end{aligned}$$

zusammen. Damit ist die Addition $a + b$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit Ausnahme der beiden Fälle $a = \infty, b = -\infty$ bzw. $a = -\infty, b = \infty$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ stets ausführbar.

Eine auf $[a, b]$ definierte Funktion φ , deren Wertebereich eine Teilmenge von $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ist,

heißt numerische Funktion. Jede auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion ist insbesondere auch eine numerische Funktion, aber nicht umgekehrt.

Es seien φ, ψ auf $[a, b]$ definierte numerische Funktionen. Entsprechend den obigen Festlegungen für Elemente aus $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ verstehen wir unter

$$\lambda\varphi, \varphi + \psi, \varphi\psi, |\varphi|, \varphi \sqcup \psi, \varphi \sqcap \psi, \varphi^+, \varphi^-$$

die durch

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi)(x) &:= \lambda\varphi(x) \\ (\varphi + \psi)(x) &:= \varphi(x) + \psi(x) \quad (\text{falls definiert}) \\ (\varphi\psi)(x) &:= \varphi(x)\psi(x) \\ |\varphi|(x) &:= |\varphi(x)| \\ (\varphi \sqcup \psi)(x) &:= \max\{\varphi(x), \psi(x)\} \\ (\varphi \sqcap \psi)(x) &:= \min\{\varphi(x), \psi(x)\} \\ \varphi^+(x) &:= (\varphi \sqcup 0)(x) \\ \varphi^-(x) &:= -(\varphi \sqcap 0)(x) \end{aligned}$$

definierten numerischen Funktionen, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ist.

Es sei $\varphi \in L[a, b]$ und c eine beliebige reelle Zahl. Die Frage, ob die Menge

$$A_c := \{x \in [a, b] : \varphi(x) < c\} \tag{2.2.1}$$

Lebesgue-messbar ist (Abb. 2.2.1), beantwortet der folgende

Satz 2.2.1. Es sei $\varphi \in L[a, b]$. Dann ist für jede reelle Zahl c die Menge Menge A_c Lebesgue-messbar

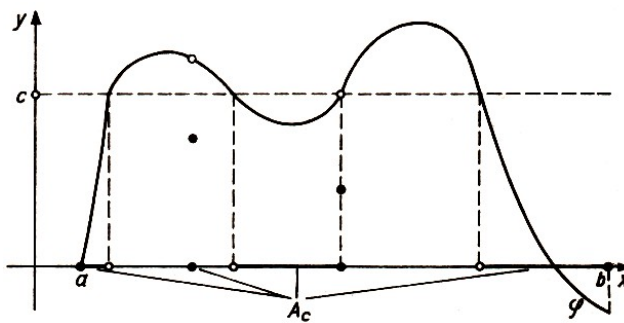


Abb. 2.2.1

Beweis. Wegen $A_c = \{x \in [a, b] : c - \varphi(x) > 0\}$ und $\psi := c - \varphi \in L[a, b]$ sind die Voraussetzungen von Satz 1.3.4 erfüllt. Demnach ist $\chi_{A_c} \in L[a, b]$, und somit gilt $A_c \in \mathfrak{A}[a, b]$ für jede reelle Zahl c .

Definition 2.2.1. Eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion φ heißt auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar genau dann, wenn für jede reelle Zahl c die durch (2.2.1) definierte Menge A_c Lebesgue-messbar ist.

Mit $\mathfrak{M}[a, b]$ bezeichnen wir das System aller auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren numerischen Funktionen.

Beispiel 2.2.1. Wir untersuchen, ob die durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf $[-1, 1]$ definierte numerische Funktion φ auf $[-1, 1]$ Lebesgue-messbar bzw. über $[-1, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist (Abb. 2.2.2).

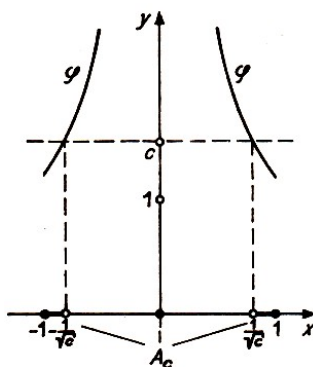


Abb. 2.2.2

Dazu müssen wir überprüfen, ob die Menge A_c für jede reelle Zahl c Lebesgue-messbar ist. Es gilt

$$A_c = \{x \in [-1, 1] : \varphi(x) < c\} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } c \leq 0 \\ \{0\} & \text{für } 0 < c \leq 1 \\ [-1, -\frac{1}{\sqrt{c}}) \cup \{0\} \cup (\frac{1}{\sqrt{c}}, 1] & \text{für } c > 1 \end{cases}$$

Da die Mengen \emptyset , $\{0\}$, $[-1, -\frac{1}{\sqrt{c}})$, $(\frac{1}{\sqrt{c}}, 1]$ Lebesgue-messbar sind, ist auch die Menge A_c für jede reelle Zahl c Lebesgue-messbar. Somit ist $\varphi \in \mathfrak{M}[-1, 1]$.

Wir zeigen, dass die Funktion φ , die eine reelle Funktion ist, Grenzfunktion einer monoton wachsenden Funktionenfolge ist, die aber nicht integralbeschränkt ist. Durch

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \varphi(x)[\chi_{[-1, -1/n]}(x) + \chi_{[1/n, 1]}(x)] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1] \\ 0 & \text{für } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

wird auf $[-1, 1]$ eine Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ definiert (Abb. 2.2.3).

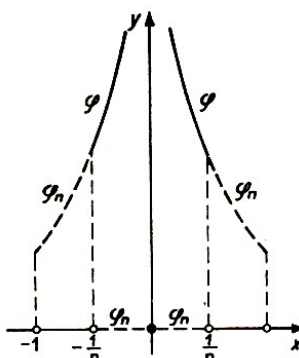


Abb. 2.2.3

Zunächst beweisen wir, dass φ Grenzfunktion der Folge (2.2.3) ist, wobei wegen $\varphi_n \in E[-1, 1]$ auch $\varphi \in L[-1, 1]$ ist. Dazu setzen wir

$$A_n := \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \quad , \quad B_n := \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

Offensichtlich ist $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 0)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (0, 1]$.
Demnach gilt $A_n \uparrow [-1, 0)$ und $B_n \uparrow (0, 1]$. Berücksichtigung von Satz 2.1.4a liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{[-1,0)} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{B_n} = \chi_{(0,1]}$$

Auf $[-1, 1]$ gilt demnach

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n &= \varphi \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{A_n} + \chi_{B_n}) = \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{B_n} \right) \\ &= \varphi(\chi_{[-1,0)} + \chi_{(0,1]}) = \varphi \chi_{[-1,1] \setminus \{0\}} = \varphi \end{aligned}$$

Wegen

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi(\chi_{A_{n+1}} - \chi_{A_n} + \chi_{B_{n+1}} \chi_{B_n}) = \varphi \chi_{(-1/n, -1/(n+1)]} + \varphi \chi_{[1/(n+1), 1/n] \setminus \{0\}} = \varphi$$

ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge. Ferner ist

$$J_L(\varphi_n) := \int_{-1}^{-1/n} \frac{dx}{x^2} + \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=-1/n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1/n}^{x=1} = n - 1 - 1 + n$$

also

$$J_L(\varphi_n) = 2n - 2 \tag{2.2.4}$$

Dies besagt, dass die Zahlenfolge $(J_L(\varphi_n))$ nicht beschränkt ist. Wäre $\varphi \in L[-1, 1]$, so folgte wegen $\varphi_n \leq \varphi$ stets $J_L(\varphi_n) \leq J_L(\varphi)$, was (2.2.4) widerspricht.

Aus Satz 2.2.1 ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 2.2.1. Jede über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare reelle Funktion ist auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar.

Folgerung 2.2.2. Für jede auf $[a, b]$ stetige reelle Funktion φ gilt $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

Beweis. Wegen $\varphi \in E[a, b]$ ist auch $\varphi \in L[a \setminus b]$. In Verbindung mit Folgerung 2.2.1 ergibt sich die Behauptung.

Da jede auf $[a, b]$ konstante reelle Funktion auf $[a, b]$ stetig ist, erhalten wir in Verbindung mit Folgerung 2.2.2 die

Folgerung 5.2.3. Jede auf $[a, b]$ konstante reelle Funktion ist auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar.

Auf Grund von Folgerung 2.2.1, umfasst das System $\mathfrak{M}[a, b]$ das System $L[a, b]$. Gegenüber dem System $L[a, b]$ hat das umfassendere System $\mathfrak{M}[a, b]$ den großen Vorzug, dass in ihm die in der Analysis wichtigen Operationen wie Addition (falls diese ausführbar ist), Multiplikation, Betragsbildung und Grenzwertbildung nicht aus diesem Funktionensystem herausführen.

Den Nachweis dieser Tatsache führen wir in Teilschritten. Zunächst beweisen wir den

Satz 2.2.2. Eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion φ ist auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar genau dann, wenn eine der folgenden Aussagen für alle reellen Zahlen c erfüllt ist:

- $\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$,
- $\{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$,
- $\{x \in [a, b] : \varphi(x) > c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$,
- $\{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$.

Beweis. a) \Rightarrow b): Zunächst beweisen wir die Beziehung

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\right\} \quad (2.2.5)$$

Es sei $x_0 \in \{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\}$. Wegen $\varphi(x_0) \leq c$ gilt dann $\varphi(x_0) < c + \frac{1}{n}$ für jede positive natürliche Zahl n . Dies besagt

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

Folglich ist

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

Es gelte umgekehrt

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

Dies besagt $\varphi(x_0) < c + \frac{1}{n}$ für jede positive natürliche Zahl n . Hieraus folgt $\varphi(x_0) \leq c$, also ist $x_0 \in \{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\}$. Somit gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\right\} \subseteq \{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\}$$

Damit ist (2.2.5) bewiesen.

Da nach Voraussetzung jede der Mengen $\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\}$ Lebesgue-messbar ist, gilt auf Grund von Satz 2.1.6 auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c + \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

womit wegen (2.2.5) die Behauptung bewiesen ist.

b) \Rightarrow c): Auf Grund von

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) > c\} = \overline{\{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq c\}}$$

der Voraussetzung b) und Satz 2.1.2b ist auch

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) > c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

c) \Rightarrow d): Analog wie (2.2.5) wird die Beziehung

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) > c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a, b] : \varphi(x) > c - \frac{1}{n}\right\}$$

bewiesen. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus der Voraussetzung c) und Satz 2.1.6.

d) \Rightarrow a): Die Behauptung folgt aus

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) < c\} = \overline{\{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq c\}}$$

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 2.2.4. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion. Dann ist $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ genau dann, wenn $-\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ ist.

Satz 2.2.3. Es sei $A \subseteq [a, b]$. Dann ist $\chi_A \in \mathfrak{M}[a, b]$ genau dann, wenn $A \in \mathfrak{A}[a, b]$ ist.

Beweis. a) Es sei $\chi_A \in \mathfrak{M}[a, b]$. Dann ist auf Grund von Satz 2.2.2 insbesondere

$$B := \{x \in [a, b] : \chi_A(x) \leq 1\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

$$C := \{x \in [a, b] : \chi_A(x) \geq 1\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

und somit auch

$$A = \{x \in [a, b] : \chi_A(x) = 1\} = B \cap C \in \mathfrak{A}[a, b]$$

b) Es sei $A \in \mathfrak{A}[a, b]$. Dann ist $\chi_A \in L[a, b]$. Die Behauptung ergibt sich aus Folgerung 2.2.1.

Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion f heißt eine Treppenfunktion, wenn sich f in der Form

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \chi_{A_k} \quad (2.2.6)$$

darstellen lässt, wobei c_0, c_1, \dots, c_n reelle Zahlen und A_0, A_1, \dots, A_n Teilmengen von $[a, b]$ sind. Da die Funktionen χ_{A_k} nur die Werte 0, 1 annehmen können, ist der Wertebereich einer Treppenfunktion stets eine endliche Menge reeller Zahlen.

Beispiel 2.2.2. Es seien $[a, b] := [1, 5]$, $A_0 := [1, 2)$, $A_1 := [3, 4)$, $A_2 := [4, 5]$ und $c_0 := 1$, $c_1 := -1$, $c_2 := 2$. Dann wird auf $[1, 5]$ durch

$$f := \chi_{A_0} - \chi_{A_1} + 2\chi_{A_2}$$

eine Treppenfunktion definiert, deren Bild in Abb. 2.2.4 veranschaulicht ist.

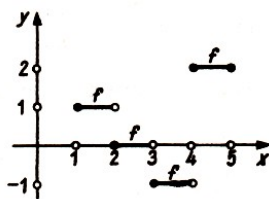


Abb. 2.2.4

Mit $T[a, b]$ bezeichnen wir das System aller auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Treppenfunktionen.

Satz 2.2.4. Jede Treppenfunktion f der Form (2.2.6) mit $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ ist über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$J_L(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k m(A_k) \quad (2.2.7)$$

Insbesondere ist also $f \in T[a, b]$. Umgekehrt kann jede Funktion $f \in T[a, b]$ in der Form (2.2.6) mit paarweise disjunkten Mengen $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ dargestellt werden.

Beweis. Wegen $A_0, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ gilt $\chi_{A_0}, \dots, \chi_{A_n} \in L[a, b]$. Da $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, gilt $f \in L[a, b]$. Ferner ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n c_k \chi_{A_k}(x) dx = \sum_{k=0}^n \left[c_k \int_a^b \chi_{A_k}(x) dx \right] = \sum_{k=0}^n c_k m(A_k)$$

womit (2.2.7) bewiesen ist.

Es sei nun f eine beliebige Funktion aus $T[a, b]$. Der Wertebereich von f besteht aus endlich vielen paarweise verschiedenen reellen Zahlen c_0, \dots, c_n . Da f auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar ist, sind die Mengen

$$A_k := \{x \in [a, b] : f(x) = c_k\} = \{x \in [a, b] : f(x) \leq c_k\} \cap \{x \in [a, b] : f(x) \geq c_k\}$$

Lebesgue-messbar. Wegen $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ sind die Mengen A_0, \dots, A_n paarweise disjunkt. Wir zeigen, dass

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \chi_{A_k}$$

ist. Ist $x \in [a, b]$, so gibt es ein i mit $f(x) = c_i$. Es folgt $x \in A_i$ und $x \notin A_k$ für $i \neq k$, also

$$f(x) = c_i = c_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{k=0}^n c_k \chi_{A_k}(x)$$

Damit ist Satz 2.2.4 bewiesen.

Satz 2.2.5. Das System $T[a, b]$ aller auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Treppenfunktionen bildet eine Verbandsalgebra.

Beweis. Es sei $f, g \in T[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Satz 2.2.4 kann f bzw. g in der Form (2.2.6) bzw.

$$g = \sum_{k=0}^m d_k \chi_{B_k}$$

mit $A_0, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ bzw. $B_0, \dots, B_m \in \mathfrak{A}[a, b]$ dargestellt werden. Wegen

$$\lambda f = \sum_{k=0}^n (\lambda c_k) \chi_{A_k} \quad , \quad f + g = \sum_{k=0}^n c_k \chi_{A_k} + \sum_{k=0}^m d_k \chi_{B_k}$$

folgt aus Satz 2.2.4, dass λf und $f + g$ in $T[a, b]$ liegen. Auf Grund von Satz 2.1.1b gilt

$$fg = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^m c_k d_r \chi_{A_k \cap B_r}$$

und da $A_k \cap B_r \in \mathfrak{A}[a, b]$ ist, folgt $fg \in T[a, b]$. In der Darstellung (2.2.6) der Funktion f können die Lebesgue-messbaren Mengen A_0, A_1, \dots, A_n auf Grund von Satz 2.2.4 paarweise disjunkt gewählt werden. Die Funktion

$$h := \sum_{k=0}^n |c_k| \chi_{A_k}$$

liegt wieder in $T[a, b]$. Wir zeigen, dass $h = |f|$ und damit $|f| \in T[a, b]$ ist.

Liegt x in einer der Mengen A_k , so ist $f(x) = c_k$, $h(x) = |c_k|$ und damit $|f(x)| = h(x)$. Liegt aber x in keiner der Mengen A_k , so ist $h(x) = 0$ und $f(x) = 0$, also wiederum $|f(x)| = h(x)$. Damit ist Satz 2.2.5 bewiesen.

Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte beschränkte Lebesgue-messbare reelle Funktion. Wir wollen diese Funktion durch Treppenfunktionen approximieren. Es gibt eine nichtnegative reelle Zahl c derart, dass

$$-c \leq \varphi(x) \leq c \tag{2.2.8}$$

ist für alle $x \in [a, b]$. Ferner sei

$$Z : -c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = c \quad (2.2.9)$$

eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[-c, c]$ der y -Achse und

$$d(Z) := \max_{k=1, \dots, n} (y_k - y_{k-1}) \quad (2.2.10)$$

Die Menge

$$A_k = \{x \in [a, b] : y_{k-1} \leq \varphi(x) < y_k\} \quad (2.2.11)$$

ist in Abb. 2.2.5 veranschaulicht.

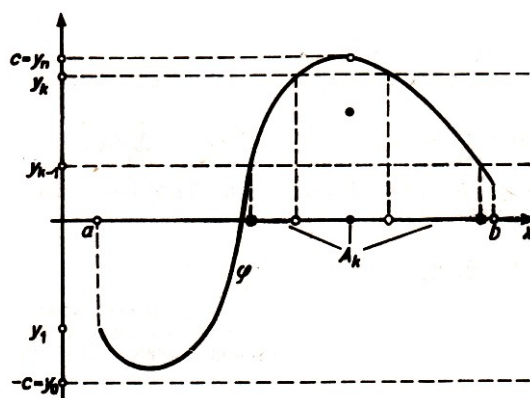


Abb. 2.2.5

Offensichtlich lässt sich A_k auch in der Form

$$A_k = \{x \in [a, b] : \varphi(x) < y_k\} \setminus \{x \in [a, b] : \varphi(x) < y_{k-1}\}$$

schreiben. Wegen $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ gilt demnach

$$\{x \in [a, b] : \varphi(x) < y_k\} \quad , \quad \{x \in [a, b] : \varphi(x) < y_{k-1}\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

Folglich ist auch $A_k \in \mathfrak{A}[a, b]$. Mit Hilfe der Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ definieren wir auf $[a, b]$ die Treppenfunktion

$$f_Z := \sum_{k=1}^n y_{k-1} \chi_{A_k} \quad (2.2.12)$$

die die zur Zerlegung (2.2.9) gehörende Treppenfunktion von φ heißt. Auf Grund von Satz 2.2.4 gilt $f_Z \in L[a, b]$. Offensichtlich ist auch die positive reelle Zahl c von (2.2.8) eine Schranke der Treppenfunktion f_Z .

Es sei x ein beliebig vorgegebener Punkt des Intervalls $[a, b]$. Wegen (2.2.8) und (2.2.9) gibt es genau ein k mit

$$y_{k-1} \leq \varphi(x) < y_k \quad (2.2.13)$$

also mit $x \in A_k$, d.h., es ist

$$\chi_{A_j}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Mit Hilfe von (2.2.14) erhalten wir aus (2.2.12) die Beziehung

$$f_Z(x) = y_{k-1} \quad (2.2.15)$$

Berücksichtigung von (2.2.13), (2.2.15) und (2.2.10) liefert die Abschätzung

$$0 \leq \varphi(x) - y_{k-1} = \varphi(x) - f_Z(x) < y_k - f_Z(x) = y_k - y_{k-1} \leq d(Z)$$

für jedes $x \in [a, b]$. Demnach gilt auf $[a, b]$ die Abschätzung

$$0 \leq \varphi - f_Z \leq d(Z) \quad (2.2.16)$$

Mit diesen bereitgestellten Hilfsmitteln beweisen wir die folgenden beiden Sätze.

Satz 2.2.6. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte beschränkte reelle Lebesgue-messbare Funktion. Ist c eine Schranke von φ , Z mit (2.2.9) eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[-c, c]$ und Z' eine Verfeinerung von Z , so gilt stets $f_Z \leq f_{Z'}$.

Beweis. Wir können uns darauf beschränken, dass die Zerlegung Z' , einen Teilpunkt mehr enthält als die durch (2.2.9) definierte Zerlegung Z , also von der Form

$$Z' : -c = y_0 < \dots < y_{j-1} < \eta < y_i < \dots < y_n = c$$

ist. Zur Zerlegung Z gehören die durch (2.2.11) definierten Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ bzw. zur Zerlegung Z' gehören die durch (2.2.11) definierten Mengen $A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n \in \mathfrak{A}[a, b]$ und die beiden Mengen

$$\begin{aligned} A'_j &:= \{x \in [a, b] : y_{j-1} \leq \varphi(x) < \eta\} \in \mathfrak{A}[a, b] \\ A''_j &:= \{x \in [a, b] : \eta \leq \varphi(x) < y_i\} \in \mathfrak{A}[a, b] \end{aligned}$$

Wegen $A_j = A'_j \cup A''_j$ und $A'_j \cap A''_j = \emptyset$ gilt $\chi_{A_j} = \chi_{A'_j} + \chi_{A''_j}$. Hieraus folgt

$$y_{j-1}\chi_{A_j} = y_{j-1}\chi_{A'_j} + y_{j-1}\chi_{A''_j} \leq y_{j-1}\chi_{A'_j} + \eta\chi_{A''_j} \quad (2.2.17)$$

Ferner ist

$$f_{Z'} = \sum_{k=1}^{j-1} y_{k-1}\chi_{A_k} + y_{j-1}\chi_{A'_j} + \eta\chi_{A''_j} + \sum_{k=j+1}^n y_{k-1}\chi_{A_k}$$

Berücksichtigung von (2.2.17) liefert die Behauptung.

Satz 2.2.7. Jede auf $[a, b]$ definierte beschränkte reelle Lebesgue-messbare Funktion φ ist über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar.

Beweis. Es sei c eine Schranke von φ , Z_n mit $n \geq 1$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[-c, c]$ in 2^n Teilintervalle. Dann ist

$$d(Z_n) = \frac{2c}{2^n} = \frac{c}{2^{n-1}} \quad (2.2.18)$$

und die Zerlegung Z_{n+1} ist eine Verfeinerung der Zerlegung Z_n . Bezeichnen wir mit f_n die Treppenfunktion von φ , die zur Zerlegung Z_n gehört, so gilt auf Grund von Satz 2.2.6 die Abschätzung

$$f_n \leq f_{n+1} \quad (2.2.19)$$

Berücksichtigung von (2.2.16) und (2.2.18) ergibt

$$0 \leq \varphi - f_n \leq \frac{c}{2^{n-1}}$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \varphi \quad (2.2.20)$$

Die Beziehungen (2.2.19) und (2.2.20) besagen, dass (f_n) eine eigentlich konvergente monotone Funktionenfolge mit $f_n \in L[a, b]$ ist.

Da c eine Schranke von φ ist, erhalten wir unter Verwendung von (2.2.16) die Abschätzung $f_n \leq \varphi \leq c$. Wegen $f_n, c \in L[a, b]$ und Satz 1.3.3 folgt $\varphi \in L[a, b]$ sowie

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(f_n) \quad (2.2.21)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Von Henri Lebesgue (1875-1941) wurde ursprünglich ein anderer Weg zur Definition des nach ihm benannten Integralbegriffs eingeschlagen. Mit anderen Mitteln definierte er zunächst das System der Lebesgue-messbaren Mengen und das ebenfalls nach ihm benannte Lebesguesche Maß.

Die Definition der messbaren Funktionen erfolgte wie in Definition 2.2.1. Für messbare Treppenfunktionen f der Form (2.2.6) bzw. für beschränkte messbare Funktionen φ definierte Lebesgue dann das Integral $J_L(f)$ gemäß (2.2.7) bzw. $J_L(\varphi)$ durch (2.2.21).

Satz 2.2.8. Es seien $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}[a, b]$. Dann gehören auch die Funktionen $\varphi \sqcup \psi$ und $\varphi \sqcap \psi$ zu $\mathfrak{M}[a, b]$.

Beweis. Wegen $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}[a, b]$ gilt für jede reelle Zahl c stets

$$A := \{x \in [a, b] : \varphi(x) < c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

$$B := \{x \in [a, b] : \psi(x) < c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

a) Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der Beziehung

$$C := \{x \in [a, b] : (\varphi \sqcup \psi)(x) < c\} = A \cap B$$

Es sei $x_0 \in C$. Dann gilt $\varphi(x_0) < c$ und $\psi(x_0) < c$. Dies bedeutet $x_0 \in A$ und $x_0 \in B$ bzw. $x_0 \in A \cap B$. Somit ist $C \subseteq A \cap B$.

Es sei $x_0 \in A \cap B$. Dann gilt $x_0 \in A$ und $x_0 \in B$ bzw. $\varphi(x_0) < c$ und $\psi(x_0) < c$ bzw. $\max\{\varphi(x_0), \psi(x_0)\} < c$ bzw. $(\varphi \sqcup \psi)(x_0) < c$ bzw. $x_0 \in C$.

Folglich ist $A \cap B \subseteq C$. Entsprechend Satz 2.1.2b ist $C \in \mathfrak{A}[a, b]$ und damit $\varphi \sqcup \psi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

b) Auf Grund von (1.1.16) genügen reelle Funktionen φ, ψ der Beziehung

$$\varphi \sqcap \psi = -[(-\varphi) \sqcup (-\psi)] \quad (2.2.22)$$

die offensichtlich auch für numerische Funktionen φ, ψ gilt. Die Behauptung folgt dann aus (2.2.22) in Verbindung mit Folgerung 2.2.4 und Beweisteil a), womit der Satz bewiesen ist.

Es sei (φ_n) eine Folge numerischer Funktionen φ_n mit gemeinsamem Definitionsbereich $[a, b]$. Dann wird durch

$$\left(\bigcup_{k=0}^n \varphi_k \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\bigcap_{k=0}^n \varphi_k \right)$$

eine monoton wachsende bzw. eine monoton fallende Funktionenfolge definiert, die die Grenzfunktion

$$\varphi^* = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \bigsqcup_{k=0}^n \varphi_k \quad \text{bzw.} \quad \varphi^{**} = \bigsqcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \bigsqcap_{k=0}^n \varphi_k$$

besitzt. Ist φ die Grenzfunktion von (φ_n) , so gilt

$$\varphi := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \varphi_k \quad (2.2.23)$$

Der Beweis von (2.2.23) erfolgt analog zum Beweis des Satzes 1.4.2.

Satz 2.2.9. Es seien $\varphi_0, \varphi_1, \dots \in \mathfrak{M}[a, b]$. Dann gehören auch die Funktionen $\bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ zu $\mathfrak{M}[a, b]$.

Beweis. Wegen $\varphi_0, \varphi_1, \dots \in \mathfrak{M}[a, b]$ sind für jede reelle Zahl c die Mengen

$$A_n := \{x \in [a, b] : \varphi_n(x) \leq c\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

a) Zunächst zeigen wir die Gültigkeit der Beziehung

$$A := \{x \in [a, b] : \varphi^*(x) \leq c\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

Es sei $x_0 \in A$. Dann gilt $\varphi^*(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=0}^n \varphi_k(x_0) \leq c$. Hieraus folgt $\varphi_n(x_0) \leq c$ bzw. $x_0 \in A_n$ für jede natürliche Zahl n .

Folglich ist $x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ und somit $A \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

Es sei $x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Hieraus folgt $x_0 \in A_n$ bzw. $\varphi_n(x_0) \leq c$ für jede natürliche Zahl n . Dann ist auch $\varphi^*(x_0) \leq c$ bzw. $x_0 \in A$. Folglich gilt $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq A$.

Auf Grund von Satz 2.1.6 ist $A \in \mathfrak{A}[a, b]$ und damit $\varphi^* \in \mathfrak{M}[a, b]$.

b) Zunächst zeigen wir die Gültigkeit von

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n = - \bigcup_{n=0}^{\infty} (-\varphi_n) \quad (2.2.24)$$

Für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=0}^n \varphi_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min\{\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)\} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{-\varphi_0(x), \dots, -\varphi_n(x)\} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=0}^n [-\varphi_k(x)] = - \bigcup_{n=0}^{\infty} [-\varphi_n(x)] \end{aligned}$$

Die Behauptung $\varphi^{**} \in \mathfrak{M}[a, b]$ folgt dann aus (2.2.24) in Verbindung mit Folgerung 2.2.4 und Beweisteil a).

Satz 2.2.10. Es seien $\varphi_0, \varphi_1, \dots \in \mathfrak{M}[a, b]$, und φ sei eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion, die Grenzfunktion der Folge (φ_n) ist. Dann ist auch $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

Beweis. Auf Grund von Satz 2.2.9 gilt für die Funktionen

$$\psi_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} \varphi_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi_{n+k} \in \mathfrak{M}[a, b]$$

und $\prod_{n=0}^{\infty} \psi_n \in \mathfrak{M}[a, b]$. Wegen (2.2.23) ist dann auch $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

Satz 2.2.11. Eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion φ ist auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar genau dann, wenn es eine Folge (φ_n) mit $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ gibt derart, dass die Glieder φ_n der Folge über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare beschränkte Funktionen sind.

Beweis. a.) Es sei (φ_n) eine Funktionenfolge mit $\varphi_n \in L[a, b]$, φ_n auf $[a, b]$ beschränkt und $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$.

Wegen $\varphi_n \in L[a, b]$ gilt entsprechend Folgerung 2.2.1 auch $\varphi_n \in \mathfrak{M}[a, b]$. Gemäß Satz 2.2.10 ist dann $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

b) Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$. Auf $[a, b]$ definieren wir durch

$$\varphi_n := (\varphi \sqcap n) \sqcup (-n)$$

eine Funktionenfolge (φ_n) , deren Glieder φ_n wegen Folgerung 2.2.3 und Satz 2.2.8 der Bedingung $\varphi_n \in \mathfrak{M}[a, b]$ genügen. Für jedes $x \in [a, b]$ gilt ferner

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -n & \text{falls } \varphi(x) \leq -n \\ \varphi(x) & \text{falls } -n < \varphi(x) < n \\ n & \text{falls } \varphi(x) \geq n \end{cases} \quad (2.2.25)$$

also $|\varphi_n(x)| \leq n$. Dies besagt, dass die Funktion φ_n auf $[a, b]$ beschränkt ist. Gemäß Satz 2.2.7 ist dann $\varphi_n \in L[a, b]$. Aus (2.2.25) folgt schließlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$, womit der Satz bewiesen ist.

Ist „*varphi*“ eine nichtnegative Funktion, so wird durch $\varphi_n := (\varphi \sqcap n) \sqcup (-n) = \varphi \sqcap n$ eine monoton wachsende Folge (φ_n) nichtnegativer Funktionen definiert. Aus dem Beweisteil b) von Satz 2.2.11 ergibt sich demnach die

Folgerung 2.2.5. Zu jeder auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren nichtnegativen Funktion φ gibt es eine Folge (φ_n) nichtnegativer beschränkter Funktionen $\varphi_n \in L[a, b]$ mit $\varphi_n \uparrow \varphi$.

Beispiel 2.2.3. Mit Hilfe von Satz 2.2.11 beweisen wir, dass die auf $[0, 1]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte nichtnegative Funktion φ auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar ist.

Beweis. Es sei

$$(r_k) := \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

die Folge (1.2.16) rationaler Zahlen $r_k \in [0, 1]$ und

$$\varphi_n := n \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}$$

In Beispiel 1.2.4 haben wir $\varphi_n \in L[0, 1]$ und $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ bewiesen. Ferner gilt $|\varphi_n(x)| \leq n$ für alle $x \in [0, 1]$. Auf Grund von Satz 2.2.11 ist demnach $\varphi \in \mathfrak{M}[0, 1]$.

Beispiel 2.2.4. Mit Hilfe von Satz 2.2.11 beweisen wir, dass die auf $[1, e]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 1 \\ \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{für } x \in (1, e] \end{cases}$$

definierte nichtnegative Funktion φ_n auf $[1, e]$ Lebesgue-messbar ist.

Beweis. Dazu führen wir auf $[1, e]$ die durch

$$\varphi_n(x) := \varphi(x)\chi_{[1+(1/n), e]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{für } x \in \left[1 + \frac{1}{n}, e\right] \end{cases}$$

definierte Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ein, deren Glieder φ_n wegen $\varphi_n \in E[1, e]$ über $[1, e]$ Lebesgue-integrierbare reelle Funktionen sind. Da φ_n auf $[1 + (1/n), e]$ stetig ist, ist φ_n dort und damit auch auf $[1, e]$ beschränkt. Ferner gilt für alle $x \in [1, e]$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi\chi_{(1, e]} = \varphi$. Folglich ist $\varphi \in \mathfrak{M}[1, e]$.

Satz 2.2.12. Es seien $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}[a, b]$. Dann gehören auch die Funktionen $\varphi\psi$ und $\varphi + \psi$, falls definiert, zu $\mathfrak{M}[a, b]$.

Beweis. Gemäß (2.2.25) definieren wir Folgen $(\varphi_n), (\psi_n)$ mit über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbaren beschränkten Funktionen φ_n, ψ_n für die

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \quad , \quad \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$$

ist. Offensichtlich sind auch die Funktionen $\varphi_n\psi_n$ und $\varphi_n + \psi_n$ auf $[a, b]$ beschränkt. Da $L[a, b]$ ein Vektorverband ist, gilt $\varphi_n + \psi_n \in L[a, b]$. Wir zeigen, dass auch $\varphi_n\psi_n \in L[a, b]$ ist.

Entsprechend dem Beweis von Satz 2.2.7 konstruieren wir zur Funktion ψ_n eine Treppenfunktionenfolge (f_k) mit $\psi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$, wobei $f_k \in L[a, b]$ und jedes f_k die gleiche Schranke c wie ψ_n besitzt. Dann gilt

$$\varphi_n\psi_n = \varphi_n \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_n f_k$$

Auf Grund von Satz 1.3.5 ist $\varphi_n f_k \in L[a, b]$, da die f_k Linearkombinationen Lebesgue-integrierbarer charakteristischer Funktionen sind.

Ferner ist $|\varphi_n f_k| \leq c^2$ für alle natürlichen Zahlen k . Da $c^2 \in L[a, b]$ ist, folgt schließlich aus Satz 1.4.3 die Behauptung $\varphi_n\psi_n \in L[a, b]$.

Ferner gilt⁴

$$\varphi\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n\psi_n$$

und, falls $\varphi + \psi$ definiert ist,

$$\varphi + \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n + \psi_n)$$

Damit ist $(\varphi_n\psi_n)$ bzw. $(\varphi_n + \psi_n)$ eine Folge über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbarer beschränkter Funktionen, die punktweise gegen $\varphi\psi$ bzw. $\varphi + \psi$ konvergiert. Entsprechend Satz 2.2.11 ist dann $\varphi\psi, \varphi + \psi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

Folgerung 2.2.6. Es seien $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$, $A \in [a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gehören auch die Funktionen $\lambda\varphi$ und $\varphi\chi_A$ zu $\mathfrak{M}[a, b]$.

Beweis. Entsprechend Folgerung 2.2.3 und Satz 2.2.3 gilt $\lambda, \chi_A \in \mathfrak{M}[a, b]$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.2.12.

Satz 2.2.13. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion. Dann ist $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$

⁴Ist $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = \pm\infty$ oder umgekehrt, so ist $\varphi_n(x)\psi_n(x) = 0$ wegen (2.2.25).

genau dann, wenn die Funktionen φ^+ und φ^- zu $\mathfrak{M}[a, b]$ gehören.

Beweis. a) Es gelte $\varphi^+, \varphi^- \in \mathfrak{M}[a, b]$. Auf Grund von $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, Folgerung 2.2.4 und der Tatsache, dass in $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ nicht der Fall $\infty - \infty$ oder $-\infty + \infty$ eintreten kann, folgt aus Satz 2.2.12 die Behauptung $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$.

b) Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$. Dann gilt entsprechend Satz 2.2.2 a,d für die beiden Mengen

$$A := \{x \in [a, b] : \varphi(x) < 0\} \in \mathfrak{A}[a, b],$$

$$B := \bar{A} = \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq 0\} \in \mathfrak{A}[a, b].$$

Wegen

$$(\varphi\chi_B)(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in A \\ \varphi(x) & \text{für } x \in B \end{cases}, \quad -(\varphi\chi_A)(x) = \begin{cases} -\varphi(x) & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in B \end{cases}$$

ist

$$\varphi^+ = \varphi\chi_B, \quad \varphi^- = -(\varphi\chi_A)$$

Berücksichtigung der Folgerungen 2.2.6 und 2.2.4 liefert die Behauptung $\varphi^+, \varphi^- \in \mathfrak{M}[a, b]$.

Aufgabe 2.2.1. Man untersuche, ob die nichtnegative Funktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar bzw. über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2.2.2. Es sei α eine reelle Zahl mit $\alpha > 1$. Man untersuche, ob die nichtnegative Funktion

$$\psi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 2.2.3. Man untersuche, ob die nichtnegative Funktion

$$\tau(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ -\frac{1}{x \ln x} & \text{für } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 2.2.4. Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ mit $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Man beweise, dass dann auch die Funktion $\frac{1}{\varphi}$ zu $\mathfrak{M}[a, b]$ gehört.

Aufgabe 2.2.5. Man zeige mit Hilfe der Funktion

$$\sigma(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}$$

dass $L[0, 1]$ keine Funktionenalgebra ist.

2.3 Verallgemeinerte Integrale nichtnegativer Lebesgue-messbarer Funktionen

Für jede nichtnegative auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktion φ ist die Funktion $\varphi \sqcap n$ beschränkt und damit wegen Satz 2.2.7 über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar. Da die Folge $(\varphi \sqcap n)$ monoton wachsend ist, ist auch die Folge

$$\int_a^b \varphi(x) \sqcap n dx$$

monoton wachsend. Es existiert somit der endliche oder unendliche Grenzwert

$$*\int_a^b \varphi(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sqcap n dx \quad (2.3.1)$$

den wir das verallgemeinerte Integral der nichtnegativen auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Funktion φ nennen.

Sind φ, ψ zwei auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktionen mit $0 \leq \varphi \leq \psi$, so ist stets $\varphi \sqcap n \leq \psi \sqcap n$, und folglich gilt

$$*\int_a^b \varphi(x) dx \leq *\int_a^b \psi(x) dx \quad \text{falls } 0 \leq \varphi \leq \psi \quad (2.3.2)$$

Satz 2.3.1. Für jede nichtnegative über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktion φ ist

$$*\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2.3.3)$$

Beweis. Die Funktionenfolge $(\varphi \sqcap n)$ ist eine eigentlich konvergente Levi-Folge mit der Grenzfunktion φ . Die Folge der Integrale der Funktionen $\varphi \sqcap n$ konvergiert daher gegen das Integral von φ . Hieraus folgt die Behauptung.

Auf Grund dieses Satzes ist es üblich, die Kennzeichnung des verallgemeinerten Integrale durch einen Stern (oder ein anderes Symbol) zu unterlassen und die gleiche Schreibweise wie für das eigentliche Lebesguesche Integral zu verwenden. Wir wollen aber durch Beibehaltung der unterschiedlichen Schreibweise vor Fehlschlüssen warnen.

So ist es beispielsweise nicht immer erlaubt, die Differenz zweier nichtnegativer Lebesgue-messbarer Funktionen bzw. ihrer Integrale zu bilden, weil dabei sinnlose Ausdrücke der Form $\infty - \infty$ auftreten können.

Mitunter wird auch für gewisse auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktionen φ , die auch negative Werte annehmen, ein verallgemeinertes Integral eingeführt. Voraussetzung hierfür ist, dass wenigstens eines der verallgemeinerten Integrale der Funktionen φ^+ und φ^- endlich ist. In diesem Fall setzt man

$$*\int_a^b \varphi(x) dx := *\int_a^b \varphi^+(x) dx - *\int_a^b \varphi^-(x) dx$$

Wir wollen hiervon keinen Gebrauch machen und verallgemeinerte Integrale ausschließlich für nichtnegative Funktionen bilden.

Beispiel 5.3.1. Für alle positiven reellen Zahlen ε und für alle auf $[a, b]$ nichtnegativen Lebesgue-messbaren Funktionen φ gilt die Tschebyschewsche Ungleichung

$$m(\{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \varphi(x) dx$$

die sich auch in der Form

$$\varepsilon \cdot m(\{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq \varepsilon\}) \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

schreiben lässt. Ist $\varphi \in L[a, b]$, so besagt die Tschebyschewsche Ungleichung

$$\varepsilon \cdot m(\{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq \varepsilon\}) \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

Für die in Abb. 2.3.1 dargestellte Funktion φ bedeutet dies anschaulich, dass der Inhalt des schraffierten Rechtecks nicht größer ist als der Inhalt der Punktmenge

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$$

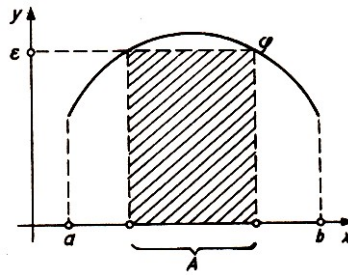


Abb. 2.3.1

Beweis. Setzen wir

$$A := \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq \varepsilon\}$$

so ist wegen $\varphi(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ stets

$$\varepsilon \chi_A(x) = \begin{cases} \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon \leq \varphi(x) & \text{für } x \in A \\ \varepsilon \cdot 0 = 0 \leq \varphi(x) & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

Wegen $A \in \mathfrak{A}[a, b]$ gilt $\chi_A \in L[a, b]$. Aus $\chi_A \leq \frac{1}{\varepsilon} \varphi$ folgt unter Berücksichtigung von (2.3.3) und (2.3.2) die Ungleichung

$$\int_a^b \chi_A(x) dx = \int_a^b \chi_A(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \varphi(x) dx$$

Das ist die Behauptung.

Satz 2.3.2. Für jede monoton wachsende Funktionenfolge (φ_n) , deren Glieder nichtnegative auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktionen sind, ist

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (2.3.4)$$

Beweis. Es gelte $\varphi_n \uparrow \varphi$. Auf Grund von Satz 2.2.10 gilt dann $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$, und wegen $\varphi_n \leq \varphi$ ist

$$*\int_a^b \varphi_n(x) dx \leq *\int_a^b \varphi(x) dx$$

also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} *\int_a^b \varphi_n(x) \leq *\int_a^b \varphi(x) dx \quad (2.3.5)$$

Für jede natürliche Zahl m sind die Funktionen $\varphi_n \sqcap m$ und $\varphi \sqcap m$ über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\varphi_n \sqcap m \uparrow \varphi \sqcap m$. Aus dem Satz von Lewi und Satz 2.3.1 folgt

$$\int_a^b \varphi(x) \sqcap m dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \sqcap m dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \sqcap m dx$$

Wegen $\varphi_n \sqcap m \leq \varphi_n$ ist

$$\int_a^b \varphi(x) \sqcap m dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} *\int_a^b \varphi_n(x) dx$$

Der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ergibt

$$*\int_a^b \varphi(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} *\int_a^b \varphi_n(x) dx$$

In Verbindung mit (2.3.5) folgt hieraus die Behauptung (2.3.4).

Beispiel 2.3.2. Wie wir in Beispiel 2.2.1 bewiesen haben, ist die auf $[-1, 1]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

definierte nichtnegative Funktion φ auf $[-1, 1]$ Lebesgue-messbar, und es ist φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n := \varphi \chi_{[-1, -(1/n)] \cup [1/n, 1]}$$

auf $[-1, 1]$ definierten monoton wachsenden Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, deren Glieder φ_n nichtnegative über $[-1, 1]$ Lebesgue-integrierbare und damit auch auf $[-1, 1]$ Lebesgue-messbare Funktionen sind. Gemäß Satz 2.3.2 existiert demnach das verallgemeinerte Integral der durch (2.3.6) definierten Funktion φ . Wegen (2.3.4), Satz 2.3.1 und (2.2.4) ist somit

$$*\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = *\int_{-1}^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} *\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 2)$$

also

$$*\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \infty \quad (2.3.7)$$

Beispiel 2.3.3. In Beispiel 2.2.3 haben wir bewiesen, dass die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (2.3.8)$$

auf $[0, 1]$ definierte nichtnegative Funktion φ auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar ist. In Beispiel 1.2.4 wurde gezeigt, dass φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n := n \sum_{k=0}^n \chi_{\{r_k\}}$$

auf $[0, 1]$ definierten monoton wachsenden Funktionenfolge (φ_n) ist, deren Glieder φ_n nichtnegative über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbare und damit auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbare Funktionen sind und

$$(r_k) := \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

die Folge (1.2.16) rationaler Zahlen $r_k \in [0, 1]$ ist. Demnach existiert das verallgemeinerte Integral der Funktion (2.3.8). Berücksichtigung von (1.2.23) ergibt

$$*\int_0^1 \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$$

Beispiel 2.3.4. Wie wir in Beispiel 2.2.4 bewiesen haben, ist die auf $[1, e]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 1 \\ \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{für } x \in (1, e] \end{cases} \quad (2.3.9)$$

definierte nichtnegative Funktion φ auf $[1, e]$ Lebesgue-messbar, und es ist φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n(x) := \varphi \chi_{[1+(1/n), e]}$$

auf $[1, e]$ definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, deren Glieder φ_n nichtnegative über $[1, e]$ Lebesgue-integrierbare und damit auf $[1, e]$ Lebesgue-messbare Funktionen sind. Um Satz 2.3.2 anwenden zu können, müssen wir zunächst noch zeigen, dass $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge ist. Die Behauptung folgt unmittelbar aus

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi(\chi_{[1+(1/(n+1)), e]} - \chi_{[1+(1/n), e]}) = \varphi \chi_{[1+(1/(n+1)), 1+(1/n)]} \geq 0$$

Somit ist

$$\begin{aligned} *\int_1^e \varphi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1+1/n}^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{x=1+(1/n)}^{x=e} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-1 + \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right] \end{aligned}$$

also

$$*\int_1^e \varphi(x) dx = \infty$$

Satz 2.3.3. Für alle nichtnegativen auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Funktionen φ, ψ und alle nichtnegativen reellen Zahlen t ist

$$*\int_a^b t\varphi(x) dx = t *\int_a^b \varphi(x) dx \quad (2.3.11)$$

$$*\int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)] dx = *\int_a^b \varphi(x) dx + *\int_a^b \psi(x) dx \quad (2.3.12)$$

Beweis. Wir wählen entsprechend Folgerung 2.2.5 nichtnegative beschränkte Funktionen $\varphi_n, \psi_n \in L[a, b]$ mit $\varphi_n \uparrow \varphi$, $\psi_n \uparrow \psi$. Dann gilt $t\varphi_n \uparrow t\varphi$, $\varphi_n + \psi_n \uparrow \varphi + \psi$, und aus Satz 2.3.2 und Satz 2.3.1 folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b t\varphi(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} t\varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t\varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t\varphi_n(x) dx \\ &= t \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = t \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = t \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = t \int_a^b \varphi(x) dx \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\varphi_n(x) + \psi_n(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \varphi_n(x) dx + \int_a^b \psi_n(x) dx \right] \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion beweist man die

Folgerung 2.3.1. Für alle nichtnegativen auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ gilt

$$\int_a^b \left[\sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^n \left[\int_a^b \varphi_k(x) dx \right] \quad (2.3.13)$$

Eine wichtige Folgerung aus den Sätzen 2.3.2 und 2.3.3 ist in Verallgemeinerung von (2.3.13) der Satz von der σ -Additivität des verallgemeinerten Lebesgueschen Integrals.

Satz 2.3.4. Für jede Funktionenfolge (φ_n) , deren Glieder nichtnegative auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktionen sind, ist

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (2.3.14)$$

Beweis. Die Folge der Funktionen $\psi_n := \sum_{k=0}^n \varphi_k$ ist monoton wachsend, und mit $\varphi := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ gilt $\psi_n \uparrow \varphi$. Unter Berücksichtigung von (2.3.4) und (2.3.13) folgt

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b \varphi_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(x) dx$$

Beispiel 2.3.5. Für jede natürliche Zahl n ist die auf $[0, 1]$ durch $\varphi_n(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$ definierte nichtnegative Funktion φ_n auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar, da $\varphi_n \in L[0, 1]$ ist. Auf Grund von Satz 2.3.4 gilt demnach

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

also

$$*\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 1$$

Der nachfolgende Satz charakterisiert das System der über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen als Teilsystem des Systems der auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Funktionen.

Satz 2.3.5. Eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion φ ist genau dann über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) φ ist endlich, d.h., für alle $x \in [a, b]$ ist $|\varphi(x)| < \infty$.

b) φ ist auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar.

c) Es ist

$$*\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty \tag{2.3.15}$$

Beweis. Ist $\varphi \in L[a, b]$, so ist a) und wegen Folgerung 2.2.1 auch b) erfüllt. Aus $\varphi \in L[a, b]$ folgt $|\varphi| \in L[a, b]$, und aus (2.3.3) folgt (2.3.15).

Sind umgekehrt die Bedingungen a), b), c) für eine Funktion φ erfüllt, so sind die Funktionen φ^+, φ^- nach Satz 2.2.13 auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar, und die Funktionen $\varphi'_n := \varphi^+ \cap n$ und $\varphi''_n := \varphi^- \cap n$ sind über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar. Wegen $\varphi'_n \leq \varphi^+ \leq |\varphi_n|, \varphi''_n \leq \varphi^- \leq |\varphi|$ ist

$$\int_a^b \varphi'_n(x) dx \leq *\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty \quad , \quad \int_a^b \varphi''_n(x) dx \leq *\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty$$

Daher sind $(\varphi'_n), (\varphi''_n)$ eigentlich konvergente Levi-Folgen. Ihre Grenzfunktionen φ^+, φ^- liegen in $L[a, b]$, und folglich ist auch $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \in L[a, b]$.

Beispiel 2.3.6. Wie wir in Beispiel 2.3.2 bzw. Beispiel 2.3.4 bewiesen haben, ist die durch (2.3.6) bzw. (2.3.9) definierte nichtnegative Funktion auf $[-1, 1]$ bzw. $[1, e]$ Lebesgue-messbar. Wegen (2.3.7) bzw. (2.3.10) ist die Bedingung (2.3.15) nicht erfüllt.

Die durch (2.3.8) definierte Funktion φ ist auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbar, aber die Bedingung a) von Satz 2.3.5 ist nicht erfüllt. Demnach sind diese drei Funktionen über das angegebene Intervall nicht integrierbar.

Aufgabe 2.3.1. Man untersuche, ob die nichtnegative Funktion ψ bzw. τ von Aufgabe 2.2.2 bzw. 2.2.3 über $[0, 1]$ bzw. $[0, \frac{1}{e}]$ Lebesgue-integrierbar ist.

2.4 Der Begriff „fast überall“

In diesem Abschnitt führen wir einen für die Lebesguesche Integrationstheorie besonders typischen und wichtigen Begriff ein. Wir gehen von einigen Beispielen aus.

Eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion φ heißt fast überall endlich auf $[a, b]$ genau dann, wenn die Menge

$$A := \{x \in [a, b] : |\varphi(x)| = \infty\} \tag{2.4.1}$$

also die Menge der Punkte $x \in [a, b]$, in denen $\varphi(x)$ nicht endlich ist, eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null bildet. Insbesondere kann also auch $A = \emptyset$ sein, d.h., die Funktion φ ist dann in jedem Punkt $x \in [a, b]$ endlich. Statt "fast überall" schreibt man abgekürzt "f. ü."

Satz 2.4.1. Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ und

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty \quad (2.4.2)$$

Dann ist φ f. ü. endlich auf $[a, b]$.

Beweis. Die Mengen

$$A_n := \{x \in [a, b] : |\varphi(x)| \geq n\} = \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq n\} \cup \{x \in [a, b] : \varphi(x) \leq -n\}$$

sind Lebesgue-messbar. Eine Zahl $x \in [a, b]$ liegt genau dann in allen Mengen A_n , wenn $|\varphi(x)| = \infty$, d.h., wenn x in der durch (2.4.1) definierten Menge A liegt. Somit ist

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

und folglich ist A gemäß Satz 2.1.6 Lebesgue-messbar. Ist $\chi_A(x) > 0$, so ist $x \in A$, also $|\varphi(x)| = \infty$. Hieraus folgt $n\chi_A \leq |\varphi|$ und

$$n \cdot m(A) \leq \int_a^b \chi_A(x) dx \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty$$

bzw.

$$m(A) \leq \frac{1}{n} \int_a^b |\varphi(x)| dx$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zeigt, dass $m(A) = 0$ ist.

Wir betrachten ein zweites Beispiel. Es ist $\varphi = o$ f. ü. auf $[a, b]$ genau dann, wenn die Menge

$$B := \{x \in [a, b] : \varphi(x) \neq 0\} = \{x \in [a, b] : |\varphi(x)| > 0\} \quad (2.4.3)$$

vom Lebesgueschen Maße Null ist.

Satz 2.4.2. Es sei $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ und

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx = 0 \quad (2.4.4)$$

Dann ist $\varphi(x) = o$ f. ü. auf $[a, b]$.

Beweis. Die Menge B ist Lebesgue-messbar. Die Folge der Funktionen $\psi_n := n|\varphi|$ ist monoton wachsend und besitzt eine nichtnegative Grenzfunktion ψ . Ist $\chi_B(x) > 0$, so ist $x \in B$, also $|\varphi(x)| > 0$ und

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n|\varphi(x)| = \infty$$

Daher ist $\chi_B \leq \psi$ und

$$m(B) = \int_a^b \chi_B(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_a^b |\varphi(x)| dx = 0$$

Somit ist B eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null.

Beispiel 2.4.1. In Beispiel 2.3.3 haben wir bewiesen, dass für die durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierte nichtnegative Lebesgue-messbare Funktion

$$\int_0^1 |\varphi(x)| dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0$$

gilt. Auf Grund von Satz 2.4.2 ist demnach $\varphi = 0$ f. ü. auf $[0, 1]$.

Satz 2.4.3. Es sei φ eine auf $[a, b]$ definierte numerische Funktion und $\varphi = 0$ f. ü. auf $[a, b]$. Dann ist $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx = 0 \tag{2.4.5}$$

Beweis. Die durch (2.4.3) definierte Menge B ist nach Voraussetzung eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null. Für jede reelle Zahl c bilden wir die Menge

$$B_c := \{x \in [a, b] : \varphi(x) < c\}$$

Für $c \leq 0$ ist $B_c \subseteq B$, und wegen Satz 2.1.7 ist B_c Lebesgue-messbar. Für $c > 0$ ist

$$\overline{B_c} = \{x \in [a, b] : \varphi(x) \geq c\} \subseteq B$$

woraus wir wiederum schließen, dass $\overline{B_c} \in \mathfrak{A}[a, b]$ ist. Dann ist aber auch $B_c = \overline{\overline{B_c}}$ für $c > 0$ Lebesgue-messbar. Damit ist $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$ bewiesen.

Die Folge (ψ_n) mit $\psi_n := n\chi_B$ ist monoton wachsend. Es gelte $\psi_n \uparrow \psi$. Ist $\varphi(x) \neq 0$, so ist $x \in B$, also $\psi_n(x) = n$, und folglich ist $\psi(x) = \infty$. Somit ist $|\varphi| \leq \psi$, woraus

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_a^b \chi_B(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot m(B) = 0$$

folgt.

Wir übertragen nun den Begriff f. ü. auf Beziehungen zwischen zwei Funktionen bzw. auf Aussagen über Funktionenfolgen. Es handelt sich beispielsweise um Aussagen der Form

$$\varphi \leq \psi \quad \text{f. ü. auf } [a, b] \tag{2.4.6}$$

$$\varphi = \psi \quad \text{f. ü. auf } [a, b] \tag{2.4.7}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi \quad \text{f. ü. auf } [a, b] \tag{2.4.8}$$

$$(\varphi_n) \text{ eigentlich konvergent f. ü.} \tag{2.4.9}$$

So besagt (2.4.6), dass die Menge der Punkte $x \in [a, b]$, für die nicht $\varphi(x) \leq \psi(x)$, also $\varphi(x) > \psi(x)$ ist, eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null bildet.

Die Aussage (2.4.8) bedeutet, dass die Menge der Punkte $x \in [a, b]$, für die die Folge $(\varphi_n(x))$ gar nicht konvergiert bzw. nicht gegen $\varphi(x)$ konvergiert, eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null bildet. Analog sind die beiden anderen Aussagen zu interpretieren.

Satz 2.4.4. Es seien φ, ψ auf $[a, b]$ definierte numerische Funktionen und $\varphi = \psi$ f. ü. auf $[a, b]$. Ist $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$, so ist auch $\psi \in \mathfrak{M}[a, b]$, und es gilt

$$*\int_a^b \varphi^+(x)dx = *\int_a^b \psi^+ dx \quad , \quad *\int_a^b \varphi^-(x)dx = *\int_a^b \psi^- dx \quad (2.4.10)$$

Beweis. Die Menge

$$A := \{x \in [a, b] : \varphi(x) \neq \psi(x)\}$$

ist vom Lebesgueschen Maße Null, und folglich ist auch

$$B := \bar{A} = \{x \in [a, b] : \varphi(x) = \psi(x)\} \in \mathfrak{A}[a, b]$$

Ferner ist $\varphi\chi_B = \psi\chi_B$ sowie $\chi_A + \chi_B = 1$ auf $[a, b]$. Wegen $(\psi\chi_A)(x) = 0$ für $x \in B$ ist die Funktion $\psi\chi_A$ f. ü. gleich null auf $[a, b]$, nach Satz 2.4.3 also auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar.

Da $\varphi\chi_B \in \mathfrak{M}[a, b]$ gemäß Folgerung 2.2.6 ist, folgt aus

$$\psi = \psi\chi_A + \psi\chi_B = \psi\chi_A + \varphi\chi_B$$

dass auch $\psi \in \mathfrak{M}[a, b]$ ist.

Schließlich ist auch $\varphi^+\chi_B = \psi^+\chi_B$, und es sind die Funktionen $\varphi^+\chi_A$ und $\psi^+\chi_A$ f. ü. gleich null auf $[a, b]$. Unter Berücksichtigung von Satz 2.4.3 gilt demnach

$$\begin{aligned} *\int_a^b \psi^+(x)dx &= *\int_a^b \psi^+(x)\chi_A(x)dx + *\int_a^b \psi^+(x)\chi_B(x)dx = *\int_a^b \psi^+(x)\chi_B(x)dx \\ &= *\int_a^b \varphi^+(x)\chi_B(x)dx = *\int_a^b \varphi^+(x)\chi_A(x)dx + *\int_a^b \varphi^+(x)\chi_B(x)dx = *\int_a^b \varphi^+(x)dx \end{aligned}$$

Analog wird die zweite Behauptung von (2.4.10) bewiesen.

Satz 2.4.5. Es sei $\psi \in \mathfrak{M}[a, b]$ und

$$*\int_a^b |\psi(x)|dx < \infty \quad (2.4.11)$$

Dann gibt es eine reellwertige Funktion φ mit $\varphi = \psi$ f. ü. Jede reellwertige Funktion φ mit $\varphi = \psi$ f. ü. liegt in $L[a, b]$, und es ist

$$\int_a^b \varphi(x)dx = *\int_a^b \psi^+(x)dx - *\int_a^b \psi^-(x)dx \quad (2.4.12)$$

Beweis. Nach Satz 2.4.1 ist die Menge $B := \{x \in [a, b] : |\psi(x)| = \infty\}$ vom Lebesgueschen Maße Null. Setzen wir

$$\varphi(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{für } x \notin B \\ 0 & \text{für } x \in B \end{cases}$$

so ist φ eine reellwertige Funktion mit $\varphi = \psi$ f. ü.

Es sei nun φ eine beliebige reellwertige Funktion mit $\varphi = \psi$ f. ü. Nach Satz 2.4.4 ist $\varphi \in \mathfrak{M}[a, b]$, und wegen (2.4.10) ist

$$*\int_a^b |\varphi(x)|dx = *\int_a^b \varphi^+(x)dx + *\int_a^b \varphi^-(x)dx = *\int_a^b \psi^+(x)dx + *\int_a^b \psi^-(x)dx = *\int_a^b |\psi(x)|dx < \infty$$

Aus Satz 2.3.5 folgt nun $\varphi \in L[a, b]$. Ferner ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi^+(x) dx - \int_a^b \varphi^-(x) dx = \int_a^b \psi^+(x) dx - \int_a^b \psi^-(x) dx =$$

Die Voraussetzungen an ψ in Satz 2.4.5 sind natürlich stets erfüllt, wenn $\psi \in L[a, b]$ ist. Wir erhalten damit die wichtige

Folgerung 2.4.1. Es sei $\psi \in L[a, b]$. Dann ist jede auf $[a, b]$ definierte reellwertige Funktion φ mit $\varphi = \psi$ f. ü. über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) dx \quad (2.4.13)$$

Inhaltlich besagt die Folgerung 2.4.1, dass in der Lebesgueschen Integrationstheorie Mengen vom Maße Null "vernachlässigt" werden können.

Es ist für die Frage der Integrierbarkeit und für den Zahlenwert des Lebesgueschen Integrals einer auf $[a, b]$ definierten reellen Funktion φ also völlig unbedeutend, wenn die Funktionswerte $\varphi(x)$ in den Punkten x einer Menge A vom Lebesgueschen Maße Null willkürlich abgeändert werden. So können beispielsweise die Funktionswerte einer über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbaren reellen Funktion in allen rationalen Punkten $x \in [a, b]$ gleich null gesetzt werden, ohne dass sich am Wert des Integrals etwas ändert.

Beispiel 2.4.2. Auf Grund von Folgerung 2.4.1 besitzt die auf $[0, 1]$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \text{beliebige reelle Zahl} & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (2.4.14)$$

definierte reelle Funktion φ die Eigenschaft $\varphi \in L[0, 1]$, da $\psi := 0 \in L[0, 1]$ und $\varphi = \psi$ f. ü. ist. Wegen (2.4.13) gilt ferner

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$$

Insbesondere ist die Dirichletsche Funktion $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ ein Beispiel für eine Funktion der Form (2.4.14).

Der Satz von Lebesgue kann jetzt in einer verallgemeinerten Form ausgesprochen werden.

Satz 2.4.6. Gibt es zu einer Funktionenfolge (φ_n) mit $\varphi_n \in L[a, b]$ eine Funktion $\psi \in L[a, b]$ mit $|\varphi_n| \leq \psi$ f. u. und eine reellwertige Funktion φ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ f. ü., so ist $\varphi \in L[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (2.4.15)$$

Beweis. Die Mengen $A_n := \{x \in [a, b] : |\varphi_n(x)| > \psi(x)\}$ und die Menge A der Punkte $x \in [a, b]$, für die $\varphi_n(x)$ nicht gegen $\varphi(x)$ konvergiert, sind nach Voraussetzung Mengen vom Lebesgueschen Maße Null. Auf Grund von Satz 3.1.9 ist auch

$$B := A \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null. Wir setzen

$$\tilde{\varphi}_n(x) := \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{für } x \notin B \\ \varphi(x) & \text{für } x \in B \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_n(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{für } x \notin B \\ |\psi(x)| & \text{für } x \in B \end{cases}$$

Auf Grund von Folgerung 2.4.1 gilt $\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi} \in L[a, b]$. Ferner ist $\tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\psi}$ sowie $\tilde{\varphi}_n \rightarrow \tilde{\psi}$. Nach dem ursprünglichen Satz von Lebesgue ist $\varphi \in L[a, b]$ und

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x) dx$$

Da $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n$ f. ü. gilt, können die Funktionen $\tilde{\varphi}_n$ entsprechend Folgerung 2.4.1 auch durch φ_n ersetzt werden, womit der Satz bewiesen ist.

Auch der Satz von Levi kann verallgemeinert werden.

Satz 2.4.7. Zu jeder Levi-Folge (φ_n) bezüglich des Lebesgueschen Integrals gibt es eine Funktion $\varphi \in L[a, b]$ mit $\varphi_n \uparrow \varphi$ f. ü., und es gilt

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (2.4.16)$$

Beweis. Die Funktionen $\psi_n := \varphi_n - \varphi_0 \in L[a, b]$ sind nichtnegativ. Es gelte $\psi_n \uparrow \psi$. Mit Satz 2.3.2 folgt

$$*\int_a^b \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx < \infty \quad (2.4.17)$$

Da ψ eine nichtnegative auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktion mit der Eigenschaft (2.4.17) ist, gibt es nach Satz 2.4.5 eine Funktion $\tilde{\psi} \in L[a, b]$ mit $\psi = \tilde{\psi}$ f. ü. und

$$\int_a^b \tilde{\psi}(x) dx = *\int_a^b \psi^+(x) dx - *\int_a^b \psi^-(x) dx$$

Wegen $\psi \geq 0$ ist $\psi^+ = \psi$ und $\psi^- = 0$, also

$$\int_a^b \tilde{\psi}(x) dx = *\int_a^b \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx - \int_a^b \varphi_0(x) dx$$

Hieraus folgt, dass (5.4.16) für die in $L[a, b]$ liegende Funktion $\varphi := \tilde{\psi} + \varphi_0$ erfüllt ist.

Satz 2.4.8. Gibt es zu einer auf $[a, b]$ definierten reellwertigen Funktion Φ zwei Levi-Folgen $(\varphi_n), (\psi_n)$ bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $[a, b]$ mit

$$\Phi + \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \quad (2.4.18)$$

so ist $\Phi \in L[a, b]$ und

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)] dx \quad (2.4.19)$$

Beweis. Nach Satz 2.4.7 gibt es eine Funktion $\psi \in L[a, b]$ mit $\psi_n \uparrow \psi$ f. ü. und

$$\int_a^b \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx$$

Wir setzen $\varphi := \Phi + \psi$. Wegen (2.4.18) gilt dann $\varphi_n \uparrow \varphi$ f. ü., woraus $\varphi \in L[a, b]$ und (2.4.16) gemäß Satz 2.4.7 folgt. Daher ist auch $\Phi = \varphi - \psi \in L[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)] dx$$

Beispiel 2.4.3. Es sei

$$(r_k) = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \quad (2.4.20)$$

die Folge (1.2.16), in der jede rationale Zahl $r_k \in [0, 1]$ genau einmal auftritt, ε eine beliebige, aber fest gewählte positive reelle Zahl und

$$A_{ij} := \left[r_j, r_j + \frac{\varepsilon}{2^{i+j+2}} \right)$$

Darin wird auf $\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ durch

$$\varphi_n := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \chi_{A_{ij}} \quad (2.4.21)$$

eine nichtnegative Funktionenfolge (φ_n) definiert. Für $\varepsilon = 16$ sind

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \chi_{[0,4)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 4) \\ 0 & \text{für } x \in [4, 5] \end{cases} \\ \varphi_1(x) &= \chi_{[0,4)}(x)\chi_{[0,2)}(x) + \chi_{[1,3)}(x) + \chi_{[1,2)}(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in [0, 1) \cup [2, 3) \\ 4 & \text{für } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{für } x \in [3, 4) \\ 0 & \text{für } x \in [4, 5] \end{cases} \end{aligned}$$

die ersten beiden Glieder der auf $[0, 5]$ definierten Funktionenfolge (2.4.21).

Wir zeigen, dass (φ_n) eine Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ ist.

Offensichtlich ist $\varphi_n \in L\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$. Ferner ist

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \chi_{A_{ij}} = \sum_{i=0}^{n+1} \left[\sum_{j=0}^{n+1} \chi_{A_{ij}} + \chi_{A_{i,n+1}} \right] = \varphi_n + \sum_{j=0}^n \chi_{A_{n+1,j}} + \sum_{i=0}^{n+1} \chi_{A_{i,n+1}} \geq \varphi_n$$

und

$$\int_0^{1+(\varepsilon/4)} \varphi_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+j+2}} = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{\varepsilon}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

also

$$\int_0^{1+(\varepsilon/4)} \varphi_n(x) dx \leq \varepsilon < \infty \quad (2.4.22)$$

Wir zeigen, dass die nichtnegative Grenzfunktion φ der Folge (φ_n) in den Punkten r_k von (2.4.20) den Funktionswert ∞ annimmt. Für alle n mit $n \geq k$ gilt

$$\varphi_n(r_k) \geq \sum_{i=0}^n \chi_{A_{ik}}(r_k) = n + 1 \quad \text{also ist} \quad \varphi(r_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(r_k) = \infty$$

Demnach ist

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \left\{ x \in \left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right] : \varphi(x) = \infty \right\}$$

Auf $\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ definieren wir nun eine nichtnegative Funktion Φ durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in \left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right] \text{ mit } \varphi(x) < \infty \\ \text{beliebige nichtnegative reelle Zahl} & \text{für } x \in \left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right] \text{ mit } \varphi(x) = \infty \end{cases} \quad (2.4.23)$$

Mit Hilfe von Satz 2.4.8 beweisen wir $\Phi \in L\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$. Offensichtlich ist mit (φ_n) auch $(2\varphi_n)$ eine Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2\varphi_n = 2\varphi$$

Für alle $x \in \left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ ist die (2.4.18) entsprechende Beziehung

$$\Phi + \varphi = 2\varphi$$

erfüllt, denn für $x \in \left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ mit $\varphi(x) < \infty$ bzw. $\varphi(x) = \infty$ ist wegen (2.4.23) die Beziehung $\varphi(x) + \varphi(x) = 2\varphi(x)$ bzw. $a + \infty = 2\infty$ für jede nichtnegative reelle Zahl a eine wahre Aussage. Damit ist $\Phi \in L\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ nachgewiesen.

Auf Grund von (2.4.19) ist ferner

$$\int_0^{1+(\varepsilon/4)} \Phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1+(\varepsilon/4)} [2\varphi_n(x) - \varphi_n(x)] dx = \int_0^{1+(\varepsilon/4)} \varphi(x) dx \leq \varepsilon$$

d.h., wir erhalten für das Lebesguesche Integral der auf $\left[0, 1 + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ durch (2.4.23) definierten nichtnegativen Funktion Φ die Abschätzung

$$0 \leq \int_0^{1+(\varepsilon/4)} \Phi(x) dx \leq \varepsilon$$

2.5 Integration über Teilintervalle, Substitutionsregel

Während wir bisher nur Funktionen betrachtet haben, die auf einem festen Intervall $[a, b]$ definiert sind, gehen wir jetzt zu variablen Integrationsintervallen über. Ebenso wie für das Riemannsches Integral definieren wir auch das Lebesguesche Integral in den Grenzen von a bis b mit $a \geq b$ durch

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \begin{cases} 0 & \text{für } a = b \\ - \int_b^a \varphi(x) dx & \text{für } a > b \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Der nachfolgende Satz überträgt eine für das Riemannsches Integral wohlbekannte Aussage auf das Lebesguesche Integral.

Satz 2.5.1. Jede über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktion ist auch über jedes Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ Lebesgue-integrierbar. Ist $a \leq c \leq b$, so ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx \quad (2.5.2)$$

Beweis. Nach Theorem 1.3.1 (iii) können wir Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich des Riemannschen Integrals über $[a, b]$ mit

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

finden. Diese Relation ist dann erst recht im Teilintervall $[\alpha, \beta]$ erfüllt, und auf Grund von Satz 2.4.8 gilt $\varphi \in L[\alpha, \beta]$. Ist $a \leq c \leq b$, so erhalten wir entsprechend (2.4.19) die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - g_n(x)] dx = \int_a^b \left[\int_a^c [f_n(x) - g_n(x)] dx + \int_c^b [f_n(x) - g_n(x)] dx \right] \\ &= \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Damit ist Satz 2.5.1 bewiesen.

Definition 2.5.1. Es sei A eine Menge reeller Zahlen, die im Definitionsbereich einer numerischen Funktion φ enthalten ist. Unter der Nullfortsetzung der Funktion φ bezüglich der Menge A verstehen wir die durch

$$\varphi^*(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion φ^* .

Ist die Funktion φ überall auf \mathbb{R} definiert, so folgt aus (2.5.3) offensichtlich $\varphi^* = \varphi \chi_A$. Es wird daher zu keinen Missverständnissen führen, wenn wir die Nullfortsetzung auch dann mit $\varphi \chi_A$ bezeichnen, wenn φ zunächst nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist. Allerdings hat man streng darauf zu achten, dass die Menge A im Definitionsbereich der Funktion φ enthalten ist.

Für die Funktion $\varphi(x) = \ln x$ ist beispielsweise das Symbol $\varphi \chi_{[-1,1]}$ sinnlos, da $\varphi(x)$ nur für positive reelle Zahlen zu definiert ist. Dagegen kann die Funktion $\varphi \chi_{(0,1]}$ gebildet werden. Sie stimmt im Intervall $(0, 1]$ mit der Logarithmusfunktion überein und nimmt für alle reellen Zahlen x mit $x \leq 0$ bzw. $x > 1$ den Wert null an.

Satz 2.5.2. Die Nullfortsetzung einer Funktion $\varphi \in L[a, b]$ bezüglich des Intervalls $[a, b]$ ist über jedes Intervall $[\alpha, \beta]$ Lebesgue-integrierbar. Im Fall $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ gilt

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) \chi_{[a,b]}(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2.5.4)$$

Beweis. Nach Theorem 1.3.1 (iii) gibt es zu $\varphi \in L[a, b]$ zwei Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich des Riemannschen Integrals auf $[a, b]$ mit $f_n, g_n \in C[a, b]$ und

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Wir bilden die Nullfortsetzungen φ^*, f_n^*, g_n^* der Funktionen φ, f_n, g_n bezüglich des Intervalle $[a, b]$. Die Funktionen f_n^*, g_n^* sind dann über jedes Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ Riemann-integrierbar, und wegen $f_n^*(x) = g_n^*(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x) dx = \int_a^b f_n(x) dx \quad , \quad \int_{\alpha}^{\beta} g_n^*(x) dx = \int_a^b g_n(x) dx$$

Dann sind aber $(f_n^*), (g_n^*)$ Levi-Folgen bezüglich des Riemannsches - und erst recht des Lebesgueschen - Integrals auf $[\alpha, \beta]$. Außerdem ist auf $[\alpha, \beta]$ stets

$$\varphi^* + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*$$

Aus Satz 2.4.8 folgt nun $\varphi^* \in L[\alpha, \beta]$ und

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^*(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} [f_n^*(x) - g_n^*(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - g_n(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx$$

Mit Satz 2.5.1 ergibt sich schließlich, dass die Nullfortsetzung $\varphi^* = \varphi \chi_{[a,b]}$ über jedes beliebige Intervall $[\alpha, \beta]$ Lebesgue-integrierbar ist.

Satz 2.5.3. Ist $a < 0 < b$, so ist eine Funktion φ genau dann auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar, wenn sie auf $[a, c]$ und $[c, b]$ Lebesgue-messbar ist. Für jede nichtnegative auf $[a, b]$ Lebesgue-messbare Funktion φ ist

$$*\int_a^b \varphi(x) dx = *\int_a^c \varphi(x) dx + *\int_c^b \varphi(x) dx \quad (2.5.5)$$

Beweis. a) Die Funktion φ sei auf $[a, c]$ und $[c, b]$ Lebesgue-messbar. Wir wählen Funktionen $\varphi'_n \in L[a, c]$ und $\varphi''_n \in L[c, b]$ mit $\varphi'_n \rightarrow \varphi$ auf $[a, c]$ bzw. $\varphi''_n \rightarrow \varphi$ auf $[c, b]$. Außerhalb von $[a, c]$ bzw. $(c, b]$ setzen wir $\varphi'_n(x) = 0$ bzw. $\varphi''_n(x) = 0$.

Nach Satz 2.5.2 sind dann φ'_n und φ''_n über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\varphi'_n + \varphi''_n \rightarrow \varphi$ auf $[a, b]$. Somit ist φ auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar.

b) Es sei φ auf $[a, b]$ Lebesgue-messbar. Dann gibt es Funktionen $\varphi_n \in L[a, b]$ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Nach Satz 2.5.1 ist $\varphi_n \in L[a, c]$ und $\varphi_n \in L[c, b]$, und folglich ist φ auf $[a, c]$ und $[c, b]$ Lebesgue-messbar. Ist $\varphi \geq 0$, so können wir hierbei $\varphi_n := \varphi \sqcap n$ setzen. Dann ist

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^c \varphi_n(x) dx + \int_c^b \varphi_n(x) dx$$

und die Behauptung (2.5.5) ergibt sich durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

Wir übertragen jetzt die Substitutionsregel vom Riemannsches auf das Lebesguesche Integral.

Satz 2.5.4. Es sei h eine auf $[\alpha, \beta]$ definierte streng monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion und $a = h(\alpha), b = h(\beta)$. Für jede Funktion $\varphi \in L[a, b]$ gilt dann

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(h(t)) h'(t) dt \quad (2.5.6)$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{-b}^{-a} \varphi(-x) dx \quad (2.5.7)$$

Beweis. Für jede auf $[a, b]$ definierte Funktion φ setzen wir

$$\tilde{\psi}(t) := \psi(h(t))h'(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (2.5.8)$$

$$\tilde{\tilde{\psi}}(t) := \psi(-t) \quad (-b \leq t \leq -a) \quad (2.5.9)$$

Aus der Riemannschen Integrationstheorie ist bekannt, dass die Behauptungen (2.5.6) und (2.5.7) für auf $[a, b]$ stetige Funktionen φ richtig sind. Für $f \in C[a, b]$ ist also

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)dt = \int_{-b}^{-a} \tilde{\tilde{f}}(t)dt \quad (2.5.10)$$

Es sei nun $\varphi \in L[a, b]$. Dann gibt es Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich des Riemannschen Integrals auf $[a, b]$ mit $f_n, g_n \in C[a, b]$ und

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Aus (2.5.8) und (2.5.9) folgt sofort

$$\tilde{\varphi} + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n \quad (2.5.11)$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{g}}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{f}}_n \quad (2.5.12)$$

Wegen $f_m \leq f_{m+1}$ ist $\tilde{f}_m \leq \tilde{f}_{m+1}$ und da $h'(t) \geq 0$ ist, gilt auch $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}_{n+1}$.

Aus (2.5.10) folgt nun, dass (f_n) bzw. (\tilde{f}_n) Levi-Folgen bezüglich des Riemannschen Integrals auf $[\alpha, \beta]$ bzw. $[-b, -a]$ sind. Entsprechendes gilt für die Folgen (\tilde{g}_n) und $(\tilde{\tilde{g}}_n)$. Wegen (2.5.11) und (2.5.12) ist also $\tilde{\varphi} \in L[\alpha, \beta]$ bzw. $\tilde{\tilde{\varphi}} \in L[-b, -a]$ auf Grund von Satz 2.4.8. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - g_n(x)]dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta [\tilde{f}_n(t) - \tilde{g}_n(t)]dt \\ &= \int_\alpha^\beta \tilde{\varphi}(t)dx = \int_\alpha^\beta \varphi(h(t))h'(t)dt \end{aligned}$$

und ebenso ergibt sich

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_{-b}^{-a} \tilde{\tilde{\psi}}(t)dx = \int_{-b}^{-a} \varphi(-t)dt$$

2.6 Integration über Lebesgue-messbare Teilmengen von \mathbb{R}

Die Ergebnisse von Abschnitt 2.5 ermöglichen es, den Begriff der Lebesgue-Messbarkeit bzw. -Integrierbarkeit weiter auszudehnen.

Definition 2.6.1. Eine auf \mathbb{R} definierte numerische Funktion φ heißt auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar genau dann, wenn φ auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$ Lebesgue-messbar ist.

Da jedes Intervall $[a, b]$ in einem Intervall $[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ liegt, ist eine Funktion φ auf Grund von Satz 2.5.3 bereits dann auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar, wenn φ auf jedem Intervall $[-n, n]$ Lebesgue-messbar ist. Die Sätze 2.2.8 bis 2.2.12 können übertragen werden.

Für jede nichtnegative auf \mathbb{R} Lebesgue-messbare Funktion φ gilt auf Grund von (2.5.5) stets

$$* \int_{-n-1}^{n+1} \varphi(x) dx = * \int_{-n-1}^{-n} \varphi(x) dx + * \int_{-n}^n \varphi(x) dx + * \int_n^{n+1} \varphi(x) dx \geq * \int_{-n}^n \varphi(x) dx$$

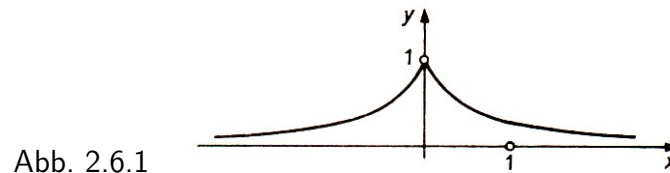
Deshalb existiert der Grenzwert

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} * \int_{-n}^n \varphi(x) dx \quad (2.6.1)$$

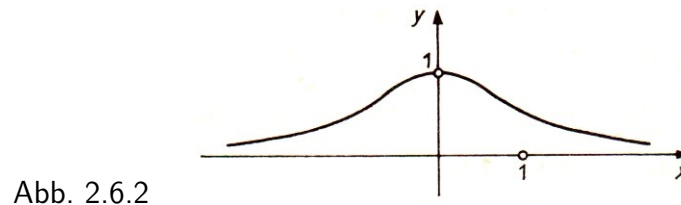
den wir das verallgemeinerte Lebesguesche Integral der nichtnegativen Lebesgue-messbaren Funktion φ über \mathbb{R} nennen. Offensichtlich gilt wiederum

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \leq * \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx, \quad \text{falls } 0 \leq \varphi \leq \psi \quad (2.6.2)$$

ist.



Beispiel 2.6.1. So sind die auf \mathbb{R} durch $\varphi(x) := e^{-|x|}$ (Abb. 2.6.1), $\psi(x) := \frac{1}{1+x^2}$ (Abb. 2.6.2), $\tau(x) := x^2$ definierten nichtnegativen Funktionen φ, ψ, τ auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar, da diese Funktionen auf jedem Intervall $[-n, n]$ stetig und entsprechend Folgerung 2.2.2 auch Lebesgue-messbar sind.



Ferner ist

$$\begin{aligned} * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} * \int_{-n}^n e^{-|x|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-|x|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-n}^0 e^x dx + \int_0^n e^{-x} dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^n} + 1 \right) \end{aligned}$$

also

$$* \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2 \quad (2.6.3)$$

bzw.

$$* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n$$

also

$$*\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \quad (2.6.4)$$

bzw.

$$*\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n x^2 dx = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \quad \text{also} \quad *\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = \infty \quad (2.6.5)$$

Satz 2.6.1. Für die Nullfortsetzung $\varphi\chi_{[a,b]}$ einer jeden nichtnegativen auf $[a, b]$ Lebesgue-messbaren Funktion φ ist

$$*\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\chi_{[a,b]}(x)dx = *\int_a^b \varphi(x)dx \quad (2.6.6)$$

Beweis. Es gibt eine natürliche Zahl m mit $[a, b] \subseteq [-m, m]$. Für $n \geq m$ ist

$$*\int_{-n}^n \varphi(x)\chi_{[a,b]}(x)dx = *\int_a^b \varphi(x)dx$$

auf Grund von (2.5.5). Berücksichtigung von (2.6.1) liefert die Behauptung (2.6.6).

Ist A eine beschränkte Lebesgue-messbare Teilmenge von \mathbb{R} , so gibt es ein Intervall $[a, b]$ mit $A \subseteq [a, b]$, und aus $\chi_A\chi_{[a,b]} = \chi_A$, (2.6.6) und Satz 2.3.1 folgt

$$*\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x)dx = *\int_a^b \chi_A(x)dx = \int_a^b \chi_A(x)dx = m(A)$$

Die folgende Definition steht daher im Einklang mit (2.1.2) und Satz 2.2.3.

Definition 2.6.2. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-messbar genau dann, wenn ihre charakteristische Funktion auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar ist, und

$$m(A) := *\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x)dx \quad (2.6.7)$$

heißt das Lebesguesche Maß der Menge A .

In (2.6.7) ist auch $m(A) = \infty$ möglich.

Wegen (2.6.7), (2.6.1) und (2.6.6) ist

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} *\int_{-n}^n \chi_A(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} *\int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x)\chi_{[-n,n]}(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} *\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{A \cap [-n,n]}(x)dx$$

d.h., für jede Lebesgue-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A \cap [-n, n]) \quad (5.6.8)$$

Beispiel 2.6.2. Wir beweisen, dass die Mengen \mathbb{R} und $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ Lebesgue-messbar sind und $m(\mathbb{R}) = m(\mathbb{R}_+) = \infty$ ist.

Beweis. Offensichtlich ist $\chi_{\mathbb{R}}, \chi_{\mathbb{R}_+} \in L[-n, n]$ für jede positive natürliche Zahl n . Gemäß Folgerung 2.2.1 sind dann die charakteristischen Funktionen $\chi_{\mathbb{R}}, \chi_{\mathbb{R}_+}$ auf jedem Intervall $[-n, n]$

und damit auch auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar. Dies besagt, dass die Mengen \mathbb{R} und \mathbb{R}_+ Lebesgue-messbar sind. Auf Grund von (2.6.8) gilt

$$m(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m([-n, n]) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n$$

also $m(\mathbb{R}) = \infty$ bzw.

$$m(\mathbb{R}_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} m([0, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} n$$

also $m(\mathbb{R}_+) = \infty$.

Beispiel 2.6.3. Die Menge \mathbb{Q} aller rationalen Zahlen ist eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null.

Beweis. Analog zum Beispiel 1.2.3 zeigt man zunächst $\chi_{\mathbb{Q}} \in L[-n, n]$ und $m(\mathbb{Q} \cap [-n, n]) = 0$ für jede positive natürliche Zahl n . Dies besagt, dass die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ auf jedem Intervall $[-n, n]$ und damit auch auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar ist, also \mathbb{Q} eine Lebesgue-messbare Menge ist. Aus (2.6.8) folgt schließlich $m(\mathbb{Q}) = 0$.

Definition 2.6.3. Es sei A eine Lebesgue-messbare Teilmenge von \mathbb{R} . Eine numerische Funktion φ heißt auf A Lebesgue-messbar genau dann, wenn A im Definitionsbereich von φ enthalten ist und die Nullfortsetzung $\varphi\chi_A$ der Funktion φ bezüglich der Menge A auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar ist.

Ist $\varphi \geq 0$, so heißt

$$*\int_A \varphi(x) dx := *\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\chi_A(x) dx \quad (2.6.9)$$

das verallgemeinerte Integral der Funktion φ über die Menge A .

Insbesondere ist natürlich

$$*\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx := *\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \quad (2.6.10)$$

und aus (2.6.6) und (2.6.9) folgt

$$*\int_a^b \varphi(x) dx = *\int_{[a,b]} \varphi(x) dx \quad (2.6.11)$$

Analog setzen wir

$$*\int_a^{\infty} \varphi(x) dx = *\int_{[a,\infty)} \varphi(x) dx \quad (2.6.12)$$

$$*\int_{-\infty}^b \varphi(x) dx = *\int_{(-\infty,b]} \varphi(x) dx \quad (2.6.13)$$

Beispiel 2.6.4. Es sei k eine feste positive natürliche Zahl. Die durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= e^{-kx} && \text{mit } D(\varphi) = \mathbb{R} \\ \psi(x) &:= \frac{1}{1+x^2} && \text{mit } D(\psi) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

definierten nichtnegativen Funktionen φ und ψ sind auf \mathbb{R}_+ Lebesgue-messbar; da $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$ ist und die Funktionen $\varphi\chi_{\mathbb{R}_+}$, $\psi\chi_{\mathbb{R}_+}$ wegen $\varphi\chi_{\mathbb{R}_+}, \psi\chi_{\mathbb{R}_+} \in L[-n, n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ auf \mathbb{R} Lebesgue-messbar sind. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-kx} dx &= \int_{-\infty}^\infty e^{-kx} \chi_{\mathbb{R}_+}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-kx} \chi_{\mathbb{R}_+}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-kx} \chi_{\mathbb{R}_+}(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-kx} dx = \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{e^k} \right)^n \right] \end{aligned}$$

also

$$\int_0^\infty e^{-kx} dx = \frac{1}{k} \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\pi \quad (2.6.14, 2.6.15)$$

Satz 2.6.2. Für jede monoton wachsende Funktionenfolge (φ_n) , deren Glieder nichtnegative auf A Lebesgue-messbare Funktionen sind, gilt

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dx \quad (2.6.16)$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für den Fall $A = \mathbb{R}$ zu führen. Andernfalls haben wir nur φ_n durch $\psi_n := \varphi_n \chi_A$ zu ersetzen. Es gelte $\varphi_n \uparrow \varphi$. Dann ist $\varphi_n \leq \varphi$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \varphi_n(x) dx \leq \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) dx$$

Aus Satz 5.3.2 folgt andererseits

$$\int_{-m}^m \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-m}^m \varphi_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \varphi_n(x) dx$$

und der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ ergibt

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \varphi_n(x) dx$$

womit Satz 2.6.2 bewiesen ist.

Satz 2.6.3. Für zwei nichtnegative auf A Lebesgue-messbare Funktionen φ, ψ und für $t \geq 0$ ist

$$\int_A t\varphi(x) dx = t \int_A \varphi(x) dx \quad (2.6.17)$$

$$\int_A [\varphi(x) + \psi(x)] dx = \int_A \varphi(x) dx + \int_A \psi(x) dx \quad (2.6.18)$$

Beweis. Wir brauchen wieder nur den Fall $A = \mathbb{R}$ zu betrachten. Nach Satz 2.3.3 ist stets

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n t\varphi(x) dx &= t \int_{-n}^n \varphi(x) dx \\ \int_{-n}^n [\varphi(x) + \psi(x)] dx &= \int_{-n}^n \varphi(x) dx + \int_{-n}^n \psi(x) dx \end{aligned}$$

und die Behauptung ergibt sich durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

Satz 2.6.4. Für jede Funktionenfolge (φ_n) , deren Glieder nichtnegative auf A Lebesgue-messbare Funktionen sind, ist

$$*\int_A \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} *\int_A \varphi_k(x) dx \quad (2.6.19)$$

Beweis. Der Beweis von Satz 2.3.4 kann wörtlich übertragen werden.

Beispiel 2.6.5. Entsprechend Beispiel 2.6.4 ist für jede natürliche Zahl n auch die auf \mathbb{R} durch $\varphi_n(x) := \frac{1}{n+2} e^{-(n+1)x}$ definierte nichtnegative Funktion φ_n auf \mathbb{R}_+ Lebesgue-messbar. Auf Grund von Satz 2.6.4 gilt dann

$$*\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} *\int_0^{\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+2} dx$$

Wegen (2.6.14) ist

$$*\int_0^{\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+2} dx = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

und damit

$$*\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$$

entsprechend Beispiel 2.3.5. Also ist

$$*\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+2} dx = 1$$

Nur ein Spezialfall von Satz 2.6.4 ist der

Satz 2.6.5. Es sei φ eine nichtnegative auf A Lebesgue-messbare Funktion, und A sei die Vereinigungsmenge einer Folge (A_n) von paarweise disjunkten Lebesgue-messbaren Teilmengen von A . Dann ist

$$*\int_A \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} *\int_{A_k} \varphi(x) dx \quad (2.6.20)$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$\varphi \chi_A = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi \chi_{A_k}$$

und Satz 2.6.4, denn es ist

$$*\int_A \varphi(x) dx = *\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \chi_A(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} *\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \chi_{A_k}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} *\int_{A_k} \varphi(x) dx$$

Ist speziell

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad (2.6.21)$$

so ist $\varphi\chi_A = \varphi\chi_{A_1} + \varphi\chi_{A_2}$, und auf Grund von (2.6.18) gilt

$$\begin{aligned} \int_A^* \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^* \varphi(x)\chi_A(x) dx = \int_{-\infty}^* [\varphi(x)\chi_{A_1}(x) + \varphi(x)\chi_{A_2}(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^* \varphi(x)\chi_{A_1} dx + \int_{-\infty}^* \varphi(x)\chi_{A_2} dx \end{aligned}$$

also

$$\int_A^* \varphi(x) dx = \int_{A_1}^* \varphi(x) dx + \int_{A_2}^* \varphi(x) dx \quad (2.6.22)$$

Der Satz 2.3.5 legt die folgende Definition nahe.

Definition 2.6.4. Eine auf einer Lebesgue-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion φ heißt über A Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- a) φ ist endlich.
- b) φ ist auf A Lebesgue-messbar.
- c) Es ist

$$\int_A^* |\varphi(x)| dx < \infty \quad (2.6.23)$$

In diesem Fall heißt

$$\int_A \varphi(x) dx := \int_A^* \varphi^+(x) dx - \int_A^* \varphi^-(x) dx \quad (2.6.24)$$

das Lebesguesche Integral der Funktion φ über die Menge A .

Wegen $\varphi^+, \varphi^- \leq |\varphi|$ ist das so definierte Integral stets endlich. Mit $L(A)$ bezeichnen wir das System aller über A Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Beispiel 2.6.6. Wie wir in Beispiel 2.6.1 und Beispiel 2.6.4 bewiesen haben, sind die folgenden nichtnegativen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ auf den angegebenen Lebesgue-messbaren Teilmengen A_i von \mathbb{R} Lebesgue-messbar:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &:= e^{-|x|}, & A_1 &:= \mathbb{R} \\ \varphi_2(x) &:= \frac{1}{1+x^2}, & A_2 &:= \mathbb{R} \\ \varphi_3(x) &:= e^{-x}, & A_3 &:= \mathbb{R}_+ \\ \varphi_4(x) &:= \frac{1}{1+x^2}, & A_4 &:= \mathbb{R}_+ \\ \varphi_5(x) &:= x^2, & A_5 &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wegen (2.6.3) bzw. (2.6.4) bzw. (2.6.14) bzw. (2.6.15) ist jeweils für die ersten vier Funktionen die Bedingung (2.6.23) erfüllt. Demnach sind diese Funktionen über die jeweilige Menge A_i Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi$$

Dagegen ist $\varphi_5 \notin L(\mathbb{R})$ auf Grund von (2.6.5).

Satz 2.6.6. Das System $L(A)$ bildet einen Vektorverband, und das Lebesguesche Integral ist ein positives lineares Funktional auf $L(A)$.

Beweis. Es sei λ eine reelle Zahl und $\varphi, \psi \in L(A)$. Dann sind die Funktionen $\lambda\varphi$, $\varphi + \psi$ und $|\varphi|$ reellwertig und messbar. Wegen

$$\begin{aligned} \int_A |\lambda\varphi(x)| dx &= |\lambda| \int_A |\varphi(x)| dx < \infty \\ \int_A |\varphi(x) + \psi(x)| dx &\leq \int_A (|\varphi(x)| + |\psi(x)|) dx = \int_A |\varphi(x)| dx + \int_A |\psi(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

ist somit $L(A)$ ein Vektorverband. Ist $\varphi \geq 0$, so ist $\varphi = \varphi^+$, und aus (2.6.24) folgt

$$\int_A \varphi(x) dx = \int_A \varphi^+(x) dx \geq 0$$

das Lebesguesche Integral auf $L(A)$ ist also positiv. Für jedes $\varphi \in L(A)$ gilt auch $-\varphi \in L(A)$. Ferner ist $(-\varphi)^+ = \varphi^-$, $(-\varphi)^- = \varphi^+$, und damit gilt

$$\int_A [-\varphi(x)] dx = \int_A \varphi^-(x) dx - \int_A \varphi^+(x) dx = - \left[\int_A \varphi^+(x) dx - \int_A \varphi^-(x) dx \right]$$

also

$$\int_A [-\varphi(x)] dx = - \int_A \varphi(x) dx \quad (2.6.25)$$

Für $t \geq 0$ ist $(t\varphi)^+ = t\varphi^+$, $(t\varphi)^- = t\varphi^-$, also

$$\int_A t\varphi(x) dx = \int_A t\varphi^+(x) dx - \int_A t\varphi^-(x) dx = t \int_A \varphi(x) dx \quad (2.6.26)$$

Die Beziehungen (2.6.25) und (2.6.26) besagen, dass das Lebesguesche Integral homogen ist. Zum Beweis der Additivität des Lebesgueschen Integrals benötigen wir die Identität

$$(\varphi + \psi)^+ + \varphi^- + \psi^- = (\varphi + \psi)^- + \varphi^+ + \psi^+$$

(vgl. Aufgabe 1.1.3). Aus ihr folgt

$$\begin{aligned} \int_A (\varphi + \psi)^+(x) dx + \int_A \varphi^-(x) dx + \int_A \psi^-(x) dx &= \int_A (\varphi + \psi)^-(x) dx + \int_A \varphi^+(x) dx \\ &\quad + \int_A \psi^+(x) dx \end{aligned}$$

d.h., es ist

$$\begin{aligned} \int_A [\varphi(x) + \psi(x)] dx &= \int_A (\varphi + \psi)^+(x) dx - \int_A (\varphi + \psi)^-(x) dx \\ &= \int_A \varphi^+(x) dx + \int_A \psi^+(x) dx - \int_A \varphi^-(x) dx - \int_A \psi^-(x) dx \\ &= \int_A \varphi(x) dx + \int_A \psi(x) dx \end{aligned}$$

Damit ist Satz 5.6.6. bewiesen.

Für das System $\mathfrak{A}(A)$ der Lebesgue-messbaren Teilmengen von A sowie das System der Teilmengen von A vom Maße Null gelten wiederum zu 2.1. analoge Sätze, auf deren Beweis wir verzichten wollen.

Allerdings ist darauf zu achten, dass beispielsweise im Fall $m(A) = m(B) = \infty$ die Anwendung von (2.1.11) untersagt ist. Unter der Voraussetzung (2.6.21) gilt analog zu (2.6.22) für $\varphi \in L(A)$ stets

$$\int_A \varphi(x) dx = \int_{A_1} \varphi(x) dx + \int_{A_2} \varphi(x) dx \quad (2.6.27)$$

Ist hierbei speziell A_2 eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null, so ist $\varphi \chi_{A_2} = 0$ f. ü., und nach Satz 2.4.3, der auch gilt, wenn wir $[a, b]$ durch eine Lebesgue-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ersetzen, ist $\int_{A_2} |\varphi(x)| dx = 0$, also wegen

$$\left| \int_{A_2} \varphi(x) dx \right| \leq \int_{A_2} |\varphi(x)| dx = 0$$

auch $\int_{A_2} \varphi(x) dx = 0$. Somit gilt

$$\int_A \varphi(x) dx = \int_{A_1} \varphi(x) dx \quad (2.6.28)$$

Auch der Satz von Levi gilt für das Lebesguesche Integral auf $L(A)$.

Satz 2.6.7. Jede eigentlich konvergente Levi-Folge (φ_n) bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $L(A)$ konvergiert gegen eine Funktion $\varphi \in L(A)$, und es ist

$$\int_A \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dx \quad (2.6.29)$$

Beweis. Wir setzen $\psi_n := \varphi_n - \varphi_0$. Dann ist $\psi_n \in L(A)$, $\psi_n \geq 0$, und es gilt $\psi_n \uparrow \varphi - \varphi_0$. Aus Satz 2.6.2 folgt

$$\begin{aligned} \int_A [\varphi(x) - \varphi_0(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \psi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A [\varphi_n(x) - \varphi_0(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dx - \int_A \varphi_0(x) dx \end{aligned} \quad (2.6.30)$$

Da $\varphi - \varphi_0$ reellwertig ist und ein endliches Integral besitzt, gilt $\varphi - \varphi_0 \in L(A)$, also auch $\varphi \in L(A)$. Auf der linken Seite von (2.6.30) kann der Stern weggelassen werden, und hieraus folgt (2.6.29).

Beispiel 2.6.7. Mit Hilfe von Satz 2.6.7 beweisen wir, dass die auf \mathbb{R}_+ durch $\varphi(x) := xe^{-x}$ definierte nichtnegative Funktion über \mathbb{R}_+ Lebesgue-integrierbar ist.

Beweis. Dazu führen wir die durch

$$\varphi_n(x) := \varphi(x) \chi_{[0, n]}(x)$$

auf \mathbb{R}_+ definierte Funktionenfolge (φ_n) ein, deren Glieder φ_n auf \mathbb{R}_+ nichtnegative Lebesgue-messbare Funktionen sind. Es ist

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi \chi_{(n, n+1]} \geq 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \chi_{\mathbb{R}_+} = \varphi$$

auf \mathbb{R}_+ und ferner

$$* \int_0^{\infty} \varphi_n(x) dx = \int_0^n x e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_{x=0}^{x=n} = 1 - \frac{n}{e^n} - \frac{1}{e^n} < 1$$

womit $\varphi_n \in L(\mathbb{R}_+)$ bewiesen ist. Folglich ist

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(x) dx < 1$$

Damit ist (φ_n) eine eigentlich konvergente Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $L(\mathbb{R}_+)$, und es ist $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$.

Als bekannt setzen wir die Beziehung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

voraus, die für jede reelle Zahl x erfüllt ist. Unter Berücksichtigung von (2.6.31) erhalten wir für jede positive natürliche Zahl n die Abschätzung

$$0 \leq \frac{n}{e^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots} < \frac{n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

Gemäß (2.6.29) ist somit

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} \right) = 1$$

Nun kann auch der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz übertragen werden. Auch die Sätze 2.4.1 bis 2.4.7 bleiben gültig, wenn wir $[a, b]$ überall durch A ersetzen. Wir wollen dies nicht im einzelnen ausführen.

Man beachte aber stets, dass die konstanten Funktionen $\varphi(x) = c$ mit $c \neq 0$ im Fall $m(A) = \infty$ zwar auf A Lebesgue-messbar, aber nicht über A Lebesgue-integrierbar sind. Es gibt demnach beschränkte Lebesgue-messbare Funktionen, die nicht Lebesgue-integrierbar sind.

Beispiel 2.6.8. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz beweisen wir, dass die auf \mathbb{R} durch $\varphi(x) := e^{-x^2}$ definierte reelle Funktion φ über \mathbb{R} Lebesgue-integrierbar ist.

Beweis. Dazu führen wir die durch $\varphi_n(x) := \varphi(x) \chi_{[-n, n]}(x)$ auf \mathbb{R} definierte Funktionenfolge (φ_n) ein, deren Glieder φ_n auf \mathbb{R} endliche Lebesgue-messbare Funktionen sind. Auf \mathbb{R} ist ferner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \chi_{\mathbb{R}} = \varphi$$

und es gilt

$$*\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)| dx = \int_{-n}^n |\cos x| e^{-x^2} dx < \infty$$

da $|\varphi_n|$ auf $[-n, n]$ stetig ist. Gemäß Definition 2.6.4 ist dann $\varphi_n \in L(\mathbb{R})$. Unter Berücksichtigung von (2.6.31) gilt ferner

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

Setzen wir $\psi(x) := \frac{1}{1+x^2}$, so gilt auf \mathbb{R} die Abschätzung

$$|\varphi_n| = |\varphi| \chi_{[-n,n]} \leq |\varphi| \leq \psi$$

Auf Grund von Beispiel 2.6.6 ist $\psi \in L(\mathbb{R})$ und demnach $\varphi \in L(\mathbb{R})$.

Wegen $-\psi \leq \varphi \leq \psi$ und $\varphi, \psi \in L(\mathbb{R})$ erhalten wir in Verbindung mit Beispiel 2.6.6 die Abschätzung

$$-\pi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \cos x e^{-x^2} dx \leq \pi$$

Wir benötigen noch einen Satz, der für die Kapitel 6 und 7 bedeutungsvoll ist.

Satz 2.6.8. Es sei (φ_n) eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus $L(A)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \geq 0 \tag{2.6.32}$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) dx \geq 0 \tag{2.6.33}$$

Beweis. Die Funktionen $\psi_n := \varphi_n \sqcap 0$ sind über A Lebesgue-integrierbar, und aus (2.6.32) folgt $\psi_n \uparrow 0$. Nach dem Satz von Levi ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \psi_n(x) dx = 0 \tag{2.6.34}$$

Andererseits ist $\psi_n = \varphi_n \sqcap 0 \leq \varphi_n$, also

$$\int_A \varphi_n(x) dx \geq \int_A \psi_n(x) dx$$

In Verbindung mit (2.6.34) folgt die Behauptung (2.6.33).

Aufgabe 2.6.1. Es sei α eine reelle Zahl mit $\alpha > 1$. Man beweise, dass die auf $A := [1, \infty)$ durch $\varphi(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ definierte nichtnegative Funktion φ über A Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2.6.2. Man beweise, dass die auf \mathbb{R}_+ durch $\varphi(x) := x^2 e^{-x}$ definierte nichtnegative Funktion φ über \mathbb{R}_+ Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2.6.3. Man beweise, dass die auf $A := [2, \infty)$ durch $\varphi(x) := \frac{1}{x(\ln x)^2}$ definierte nichtnegative Funktion φ über A Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2.6.4. Es sei $\varphi \in L(\mathbb{R})$. Man beweise die Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x) dx = \int_0^{\infty} [\varphi(x) + \varphi(-x)] dx$$

und folgere aus ihr:

a) Ist φ gerade, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

b) Ist $\varphi(x)$ ungerade, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 0$$

Aufgabe 2.6.5. Es sei $\varphi \in L(\mathbb{R})$, und m, n seien reelle Zahlen mit $m \neq 0$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(mx + n) dx = \frac{1}{|m|} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

Aufgabe 2.6.6. Es sei $A_n := [n, \infty)$. Man beweise, dass stets $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ ist, also $A_n \downarrow \emptyset$ gilt, jedoch die Beziehung (2.1.18) nicht erfüllt ist.

3 Konstruktion Lebesguescher Integrale

3.1 Lebesguesche Elementarintegrale

In "Riemannsches Integrale" (Band Nr. 110) wurde die Riemannsches Fortsetzung eines positiven linearen Funktionale J auf einem linearen Funktionenraum wie folgt definiert:

Eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E$ heißt eine Riemannsches Näherungsfolge einer reellwertigen Funktion φ bezüglich J genau dann, wenn es eine Funktionenfolge (h_n) mit $h_n \in E$

$$|\varphi - f_n| \leq h_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(h_n) = 0 \quad (3.1.1, 3.1.2)$$

gibt. In diesem Fall heißt die Funktion φ bezüglich J Riemann-integrierbar, und die Zahl

$$J_R(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \quad (3.1.3)$$

heißt das Riemannsches Integral der Funktion φ . Alle Funktionen $f \in E$ sind Riemann-integrierbar, und es ist stets

$$J_R(f) = J(f) \quad \text{für } f \in E \quad (3.1.4)$$

Das System $R(J)$ aller bezüglich J Riemann-integrierbaren Funktionen bildet einen linearen Funktionenraum, und J_R ist ein positives lineares Funktional auf $R(J)$. Das Funktional J_R heißt die Riemannsches Fortsetzung des positiven linearen Funktionale J .

Wenn die Funktion $|f|$ für jede Funktion $f \in E$ Riemann-integrierbar ist, bildet $R(J)$ einen Vektorverband. Dies werden wir im folgenden stets voraussetzen.

Für die Konstruktion Lebesguescher Integrale ist aber noch eine zusätzliche Voraussetzung erforderlich, die für das Riemannsches Integral auf $C[a, b]$ erfüllt ist.

Satz 4.1.1. Für jede monoton wachsende Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in C[a, b]$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \geq 0 \quad (3.1.5)$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \leq 0 \quad (3.1.6)$$

Beweis. Die stetige Funktion f_n nimmt in einem Punkt $x_n \in [a, b]$ ihr Minimum an. Die Zahlenfolge (x_n) ist beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) . Der Grenzwert

$$x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \quad (3.1.7)$$

dieser Folge liegt wegen $a \leq x_{n_k} \leq b$ wieder im Intervall $[a, b]$. Nach Voraussetzung (3.1.5) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x^*) \geq 0$$

Zu einer beliebigen vorgegebenen positiven reellen Zahl ε gibt es daher eine natürliche Zahl m mit $f_m(x^*) > -\varepsilon$. Aus der Stetigkeit von f_m folgt in Verbindung mit (3.1.7) die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_m(x_{n_k}) > -\varepsilon$$

Daher gibt es eine natürliche Zahl j mit $n_j \geq m$ und

$$f_m(x_{n_j}) > -\varepsilon$$

Für alle $x \in [a, b]$ ist nach Definition von x_n stets $f_{n_j}(x) \geq f_{n_j}(x_{n_j})$. Da die Folge (f_n) monoton wachsend ist, gilt für $n \geq n_j \geq m$ stets

$$f_n(x) \geq f_{n_j}(x) \geq f_{n_j}(x_{n_j}) \geq f_m(x_{n_j}) > -\varepsilon$$

d.h., für $n \geq n_j$ ist

$$\int_a^b f_n(x) dx \geq -\varepsilon(b-a)$$

und erst recht

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \geq -\varepsilon(b-a)$$

Da ε beliebig gewählt war, können wir hierin $\varepsilon \rightarrow 0$ streben lassen und erhalten (3.1.6). Das Riemannsches Integral auf $C[a, b]$ - oder auch auf $E_0[a, b]$ - genügt also der folgenden

Definition 3.1.1. Ein positives lineares Funktional J auf einem linearen Raum E von reellwertigen Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich X heißt ein Lebesguesches Elementarintegral auf E genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- a) Für jede Funktion $f \in E$ ist die Funktion $|f|$ bezüglich J Riemann-integrierbar.
- b) Für jede monoton wachsende Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \geq 0$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \geq 0$$

Die Bedingung a) ist natürlich erfüllt, wenn E sogar ein Vektorverband ist. Im Rest von Kapitel 3 setzen wir stets voraus, dass J ein Lebesguesches Elementarintegral auf E ist.

Satz 3.1.2. Es seien $(f_n), (g_n)$ zwei monoton wachsende Funktionenfolgen mit $f_n, g_n \in E$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \tag{3.1.8}$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \tag{3.1.9}$$

Gilt in (3.1.8) das Gleichheitszeichen, so ist dies auch in (3.1.9) der Fall.

Beweis. Für jede feste natürliche Zahl k folgt aus (3.1.8) stets $g_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - g_k) \geq 0$$

Aus $f_n - g_k \in E$ und der Bedingung b) in Definition 3.1.1 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n - g_k) \geq 0$$

Addieren wir $J(g_k)$ auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \geq J(g_k)$$

Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt die Behauptung (4.1.9).

Gilt in (3.1.8) das Gleichheitszeichen, so ist auch die zu (3.1.9) entgegengesetzte Ungleichung erfüllt, und hieraus folgt die letzte Behauptung.

3.2 Verallgemeinerte Integrale von Levi-Funktionen

Mit E^* bezeichnen wir die Menge aller Funktionen F , zu denen eine monoton wachsende Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E$ und $f_n \uparrow F$ existiert.

Satz 3.2.1. Für jede Funktion $F \in E^*$ ist der Grenzwert

$$J^*(F) := \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \quad (3.2.1)$$

unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) mit $f_n \in E$ und $f_n \uparrow F$.

Beweis. Es gelte auch $g_n \uparrow F$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

und aus Satz 3.1.2 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wir nennen die Zahl $J^*(F)$ das verallgemeinerte Integral der Funktion $F \in E^*$. Eine Funktion F ist genau dann eine Levi-Funktion bezüglich J , wenn $F \in E^*$ und $J^*(F) < \infty$ ist.

Satz 3.2.2. Jede Funktion $f \in E$ liegt in E^* , und es ist

$$J^*(f) = J(f) \quad (3.2.2)$$

Beweis. Mit $f_n := f$ gilt $f_n \uparrow f$, also

$$J^*(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = J(f)$$

Satz 3.2.3. Für alle Funktionen $F, G \in E^*$ und alle nichtnegativen reellen Zahlen t ist $tF, F + G \in E^*$ und

$$J^*(tF) = tJ^*(F) \quad , \quad J^*(F + G) = J^*(F) + J^*(G) \quad (3.2.3, 3.2.4)$$

Aus $F \leq G$ folgt stets $J^*(F) \leq J^*(G)$.

Beweis. Wir wählen Funktionen $f_n, g_n \in E^*$ mit $f_n \uparrow F$, $g_n \uparrow G$. Dann gilt $tf_n \uparrow tF$, $f_n + g_n \uparrow F + G$; woraus $tF, F + G \in E^*$ folgt. Ferner ist

$$J^*(tF) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(tf_n) = t \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = tJ^*(F)$$

$$J^*(F + G) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [J(f_n) + J(g_n)] = J^*(F) + J^*(G)$$

Ist $F \leq G$, so folgt aus Satz 3.1.2 und der Definition (3.2.1) stets $J^*(F) \leq J^*(G)$.

Satz 3.2.4. Für jede Levi-Folge (f_n) bezüglich J mit $f_n \uparrow F$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^*(F - f_n) = 0 \quad (3.2.5)$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für verallgemeinerte Integrale folgt

$$J^*(F - f_n) = J^*[F + (-f_n)] = J^*(F) + J^*(-f_n) = J^*(F) + J(-f_n) = J^*(F) - J(f_n)$$

und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt wegen (3.2.1) und $J^*(F) < \infty$ die Behauptung.

3.3 Lebesguesche Fortsetzung eines Lebesgueschen Elementarintegrals

Wir verallgemeinern den Begriff der Riemannschen Näherungsfolge.

Definition 3.3.1. Es sei φ eine auf X definierte reellwertige Funktion. Eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E$ heißt eine Lebesguesche Näherungsfolge von φ bezüglich J genau dann, wenn es eine Funktionenfolge (H_n) , deren Glieder Levi-Funktionen bezüglich J sind, mit den Eigenschaften

$$|\varphi - f_n| \leq H_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n) = 0 \quad (2.3.1, 2.3.2)$$

gibt.

Definition 3.3.2. Eine auf X definierte reellwertige Funktion φ heißt Lebesgue-integrierbar bezüglich J genau dann, wenn sie eine Lebesguesche Näherungsfolge besitzt.

Mit $L(J)$ bezeichnen wir das System aller bezüglich J Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 3.3.1. Zu jeder Funktion $\varphi \in L(J)$ und zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es stets Levi-Funktionen F, G bezüglich J mit

$$-F \leq \varphi \leq G \quad \text{und} \quad J^*(F + G) < \varepsilon \quad (3.3.3, 3.3.4)$$

Ist φ sogar Riemann-integrierbar, so kann $F, G \in E$ gewählt werden.

Beweis. Gemäß Definition 3.3.2 und Definition 3.3.1 gibt es Funktionenfolgen $(f_n), (H_n)$ mit den Eigenschaften (2.3.1) und (2.3.2). Dann ist

$$-H_n \leq \varphi - f_n \leq H_n \quad \text{bzw.} \quad -(H_n - f_n) \leq \varphi \leq H_n + f_n \quad (3.3.5)$$

Mit $F := H_n - f_n, G := H_n + f_n$ gilt dann (3.3.3), und wegen

$$J^*(F + G) = J^*(2H_n) = 2J^*(H_n)$$

und (3.3.2) kann n so groß gewählt werden, dass (3.3.4) erfüllt ist. Gilt $\varphi \in R(J)$, so kann gemäß (3.1.1) auch $H_n \in E$ gewählt werden, woraus $F, G \in E$ folgt.

Satz 3.3.2. Für jede Lebesguesche Näherungsfolge (f_n) einer Lebesgue-integrierbaren Funktion φ existiert der Grenzwert

$$J_L(\varphi) := \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \quad (3.3.6)$$

und dieser Grenzwert ist von der Wahl der Lebesgueschen Näherungsfolge unabhängig.

Beweis. Mit $M(\varphi)$ bezeichnen wir die Menge aller Levi-Funktionen G bezüglich J mit $\varphi \leq G$. Nach Satz 3.3.1 gibt es Levi-Funktionen F, G bezüglich J mit $\varphi \leq G, -\varphi \leq F$, also mit $G \in M(\varphi)$ und $F \in M(-\varphi)$. Für alle Funktionenpaare F, G mit $G \in M(\varphi), F \in M(-\varphi)$ ist $F + G \geq (-\varphi) * \varphi = o$, woraus

$$J^*(F) + J^*(G) = J^*(F + G) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad -J^*(F) \leq J^*(G)$$

folgt. Für jede Funktion $G \in M(\varphi)$ ist also $J^*(G)$ eine obere Schranke der Menge aller reellen Zahlen $-J^*(F)$ mit $F \in M(-\varphi)$. Mit $J_L(\varphi)$ bezeichnen wir die kleinste obere Schranke dieser Menge. Für alle Levi-Funktionen F, G bezüglich J mit $-F \leq \varphi \leq G$ ist dann

$$-J^*(F) \leq J_L(\varphi) \leq J^*(G)$$

Es sei nun (f_n) eine beliebige Lebesguesche Näherungsfolge von φ und (H_n) eine Folge von Levi-Funktionen mit den Eigenschaften (3.3.1) und (3.3.2). Dann gilt (3.3.5), woraus

$$-J^*(H_n - f_n) \leq J_L(\varphi) \leq J^*(G)$$

bzw.

$$-(J^*(H_n) - J(f_n)) \leq J_L(\varphi) \leq J^*(H_n) + J(f_n)$$

bzw.

$$-J^*(H_n) \leq J_L(\varphi) - J(f_n) \leq J^*(H_n) \quad \text{bzw.} \quad |J_L(\varphi) - J(f_n)| \leq J^*(H_n)$$

folgt. Wegen (3.3.2) gilt nun (3.3.6), womit Satz 3.3.2 bewiesen ist.

Wir nennen die Zahl $J_L(\varphi)$ das Lebesguesche Integral der bezüglich J Lebesgue-integrierbaren Funktion φ .

Satz 3.3.3. Für alle Funktionen $\varphi \in L(J)$ und alle Levi-Funktionen F, G, H folgt aus

$$F \leq \varphi + G \leq H \quad \text{stets} \quad J^*(F) \leq J(\varphi) + J^*(G) \leq J^*(H)$$

Beweis. Wir wählen gemäß Definition 3.3.1 Funktionenfolgen $(f_n), (H_n)$ mit den Eigenschaften (3.3.1) und (3.3.2). Dann ist $\varphi \leq f_n + H_n$ sowie $f_n \leq \varphi + H_n$, also

$$\varphi + G \leq f_n + H_n + G \leq \varphi + 2H_n + G = \varphi + G + 2H_n$$

Berücksichtigung der Voraussetzung liefert schließlich die Abschätzung

$$F \leq f_n + H_n + G \leq H + 2H_n$$

Nach den Rechenregeln für die verallgemeinerten Integrale von Levi-Funktionen gilt

$$J^*(F) \leq J(f_n) + J^*(H_n) + J^*(G) \leq J^*(H) + 2J^*(H_n)$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt unter Berücksichtigung von (3.3.2) und (3.3.6) die Behauptung.

Satz 3.3.4. Jede bezüglich J Riemann-integrierbare Funktion φ ist auch Lebesgue-integrierbar bezüglich J , und es ist

$$J_L(\varphi) = J_R(\varphi) \tag{3.3.7}$$

Für $f \in E$ ist speziell

$$J_L(f) = J_R(f) = J(f) \tag{3.3.8}$$

Beweis. Jede Riemannsche Näherungsfolge (f_n) von φ ist, wie der Vergleich von (3.1.1), (3.1.2) mit (3.3.1), (3.3.2) unter Berücksichtigung von $J(h_n) = J^*(h_n)$ zeigt, auch eine Lebesguesche Näherungsfolge von φ . Somit ist

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = J_R(\varphi)$$

Für $\varphi = f \in E$ kann speziell $f_n := f$ gesetzt werden, woraus (3.3.8) folgt.

Satz 3.3.5. Gibt es zu einer reellwertigen Funktion φ zwei Funktionenfolgen $(\varphi_n), (H_n)$, wobei $\varphi_n \in L(J)$ und H_n Levi-Funktionen bezüglich J sind, die den Bedingungen

$$|\varphi - \varphi_n| \leq H_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n) = 0 \tag{3.3.9, 3.3.10}$$

genügen, so ist $\varphi \in L(J)$.

Beweis. Auf Grund von Definition 3.3.2 gibt es zu jeder Funktion $\varphi_n \in L(J)$ eine Funktion $f_n \in E$ und eine Levi-Funktion G_n bezüglich J mit

$$|\varphi_n f_n| \leq G_n \quad , \quad J^*(G_n) < \frac{1}{n+1}$$

Somit ist

$$|\varphi - f_n| \leq |\varphi - \varphi_n| + |\varphi_n - f_n| \leq H_n + G_n$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n + G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [J^*(H_n) + J^*(G_n)] = 0$$

d.h., (f_n) ist eine Lebesguesche Näherungsfolge von φ bezüglich J , womit Satz 3.3.5 bewiesen ist.

Satz 3.3.6. Das System $L(J)$ aller bezüglich J Lebesgue-integrierbaren Funktionen bildet einen Vektorverband, und J_L ist ein positives lineares Funktional auf $L(J)$.

Beweis. Es sei $\varphi, \varphi' \in L(J)$ und λ eine reelle Zahl. Gemäß Definition 3.3.1 wählen wir Funktionenfolgen $(f_n), (H_n), (f'_n), (H'_n)$ mit den Eigenschaften (3.3.1), (3.3.2),

$$|\varphi' - f'_n| \leq H'_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H'_n) = 0 \quad (3.3.11, 3.3.12)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |\lambda\varphi - \lambda f_n| &\leq |\lambda| H_n \\ |(\varphi + \varphi') - (f_n + f'_n)| &\leq |\varphi - f_n| + |\varphi' + f'_n| \leq H_n + H'_n \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(|\lambda| H_n) &= |\lambda| \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n + H'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [J^*(H_n) + J^*(H'_n)] = 0 \end{aligned}$$

ist (λf_n) bzw. $(f_n + f'_n)$ eine Lebesguesche Näherungsfolge von $\lambda\varphi$ bzw. $\varphi + \varphi'$. Daher ist $\lambda\varphi, \varphi + \varphi' \in L(J)$ und

$$J_L(\lambda\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\lambda f_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = \lambda J_L(\varphi) \quad (3.3.13)$$

$$J_L(\varphi + \varphi') = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n + f'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [J(f_n) + J(f'_n)] = J_L(\varphi) + J_L(\varphi') \quad (3.3.14)$$

Nach Satz 3.3.4 ist $|f_n| \in R(J) \subseteq L(J)$. Wegen

$$||\varphi| - |f_n|| \leq |\varphi - f_n| \leq H_n$$

und Satz 3.3.5 ist auch $|\varphi| \in L(J)$, d.h., $L(J)$ ist ein Vektorverband. Es sei schließlich $\varphi \geq 0$. Wegen $\varphi - f_n \leq H_n$ ist $H_n + f_n \geq \varphi \geq 0$, also

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n + f_n) \geq 0$$

Damit ist in Verbindung mit (3.3.13), (3.3.14) gezeigt, dass J_L ein positives lineares Funktional auf $L(J)$ ist, womit der Satz bewiesen ist.

Wir nennen J_L die Lebesguesche Fortsetzung des Lebesgueschen Elementarintegrals J . Nach Satz 3.3.4 ist J_L auch eine Fortsetzung von J_R . Damit ist die Aussage (i) von Theorem 1.3.1 bewiesen. Der folgende Satz zeigt, dass auch die Forderung (iv) erfüllt ist.

Satz 3.3.7. Es sei φ eine nichtnegative Funktion aus $L(J)$ mit $J_L(\varphi) = 0$. Dann ist jede Funktion ψ mit $|\psi| \leq \varphi$ Lebesgue-integrierbar.

Beweis. Wir wählen Funktionenfolgen $(f_n), (H_n)$ mit den Eigenschaften (3.3.1) und (3.3.2) und setzen $g_n := 0$. Wegen $\varphi - f_n \leq H_n, \varphi \leq f_n + H_n$ ist

$$|\psi - g_n| = |\psi| \leq \varphi \leq H_n + f_n$$

und aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n + f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [J^*(H_n) + J(f_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n) + J_L(\varphi) = 0$$

folgt, dass (g_n) eine Lebesguesche Näherungsfolge von ψ , also $\psi \in L(J)$ ist.

3.4 Monoton wachsende Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen

Die restlichen Behauptungen (ii) und (iii) von Theorem 1.3.1 können aus dem folgenden wichtigen Satz abgeleitet werden. Da der Beweis recht aufwendig ist, führen wir ihn in Teilschritten.

Satz 3.4.1. Zu jeder monoton wachsenden Funktionenfolge (φ_n) mit $\varphi_n \in L(J)$ gibt es eine monoton wachsende Funktionenfolge (f_n) mit $f_n \in E$ sowie eine Levi-Folge (g_n) bezüglich J mit den Eigenschaften

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (3.4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \quad (3.4.2)$$

Beweis. a) Im ersten Beweisteil zeigen wir, dass es monoton wachsende Funktionenfolgen $(F_n), (G_n)$ von Levi-Funktionen bezüglich J mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^*(G_n) \leq 1 \quad (3.4.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \quad (3.4.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(F_n) \quad (3.4.5)$$

gibt. Hierzu wählen wir gemäß Satz 3.3.1 Levi-Funktionen F'_n, G'_n bezüglich J mit

$$-F'_n \leq \varphi_n \leq G'_n \quad , \quad J^*(F'_n + G'_n) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad (3.4.6, 3.4.7)$$

und zeigen, dass die durch

$$G_n := \sum_{k=0}^n (F'_k + G'_k) \quad (3.4.8)$$

$$F_n := \begin{cases} G'_0 & \text{für } n = 0 \\ G'_n + G_{n-1} & \text{für } n > 0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

definierten Levi-Funktionen bezüglich J alle Forderungen erfüllen. Wegen (3.4.6) ist $F'_k + G'_k \geq 0$. Daher ist die Folge (G_n) monoton wachsend, und aus (3.4.7) folgt

$$J^*(G_n) = \sum_{k=0}^n J^*(F'_k + G'_k) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} < 1$$

Damit ist (3.4.3) bewiesen. Nach der Definition (3.4.8) ist $G_n = F'_n + G'_n + G_{n-1}$ für $n > 0$. Aus (3.4.9) ergibt sich nun $F'_n + F_n = G_n$ für alle natürlichen Zahlen n . Da außerdem $\varphi_n + F'_n \leq 0$ ist, gilt stets

$$F_n \leq \varphi_n + F'_n + F_n = \varphi_n + G_n \leq \varphi_{n+1} + G_n \leq G'_{n+1} + G_n = F_{n+1}$$

Es ist also

$$F_n \leq \varphi_n + G_n \leq F_{n+1} \quad (3.4.10)$$

und auch die Folge (F_n) ist monoton wachsend. Aus Satz 3.3.3 folgt

$$J^*(F_n) \leq J_L(\varphi_n) + J^*(G_n) \leq J^*(F_{n+1}) \quad (3.4.11)$$

Führen wir in (3.4.10) und (3.4.11) den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, so ergeben sich jeweils am Anfang und Ende der Ungleichungskette dieselben Grenzwerte. Damit sind die Behauptungen (3.4.4) und (3.4.5) bewiesen.

Sind die Funktionen φ_n sämtlich Riemann-integrierbar, so können die Funktionen F'_n, G'_n in (3.4.6) und (3.4.7) sogar aus E gewählt werden. In diesem Fall sind auch die durch (3.4.8) und (3.4.9) definierten Funktionen F_n, G_n Elemente von E .

b) Im zweiten Beweisteil konstruieren wir monoton wachsende Funktionenfolgen $(\sigma_n), (\tau_n)$ mit $\sigma_n, \tau_n \in R(J)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\tau_n) \leq 1 \quad (3.4.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \quad (3.4.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\sigma_n) \quad (3.4.14)$$

Zu jeder der in Beweisteil a) konstruierten Levi-Funktionen F_k wählen wir eine Levi-Folge (f_{kn}) bezüglich J mit $f_{kn} \in E$, $f_{kn} \uparrow F_k$ und setzen

$$\sigma_n := f_{0n} \sqcup \dots \sqcup f_{nn}$$

Diese Funktionen liegen in $R(J)$, denn $R(J)$ ist ein Vektorverband, und es ist stets $f_{kn} \in R(J)$. Wegen $f_{kn} \leq f_{k,n+1}$ ist

$$\sigma_n = f_{0n} \sqcup \dots \sqcup f_{nn} \leq f_{0,n+1} \sqcup \dots \sqcup f_{n,n+1} \sqcup f_{n+1,n+1} = \sigma_{n+1}$$

Die Folge (σ_n) ist also monoton wachsend. Für $k \leq n$ ist $f_{kn} \leq F_k \leq F_n$, also

$$f_{kn} \leq f_{0n} \sqcup \dots \sqcup f_{kn} \sqcup \dots \sqcup f_{nn} \leq F_n$$

bzw.

$$f_{kn} \leq \sigma_n \leq F_n \quad \text{für} \quad k \leq n$$

Somit ist auch

$$J(f_{kn}) \leq J_L(\sigma_n) \leq J^*(F_n) \quad \text{für} \quad k \leq n$$

In den beiden letzten Ungleichungsketten führen wir zunächst den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch und erhalten

$$F_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \quad , \quad J^*(F_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\sigma_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(F_n)$$

Nochmaliger Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(F_n) \quad (3.4.15, 3.4.16)$$

In gleicher Weise finden wir eine monoton wachsende Funktionenfolge (τ_n) mit $\tau_n \in R(J)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^*(G_n) \quad (3.4.17, 3.4.18)$$

Setzen wir nun unsere Resultate (2.4.15) bis (2.4.18) in (2.4.3) bis (2.4.5) ein, so erhalten wir (3.4.12) bis (3.4.14).

Ist E sogar ein Vektorverband, so ist der Beweis des Satzes schon beendet, denn mit $f_n := \sigma_n \in E$ und $g_n := \tau_n \in E$ gehen (3.4.13) und (3.4.14) in (3.4.1) und (3.4.2) über. Wegen (3.4.12) gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n) \leq 1$, d.h., (g_n) ist eine Levi-Folge bezüglich J .

Der nachfolgende Beweisschritt ist also nur dann erforderlich, wenn der lineare Raum E kein Vektorverband ist.

c) Auf die in Beweisteil b) konstruierten Funktionenfolgen (σ_n) , (τ_n) können wir wiederum Beweisteil a) anwenden, wobei aber wegen $\sigma_n, \tau_n \in R(J)$ an Stelle von Levi-Funktionen bezüglich J sogar Funktionen aus E gewählt werden können. Es gibt also monoton wachsende Funktionenfolgen (f'_n) , (g'_n) , (f''_n) , (g''_n) mit $f'_n, g'_n, f''_n, g''_n \in E$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(g'_n) \leq 1 \quad (3.4.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \quad (3.4.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\sigma_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J(g'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f'_n) \quad (3.4.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(g''_n) \leq 1 \quad (3.4.22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f''_n \quad (3.4.23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\tau_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J(g''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f''_n) \quad (3.4.24)$$

Wir zeigen nun mit Hilfe von (3.4.19) bis (3.4.24) und von (3.4.12) bis (3.4.14), dass die durch $f_n := f'_n + g''_n$, $g_n := f''_n + g'_n$ definierten monoton wachsenden Funktionenfolgen (f_n) , (g_n) mit $f_n, g_n \in E$ alle Forderungen erfüllen. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f''_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J(g'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\tau_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J(g''_n) \lim_{n \rightarrow \infty} J(g'_n) \leq 3$$

ist (g_n) eine Levi-Folge bezüglich J . Ferner ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} f''_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g''_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n + \lim_{n \rightarrow \infty} g''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \end{aligned}$$

womit (3.4.1) bewiesen ist. In ganz analoger Weise wird die entsprechende Relation (3.4.2) für die Integrale gezeigt. Damit ist der wichtige Satz 3.4.1 bewiesen.

Ist die Folge (φ_n) sogar eine Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals, so folgt aus (3.4.2), dass neben (g_n) auch (f_n) eine Levi-Folge bezüglich J ist.

Das System $L(J)$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen und das Lebesguesche Integral J_L können auch wie folgt charakterisiert werden.

Satz 3.4.2. Eine reellwertige Funktion φ ist genau dann bezüglich J Lebesgue-integrierbar, wenn es zwei Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich J mit

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (3.4.25)$$

gibt, und in diesem Fall ist

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n - g_n) \quad (3.4.26)$$

Beweis. a) Es gebe Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich J mit der Eigenschaft (3.4.25), und es gelte $f_n \uparrow F, g_n \uparrow G$. Dann ist $\varphi + G = F$, und aus $F - f_n, G - g_n \geq 0$ folgt

$$\varphi - (f_n - g_n) \leq \varphi - f_n + G = F - f_n \leq (F - f_n) + (G - g_n)$$

bzw.

$$-[\varphi - (f_n - g_n)] \leq -\varphi + F - g_n = G - g_n \leq (F - f_n) + (G - g_n)$$

Somit ist

$$|\varphi - (f_n - g_n)| \leq (F - f_n) + (G - g_n)$$

Aus Satz 3.2.4 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^*[(F - f_n) + (G - g_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [J^*(F - f_n) + J^*(G - g_n)] = 0$$

d.h., die Folge $(f_n - g_n)$ ist eine Lebesguesche Näherungsfolge von φ . Daher ist $\varphi \in L(J)$, und es gilt (3.4.26).

b) Es sei $\varphi \in L(J)$. Wir setzen $\varphi_n := \varphi$ und wählen Funktionenfolgen $(f_n), (g_n)$ gemäß Satz 3.4.1. Dann ist (3.4.25) erfüllt, und da (φ) eine Levi-Folge bezüglich J_L ist, muss auch (f_n) eine Levi-Folge bezüglich J sein. Damit ist wegen (3.4.2) auch (3.4.26) erfüllt, und Satz 3.4.2 ist bewiesen.

Mit Beweisteil b) ist die Aussage (iii) aus Theorem 1.3.1 bewiesen. Die letzte Behauptung dieses Theorems, nämlich (ii) ergibt sich aus

Satz 3.4.3. Die Grenzfunktion φ einer jeden eigentlich konvergenten Levi-Folge (φ_n) bezüglich J_L ist Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$J : L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) \quad (3.4.27)$$

Beweis. Zur Folge (φ_n) bestimmen wir Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich J , gemäß Satz 3.4.1. Wegen $\varphi_n \uparrow \varphi$ geht (3.4.1) in (3.4.25) über, und dies besagt, dass $\varphi \in L(J)$ ist. Aus (3.4.2) bzw. (3.4.26) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [J(f_n) - J(g_n)] = J_L(\varphi)$$

womit Satz 3.4.3 und zugleich Theorem 1.3.1 bewiesen sind.

Satz 6.4.4. Für jede monoton wachsende Funktionenfolge (φ_n) mit $\varphi_n \in L(J)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \geq 0 \quad \text{ist} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) \geq 0 \quad (3.4.28, 3.4.29)$$

Beweis. Die Folge $(\varphi_n \sqcap 0)$ hat die obere Schranke null und ist deshalb eine Levi-Folge bezüglich J_L mit der Grenzfunktion null. Wegen Satz 3.4.3 und $\varphi_n \geq \varphi \sqcap 0$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n \sqcap 0) = 0$$

Auf Grund des hiermit bewiesenen Satzes ist J_L ein Lebesguesches Elementarintegral auf dem Vektorverband $L(J)$ im Sinne von Definition 3.1.1. Der ganze Fortsetzungsprozess kann also nochmals auf J_L an Stelle von J angewendet werden. Die folgenden beiden Sätze zeigen, dass dies zu keiner Erweiterung des Funktionensystems $L(J)$ führt.

Satz 3.4.5. Zu jeder Levi-Funktion Φ bezüglich J_L und zu jeder positiven reellen Zahl ε gibt es eine Levi-Funktion H bezüglich J mit

$$\Phi \leq H \quad , \quad J^*(H) \leq J^*(\Phi) + \varepsilon$$

Beweis. Wir wählen eine Levi-Folge (φ_n) bezüglich J_L mit $\varphi_n \uparrow \Phi$ und hierzu Levi-Folgen $(f_n), (g_n)$ bezüglich J gemäß Satz 3.4.1. Sind F, G die Grenzfunktionen der Folgen $(f_n), (g_n)$, so können die Relationen (3.4.1) und (3.4.2) in der Form

$$\Phi + G = F \quad \text{und} \quad J_L^*(\Phi) + J^*(G) = J^*(F)$$

geschrieben werden. Wir wählen gemäß Satz 3.2.4 eine natürliche Zahl k mit $J^*(G - g_k) \leq \varepsilon$. Mit $H := F - g_k$ gilt dann

$$\Phi \leq \Phi + (G - g_k) = F - g_k = H$$

und

$$J^*(H) = J^*(F) - J(g_k) = J_L^*(\Phi) + J^*(G) - J(g_k) \leq J_L^*(\Phi) + \varepsilon$$

Satz 3.4.6. Besitzt eine reellwertige Funktion φ eine Lebesguesche Näherungsfolge bezüglich J_L , so ist $\varphi \in L(J)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Funktionenfolgen $(\varphi_n), (\Phi_n)$ mit

$$|\varphi - \varphi_n| \leq \Phi_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_L^*(\Phi_n) = 0 \quad (3.4.30, 3.4.31)$$

wobei $\varphi_n \in L(J)$ und Φ_n eine nichtnegative Levi-Funktion bezüglich J_L ist. Nach Satz 3.4.5 gibt es zu jeder Levi-Funktion Φ_n bezüglich J_L , eine Levi-Funktion H_n bezüglich J mit

$$\Phi_n \leq H_n \quad , \quad 0 \leq J^*(H_n) \leq J_L^*(\Phi_n) + \frac{1}{n+1} \quad (3.4.32, 3.4.33)$$

Mit Hilfe von (3.4.32) geht (3.4.30) über in

$$|\varphi - \varphi_n| \leq H_n \quad (3.4.34)$$

und aus (3.4.33) folgt in Verbindung mit (3.4.31) die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^*(H_n) = 0 \quad (3.4.35)$$

Gemäß Satz 3.3.5 besagen die beiden Beziehungen (3.4.34) und (3.4.35), dass $\varphi \in L(J)$ ist.

Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 3.4.7. Gibt es zu einer reellwertigen Funktion φ zwei Levi-Folgen $(\varphi_n), (\psi_n)$ bezüglich des Lebesgueschen Integrals J_L mit

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$

so ist $\varphi \in L(J)$ und

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n - \psi_n)$$

4 Das zweidimensionale Lebesguesche Integral

4.1 Konstruktion des zweidimensionalen Lebesgueschen Integrals

Dieser Abschnitt schließt eng an "Riemannsche Integrale" (MSB 109) an. Als Grundmenge wählen wir einen festen Rechtecksbereich

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } c \leq y \leq d\}$$

der Zahlenebene und betrachten die Menge aller auf D definierten reellwertigen Funktionen h mit folgenden Eigenschaften:

a) Für jede feste reelle Zahl $y \in [c, d]$ ist die Funktion $h(x, y)$, als Funktion von x allein betrachtet, über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar.

b) Die durch

$$h^*(y) := \int_a^b h(x, y) dx \quad (4.1.1)$$

definierte Funktion h ist über $[c, d]$ Lebesgue-integrierbar. Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt die reelle Zahl

$$J(h) := \int_c^d \left[\int_a^b h(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b h(x, y) dx dy \quad (4.1.2)$$

das Lebesguesche Doppelintegral der Funktion h über D in der Reihenfolge dx, dy . Analog wird das Lebesguesche Doppelintegral in der Reihenfolge dy, dx definiert.

Besitzen die Funktionen h, h_1, h_2 ein endliches Lebesguesches Doppelintegral über D in der Reihenfolge dx, dy und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt dasselbe für die Funktionen $\lambda h, h_1 + h_2$ und es ist

$$J(\lambda h) = \lambda J(h) \quad (4.1.3)$$

$$J(h_1 + h_2) = J(h_1) + J(h_2) \quad (4.1.4)$$

Unter einer Elementarfunktion auf D verstehen wir eine Funktion h der Form

$$h(x, y) = f(x)g(y) \quad (x \in [a, b], y \in [c, d]) \quad (4.1.5)$$

wobei f bzw. g eine beschränkte über $[a, b]$ bzw. $[c, d]$ Lebesgue-integrierbare Funktion ist. Speziell ist jede konstante Funktion eine Elementarfunktion.

Das Produkt zweier beschränkter Funktionen, die über eine beschränkte Lebesgue-integrierbare Menge Lebesgue-integrierbar sind, ist wieder Lebesgue-integrierbar, da das Produkt beschränkt und Lebesgue-messbar ist.

Daher ist das Produkt zweier Elementarfunktionen wieder eine Elementarfunktion. Aus (4.1.5) folgt

$$\int_c^d \int_a^b h(x, y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy = \int_a^b \int_c^d h(x, y) dy dx \quad (4.1.6)$$

Mit $E(D)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen h , die sich als Summe von endlich vielen Elementarfunktionen darstellen lassen. Zu jeder Funktion $h \in E(D)$ gibt es also beschränkte Funktionen $f_1, \dots, f_n \in L[a, b]$ bzw. $g_1, \dots, g_n \in L[c, d]$ mit

$$h(x, y) = f_1(x)g_1(y) + \dots + f_n(x)g_n(y) \quad (x \in [a, b], y \in [c, d]) \quad (4.1.7)$$

Satz 4.1.1. Das System $E(D)$ bildet eine Funktionenalgebra. Alle Funktionen $h \in E(D)$ sind beschränkt, und durch

$$J(h) := \int_c^d \int_a^b h(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d h(x, y) dy dx \quad (4.1.8)$$

wird ein Lebesguesches Elementarintegral auf $E(D)$ definiert.

Beweis. Aus (4.1.6) und (4.1.7) folgt sofort, dass h endliche Lebesguesche Doppelintegrale in beiden Reihenfolgen besitzt und dass diese übereinstimmen. Daher kann die Definition (4.1.8) ausgesprochen werden.

Aus (4.1.7) folgt offensichtlich, dass $E(D)$ ein linearer Raum ist. Da das Produkt zweier Elementarfunktionen wieder eine Elementarfunktion ist, folgt aus $h_1, h_2 \in E(D)$ stets $h_1 h_2 \in E(D)$. Somit ist $E(D)$ eine Funktionenalgebra, und wegen (4.1.3), (4.1.4) ist J ein lineares Funktional auf $E(D)$.

Es sei (h_n) eine monoton wachsende Funktionenfolge mit $h_n \in E(D)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \geq 0 \quad (4.1.9)$$

Nach Satz 2.6.8 gilt dann für ein festes $y \in [c, d]$ stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n(x, y) dx \geq 0$$

Für die Funktionenfolge (h_n^*) mit

$$h_n^*(y) := \int_a^b h_n(x, y) dx$$

gilt also wiederum $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^* \geq 0$, und wegen $h_n^* \in L[c, d]$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d h_n^*(y) dy \geq 0$$

Nun ist aber

$$J(h_n) = \int_c^d \int_a^b h_n(x, y) dx dy = \int_c^d h_n^*(y) dy$$

d.h., es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(h_n) \geq 0 \quad (5.1.10)$$

Ist speziell $h \in E(D)$ und $h \geq 0$, so ist (4.1.9) mit $h_n := h$ erfüllt. Wegen (4.1.10) gilt $J(h) \geq 0$. Damit ist gezeigt, dass J ein positives lineares Funktional auf $E(D)$ ist, welches der Bedingung b) in Definition 3.1.1 genügt.

Da in (4.1.7) alle Funktionen $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ beschränkt sind, gibt es eine reelle Zahl K mit $|h| \leq K$. Die konstante Funktion $g := \sqrt{K}$ liegt in $E(D)$, und es ist $g \geq 0$ und $|h| \leq g^2$. Damit ist $R(J)$ ein Vektorverband.

Speziell ist $|h|$ für jede Funktion $h \in E(D)$ bezüglich J Riemann-integrierbar, und auch die Bedingung a) von Definition 3.1.1 ist erfüllt. Damit ist Satz 4.1.1 bewiesen.

Wir können also das System

$$L(D) = L([a, b] \times [c, d]) := L(J)$$

der bezüglich J Lebesgue-integrierbaren Funktionen bilden. Das Lebesguesche Integral einer Funktion $\varphi \in L(D)$ bezeichnen wir mit

$$\int_D \varphi(x, y) d(x, y) := J_L(\varphi) \quad (4.1.11)$$

Ist insbesondere $\varphi \in E(D)$, so ist $J_L(\varphi) = J(\varphi)$, und wir können $J_L(\varphi)$ mit Hilfe von (4.1.8) berechnen.

Beispiel 4.1.1. Die auf $[0, 1] \times [0, 1]$ durch

$$\varphi(x, y) := \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)(1 - \operatorname{sgn} y) \quad (4.1.12)$$

definierte reellwertige Funktion φ ist über $[0, 1] \times [0, 1]$ Riemann-integrierbar.

Allerdings kann das Integral $J_R(\varphi)$ nicht mit Hilfe eines Doppelintegrals berechnet werden. Mit den uns zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln der Lebesgueschen Integrationstheorie ist die Berechnung durch ein Doppelintegral möglich. Die durch (4.1.12) definierte reellwertige Funktion φ besitzt offensichtlich die Eigenschaft $\varphi \in E([0, 1] \times [0, 1])$. Demnach ist

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \varphi(x, y) d(x, y) = \int_0^1 [(1 - \operatorname{sgn} y) \int_0^1 \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x) dx] dy = \int_0^1 [(1 - \operatorname{sgn} y) \cdot 0] dy = 0$$

Die in Kapitel 2 eingeführten Begriffsbildungen und Sätze können jetzt nahezu unverändert auf das Lebesguesche Integral auf dem Vektorverband $L(D)$ übertragen werden. Wiederum sagen wir, eine Teilmenge C von D sei Lebesgue-messbar, wenn die Funktion χ_C in $L(D)$ liegt, und die Zahl

$$m(C) := \int_D \chi_C(x, y) d(x, y) \quad (4.1.13)$$

heißt das Lebesguesche Maß von C .

Für das System der Lebesgue-messbaren Teilmengen von D gelten unverändert alle Sätze 2.1.1 bis 2.1.9 und deren Folgerungen.

Satz 4.1.2. Für alle Lebesgue-messbaren Mengen A, B mit $A \subseteq [a, b]$, $B \subseteq [c, d]$ ist die Menge $A \times B$ Lebesgue-messbar, und es ist

$$m(A \times B) = m(A)m(B) \quad (4.1.14)$$

Beweis. Es ist

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$$

und folglich ist $\chi_{A \times B}$ eine Elementarfunktion und damit über D Lebesgue-integrierbar. Daher ist $A \times B$ Lebesgue-messbar und

$$m(A \times B) = \int_D \chi_{A \times B}(x, y) d(x, y) = \int_a^b \chi_A(x) dx \int_c^d \chi_B(y) dy = m(A)m(B)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Sind A, B Intervalle, so besagt (4.1.14), dass das Lebesguesche Maß eines Rechtecks gleich dem Produkt seiner Kantenlängen, also gleich seinem elementargeometrischen Inhalt ist.

Wir übertragen einen weiteren Satz der Riemannschen Integrationstheorie auf das Lebesguesche Integral.

Satz 4.1.3. Es seien φ, ψ über $A := [a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktionen mit

$$c \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq d \quad (4.1.15)$$

für alle $x \in [a, b]$. Dann ist die Menge

$$A_\varphi^\psi := \{(x, y) : x \in [a, b] \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (4.1.16)$$

Lebesgue-messbar, und es ist

$$m(A_\varphi^\psi) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx \quad (4.1.17)$$

Beweis. a) Zunächst sei $\varphi, \psi \in T[a, b]$. Ist $\{c_0, \dots, c_m\}$ bzw. $\{d_0, \dots, d_n\}$ der Wertebereich von φ bzw. ψ mit $c_i \neq c_j$, bzw. $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und

$$A_j := \{x \in [a, b] : \varphi(x) = c_j\} \quad , \quad B_k := \{x \in [a, b] : \psi(x) = d_k\}$$

so gilt, wie wir im Beweis von Satz 2.2.4 gezeigt haben,

$$\varphi = \sum_{j=0}^m c_j \chi_{A_j} \quad , \quad \psi = \sum_{k=0}^n d_k \chi_{B_k}$$

Da die Mengen A_0, \dots, A_m bzw. B_0, \dots, B_n paarweise disjunkt sind und

$$\bigcup_{k=0}^n B_k = \bigcup_{k=0}^m A_k = [a, b]$$

ist, gilt

$$\sum_{k=0}^n m(A_j \cap B_k) = m\left(\bigcup_{k=0}^n A_j \cap B_k\right) = m\left(A_j \cap \bigcup_{k=0}^n B_k\right)$$

also

$$\sum_{k=0}^n m(A_j \cap B_k) = m(A_j) \quad \text{für } j = 0, \dots, m$$

und ebenso

$$\sum_{j=0}^m m(A_j \cap B_k) = m(B_k) \quad \text{für } k = 0, \dots, n$$

Wir setzen

$$I_{jk} := \begin{cases} [c_j, d_k] & \text{falls } c_j \leq d_k \\ \emptyset & \text{falls } c_j > d_k \end{cases}$$

$$C := \bigcup_{j=0}^m \bigcup_{k=0}^n (A_j \cap B_k) \times I_{jk}$$

und zeigen, dass $C = A_\varphi^\psi$ ist.

Es sei $(x, y) \in A_\varphi^\psi$. Wegen $x \in [a, b]$ gibt es dann natürliche Zahlen j, k mit $\varphi(x) = c_j$, $\psi(x) = d_k$, woraus $x \in A_j \cap B_k$ folgt.

Wegen (4.1.15) ist $c_j \leq d_k$. Aus $(x, y) \in A_\varphi^\psi$ folgt $c_j = \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) = d_k$, also $y \in I_{jk}$. Somit ist $(x, y) \in (A_j \cap B_k) \times I_{jk}$ und damit $(x, y) \in C$.

Es sei umgekehrt $(x, y) \in C$. Dann liegt (x, y) in einer der Mengen $(A_j \cap B_k) \times I_{jk}$, d. h., es ist $x \in A_j \cap B_k \subseteq [a, b]$ und $y \in I_{jk}$ woraus $\varphi(x) = c_j$, $\psi(x) = d_k$ und $c_j \leq y \leq d_k$, also auch $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ folgt. Somit ist $(x, y) \in A_\varphi^\psi$.

Damit haben wir $A_\varphi^\psi = C$ bewiesen. Da die Mengen $A_j \cap B_k$ paarweise disjunkt sind, gilt dies auch für die Mengen $(A_j \cap B_k) \times I_{jk}$.

Ist $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, so gibt es ein $x \in A_j \cap B_k$, woraus $c_j = \varphi(x) \leq \psi(x) = d_k$ folgt. Da A_j, B_k und I_{jk} Lebesgue-messbare Mengen sind, ist auf Grund von Satz 4.1.2 auch die Menge $(A_j \cap B_k) \times I_{jk}$ Lebesgue-messbar, und entsprechend (4.1.14) gilt dann

$$m[(A_j \cap B_k) \times I_{jk}] = m(A_j \cap B_k)m(I_{jk}) = m(A_j \cap B_k)(d_k - c_j)$$

Diese Formel ist aber auch richtig, wenn $A_j \cap B_k = \emptyset$ ist. Somit ist

$$\begin{aligned} m(A_\varphi^\psi) &= m(C) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n m[(A_j \cap B_k) \times I_{jk}] = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n m(A_j \cap B_k)(d_k - c_j) \\ &= \sum_{k=0}^n d_k \sum_{j=0}^m m(A_j \cap B_k) - \sum_{j=0}^m c_j \sum_{k=0}^n m(A_j \cap B_k) = \sum_{k=0}^n d_k m(B_k) - \sum_{j=0}^m c_j m(A_j) \\ &= \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Damit ist (4.1.17) für Treppenfunktionen φ, ψ bewiesen.

b) Es sei $\varphi, \psi \in L[a, b]$. Dann sind diese Funktionen messbar und wegen (4.1.15) auch beschränkt. Wie wir im Beweis von Satz 2.2.7 gezeigt haben, gibt es Treppenfunktionen $f_n \in T[a, b]$ mit $f_n \uparrow \varphi$. Ebenso gibt es Treppenfunktionen $g'_n \in T[a, b]$ mit $g'_n \uparrow -\psi$. Setzen wir $g_n := -g'_n$, so folgt $g_n \downarrow \psi$. Insbesondere gilt also $f_n \leq \varphi$ bzw. $\psi \leq g_n$ für alle natürlichen Zahlen n . Ist $(x, y) \in A_\varphi^\psi$, so folgt

$$x \in [a, b] \quad \text{und} \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

und hieraus

$$x \in [a, b] \quad \text{und} \quad f_n(x) \leq y \leq g_n(x)$$

für alle natürlichen Zahlen n . Dies bedeutet $(x, y) \in A_n := A_{f_n}^{g_n}$ für alle n , d.h., die Menge A_φ^ψ ist in allen Mengen $A_{f_n}^{g_n}$ enthalten. Ist umgekehrt

$$(x, y) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{f_n}^{g_n}$$

so folgt $f_n(x) \leq y \leq g_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, also $(x, y) \in A_\varphi^\psi$. Da $A_{n+1} \subseteq A_n$ ist, gilt $A_n \downarrow A_\varphi^\psi$. Nach Satz 2.1.5 ist

$$m(A_\varphi^\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_{f_n}^{g_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [g_n(x) - f_n(x)] dx$$

Wegen $g_n - f_n \downarrow \psi - \varphi$ folgt hieraus die Behauptung (4.1.17). Für $\varphi = \psi$ stellt die Menge A_φ^ψ den Graphen der Funktion φ dar. Aus (4.1.17) folgt, dass der Graph einer jeden auf $[a, b]$ beschränkten messbaren, also auch Lebesgue-integrierbaren Funktion eine Menge vom Lebesgueschen Maße Null ist.

Mit Hilfe von (4.1.17) kann das Lebesguesche Maß von elementargeometrischen ebenen Figuren mit den bekannten Methoden berechnet werden. Mit Hilfe der Sätze 2.1.5 und 2.1.6 ist es dann auch möglich, das Lebesguesche Maß von recht komplizierten geometrischen Gebilden zu bestimmen.

Beispiel 4.1.2. Ist $A := [0, 1]$, $\psi = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ die Dirichletsche Funktion und $\varphi = 0$, so ist

$$A_0^\psi = \{(x, y) : x \in [0, 1] \text{ und } 0 \leq y \leq \psi(x)\} \quad \text{und} \quad m(A_0^\psi) = \int_0^1 \psi(x) dx = 0$$

Beispiel 4.1.3. Die auf $[0, 1]$ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 2 + \sin x & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

und

$$\varphi(x) := \begin{cases} -x & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ -\cos x & \text{für } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierten reellen Funktionen φ, ψ sind auf Grund von Folgerung 3.4.1 über $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$-1 \leq \varphi(x) \leq \psi(x) = 3$$

für alle $x \in [0, 1]$. Damit ist die Menge

$$A_\varphi^\psi = \{(x, y) : x \in [0, 1] \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Lebesgue-messbar, und wegen (2.4.13) ist

$$m(A_\varphi^\psi) = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

Eine ebene Punktmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt offen genau dann, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ eine positive reelle Zahl δ gibt, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$ stets $(x, y) \in G$ folgt.

Dies besagt, dass mit jedem Punkt (x_0, y_0) auch eine (kleine) Umgebung dieses Punktes in der Menge G enthalten ist.

Satz 4.1.4. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, so ist die Menge $D \cap G$ Lebesgue-messbar.

Beweis. Für alle natürlichen Zahlen n und alle ganzen Zahlen j, k bilden wir die Mengen

$$A_j^n := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap [a, b] \quad , \quad B_k^n := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \cap [c, d]$$

Die Mengen $A_j^n \times B_k^n$ sind dann auf Grund von Satz 4.1.2 Lebesgue-messbare Teilmengen von D , und für festes n sind nur endlich viele dieser Mengen von der leeren Menge verschieden.

Mit C_n bezeichnen wir die Vereinigungsmenge aller in G enthaltenen Mengen $A_j^n \times B_k^n$ mit n fest und $j, k \in \mathbb{Z}$.

Dann ist C_n stets eine Lebesgue-messbare Teilmenge von $D \cap G$, und folglich ist auch

$$C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq D \cap G$$

eine Lebesgue-messbare Teilmenge von D . Wir zeigen, dass $D \cap G \subseteq C$, also $D \cap G = C$ und damit $D \cap G$ Lebesgue-messbar ist.

Es sei $(x_0, y_0) \in D \cap G$. Dann ist $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \in [c, d]$ und $(x_0, y_0) \in G$.

Wir wählen eine positive Zahl δ mit $(x, y) \in G$ für alle (x, y) , die den Bedingungen $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$ genügen. Ferner wählen wir eine natürliche Zahl n mit $2^n \delta > 1$ und ganze Zahlen j, k mit $j - 1 \leq 2^n x_0 < j$ und $k - 1 \leq 2^n y_0 < k$.

Dann ist $x_0 \in \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right] \cap [a, b] = A_j^n$ und $y_0 \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \cap [c, d] = B_k^n$, also $(x_0, y_0) \in A_j^n \times B_k^n$. Um zu zeigen, dass $(x_0, y_0) \in C_n \subseteq C$ ist, müssen wir noch beweisen, dass $A_j^n \times B_k^n \subseteq G$ ist.

Es sei $(x, y) \in A_j^n \times B_k^n$. Dann ist $x, x_0 \in \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$ und $y, y_0 \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. Hieraus folgt $|x - x_0| \leq \frac{1}{2^n} < \delta$ und $|y - y_0| \leq \frac{1}{2^n} < \delta$, also $(x, y) \in G$.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Die Definition der auf D Lebesgue-messbaren Funktionen erfolgt ebenso wie in Definition 2.2.1. Wiederum können die Sätze 2.2.1 bis 2.2.13 und deren Folgerungen übertragen werden. Die Folgerung 2.2.2, die eine Aussage über stetige Funktionen macht, muss allerdings anders bewiesen werden.

Eine auf einer offenen Punktmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte reellwertige Funktion f heißt stetig im Punkt $(x_0, y_0) \in G$ genau dann, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine positive reelle Zahl δ gibt, so dass die Ungleichung $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ für alle $(x, y) \in G$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$ gilt. Die Funktion f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt aus G stetig ist.

Satz 4.1.5. Jede auf einer offenen Punktmenge $G \supseteq D$ stetige reellwertige Funktion f ist über D Lebesgue-integrierbar.

Beweis. Es sei c eine beliebige reelle Zahl. Wir bilden die Menge

$$G_c := \{(x, y) \in G : f(x, y) < c\}$$

Ist $(x_0, y_0) \in G_c$, so ist $\varepsilon := c - f(x_0, y_0) > 0$. Zu ε wählen wir eine positive reelle Zahl δ mit $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ für alle $(x, y) \in G$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$. Für jeden solchen Punkt gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + [f(x, y) - f(x_0, y_0)] \leq f(x_0, y_0) + |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ &< f(x_0, y_0) + \varepsilon = c \end{aligned}$$

Dies besagt, dass alle Punkte (x, y) mit $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$ in G_c liegen. Die Menge G_c ist also offen, und folglich ist die Menge

$$G_c \cap D = \{(x, y) \in D : f(x, y) < c\}$$

auf Grund von Satz 4.1.4 Lebesgue-messbar. Die Funktion f ist also auf D Lebesgue-messbar.

Nehmen wir an, die Funktion f sei auf D nicht beschränkt. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl n einen Punkt $(x_n, y_n) \in D$ mit

$$|f(x_n, y_n)| \geq n \quad (4.1.18)$$

Die Folge (x_n) besitzt wegen $a \leq x_n \leq b$ eine Teilfolge (x_{n_j}) , die gegen einen Punkt $x \in [a, b]$ konvergiert. Die Folge (y_{n_j}) besitzt dann wiederum eine Teilfolge $(y_{n_{j_k}})$, die gegen einen Punkt $y \in [c, d]$ konvergiert. Es sei $x'_k := x_{n_{j_k}}$, $y'_k := y_{n_{j_k}}$. Dann gilt

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x'_k, \quad y = \lim_{k \rightarrow \infty} y'_k$$

Da f stetig ist, gibt es eine positive reelle Zahl δ , so dass $|f(x', y') - f(x, y)| < 1$ ist für alle $(x', y') \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ und $|y - y'| < \delta$. Da die Folge (x'_k) bzw. (y'_k) den Grenzwert x bzw. y besitzt, gibt es ein n_0 mit $|x'_k - x| < \delta$, $|y'_k - y| < \delta$ für $k \geq n_0$. Es folgt

$$|f(x'_k, y'_k)| \leq |f(x'_k, y'_k) - f(x, y)| + |f(x, y)| \leq 1 + |f(x, y)|$$

für $k \geq n_0$. Die Folge $(f(x'_k, y'_k))$ ist also beschränkt. Das ist aber ein Widerspruch zu (4.1.18). Somit ist f auf D beschränkt und Lebesgue-messbar und damit über D Lebesgue-integrierbar.

Ist C eine Lebesgue-messbare Teilmenge von D , so sagen wir, dass eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über C Lebesgue-integrierbar sei, wenn die Funktion $\varphi \chi_C$ in $L(D)$ liegt. Die Zahl

$$\int_C \varphi(x, y) d(x, y) := \int_D \varphi(x, y) \chi_C(x, y) d(x, y)$$

heißt dann das Lebesguesche Integral der Funktion φ über die Menge C .

4.2 Der Satz von Fubini

Neben den Sätzen von Levi und Lebesgue ist der nachfolgende nach Fubini benannte Satz der wichtigste Satz der Lebesgueschen Integrationstheorie.

Er sagt aus, dass das Lebesguesche Integral einer Funktion $\varphi \in L(D) = L([a, b] \times [c, d])$ mit gewissen Einschränkungen durch ein Doppelintegral berechnet werden kann.

Satz 4.2.1. Für jede Funktion $\varphi \in L(D)$ gelten folgende Aussagen:

- a) Die Menge B der Punkte $y \in [c, d]$, in denen die Funktion $\varphi(x, y)$, als Funktion von x allein betrachtet, über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar ist, ist Lebesgue-messbar.
- b) Die Menge $B' := [c, d] \setminus B$ ist vom Lebesgueschen Maße Null.
- c) Die Funktion φ^* mit

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \int_a^b \varphi(x, y) dx & \text{für } y \in B \\ 0 & \text{für } y \in B' \end{cases} \quad (4.2.1)$$

ist über $[c, d]$ Lebesgue-integrierbar.

- d) Es ist

$$\int_D \varphi(x, y) d(x, y) = \int_c^d \varphi^*(y) dy = \int_B \int_a^b \varphi(x, y) dx dy \quad (4.2.2)$$

Beweis. Nach Satz 3.4.2 gibt es Levi-Folgen $(f'_n), (g'_n)$ mit $f'_n, g'_n \in E(D)$ und

$$\varphi + \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

Wir wählen eine reelle Zahl K derart, dass $f'_0 + K \geq 0$ und $g'_0 + K \geq 0$ ist, und setzen

$$f_n := f'_n + K \quad , \quad g_n := g'_n + K$$

Dann sind auch $(f_n), (g_n)$ Levi-Folgen bezüglich J , und es ist $f_n, g_n \geq 0$. Für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$\varphi(x, y) + \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) \quad (4.2.3)$$

und es ist

$$\int_D \varphi(x, y) d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n - g_n) \quad (4.2.4)$$

Die Funktionen $f_n(x, y), g_n(x, y)$ sind, als Funktionen von x allein betrachtet, über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und die Funktionen f_n^*, g_n^* mit

$$f_n^*(x) := \int_a^b f_n(x, y) dx \quad , \quad g_n^*(x) := \int_a^b g_n(x, y) dx$$

sind nichtnegative Funktionen aus $L[c, d]$ mit $f_n^* \leq f_{n+1}^*, g_n^* \leq g_{n+1}^*$. Die Grenzfunktionen F^*, G^* der Folgen $(f_n^*), (g_n^*)$ sind daher nichtnegative auf $[c, d]$ Lebesgue-messbare Funktionen, und es ist

$$\begin{aligned} \int_c^d [F^*(y) + G^*(y)] dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d [f_n^*(y) + g_n^*(y)] dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \int_a^b [f_n(x, y) + g_n(x, y)] dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n) < \infty \end{aligned}$$

Somit sind $(f_n^*), (g_n^*)$ Levi-Folgen bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $[c, d]$, und die Menge

$$B_0 := \{y \in [c, d] : F^*(y) + G^*(y) = \infty\}$$

ist auf Grund von Satz 2.4.1 vom Lebesgueschen Maße Null. Die Menge $B_1 := [c, d] \setminus B_0$ ist daher Lebesgue-messbar. Es sei $y \in B_1$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x, y) dx = F^*(y) < \infty \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x, y) dx = G^*(y) < \infty$$

Dies besagt, dass die Folgen $(f_n(x, y)), (g_n(x, y))$, für festes $y \in B_1$ als Funktion von x allein betrachtet, Levi-Folgen bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $[a, b]$ sind. Aus (4.2.3) folgt nun, dass die Funktion $\varphi(x, y)$, für festes $y \in B_1$ als Funktion von x allein betrachtet, über $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar ist.

Daher ist B_1 in der im Satz definierten Menge B enthalten. Aus (4.2.3) folgt für $y \in B_1$ weiterhin

$$\int_a^b \varphi(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x, y) - g_n(x, y)] dx \quad (4.2.5)$$

Wir zeigen, dass auf $[c, d]$ die Beziehung

$$\varphi^* + (2G^* + F^*) = 2F^* + G^*$$

gilt. Für $y \in B_0$ ist $F^*(y) + G^*(y) = \infty$, und auf beiden Seiten der Relation

$$\varphi^*(y) + (2G^*(y) + F^*(y)) = 2F^*(y) + G^*(y) \quad (4.2.6)$$

steht der Wert ∞ . Für $y \in B_1 = [c, d] \setminus B_0$ ist wegen (4.2.5) stets $\varphi^*(y) = F^*(y) - G^*(y)$, woraus wiederum (4.2.6) folgt. Somit ist

$$\varphi^* + \lim_{n \rightarrow \infty} (2g_n^* + f_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2f_n^* + g_n^*)$$

Da $(f_n^*), (g_n^*)$ Levi-Folgen bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $[c, d]$ sind, gilt dies auch für $(2f_n^* + g_n^*)$ und $(2g_n^* + f_n^*)$. Aus Satz 3.4.7 folgt nun, dass $\varphi^* \in L[c, d]$ und

$$\begin{aligned} \int_c^d \varphi^*(y) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d [(2f_n^*(y) + g_n^*(y)) - (2g_n^*(y) + f_n^*(y))] dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d [f_n^*(y) - g_n^*(y)] dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \int_a^b [f_n(x, y) - g_n(x, y)] dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n - g_n) \end{aligned}$$

ist. In Verbindung mit (4.2.4) ergibt sich die erste Gleichung (4.2.2). Da $B_1 \subseteq B$ gilt, folgt $B' = [c, d] \setminus B \subseteq [c, d] \setminus B_1 = B_0$. Als Teilmenge einer Menge vom Maße Null ist also auch B' eine Menge vom Maße Null und damit Lebesgue-messbar. Daher ist auch $B = [c, d] \setminus B'$ Lebesgue-messbar. Wegen $B \cup B' = [c, d]$ und $B \cap B' = \emptyset$ ist

$$\int_a^b \varphi^*(y) dy = \int_B \varphi^*(y) dy + \int_{B'} \varphi^*(y) dy = \int_B \varphi^*(y) dy = \int_B \int_a^b \varphi(x, y) dx dy$$

womit der Satz von Fubini bewiesen ist.

Ein analoger Satz kann natürlich für die andere Integrationsreihenfolge ausgesprochen werden. Wenn die Funktion $\varphi \in L(D)$ insbesondere für jedes feste $x \in [a, b]$ über $[c, d]$ Lebesgue-integrierbar ist, gilt somit

$$\int_D \varphi(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d \varphi(x, y) dy dx \quad (4.2.7)$$

Satz 4.2.2. Es sei φ eine auf einer offenen Menge $G \supseteq D$ stetige Funktion, und f, g seien auf $A := [a, b]$ Lebesgue-messbare Funktionen mit

$$c \leq f(x) \leq g(x) \leq d \quad (4.2.8)$$

Dann ist φ über die Menge

$$C := A_f^g = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } f(x) \leq y \leq g(x)\} \quad (4.2.9)$$

Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$\int_C \varphi(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) dy dx \quad (4.2.10)$$

Beweis. Die Menge C ist wegen Satz 4.1.3 Lebesgue-messbar. Aus der Definition von C folgt

$$\chi_C(x, y) = \chi_{[a,b]}(x) \chi_{[f(x), g(x)]}(y)$$

für alle $(x, y) \in D$. Die Funktion ψ mit

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) \chi_C(x, y) = \varphi(x, y) \chi_{[a,b]}(x) \chi_{[f(x), g(x)]}(y)$$

ist das Produkt zweier auf D beschränkter Lebesgue-messbarer Funktionen und damit über D Lebesgue-integrierbar. Die Funktion $\psi(x, y)$ ist für jedes feste $x \in [a, b]$ über $[c, d]$ Lebesgue-integrierbar, denn für $f(x) \leq y \leq g(x)$ ist sie stetig und außerhalb des Intervalls $[f(x), g(x)]$ verschwindet sie. Wegen (4.2.7) ist somit

$$\begin{aligned} \int_C \varphi(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \int_c^d \psi(x, y) dy dx = \int_a^b \chi_{[a,b]}(x) \int_c^d \varphi(x, y) \chi_{[f(x), g(x)]}(y) dy dx \\ &= \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi(x, y) dy dx \end{aligned}$$

womit Satz 4.2.2 bewiesen ist.

Beispiel 4.2.1. Die durch

$$\varphi(x, y) := x + y$$

definierte reellwertige Funktion ist auf \mathbb{R}^2 stetig. Auf Grund von Satz 4.2.2 ist φ demnach über

$$C := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Lebesgue-integrierbar, da die Funktionen $f(x) := x$ und $g(x) := \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ stetig und damit auf $[0, 1]$ Lebesgue-messbare Funktionen sind und $0 \leq f(x) \leq g(x) \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$ ist. Gemäß (4.2.10) ist dann

$$\begin{aligned} \int_C \varphi(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{3/2} - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Beispiel 4.2.2. Wir untersuchen, ob die auf $D := [0, 1] \times [0, 1]$ durch

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{1}{x+y} & \text{für } (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\} \end{cases}$$

definierte reellwertige Funktion φ über D Lebesgue-integrierbar ist, und berechnen gegebenenfalls das Lebesguesche Integral von φ über D .

Offensichtlich ist φ Grenzfunktion der auf D durch

$$\varphi_n(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) \in D_n := \left[0, \frac{1}{n}\right) \times \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{x+y} & \text{für } (x, y) \in D \setminus D_n \end{cases} \quad (4.2.11)$$

definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$. Da die Funktion φ_n auf D messbar und wegen $0 \leq \varphi_n \leq n$ auf D beschränkt ist, ist φ_n über D Lebesgue-integrierbar. Auf Grund von

$$\varphi_{n+1}(x, y) - \varphi_n(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) \in D_{n+1} \\ \frac{1}{x+y} > 0 & \text{für } (x, y) \in D_n \setminus D_{n+1} \\ 0 & \text{für } (x, y) \in D \setminus D_n \end{cases}$$

ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge. Da auch für zweidimensionale Lebesguesche Integrale ein zum Satz 2.5.1 analoger Satz gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} J_L(\varphi_n) &:= \int_D \varphi_n(x, y) d(x, y) = \int_{D \setminus D_n} \varphi_n(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{[0, 1/n) \times [1/n, 1]} \varphi_n(x, y) d(x, y) + \int_{[1/n, 1] \times [0, 1]} \varphi_n(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

Berücksichtigung von Satz 4.2.2 liefert

$$\begin{aligned} J_L(\varphi_n) &= \int_0^{1/n} \left[\int_{1/n}^1 \frac{dy}{x+y} \right] dx + \int_{1/n}^1 \left[\int_0^{1/n} \frac{dy}{x+y} \right] dx = \int_0^{1/n} [\ln(x+y)]_{y=1/n}^{y=1} dx + \int_{1/n}^1 [\ln(x+y)]_{y=0}^{y=1/n} dx \\ &= \int_0^{1/n} \left[\ln(x+1) - \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) \right] dx + \int_{1/n}^1 [\ln(x+1) - \ln x] dx \\ &= \int_0^1 \ln(x+1) dx - \int_0^{1/n} \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_{1/n}^1 \ln x dx \\ &= [(x+1) \ln(x+1) - x - 1]_{x=0}^{x=1/n} - \left[\left(x + \frac{1}{n}\right) \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) - x - \frac{1}{n} \right]_{x=0}^{x=1/n} \\ &\quad - [x \ln x - x]_{x=1/n}^{x=1} = 2 \ln 2 - \frac{2}{n} \ln \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \ln \frac{1}{n} = 2 \ln 2 - \frac{2}{n} \ln 2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|J_L(\varphi_n)| \leq 4 \ln 2$$

Somit ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine eigentlich konvergente Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $L(D)$. Folglich gilt $\varphi \in L(D)$. Ferner ist

$$\int_D \varphi(x, y) d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = \ln 4$$

Aufgabe 4.2.1. Man untersuche, ob die durch

$$\varphi(x, y) := x^4 + y^4$$

definierte reellwertige Funktion φ über

$$C := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Lebesgue-integrierbar ist, und berechne gegebenenfalls $J_L(\varphi)$.

5 Lösungen der Aufgaben

1.1.1. a) $f \sqcap g = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|] = \frac{1}{2}[g + f - |g - f|] = g \sqcap f$

b) $(f + h) \sqcap (g + h) = \frac{1}{2}[f + h + g + h - |f + h - g - h|] = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|] + h = (f \sqcap g) + h$

c) $f \sqcup g + f \sqcap g = \frac{1}{2}[f + g + |f - g| + f + g - |f - g|] = f + g$

d) Es sei x beliebig mit $x \in D$. Dann ist

$$a := [(f \sqcup g) \sqcap h](x) = \min\{(f \sqcup g)(x), h(x)\} = \min\{\max\{f(x), g(x)\}, h(x)\}$$

$$n := [(f \sqcap g) \sqcup (g \sqcap h)](x) = \max\{\min\{f(x), h(x)\}, \min\{g(x), h(x)\}\}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f(x) \leq g(x)$ voraussetzen. Dann ist $a = \min\{g(x), h(x)\}$.

d₁) Es sei $\min\{g(x), h(x)\} = g(x)$, also $g(x) \leq h(x)$ bzw. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Folglich gilt $a = g(x)$ und $b = \max\{f(x), g(x)\} = g(x)$.

d₂) Es sei $\min\{g(x), h(x)\} = h(x)$. Dann ist $h(x) \leq g(x)$. Ist $f(x) > h(x)$, so gilt $a = h(x)$ und $b = \max\{h(x), h(x)\} = h(x)$. Falls $f(x) \leq h(x)$ ist, erhalten wir $a = h(x)$ und $b = \max\{f(x), h(x)\} = h(x)$.

e) Es sei x beliebig mit $x \in D$. Dann ist

$$a := [(f \sqcap g) \sqcup h](x) = \max\{\min\{f(x), g(x)\}, h(x)\}$$

$$b := [(f \sqcup h) \sqcap (g \sqcup h)](x) = \min\{\max\{f(x), h(x)\}, \max\{g(x), h(x)\}\}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f(x) \leq g(x)$ voraussetzen. Dann ist $a = \max\{f(x), h(x)\}$

e₁) Es sei $\max\{g(x), h(x)\} = g(x)$, also $h(x) \leq g(x)$. Ist $f(x) > h(x)$, so gilt $a = f(x)$ und $b = \min\{f(x), g(x)\} = f(x)$. Falls $f(x) \leq h(x)$ ist, erhalten wir $a = h(x)$ und $b = \min\{h(x), g(x)\} = h(x)$.

e₂) Es sei $\max\{g(x), h(x)\} = h(x)$, also $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Folglich gilt $a = h(x)$ und $b = \min\{h(x), h(x)\} = h(x)$.

f) Folgt aus (1.1.16),

g) $f \sqcup o = \frac{1}{2}[f + |f|] = f^+$

h) $-(f \sqcap o) = -\frac{1}{2}[f - |f|] = \frac{1}{2}[|f| - f] = f^-$

i) $f^+ + f^- = \frac{1}{2}[|f| + f + |f| - f] = |f|$

j) $f^+ - f^- = \frac{1}{2}[|f| + f - |f| + f] = f$

1.1.2.
$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-2, -1] \\ x^3 & \text{für } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

1.1.3. $(f + g)^+ + f^- + g^- - (f + g)^- - f^+ - g^+ = \frac{1}{2}[|f + g| + f + g + |f| - f + |g| - f - |f + g| + f + g - |f| - f - |g| - g] = o$

1.3.1. Es ist φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ mit $\varphi_n \in L[0, 1]$ wegen $\varphi_n \in E[0, 1]$.

a) Auf Grund von

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n+1} \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 0 & \text{für } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende Funktionenfolge.

b) In

$$J_L(\varphi_n) = J_R(\varphi_n) = \int_{1/n}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

führt die Substitution $x := z^2$ auf

$$J_L(\varphi_n) = 2 \int_{1/\sqrt{n}}^1 \ln z^2 dz = 4 \int_{1/\sqrt{n}}^1 \ln z dz = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right)$$

Die Funktion $f(x) := \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ nimmt auf $(0, \infty)$ an der Stelle $x = e^2$ ein absolutes Maximum an. Somit gilt

$$|J_L(\varphi_n)| \leq 4 \left(\frac{1}{e} + 1 + 1 \right) < 12$$

Auf Grund von Satz 1.3.2 ist $\varphi \in L[0, 1]$ und

$$J_L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = -4$$

1.4.1. Es ist φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ mit $\varphi_n \in L[0, 1]$. Auf Grund von Beispiel 1.3.1 erfüllt die durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

definierte Funktion die Bedingung $\psi \in L[0, 1]$. Ferner ist $|\varphi_n| \leq \psi$ für alle positiven natürlichen Zahlen n . Demnach ist ψ eine absolute Majorante für die Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ und es ist $\varphi \in L[0, 1]$.

1.4.2. Es ist φ Grenzfunktion der durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ mit $\varphi_n \in L[0, 1]$. Die in Aufgabe 1.4.1 definierte reelle Funktion ψ ist eine absolute Majorante für die Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, und es ist $\varphi \in L[0, 1]$. In

$$J_L(\varphi_n) = \int_{1/n}^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

führt die Substitution $x := z^2$ auf

$$J_L(\varphi_n) = 2 \int_{1/\sqrt{n}}^1 \cos z dz = 2 \left(\sin 1 - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Berücksichtigung der Stetigkeit der Sinusfunktion liefert

$$J_L(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_L(\varphi_n) = 2 \sin 1$$

2.1.1. Für alle $x \in [a, b]$ gilt $0 \leq \chi_A(x) \leq 1$. Hieraus folgt wegen $0, \chi_A, 1 \in L[a, b]$ die Beziehung

$$0 \leq \int_a^b \chi_A(x) dx \leq \int_a^b dx$$

bzw. $0 \leq m(A) \leq b - a$.

2.1.2. Für alle positiven natürlichen Zahlen n ist offensichtlich

$$AN := \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right] \in \mathfrak{A} \left[0, \frac{3}{2} \right]$$

Bekanntlich genügen alle positiven natürlichen Zahlen j der Ungleichung $j(j-1) < 2^j$. Es sei $i < j$. Dann gilt die Abschätzung

$$(i-j)2^j + ij \leq -2^j + j(j-1) < 0$$

Hieraus folgt $i2^j + ij < j2^j$ bzw. $\frac{2^j+j}{j2^j} < \frac{1}{i}$ bzw. $\frac{1}{j} + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{i}$. Dies bedeutet $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Wegen $m(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ist

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

2.2.1. Es ist φ Grenzfunktion der durch $\varphi_n := \varphi \chi_{[1/n, 1]}$ auf $[0, 1]$ definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, wobei $\varphi_n \in \mathfrak{M}[0, 1]$ ist wegen $\varphi_n \in L[0, 1]$. Auf Grund von Satz 2.2.10 ist $\varphi \in \mathfrak{M}[0, 1]$.

Wegen $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi \chi_{[1/(n+1), 1/n]} \geq 0$ ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge. Ferner ist

$$J_L(\varphi_n) = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} = \ln n$$

Dies besagt, dass die Zahlenfolge $(J_L(\varphi_n))_{n \geq 1}$ nicht beschränkt ist. Wäre $\varphi \in L[0, 1]$, so folgte wegen $\varphi_n \leq \varphi$ stets $J_L(\varphi_n) \leq J_L(\varphi)$.

Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $(J_L(\varphi_n))_{n \geq 1}$ nicht beschränkt ist. Also ist $\varphi \notin L[0, 1]$.

2.2.2. Es ist ψ Grenzfunktion der durch $\psi_n := \psi \chi_{[1/n, 1]}$ auf $[0, 1]$ definierten Funktionenfolge

$(\psi_n)_{n \geq 1}$, wobei $\psi_n \in \mathfrak{M}[0, 1]$ ist wegen $\psi_n \in L[0, 1]$. Auf Grund von Satz 2.2.10 ist damit $\psi \in \mathfrak{M}[0, 1]$.

2.2.3. Es ist τ Grenzfunktion der durch $\tau_n := \tau \chi_{[1/n, 1/e]}$ auf $[0, \frac{1}{e}]$ definierten Funktionenfolge $(\tau_n)_{n \geq 3}$, wobei $\tau_n \in \mathfrak{M}[0, \frac{1}{e}]$ ist. Aus Satz 2.2.10 folgt $\tau \in \mathfrak{M}[0, \frac{1}{e}]$.

2.2.4. Es sei $c \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} A_c &:= \left\{ x \in [a, b] : \frac{1}{\varphi(x)} > c \right\} \\ B_+ &:= \{x \in [a, b] : \varphi(x) > 0\} \\ B_- &:= \{x \in [a, b] : \varphi(x) < 0\} \\ B_c &:= \left\{ x \in [a, b] : \varphi(x) < \frac{1}{c} \right\} \quad \text{für } c \neq 0 \end{aligned}$$

Zunächst wird die Beziehung

$$A_c = \begin{cases} B_+ & \text{für } c = 0 \\ B_+ \cap B_c & \text{für } c > 0 \\ B_+ \cup (B_- \cap B_c) & \text{für } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

bewiesen.

a) $x_0 \in A_0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi(x_0)} > 0 \Leftrightarrow \varphi(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 \in B_+$

b) $x_0 \in A_c \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi(x_0)} > c \Leftrightarrow \varphi(x_0) > 0 \wedge \varphi(x_0) < \frac{1}{c} \Leftrightarrow x_0 \in B_+ \cap B_c$

c) $x_0 \in A_c \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi(x_0)} > c \Leftrightarrow \varphi(x_0) > 0 \vee [\varphi(x_0) < 0 \wedge \varphi(x_0) < \frac{1}{c}] \Leftrightarrow x_0 \in B_+ \cup (B_- \cap B_c)$.

Auf Grund der Voraussetzung $B_+, B_-, B_c \in \mathfrak{M}[a, b]$ folgt die Behauptung aus (3).

2.2.5. Gemäß Beispiel 1.3.1 bzw. Aufgabe 2.2.1 gilt $\sigma \in L[0, 1]$ bzw. $\sigma^2 \notin L[0, 1]$.

2.3.1. a.) Es ist ψ endlich. Gemäß Aufgabe 2.2.2 ist $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ mit $\psi_n := \psi \chi_{[1/n, 1]}$ $\in L[0, 1]$ und $\psi \in \mathfrak{M}[0, 1]$. Wegen $\psi_{n+1} - \psi_n = \psi \chi_{[1/(n+1), 1/n]} \geq 0$ ist $(\psi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge, und gemäß Satz 2.3.2 gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\psi(x)| dx &= \int_0^1 \psi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\alpha-1} - 1) = \infty \end{aligned}$$

Auf Grund von Satz 2.3.5 ist somit $\psi \notin L[0, 1]$.

b) Es ist τ endlich. Gemäß Aufgabe 2.2.3 ist $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ mit $\tau_n := \tau \chi_{[1/n, 1/e]} \in L[0, \frac{1}{e}]$ und $\tau \in \mathfrak{M}[0, \frac{1}{e}]$. Ferner ist $(\tau_n)_{n \geq 3}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge. Gemäß Satz 2.3.2 gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{1/e} |\tau(x)| dx &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^{1/e} \frac{dx}{x \ln x} = - \lim_{n \rightarrow \infty} ([\ln |\ln x|]_{x=1/n}^{x=1/e}) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \left| \ln \frac{1}{e} \right| - \ln \left| \ln \frac{1}{n} \right| \right] \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(\ln e - \ln 1) - \ln(\ln n - \ln 1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(\ln n)] = \infty \end{aligned}$$

Auf Grund von Satz 2.3.5 ist $\tau \in L[0, 1]$.

2.6.1. Es ist φ Grenzfunktion der durch $\varphi_n := \varphi \chi_{[1, n]}$ auf A definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, wobei die φ_n auf A nichtnegative Lebesgue-messbare Funktionen sind. Ferner ist $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi \chi_{(n, n+1]} \geq 0$ auf A , und wegen

$$*\int_1^\infty \varphi_n(x) dx = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) < \frac{1}{\alpha - 1}$$

gilt $\varphi_n \in L(A)$. Damit ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine eigentlich konvergente Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $L(A)$. Auf Grund von Satz 2.6.7 ist $\varphi \in L(A)$, und es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

2.6.2. Es ist φ Grenzfunktion der durch $\varphi_n := \varphi \chi_{[0, n]}$ auf \mathbb{R}_+ definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, deren Glieder φ_n auf \mathbb{R}_+ nichtnegative Lebesgue-messbare Funktionen sind. Ferner ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge auf \mathbb{R}_+ . Wegen

$$*\int_0^\infty \varphi_n(x) dx = \int_0^n x^2 e^{-x} dx = 2 - \frac{n^2}{e^n} - \frac{2n}{e^n} - \frac{2}{e^n} < 2$$

gilt $\varphi_n \in L(\mathbb{R}_+)$. Damit ist $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ eine eigentlich konvergente Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $L(\mathbb{R}_+)$, und es gilt $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$. Wegen

$$0 \leq \frac{n^2 + 2n + 2}{e^n} = \frac{n^2 + 2n + 2}{1 + n + \frac{n^2}{6} + \frac{n^3}{6} + \dots} < \frac{n^2 + 2n + 2}{\frac{n^3}{6}} = \frac{6}{n} + \frac{12}{n^2} + \frac{12}{n^3}$$

ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{e^n} = 0$$

Somit gilt

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$$

2.6.3. Es ist φ Grenzfunktion der durch $\varphi_n := \varphi \chi_{[2, n]}$ auf A definierten Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n \geq 2}$, deren Glieder φ_n auf A nichtnegative Lebesgue-messbare Funktionen sind. Ferner ist $(\varphi_n)_{n \geq 2}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge auf A . Wegen

$$*\int_2^\infty \varphi_n(x) dx = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^2} = - \left[\frac{1}{\ln x} \right]_{x=2}^{x=n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} < \frac{1}{\ln 2}$$

gilt $\varphi_n \in L(A)$. Somit ist $(\varphi_n)_{n \geq 2}$ eine eigentlich konvergente Levi-Folge bezüglich des Lebesgueschen Integrals auf $L(A)$, und es folgt $\varphi \in L(A)$. Ferner ist

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

2.6.4. Es sei $\psi(x) := \varphi(-x)$. Wegen (2.5.7) und (2.5.1) gilt

$$\int_{-n}^n |\psi(x)| dx = \int_{-n}^n |\varphi(-x)| dx = \int_{-n}^n |\varphi(x)| dx \leq \int_{-\infty}^\infty |\varphi(x)| dx < \infty$$

und folglich ist $\psi \in L(\mathbb{R})$. Analog gilt

$$\int_{-n}^n \varphi(x) dx = \int_{-n}^n \varphi(-x) dx$$

bzw.

$$\int_{-n}^n \varphi(x) dx = \int_0^n \varphi(x) dx + \int_{-n}^0 \varphi(x) dx = \int_0^n \varphi(x) dx + \int_0^n \varphi(-x) dx = \int_0^n [\varphi(x) + \varphi(-x)] dx$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt die ersten Behauptungen. Ist φ gerade bzw. ungerade, so ist $\varphi(x) + \varphi(-x) = 2\varphi(x)$ bzw. $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$, und hieraus folgen a) und b).

2.6.5. Es sei $m > 0$. In Satz 2.5.4 setzen wir $h(t) := mt + n$, $\alpha := -k$, $\beta := k$. Wegen $h'(t) = m$ ist dann

$$\int_{-mk+n}^{mk+n} \varphi(x) dx = m \int_{-k}^k \varphi(mt+n) dt$$

Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(mt+n) dt = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(mx+n) dx$$

Hieraus folgt die Behauptung. Ist $m < 0$, so gilt nach Aufgabe 2.6.4 stets

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(mx+n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-mx-n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(|m|x-n) dx$$

Wegen $|m| > 0$ gilt somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(mx+n) dx = \frac{1}{|m|} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

2.6.6. Offensichtlich ist stets $A_n \supseteq A_{n+1}$. Angenommen, es gelte $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Dann existiert eine nichtnegative reelle Zahl x mit der Eigenschaft $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ bzw. $n \leq x$ für alle natürlichen Zahlen n . Das ist aber ein Widerspruch, denn zur nichtnegativen reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl k mit der Eigenschaft $k > x$. Also ist

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ferner ist $m(A_n) = \infty$ für alle n und demnach $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \infty$. Andererseits ist $m(\emptyset) = 0$.

5.2.1. Da die Funktion φ auf \mathbb{R}^2 stetig ist, die Funktionen $f(x) := 0$ und $g(x) := 1 - x$ auf $[0, 1]$ stetig sind und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt, ist $\varphi \in L(C)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_C \varphi(x, y) &:= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^4 + y^4) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^4(1-x) + \frac{1}{5}(1-x)^5 \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{30}(1-x)^6 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$