"Unsere Mathematikaufgabe"

982 Aufgaben und 1032 Lösungen
aus der Zeitschrift
Wissenschaft und Fortschritt
von 1961 bis 1990

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2018-2020

Inhaltsverzeichnis

1 Unsere Mathematikaufgabe

Die "Wissenschaft und Fortschritt" war eine populärwissenschaftliche Zeitschrift für Naturwissenschaften und Mathematik des Zentralrates der Freien Deutschen Jugend und später der Akademie der Wissenschaften der DDR von Mai 1951 bis Dezember 1990.

Die Zeitschrift beinhaltete in jeder Ausgabe mehrere Aufsätze und Artikel, Buchbesprechungen wissenschaftlicher und auch populärwissenschaftlicher Literatur, aktuelle Kurzmeldungen aus der Wissenschaft und weitere mathematisch-naturwissenschaftliche Beiträge. Als Autoren wurden namhafte Wissenschaftler der DDR und anderer Länder gewonnen.

Ab der Ausgabe von März 1961 enthielt die Zeitschrift jeweils drei bzw. zwei anspruchsvolle Mathematikaufgaben. In nachfolgenden Heften wurden Lösungen veröffentlicht.
Auszüge aus dem Vorwort zu "Unsere Mathematikaufgabe" im Heft März 1961:

"Liebe Leser!
An dieser Stelle werden Sie in Zukunft mathematische Aufgaben und Probleme finden, die Ihnen als Material für eine "mathematische Freizeitgestaltung" dienen sollen. Wir wollen Ihnen Gelegenheit geben, Ihre mathematischen Fähigkeiten, Ihr logisches Denkvermögen selbst zu prüfen und zu entwickeln. Die Aufgaben sollen den Prinzipien mathematischer Olympiaden entsprechen: Nicht das Gedächtnis soll geprüft werden, sondern die Fähigkeit, sich selbständig in ein mathematisches Problem einzuarbeiten. ...
Wir bitten ... unsere Leser, uns selbstverfasste Aufgaben und Problemstellungen sowie Ideen einschließlich Lösungen zur Verfügung zu stellen. ...
Darüber hinaus bitte wir alle Leser, uns durch Anregungen, Hinweise und Berichte über außerunterrichtliche Arbeit auf mathematischem Gebiet zu unterstützen."(Red.)

Nachfolgend werden alle in den 30 Jahren von 1961 bis 1990 veröffentlichten 982 Aufgaben und deren Lösungen bereitgestellt.
Die Autoren der Aufgaben und Lösungen werden am Ende des Textes aufgelistet. In späteren Heften der Zeitschrift wurden weitere eingesandte Lösungsvorschläge der Leser veröffentlicht. Einige dieser Lösungen enthält auch diese Aufgabensammlung.
Hinweise auf evtl. vorhandene Fehler sind gern willkommen.
EMail-Adresse: kontakt@mathematikalpha.de

Steffen Polster, 2020

Hinweis:
2016 wurde von "Wurzel e.v." eine Begleitschrift zur Bundesrunde der 55. Mathematik-Olympiade in Jena herausgegeben.
Das Buch enthält ausgewählte Aufgaben mit Lösungen, die in der Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt" (WiFo) veröffentlicht wurden. Das Buch ist keine reine Wiedergabe der Aufgaben und Lösungen, sondern vermittelt an Beispielaufgaben allgemeine Lösungsstrategien und auch zusätzlich wertvolle Hinweise zum Bearbeiten entsprechender Aufgaben.
siehe `http://www.wurzel.org/zeitschrift/buecher.php?artikel=2016-250`

Autoren der Aufgaben und Musterlösungen

- W.-G. Ackermann, Halle: 34/78, 2/82, 24/83, 4/84, 21/84, 7/85, 10/85, 16/85, 23/85, 3/86, 7/86, 14/86, 22/86, 15/87, 18/87, 5/88, 18/88, 23/88, 7/89, 5/90, 13/90
- P. Altanzog, Halle: 30/79, 4/81
- R. Anders, Bufleben: 7/77, 33/77, 34/77, 9/78, 17/78, 25/78, 9/81, 32/81, 34/81, 7/82
- L. Andrews, Rostock: 32/82, 23/83, 26/83, 9/87, 15/88
- L. Bachmann, Karl-Marx-Stadt: 8/86
- H. Bamberger, Arnstadt: 20/65
- H.-J. Bartlakowski, Berlin: 12/76
- W. Barz, Berlin: 27/70, 15/72
- M. Bautz, Zeitz: 8/63, 10/63, 17/63, 31/63
- G. Becker, Leipzig: 16/68
- K. Becker, Lübtheen: 5/68
- R. Bendrath, Berlin: 33/69
- W. Bennewitz, Radebeul: 27/69
- R. Bergmann, Döbeln: 5/69, 35/69, 13/70, 21/71, 5/72
- W. Berlin, Schmalkalden: 19/63, 15/82, 19/83
- J. Berndt, Burkersdorf: 1/63, 6/63
- J. Beulich, Berlin: 11/89
- W. Bockel, Erfurt: 10/66, 33/66, 10/67, 29/67, 35/67, 7/68, 21/68, 25/68, 1/69, 25/69, 26/70, 17/71, 26/71, 29/71, 6/72, 13/72, 27/72, 3/73, 10/73, 20/73, 29/73, 2/74, 6/74, 1/75, 7/75, 10/75, 17/75, 25/75, 28/75, 4/76, 8/77, 19/85, 4/90, 18/90
- C. Boenkost, Falkenberg: 32/68
- O. Böhme, Dresden: 7/71, 27/71, 9/72, 35/72, 6/73, 8/73, 31/73
- A. Böttcher, Brand-Erbisdorf: 17/73
- A. Böttcher, Freiberg: 23/64, 30/71, 16/72, 24/72, 31/72, 7/73, 18/73, 30/81, 23/87, 12/88, 20/88, 4/89, 8/89, 15/89, 24/89, 8/90, 16/90
- J. Breme, Köthen: 22/90
- J. Brinckmann, Jördensdorf: 2/78, 26/82
- H. Büchel, Zella-Mehlis: 16/71, 19/71, 34/71, 1/72, 19/72, 25/72, 13/73, 24/73
- W. Burmeister, Dresden: 22/68, 16/70, 5/71, 7/72, 10/72, 18/74
- G. Caspar, Potsdam: 31/62
- J. Chascanskij, Dzersinsk: 15/71, 22/73, 11/74, 6/75, 21/75, 29/77, 4/78, 11/78, 15/78, 15/79, 24/79, 6/80, 18/80, 6/81, 18/81, 35/81, 3/82, 22/82, 36/82, 14/83, 17/83, 3/84, 19/89, 21/90
- G. Dähnert, Berlin: 5/89, 23/89, 10/90
- U. Deparade, Halle: 13/71, 24/71
- M. Derpa, Hoyerswerda: 30/78, 20/79
- E. Donath, Senftenberg: 14/73
- V. Drenk, Rostock: 32/74
- K. Ehrhardt, Stolberg: 34/67, 8/69, 23/69, 4/70
- J. Elschner, Triptis: 34/68, 11/69, 18/69, 24/69, 28/69, 15/70, 25/70, 8/71
- K. Engel, Rostock: 21/74, 33/75
- L. Engelmann, Dresden: 27/79
- B. Erward, Magdeburg: 4/74, 12/75, 32/75, 19/79
- E. Fabian, Forst: 25/67
- V. Färber, Berge: 30/73, 32/73
- G. Fickelscher, Nordhausen: 13/64, 6/65, 23/66
- F. Fischer, Magdeburg: 10/74, 15/74, 28/74, 33/74, 11/75
- J. Fischer, Karl-Marx-Stadt: 33/72
- A. Fittke, Berlin: 8/78, 4/79, 31/80, 2/81, 5/81, 36/81, 16/84
- G. Franz, Dresden: 18/63, 5/64
- M. Freitag, Schwarzheide: 31/70, 12/72, 26/72, 22/76
- U. Freitag, Cottbus: 26/76
- H. Fritzsch, Reinsdorf: 5/63, 12/63, 21/63, 27/63, 2/64, 12/64, 19/64, 30/64, 9/65, 11/65, 27/65, 32/65, 9/66, 12/66, 30/66, 3/67, 12/67
- T. Fritzsche, Lützschena: 23/67
- M. Fruth, Berlin: 33/76
- J. Gäbler, Radebeul: 19/76
- M. Gärtner, Berlin: 20/84
- J. Gerber, Magdeburg: 23/80, 33/80, 3/81, 14/81, 24/81, 20/82
- O. Geupel, Dresden: 24/86
- K. Gierth, Freiberg: 32/63
- H. Glienke, Neuwürschnitz: 18/79
- P. Glöckner, Neulobeda: 15/76
- K. Göldner, Dresden: 30/62
- D. Gollé, Wien: 16/88, 6/89, 21/89, 15/90
- H.-J. Görner, Karl-Marx-Stadt: 5/87, 12/89
- H.G. Gräbe, Erfurt: 4/75, 15/75, 20/75, 29/75, 11/76, 21/76, 23/76, 1/77, 21/77, 14/79, 3/80, 4/80, 25/80, 29/80, 7/81, 17/82, 28/82, 12/84, 1/85, 14/85, 15/86, 21/86, 1/87, 7/87, 21/87, 22/89, 14/90
- H. Grabowski, Dresden: 30/63, 36/63, 2/65, 10/65, 21/65, 33/65, 26/66, 9/67, 26/67, 12/68, 9/69, 17/69, 30/80
- S. Graubner, Wittgensdorf: 25/82, 19/86
- H.-D. Gronau, Neustrelitz: 18/68, 1/70, 34/70, 6/78
- G. Gruber, Gotha: 32/62
- T. Gundermann, Weidhausen: 32/77
- C.-J. Hamann, Dresden: 26/69
- H. Haase, Jarmen: 36/70, 14/72, 29/72, 23/73
- F. Haberland, Eilenburg: 2/62
- R. Haftmann, Zittau: 30/72
- A. Hanke, Löbau: 12/70, 3/71
- J. Hans, Dresden: 28/65, 7/69
- G. Haring, Großörner: 23/71, 16/73
- G. Hartung, Gerstungen: 14/65, 35/65, 15/66, 27/66, 35/66, 22/67
- O. Häßner, Wildau: 30/74
- W. Hegenwald, Schönebeck: 26/62
- G. Heinig, Zschopau: 4/65, 7/65, 25/65, 13/66
- H. Heinrich, Dresden: 22/84
- R. Heinrich, Dresden: 29/64
- J. Helbig, Babelsberg: 7/76, 22/78, 3/83
- A. Hempler, Rüdnitz, 8/85, 12/86
- S. Hennig, Dahme: 18/62
- G. Herbst, Schmalkalden: 5/77

2 Aufgaben und Lösungen

2.1 Aufgaben und Lösungen 1961

Aufgabe 1/61
Bestimme alle dreiziffrigen Zahlen, die, durch 11 geteilt, eine Zahl ergeben, die gleich ist der Summe der Quadrate der Ziffern der ursprünglichen Zahl!

Eine Zahl $z = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $a_0 - a_1 + a_2 - +... + (-1)^n a_n = 0$ oder durch 11 teilbar ist.
Für dreiziffrige durch 11 teilbare Zahlen, die in der Form $z = 100a + 10b + c$ dargestellt seien, wobei a, b und c einziffrige Zahlen sind, gilt also, dass $c - b + a = 0$ oder eine durch 11 teilbare Zahl sein muss, d.h.

$$a - b + c = 0 \quad (1) \qquad \text{oder} \qquad a - b + c = 11 \quad (2)$$

(weitere Fälle; etwa $a - b + c = 22$; sind nicht möglich, da das Maximum von $a - b + c < 22$ sein muss).
Die Ziffern der gesuchten Zahl müssen der Gleichung genügen

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

Fall 1: $b = a + c$ in (3) eingesetzt, ergibt

$$100a + 10a + 10c + c = 11(2a^2 + 2ac + 2c^2) \to 10a + c = 2(a^2 + ac + c^2)$$

$10a + c$ muss also gerade sein, also auch c. Und weiter

$$a^2 + (c-5)a + c^2 - \frac{c}{2} = 0 \to a_{1;2} = \frac{5-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25 - 8c - 3c^2}$$

Folgende Fälle müssen untersucht werden (gerades c): $c = 0, c = 2, c = 4, c = 6, c = 8$:
$c = 0$: $a_{1;2} = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}$ mit $a_1 = 5$ und $a_2 = 0$ (unbrauchbar) ; $c \geq 2$: Wurzel imaginär
Also Fall 1: $c = 0, a = 5, b = 5$, eine gesuchte Zahl 550

Fall 2: $b = a + c - 11$ in (3) eingesetzt, ergibt

$$100a + 10a + 10c - 100 + c = 11(a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2) \to 10a + c = 131 + 2(a^2 + c^2 + ac - 11a - 11c)$$

c muss also ungerade sein. Und weiter

$$a^2 + (c-16)a + c^2\frac{131}{2} - \frac{23c}{2} = 0 \to a_{1;2} = \frac{16-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{14c - 3c^2 - 6}$$

Zu untersuchende Fälle (ungerades c): $c = 1, c = 3, c = 5, c = 7, c = 9$:
$c = 1$: a keine natürliche Zahl
$c = 3$: $a_1 = 8$ und $a_2 = 5$ (unbrauchbar, da dann $b < 0$)
$c \geq 5$: Wurzel imaginär
Also Fall 2: $c = 3, a = 8, b = 0$, zweite gesuchte Zahl 803

Aufgabe 2/61
Für welche Werte der Veränderlichen x besteht die Ungleichung

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x + 9 \quad (1)$$

x muss folgenden Bedingungen genügen, damit (1) erfüllt ist:

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x + 9 \quad (1)$$

1) $x \geq -\frac{1}{2}$, da sonst die Wurzel imaginär wäre. Für komplexe Zahlen ist keine Ordnungsrelation bekannt.
2) $x \neq 0$, da die Funktion $f(x) = \frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}$ auf der linken Seite für $x = 0$ nicht erklärt ist. Sie hat an

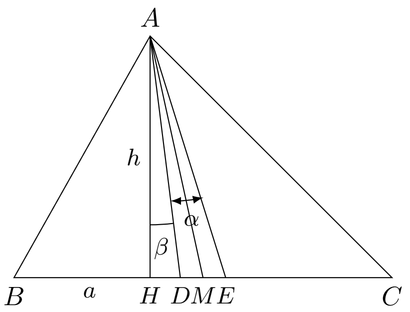
dieser Stelle eine hebbare Unstetigkeit.
3) Weiterhin folgt aus

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} = \frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2} = \left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2 < 2x-9$$

$2\sqrt{1+2x} < 7$ und $x < \frac{45}{8}$.
Die Ungleichung (1) besteht für alle x, die der Bedingung $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$ genügen, mit Ausnahme von $x = 0$.

Aufgabe 3/61
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse BC in n gleiche Teile geteilt wird (n eine ungerade Zahl).
Ist α der Winkel, unter dem die Teilstrecke, die den Mittelpunkt der Hypotenuse enthält, von A aus gesehen wird, h die Höhe und a die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, so zeige, dass

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$



Größen: $DE = \frac{a}{n}; HD = x; \measuredangle DAE = \alpha; \measuredangle HAD = \beta$
Behauptung: $\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$
Beweis: Es gilt $\tan\beta = \frac{x}{h}$ und $x = h\tan\beta$ (1). Dann ist

$$\tan\alpha+\beta = \frac{x+\frac{a}{n}}{h} \qquad \text{und} \qquad x = h\tan\alpha+\beta - \frac{a}{n} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt: $h\tan\alpha+\beta - \frac{a}{n} = \tan\beta$. Nach Umformung wird

$$\tan\alpha = \frac{a}{nh + a\tan\alpha + nh\tan^2\beta} \quad (3)$$

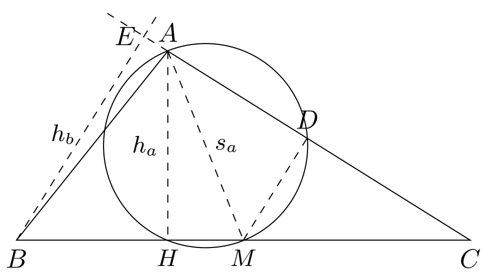
Da $\tan\beta = \frac{x}{h}$ ist, gilt $\tan\alpha = \frac{ah}{nh^2+ax+nx^2}$ (4). Nach dem Höhensatz wird

$$h^2 = \left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n} - x\right)\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n} + \frac{a}{n} - x\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} - \frac{ax}{n} - x^2$$

Aus der Gleichung (3) erhält man durch Einsetzen von (4) abschließend

$$\tan\alpha = \frac{ah}{\frac{a^2n}{4} - \frac{a^2}{4n} - ax - nx^2 + ax + nx^2} = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

Aufgabe 4/61
Konstruiere ein Dreieck ABC, wenn h_a, h_b und s_a bekannt sind.
h_a ist die auf der Seite a errichtete Höhe, h_b die auf der Seite b und s_a ist die Seitenhalbierende der Seite a.



Analysis: Es gilt $MD \parallel BE, BM = CM, MD = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}h_b$, da $CB : CM = 2.1 = BE : MD = h_b : MD$, damit $MD = \frac{1}{2}h_b$)
Konstruktion:
Aus h_a,s_a und einem rechten Winkel konstruiert man das Dreieck AHM bzw. AHM'.
Über $AM = s_a$ wird der Thaleskreis konstruiert und um M ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}h_b$ geschlagen. Die Schnittpunkte dieser beiden Kreise seien D und D'. Die Punkte A und D bzw. A und D' werden verbunden und die Strecken AD bzw. AD' über ihre Endpunkte hinaus zu Geraden verlängert.
Die Strecke HM wird ebenfalls über ihre Eckpunkte hinaus verlängert. Die Verlängerung von AD bzw. AD' schneidet die Verlängerung um HM in C bzw. C'. Der um M mit dem Radius MC bzw. MC' gezeichnete Kreis schneidet die Verlängerung von HM in B und B'. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$ genügen den geforderten Bedingungen.
Wenn man vom $\triangle AHM'$ ausgeht über AM' den Thaleskreis zeichnet, kann man analoge Konstruktionen durchführen und erhält zwei Dreiecke, die auch den geforderten Bedingungen genügen.

Beweis: $AH = h_a; AM = s_a$ bzw. $AM' = s_a$ (nach Konstruktion)
$MD = MD' = \frac{1}{2}h_b$ (nach Konstruktion)
$\measuredangle MDA = \measuredangle MD'A = 1R$ (nach Konstruktion)
$MC = MB, MC' = MB'$ (nach Konstruktion)
Man fällt noch von B auf die Verlängerung von AD und von B' auf AD' das Lot und erhält die Punkte E und E'. Es gilt: $BE \perp AC, B'E' \perp AC'$ (Höhen auf b). Es gilt weiterhin

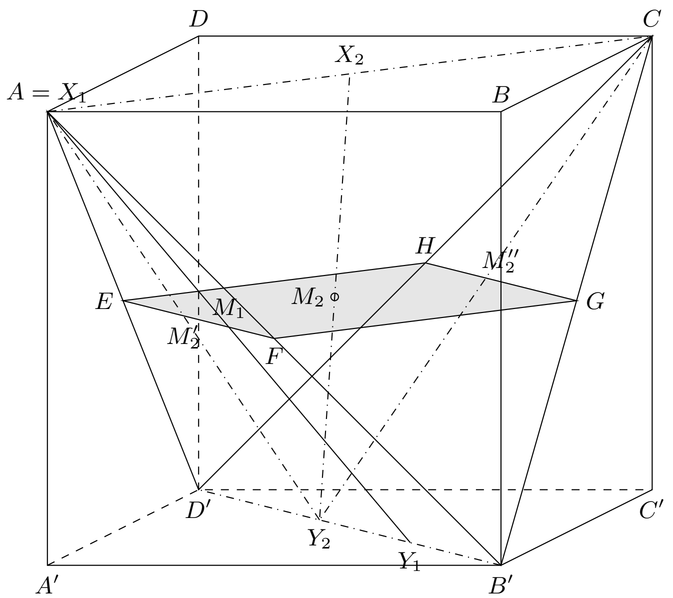
$$BC : MC = 2 : 1 \quad \text{und} \quad BC : MC = BE : MD \quad \text{bzw. für die Punkte B',C',M',E'}$$

Damit folgt $BE = h_b$ bzw. $B'E' = h_b$. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind die geforderten Dreiecke.
Determination: Die Konstruktion ist möglich, wenn $s_a = h_a$ und $h_b < 2s_a$.

Aufgabe 5/61
Gegeben ist der Würfel $ABCDA'B'C'D'$.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Strecke XV, wobei X ein beliebiger Punkt der Strecke AC und V ein beliebiger Punkt der Strecke $B'D'$ ist.

b) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte Z der Strecke XV, die die Beziehung $ZV = 2XZ$ erfüllen.



a) Analysis: a = Länge der Würfelkante
Behauptung:
1. Der geometrische Ort der Mittelpunkte M der Strecke XY ist die Fläche $EFGH$.
2. Die Fläche $EFGH$ liegt parallel zur Grund- bzw. Deckfläche des Würfels.
3. Die Fläche $EFGH$ ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Beweis: 1. Es sei zunächst $X_1 = A$ und Y_1 wandere auf $B'D'$. Dann gilt: $AE : ED' = AM_1 : M_1Y_1 = AF : FB' = 1 : 1$. Man erhält die Strecke EF.
Durch analoge Überlegungen erhält man die Strecken FG, GH und HE. Da $AE : ED' = CH : HD' = CG : GB' = AF : FB'$ gilt, liegen die Strecken EF, FG, GH und HE alle in der Ebene $EFGH$ und begrenzen den gesuchten geometrischen Ort.
X_2 sei nun ein beliebiger Punkt der Strecke AC und Y_2 ein beliebiger Punkt von $B'D'$. M_2 sei der Mittelpunkt von X_2Y_2. Es ist nachzuweisen, dass M_2 ein Punkt der Ebene $EFGH$ ist.
Man verbindet dazu Y_2 mit A und C; auf den Strecken EF bzw. GH erhält man die Mittelpunkte von Y_2A und Y_2C M_2' und M_2''. Die Strecken AY_2, CY_2, AC und Y_2X_2 liegen in der Ebene AY_2C.
Es gilt: $AM_2' : M_2'Y_2 = X_2M_2 : M_2Y_2 = CM_2'' : M_2''Y_2 = 1 : 1$.
M_2 muss also auf der Strecke $M_2'M_2''$ liegen. $M_2'M_2''$ liegt aber in der Ebene $EFGH$, damit auch der Punkt M_2.

2. Da gilt $AE : ED' = AF : FB' = 1 : 1$, folgt $EF \parallel D'B'$, damit $EF \parallel$ Ebene $A'B'C'D'$. Es gilt auch $FG \parallel$ Ebene $A'B'C'D', GH \parallel$ Ebene $A'B'C'D'$ usw. Alle Geraden der Ebene $EFGH$ verlaufen parallel zur Grund- bzw. Deckfläche. Damit ist die gesamte Ebene $EFGH$ parallel zur Grund- bzw. Deckfläche.

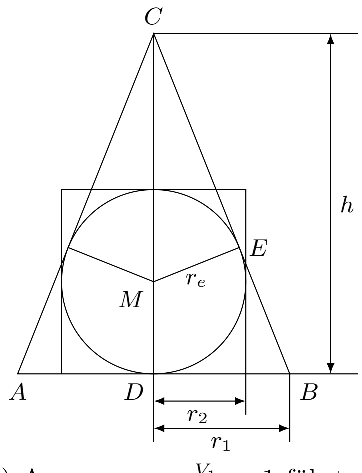
3. $D'B' = a\sqrt{2}$. Da $AE : AD' = AF : FB' = 1 : 2$, ist $EF = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Analoge Überlegungen ergeben $FG = GH = HE = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

b) Diesen Teil der Aufgabe löst und beweist man mit Hilfe ähnlicher Überlegungen wie im Teil a). Man erhält:
1. Der geometrische Ort der Punkte Z, welche die Bedingung $ZY = 2ZX$ erfüllen, ist eine Fläche $E'F'G'H'$.
2. Die Fläche verläuft in der Höhe $\frac{a}{3}$ parallel zur Grundfläche.
3. Die Fläche $E'F'G'H'$ ist ein Rechteck mit den Seiten $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ und $\frac{a}{3}\sqrt{8}$.

Aufgabe 6/61
Gegeben ist ein Kegel, die dem Kegel eingeschriebene Kugel und der der Kugel umschriebene Zylinder, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels in einer Ebene liegt. V_1 ist der Rauminhalt des Kegels und V_2 der Rauminhalt des Zylinders.

a) Beweise, dass die Gleichung $V_1 = V_2$ nicht bestehen kann.

b) Bestimme die kleinste Zahl k, für die $V_1 = kV_2$ gilt, und konstruiere für diesen Fall den Winkel an der Spitze des Kegels.



Analysis: (1) $V_{Kegel} = V_1 = \frac{\pi}{3}r_1^2 h$, (2) $V_{Zylinder} = V_2 = 2\pi r_2^3$ und $\triangle\ DBC \sim \triangle\ MEC$, da Winkel bei C gemeinsam, rechter Winkel bei E und D, Hauptähnlichkeitssatz.
Also $ME : MC = DB : CB$, d.h. $\frac{r_2}{h-r_2} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+h^2}}$ (3). Umformen ergibt $r_1^2 = \frac{r_2^2 h}{h-2r_2}$ (4) mit $h - 2r_2 \neq 0$, da $h > 2r_2$. (4) in (1) eingesetzt, führt zu

$$V_1 = \frac{\pi r_2^2 h^2}{3(h-2r_2} \quad (5)$$

V_1 in der Form (5) dividiert durch V_2 in der Form (2) ergibt

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h^2}{6r_2(h-2r_2)}$$

a) Angenommen $\frac{V_1}{V_2} = 1$ führt zu $h^2 - 6r_2h + 12r_2^2 = 0$ mit $h_{1;2} = 3r_2 \pm \sqrt{9r_2^2 - 12r_2^2}$; unmöglich, da Radikand kleiner als Null. Die Annahme ist falsch, d.h. $V_1 \neq V_2$.
b) Annahme: $\frac{V_1}{V_2} = k$, d.h. $h^2 - 6kr_2h + 12kr_2^2 = 0$ mit den Lösungen

$$h_{1;2} = 3kr_2 \pm \sqrt{9k^2r_2^2 - 12kr_2^2} \quad (7)$$

Damit Lösungen möglich sind, darf der Radikand nicht negativ sein: $9k^2r_2^2 - 12kr_2^2 = 0$, d.h., $k = \frac{4}{3}$ ist die kleinste Zahl, für die $V_1 = kV_2$ gilt. Aus (7) ergibt sich für $k = \frac{4}{3}$ die Beziehung $h)4r_2$.
Daraus folgt eine Möglichkeit, den Winkel an der Spitze zu konstruieren.

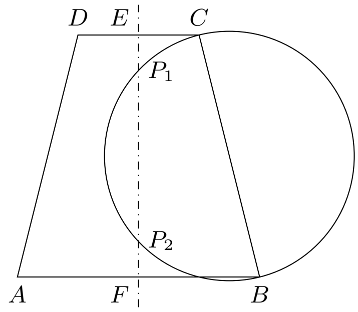
Konstruktion: Man zeichnet $h = 4r_2^2 = DC$ ($DM = r_2$ wird von D aus viermal abgetragen).
Um M zeichnet man den Kreis mit dem radius $r_2 = DM$ und über der Strecke MC den Thaleskreis. Die Schnittpunkte beider Kreise - E und F - werden mit C verbunden. Bei C entsteht der gesuchte Winkel γ.

Aufgabe 7/61
Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundlinien a und b und der Höhe h.

a) Konstruiere den Punkt P auf der Symmetrieachse, von dem aus die beiden Schenkel unter einem rechten Winkel erscheinen.

b) Bestimme die Entfernung des Punktes P von einer der beiden Grundlinien rechnerisch.

c) Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion des Punktes P möglich? (Diskussion der möglichen Fälle)



a) Analysis: $EP_1 = x_2, FP_1 = x_1, AB = a, DC = b, EF = h$, sowie $\measuredangle BP_1C = \measuredangle BP_2C = 1R$. Es folgt: P_1, P_2 müssen auf dem Thaleskreis über BC bzw. AD liegen.
Konstruktion und Determination:
Es wird der Thaleskreis über einen der beiden Schenkel gezeichnet. Dieser Kreis schneidet die Symmetrieachse entweder in zwei (P_1, P_2), einem (P) oder keinem Punkt. Diese Punkte sind jeweils die gesuchten.

b) Es gilt (siehe Abbildung): $\triangle BFP_1 \sim \triangle CEP_1$. Daraus folgt

$$x_1 : \frac{a}{2} = \frac{b}{2} : x_2 \quad \text{d.h.} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{ab}{4}$$

Außerdem gilt: $x_1 + x_2 = h$ (2). Aus (1) und (2) folgt, dass x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 - hx + \frac{ab}{4} = 0$ sind

$$x_{1;2} = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - ab}$$

c) Nach den Überlegungen von b gilt: Falls $h^2 > ab$, gibt es zwei Lösungen, d.h. zwei Punkte; falls $h^2 = ab$, gibt es eine Lösung, d.h. einen Punkt, und falls $h^2 < ab$, gibt es keine Lösung, d.h. keinen Punkt. Die Konstruktion ist also nur möglich, falls $h^2 \geq ab$.

Aufgabe 8/61
In einer Abteilung eines volkseigenen Betriebes sollen Massenbedarfsartikel hergestellt werden. Eine Vorkalkulation ergibt, dass die Produktion insgesamt $b = 1650{,}00$ DM fixe Kosten im Monat (Pflege, Wartung und Amortisation der Produktionsanlagen. Verwaltungskosten usw.) und $m_1 = 6{,}50$ DM variable Kosten (je gefertigtes Stück, Materialkosten, Arbeitslöhne usw.) verursacht.
Der Werkabgabepreis (zuzüglich Produktionsabgabe) beträgt auf Grund preisrechtlicher Bestimmungen $m_2 = 11{,}50$ DM je Stück.

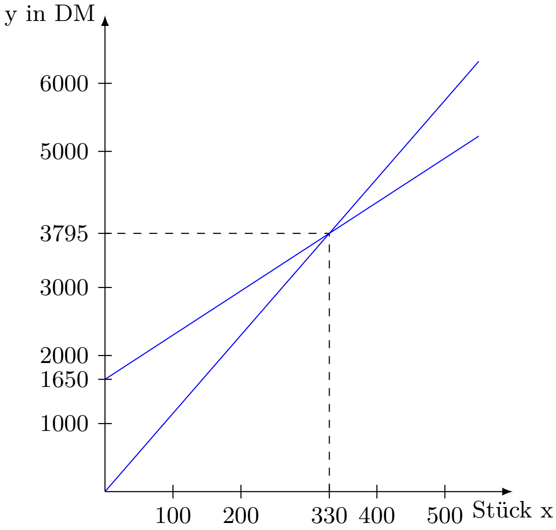
a) Es sind die Gesamtkosten y_1 der Produktion und der Gesamterlös y_2 (unter der Voraussetzung, dass die Produktion restlos abgesetzt wird) in Abhängigkeit vom Produktionsausstoß x rechnerisch und graphisch darzustellen.

b) Von welchem Produktionsausstoß x_r an wird die Produktion rentabel?

c) Durch welche Maßnahmen kann die Rentabilität erhöht werden?

d) Welche Schlussfolgerungen ergeben sich, wenn die variablen Kosten m_l den Werkabgabepreis m_2 übersteigen?

a) Die Gesamtkosten y_1 der Produktion stellen sich als die Summe aus den fixen Kosten b und den mit dem Produktionsausstoß x multiplizierten variablen Kosten m_l dar: $y_1 = m_1x + b = 6{,}50x + 1650{,}00$.
Der Gesamterlös y_2 ergibt sich als Produkt des Abgabepreises m_2 mit dem Produktionsausstoß x: $y_2 = m_2x = 11{,}50x$.
Gesamtkosten und Gesamterlös stellen demnach lineare Funktionen des Produktionsausstoßes x dar, die nur für nicht negative x-Werte definiert sind (ein negativer Produktionsausstoß ist bei der Fragestellung sinnlos).



b) Die Produktion wird rentabel, wenn der Gesamterlös y_2 nicht kleiner als die Gesamtkosten y_1 ist: $y_2 \geq y_1 \rightarrow m_2x \geq m_1x + b$. Daraus folgt:

$$m_2x - m_1x \geq b; \qquad x \geq \frac{b}{m_2 - m1}$$

(wenn $m_2 + m_1 > 0$ oder, was dasselbe ist, $m_2 > m_1$ ist). Also ist die Produktion rentabel für

$$x \geq x_r = \frac{b}{m_2 - m1} = \frac{1650}{11{,}50 - 6{,}50} = 330$$

Dabei ist x_r die Abszisse des Schnittpunktes beider Geraden.

c) Es gibt vier Möglichkeiten, den Gewinn $G = y_2 - y_1$ und damit die Rentabilität zu erhöhen; diese Möglichkeiten sind aus der graphischen Darstellung erkennbar:

1. Erhöhung des Werkabgabepreises m_2. Das bedeutet in der graphischen Darstellung eine Drehung der Geraden y_2 um den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn. Diese Möglichkeit kommt aber aus preisrechtlichen Gründen nicht in Frage.

2. Erhöhung des Produktionsausstoßes x. Diese Möglichkeit findet eine obere Grenze bei vollständiger Deckung des Bedarfs und in der Produktionskapazität.

3. Senkung der fixen Kosten b. Das bedeutet graphisch eine Verschiebung der Geraden y_1 parallel zu sich selbst in Richtung auf den Nullpunkt. Sie trägt verhältnismäßig viel zur Rentabilitätserhöhung bei, wenn m_1 klein ist.

4. Senkung der variablen Kosten m_1 - graphisch eine Drehung der Geraden y_1 um den Schnittpunkt mit der y-Achse im Uhrzeigersinn.

d) Wenn die variablen Kosten m_1 den Abgabepreis m_2 übersteigen, wenn also $m_1 > m_2$ ist, kann unter den gegebenen Bedingungen eine Rentabilität durch Erhöhung des Produktionsausstoßes nicht erreicht werden.
In der graphischen Darstellung laufen in diesem Fall die Geraden y_1 und y_2 auseinander und haben keinen Schnittpunkt, so dass es auch kein x, gibt, von dem an Rentabilität besteht. Rechnerisch erhält man aus $x_r = \frac{b}{m_2 - m1}$ wegen $m_1 > m_2, b > 0$, dass $x_r < 0$ ist. (Das würde einen negativen Produktionsausstoß bedeuten und ist sinnlos.)

Auch durch Senkung der fixen Kosten b allein ist dieser Zustand nicht zu ändern. Einzige Möglichkeit bleibt demnach die Senkung der variablen Kosten m_1, d.h. Einsparung von Material, Ausmerzung der Verlustzeiten, schonender Einsatz des Werkzeugs, Steigerung der Arbeitsproduktivität.
Die Bedeutung des Satzes "Spare mit jedem Gramm, mit jedem Millimeter, mit jeder Minute!" wird hieran deutlich.

Aufgabe 9/61
Es ist $a^2 \geq 0$.
Beweis: Ist $a = 0$, so ist auch $a^2 = 0$, und die Behauptung richtig. Ist $a \neq 0$, so ist a^2 das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen, also positiv, und die Behauptung ist ebenfalls richtig.
Dann ist auch $a^2 - 2a + 1 \geq -2a + 1$.
Beweis: Es wurde auf beiden Seiten der Ungleichung Gleiches subtrahiert beziehungsweise addiert.
Durch Radizieren erhält man
$$a - 1 \geq \pm\sqrt{-2a + 1}$$
Setzt man nunmehr $a = \frac{1}{2}$, so ergibt sich
$$\frac{1}{2} - 1 \geq \pm\sqrt{-1 + 1} \rightarrow -\frac{1}{2} \geq 0$$
Das bedeutet, dass eine negative Zahl größer als oder gleich Null sein soll. Wo steckt der Fehler?

Sicherlich wird man zur Probe für a den Wert $\frac{1}{2}$ gleich in die erste Ungleichung eingesetzt und folgendermaßen gerechnet haben: $a = \frac{1}{2}; a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \geq 0$.
Nun ist aber bekanntlich die Quadratwurzel doppeldeutig: $x = \pm\sqrt{x^2}$.
Beim Ausziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten der Ungleichung hätte man also schreiben müssen: $\pm(a - 1)$ und $\pm\sqrt{-2a + 1}$. (absichtlich wurde hier das Zeichen $\geq$ nicht gesetzt, da, wie sich anschließend zeigt, sonst ein weiterer Fehler entsteht).
Auf der rechten Seite der Ungleichung war die Doppeldeutigkeit zwar berücksichtigt, dort wirkt sie sich aber nicht aus, da sich für $a = \frac{1}{2}$ der Wert ± 0 ergibt.
Die linke Seite dagegen liefert für $a = \frac{1}{2}$ gerade den negativen Wurzelwert, wenn die Doppeldeutigkeit nicht berücksichtigt wird. Das Entscheidende ist nun, dass aus
$$x^2 \geq y \quad \text{nicht etwa folgt} \quad \pm x \geq \pm\sqrt{y}$$
Das kann man sofort an Beispielen nachweisen: Aus $4 \geq 1$ folgt nicht $\pm 2 \geq \pm 1$. Zwar ist die Beziehung $+2 \geq +1$ richtig, aber die Beziehung $-2 \geq -1$ ist falsch; es gilt vielmehr $-2 \leq -1$.

Aufgabe 10/61
In einem Geschäft für Photoartikel fragt ein Kunde: "Wieviel kostet dieses Objektiv?" Die Verkäuferin antwortet: "Mit Lederetui 115,00 DM, mein Herr!" - "Und wieviel kostet das Objektiv ohne Etui?" fragt der Kunde weiter. "Genau 100,00 DM mehr als das Etui!" sagt lächelnd die Verkäuferin. Wieviel kostet das Objektiv?

Bezeichnet man mit x den Preis des Objektivs und mit y den Preis des Etuis, so gilt
$$x + y = 115 \qquad ; \qquad x + y = 100$$
(Beides zusammen kostet 115 DM, das Objektiv kostet 100 DM mehr als das Etui.) Löst man dieses Gleichungssystem, so ergibt sich $x = 107{,}50$ DM; $y = 7{,}50$ DM. Tatsächlich kosten bei diesen Preisen das Objektiv mit Etui 115,00 DM und das Objektiv ohne Etui 100,00 DM mehr als das Etui.

Aufgabe 11/61
Eine Türöffnung von 90 cm Breite soll mit Brettern zugenagelt werden. Zur Verfügung stehen Bretter passender Länge von 8 cm, 10 cm und 12 cm Breite.
Welche Möglichkeiten gibt es, wenn kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll?

Bezeichnet man mit x die Anzahl der Bretter von 8 cm Breite, mit y die von 10 cm und mit z die von 12 cm Breite, so gilt $8x + 10y + 12z = 90$ oder, wenn man beide Seiten der Gleichung durch 2 dividiert, $4x + 5y + 6z = 45$.
Es handelt sich um eine Gleichung mit drei Unbekannten. Eine solche Gleichung hat zunächst unendlich viele Lösungen. Die Anzahl der Lösungen wird aber durch die Bedingungen der Aufgabe stark eingeschränkt.
1. Es sind nur positive Lösungen möglich, da eine negative Anzahl von Brettern sinnlos ist. Das heißt, es muss gelten

$$0 \leq 4x \leq, 0 \leq 5y \leq 45, 0 \leq 6z \leq 45 \rightarrow 0 \leq x \leq 11, 0 \leq y \leq 9, 0 \leq z \leq 6\frac{1}{2}$$

2. Es sind nur ganzzahlige Lösungen möglich, da kein Brett der Länge nach durchgesägt werden soll. Man löst dieses diophantische Problem folgendermaßen:
Aus $4x+5y+6z = 45$ folgt durch Subtraktion von $5y$ auf beiden Seiten der Gleichung $4x+6z = 45-5y$. Die linke Seite der Gleichung ist durch 2 teilbar, also muss auch die rechte Seite durch 2 teilbar sein. Da 45 eine ungerade Zahl ist, muss auch $5y$ und damit auch y eine ungerade Zahl sein. Wegen der Bedingungen 1 ergeben sich damit fünf Möglichkeiten für y: $y = 1, y = 3, y = 5, y = 7, y = 9$.
Setzt man diese fünf Werte der Reihe nach in die Gleichung ein, so erhält man fünf Gleichungen, die jede nur noch zwei Unbekannte enthalten:

1. y = 1: $4x + 6z = 45 - 5 \rightarrow 2x + 37 = 20$
2. y = 3: $4x + 6z = 45 - 15 \rightarrow 2x + 37 = 15$
3. y = 5: $4x + 6z = 45 - 25 \rightarrow 2x + 37 = 10$
4. y = 7: $4x + 6z = 45 - 35 \rightarrow 2x + 37 = 5$
5. y = 9: $4x + 6z = 45 - 45 \rightarrow 2x + 37 = 0$

Diese fünf Gleichungen behandelt man auf dieselbe Weise weiter. Dabei sieht man aber im Fall 5 ($y = 9$) sofort, dass $x = 0$ und $z = 0$ folgt, d.h., eine Möglichkeit besteht darin, die Türöffnung mit neun Brettern der Breite 10 cm auszufüllen. Es ist also $x_1 = 0, y_1 = 9, z_1 = 0$.
Im Fall 1 ($y = 1$) folgt aus $2x + 3z = 20$, dass $2x = 20 - 3z$ ist. Da $2x$ durch 2 teilbar ist, muss auch $20 - 3z$ und damit auch z durch 2 teilbar sein. Mithin gelten für z folgende vier Möglichkeiten: $z_2 = 0, z_3 = 2, z_4 = 4, z_5 = 6$. (für $z \geq 8$ würde folgen $x < 0$ im Widerspruch zur Bedingung 1); für x erhält man daraus: $x_2 = 10, x_3 = 7, x_4 = 4, x_5 = 1$.
In den Fällen 2, 3 und 4 geht man entsprechend vor, mit den Ergebnissen

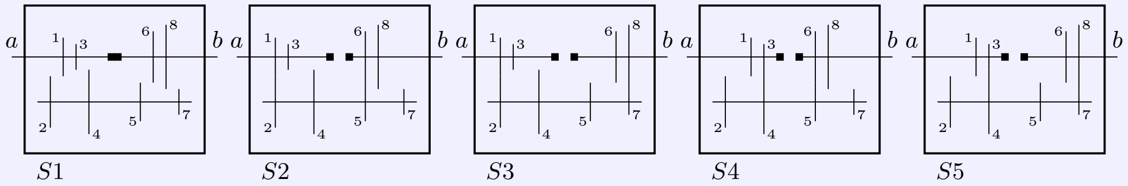
1. $y = 3$: $z_6 = 1, z_7 = 3, z_8 = 5$ und $x_6 = 6, x_7 = 3, x8 = 0$
2. $y = 5$: $z_9 = 0, z_{10} = 2$ und $x_9 = 5, x_{10} = 2$
3. $y = 7$: $z_{11} = 1$ und $x_{11} = 1$

Damit hat man insgesamt elf Lösungen des Problems gefunden. Aus dem Lösungsweg geht hervor, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 12/61
In einem Konstruktionsbüro sollen die Konstruktionsunterlagen für die Spezialanfertigung einer Laboratoriumszentrifuge ausgearbeitet werden. Zwischen Antriebsmotor und Zentrifuge wird ein Stufengetriebe eingebaut, das folgenden Anforderungen genügen soll:

1. Die erste Stufe ist Direktkupplung der Zentrifuge an den Motor, der eine Drehzahl $a_1 = 6400\ \text{min}^{-1}$ hat.
2. Das Getriebe soll insgesamt fünf verschiedene Drehzahlen ermöglichen.
3. Die Drehzahl a_2 soll 75% der Drehzahl a_1 betragen, ebenso die Drehzahl a_3 75% von a_2 und so fort.

Das Getriebe erhält den in der Abbildung schematisch dargestellten Aufbau. (a Antrieb, b Abtrieb, S Schaltstellung)



a) Es ist die Folge a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 der Drehzahlen aufzustellen.

b) Welche Übersetzungen müssen die Räderpaare $(3,4), (5,6), (7,8)$ erhalten, wenn das Räderpaar $(1,2)$ im Verhältnis $1:1$ übersetzt?

c) Wie groß müssen die Radien der Räder $1,2,3,4,5,6,7,8$ gewählt werden? Der Abstand der Vorgelegewelle von der Antriebs- beziehungsweise Abtriebswelle beträgt 175 mm (von Wellenmitte zu Wellenmitte gemessen).

a) Es ist $a_1 = 6400$ min^{-1} (Direktgang) die erste Stufe (Bedingung 1).
Da $75\% = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ ist, ergeben sich die folgenden Stufen durch Multiplikation der jeweils vorhergehenden Stufe mit $\frac{3}{4}$:
$a_2 = 4800$ min^{-1}; $a_3 = 3600$ min^{-1}; $a_4 = 2700$ min^{-1}; $a_5 = 2025$ min^{-1}
Eine solche Folge, bei der jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit ein und demselben Faktor errechnet wird, heißt eine geometrische Folge.
b) Bei der Schaltstellung 2 sind die Räderpaare (1,2) und (5,6) in Eingriff. Wird mit a_v die Drehzahl der Vorgelegewelle bezeichnet, so gilt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_v} \cdot \frac{a_v}{a_2} = \frac{6400}{4800} = \frac{4}{3} = 4:3$$

Nun ist bei Schaltstellung 2: $\frac{a_1}{a_v} = \text{Ü}(1{,}2) = \frac{1}{1} = 1$, wenn mit Ü(1,2) das Übersetzungsverhältnis des Räderpaares (1,2) bezeichnet wird. Dann folgt $\frac{a_v}{a_2} = \text{Ü}(5{,}6) = 4:3$. Das Räderpaar (5,6) muss also im Verhältnis Ü$(5{,}6) = 4:3$ übersetzen.
Bei der Schaltung 3 sind die Räderpaare (1,2) und (7,8) in Eingriff. Analog erhält man $\frac{a_1}{a_3} = \frac{6400}{3600} = 16:9$, also Ü$(7{,}8) = 16:9$.
Bei Schaltungsstellung 4 sind die Räderpaare (3,4) und (5,6) in Eingriff. Daher gilt $\frac{a_1}{a_4} = \frac{6400}{2700} = 64:27$. Nun ist $\frac{a_v}{a_4} = 4:3$, also gilt $\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_v} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$. Daraus ergibt sich Ü$(3{,}4) = 16:9$.

c) Die Umfänge eines Räderpaares stehen zueinander im umgekehrten Verhältnis der Übersetzung. Gilt beispielsweise für das Räderpaar (3,4) das Übersetzungsverhältnis Ü$(3{,}4) = \frac{16}{9}$, so gilt (mit U_k wird der Umfang, mit r_k der Radius des Rades k bezeichnet):

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{16}{9}, \quad \frac{2\pi r_4}{2\pi r_3} = \frac{16}{9}, \quad \frac{r_4}{r_3} = \frac{16}{9}$$

Ferner gilt $r_3 + r_4 = 175$ mm. Es liegt also ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten vor. Als Lösung erhält man: $r_3 = 63$ mm, $r_4 = 112$ mm. Analog ergibt sich $r_1 = 87{,}5$ mm, $r_2 = 87{,}5$ mm, $r_5 = 75$ mm, $r_6 = 100$ mm, $r_7 = 63$ mm, $r_8 = 112$ mm.

Aufgabe 13/61
Man denke sich den Erdäquator genau kreisförmig und um ihn ein überall anliegendes Band gespannt. Anschließend werde das Band um 1 m verlängert; es stehe nun überall gleich weit von der Erdoberfläche ab.

a) Wie groß ist der Abstand? Ob wohl eine Maus zwischen Erdoberfläche und Band durchschlüpfen könnte? Der Erdradius werde mit $r = 6370$ km angenommen.

b) Man löse die gleiche Aufgabe für eine Kugel von der Größe einer Apfelsine ($r = 4$ cm)!

Bezeichnet man den Radius der Kugel mit r und den Äquatorumfang mit U, so gilt $U = 2\pi r$ oder $r = \frac{U}{2\pi}$. Vergrößert man den Umfang U um U_z (in unserem Fall ist $U_z = 1$ m), so vergrößert sich auch der Radius r, und zwar um r_z und es gilt nun

$$U + U_z = 2(r + r_z)\pi \to r + r_z = \frac{U + U_z}{2\pi} = \frac{U}{2\pi} + \frac{U_z}{2\pi}$$

Demnach ist $r_z = \frac{U_z}{2\pi}$. Das bedeutet aber, dass die Vergrößerung r_z des Radius r (der Abstand des größeren Kreises vom kleineren) ausschließlich von U_z (der Vergrößerung des Umfangs), nicht aber vom Radius r oder vom Kreisumfang U abhängt.
Für Erdkugel und Apfelsine ergibt sich also bei der gleichen Verlängerung U_z des Umfangs U die gleiche Vergrößerung r_z des Radius r. Für $U_z = 1$ m erhält man $r_z \approx 0{,}159$ m.
Es könnten also etwa fünf bis sechs "übereinandergestellte" Mäuse durchkriechen. Wer es nicht glaubt, prüfe es nach!

Aufgabe 14/61
Auf ihrem Flug um den Mond näherte sich die sowjetische Raumstation Lunik 3 dem Erdtrabanten bis auf etwa 7000 km. Für die folgenden Berechnungen werde der Mondradius r mit $r \approx 1750$ km angenommen, der Flächeninhalt F einer Kugelkappe mit dem Kugelradius r und der Kappenhöhe h ist $F = 2\pi rh$, wobei $\pi \approx \frac{22}{7}$ gesetzt werde.

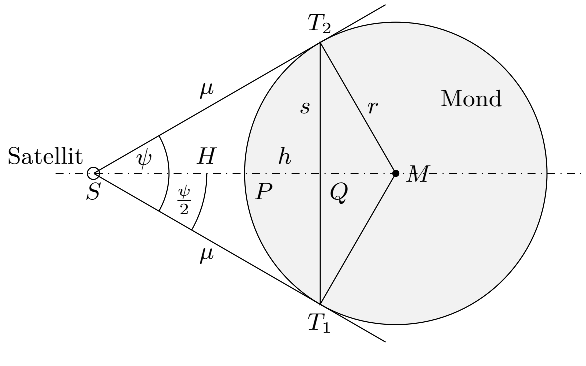
a) Wie groß ist das Gebiet des Mondes, das aus dieser Entfernung übersehen werden könnte?

b) Wieviel Prozent der Mondoberfläche sind dies?

c) Unter welchem Sehwinkel φ wäre der Mond aus dieser Entfernung zu beobachten?

d) Wie breit muss ein Gegenstand sein, der aus 100 m Entfernung unter demselben Sehwinkel gesehen werden soll?

a) Das zu übersehende Mondgebiet ist die Fläche einer Kugelkappe (Abbildung). Der Radius r der Kugelkappe ist bekannt; er ist gleich dem Radius r des Mondes. Zur Berechnung des Flächeninhalts F wird daher nur noch die Höhe h der Kugelkappe benötigt. Man errechnet sie durch mehrmalige Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes oder mit Hilfe des Höhensatzes oder mit Hilfe des Satzes des Euklid.



1. Berechnung mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes: Die Dreiecke ST_1M, T_1QM und SQT_1 sind rechtwinklig. Also gilt $u^2 + r^2 = (H + h)^2$ (1), $s^2 + (r - h)^2 = r^2$ (2) und $(H + h)^2 + s^2 = u^2$ (3).
Daraus folgt, wenn man (3) in (1) einsetzt und (2) nach s auflöst

$$(H + h)^2 + s^2 + r^2 = (H + r)^2 \qquad \text{und} \qquad s^2 = r^2 - (r - h)^2$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, so ergibt sich $(H + h)^2 + r^2 - (r - h) + r^2 = (H + r)^2$. Diese Gleichung enthält als einzige Unbekannte die Höhe h der Kugelkappe. Man löst sie nach h auf:

$$h = \frac{Hr}{H + r}$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt F der Kugelkappe zu $F = 2\pi rh = \frac{2\pi r^2 H}{H+r}$. Da in unserem Fall $H = 2r$ ist, wird die Berechnung numerisch besonders einfach:

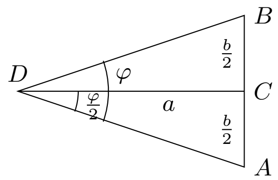
$$F = \frac{2\pi r^2 H}{H + r} = \frac{4\pi r^2}{3}$$

Mit $r = 1750$ km, $\pi = \frac{22}{7}$ ergibt sich $F \approx 13000000$ km^2.

b) Man erhält den prozentualen Anteil p der zu überschauenden Mondoberfläche F an der gesamten Mondoberfläche O, indem man F durch O dividiert und mit 100% multipliziert:

$$p = \frac{2\pi r^2 H \cdot 100}{4\pi r^2 (r+H)}\% = \frac{100r}{3r}\% \approx 33{,}3\%$$

Man erkennt, dass der Prozentsatz p unabhängig ist vom Radius r, wenn die Höhe H des Beobachtungspunktes in Vielfachen von r ausgedrückt wird: $H = kr$. Dann kürzt sich nämlich die Größe r aus dem Bruch weg.



c) Es ist, wie man aus der Abbildung erkennt, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{r+H}$.
Wegen $H = 2r$ folgt daraus $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$, womit für den Winkel folgt $\varphi \approx 39{,}94°$.

d) Ist b die Breite des Gegenstands, a der Abstand des Beobachters, (Abbildung) so muss gelten

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{b}{2a} = \tan\frac{\varphi}{2} \to b = 2a\tan\frac{\varphi}{2} \approx 70{,}70 \text{ m}$$

Ergänzung von Erich Schiffner:

Die Frage nach der relativen Größe der aus dem Abstand a von der Oberfläche übersehbaren Fläche wird am besten allgemein gelöst. Es sei $a = k \cdot r$. Dann wird

$$(r-h)(k+1)r = r^2 \qquad \text{daraus folgt} \qquad h = \frac{k}{k+1}r; \qquad F = 2\pi r^2 \frac{k}{k+1}$$

Für das Verhältnis von F zu H (H = Halbkugeloberfläche) gilt daher

$$\frac{F}{H} = \frac{k}{k+1}$$

Für $k = 2$ (siehe Aufgabe) wird $\frac{F}{H} = \frac{2}{3}$, für $k = 1$ wird $\frac{F}{H} = \frac{1}{2}$. Ist $k = \frac{1}{n} < 1$, so erhält man

$$\frac{F}{H} = \frac{1}{n+1}$$

Für $k \approx \frac{1}{30}$, d.h. $n = 30$ (Wostok I und II), erhält man z.B. $\frac{F}{H} = \frac{1}{31} \approx 0{,}032$. Die beiden Kosmonauten konnten also von jedem Punkt der Raumbahn rund 3% der Oberfläche der Erdhalbkugel überblicken.

Aufgabe 15/61
Es sind alle vierziffrigen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:
1. Die Summe aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich dem Quadrat aus der ersten Stelle.
2. Die Differenz aus der zweiten und der dritten Stelle ist gleich der ersten Stelle.
3. Die Summe aus der dritten und der vierten Stelle ist gleich der zweiten Stelle.
Wie kann man diese Zahlen allgemein darstellen?

Die Aufgabe enthält vier unbekannte Zahlen, nämlich die vier Stellen der gesuchten vierstelligen Zahlen. Wie bezeichnen die erste Stelle mit x, die zweite mit y, die dritte mit z und die vierte mit u. Aus den drei Bedingungen lassen sich drei Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{rll} (1) & x + y = x^2 & \text{1.Bedingung} \\ (2) & y - z = x & \text{2.Bedingung} \\ (3) & z + u = y & \text{3.Bedingung} \end{array}$$

Da mehr Unbekannte auftreten als Gleichungen vorhanden sind, hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, deren Anzahl jedoch durch die Aufgabenstellung stark eingeschränkt wird: Die Lösungen x, y, z, u sind Stellen einer vierziffrigen Zahl, also müssen sie einer der ganzen Zahlen zwischen 0 und 9 (beide Werte einschließlich) sein. Es gilt also: $0 \leq x,y,z,u \leq 9$, x, y, z, u ganzzahlig
Zur Lösung formen wir die Gleichung (1) um: $y = x(x-1)$ (1b). An der Gleichung erkennt man, dass für x nur die vier Werte $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ in Frage kommen; denn für $x = 4$ müsste das

einstellige y schon 12 werden.
Damit ergeben sich auch die y-Werte: $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 2, y_4 = 6$. Mit der Gleichung (2) ergeben sich die z-Werte: $z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 0, z_4 = 3$. Die Werte mit dem Index 2 scheiden aus, da $z_2 < 0$ wäre. Mit der Gleichung (3) folgt $u_1 = 0, u_3 = 2, u_4 = 3$.
Damit hat man die vierziffrigen Zahlen 2202 und 3633 als Lösung gefunden. Das Ergebnis 0000 wird nicht als echte vierziffrige Zahl anerkannt.

Um diese Zahlen durch einen allgemeinen Ausdruck darzustellen, schreibt man sie in der Form $1000x + 100y + 10z + u$. Setzt man $u = y - z$ und weitere Beziehungen von oben, so ergibt sich

$$1000x + 100y + 10z + u = 1000x + 101y + 9z = 991x + 110y = 881x + 110x^2$$

Dieser Ausdruck liefert für $x = 2$ die Zahl 2002 und für $x = 3$ die Zahl 3633, die die gestellten Bedingungen erfüllen. Dass es keine weiteren Zahlen mit den geforderten Eigenschaften geben kann, folgt aus dem Lösungsweg, bei dem alle Möglichkeiten ausgeschöpft wurden.

Aufgabe 16/61
A sagt zu B: "Diesen Anzug habe ich im Winterschlussverkauf um 20 % verbilligt gekauft." Da antwortet B: "Dann hast du 25 % gespart." Da wendet C ein: "Wenn er nur um 10 % im Preis gesenkt worden wäre, hättest du rund 11,1 % gespart."
Wie erklärt sich diese kuriose Rechnung?

Die Ursache für die unterschiedlichen Prozentangaben liegt darin begründet, dass A den Prozentsatz vom ursprünglichen (nicht gesenkten) Preis berechnet; B dagegen vom tatsächlichen (gesenkten) Verkaufspreis; C geht einmal vom ursprünglichen und einmal vom gesenkten Preis aus.
Hat z.B. der Anzug vor der Preissenkung 160,00 DM gekostet, so wurde er zum Preis von 128,00 DM verkauft, da die Preissenkung 20 % von 160,00 DM = 32,00 DM betrug.
Dann hat A, wie B behauptet, 32,00 DM = 25 % von 128,00 DM gespart.
Hätte nach den Angaben von C die Preissenkung nur 10 % von 160,00 DM = 16,00 DM betragen, so hätte A den Betrag 144,00 DM bezahlt und 16,00 DM eingespart. Das sind aber rund 11,1 % von 144,00 DM.
Schlussfolgerung: Bei Prozentangaben muss der Grundwert, auf den sie sich beziehen, eindeutig feststehen; sonst kann es Missverständnisse und Unklarheiten geben.

Aufgabe 17/61
Das Passagierflugzeug IL 14 P der Deutschen Lufthansa wiegt einschließlich voller Nutzlast etwa 18000 kp. Es benötigt beim Start vom Beginn des Rollens bis zum Abheben vom Boden ungefähr 30 s und hat im Augenblick des Abhebens eine Geschwindigkeit von rund 160 $\frac{km}{h}$.
Bei den folgenden Berechnungen werde von der Reibung und vom Luftwiderstand abgesehen und die Bewegung des Flugzeugs als gleichförmig beschleunigt betrachtet.

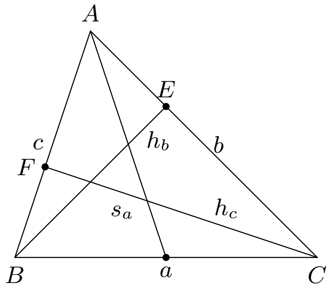
1. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit beim Rollen?
2. Wie groß ist die Rollstrecke?
3. Wie groß ist die Beschleunigung des Flugzeugs?
4. Welche Kraft ist notwendig, um diese Beschleunigung hervorzurufen?
5. Welche Arbeit wird von den beiden Motoren während des Rollens für die Beschleunigung vollbracht?
6. Welche Leistung (in PS) muss jeder der beiden Motoren dazu abgeben?

1. Wir bezeichnen mit v_a die Anfangsgeschwindigkeit, mit v_e die Endgeschwindigkeit und mit v_d die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeugs beim Rollen. Ferner sei l die Rollstrecke und t die benötigte Zeit. Es gilt $\frac{v_a+v_e}{2} = v_d$. Wegen $v_a = 0\frac{m}{s}, v_e \approx 44{,}4\frac{m}{s}$ ergibt sich $v_d \approx 22{,}2\frac{m}{s}$.
2. Für die Rollstrecke l gilt: $l = v_d \cdot t \approx 666m \approx \frac{2}{3}km$.

3. Für die Beschleunigung a gilt: $a = \frac{v_e - v_a}{t} \approx 1{,}48 \frac{m}{s^2}$.
4. Nachdem Grundgesetz der Dynamik berechnet sich die Kraft F mit $F = m \cdot a$. Für die Masse m gilt $m = \frac{G}{g}$, wenn G das Gewicht und $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ die Fallbeschleunigung ist.
   Dann wird $F = \frac{G \cdot a}{g} \approx 2720$ kp.
5. Arbeit $W = F \cdot l \approx 1810000$ kpm.
6. Leistung $P = \frac{W}{t} \approx 60000 \frac{kpm}{s}$. Dies entspricht 800 PS, so dass jeder Motor rund 400 PS Leistung aufbringen muss.

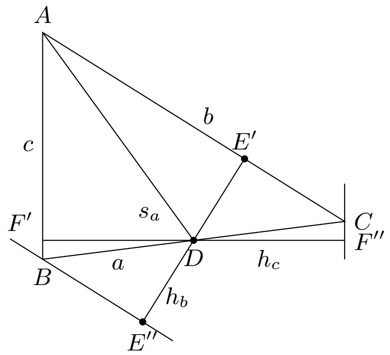
Aufgabe 18/61
Konstruiere ein Dreieck aus $s_a = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $h_c = 7 cm$!

Vorüberlegung: Die Analysisfigur (Abbildung) zeigt, dass kein Teilstück des Dreiecks ABC unmittelbar konstruierbar ist. Durch Festlegen jedes der drei gegebenen Stücke wird für einen weiteren Punkt des Dreiecks ABC höchstens ein geometrischer Ort bestimmt.



Die Situation ändert sich jedoch sofort, wenn man die Höhen h_b und h_c in Richtung b bzw. c parallel zu sich selbst verschiebt, so dass sie durch D verlaufen (Abbildung 2). Dann gilt $\triangle\ DBF' \cong \triangle\ DCF'$ wegen $DB = DC = \frac{a}{2}$, $\measuredangle BDF' = \measuredangle CDF''$ (Scheitelwinkel), $\measuredangle DF'B = \measuredangle DF''C$ (rechte Winkel nach Konstruktion).
Also ist $DF' = DF'' = \frac{h_c}{2}$. Entsprechend gilt $\triangle\ DCE' \cong\ DBE''$ wegen $DB = DC = \frac{a}{2}$, $\measuredangle E'DC = \measuredangle DBE''$ (Scheitelwinkel), $\measuredangle CE'D = \measuredangle BE''D$ (rechter Winkel nach Konstruktion).

Damit ergibt sich die Möglichkeit, $\triangle\ AF'D$ aus $AD = s_a, DF' = \frac{h_c}{2}, \measuredangle AF'D = 90°$, und $\triangle\ AED$ aus $AD = s_a, DE' = \frac{h_b}{2}, \measuredangle AE'D = 90°$ zu konstruieren.
Man erhält daraus B und C auf folgende Weise: B liegt 1. auf der Geraden durch A und F' und 2. auf der Parallelen zur Geraden durch A und E' im Abstand h_c, die in derselben Halbebene liegt wie D.



C liegt 1. auf der Geraden durch A und E' und 2. auf der Parallelen zur Geraden durch A und F' im Abstand h_b, die in derselben Halbebene liegt wie D.
Nach Festlegung von B (C) auf die beschriebene Weise ergeben sich für C (B) auch folgende geometrische Örter: C (B) liegt 1. auf der Geraden durch A und E' (F') und 2. auf der Verlängerung von BD (CD) über D hinaus. Oder: C (B) liegt auf der Verlängerung von BD (CD) über D hinaus im Abstand BD (CD) $= \frac{a}{2}$ von D.

Konstruktionsbeschreibung:
Man legt $AD = s_a = 6$ cm fest und schlägt über AD nach beiden Seiten den Thaleskreis. Um D schlägt man mit $\frac{h_b}{2}$ in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, dessen Schnitt mit dem einen Thaleshalbkreis den Punkt E' liefert, und mit $\frac{h_c}{2}$ in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, dessen Schnitt mit dem anderen Thaleshalbkreis den Punkt F' ergibt.
Sodann zieht man zu AE' die Parallele im Abstand h_b in der Halbebene, in der D liegt. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch A und F' ist B. Ferner zieht man zu AF' die Parallele im Abstand h_c in der Halbebene, in der D liegt. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch A und E' ist C.

Man kann C (B) auch nach Konstruktion von B (C) erhalten, indem man BD (CD) über D hinaus bis zum Schnitt mit der Geraden durch A und E' (F') bzw. um sich selbst verlängert.

Diskussion:
Die Aufgabe ist (bis auf Symmetrie) eindeutig lösbar, wenn $\frac{h_c}{2} < s_a$ und $\frac{h_b}{2} < s_a$ ist. In diesem Fall ergeben die Kreisbögen um D je genau einen Schnittpunkt mit einem Thaleshalbkreis. Die weitere Konstruktion ist eindeutig.
Wenn dagegen $\frac{h_b}{2} \geq s_a$ oder $\frac{h_c}{2} \geq s_a$ ist, so existiert kein entsprechender Schnittpunkt mit dem Thaleshalbkreis und die Aufgabe ist unlösbar.

Im vorliegenden Fall ist die Aufgabe wegen $\frac{h_b}{2} = 2{,}5 < 6 = s_a$ und $\frac{h_c}{2} = 3{,}5 < 6 = s_a$ eindeutig lösbar.

Aufgabe 19/61
Ein schmiedeeiserner Rundstab von 4 m Länge und ein schmiedeeiserner Ring von 4 m Umfang sollen in je zehn gleich große Stücke zersägt werden. Ring und Stab sind gleich dick.
Bei welchem der beiden Werkstücke erfordert das Zersägen mehr Zeit?

Um den Ring in 10 Stücke zu zersägen, muss man 10 Schnitte führen. Beim Stab dagegen genügen 9 Schnitte, wie man sich leicht überlegt bzw. an einer Skizze verdeutlicht.
Bei sonst gleichen Bedingungen erfordert daher das Zersägen des Ringes mehr Zeit.

Aufgabe 20/61
Für das Kraftwerk Klingenberg in Berlin-Rummelsburg wurden zwei neue Schornsteine gebaut. Jeder von ihnen besteht aus einem Betonmantel, der die Form eines hohlen Kreiskegelstumpfs mit den folgenden Maßen hat:
Unterer lichter Durchmesser $d_u = 10{,}00$ m, oberer lichter Durchmesser $d_o = 7{,}50$ m, unterer äußerer Durchmesser $D_u = 11{,}20$ m, oberer äußerer Durchmesser $D_o = 7{,}80$ m, Höhe $H = 140{,}00$ m.
Dieser Mantel erhielt eine Auskleidung von Glaswolle, Kieselgur und Klinkersteinen.

a) Wieviel Kubikmeter Beton wurden für jeden der beiden Schornsteinmäntel benötigt?

b) Wie groß ist das Gewicht G jedes der beiden Schornsteinmäntel? Die Wichte γ des verwendeten Betons werde mit $\gamma = 2{,}4 \frac{Mp}{m^3}$ angenommen.

c) Welchen Druck übt der Schornsteinmantel auf das Fundament aus?

a) Man erhält das Mauerwerksvolumen als Differenz aus dem Gesamtvolumen des Bauwerkes und dem umbauten Hohlraum. Beides sind im vorliegenden Fall Kegelstümpfe Die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfs ist
$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$
wobei h die Höhe des Kegelstumpfs, r_1 und r_2 die Radien von Grund- und Deckkreis sind.
Für das Mauerwerksvolumen ergibt sich damit
$$V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) - \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$
mit $R_1 = \frac{D_u}{2} = 5{,}60$ m, $R_2 = \frac{D_o}{2} = 3{,}90$ m, $r_1 = \frac{d_u}{2} = 5{,}00$ m und $r_2 = \frac{d_o}{2} = 3{,}75 m$. Daraus erhält man $V \approx 1555$ m^3.

b) Das Gewicht eines Körpers ergibt sich wegen $G = V \cdot \gamma$ zu $G \approx 3732$ Mp.

c) Den Druck p errechnet man als Quotient aus der wirksamen Kraft (in unserem Fall das Gewicht G) und der Fläche, auf die die Kraft wirkt. Die Fläche F (der Grundriss des Schornsteinmantels) ist ein Kreisring mit dem äußeren Radius $R_a = 5{,}60$ m und den inneren Radius $R_i = 5{,}00$ m. Es wird $F \approx 20$ m^2, also für den Druck $p \approx 18{,}66 \frac{kp}{cm^2}$. Bei der Rechnung wird allerdings vorausgesetzt, dass sich die gesamte Last des Schornsteinmantels gleichmäßig auf den Querschnitt verteilt.

Aufgabe 21/61
Jörg kann "zaubern". Gestern kam Jörg mit einer Sensation in die Schule; er könne mathematisch zaubern! Wir waren natürlich alle sehr gespannt, wie er das wohl fertigbringen wolle, und gleich in der ersten Pause musste er mit der Zauberei beginnen.
Nachdem er mit dem Gesicht zur Wand gestellt worden war, damit er ja nicht sähe, was ich schrieb, forderte er mich auf, eine dreistellige Zahl zu wählen, deren Ziffer in der Hunderterstelle um 2 höher sein müsse als die Einerstelle; die Zehnerstelle könne eine beliebige Zahl sein.

Ich schrieb 5 1 3 und sollte nun die Zahl "umgedreht" daruntersetzen 3 1 5 und von der ersten abziehen, der Differenz 1 9 8 (die Jörg nicht kannte!) 1 2 hinzuzählen und die Summe 210 : 70 teilen; der Quotient 3 musste mit 12 multipliziert werden, was 36 ergab.
Jetzt glänzte Jörg noch mit dem neuesten Wissen, das wir seit der letzten Mathematikstunde hatten, und verlangte, aus dem Produkt die Quadratwurzel zu ziehen: $\sqrt{36} = 6$.

Damit war das Kunststück zu Ende. und er verkündete, dass wir 6 erhalten hätten.
Unser Erstaunen war groß! Er wurde bestürmt zu sagen, wie er das mache, und er möchte vor allem noch einmal seine Kunst unter Beweis stellen, was er auch gern tat.
Mir ließ die Sache den ganzen Tag keine Ruhe, und am Nachmittag setzte ich mich hin und grübelte so lange, bis ich die mathematische Gesetzmäßigkeit entdeckt und algebraisch bewiesen hatte, die Jörg dieses "Rechenkunststück" ermöglichte.
Wie muss man das wohl anstellen? Unsere Aufgabe lautet also:

Man schreibe eine beliebige dreistellige Zahl, deren Hunderterstelle um zwei größer ist als die Einerstelle. Von ihr subtrahiere man die Zahl, die man erhält, wenn man in der ursprünglichen Zahl die Reihenfolge der Ziffern umkehrt. Zum Ergebnis addiere man 12; der Reihe nach sind dann mit den jeweiligen Ergebnissen folgende weitere Rechenoperationen auszuführen: Division durch 70; Multiplikation mit 12 und man ziehe die Wurzel! Das Ergebnis ist 6.

1. Wie ist es möglich, dass bei einer beliebigen Zahl als Ausgangsgröße das Ergebnis der Rechenoperationen vorausgesagt werden kann?

2. Ist eine allgemeine Lösung möglich, bei der die Hunderterstelle um n größer ist als die Einerstelle? ($n = 1, 2, ..., 9$)

1. Ist $a = 100x + 10y + z$ die beliebige dreistellige Zahl, so gilt nach der in der Aufgaben gestellten Bedingung $x = z + 2$, also $a = 100(z + 2) + 10y + z = 100z + 200 + 10y + z$.

Für die Zahl mit vertauschter Ziffernfolge gilt dann: $b = 100z + 10y + x = 100z + y + z + 2$. Subtrahiert man b von a, so folgt: $a - b = 198$. Man sieht, dass durch die Subtraktion die Ziffern der Zahl a sämtlich aus der Rechnung herausfallen und das Ergebnis unabhängig von der Wahl der Zahl a den Wert 198 ergibt. Die weiteren Rechnungen dienen nur zur Verschleierung dieses Sachverhalts.
2. Allgemein gilt, wenn $x = z + n$ mit $n = 1, 2, ..., 9$ ist

$$a - b = 100z + 100n + 10y + z - (100z + 10y + z + n) = 100n - n = 99n$$

Das Ergebnis $99n$ schließt natürlich den speziellen Fall 1 ($n = 2, 99n = 198$) ein. Auf dieser Grundlage lässt sich ein mathematisches "Zauberkunststück" ohne große Gedächtnisleistung aufbauen.

Lösung von Ernst Hennig:

Die Einerziffer sei x, die Zehnerziffer y, die Hunderterziffer ist dann $x + n$ mit $n = 1, 2, 3, ..., (9 - x)$. Die Zahl heißt damit

$$100(x + n) + 10y + x$$

die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge $100x + 10y + (x + n)$. Die Differenz der beiden Zahlen ist $D = 100n - n = 99n$.
Diese Differenz hat also einen konstanten, von der Ziffernwahl unabhängigen Wert $99n$, der nur von dem Betrag n abhängt.
Von hier ab kann Jörg zwei Wege wählen. Der einfachere ist folgender:

1. Jörg lässt zu der von ihm nicht genannten Differenz die Zahl $10 + n$ addieren (also $11, 12, 13, ...$). Es ergibt sich

$$99n + 10 + n = 100n + 10 = 10(10n + 1)$$

das ergibt 110, 210, 310, ... Diese Zahl lässt er durch $10n+1$ teilen, d.h. durch 11, 21, 31, ... Das Ergebnis ist immer 10.

2. Etwas schwieriger für den mathematischen Zauberkünstler ist der zweite Weg, der die volle Verallgemeinerung des Zahlenspiels darstellt (sie hat: aber nur für $n \geq 2$ einen Sinn).

1. Forderung: Zu der Differenz D die Zahl $100(n-2)+10(n-1)+n$ addieren (also 012,123, 234, ...). Ergebnis: $210(n-1)$.
2. Forderung: Das Ergebnis durch 70 dividieren! Resultat: $3(n|1)$, d.h. 3, 6, 9, ...
3. Forderung: Das letzte Resultat mit $12(n-1)$ multiplizieren! Es entsteht die Zahl $36(n-1)^2$.
4. Forderung: Aus dem letzten Ergebnis ist noch die Quadratwurzel zu ziehen! Schlußergebnis: $6(n-1)$, d.h.; 6, 12, 18, ...

Aufgabe 22/61
Der Trog eines Schiffhebewerkes wiegt im leeren Zustand a Mp, die Wasserfüllung wiegt b Mp. Zum Ausgleich sind Gegenmassen mit einem Gesamtgewicht $(a+b)$ Mp angebracht.
Wie groß ist Übergewicht des Troges samt Inhalt, wenn sich ein Schiff mit einem Gewicht (einschließlich Ladung) von c Mp im Trog befindet?

Das Übergewicht ist Null!
Nach dem archimedischen Prinzip verdrängt nämlich ein schwimmender Körper eine Flüssigkeitsmenge mit dem gleichen Gewicht wie sein eigenes. Beim Einfahren des Schiffes in den Trog sind also c Mp Wasser ausgeflossen und das Gewicht des Troges samt Inhalt ist damit unverändert geblieben.

Aufgabe 23/61
Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen während der Zeit von 8^h bis 16^h die Wagenzüge in beiden Richtungen in 10-min-Folge verkehren. Die ersten Züge dieser Betriebszeit verlassen 8^h die beiden Endhaltestellen. Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit (einschließlich der Haltezeiten) beträgt $18\frac{km}{h}$. Das Fahrpersonal soll an den Endhaltestellen eine Pause von mindestens 10 und höchstens 20 min haben.

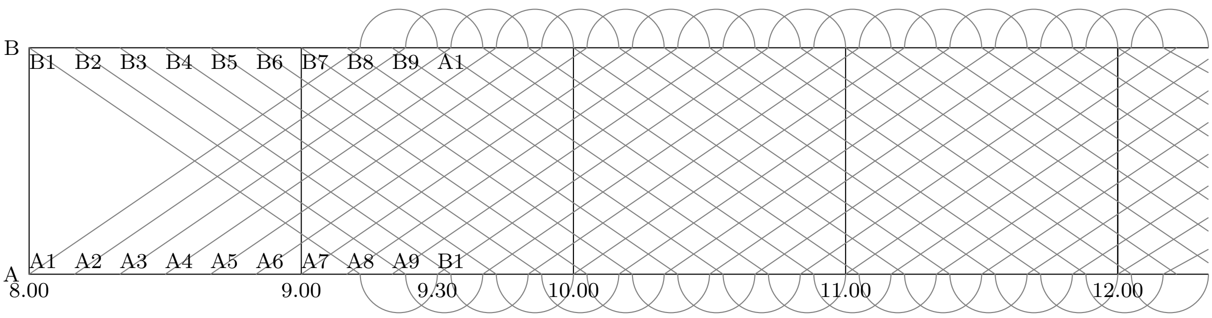
1. Wann verlässt der erste von Endhaltestelle A abfahrende Wagenzug diese Endhaltestelle zum zweitenmal?
2. Wieviel Wagenzüge müssen auf dieser Strecke in der Betriebszeit von 8^h bis 16^h eingesetzt werden? Dabei sollen Züge, die aus dem Berufsverkehr vor 8^h noch auf der Strecke sind und aussetzen, sowie Züge, die für den 16^h beginnenden Berufsverkehr bereits vorher zusätzlich auf die Strecke gehen, nicht mitgerechnet werden.
3. In welchen Zeitabständen begegnen sich die Wagenzüge?

1. Aus der Formel $s=v\cdot t$ (in der mit s der Weg, mit v die Geschwindigkeit und mit t die Zeit bezeichnet wird) folgt $t=\frac{s}{v}$. In unserem Fall sind $s=22{,}5$ km und $v=18\frac{km}{h}$.
Also gilt $t=\frac{22{,}5}{28}$ h $=1$ h 15 min.
Der erste Wagenzug ist demnach 9^h15^{min} an der Endhaltestelle B. Wegen der vorgeschriebenen Pause verlässt er diese 9^h30^{min}. Da für die Rückfahrt gleiche Bedingungen gelten, tritt er von der Endhaltestelle A aus seine zweite Fahrt 11^h00^{min} an.

2. Der erste von A abfahrende Wagenzug beginnt die Rückfahrt von B aus 90 min nach seiner Abfahrt. In dieser Zeit sind sowohl von A aus als auch von B aus je neun Züge auf die Strecke gegangen, insgesamt also 18 Züge.

3. Die Zeitabstände betragen 5 min. Das Ergebnis kann man aus mehreren Überlegungen erhalten, z.B. aus folgender:
Wir betrachten die Begegnungen eines Wagenzuges a, der von A nach B fährt, mit zwei aufeinander folgenden Wagenzügen b_1 und b_2, die von B nach A fahren. Im Zeitpunkt der Begegnung von a und b_l befindet sich b_2 in einem Fahrabstand von 10 min vom Treffpunkt von a und b_1.
Da a und b_2 die gleiche Geschwindigkeit haben, muss jeder dieser beiden Wagenzüge bis zu ihrem Treffpunkt die Hälfte der Strecke zurücklegen, die diesem Fahrabstand entspricht. Dazu sind aber 5 min erforderlich.

Lösung von Walter Rulff:



Graphische Lösung:
Wir stellen die Fahrt der Straßenbahnzüge in einem rechtwinkligen Zeit-Weg-Diagramm (graphischer Fahrplan - Abbildung) dar. Aus der Angabe der Geschwindigkeit $v = 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ folgt, dass sich jeder Wagenzug eine Stunde nach Abfahrt in der Entfernung 18 km vom Abfahrtsort befindet. Damit sind die Weg-Zeit-Kurven festgelegt (wenigstens näherungsweise, da die Haltezeiten und Schwankungen der Geschwindigkeit unberücksichtigt bleiben).
Aus dem Diagramm kann man die Ergebnisse unmittelbar ablesen.

Aufgabe 24/61
Beweis für die Behauptung, dass weniger mehr ist: Es ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Durch Logarithmieren ergibt sich daraus

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^n > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Nach einem Logarithmengesetz ist $\lg a^m = m \cdot \lg a$; also folgt

$$n \cdot \lg\frac{1}{2} > (n+1) \cdot \lg\frac{1}{2}$$

Dividiert man beide Seiten der Ungleichung durch $\lg\frac{1}{2}$, so erhält man $n > n+1$. Wo steckt der Fehler?

Der Fehler ist im letzten Schritt enthalten, in der Division durch $\lg\frac{1}{2}$. Bekanntlich ist der Logarithmus einer Zahl, die kleiner ist als 1, eine negative Zahl. Man kann jedoch Ungleichungen nicht wie Gleichungen behandeln, sondern vor allem beim Rechnen mit negativen Zahlen ist bei Ungleichungen Vorsicht am Platz.
Multipliziert oder dividiert man beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, so muss man das Ungleichheitszeichen umkehren. Es folgt dann aus

$$n \cdot \lg\frac{1}{2} > (n+1) \cdot \lg\frac{1}{2}$$

durch die Division richtig $n < n+1$.

Aufgabe 25/61
Ein Schüler kürzt den Bruch $\frac{16}{64}$ fälschlicherweise, indem er in Zähler und Nenner jeweils die Ziffer 6 streicht. Er erhält damit das richtige Ergebnis $\frac{1}{4}$.
Es ist festzustellen, für welche Brüche mit zweiziffrigem Zähler und zweiziffrigem Nenner dieses fehlerhafte Verfahren ebenfalls zum richtigen Ergebnis führt.

Bedingung für die Durchführbarkeit des Verfahrens ist, dass die letzte Stelle des Zählers mit der ersten Stelle des Nenners übereinstimmt. Man kann daher die Brüche allgemein in folgender Form schreiben:

$$\frac{10x+y}{10y+z}$$

Streicht man im Zähler die letzte und im Nenner die erste Stelle, so erhält man daraus den Bruch $\frac{x}{z}$.
Beide Brüche sollen einander gleich sein: $\frac{10x+y}{10y+z} = \frac{x}{z}$.
Dies ist eine Gleichung in drei Unbekannten, für die nur ganzzahlige Lösungen zwischen 1 und 9 (beide Werte einschließlich) in Frage kommen. Es handelt sich also um ein diophantisches Problem. Zur Lösung geht man folgendermaßen vor: Man fasst die Gleichung als Proportion auf und formt sie zur Produktgleichung um: $(10x + y)z = (10y + z)x \to 9xz = (10x - z)y$.

Die linke Seite der Gleichung ist durch 9 teilbar, also muss auch die rechte Seite durch 9 teilbar sein. Das ist sicher dann der Fall. wenn entweder y oder $10x - z$ durch 9 teilbar sind, ferner dann, wenn y und $10x - z$ beide durch 3 teilbar sind. Damit kommen aber für y zunächst die Werte 3; 6; 9 in Frage: den Fall, dass $10x - z$ durch 9 teilbar ist, behandeln wir anschließend.

Aus $y = 3$ folgt $9xz = 3(10x - z) \to z = \frac{10}{3+\frac{1}{x}}$. Die Gleichung liefert nur für $x = 3$ ein ganzzahliges $z = 3$.
Es wäre demnach $\frac{33}{33}$ ein Bruch, der der gestellten Bedingung genügt.
Wir wollen aber Fälle mit $x = y = z$ als trivial ansehen und nur solche Lösungen gelten lassen, für die mindestens $x \neq y$ oder $y \neq z$ gilt.
Setzt man $y = 6$, so ergibt sich $z = \frac{20}{3+\frac{2}{x}}$.
Für $x = 1$ erhält man daraus $z = 4$, für $x = 2$ ergibt sich $z = 5$. Weitere ganzzahlige Lösungen hat diese Gleichung nicht. Damit sind zwei Lösungen ermittelt

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

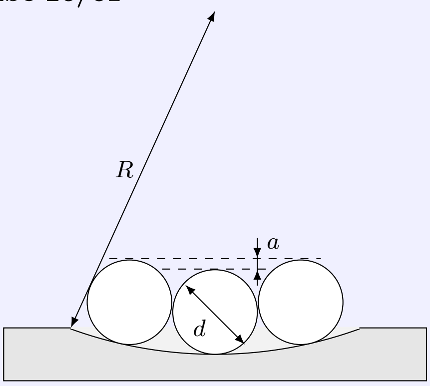
Aus $y = 9$ wird $z = \frac{10}{1+\frac{1}{x}}$ mit den Lösungen $x = 1, z = 5$ und $x = 4, z = 8$ und

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5} \qquad \text{und} \qquad \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$$

Es bleibt noch der Fall, dass $10x-z$ durch 9 teilbar ist. Für $10x-z$ kommen dann nur die Werte 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 in Frage; man sieht dass in jedem Fall $x = z$ ist. Aus der Gleichung $9xz = (10x-z)y$ folgt sofort $x = y$ und somit nur triviale Lösungen.
Es gibt genau 4 Brüche der gesuchten Art:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \frac{26}{65} = \frac{2}{5} \qquad \text{und} \qquad \frac{19}{95} = \frac{1}{5} \qquad \text{und} \qquad \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 26/61



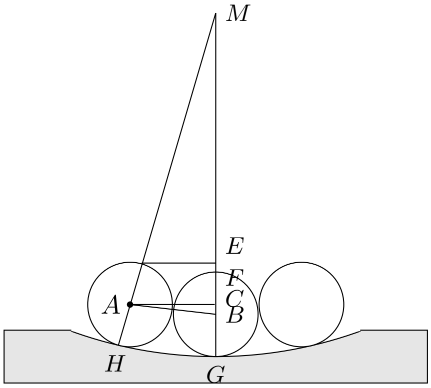
Der geometrische Mittelpunkt der kreiszylinderförmigen Ausfräsung (Abbildung) sei nicht bekannt. Zur Ermittlung des Durchmessers $D = 2R$ werden in die Ausfräsung genau geschliffene Bolzen mit dem Durchmesser $d = 2r = 30$ mm gelegt und a zu $a = 12$ mm bestimmt.
Welchen Durchmesser D hat die Ausfräsung?

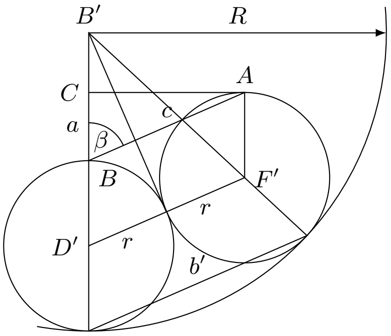
Es sei M der unbekannte Mittelpunkt. Dann gilt $R = GM = HM = BM + r = AM + r$. Ferner ist $BC = EF = a, AB = d$, folglich $(AC)^2 = d^2 - a^2$.
Da $\measuredangle ACM = 90°$ ist, folgt $CM^2 + AC^2 = AM^2$ und wegen $AM = BM$ und $CM = BM - a$

$$(BM - a)^2 + d^2 - a^2 = BM^2 \to$$

$$-2BM \cdot a + d^2 = 0 \to BM = \frac{d^2}{2a}$$

Damit erhält man $R = \frac{d^2}{2a} + r$ bzw. $D = \frac{d^2}{a} + d$. Setzt man die gegebenen Werte ein, so ergibt sich $D = 105$ mm.





Lösung von W. Koch:

a) Berechnung des Winkels β: $\cos\beta = \frac{a}{d}$, da $ABD'F'$ ein Parallelogramm ist, gilt $c = d$.

b) Berechnung von b': $b' = R \cdot \cos\beta = R \cdot \frac{a}{d}$

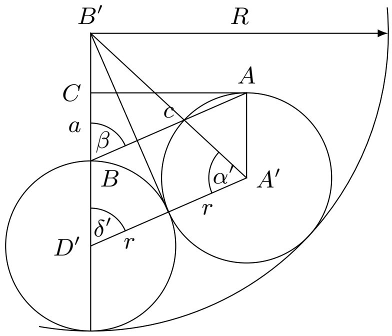
c) Berechnung von R: $R : b' = (R - r) : r$ und $R : \frac{Ra}{d} = (R - r) : R$
Wegen $d = 2r$ erhält man daraus $R : \frac{Ra}{2r} = (Rr) : r$. Löst man diese Gleichung nach R auf, so ergibt sich $R = r + \frac{2r^2}{a}$.

2. Lösung von W. Koch:

a) Berechnung des Winkels β: $\cos\beta = \frac{a}{d}$, da $ABD'F'$ ein Parallelogramm ist, gilt $c = d$.

b) Berechnung des Winkels α':
Es ist $\beta = \delta'$ (Stufenwinkel an geschnittenen Paralellen) und $\delta' = \alpha'$ (wegen $B'D' = B'A'$, $A'B'D'$ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze bei B'). Daraus folgt $\alpha' = \beta$.

c) Berechnung von $d' = B'D'$: $(R-2r) : (R-r) = b' : r$ ergibt $\frac{1}{R-r} = \frac{a}{2r^2}$. Löst man diese Gleichung nach R auf, so ergibt sich $R = r + \frac{2r^2}{a}$.



Aufgabe 27/61
Auf einer Feier stößt jeder Anwesende mit jedem anderen an; die Gläser erklingen 120 mal. Als es zum Tanzen geht, sagt jemand: "Wenn jeder Herr mit jeder Dame tanzt, so können wir insgesamt 60 verschiedene Paare bilden."
Wie viele Damen und wie viele Herren waren anwesend? Die Herren war in der Überzahl.

Jede der anwesenden Personen stößt mit $(n-1)$ anderen Personen an. Das wären $n \cdot (n-1)$ "Anstöße"; dabei ist aber jedes Anstoßen doppelt gezählt. Die Gläser erklingen daher $\frac{n}{2}(n-1)$ mal.
Die quadratische Gleichung $\frac{n}{2}(n-1) = 120 \to n^2 - n - 240 = 0$ hat die Lösungen $n_1 = 16$ und $n_2 = -15$.
Die negative Lösung scheidet aus, so dass also 16 Personen anwesend waren.
Es seien nun d Damen und h Herren anwesend. Dann gilt, da jeder Herr mit jeder Dame tanzen soll, das Gleichungssystem $s + h = 16$; $\quad d \cdot h = 60$ mit den Lösungen $h_1 = 10, d_1 = 6$ und $h_2 = 6, d_2 = 10$. Da mehr Herren als Damen anwesend sind, sind also 10 Herren und 6 Damen bei der Feier.

Lösung von B. Vetters:

(Teillösung unter Vermeidung des Lösungsverfahrens für Gleichungen zweiten Grades)

Die Zahl der anwesenden Personen kann auch ohne Lösung einer Gleichung zweiten Grades ermittelt werden. Die Gleichung

$$z(z-1) = 240$$

bedeutet, dass das Produkt zweier benachbarter ganzer Zahlen gleich 240 ist. Man bilde also alle möglichen Produkte aus ganzen Zahlen, die den Wert 240 haben: $2 \cdot 120$, $3 \cdot 80$, $4 \cdot 60$, $5 \cdot 48$, $6 \cdot 40$ usw., wobei man feststellt, dass sich die Differenz der Werte der beiden Faktoren immer mehr der Null nähert. Schließlich kommt man zu dem Paar, dessen Differenz gleich 1 ist, nämlich zu $15 \cdot 16 = 240$.
Also ist z = 16.

Man kann an den Gedanken zwei weitere Überlegungen anschließen:
1. Es ist nicht notwendig, dass man alle Produkte mit dem Wert 240 ausprobiert. Aus der Gleichung erkennt man, dass der Wert für z nur wenig von $\sqrt{240}$ differieren kann. Er muss also in der Nähe von 15 liegen.
2. Das Verfahren lässt sich — etwas abgewandelt — auch auf den zweiten Teil der Aufgabe anwenden. Hier gilt

$$x(16-x) = 60 \qquad \text{und} \qquad x > 16 - x$$

Die Ungleichung führt auf $2x > 16$ oder $x > 8$. Also kommen für die Lösung nur die folgenden Werte in Frage:

$$x = 10, \quad 16-x=6, \qquad x=12, \quad 16-x=4, \qquad x=15, \quad 16-x=1$$

Die rechte Spalte ermöglicht sofort die Auswahl von $x = 10$, $16 - x = y = 6$ als einzige Lösung.

Lösung von J. Schell:

(Hilfsmittel: Kombinatorik): Da jeder mit jedem anstoßen soll, ist die Anzahl der Kombinationen von je 2 aus der unbekannten Personenzahl x zu ermitteln.
Aus n Elementen kann man k Elemente auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Weisen auswählen. Es ist also

$$\binom{x}{2} = 120 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 120$$

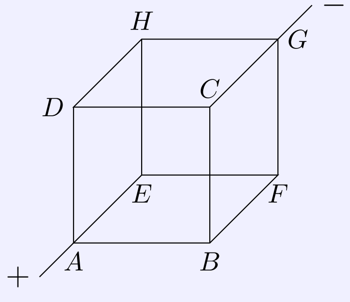
also $sx^2 - x = 240$ Daraus folgt $x_1 = +16$, $x_2 = -15$.
Die Anzahl der anwesenden Personen ist 16, da $x_2 = -15$ als negative Lösung keinen Sinn ergibt und daher als unbrauchbar auszuscheiden ist.

Nun sollen 60 Tanzpaare gebildet werden. Es seien x Herren (und demnach $16 - x$ Damen) anwesend, und es ist $x > 16 - x$.
16 Personen kann man auf $\binom{16}{2}$ verschiedene Weisen zu Paaren gruppieren. Von dieser Zahl ist aber sowohl die Zahl der nur aus Herren bestehenden Paare als auch die Zahl der nur aus Damen bestehenden Paare zu subtrahieren. Die erste ist $\binom{x}{2}$, die zweite $\binom{16-x}{2}$. Also gilt

$$\binom{16}{2} - \binom{x}{2} - \binom{16-x}{2} = 60$$
$$\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{(16-x)(15-x)}{1 \cdot 2} = 60$$
$$x^2 - 16x + 60 = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $x_1 = 10$, $x_2 = 6$. Wegen $x > 16 - x$ scheidet der Wert $x_2 = 6$ als unbrauchbar aus.
Daraus folgt, dass 10 Herren und 6 Damen anwesend sind.

Aufgabe 28/61



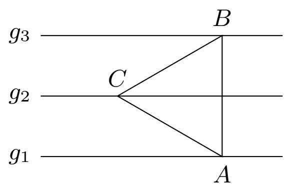
Das Kantenmodell eines Würfels besteht aus zwölf Kupferdrähten gleicher Dicke. Diese haben also alle den gleichen Ohmschen Widerstand R. An den Ecken A und G werde eine Spannung U angelegt.
Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_g des Kantenmodells?

Man überlegt sich, dass unter den gegeben Bedingungen die Punkte B, D und E gleiches Potential haben; ebenso haben die Punkte C, F und H gleiches Potential. Man könnte also B, D und E sowie C, F und H untereinander leitend verbinden; die Verbindungen würden stromlos bleiben.
Demnach kann man den Stromweg in drei Abschnitte einteilen:
1.Abschnitt: A bis (B,D,E);
2.Abschnitt: (B,D,E) bis (C,F,H);
3.Abschnitt: (C,F,H) bis G.
Der 1.Abschnitt setzt sich aus den parallel geschalteten Leiterstücken AB, AD und AE zusammen; sein Widerstand R_1 berechnet sich nach den Kirchhoffschen Verzweigungsgesetz zu

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \to R_1 = \frac{R}{3}$$

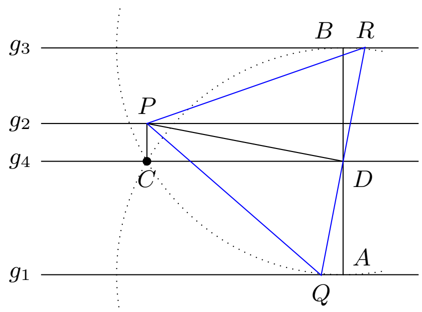
Genau so berechnet man den Widerstand R_3 des 3.Abschnitts: $R_3 = \frac{R}{3}$.
Der 2.Abschnitt besteht aus den parallel geschalteten Leiterstücken BC, BF, DC, DH, EF und EH. Es gilt also $R_2 = \frac{R}{6}$.
Da für den Gesamtwiderstand R_g gilt: $R_g = R_1 + R_2 + R - 3$ folgt $R_g = \frac{5}{6}R$.

Aufgabe 29/61
Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Endpunkte je auf einer der gegebenen Geraden liegen.



Analysis: Die allgemeine Lösung findet man, indem man von einem leicht lösbaren Spezialfall ausgeht: Es werde zunächst angenommen, der Abstand der gegebenen Parallelen g_1 und g_2 sei gleich dem Abstand der Parallelen g_2 und g_3. Dann liegt das gesuchte Dreieck ABC symmetrisch zu g_2 (erste Abbildung), die Länge der Dreieckseite $AB = BC = CA$ ist gleich dem Abstand der Parallelen g_l und g_3, das Dreieck ABC ist ohne weiteres konstruierbar.

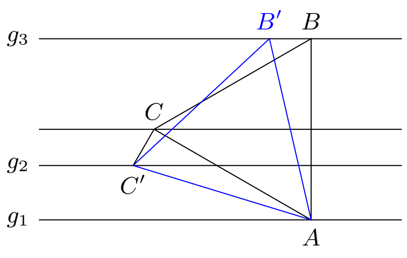
Betrachtet man nun die Analysisfigur der zweiten Abbildung. so erkennt man: Ist PD die Höhe im Dreieck PQR, so ist $\measuredangle PDC = \measuredangle BDR$, da die Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen. Da ferner $\measuredangle CDB = \measuredangle PDR = 90°$ ist, ist das Dreieck CDP ähnlich dem Dreieck BDR. Folglich gilt $PD : RD = CD : BD$. Wegen $CD : BD = \sqrt{3} : 1$ gilt dann aber auch $PD : RD = \sqrt{3} : 1$.



Konstruktionsbeschreibung: Man konstruiert die Mittelparallele g_4 zu g_1 und g_3 und errichtet in einem beliebigen Punkt D von g_4 die Senkrechte, die g_1 im Punkt A und g_3 im Punkt B schneidet. Sodann schlägt man um A und B zwei Kreisbögen mit AB als Radius, die sich in C auf g_4 schneiden.
In C errichtet man die Senkrechte auf g_4, sie schneidet g_2 in P. Man verbindet P mit D und errichtet in D auf PD die Senkrechte. Deren Schnitt mit g_1 sei Q, mit g_3 sei R. Das Dreieck PQR ist das gesuchte.

Determination: Da die Kreisbögen um A und B einander in zwei Punkten C und C' schneiden, ist das gesuchte Dreieck PQR nur bis auf Symmetrie bestimmt. Alle anderen Konstruktionen sind stets und eindeutig ausführbar.

Lösung von Willi Dörfler:



Wir gehen von dem Spezialfall aus, dass die Parallelen zwei gleiche Abstände haben. Die weitere Konstruktion verläuft folgendermaßen (Abbildung):

In C wird auf AC die Senkrechte errichtet. Ihr Schnitt mit g_2, sei C'. Von B aus trägt man auf g_3 die Strecke $CC' = BB'$ so ab, dass $\triangle ABB'$ und $\triangle ACC'$ gleichen Umlaufsinn haben.

Dann ist $AB = AC$ (nach Konstruktion; $\triangle ABC$ ist gleichseitig), $\angle ABB' = \angle ACC'$ (nach Konstruktion rechte Winkel) und $CC' = BB'$ (nach Konstruktion).
Also ist $\triangle ABB' \cong \triangle ACC'$. Daraus folgt $AB' = AC'$, $\angle CAC' = \angle BAB'$, also auch $\angle C'AB' = \angle CAB = 60°$ (nach Konstruktion).
Im Dreieck $AB'C'$ sind demnach zwei Seiten einander gleich, und der von ihnen eingeschlossene Winkel beträgt 60°. Folglich ist das Dreieck gleichseitig.

Aufgabe 30/61
Fünf Hausfrauen wollen Schrippen kaufen. Als der Bäcker die vorrätigen gezählt hatte, erlaubt er sich einen Scherz: "Wenn jede von Ihnen die Hälfte der jeweils vorhandenen Schrippen und eine halbe dazu kauft, bleibt keine übrig!" Wieviel Schrippen hatte der Bäcker, und wieviel hätten nach diesem Vorschlag die einzelnen Kundinnen erhalten?

Es sei x_n die Anzahl der Schrippen, die vorhanden sind, ehe die n-te Kundin gekauft hat. Die n-te Kundin erhält dann

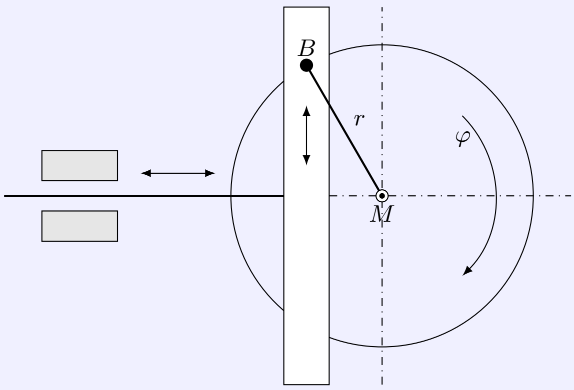
$$y_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x_n + 1}{2}$$

Schrippen. Die Differenz $x_n - y_n$ ist die Anzahl Schrippen, die nach dem Kauf der n-ten Kundin, also vor dem Kauf der $(n+1)$-ten Käuferin vorhanden sind:

$$x_{n+1} = x_n - y_n = x_n - \frac{x_n + 1}{2} = \frac{x_n - 1}{2}$$

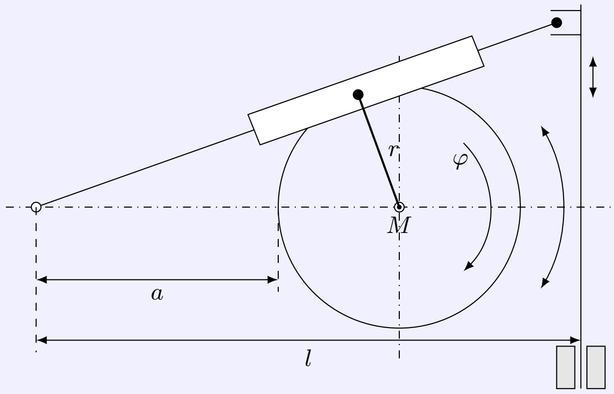
Da nach der fünften Käuferin keine Schrippen mehr vorhanden sind, gilt $x_6 = 0$, also $\frac{x_5 - 1}{2} = 0$, mithin $x_5 = 1$ und $y_5 = 1$. Rückwärts die Ergebnisse einsetzen, ergibt $x_4 = 3; x_3 = 7; x_2 = 15; x_1 = 31$ und $y_4 = 2; y_3 = 4; y_2 = 8; y_1 = 16$.
Es waren also anfangs 31 Schrippen vorhanden. Die erste Kundin erhält 16, die zweite 8, die dritte 4, die vierte 2 und die fünfte 1 Schrippe. "Halbe" Schrippen tauchen im Ergebnis nicht auf!

Aufgabe 31/61
Zur Umsetzung von Drehbewegungen in geradlinige Bewegungen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Bei Werkzeugmaschinen werden häufig die Kreuzschleife (Konstruktionsprinzip siehe erste Abbildung) und die schwingende Kurbelschleife (Konstruktionsprinzip siehe zweite Abbildung angewendet.
Der Radius r der Drehbewegung ist der Abstand vom Drehpunkt M zum Mittelpunkt des Bolzens B.



a) Es ist die Auslenkung s des schwingenden Maschinenteils (Werkzeug oder Werkstück) in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ anzugeben und die Funktion $s = f(\varphi)$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem mit $r = 1, a = 0{,}5$ und $l = 3$ darzustellen. Welcher wesentliche Unterschied besteht hinsichtlich der Bewegung des schwingenden Maschinenteils zwischen den beiden Antriebsarten?

b) Für die Kreuzschleife sind die Geschwindigkeit $v = v(t)$ und die Beschleunigung $b = b(t)$ des schwingenden Maschinenteils zu ermitteln; die Winkelgeschwindigkeit ω sei konstant: $\omega = \frac{\varphi}{t} =$ konstant.

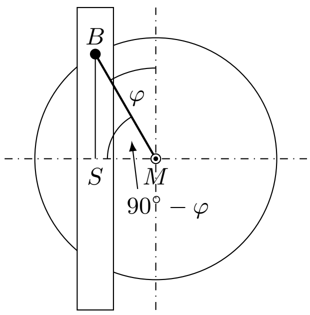


c) Wie groß ist der absolute Extremwert der Beschleunigung bei der Kreuzschleife? Welchen Durchmesser d muss der Bolzen B mindestens haben, wenn τ die Scherfestigkeit des Bolzenwerkstoffs und m die Masse des schwingenden Maschinenteils ist?

Es gilt $\tau = \frac{P}{F}$, wobei F der Querschnitt des Materials und P die zum Abscheren (gegenseitiges Verschieben zweier "benachbarter" Querschnitte) erforderliche Kraft ist. Die Reibung werde vernachlässigt.

d) Für die schwingende Kurbelschleife ist aus der graphischen Darstellung der Weg-Zeit-Funktion der annähernde Verlauf der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion und der Beschleunigung-Zeit-Funktion abzulesen und graphisch darzustellen. Auch dabei gelte $\omega = \frac{\varphi}{t}$ = konstant.

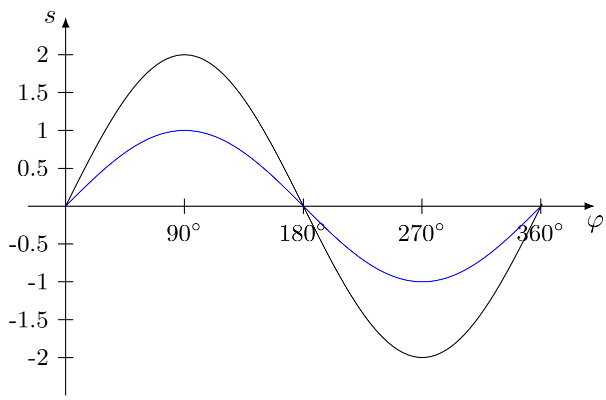
e) Für welche Arten von Maschinen kommen diese beiden Antriebsarten auf Grund ihrer Eigenschaften vorwiegend in Frage?



a) Kreuzschleife: Es ist (siehe Abbildung) $s = MS$. Bezeichnet man als Drehwinkel φ den Winkel, den die Kurbel $MB = r$ bei Drehung im Uhrzeigersinn von MO aus überstreicht, so gilt

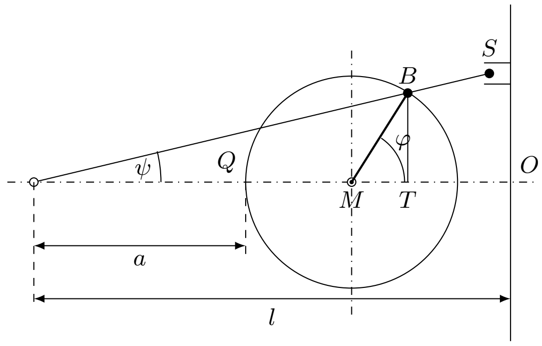
$$\frac{MS}{r} = \frac{s}{r} = \cos(90° - \varphi)$$

Wegen $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$ ergibt sich daraus $\frac{s}{r} = \sin\varphi$ und damit $s = r \sin\varphi$.
Grafische Darstellung für $r = 2$ und $r = 1$:

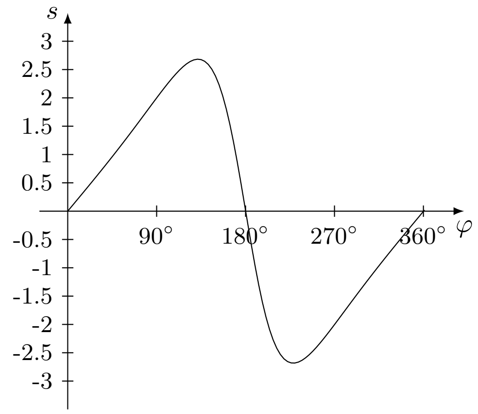


Schwingende Kurbelschleife: Bezeichnet man als Drehwinkel φ den Winkel, den die Kurbel $MB = r$ bei Drehung im Uhrzeigersinn von MO aus überstreicht (Abbildung), und als Schwingungswinkel ψ den Winkel zwischen PS und PO (ebenfalls im Uhrzeigersinn gemessen), so ergibt sich $\frac{OS}{PO} = \frac{s}{l} = \tan\psi$ also $s = l\tan\psi$. Nun gilt aber

$$\tan\psi = \frac{TB}{PT} = \frac{TB}{PQ + QM + MT} = \frac{TB}{a + r + MT}$$



Damit hat man die gesuchte Funktion gefunden: $s = l \cdot \frac{\sin\varphi}{\frac{a}{r}+1+\cos\varphi}$



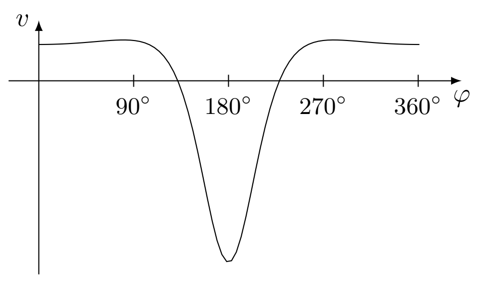
grafische Darstellung für $r = 1, a = 0{,}5, l = 3$ Bei der Kreuzschleife schwingt der Maschinenteil harmonisch, bei der schwingenden Kurbelschleife dagegen nicht. Bei der Kreuzschleife dauern Vor- und Rücklauf gleich lang, bei der schwingenden Kurbelschleife geht der Vorlauf langsam, der Rücklauf dagegen schnell vor sich.

b) Die Geschwindigkeit $v = v(t)$ erhält man durch Differentiation des Weges nach der Zeit:

$$v = v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{dt} = \frac{d(r\sin(\omega t)}{dt}$$

Nach der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{d(r\sin(\omega t)}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\omega t}{dt} = \omega r\cos(\omega t) = \omega r\cos\varphi$$



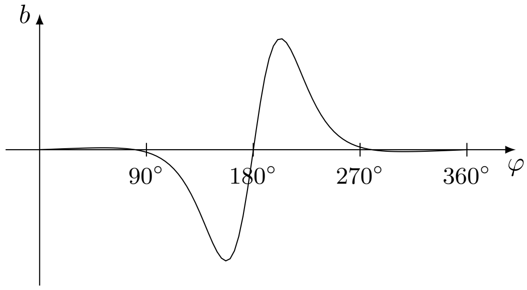
Die Beschleunigung $b = b(t)$ ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Ebenfalls nach der Kettenregel wird $b = -\omega^2 r\sin(\omega t) = -\omega^2 r\sin\varphi$.

c) Extremwerte von $b = b(t)$ liegen an den Nullstellen der ersten Abteilung von b, an denen die zweite Ableitung von Null verschieden ist: $\frac{db(t)}{dt} = -\omega^3 r\cos(\omega t) = -\omega^3 r\cos\varphi$.
Aus $-\omega^3 r\cos\varphi = 0$ folgt $\cos\varphi = 0$. Das ist für $\varphi = 90° + k \cdot 180°, k = 0; 1; 2; 3; ...$ der Fall.
Nun ist $\frac{d^2b(t)}{dt} = \omega^4 r\sin\varphi$.
Für $\varphi = 90° + (2k+1) \cdot 180°, k = 0; 1; 2; 3; ...$ ist $\sin\varphi = -1$, also liegen Maximalwerte vor. Für

$\varphi = 90° + 2k) \cdot 180°, k = 0; 1; 2; 3; ...$ sind es Minimalwerte. In jedem Fall folgt allerdings $|b_{extrem}| = \omega^2 r$.
Nun folgt aus dem Grundgesetz der Dynamik $P = mb$ für die Extremwerte von b: $|P_{extrem}| = m|b_{extrem}| = m\omega^2 r$.
Weiter ist bei Bruch des Bolzens $P = \tau F$. Setzt man $P > |P_{extrem}|$, so folgt $\tau F > m\omega^2 r$, mithin wegen $F = \frac{d^2}{4}\pi$ auch $\frac{d^2}{4}\pi\tau > m\omega^2 r$.
Daraus errechnet man schließlich den Durchmesser d zu

$$d \geq 2\omega\sqrt{\frac{mr}{\pi\tau}}$$

d) Im Bereich $0° \leq \varphi \leq 105°$ steigt die Weg-Zeit-Funktion fast geradlinig an, die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ist daher in diesem Intervall annähernd konstant, größer als Null. Von $\varphi \approx 105°$ bis $\varphi \approx 133°$ geht die Geschwindigkeit auf Null zurück (Maximum des Weges), sie wird von $\varphi \approx 133°$ bis $\varphi \approx 227°$ negativ, wobei sie ihren kleinsten Wert offenbar zwischen $\varphi \approx 165°$ und $\varphi \approx 195°$ hat; in diesem Intervall ist sie konstant, ihr absoluter Betrag etwa das Fünffache des Wertes zwischen 0° und 105°.
Von $\varphi \approx 227°$ an wird die Geschwindigkeit wieder positiv, von $\varphi \approx 255°$ bleibt sie wieder annähernd konstant von gleicher Größe wie zwischen 0° und 105°. Der Kurvenverlauf der Geschwindigkeit v wird demnach ungefähr dem der vorhergehenden Abbildung entsprechen.



Der Kurvenverlauf der Beschleunigung ist in der oberen Abbildung zu sehen.

e) Kreuzschleifen wird man vorwiegend bei solchen Maschinen verwenden, bei denen sowohl der Vorhub als auch der Rückhub Arbeitshübe sind (z.B. Maschinenfeilen und Maschinensägen).
Schwingende Kurbelschleifen werden dagegen hauptsächlich in solchen Maschinen verwendet, die nur im Vorhub Arbeit vollbringen, im Rückhub aber leer laufen (z.B. Langhobelmaschinen). Durch den schnelleren Rückhub wird die Zeit des Leerlaufs verkürzt und dadurch die Maschine besser ausgenutzt. Außerdem ist die während des Arbeitshubes konstante Geschwindigkeit vorteilhaft.

2.2 Aufgaben und Lösungen 1962

Aufgabe 1/62
Auf ein hölzernes Rad mit einem Durchmesser $d = 75$ mm soll ein schmiedeeiserner Reifen bei einer Temperatur $t \approx 500°$C aufgezogen werden. Nach dem Abkühlen soll der Durchmesser D des Reifens um 0,5 mm kleiner sein als der Durchmesser d des Rades, so dass der Reifen das Rad fest zusammenpresst.
Wie groß muss der Durchmesser D' des Reifens bei Anfertigung sein, damit er nach dem Abkühlen des geforderte Maß hat?
Der Ausdehnungskoeffizient von Schmiedeeisen werde mit $\alpha \approx 0{,}000012$ je Grad angenommen.

Der Durchmesser D' des Reifens muss $D' = 74{,}5$ mm sein, da der Reifen bei normaler Temperatur angefertigt wird. Allerdings reicht die Temperatur $t \approx 500°$C nicht aus, um ihn soviel zu vergrößern, dass er auf das Rad aufgezogen werden kann. Ist $U = \pi D \approx 233{,}8$ mm, so ist

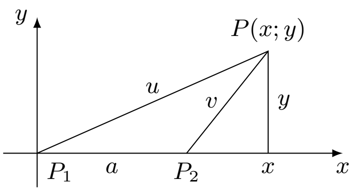
$$U + U_z = U(1 + t_z) = 233{,}8 \cdot (1 + 0{,}000012 \cdot 500) \approx 235{,}2 \text{ mm}$$

also $U_z \approx 1{,}4$ mm, wenn mit U_z die Vergrößerung des Umfangs U und mit t_z die Erhöhung der Temperatur bezeichnet werden (in unserem Fall wurde $t_z = t$ gesetzt). Bezeichnen wir noch die Vergrößerung des Durchmessers D mit D_z, so ergibt sich aus $D + D_z = \frac{U+U_z}{\pi}$, dass $D_z \approx 0{,}47$ mm.
Es müsste aber $D_z > 0{,}5$ mm sein, damit $D + D_z > 75$ mm wird.

Aufgabe 2/62
Es ist der geometrische Ort aller Punkte zu ermitteln, bei denen das Verhältnis

$$\frac{PP_1}{PP_2}$$

der Abstände PP_1 und PP_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 den konstanten Wert c hat.



Es seien P_1 und P_2 die gegebenen Punkte, a ihr Abstand. Das Koordinatensystem (rechtwinklig-kartesisch) legt man zweckmäßig so, dass P_1 im Ursprung und P_2 auf der positiven x-Achse liegt. Dann gilt für einen beliebigen Punkt $P(x; y)$ des geometrischen Ortes (Abbildung):

$$x^2 + y^2 = u^2 \qquad ; \qquad (x-a)^2 + y^2 = v^2$$

Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man

$$\frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = \frac{u^2}{v^2} = c^2$$

Daraus folgt $x^2 + y^2 = c^2(x-a)^2 + c^2y^2$ und durch Umformung

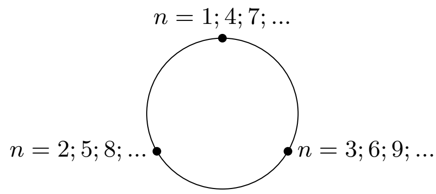
$$x^2 - 2x\frac{c^2a}{c^2-1} + y^2 + \frac{c^2a^2}{c^2-1} = 0 \rightarrow \left(x - \frac{ac2}{c^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ac}{c^2-1}\right)^2$$

Man erkennt, dass der geometrische Ort ein Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten $M\left(\frac{ac^2}{c^2-1}; 0\right)$ und dem Radius $r = \frac{ac}{c^2-1}$ ist.

Aufgabe 3/62
Wie lautet das Bildungsgesetz (das allgemeine Glied) der Zahlenfolge

$$(v_n) = 0, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 11, 11, ...$$

Vermindert man in der Folge (v_n) das 2., 5., 8., ... Glied um 1, so geht sie in die Folge (w_n) = 0,1,2,3,4,5,6,7,... über. Deren Bildungsgesetz ist leicht erkennbar: $w_n = n - 1$.
Zur Folge (w_n) muss man die Folge (a_n) = 0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,... gliedweise addieren, wenn man die Folge (v_n) erhalten will: $(v_n) = (w_n + a_n)$.



Das Bildungsgesetz für (a_n) muss für n = 1,2,3 dieselben Werte ergeben wie für n = 4,5,6 oder für n = 7,8,9, usw. Man kann eine solche Folge "zyklisch" oder "periodisch" nennen und sie entsprechend darstellen.

Es liegt nahe für das Bildungsgesetz von (a_n) trigonometrische Funktionen zu verwenden. In der Tat ist

$$(b_n) = \left(\cos\frac{2\pi n}{3}\right) = -0{,}5; -0{,}5; +1; -0{,}5; -0{,}5; +1; ...$$

Ersetzt man darin n durch $n+1$ und addiert 0,5, wird

$$(c_n + 0{,}5) = \left(\cos\frac{2\pi(n+1)}{3} + 0{,}5\right) = 0; 1{,}5; 0; 0; 1{,}5; 0; 0; 1{,}5; ...$$

Damit sind wir am Ziel:

$$(v_n) = (w_n + a_n) = (n - 1 + \frac{2}{3}[(0{,}5 + \cos\frac{2\pi(n+1)}{3}]) = n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi(n+1)}{3}$$

Lösung von Ulrich Richter:

Für das Bildungsgesetz der Zahlenfolge $(v_n) = 0, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 8, 9, 11, 11, ...$ lassen sich beliebige viele allgemeine Glieder finden. Die Folge lässt sich auch als

$$(v_n) = 1-1; 2-0; 3-1; 4-1; 5-0; 6-1; 7-1; 8-0; 9-1; 10-1; 11-0; 12-1; ...$$

schreiben. Die Folge $(x_n) = 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 0; ...$ ist periodisch und kann durch jede periodische Funktion mit folgenden drei Eigenschaften beschrieben werden:

1. $f(3\lambda) = f(3n\lambda) = 0$,
2. $f(\lambda) = f(\lambda + 3n\lambda) = 1$,
3. $f(2\lambda) = f(2\lambda + 3n\lambda) = 1$.

Wie sich die Funktion an anderen Stellen verhält, ist völlig unwesentlich.
Als Beispiel einer Folge (x_n) seien angegeben

$$(x_n) = \left(\left|\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{3}\right]\right|\right) \qquad \text{oder} \qquad (x_n) = \left(\frac{4}{3}\sin^2\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]\right)$$

so dass das Bildungsgesetz der Folge (v_n) geschrieben werden kann als

$$v_n = n - \left|\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{3}\right]\right| \qquad \text{oder} \qquad (x_n) = n - \frac{4}{3}\sin^2\left[(n+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

(wobei stets $n = 1; 2; 3; ...$ gilt).

Lösung von Erich Schiffner:

Versteht man unter $[a]$ die größte ganze Zahl x, für die gilt $x \leq a$, so ist das allgemeine Glied der Folge

$$(v_n) = n - \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right]\right)$$

Beweis: Man bilde

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= n + 1 - \left(\left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]\right) - n + \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right]\right) \\ &= 1 - \left(\left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right]\right) \end{aligned}$$

Nun wird die erste Klammer für $n = 3k$ gleich 1, ebenso die zweite, also ist: $v_{n+1} - v_n = 1$ für $n = 3k$. Für $n = 3k + 1$ ergibt sich $v_{n+1} - v_n = 1 - 0 + 1 = 2$ und für $n = 3k + 2$ $v_{n+1} - v_n = 1 - 1 + 0 = 0$, womit alles bewiesen ist.

Aufgabe 4/62
Welchen Rest lässt die Zahl 2^n beim Teilen durch 3?

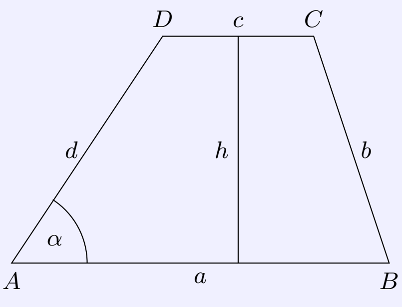
Die Zahl 2^n ist nicht durch 3 teilbar, da sie nur den Primfaktor 2 enthält. Also kann 2^n beim Teilen durch 3 nicht den Rest Null lassen. Es kommen nur die Reste 1 und 2 in Frage.

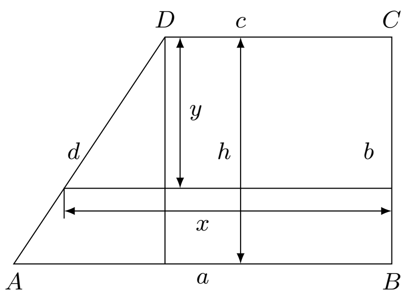
$$n = 0 : 2^n = 3 = 2^0 : 3 = 1 : 3 = 0 \text{ Rest } 1$$
$$n = 1 : 2^n = 3 = 2^1 : 3 = 2 : 3 = 0 \text{ Rest } 2$$
$$n = 2 : 2^n = 3 = 2^2 : 3 = 4 : 3 = 1 \text{ Rest } 1$$
$$n = 3 : 2^n = 3 = 2^3 : 3 = 8 : 3 = 2 \text{ Rest } 2$$
$$n = 4 : 2^n = 3 = 2^4 : 3 = 16 : 3 = 5 \text{ Rest } 1$$

Es taucht die Vermutung auf, dass 2^n beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt, wenn n gerade, und den Rest 2 lässt, wenn n ungerade ist. Zumindest gilt dies für $n = 0$ bis $n = 4$.
Um einen allgemeinen Beweis zu führen, schließen wir folgendermaßen:
Wenn 2^n beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt, so kann man schreiben $2^n = 3k + 1$. Dann gilt für 2^{n+1}: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2(3k + 1) = 6k + 2$.
Man sieht, dass dann 2^{n+1} beim Teilen durch 3 den Rest 2 lässt. Lässt dagegen 2^n beim Teilen durch 3 den Rest 2, so kann man schreiben $2^n = 3k + 2$. Dann gilt entsprechend für 2^{n+1}: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2(3k + 2) = 6k + 4 = 6k + 3 + 1$.
Man sieht, dass in diesem Fall 2^{n+1} beim Teilen durch 3 den Rest 1 lässt. Damit ist bewiesen, dass sich beim Teilen der Zahl 2^n durch 3 die Reste 1 und 2 regelmäßig abwechseln, wenn n die Folge $0; 1; 2; 3; 4; ...$ durchläuft.
Es gilt also für jedes n: Die Zahl 2^n lässt beim Teilen durch 3 den Rest 1, wenn n gerade, und den Rest 2, wenn n ungerade ist.
Mit Hilfe von Sätzen der Zahlentheorie bzw. der Gruppentheorie lässt sich diese Behauptung noch eleganter beweisen.

Aufgabe 5/62

Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und c, der Höhe h und dem Winkel α (Abbildung). Gesucht ist die Parallele zu a und c, die die Fläche des Trapezes halbiert. Lösung 1. durch Berechnung, 2. durch Konstruktion.





1. Berechnung: Da die Fläche eines Trapezes ausschließlich von der Länge der parallelen Seiten und der Höhe, nicht aber von den Winkeln abhängt, spielt der Winkel α für das vorliegende Problem keine Rolle, und die Betrachtungen können ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit an einem rechtwinkligen Trapez durchgeführt werden (Abbildung).
Die teilende Parallele habe die Länge x, ihr Abstand von c sei y. Dann gilt

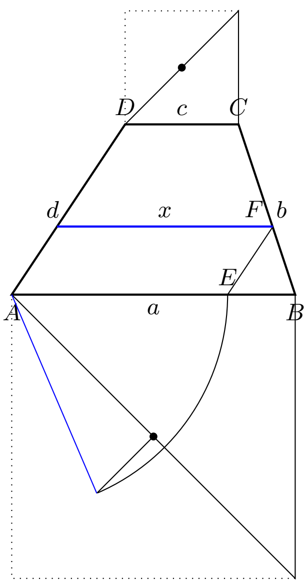
$$\frac{x + c}{2} \cdot y = \frac{a + c}{4} \cdot h$$

Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{y}{h} = \frac{x-c}{a-c}$, also $y = \frac{x-c}{a-c}h$. Daraus folgt nach Umrechnung

$$x^2 - c^2 = \frac{a^2 - c^2}{2} \to x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

Man erkennt, dass die Länge der Parallelen unabhängig ist von der Höhe h. Ihr Abstand y von c ist dann

$$y = \frac{x-c}{a-c}h \to y = \frac{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{2}} - c}{a-c} \cdot h$$



2. Konstruktion: Die Berechnung liefert den Schlüssel zur Konstruktion. Aus

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \qquad \text{folgt} \qquad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

Das heißt aber, man erhält x als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\frac{c}{2}\sqrt{2}$ sind. Diese Katheten sind aber die halben Diagonalen aus den Quadraten der beiden parallelen Trapezseiten.

Konstruktionsbeschreibung:
1. Man konstruiert die Quadrate über den parallelen Trapezseiten, zieht in ihnen je eine Diagonale und halbiert diese.
2. Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit den halbierten Diagonalen als Katheten. Die Hypotenuse hat die Länge x der gesuchten Parallelen.
3. Man trägt die Strecke x von A aus auf $a = AB$ ab; der Endpunkt sei E. Dann zieht man durch E eine Parallele zu $d = DA$; ihr Schnitt mit $b = BC$ sei F. Die Parallele zu $a = AB$ und $c = CD$ durch F ist die gesuchte Parallele.

Determination: Sämtliche Konstruktionen sind stets ausführbar und eindeutig.

Aufgabe 6/62
Der kleine Zeiger der Uhr wird während eines Umlaufs mehrmals von großen Zeiger überholt.

1. Es sind die Winkel zu berechnen, die beide Zeiger beim Überrunden mit der Zeigerstellung um 0^h bilden.
2. Es ist die Gleichung anzugeben, aus der man die Zeit (in min) errechnen kann, die der große Zeiger von einer beliebigen Stunde bis zum Erreichen des kleinen Zeigers benötigt.

1) Die Winkel, die die Zeiger mit der Zeigerstellung um 0^h bilden, sind Funktionen der Zeit. Wir bezeichnen mit α_k den Winkel des kleines Zeigers mit der 0^h-Stellung, α_g den Winkel des großen Zeigers mit der 0^h-Stellung, $\omega_k = \frac{360°}{12h} = \frac{30°}{h}$ die Winkelgeschwindigkeit des kleinen Zeigers, $\omega_g = \frac{360°}{1h} = \frac{360°}{h}$ die Winkelgeschwindigkeit des großen Zeigers und t die Zeit (in h).
Dann gelten die Gleichungen $\alpha_k = \omega_k \cdot t$ und $\alpha_g = \omega_g \cdot t$. Wenn beide Zeiger sich decken, ist $\alpha_k = \alpha_g - n \cdot 360°$ mit $n = 0, 1, 2,...$ (ganzzahlige Umläufe des großen Zeigers werden subtrahiert). Aus den Gleichungen ergibt sich

$$\omega_k \cdot t = \omega_g \cdot t - 360°n \qquad \text{oder} \qquad t = \frac{360°n}{\omega_g - \omega_k} = \frac{360°n}{330°/h} = \frac{12}{11}n \text{ h}$$

Setzt man dies in die 1.Gleichung ein, so erhält man für α_k den Winkel α_{kn}, bei dem sich die Zeiger decken: $\alpha_{kn} = 30° \cdot \frac{12}{11}n = \frac{360°n}{11}$.

2) Wir bezeichnen mit Δt die Zeitdifferenz zwischen dem Überrunden und der vorausgegangenen vollen Stunde, also $\Delta t = t - n$. Wegen 1) ergibt sich daraus

$$\Delta t = \left(\frac{12}{11}n - n\right) = \frac{1}{11}n \text{ h}$$

Mit 1 h = 60 min erhält man schließlich $\Delta t = \frac{60n}{11}$ min. Aus den Gleichungen von 1) und 2) kann man eine Tabelle für $n = 0, 1, ..., 11$, α_{kn} in ° und Δt in min zusammenstellen.

n	α_{kn}°	$\Delta t(min)$	n	α_{kn}°	$\Delta t(min)$
0	0	0,00	6	196,4	32,72
1	32,7	5,45	7	229,1	38,18
2	65,5	10,91	8	258,8	43,63
3	98,2	16,36	9	294,5	49,09
4	130,9	21,82	10	327,3	54,55
5	163,6	27,27	11	360,0	60,00

Aufgabe 7/62
Auf einer Eisenbahnstrecke begegnen sich ein D-Zug und ein Schnelltriebwagen. Der D-Zug hat eine Länge von $l_d = 260$ m und eine Geschwindigkeit von $v_d = 90\ \frac{km}{h}$, der Schnelltriebwagen ist $l_s = 30$ m lang und hat eine Geschwindigkeit von $v_s = 144\ \frac{km}{h}$.
Wie lange dauert für einen Reisenden im D-Zug die Vorbeifahrt des Triebwagens und für einen Reisenden im Triebwagen die Vorbeifahrt des D-Zuges?

Es ist $v_d = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}, v_s = 144\frac{km}{h} = 40\frac{m}{s}$.
Man findet die Lösung durch die folgende Überlegung: Wenn der D-Zug sich nicht bewegte, der Triebwagen aber die Geschwindigkeit $v_r = v_d + v_s$ hätte (oder umgekehrt), so wäre die Relativgeschwindigkeit von D-Zug und Schnelltriebwagen zueinander dieselbe. Es muss also, wenn mit t_d und t_s die entsprechenden Zeiten bezeichnet werden, gelten

$$(v_d + v_s)t_s = l_s \quad \text{und} \quad (v_d + v_s)t_d = l_d \quad \text{also}$$

$$t_s = \frac{l_s}{v_d + v_s} = \frac{6}{13} \approx 0{,}5 \text{ s}; \qquad t_d = \frac{l_d}{v_d + v_s} = \frac{260}{65} = 4 \text{ s}$$

Die Zeit t_s, für die Vorbeifahrt des Schnelltriebwagens am Reisenden im D-Zug beträgt also $t_s \approx 0{,}5$ s, und die Zeit t_d für die Vorbeifahrt des D-Zuges am Reisenden im Triebwagen ist $t_d = 4$ s.

Aufgabe 8/62
Zwei Primzahlen, deren Differenz dem absoluten Betrag nach gleich 2 ist, nennt man Primzahlzwillinge.
Man beweise, dass oberhalb von 3 die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist!

Jede Primzahl oberhalb von 3 ist entweder in der Form $6n - 1$ oder in der Form $6n + 1$ mit n = 1,2,3,... darstellbar.
Beweis: Jede natürliche Zahl lässt sich in einer der folgenden Formen darstellen: $6n; 6n + 1; 6n + 2; 6n + 3; 6n + 4; 6n + 5$ mit n = 0,1,2,3,4,.... Von diesen Zahlen sind sicherlich die Zahlen $6n; 6n + 2$ und $6n + 4$ durch 2 und die Zahlen $6n; 6n+3$ durch 3 teilbar und mithin keine Primzahlen. Wenn also eine natürliche Zahl oberhalb 3 eine Primzahl ist, so ist sie entweder in der Form $6n+1$ oder in der Form $6n+5$ darstellbar. Für $6n + 5$ kann man aber auch schreiben $6n' - 1$ mit $n' = n + 1$.
Daraus folgt: Primzahlzwillinge p_1 und p_2 haben stets die Form $p_1 = 6n-1$ und $p_2 = 6n+1$ mit gleichem n.
Beweis: Angenommen, es sei $p_l = 6n \mp 1$ und $p_2 = 6m \pm 1$ mit $n \neq m$, so wäre

$$|p_1 - p_2| = |(6n \mp 1) - (6m \pm 1)| \neq 2$$

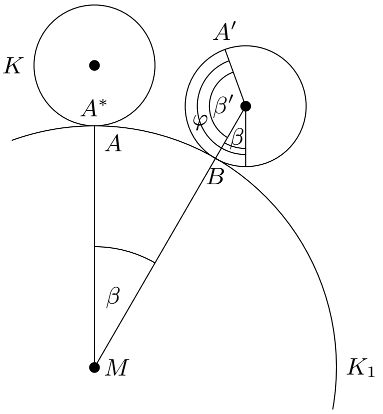
Damit ist aber $p_1 + p_2 = (6n - 1) + (6n + 1) = 12n$, d.h., die Summe zweier Primzahlzwillinge oberhalb 3 ist durch 12 teilbar.

Aufgabe 9/62

a) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d = 2r$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit dem gleichen Teilkreisdurchmesser ab. Wie oft dreht sich K_2 bei einem vollen Umlauf um K_1 um seine Achse?

b) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_2 = 2r_2$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit einem Teilkreisdurchmesser $d_1 = 2r_1 = 3d_2$ ab. Wie oft dreht sich K_2 bei einem vollen Umlauf um K_1 um seine Achse?

c) Ein Zahnrad K_2 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_2 = 2r_2$ rollt auf einem feststehenden Zahnrad K_1 mit dem Teilkreisdurchmesser $d_1 = 2r_1 = \frac{1}{3}d_2$ ab. Wie oft muss es umlaufen, bis es sich genau einmal um seine eigene Achse gedreht hat?



Der feststehende Kreis K_1 hat den Durchmesser $d_1 = 2r_1$. der Rollkreis K hat den Durchmesser $d = 2r$. Aus der Ausgangslage A (siehe Abbildung) rolle der Kreis K bis zum Umfangspunkt B. Der Berührungspunkt $A*$ des Umfangs von K in der Ausgangslage bewegt sich dabei in die Lage A'. Die beiden Kreisbögen AB und $A'B$ haben wegen der Bedingung des Nichtgleitens die gleiche Länge. Die zu diesen Bögen gehörenden Mittelpunktswinkel bezeichnen wir mit β und β'. Dann ist die Gesamtdrehung φ des Rollkreises K: $\varphi = \beta + \beta'$. Misst man die Winkel im Bogenmaß, so ist

$$\overset{\frown}{AB} = r_1 \overset{\frown}{\beta} \qquad \text{und} \qquad \overset{\frown}{A'B} = r\overset{\frown}{\beta'}$$

Aus $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B}$ folgt $r_1 \overset{\frown}{\beta} = r\overset{\frown}{\beta'}$ oder $\beta' = \frac{r_1 \overset{\frown}{\beta}}{r} = \frac{d_1 \overset{\frown}{\beta}}{d}$.
Somit ist die resultierende Drehung

$$\overset{\frown}{\varphi} = \overset{\frown}{\beta} + \overset{\frown}{\beta'} = \overset{\frown}{\beta} + \frac{d_1 \overset{\frown}{\beta}}{d} = \overset{\frown}{\beta}(1 + \frac{d_1}{d})$$

Misst man aber die Winkel im Gradmaß, so gilt entsprechend $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi d_1 \beta}{360°}$ und $\overset{\frown}{A'B} = \frac{\pi d \beta'}{360°}$. Wegen $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$ gilt $d_1\beta = d\beta'$, also $\beta' = \frac{d_1 \overset{\frown}{\beta}}{d}$. Somit ist

$$\varphi = \beta + \beta' = \beta + \frac{d_1\beta}{d} = \beta(1 + \frac{d_1}{d})$$

In die allgemeine Form setzen wir ein:

Frage 1: $d_1 = d$, $\overset{\frown}{\beta} = 2\pi$ bzw. $\beta = 360°$, ergibt $\varphi = 4\pi = 720°$.

Frage 2: $d_1 = 3d$, $\overset{\frown}{\beta} = 2\pi = 360°$, ergibt $\varphi = 8\pi = 1440°$.

Frage 2: $d = 3d_1$, $\overset{\frown}{\varphi} = 2\pi = 360°$, ergibt $\overset{\frown}{\beta} = \frac{6\pi}{4} = 270°$.

Antwort: Im Fall a dreht sich der Rollkreis zweimal, im Fall b viermal um seinen Mittelpunkt, im Fall c muss er drei Viertel des Festkreises umlaufen.

Aufgabe 10/62

Es ist

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 25 - 45 &= -20 \\ 25 - 45 &= 16 - 36 \\ 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} &= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\left(\frac{9}{2}\right)^2$, so ergibt sich

$$5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \to \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$$

Auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, liefert

$$5 - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{2} \qquad \text{und mit beidseitiger Addition von } \frac{9}{2} \text{ somit} \qquad 5 = 4$$

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler liegt nicht in den als Aprilscherz eingeschmuggelten Druckfehlern, sondern im Wurzelziehen. Die Gleichung

$$\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$$

ist noch richtig, denn es ist $\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ und $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Durch das Ausziehen der Wurzel werden aber der positive (auf der linken Seite der Gleichung) und der negative Wurzelwert (auf der rechten Seite) einander gleichgesetzt.

Aufgabe 11/62
Berechnung der Jahreszahl 1962 aus dem Geburtstag
Schreiben Sie Ihren Geburtstag auf. Verdoppeln Sie die Nummer des Tages und addieren Sie die Nummer des Monats zum Ergebnis.
(Beispiel: Geburtstag 27.8., Nummer des Tages 27, Nummer des Monats 8, Rechnung: $2 \cdot 27 + 8 = 62$.)
Multiplizieren Sie dieses neue Ergebnis mit 5 und addieren Sie 400. Subtrahieren Sie davon das Zehnfache der Tagesnummer. Vom Doppelten dieses Ergebnisses subtrahieren Sie das Zehnfache der Monatsnummer.
Wenn Sie die so errechnet Zahl mit 2,5 multiplizieren und schließlich noch 38 subtrahieren, so erhalten Sie die Zahl 1962. Wie ist das bei so verschiedenen Ausgangswerten möglich?

Bezeichnet man die Tagesnummer mit a und die Monatsnummer b, so folgt aus den Anweisungen der Aufgabe die folgende Rechnung:

1) Verdopplung der Tagesnummer: $2a$
2) Addition der Monatsnummer: $2a + b$
3) Multiplikation mit 5: $5 \cdot (2a + b) = 10a + 5b$
4) Addition von 400: $10a + 5b + 400$
5) Subtraktion des Zehnfachen der Tagesnummer: $10a + 5b + 400 - 10a = 5b + 400$
Man sieht, dass ein Teil des Datums aus der Rechnung "herausfällt".
6) Verdopplung des Ergebnisses: $10b + 800$
7) Subtraktion des Zehnfachen der Monatsnummer: $10b + 800 - 10b = 800$
Nun ist der Rest des Datums herausgefallen. Bei allen möglichen Ausgangswerten liegt nun das gleiche Zwischenergebnis vor.
8) Multiplikation mit 2,5: $2{,}5 \cdot 800 = 2000$
9) Subtraktion von 38: $2000 - 38 = 1962$

Aufgabe 12/62
Drei Damen, alle unter 50 Jahre alt, treffen sich zur Geburtstagsfeier der jüngsten.
"Ich habe ein seltsames Alter erreicht", sagt das Geburtstagskind, "ich bin $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie meine Tochter und 11 mal so alt wie mein Sohn. Wenn mein Sohn so alt sein wird, wie meine Tochter jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie er und 4 mal so alt wie meine Tochter."
"Merkwürdig", erwiderte die zweite, "mit mir und meinen zwei Kindern steht es ebenso!"
"Das ist doch aber ein Zufall!" sagte die dritte nach einigem Nachdenken, "die gleiche Rechnung stimmt bei mir und meinen zwei Kindern! Und dabei sind wir drei Frauen doch verschieden alt!"
Wie alt sind die Mütter und ihre Kinder?

Es scheint sich um ein diophantisches Problem zu handeln. Die Lösungen sind aber im vorliegenden Fall durch eine einfache Überlegung zu finden:
Da die Mütter 11 mal so alt sind wie ihre jüngsten Kinder, kommen bei ganzzahligen Altersangaben nur durch 11 teilbare Zahlen für das Alter der Mütter in Frage, also die Zahlen 11; 22; 33: 44; 55; 66; 77; 88; 99. Die Zahl 11 und die Zahlen 55; 66; 77; 66; 99 kann man sofort als unbrauchbar ausschließen. Da die drei Mütter unterschiedlich alt sind, kommt nur die Lösung

1. Mutter 22 Jahre alt, 2. Mutter 33 Jahre alt, 3. Mutter 44 Jahre alt

in Betracht. Man prüft leicht nach, dass diese Zahlen auch die übrigen Bedingungen erfüllen. Aus ihnen errechnet man das Alter der Kinder.
Alter der Mutter 22: älteres Kind 4, jüngeres Kind 2; Alter der Mutter 33: älteres Kind 6, jüngeres Kind 3; Alter der Mutter 44: älteres Kind 8, jüngeres Kind 4.

Aufgabe 13/62
Warum kann eine Quadratzahl oberhalb von 9 niemals aus lauter ungeraden Ziffern bestehen?

Es sei $n = 10a+b$, wobei a eine natürliche Zahl mit beliebig vielen Stellen und b eine einstellige natürliche Zahl sei. Dann gilt

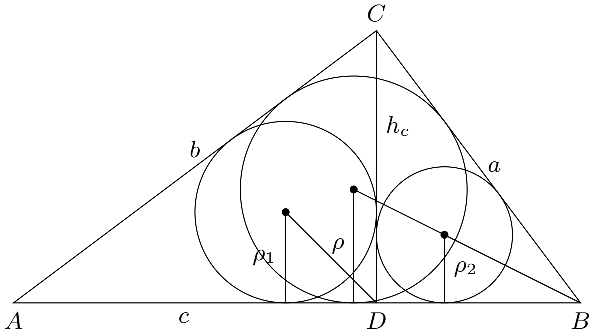
$$n^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

Ist nun b gerade, so ist auch b^2 gerade und mithin auch die Schlussziffer von n^2. Ist aber b ungerade, so sind die Fälle $b = 1; b = 3; b = 5; b = 7; b = 9$ möglich. In diesen Fällen ergibt sich

$$\begin{array}{rr} n^2 = 100a^2 + 20a + 1 & n^2 = 100a^2 + 60a + 9 \\ n^2 = 100a^2 + 100a + 25 & n^2 = 100a^2 + 140a + 49 \\ & n^2 = 100a^2 + 180a + 81 \end{array}$$

Man sieht, dass in diesen Fällen die Zehnerziffer gerade ist. Also enthält jede Quadratzahl oberhalb von 9 mindestens eine gerade Ziffer.

Aufgabe 14/62
Das Dreieck ABC sei bei C rechtwinklig. Es sei $CD = h_c$ die Höhe der Hypotenuse; ferner seien ρ der Radius des Inkreises im Dreieck ABC, ρ_1 und ρ_2 die Radien der Inkreise in den Teildreiecken ADC und BDC.
Man beweise, dass die Summe σ der Inkreisradien ρ, ρ_1 und ρ_2 gleich der Höhe h_c ist!



Wendet man die bekannte Dreiecksformel

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{s-c} = \frac{2\rho}{a+b+c} \quad \text{mit}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

auf ein rechtwinkliges Dreieck an ($\gamma = 90°$), so ergibt sich wegen $\tan 45° = 1$ der Satz:

Der Inkreisdurchmesser eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Katheten vermindert um die Hypotenuse. Daraus folgen für die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CAD und BCD die Gleichungen

$$2\rho = a + b - c; \qquad 2\rho_1 = q + h_c - b; \qquad 2\rho_2 = p + h_c - a$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich wegen $p + q = c$:

$$2(\rho + \rho_1 + \rho_2) = 2h_c \to \rho + \rho_1 + \rho_2 = h_c$$

Aufgabe 15/62
Es sei $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Beweisen Sie, dass dann auch gilt (Voraussetzung: $a, b, c, d > 0$)

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Die Ungleichung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ist gleichbedeutend mit der Ungleichung $ad < bc$. Addiert man auf beiden Seiten dieser Ungleichung die Größe ab, so folgt $ab + ad < ab + be$.
Damit gilt auch $a(b + d) < b(a + c)$. Dividiert man beide Seiten durch b und durch $(b + d)$, so ergibt sich

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

und der erste Teil der Behauptung ist bewiesen. Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung $ad < bc$ dagegen die Größe cd, so folgt $ad+cd < be+cd$ oder $(a+c)d < (b+d)c$. Daraus ergibt sich durch Division mit $(b + d)$ und d die rechte Seite der Ungleichung und der zweite Teil der Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 16/62
Als "magisches Quadrat" bezeichnet man eine quadratische Anordnung von Zahlen, bei der die Summe aller in einer Zeile bzw. Spalte (oft auch Diagonalen) stehenden Zahlen konstant ist.
Manche magischen Quadrate sind zentralsymmetrisch, d.h., die Summe ie zweier zum Mittelpunkt des Quadrats symmetrisch gelegener Zahlen ist konstant.
Man beweise, dass in diesem Fall zwei Zeilen bzw. Spalten, die zu einer Mittellinie des Quadrats symmetrisch liegen, die gleiche Quadratsumme ergeben. Beispiel:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Es seien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ und $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ die beiden gewählten Zeilen (bzw. Spalten). Dann gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = s = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$$

Weiterhin ist $a_1 + b_n = t; a_2 + b_{n-1} = t; ...; a_n + b_1 = t$ oder $a_1 = t - b_n; a_2 = t - b_{n-1}; ...a_n = t - b_1$ (1).
Addiert man die Gleichungen, so ergibt sich $s + s = n \cdot t = 2s$ (2). Quadriert man die Gleichungen (1), so folgt

$$a_1^2 = (t - b_n)^2 = t^2 - 2tb_n + b_n^2; ...; a_n^2 = (t - b_1)^2 = t^2 - 2tb_1 + b_1^2$$

und durch Addition erhält man daraus

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = nt^2 - 2t(b_1 + b_2 + ... + b_n) + b_1^2 + ... + b_n^2 = t(nt - 2s) + b_1^2 + ... + b_n^2$$

Wegen (2) ist aber $nt - 2s = 0$ und damit ist die Behauptung bewiesen.

Lösung von Reinhard Neumann:

Symbolische Darstellung des magischen Quadrates:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & ; & a_{12} & ; & ... & a_{1i} & ; & ... & a_{1n} \\
a_{21} & ; & a_{22} & ; & ... & a_{2i} & ; & ... & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots\vdots\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & ; & a_{i2} & ; & ... & a_{ii} & ; & ... & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots\vdots\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & ; & a_{n2} & ; & ... & a_{ni} & ; & ... & a_{nn}
\end{array}$$

Die Summe einer Zeile (bzw. Spalte) sei $s = \sum_{m=1}^{n} a_{im}$.

Die Summer zweier symmetrisch zum Mittelpunkt liegender Zahlen sei d: $d = a_{im} + a_{(n+1-i)(n+1-m)}$. Es gilt außerdem

$$nd = \sum_m (a_{im} + a_{(n+1-i)(n+1-m)}) = 2s$$

also $nd = 2s$. Es ist zu beweisen, dass

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 = \sum_{m=1}^{n} a_{(n+1-i)(n+1-m)}^2$$

ist. Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} a_{(n+1-i)(n+1-m)}^2 &= \sum_{m=1}^{n} (d - a_{im})^2 = \sum_{m=1}^{n} (d^2 - 2da_{im} + a_{im}^2) \\ &= \sum_{m=1}^{n} d(d - 2a_{im}) + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 = d\left[\sum_{m=1}^{n} d - 2\sum_{m=1}^{n} a_{im}\right] + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 \\ &= d(nd - 2s) + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2 = d \cdot 0 + \sum_{m=1}^{n} a_{im}^2\end{aligned}$$

Lösung von Gerhard Franz:

Zwei Spalten (Zeilen), die zur Mittellinie symmetrisch liegen, müssen nach Voraussetzung die folgende Form haben:

$$\begin{array}{rl} x_1 & A - x_n \\ x_2 & A - x_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & A - x_2 \\ x_n & A - x_1 \end{array}$$

Die Quadratsumme der rechts stehenden Spalte ist

$$\sum_{m=1}^{n} (A - x_m)^2 = \sum_{m=1}^{n} (A^2 - 2Ax_m + x_m^2) = n \cdot A^2 - 2A\sum_{m=1}^{n} x_m + \sum_{m=1}^{n} x_m^2 = \sum_{m=1}^{n} x_m^2 + R$$

Nun ist aber

$$R = n \cdot A^2 - 2A\sum_{m=1}^{n} x_m = n \cdot A^2 - 2A\sum_{m=1}^{n} (A - x_m) =$$

(wegen der Konstanz der Spaltensummen)

$$= n \cdot A^2 - 2nA^2 + 2A\sum_{m=1}^{n} x_m = -n \cdot A^2 + 2A\sum_{m=1}^{n} x_m = -R$$

Aus $R = -R$ folgt $R = 0$, d.h. $\sum\limits_{m=1}^{n} (A - x_m)^2 = \sum\limits_{m=1}^{n} x_m^2$.

Aufgabe 17/62
Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte $A(-4; 5)$ und $B(4; 5)$ sowie die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x + 15$. Gesucht sind die Kreise K, die durch A und B gehen und g berühren. Lösung a) analytisch, b) konstruktiv.

a) Analytisch: Es ist $(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2$ die allgemeine Kreisgleichung, wenn $M(C; d)$ der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises ist. Da A und B symmetrisch zur y-Achse liegen, liegt M auf der y-Achse; mithin ist $c = 0$: $x^2 + (y - d)^2 = r^2$ (1).
Die Koordinaten von A und B müssen die Kreisgleichung befriedigen, also gilt

$$4^2 + (5 - d)^2 = r^2 \qquad \text{oder} \qquad d^2 - 10d + 41 = r^2 \quad (2)$$

Nun sei $C(x_3; y_3)$ der Berührungspunkt des Kreises mit der Geraden g; dann befriedigen seine Koordinaten sowohl die Kreisgleichung (1) als auch die gegeben Geradengleichung $y = 2x + 15$:

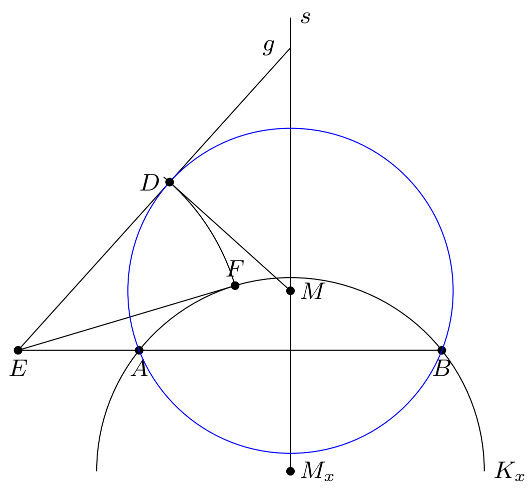
$$x_3^2 + (y_3 - d)^2 = r^2 \quad (3) \qquad ; \qquad y_3 = 2x_3 + 15 \quad (4)$$

Es sei nun $y = mx + n$ die Gleichung des Berührungsradius. Da er senkrecht auf g steht, gilt $m = -\frac{1}{2}$ (bekanntlich schneiden zwei Geraden mit den Anstiegen m_1 und m_2 einander genau dann unter einem rechten Winkel, wenn $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ ist). Ferner müssen die Koordinaten von C und M die Gleichung des Berührungsradius befriedigen. Damit folgt unmittelbar wegen $M(0; d)$: $d = n$ für $x = 0$ und $y_3 = -\frac{1}{2}x_3 + d$ (5).
Aus (4) und (5) folgt $x_3 = \frac{2}{5}d - 6$ (6) und $y_3 = \frac{4}{5}d + 3$ (7).
Setzt man (6) in (7) ein, so erhält man $\frac{1}{5}d^2 - 6d + 45 = r^2$. Im Verein mit (2) ergibt sich ein quadratisches Gleichungssystem in zwei Unbekannten d und r^2 mit den Lösungen

$$d = 2{,}5 \pm 1{,}5\sqrt{5}; d_1 = 5{,}85; d_2 = -0{,}85 \qquad \text{und} \qquad r_1^2 = 16{,}7; r_2^2 = 50{,}2$$

Die Kreisgleichungen lauten also

$$x^2 + (y - 5{,}85)^2 = 16{,}7 \text{ und } x^2 + (y + 0{,}85)^2 = 50{,}2$$
$$\text{oder } x^2 + y^2 - 11{,}7y = -17{,}5 \text{ und } x^2 + y^2 + 1{,}7y = 49{,}7$$



b) Konstruktiv:
1. Analysis (Abbildung): Ist D der Berührungspunkt eines Kreises durch A und B mit der Geraden g und E der Schnittpunkt von g mit der Geraden durch A und B, so gilt nach dem Sehnentangentensatz $EA : ED = ED : EB$ oder $ED^2 = EA \cdot EB$.

Ist K_x ein beliebiger Kreis durch A und B, F der Berührungspunkt einer Tangente von E aus an K_x, so gilt $EA : EF = EF : EB$ oder $EF^2 = EA \cdot EB$. Es ist also $ED = EF$, und man findet den Berührungspunkt, indem man einen beliebigen Kreis durch A und B schlägt, von E aus an ihn eine Tangente EF und EF von E aus auf g abträgt. Der Kreismittelpunkt liegt dann 1. auf der Mittelsenkrechten von AB und 2. auf der Senkrechten auf g in D.

2. Konstruktionsbeschreibung:

1. Man errichtet auf AB die Mittelsenkrechte s und wählt auf ihre einen beliebigen Punkt M_x. Um M_x schlägt man mit dem Radius $r = AM_x = BM_x$ einen Kreis K_x.
2. Man verlängert AB bis zu Schnitt E mit der Geraden g. Über EM_x schlägt man den Thaleskreis; seine Schnittpunkte mit K_x seien $F_1 = F$ und F_2.
3. Man schlägt um E einen Kreis mit dem Radius $r = EF = EF_2$. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit g seien $D = D_1$ und D_2.
4. Man errichtet in D_1 nud D_2 auf g Senkrechte. Deren Schnittpunkte mit s seien $M = M_1$ und M_2.
5. Man schlägt um M_1 und M_2 mit M_1D_1 bzw. M_2D_2 als Radien zwei Kreise K_1 bzw. K_2. Es sind die gesuchten Kreise.

3. Determination: Die Konstruktion nach 1. ist stets eindeutig ausführbar.
Bei der Konstruktion nach 2. sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) E liegt außerhalb von AB; dann ist die Konstruktion wie beschrieben ausführbar und man erhält eindeutig die Strecke $EF_1 = EF_2$.

b) E liegt auf A oder auf B. Dann ist $A = E$ bzw. $B = E$ und $A = F_1 = F_2$ bzw. $B = F_1 = F_2$, d.h., es ist $EF_1 = EF_2 = 0$ und damit $A = D_1 = D_2$ bzw. $B = D_1 = D_2$. Es gibt genau einen Kreis.

c) E liegt zwischen A und B. Dann hat der Thaleskreis keinen Schnitt mit K_x und die Konstruktion ist nicht ausführbar.

d) Es gibt kein E (AB und g liegen parallel). Dann berührt der Kreis K_1 die Gerade g im Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechten s. Die Aufgabe hat nur eine Lösung, die aber durch die Konstruktionsbeschreibung nicht erfasst wird; im vorliegenden Fall trifft d nicht zu.

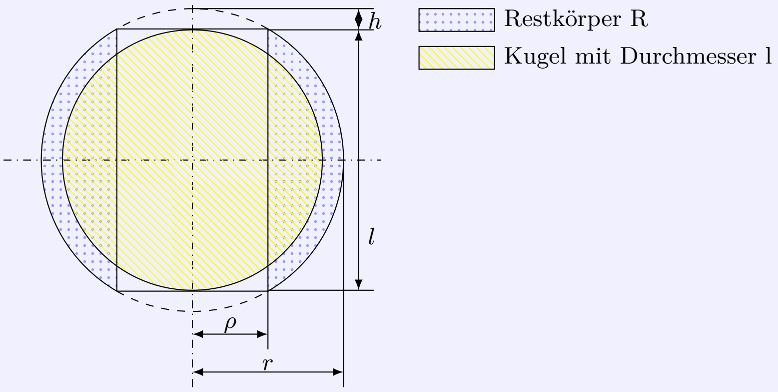
Bei der gestellten Aufgabe trifft Fall a zu.
Die Konstruktion nach 3. ist stets zweideutig für a) und eindeutig für b), dagegen für c) und d) nicht ausführbar. Die Konstruktion nach 4. und 5. sind dann jeweils eindeutig und stets ausführbar. Damit ergeben sich folgende Möglichkeiten:

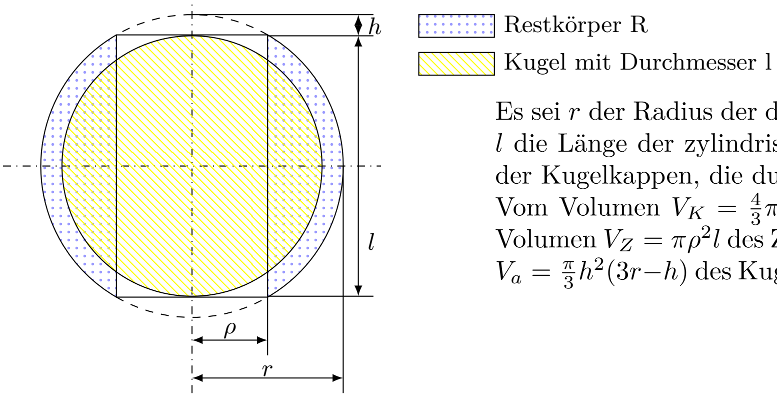
1. A und B liegen in verschiedenen der durch g begrenzten Halbebenen oder beide auf g: keine Lösung.

2. A und B liegen nicht in verschiedenen der Halbebenen oder nicht beide auf g:
   a) A und B haben von g die gleiche Entfernung: eine Lösung.
   b) A und B haben von g nicht die gleiche Entfernung:
   b1) Eine der beiden Punkte A und B liegt auf g: eine Lösung
   b2) Keiner der beiden Punkte A und B liegt auf g: zwei Lösungen

Der letzte Fall trifft bei der gestellten Aufgabe zu.

Aufgabe 18/62
Bei zentrisch-zylindrischer Durchbohrung einer Kugel verbleibt ein ringförmiger Restkörper R. Es soll nachgewiesen werden, dass der Rauminhalt V_R dieses Restkörpers gleich dem Rauminhalt V_K einer Kugel mit dem Durchmesser l ist, wenn l die Länge der zylindrischen Bohrung ist (Abbildung).





Es sei r der Radius der durchbohrten Kugel, ρ der Radius und l die Länge der zylindrischen Bohrung, ferner sei h die Höhe der Kugelkappen, die durch die Bohrung erfasst werden.
Vom Volumen $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$ der Kugel sind abzuziehen a) das Volumen $V_Z = \pi\rho^2 l$ des Zylinders und b) zweimal das Volumen $V_a = \frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$ des Kugelabschnitts (Abbildung). Es gilt also

$$V_R = V_K - V_Z - 2V_a = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi\rho^2 l - \frac{2\pi}{3}(3r-h) = \frac{\pi}{6}[8r^3 - 6\rho^2 l - 4h^2(3r-h)]$$

Nun ist aber nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\rho^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$, ferner ist $2h = 2r - l$, also $h = \frac{2r-l}{2}$, $h^2 = r^2 - rl + \frac{l^2}{4}$. Damit ergibt sich

$$V_R = \frac{\pi}{6}\left[8r^3 - 6(r^2 - \frac{l^2}{4})l - (4r2 - 4rl + l^2)\frac{4r+l}{2}\right] = \frac{\pi}{6}l^3$$

Es ist aber $V_K = \frac{\pi}{6}l^3$.

Aufgabe 19/62
Elli und Gerda erhalten das gleiche Monatsgehalt. "Als ich noch mein Anfängergehalt bekam, wurden mir einmal 13 Geldscheine ausgezahlt, und zwar doppelt soviel 50-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch einige 10-DM-Scheine; heute kann ich dasselbe sagen", erklärt Elli.
Da erwidert Gerda: "Ich bekam 5 mal soviel 20-DM-Scheine wie 1-DM-Scheine, dazu noch 5-DM-Scheine, im ganzen doppelt so viele wie du. Wenn ich erst über 400 DM verdienen werde, spare ich doppelt soviel wie jetzt."
Wieviel Gehalt wurde jeder gezahlt, und wieviel Scheine jeder Sorte erhielten sie?

Wir bezeichnen die unbekannten Anzahlen folgendermaßen: x Anzahl der Fünfzig-DM-Scheine, y Anzahl der Zwanzig-DM-Scheine, z Anzahl der Zehn-DM-Scheine, u Anzahl der Fünf-DM-Scheine, v Anzahl der Eine-DM-Scheine.
Dann gelten auf Grund der Angaben von Elli und Gerda folgende Gleichungen:

$$x + z + v = 13(1), x - 2v = 0(2), y + u + v = 26(3), y - 5v = 0(4)$$

Es handelt sich um ein Gleichungssystem von vier Gleichungen mit fünf Unbekannten; da die Lösungen Anzahlen darstellen, kommen für sie nur positive ganze Zahlen in Frage (diophantisches Problem). Aus der Gleichung (4) erkennt man, dass y durch 5 teilbar ist. Damit kommen vier Lösungen in Betracht:

$$\begin{aligned} y = 5 \text{ mit } v = 1, u = 20, x = 2, z = 10 \qquad & (1.)\\ y = 10 \text{ mit } v = 2, u = 14, x = 4, z = 7 \qquad & (2.)\\ y = 15 \text{ mit } v = 3, u = 8, x = 6, z = 4 \qquad & (3.)\\ y = 20 \text{ mit } v = 4, u = 2, x = 8, z = 1 \qquad & (4.) \end{aligned}$$

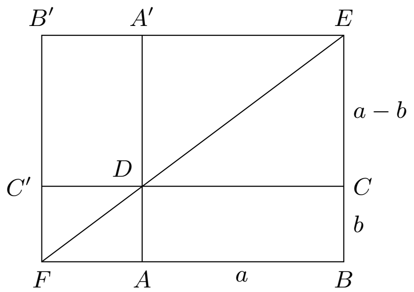
Werte $y \geq 25$ kommen nicht in Frage, da sonst andere der gesuchten Werte negativ werden. Damit ergeben sich zunächst folgende vier Möglichkeiten:

	Elli	Gerda
1.	$2 \cdot 50{,}00$ DM = $100{,}00$ DM $10 \cdot 10{,}00$ DM = $100{,}00$ DM $1 \cdot 1{,}00$ DM = $1{,}00$ DM Summe 201,00 DM	$5 \cdot 20{,}00$ DM = $100{,}00$ DM $20 \cdot 5{,}00$ DM = $100{,}00$ DM $1 \cdot 1{,}00$ DM = $1{,}00$ DM Summe 201,00 DM
2.	$4 \cdot 50{,}00$ DM = $200{,}00$ DM $7 \cdot 10{,}00$ DM = $70{,}00$ DM $2 \cdot 1{,}00$ DM = $2{,}00$ DM Summe 272,00 DM	$10 \cdot 20{,}00$ DM = $200{,}00$ DM $14 \cdot 5{,}00$ DM = $70{,}00$ DM $2 \cdot 1{,}00$ DM = $2{,}00$ DM Summe 272,00 DM
3.	$6 \cdot 50{,}00$ DM = $300{,}00$ DM $4 \cdot 10{,}00$ DM = $40{,}00$ DM $3 \cdot 1{,}00$ DM = $3{,}00$ DM Summe 343,00 DM	$15 \cdot 20{,}00$ DM = $300{,}00$ DM $8 \cdot 5{,}00$ DM = $40{,}00$ DM $3 \cdot 1{,}00$ DM = $3{,}00$ DM Summe 343,00 DM
4.	$8 \cdot 50{,}00$ DM = $400{,}00$ DM $1 \cdot 10{,}00$ DM = $10{,}00$ DM $4 \cdot 1{,}00$ DM = $4{,}00$ DM Summe 414,00 DM	$20 \cdot 20{,}00$ DM = $400{,}00$ DM $2 \cdot 5{,}00$ DM = $10{,}00$ DM $4 \cdot 1{,}00$ DM = $4{,}00$ DM Summe 414,00 DM

Aus den weiteren Angaben von Gerda und Elli lässt sich nun folgendes schließen:
a) Mindestens die Lösung 1 scheidet aus, da Elli als Anfängerin (bei niedrigerem Gehalt als heute!) eine gleiche Verteilung der Scheine erhielt.
b) Die Lösung 4 scheidet aus, da Gerda nicht über 400,00 DM verdient.
c) Es verbleiben daher die Lösungen 2 und 3 als Möglichkeiten. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kann man aus Gerdas Bemerkung vermuten, dass sie bereits über 300,00 DM verdient (Lösung 3); jedoch ist dieser Schluss nicht zwingend. Die Aufgabe ist also nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe 20/62
Gegeben sind a und b mit $a > b$. Es ist $\frac{ab}{a-b}$ zu konstruieren.

Das Produkt ab kann man als den Flächeninhalt F eines Rechtecks $ABCD$ mit den Seiten a und b auffassen. Bezeichnet man die gesuchte Größe mit x, so gilt $\frac{ab}{a-b} = x$ oder $x(a-b) = ab$.
Damit ergibt sich x als Seite eines Rechtecks $A'B'C'D'$ mit dem Flächeninhalt F und den Seiten x und $a-b$. Das Problem stellt also konstruktiv eine Flächenverwandlung dar: Es ist das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten a und b in ein flächengleiches Rechteck $A'B'C'D'$ mit den Seiten x und $a-b$ zu verwandeln. Dazu bieten sich mehrere Konstruktionsmöglichkeiten an. Als einfachste erscheint die folgende (Abbildung):



1. Man konstruiert das Rechteck $ABCD$ mit $AB = a$ und $BC = b$.
2. Man verlängert BC über C hinaus um $a-b$ bis E.
3. Man bringt die Geraden durch A und B sowie durch E und D zum Schnitt; dieser sei F.
4. Man errichtet in F auf AF und in E auf CE die Senkrechten; deren Schnitt sei B'.
5. Man verlängert AD bis zum Schnitt A' mit EB' und CD bis zum Schnitt C' mit FB'.
Das Rechteck $A'B'C'D'$ ist das gesuchte.

Es ist zu beweisen: 1. $ABCD = A'B'C'D'$, 2. $A'D = a-b$ oder $C'D = a-b$.
1. $\triangle\ BEF \cong \triangle\ B'FE$ wegen $EF = EF, \measuredangle BFE = \measuredangle BE'F, \measuredangle BEF = \measuredangle B'FE$ (beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)
$\triangle\ AFD \cong \triangle\ C'DF$ wegen $DF = DF, \measuredangle AFB = \measuredangle C'DF, \measuredangle ADF = \measuredangle C'FD$ (beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)
$\triangle\ CDE \cong \triangle\ A'ED$ wegen $DE = DE, \measuredangle CDE = \measuredangle A'ED, \measuredangle CED = \measuredangle A'DE$ (beide sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.)
Daraus folgt:

$$\square ABCD = \triangle\ BEF - \triangle\ AFD - \triangle\ CDE = \triangle\ B'FE - \triangle\ C'DF - \triangle\ A'ED = \square A'B'C'D'$$

2. $A'D \| EC, A'E \| DC$, daraus folgt $A'D = EC = a-b$ (nach Konstruktion).

Lösung von Klaus Müller:

Konstruktionsbeschreibung:
Die Strecke $AB = b$ wird über B hinaus um a verlängert bis zum Punkt C. Auf AC wird in B die Senkrechte errichtet, die den Thaleskreis über AC in D schneidet. Auf $BC = a$ wird von C aus die Strecke $b = CE$ abgetragen.
Die Mittelsenkrechte auf DE schneidet die Gerade durch A und C in F. Der Kreisbogen um F mit dem Radius EF schneidet die Gerade durch A und C in G. Die Strecke GB ist die gesuchte.

Beweis: $ab = DB^2$ (Höhensatz), $GB \cdot BE = DB^2$ (Höhensatz). $BE = a-b$ (nach Konstruktion), also $GB \cdot (a-b) = ab$, und somit

$$GB = \frac{ab}{a-b}$$

2. Lösung von Klaus Müller:

Konstruktionsbeschreibung:
Man zeichne unter beliebigem Winkel zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen und trage auf dem einen von ihnen die Strecke $SA = a$, auf dem anderen die Strecke $SB = a$ ab.
Auf AS trage man von A aus die Strecke $AC = b$ ab. Die Parallele zu CB durch A schneidet den Strahl SB in D. Die Strecke BD ist die gesuchte.

Beweis: Nach dem ersten Strahlensatz gilt $BD : AC = BS : CS$, d.h.

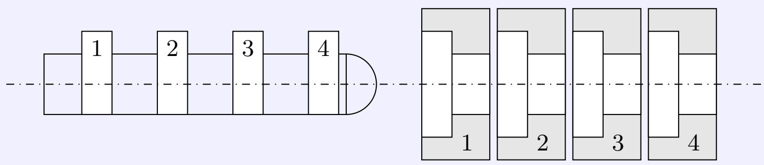
$$BD = \frac{BS \cdot AC}{CS} = \frac{ab}{a-b}$$

Lösung von Hans-Jürgen Weiß:

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, aus einem Rechteck mit den Seiten a und b ein flächengleiches Parallelogramm mit der Höhe $a - b$ zu konstruieren.

In dem Rechteck $ABCD$ sei $AB = a$, $BC = b$ $(a > b)$. Man schlage mit b als Radius einen Kreisbogen um B, der AB in E schneidet. Nach Konstruktion ist $AE = a - b$.
Nun schlage man über AB den Thaleskreis und um A mit AE als Radius einen Kreisbogen, der den Thaleskreis in F schneidet. Es ist $AF = a - b$ nach Konstruktion und $AF \perp FB$. Die Gerade durch B und F schneidet die Gerade durch C und D in C', die Parallele durch A zu BC' die Gerade durch C und D in D'.
Das Parallelogramm $ABC'D'$ hat mit dem Rechteck die Seite AB und die Höhe $BC = AD$ gemeinsam, beide sind also flächengleich. Ferner hat das Parallelogramm $ABC'D'$ andererseits die Höhe $AF = a - b$ auf der Seite BC'.
Demnach ist $BC' = AD' = \frac{ab}{a-b}$ die gesuchte Strecke.

Aufgabe 21/62



Bei einem schlüssellosen Vorhängeschloss wird der Riegelteil mit vier einseitig gelegenen, gleichen und gleichabständigen Zähnen in eine Hülse mit vier gleichen, unabhängig voneinander um die Riegelachse drehbaren Ringen eingeführt (Abbildung). Das ist aber nur bei einer bestimmten Stellung der Ringe möglich, ebenso das Öffnen des Schlosses.
Auf den Ringen sind je sechs Buchstaben eingeprägt; vier davon (je Ring einer) geben bei der Öffnungsstellung das dem Besitzer bekannte Schlüsselwort.

a) Wieviel verschiedene Schlüsselwörter sind bei dieser Konstruktion an jedem Schloss möglich? Als "Schlüsselwort" gilt jede (auch sinnlose) Zusammenstellung von vier Buchstaben.

b) Es ist die Sicherheit dieses Schlosses mit der eines nach demselben Prinzip gebauten zu vergleichen, das aber sechs Ringe mit je vier Buchstaben aufweist.

c) Wieviel verschiedene Ringe mit je sechs verschiedenen aus den 26 Buchstaben des Alphabets kann der Herstellerbetrieb anfertigen?
Dabei gelten Ringe dann als gleich, wenn sie - ohne Rücksicht auf die Reihenfolge - nur gleiche Buchstaben aufweisen und der Einschnitt unter demselben Buchstaben ist.

d) Wieviel Schlösser mit verschiedenen Schlüsselwörtern kann man aus diesen Ringen herstellen?

a) Man kann zunächst den ersten Ring in sechs verschiedene Stellungen bringen. Dann sind bei jeder dieser Stellungen sechs Stellungen des zweiten Ringes möglich. Also ergeben sich für die Stellungen der ersten beiden Ringe bereits 36 verschiedene Möglichkeiten.
Bei jeder davon kann man wieder auf sechs verschiedene Weisen den dritten Ring einstellen, so dass sich damit 216 Stellungen ergeben.
Schließlich multipliziert sich diese Zahl wieder mit sechs, wenn man nun noch den letzten Ring einstellt, so dass sich insgesamt 1296 verschiedene Einstellmöglichkeiten ergeben.
Allgemein kann man zeigen, dass sich bei n Ringen mit je m Zahlen m^n verschiedene Schlüsselwörter bilden lassen.

b) Aus der Lösung von a) ergibt sich sofort:
1. Schloss mit vier Ringen zu je sechs Buchstaben enthält 1296 Schlüsselwörter,
2. Schloss mit sechs Ringen zu je vier Buchstaben enthält 4096 Schlüsselwörter.
Die Sicherheit des zweiten Schlosses verhält sich also zu der des ersten wie $4096 : 1296 \approx 3 : 1$, d.h., das zweite Schloss ist etwa dreimal so sicher wie das erste.

c) Es ist festzustellen, wieviel Möglichkeiten es gibt, aus n (in unserem Fall $n = 26$) verschiedenen Elementen k (in unserem Fall $k = 6$) verschiedene auszuwählen.
Zunächst kann man aus den 26 Buchstaben auf 26 verschiedene Weisen einen Buchstaben auswählen.

Bei jeder dieser 26 Möglichkeiten gibt es jetzt 25 Möglichkeiten zur Wahl eines zweiten Buchstaben, im ganzen also $26 \cdot 25$.
Dabei überlegt man sich aber leicht, dass nun jede Buchstabenzusammenstellung doppelt vorkommt: einmal wurde z.B. zu c der Buchstabe d gewählt und einmal zu d der Buchstabe c. Demnach muss man das Produkt $26 \cdot 25$ noch durch zwei teilen, um die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten zu erhalten.
Bei jeder dieser Möglichkeiten hat man wiederum 24 neue Auswahlmöglichkeiten für den dritten Buchstaben, wobei sich aber wieder jede Buchstabenkombination mehrfach ergibt: Einmal wird z.B. zu (ab) der Buchstabe c, ein andermal zu (bc) der Buchstabe a und zum dritten zu (ac) der Buchstabe b hinzugefügt.
Andere Zusammenstellungen der drei Elemente a, b und c gibt es nicht. Also ist die Anzahl der $26 \cdot 25 \cdot 24$ Kombinationen nunmehr auf $\frac{26\cdot 25\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3} = 2600$ angewachsen.
Man erkennt, wie die Entwicklung weitergeht:
Allgemein gilt für die Anzahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen

$$x = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k}$$

in unserem Fall also $x = 230230$.
Da aber jeder der Ringe den Einschnitt unter jedem Buchstaben haben kann, muss diese Anzahl noch mit sechs multipliziert werden: $230230 \cdot 6 = 1381380$. Es gibt also 1381380 verschiedene Ringe.

d) Da jeder der 26 Buchstaben auf jedem der vier Ringe eines Schlosses auftreten kann, läuft die Aufgabe darauf hinaus, festzustellen, wieviel verschiedene Zusammenstellungen von 4 aus 26 Buchstaben es gibt, wenn es dabei wohl auf die Reihenfolge ankommt, aber jeder Buchstabe sich bis zu viermal wiederholen kann.
Zunächst kann man 26 Buchstaben auswählen; bei jeder dieser 26 Möglichkeiten kann man wieder auf 26 verschiedene Weisen einen zweiten Buchstaben wählen, so dass man damit schon $26 \cdot 26 = 26^2$ Möglichkeiten hat.
Man überlegt sich nun weiter, dass bei der Wahl des dritten Buchstabens sich diese Zahl wieder mit 26 multipliziert: 26^3. Bei der Wahl des vierten ergeben sich dann $26^4 = 456976$ verschiedene Möglichkeiten.
Offensichtlich gilt allgemein dieselbe Formel wie bei a).

Aufgabe 22/62
Gesucht sind die Ellipse und die Hyperbel mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die lineare Exzentrizität ist $e = 20$.
2. Die senkrecht aufeinanderstehenden Brennstrahlen l_1 und l_2 stehen zueinander im Verhältnis $l_1 : l_2 = 4 : 3$.

Es sind a) die Längen der Brennstrahlen l_1 und l_2 zu bestimmen und b) die Gleichungen der Kegelschnitte aufzustellen.

a) Es seien P_1 und P_2 die Brennpunkte der beiden Kegelschnitte (wegen der Gleichheit der linearen Exzentrizität fallen bei Übereinstimmung der Achsen auch die Brennpunkte zusammen) und P_8 einer der Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinanderstehen. Die Punkte P_1, P_2 und P_8 bilden ein rechtwinkliges Dreieck, P_8 liegt daher auf dem Thaleskreis über P_1P_2. Man erkennt sofort, dass es (bis auf Symmetrie an den Kegelschnittachsen) genau einen Punkt P_8 gibt, d.h., Ellipse und Hyperbel schneiden einander in P_8. Es gelten nun die folgenden Gleichungen:

$$l_1 : l_2 = 4 : 3 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad P_1P_2^2 = 4e^2 = l_1^2 + l_2^2 \quad (2)$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) folgt $4e^2 = \frac{25}{16} l_1$ und $4e2 = \frac{25}{9} l_2$. Mit $e = 20$ ergibt sich daraus $l_1 = 32$ und $l_2 = 24$.

b) Die Ellipsengleichung kann man in der folgenden Form schreiben: $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$ (4). Wir ersetzen b^2 durch die Relation $b^2 = a^2 - e^2$ und erhalten damit

$$x^2(a^2 - e^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad (4a)$$

Um a zu ermitteln, errechnen wir die Koordinaten von P_8 und setzen diese nebst $e = 20$ in (4a) ein. Durch y_8 zerlegen wir das Dreieck $P_1P_2P_8$ in zwei rechtwinklige Teildreiecke. Dann gilt nach dem Lehrsatz des

Pythagoras $l_1^2 = y_8^2 + (e + x_8)^2$ (5a) und $l_2^2 = y_8^2 + (e - x_8)^2$ (5b).
Durch Subtraktion einer dieser beiden Gleichungen von der anderen und Auflösung nach x^2 folgt daraus $x_s = 5{,}6$ und damit $y_s = \pm 1{,}2$. Setzt man diese Werte in (4a) ein, so ergibt sich nach Auflösung der entstehenden biquadratischen Gleichung

$$a4 - 800a^2 + 12544 = 0 \to a_1^2 = 784; a_1 = 28 \text{ und } a_2^2 = 16; a_2 = 4$$

Aus $b^2 = a^2 - e^2$ folgt weiter $b_1^2 = 384$, also $b_1 \approx 19{,}6$ und $b_2^2 = -384$, also $b_2 \approx 19{,}6i$. Offenbar scheiden a_2 und b_2 als (im Reellen) unbrauchbar aus, so daß die Gleichung der Ellipse lautet

$$384x^2 + 784y^2 = 301056 \to \frac{x^2}{784} + \frac{y^2}{384} = 1$$

Analog erhält man aus der Hyperbelgleichung $x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$ mit $b^2 = e^2 - a^2$ die Werte $a_1 = 28, a_2 = 4$ sowie $b_1 \approx 19{,}6i, b_2 \approx 19{,}6$. Man erkennt, dass in diesem Fall die Werte a_1 und b_1 als unbrauchbar ausgeschieden werden müssen. Die Hyperbelgleichung nimmt damit die Form an

$$384x^2 - 16y^2 = 6144 \to \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{384} = 1$$

Aufgabe 23/62
Eine Gesellschaft von 12 Personen wollte nach einem 20 km entfernten Ort gelangen. Ihr stand jedoch nur eine Taxe zur Verfügung, die außer dem Fahrer drei Personen befördern kann. Man arbeitete einen ”Transportplan” aus, der garantierte, dass bei gleichzeitigem Aufbruch aller Personen auch alle gleichzeitig am Ziel anlangten. Dabei wurde eine Durchschnittsgeschwindigkeit der Taxe von 65 $\frac{km}{h}$ und der Fußgänger von 5 $\frac{km}{h}$ vorausgesetzt.
Wie sah der Transportplan aus?

Wenn alle Personen die Strecke in der gleichen Zeit zurücklegen sollen, müssen sie die gleiche Durchschnittsgeschwindigkeit haben. Das wird dadurch erreicht, dass jeder von ihnen gleich weit zu Fuß geht und gleich weit fährt. Demnach muss die Taxe, um jede Person ein Stück des Weges zu befördern, vier Mal in Richtung des Ziels und dreimal zurückfahren.
Es sei x die Strecke, die jede Person in der Taxe zurücklegt, und y die Rückfahrstrecke. Dann gilt $4x - 3y = 20$. (1)
Während der Zeit, in der die Taxe einmal hin- und zurückfährt, legt ein Fußgänger die Strecke $x - y$ zurück. In der gleichen Zeit zurückgelegte Wege verhalten sich aber wie die Geschwindigkeiten. Also gilt $\frac{x+y}{x-y} = \frac{65}{5} = \frac{13}{1} = 13$. (2)

Man hat damit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten gefunden; die Lösungen sind $x = 14$ und $y = 12$. Das heißt, dass die Taxe 14 km in Richtung des Ziels fährt und 12 km zurück. Zu Fuß sind also 6 km zu gehen. Man rechnet ferner leicht aus, dass die Gesellschaft etwa 1 h 25 min benötigt, um an das Ziel zu gelangen.

Aufgabe 24/62
Die Zahlenfolgen $(s_n) = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...$ und $(t_n) = \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; ...$ haben die Bildungsgesetze $s_n = \frac{1}{n}$ und $t_n = \frac{n-1}{n}$.
Welches Bildungsgesetz hat die aus beiden zusammengesetzte Folge

$$(u_n) = \frac{1}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; ...$$

Anmerkung: Oft wird angegeben: Es ist $u_{2n} = t_n$ und $u_{2n-1} = s_n$. Das ist nicht die gewünschte Lösung. Gesucht wird vielmehr ein einheitliches Bildungsgesetz u_n, das für $n = 1; 2; 3; ...$ die Glieder der zusammengesetzten Folge ergibt.

Die Nennerfolge $(N_n) = 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; ...$ geht aus der natürlichen Zahlenfolge $(n) = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; ...$ hervor, wenn man zu dieser die Folge $(a_n) = 1; 0; 1; 0; ...$ gliedweise addiert und die Glieder der Summenfolge halbiert:

$$(N_n) = \left(\frac{1}{2}[n + a_n]\right)$$

Wie lautet aber das allgemeine Glied der Folge (a_n)? Eine Folge, deren Glieder nur zwei Werte annehmen können, ist die Folge

$$(b_n) = ([-1]^{n-1}) = +1; -1; +1; -1; +1; ...$$

zu ihr braucht man nur die Folge $(c_n) = 1; 1; 1; ... = (1)$ gliedweise zu addieren und die Summenfolge gliedweise zu halbieren. Es folgt dann

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}[b_n + c_n]\right) = \left(\frac{1}{2}([-1]^{n-1} + 1)\right)$$

Damit wird das gesuchte allgemeine Glied der Nennerfolge

$$(N_n) = \left(\frac{1}{2}[n + \frac{1}{2}([-1]^{n-1} + 1)]\right)$$

In der Zählerfolge (Z_n) ist $Z_n = 1$, wenn n ungerade ist. Subtrahiert man 1 von jedem Glied dieser Folge, so geht sie in die Folge $(Z_n|1) = 0; -1; 0; 0; 0; 1; 0; 2; 0; 3; ...$ über. Wir fassen nun die Glieder dieser Folge als Produkte aus den Gliedern einer noch zu bestimmenden Folge (c_n) und den entsprechenden Gliedern der Folge $(b_n) = 0; 1; 0; 1; 0; 1; ...$ auf; für (b_n) gilt offenbar $b_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$. Dann ist $(Z_n - 1) = (c_n b_n)$. Von der Folge (c_n) interessieren nur die Glieder mit geradem Index, da die übrigen Glieder durch die Multiplikation annulliert werden, falls sie endlich sind (was wir von den Gliedern der Folge (c_n) fordern müssen). Wegen $b_n = 1$ für gerades n muss für $n = 2; 4; 6; 8; 10; ...$ gelten $C_n = -1; 0; 1; 2; 3; 4; ....$
Addiert man zu c_n jeweils 2, so erhält man $\frac{n}{2}$; es ist also $c_n = \frac{n}{2} - 2$.
Man erkennt, dass c_n auch für ungerades n endlich bleibt. Damit wird

$$(Z_n - 1) = \left(\left[\frac{n}{2} - 2\right] \cdot \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\right) = (1 + \frac{1}{4}[n - 4][1 + (-1)^n])$$

Aus Z_n und N_n erhält man schließlich

$$u_n = \frac{n + (n-4)(-1)^n}{2n + 1 + (-1)^{n-1}}$$

Lösung von Hans-Joachim Pollack:

Methodisch ist es am zweckmäßigsten, die Bildungsgesetze der Zählerfolge und der Nennerfolge von (u_n) gesondert aufzustellen. Es werde mit der Nennerfolge begonnen:

$$(a_n) = 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; ...$$

Die geradzahligen Glieder folgen dem Bildungsgesetz $(c_n) = \frac{n}{2}$. Da die vorangehenden ungeradzahligen Glieder wertmäßig den folgenden geradzahligen Gliedern gleichen, muss eine Funktion von n gefunden werden, deren Betrag, zu $\frac{n}{2}$, addiert, den folgenden Bedingungen genügt:
Ist n gerade, so ist der Funktionswert gleich Null; ist n ungerade, so ist der Funktionswert gleich $+\frac{1}{2}$.
Auf Grund dieses periodischen Verhaltens liegt es nahe, sich beim Aufbau der Funktion einer trigonometrischen Funktion zu bedienen. Nun ist

$$(d_n) = \left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) = +1; 0; -1; 0; +1; 0; -1; 0; ...$$

$$(d_n^2) = \left(\sin^2\frac{n\pi}{2}\right) = +1; 0; +1; 0; +1; 0; +1; 0; ...$$

$$\left(\frac{1}{2}d_n^2\right) = \left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\right) = +\frac{1}{2}; 0; +\frac{1}{2}; 0; +\frac{1}{2}; 0; +\frac{1}{2}; 0; ...$$

Damit ist

$$(a_n) = \left(c_n + \frac{1}{2}d_n^2\right) = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)$$

Die Zählerfolge lautet $(b_n) = 1; 0; 1; 1; 1; 2; 1; 3; 1; 4; ....$
Die ungeradzahligen Glieder sind alle gleich 1, die geradzahligen durchlaufen — die Zahl Null mit eingeschlossen — die Folge der natürlichen Zahlen. Es muss also eine Funktion von n gefunden werden, deren Betrag, zu 1 addiert, den folgenden Bedingungen genügt:

Ist n geradzahlig, so ist der Funktionswert in der Weise von n linear abhängig, dass er die Folge der ganzen Zahlen — bei der Zahl -1 beginnend — durchläuft, ist n ungeradzahlig, so ist der Funktionswert gleich Null. Nun ist

$$(e_n) = \left(\cos\frac{n\pi}{2}\right) = 0; -1; 0; +1; 0; -1; 0; +1; 0; ...$$
$$(e_n^2) = \left(\cos^2\frac{n\pi}{2}\right) = 0; +1; 0; +1; 0; +1; 0; +1; 0; ...$$
$$\left(\frac{1}{2}(n-4)e_n^2\right) = \left(\frac{1}{2}(n-4)\cos^2\frac{n\pi}{2}\right) = 0; -1; 0; 0; 0; 1; 0; 2; 0; 3; 0; ...$$

und damit

$$(b_n) = \left(1 + \frac{1}{2}(n-4)\cos^2\frac{n\pi}{2}\right)$$

Das Bildungsgesetz der zusammengesetzten Folge lautet mithin

$$(u_n) = \frac{b_n}{a_n} = \left(\frac{1+\frac{1}{2}(n-4)\cos^2\frac{n\pi}{2}}{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi}{2}}\right)$$

Anmerkung: Die Periodizität der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, aber auch das periodische Verhalten der Funktion i^n ermöglichen ein abgewandeltes Bildungsgesetz

$$(u_n) = \left(\frac{1+0{,}5(n-4)i^n\cos\frac{n\pi}{2}}{\frac{n}{2}+0{,}5i^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2}}\right)$$

Lösung von Hans-Joachim Pollack:

Aus der letzten Gleichung lässt sich mit Hilfe der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ eine weitere Lösung entwickeln. Aus der Eulerschen Identität folgt

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}, \qquad i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Durch Einsetzen in die entsprechenden Ausdrücke des allgemeinen Gliedes u_n ergibt sich:

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}in\pi}+e^{-\frac{1}{2}in\pi}}{2}, \qquad \sin\frac{n\pi}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}in\pi}-e^{-\frac{1}{2}in\pi}}{2}, \qquad i^n = e^{\frac{1}{2}in\pi}, \qquad i^{n-1} = \frac{1}{i}e^{\frac{1}{2}in\pi}$$

und weiter

$$i^n\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2}(e^{in\pi}+1) \qquad ; \qquad i^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{2}(e^{in\pi}-1)$$
$$u_n = \frac{4+(n-4)(e^{in\pi}+1)}{2n-(e^{in\pi}-1)}$$

Lösung von Jürgen Berndt:

In der Folge (u_n) bilden die s_n das 1., 3., 5., ... Glied, die t_n das 2., 4., 6., ... Glied. Demzufolge ergibt sich für (u_n) unter Einführung der mod-Funktion:

$$(u_n) = \frac{2}{n+1}(n \mod 2) + \frac{n-2}{n}[(n-1) \mod 2]$$

(dabei bedeutet n mod a den Rest, den n beim Teilen durch a lässt)

Lösung von F. Götze:

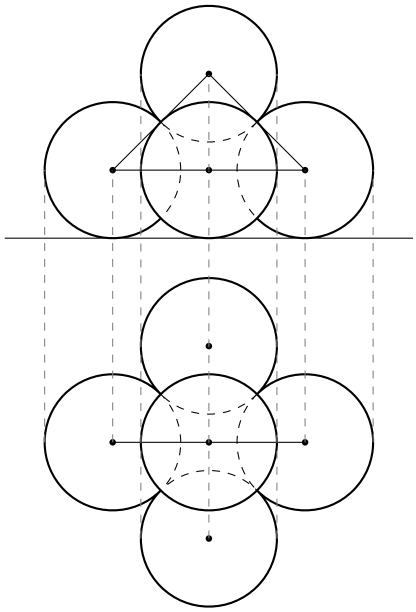
Wir führen die Funktion "größtes Ganzes einer reellen Zahl" ein und drücken dies durch eine eckige Klammer aus; zum Beispiel ist $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $\left[\frac{11}{3}\right] = 3$, $[1{,}9999] = 1$.
Mit dieser Symbolik ergibt sich für den Nenner der Folge (u_n) die Darstellung

$$\left[\frac{n+1}{2}\right], \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Berücksichtigt man noch, dass für die geraden n jedes einzelne Glied der Folge (u_n) einen um 1 kleineren Zähler hat als der Nenner und dass für ungerade n der Zähler stets den Wert 1 besitzt, so lässt sich das Bildungsgesetz wie folgt angeben:

$$u_n = \frac{\frac{1+(-1)^n}{2}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)+\frac{1-(-1)^n}{2}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

Aufgabe 25/62
Ein Lehrling soll in einer Kugellagerfabrik 1000 Kugeln mit einem Durchmesser von 1 cm abzählen. Um diese Arbeit zu beschleunigen, nimmt er ein Gefäß mit den Innenmaßen 10 cm x 10 c m x 10 cm; er legt die erste Schicht sauber ein und füllt dann weiter auf.
Zum Schluss stellt er fest, dass entgegen seinen Erwartungen der Innenraum des Gefäßes nicht völlig gefüllt wird. Er zählt deshalb die Kugeln ab. Überraschenderweise sind es mehr als tausend.
Wie viele waren es, und wieviel Zentimeter fehlten von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes?



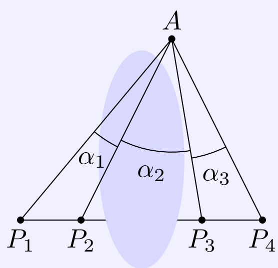
Die 2., 4., 6., ... Kugelschicht besteht nur aus je 81 Kugeln, da sich jede Kugel dieser Schicht in die Vertiefung zwischen jeweils 4 Kugeln der vorhergehenden Schicht legt. Die 1., 3..5., ... Schicht besteht dagegen — entsprechend den Innenmaßen des Gefässes — aus 100 Kugeln.
Den Abstand zweier benachbarter Ebenen durch die Kugelmittelpunkte erhält man durch eine an Hand der Abbildung durchgeführte Überlegung zu $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm. Damit haben n Schichten die Gesamtdicke $(1 + \frac{n-1}{2}\sqrt{2})$ cm.
Es ist nun die größte (natürliche) Zahl n zu finden, für die gilt

$$\left(1 + \frac{n-1}{2}\sqrt{2}\right) \leq 10$$

oder, was dasselbe besagt, $n \leq 9\sqrt{2} + 1 \approx 13{,}73$.
Das heißt also, es sind 13 Schichten im Gefäß, 7 zu je 100 und 6 zu je 81 Kugeln, insgesamt demnach 1186.

Die Gesamthöhe dieser 13 Schichten ist $\left(1 + \frac{12}{2}\sqrt{2}\right) = (1+6\sqrt{2}) \approx 9{,}48$ cm. Von der obersten Kugelschicht bis zum Rand des Gefäßes fehlen also noch ungefähr 0,52 cm.

Aufgabe 26/62



Die Länge der nicht zugänglichen Strecke P_2P_3 (Abbildung) soll ermittelt werden. Messbar sind auf Grund der Geländeverhältnisse die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 (wobei P_1 und P_4 auf den Verlängerungen von P_2P_3 liegen) und die Winkel α_1, α_2 und α_3.

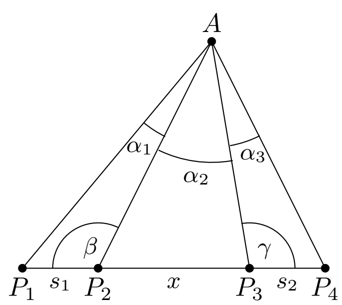
Wir setzen $P_1P_2 = s_1$ und $P_3P_4 = s_2$. Nach dem Sinussatz gilt (vgl. Abbildung)

a) im Dreieck P_1P_3A: $\frac{x+s_1}{P_1A} = \frac{\sin \alpha_1+\alpha_2}{\sin\beta}$ (1)

b) im Dreieck P_1P_2A: $\frac{P_1A}{s_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_1}$ (2)

c) im Dreieck P_2P_4A: $\frac{x+s_2}{P_4A} = \frac{\sin \alpha_2+\alpha_3}{\sin\gamma}$ (3)

d) im Dreieck P_3P_4A: $\frac{P_4A}{s_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_2}$ (4)



Damit hat man 4 Bestimmungsgleichungen mit 5 Unbekannten $x, P_1A, P_4A, \sin\beta, \sin\gamma$. Da die Winkel β und γ durch die Winkelsummenbeziehung im Dreieck miteinander verbunden sind, ist zu erwarten, dass bei geeigneten Substitutionen die trigonometrischen Funktionen dieser Winkel gleichzeitig aus der Rechnung herausfallen und damit das System eindeutig lösbar ist.

Aus (2) ermittelt man

$$P_1A = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_1}s_1$$

dies in (1) eingesetzt, ergibt

$$x + s_1 = s_1\frac{\sin\beta\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\gamma} \qquad (1a)$$

Analog ergibt sich aus (4) und aus (3)

$$P_3A = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_3}s_2 \qquad ; \qquad x + s_2 = s_2\frac{\sin\gamma\sin(\alpha_2+\alpha_3)}{\sin\alpha_3\sin\beta} \qquad (2a)$$

Löst man (2a) nach $\sin\gamma$ auf und substituiert man den dafür gefundenen Wert in (1a), so folgt nach Umrechnung

$$(x+s_1)(x+s_2) = s_1s_2\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3} = A$$

Man erkennt, dass mit $\sin\gamma$ zugleich auch $\sin\beta$ eliminiert worden ist. Nach Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$x_{1;2} = -\frac{s_1+s_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s_1-s_2)^2+4A}$$

Da der negative Wurzelwert für die Aufgabenstellung bedeutungslos ist, ergibt sich

$$x = -\frac{s_1+s_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(s_1-s_2)^2+4A}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.
Ergänzung: Setzt man $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{A}}{(s_1-s_2)}$, so kann nach Umrechnung das Ergebnis vereinfacht werden:

$$x = -\frac{s_1+s_2}{2} + \frac{s_1-s_2}{\cos\varphi}$$

Aufgabe 27/62
Ein Quadrat ist in $3\cdot 3 = 9$ quadratische Felder geteilt. In diese 9 Felder sind 9 verschiedene Zahlen aus der Folge $1, 2, 3, ..., 30$ so einzutragen, dass das Produkt aus den drei Zahlen einer jeden Zeile und einer jeden Spalte stets gleich 270 ist.

Es wird zunächst untersucht, welche von den Zahlen $1, 2, ..., 30$ für die Lösung in Frage kommen. Zu diesem Zweck wird das Produkt 270 in Primfaktoren zerlegt: $270 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2^1\cdot 3^3\cdot 5^1$.
Die einzusetzenden Zahlen dürfen demnach nur die Faktoren $2, 3, 3^2, 3^3, 5$ enthalten. Das sind die 10 Zahlen 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27 und 30 und außerdem die Zahl 1. Von diesen 11 Zahlen müssen 2 ausgeschieden werden. Das Produkt aller 11 Zahlen ist $2^5\cdot 3^{11}\cdot 5^4$, während das Produkt der 9 in das Quadrat einzusetzenden Zahlen $270^3 = 2^3\cdot 3^9\cdot 5^3$ ergibt. Das Produkt aller 11 Zahlen enthält also gegenüber dem Produkt der 9 Zahlen im Quadrat den Faktor $2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180$ zu viel. Das Produkt der beiden auszuscheidenden Zahlen ist demnach 180.
Es sind zwei Fälle möglich: $180 = 6\cdot 30 = 10\cdot 18$.

Nunmehr prüfen wir, welche Anordnungsmöglichkeiten für die Primfaktoren bestehen. Da jeder der Primfaktoren 2, 3 und 5 in jeder Zeile und in jeder Spalte in derselben Anzahl auftreten muss, wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein sollen, sind folgende Anordnungen möglich:

```
I)          II)         III)        IV)         V)          VI)
x . .       x . .       . x .       . x .       . . x       . . x
. x .       . . x       x . .       . . x       x . .       . x .
. . x       . x .       . . x       x . .       . x .       x . .
```

Die einzelnen Anordnungen können ineinander übergeführt werden a) durch Vertauschung von Spalten b) durch Vertauschung von Zeilen
Wegen der Gleichwertigkeit dieser Anordnungen ist es gleichgültig, in welches Feld man die 1 einsetzt. Nimmt man das linke obere Feld, so entfallen für das Einsetzen der übrigen Faktoren die Schemata I und II.

Da für die Aufteilung der Primfaktoren 2, 3, 3, 3, 5 nur 4 Schemata (III bis VI) zur Verfügung stehen, fasst man 2 Faktoren zusammen: $3 \cdot 3 = 9$. Man verteilt also 2, 3, 5, 9.
Dabei muss man beachten, dass die Faktoren 5 und 9 so verteilt werden müssen, dass sie nicht in einem gemeinsamen Feld zusammentreffen; denn das Produkt $5 \cdot 9 = 45$ liegt außerhalb der zugelassenen Zahlen. Also setzen wir die Zahlen 5 und 9 nach Schema III und VI (oder IV und V) als Teillösung (a) ein:

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & . \\ 9 & . & 5 \end{matrix}$$

nunmehr sind nicht die Faktoren 2 und 3 nach Schema IV und V einzusetzen. Man erhält:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \cdot 2 & 9 \cdot 3 \\ 5 \cdot 3 & 9 & . \\ 9 \cdot 2 & . & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 27 \\ 15 & 9 & 2 \\ 18 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Die Zahlen 6 und 30 kommen nicht vor. Die Zahlen 10 und 18 auszulassen ist nicht möglich. Versucht man nämlich in Teillösung (a) die 2 einzusetzen, so stößt sie auf jeden Fall an einer Stelle auf eine 5 oder 9, was 10 oder 18 ergeben würde, also gerade die Zahl, die man nicht in das Schema einordnen will.

Zum Schluss soll untersucht werden, wieviel verschiedene Anordnungen der Zahlen aus der oben gefundenen Lösung durch Vertauschung von Zeilen oder Spalten entstehen. Im folgenden Schema (b)

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{matrix}$$

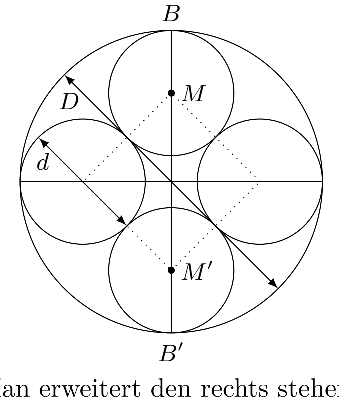
bedeutet die erste Ziffer jeder Zahl die Zeilennummer und die zweite die Spaltennummer. 3 Elemente, hier die Zahlen 1, 2, 3 kann man in 6 verschiedene Anordnungen (Permutationen) niederschreiben.
Die Vertauschungen kann man sowohl mit den Zeilennummern als auch mit den Spaltennummern durchführen. Man findet also 36 verschiedenen Umstellungen des Schemas (b).
Weitere 36 neue Anordnungen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen, erhält man, indem man in jeder der bisher gefundenen 36 Lösungen die Zeilen und die Spalten miteinander vertauscht. Es gibt demnach 72 verschiedene Anordnungen als Lösung der gestellten Aufgabe.

Aufgabe 28/62

a) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser $D = 2R$ sollen sechs kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugel von innen und vier der kleineren Kugel berührt. Wie groß muss der Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln gewählt werden?

b) In eine Hohlkugel mit dem Durchmesser $D = 2R$ sollen acht kleinere, gleich große Kugeln so eingelagert werden, dass jede von ihnen die Hohlkugeln von innen und drei der kleineren Kugeln berührt. Es ist der Durchmesser $d = 2r$ der kleineren Kugeln zu bestimmen.

c) Der Hohlkugel sind vier einander gleiche Kugeln so einzulagern, dass jede Kugel jede andere Kugel berührt. Wie groß ist ihr Durchmesser $d = 2r$?



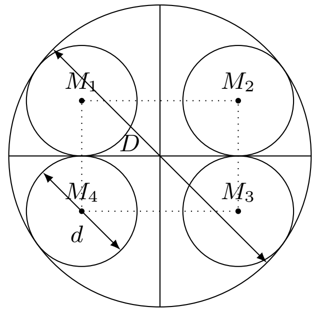
a) Die Mittelpunkte der eingelagerten Kugeln müssen in den Endpunkten eines Oktaeders liegen, dessen Seitenlänge $s = 2r = d$ ist. Der Oktaedermittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der Hohlkugel zusammen. Legt man durch vier (beliebige) Oktaederecken einen ebenen Schnitt, so erhält man die nachfolgende Abbildung.
Der Durchmesser D setzt sich danach aus drei Teilstrecken zusammen: $BB' = BM + MM' + M'B'$.
Nun ist MM' Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge $s = d$. Also ist

$$D = r + d\sqrt{2} + r = d + d\sqrt{2} = d(1+\sqrt{2}) \to d = \frac{D}{\sqrt{2}+1}$$

Man erweitert den rechts stehenden Bruch mit $\sqrt{2} - 1$, um den Nenner rational zu machen:

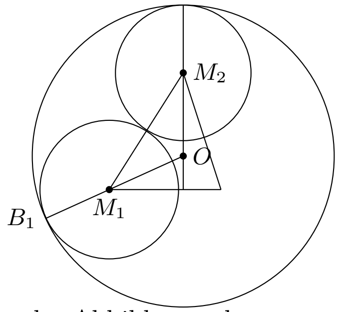
$$d = D(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}414D$$

b) Die Mittelpunkte der eingelagerten Kugeln liegen in den Endpunkten eines Würfels, dessen Mittelpunkt mit dem der Hohlkugel zusammenfällt. Legt man durch den Würfel einen Diagonalschnitt, so erhält man die nachfolgende Abbildung als Schnittfigur.



Die Seiten des Rechtecks, das der Würfeldiagonalschnitt ergibt, sind d und $d\sqrt{2}$. Die Rechteckdiagonalen sind die Körperdiagonalen des Würfels und haben die Länge $d\sqrt{3}$. Es gilt hier für die Zusammensetzung des Durchmessers D der Hohlkugel:

$$D = r + d\sqrt{3} + r = d(1 + \sqrt{3}) \to d = \frac{D}{\sqrt{3}+1} \approx 0.366D$$

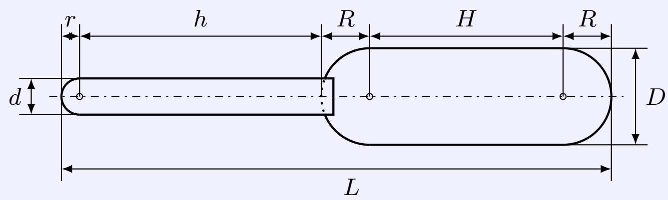


c) Die Mittelpunkte der vier eingelagerten Kugeln bilden ein Tetraeder mit der Kantenlänge d. Der Schnittpunkt der vier Körperhöhen des Tetraeders fallt mit dem Mittelpunkt der Hohlkugel zusammen. Die Körperhöhe ist $\frac{d\sqrt{6}}{3}$. Die Höhen teilen einander im Verhältnis 3 : 1, von den Ecken aus gerechnet. Legt man einen Symmetrieschnitt durch Tetraeder und Hohlkugel, so erhält man die nachfolgende Abbildung:

Aus der Abbildung erkennt man, dass $OB_1 = OM_1 + M_1B_1$ ist, also

$$R = \frac{3}{4} \cdot \frac{d\sqrt{6}}{3} = \frac{d}{4}(\sqrt{6}+2) \to D = \frac{d}{2}(\sqrt{6}+2) \to d = D(\sqrt{6}-2) \approx 0{,}449D$$

Aufgabe 29/62



Es sind die Maße eines Aräometers zu bestimmen, an das folgende Forderungen gestellt werden:
1. Messbereich von $\rho_1 = 1{,}00\frac{g}{cm^3}$ bis $\rho_2 = 2{,}00\frac{g}{cm^3}$;
2. $d = 2r = 1$ cm;
3. $D = 2R = 2$ cm;
4. Die Skalenteilung soll so eingerichtet werden, dass im Mittel 2 mm Skalenlänge einer Differenz von $0{,}01\frac{g}{cm^3}$ entsprechen.
Wie sind die Werte für h, H, L und für die Masse m des Aräometers zu wählen?

Aus 1. und 4. folgt für die Skalenlänge s:

$$s = \frac{\rho_2 - \rho_1}{0{,}01 \text{ gcm}^{-3}} \cdot 2 \text{ mm} = 20 \text{ cm}$$

Offenbar ist $h \geq s$; ein genauerer Wert wird später ermittelt. In eine Flüssigkeit der Dichte ρ_1 taucht das Aräometer bis zum obersten Skalenpunkt ein, das verdrängte Volumen V_1 ist $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$.
In eine Flüssigkeit der Dichte ρ_2 taucht es bis zum untersten Skalenpunkt ein, das verdrängte Volumen V_2 ist $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$. Es gilt

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\rho_2} : \frac{m}{\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}$$

also $V_1 = 2V_2$, mithin auch $V_1 - V_2 = V_2$.

Es ist aber $V_1 - V_2$ gleich dem Volumen der Skalenröhre mit der Länge s, also $V_1 - V_2 = V_2 = \frac{\pi}{4}d^2 s$, und V_2 gleich dem Volumen des Tauchkörpers bis zum Skalenpunkt für ρ_2, also der Summe aus zwei Halbkugeln mit dem Durchmesser D, dem Zylinder mit dem Durchmesser D und der Höhe H sowie dem Zylinder mit dem Durchmesser d und den Höhe x (Stück der Skalenröhre zwischen dem Ansatz am Tauchkörper und dem Skalenpunkt für ρ_2); dabei kann, wie sich später zeigen wird, der Kugelabschnitt am Ansatz der Skalenröhre vernachlässigt werden. Es gilt also:

$$V_2 = \frac{\pi}{6}D^3 + \frac{\pi}{4}D^2H + \frac{\pi}{4}d^2x = \frac{\pi}{4}d^2s \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}D^3 + D^2H + d^2x = d^2s$$

oder $H = \frac{d^2}{D^2}(s-x) - \frac{2}{3}D$. Setzt man zunächst einmal $x = 0$, so ergibt sich $H \approx 3{,}67$ cm. Man wird nun H mit $H = 3{,}5$ cm ansetzen; dann ergibt sich x zu $x \approx 0{,}7$ cm. Damit ergibt sich für h: $h \geq s + x = 20 + 0{,}7 = 20{,}7$ cm.
Da die Skalenröhre auch beim Eintauchen bis zum obersten Skalenpunkt noch aus der Flüssigkeit herausragen muss, damit man sie anfassen kann, wird man h mit $h \approx 22$ cm festsetzen.
(Bemerkung: In der Praxis wird man die genaue Stellung der Skala, also die Lage des unteren Skalenpunktes für ρ_2, durch Eintauchen in eine Probeflüssigkeit der Dichte ρ_2 ermitteln. Dabei gleicht man gleichzeitig die kleine Ungenauigkeit aus, die sich durch die Vernachlässigung des Kugelabschnitts ergibt.)
Die Gesamtlänge L ergibt sich dann zu $L = 2R + H + h + r \approx 28$ cm.
Die erforderliche Masse m erhält man aus folgender Rechnung:

$$m = \rho_1 V_1 = 2\rho_1 V_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \frac{\pi}{4} d^2 h \approx 31{,}4 \text{ g}$$

Aufgabe 30/62
Zu untersuchen sind Kreiskegelstümpfe mit gleicher Höhe und flächengleichen Achsschnitten. Wie groß muss der Deckkreisradius sein, damit das Volumen möglichst groß wird?
Lösung a mit Hilfe, b ohne Verwendung der Differentialrechnung.

Für das Volumen R eines Kreiskegelstumpfs gilt

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R\cdot r + r^2) \qquad \text{(I)}$$

Als Nebenbedingungen treten im vorliegenden Fall auf: $h =$ konstant (gleiche Höhen), $\frac{R+r}{2}\cdot h =$ konstant (flächengleiche Achsschnitte). Aus der letzten Gleichung folgt $R + r = konstant = a$ oder $R = a - r = a - x \quad$ (I) mit $r = x$. Setzt man (II) in (I) ein, so ergibt sich

$$V = \frac{\pi}{3}h(a^2 - 2ax + x^2 + ax - x^2 + x^2) = \frac{\pi}{3}h(x^2 - ax + a^2) \qquad \text{(III)}$$

Lösung a: Man erhält die Extremwerte von V, indem man $V' = 0$ setzt und V'' auf seinen Wert hin überprüft:

$$V' = \frac{\pi}{3}h(2x - a) \qquad V'' = \frac{2\pi}{3}h$$

Man erkennt, dass $V'' > 0$ für jedes x gilt, das heißt, die Funktion V hat keine relativen Maxima im Innern des in Frage kommenden Intervalls. Wenn überhaupt Maxima existieren, müssen sie an den Intervallgrenzen liegen.
Wegen $R \geq 0$ und $r \geq 0$ folgt aus (II) $0 \leq x \leq a$ und $a \geq 0$. Für $x_1 = 0$ und für $x_3 = a$ ergibt sich $V = \frac{\pi}{3}ha^2$. Für $0 < x < a$ ist $x^2 < ax$, also $x^2 - ax < 0$ und folglich $a^2 - ax + a^2 < a^2$, d.h., dass tatsächlich an den Intervallgrenzen maximale Werte liegen.

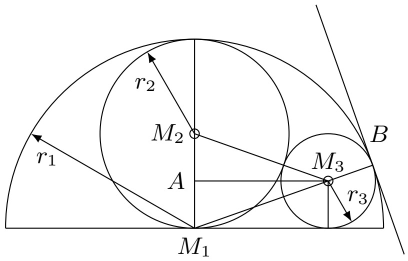
Lösung b: Aus (III) ergibt sich durch einfache Umformung

$$V = \frac{\pi}{3}hx^2 - \frac{\pi}{3}hax + \frac{\pi}{3}ha^2$$

Man erkennt, dass es sich bei V um eine ganze rationale Funktion zweiten Grades handelt. Wegen des positiven Koeffizienten beim quadratischen Glied verläuft die die Funktion darstellende Parabel so, dass sie nach positiven V-Werten hin offen ist. Daher können Maximalwerte nur an den in Frage kommenden Intervallgrenzen auftreten.
Wegen $R \geq 0$ und $r \geq 0$ folgt aus (II) $0 \leq x \leq a$, so dass $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ ein maximales Volumen ergeben: $V_{max} = \frac{\pi}{3}ha^2$.

Schlussfolgerung 1: Aus (II) folgt mit $x_1 = 0, R = a$ und mit $x_2 = a, R = 0$. Das heißt, das Volumen ist dann ein Maximum, wenn der Kegelstumpf zum Kegel wird.
Schlussfolgerung 2: Nicht immer bietet bei Extremwertberechnungen die Differentialrechnung einen Lösungsweg.

Aufgabe 31/62
Es sei K_l ein Halbkreis mit dem Radius r_1, K_2 ein Kreis mit dem Radius $r_2 = 0{,}5r_1$, der den Durchmesser und die Peripherie von K_l berührt, und K_3 ein Kreis mit dem Radius r_3, der sowohl den Durchmesser und die Peripherie von K_l als auch die Peripherie von K_2 berührt.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen für r_3 gilt $4r_3 = r_1$!



Analysis (Abbildung): Wenn K_3 die Peripherie von K_1 im Punkt B berührt, ist die Tangente t in B an K_l gleichzeitig auch Tangente in B an K_3. Folglich bilden die Berührungsradien von K_1 und K_3 eine Gerade, und da M_1 und M_3 auf derselben Seite der Peripherie von K_1 liegen, fällt M_3 auf M_1B. Es ist aber $M_1B = r_1 = 2r_2 = M_1M_3 + r_3$, slso $M_1M_3 = 2r_2 - r_3$.

Ferner kann M_1M_3 nach dem Lehrsatz des Pythagoras aus $M_1A = r_3$ und AM_3 berechnet werden; AM_3 ist nach demselben Satz aus $AM_2 = r_2 - r_3$ und $M_2M_3 = r_2 + r_3$ darstellbar. Mithin kann eine Gleichung mit r_3 als einziger Unbekannter aufgestellt werden.
Beweis:

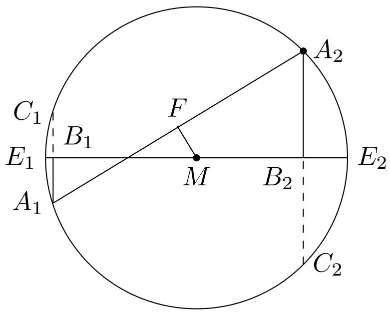
$$M_1M_3^2 = (2r_2 - r_3)^2 = 4r - 2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2 \quad \text{und}$$

$$M_1M_3^2 = r_3^2 + (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = r_3^3 + 4r_2r_3$$

also $r_3^3 + 4r_2r_3 = 4r_2^2 - 4r_2r_3 + r_3^2 \to 2r_3 = r_2$. Wegen $2r_2 = r_1$ wird $4r_3 = r_1$.

Aufgabe 32/62
Der Durchmesser d eines Kreises wird von einer Sehne unter einem Winkel von 30° so geschnitten, dass er im Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ geteilt wird.
a) Wie lang ist die Sehne?
b) Welchen Abstand hat die Sehne vom Mittelpunkt des Kreises?

Da die Länge d des Durchmessers in der Aufgabe nicht angegeben ist, wird er willkürlich mit $d = 2r = 2$ (Längeneinheiten) angenommen. Wenn a und b die beiden Teilstrecken des Durchmessers sind, gilt $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ und $a + b = d = 2$. Daraus folgt $b = 3a = 1{,}5$ und $a = 0{,}5$.
Wir führen weitere Beziehungen entsprechend der Abbildung ein.
Dabei sei FM das Lot von M auf A_1A_2. Aus der Abbildung erkennt man:



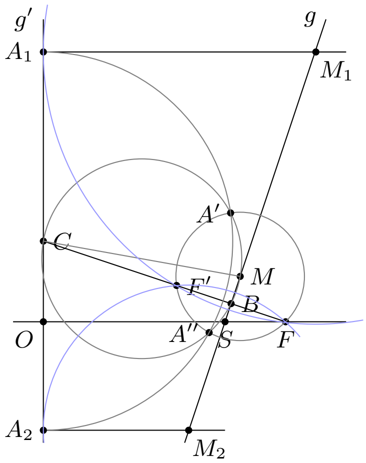
1. Da der Winkel $MDF = 30°$ beträgt, gilt für den Winkel DMF wegen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks, dass $\measuredangle DMF = 60°$ ist. Spiegelt man das Dreieck MDF an A_1A_2, so entsteht demnach ein gleichseitiges Dreieck MDM', in dem $M'F = MF$ und $M'D = DM = 0{,}5$ ist.
Damit ist $MF = 0{,}5DM = 0{,}25$ der Abstand der Sehne A_1A_2 vom Mittelpunkt M des Kreises.

2. Aus der Rechtwinkligkeit des Dreiecks MFA_2 folgt

$$FA_2^2 = MA_2^2 - MF^2 = r^2 - 0{,}25^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \to FA_2 = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{15}$$

Dann ist aber $A_1A_2 = 2FA_2 = \frac{1}{2}\sqrt{15} \approx 1{,}936$.

Aufgabe 33/62
Gegeben sind die Achse einer Parabel mit dem Brennpunkt F und dem Parameter OF sowie eine Gerade g, die die Parabelachse im Punkt S so schneidet, dass $SO > SF$ ist. Es sind die Schnittpunkte von g mit der Parabel zu konstruieren.



Analysis (Abbildung): FF' ist gemeinsame Tangente der drei Kreise um M, M_1, M_2. Nach dem Tangentensatz ist

$$CF \cdot CF' = CA'^2 = CA_1^2 = CA_2^2 \qquad \text{also}$$

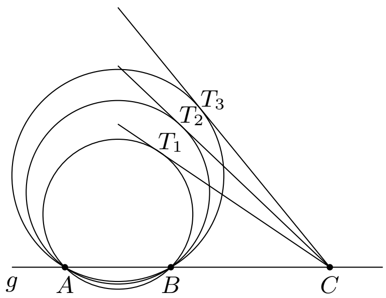
$$CA' = CA_1 = CA_2$$

Die Mittelpunkte M_1 und M_2 haben jeweils den gleichen Abstand von F und g: $M_1F = M_1A_1$ und $M_2F = M_2A_2$. Also sind M_1 und M_2 Punkte der Parabel (laut Definition des Parabel als geometrischer Ort aller der Punkte, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand haben wie von einer gegebenen Gerade). Da M_1 und M_2 außerdem auf g liegen, sind diese Punkte die gesuchten Schnittpunkte.

Konstruktionsbeschreibung: Man wählt auf g einen beliebigen Punkt M und schlägt um ihn mit MF als Radius einen Kreis. Von F aus fällt man auf g das Lot, das man über g hinaus bis zum Schnitt C mit der in O auf der Parabelachse errichteten Senkrechten g' verlängert. Nun schlägt man über CM den Thaleskreis; seine Schnittpunkte mit dem Kreis um M seien A' und A''.
Man schlägt weiter um C mit $CA' = CA''$ als Radius einen Kreis, der g' in A_1 und A_2 schneidet. Die Senkrechten auf g' in diesen Punkten schneiden g in den gesuchten Schnittpunkten M_1 und M_2.

Determination: Es ist laut Aufgabenstellung $SO > SF$. Wegen $BF < SF$ und $CF > OF$ ist auch $CB > BF$ und damit stets auch $CM > MF$. Damit schneidet der Thaleskreis über CM den Kreis um M mit MF als Radius stets in zwei Punkten A' und A''. Wegen $CA' = CA''$ bleibt die Konstruktion trotzdem eindeutig. Alle anderen Konstruktionen sind eindeutig ausführbar.

Aufgabe 34/62
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr zwei Punkte A und B.
Man beweise: Die Länge CT einer Tangente von einem auf g liegenden Punkt C an einen durch A und B gehenden Kreis (T ist der Berührungspunkt) ist nur von der Lage von C, nicht aber vom Radius r des Kreises abhängig.

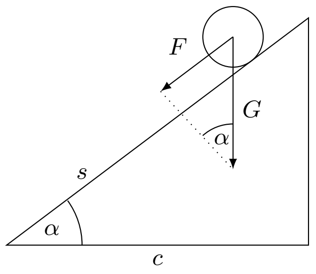


Nach dem Sehnentangentensatz ist das Produkt der Streckenlängen $CA \cdot CB$ gleich dem Quadrat CT^2 des Tangentenabschnitts. Es gilt also für jeden durch A und B gehenden Kreis

$$CT^2 = CA \cdot CB \qquad \text{oder} \qquad CT = \left|\sqrt{CA \cdot CB}\right|$$

Damit ist die Behauptung bewiesen; denn in dieser Gleichung tritt der Radius r nicht auf, sondern nur zwei Strecken, deren Länge von der Lage des Endpunktes C abhängt.

Aufgabe 35/62
Welchen Neigungswinkel α muss eine schiefe Ebene mit der Basis c haben, wenn eine Kugel auf ihr in kürzester Zeit herabrollen soll? Die Reibung und das Drehmoment werden vernachlässigt.



Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein (siehe Abbildung): Länge der schiefen Ebene (Weg) s, Masse der Kugel m, Gewicht der Kugel G, Beschleunigung b, Kraft F, benötigte Zeit t, Fallbeschleunigung g.
Zweckmäßig stellt man die zum Herabrollen erforderliche Zeit als Funktion des Neigungswinkels dar. Es ist

$$s = \frac{b}{2}t^2, \qquad s = \frac{c}{\cos\alpha}, \qquad \text{also} \qquad \frac{c}{\cos\alpha} = \frac{b}{2}t^2 \qquad \text{oder} \qquad t = \sqrt{\frac{2c}{b\cos\alpha}}$$

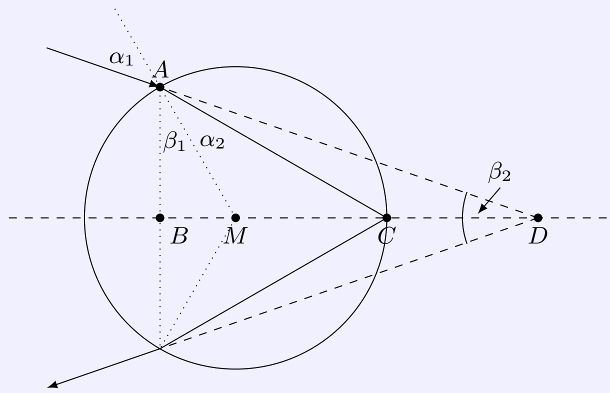
Aus der letzten Gleichung ist noch die Beschleunigung b zu eliminieren. Aus $F = mb$ folgt $b = \frac{F}{m}$ und wegen $F = G - \sin\alpha$ sowie $G = g \cdot m$ ergibt sich $b = g \cdot \sin\alpha$. Demnach ist nach einem Additionstheorem

$$t = \sqrt{\frac{2c}{g \cdot \sin\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{4c}{g \cdot \sin(2\alpha)}}$$

Die Zeit t soll einen Minimalwert annehmen; das ist genau dann der Fall, wenn der Nenner des unter der Wurzel stehenden Bruchs einen Maximalwert annimmt, d.h. also, wenn $\sin(2\alpha) = 1$ ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\alpha = 45°; \qquad t_{min} = \sqrt{\frac{4c}{g}} = 2\sqrt{\frac{c}{g}}$$

Aufgabe 36/62



Ein Lichtstrahl werde in einem kugelförmigen Flüssigkeitstropfen einmal partiell reflektiert. Der Brechungsindex Luft-Flüssigkeit sei n_{LF}.

1. Welchen Winkel können einfallender und ausfallender Strahl maximal miteinander bilden (vgl. Abbildung)?

2. Welche Werte ergeben sich, wenn die Flüssigkeit Wasser ist? Für den Brechungsindex Luft-Wasser gilt $n_{LF} = \frac{4}{3}$.

3. Welche Folgerung lässt das Ergebnis auf den Regenbogen zu?

a) Aus der Abbildung geht hervor: Es ist $\measuredangle MCA = \alpha_2$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck MCA), also ist $\beta_1 + 2\alpha_2 + 90° = 180° \rightarrow \beta_1 = 90° - 2\alpha_2$. Ferner ist $\measuredangle MAD = \alpha_1$ (Scheitelwinkel), also gilt $\frac{\beta_2}{2} + \alpha_1 + \beta_1 = 90°$. Daraus folgt $\beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$.
Nun ist $n_{LF} = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$, d.h. $\alpha_1 = \arcsin(n_{LF} \cdot \sin\alpha_2)$. Demnach folgt

$$\beta_2 = 4\alpha_2 + 2\arcsin(n_{LF} \cdot \sin\alpha_2)$$

Man hat damit β_2 als Funktion von α_2 ausgedrückt. Setzt man $\frac{d\beta_2}{d\alpha_2} = 0$, so liefern die Lösungen dieser Gleichung die Extremwerte dieser Funktion (sofern an diesen Stellen $\frac{d^2\beta_2}{d\alpha_2^2} \neq 0$ ist). Nun ist

$$\frac{d\beta_2}{d\alpha_2} = 4 - \frac{2}{\sqrt{1 - n_{LF}^2 \cdot \sin^2\alpha_2}} \cdot n_{LF} \cdot \cos\alpha_2$$

Mit Nullsetzen folgt

$$\cos\alpha_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n_{LF}^2}}$$

Damit kann man auch β_1, α_1 und β_2 bestimmen. Es wäre noch nachzuprüfen, ob β_2 für das gefundene α_2 ein Maximum annimmt. Wir wollen hier auf die Prüfung verzichten, da sie recht umständlich ist. In der Tat nimmt β_2 ein Maximum an.
Mit $\alpha_1 = \arcsin\left(n_{LF} \cdot \sin\alpha_2\right)$ und $\beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$ wird nun

$$\beta_2 = 4\arccos\left(2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n_{LF}^2}}\right) - 2\arcsin\left(n_{LF} \cdot \sin\arccos\left(2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3n_{LF}^2}}\right)\right)$$

b) Für $n_{LF} = \frac{4}{3}$ ist $\alpha_2 = 40°10' \approx 40°$; $\quad \alpha_2 \approx 59°$ und $\beta_2 \approx 42°$.

c) Der Winkel β_2 ist der Sehwinkel, unter dem der Radius des Hauptregenbogens gesehen wird. Da der Mittelpunkt des Regenbogens der Sonne gerade gegenüberliegt, bedeutet das u.a., dass ein Regenbogen nur dann sichtbar ist, wenn die Sonne nicht höher als 42° über dem Horizont steht.
Bemerkung: Bei der Rechnung wurde von Dispersions- und Interferenzerscheinungen, die das wirkliche Bild des Regenbogens formen, abgesehen.

Lösung von Rüdiger Thiele:

Betrachtet man im Dreieck ACD den Außenwinkel bei C (vgl. Abbildung), so erkennt man, dass gilt

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2 \qquad ; \qquad \beta_2 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1$$

denn das Lot geht durch den Mittelpunkt. Demzufolge ist das Dreieck ACM gleichschenklig. Dann ist

$$\beta_2' = \frac{d\beta_2}{d\alpha_1} = 4\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} - 2 \qquad ; \qquad \beta_2'' > 0$$

Ist $\beta_2' = 0$, so ergibt sich $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{1}{2}$ also $2d\alpha_2 = d\alpha_1$. Aus dem Brechungsgesetz von Snellius folgt

$$\frac{\cos\alpha_1 d\alpha_1}{\cos\alpha_2 d\alpha_2} = n \qquad \text{oder} \qquad n \cdot \cos\alpha_2 = 2\cos\alpha_1$$

Aus $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha 2} = n$ folgt $\sin\alpha_1 = n \cdot \sin\alpha_2$ und

$$\frac{d\sin\alpha_1}{d\alpha_1} = n\frac{d\sin\alpha_2}{d\alpha_1} = n\frac{d\sin\alpha_2 d\alpha_2}{d\alpha_2 d\alpha_1} \qquad \text{also} \qquad \frac{\cos\alpha_1 d\alpha_1}{\cos\alpha_2 d\alpha_2} = n$$

Daraus findet man

$$\sin^2\alpha_2 = \frac{4(-1 + \sin^2\alpha_1) + n^2}{n^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck in das Brechungsgesetz ein, so ergibt sich

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \qquad , \qquad \sin\alpha_2 = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

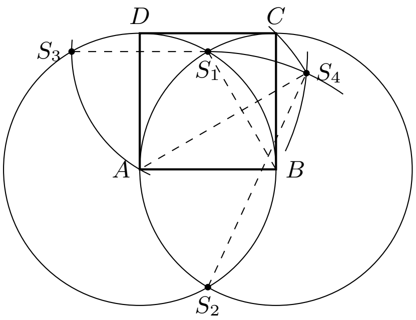
Bei $n_{LW} = \frac{4}{3}$ ist $\beta_2 \approx 41°$. Man müsste beachten, dass für verschiedene Frequenzen des Lichtes der Brechungskoeffizient etwas variiert.

2.3 Aufgaben und Lösungen 1963

Aufgabe 1/63
Gegeben sind zwei Punkte A und B. Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels (also ohne Verwendung eines Lineals) ein Quadrat, in dem A und B benachbarte Eckpunkte sind.

Analysis (Abbildung): Der Punkt C liegt
1. auf dem Kreis um B mit $AB = a$ als Radius,
2. auf dem Kreis um A mit $AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ als Radius.
Der Punkt D liegt 1. auf dem Kreis um A mit $AB = a$ als Radius,
2. auf dem Kreis um B mit $AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ als Radius.
Es kommt also darauf an, die Strecke $AC = BD = a\sqrt{2}$ zu konstruieren. Dazu verhilft die folgende Überlegung:

Die direkte Konstruktion als Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge a ist nicht möglich, da es nicht gelingt, nur mit dem Zirkel die Lage des dritten Eckpunktes unmittelbar zu finden.
Aus der Gleichung $3a^2 - a^2 = 2a^2$ oder $a\sqrt{2} = \sqrt{3a^2 - a^2}$ folgt aber, dass man $a\sqrt{2}$ erhält, wenn es gelingt, ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $a\sqrt{3}$ und einer Kathete a zu konstruieren.
Die Hypotenuse $a\sqrt{3}$ erhält man als doppelte Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a bzw. (da der Fußpunkt der Höhe nicht ermittelt werden kann) als längere Diagonale eines Rhombus mit der Seitenlänge a und der kürzeren Diagonale a. Die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks erfolgt über die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $2a$ und den Schenkeln $a\sqrt{3}$.

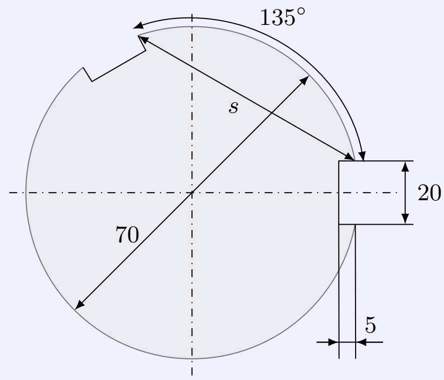


Konstruktion:
Man schlägt um A und um B Kreise mit dem Radius $a = AB$. Ihre Schnittpunkte seien S_1 und S_2. Weiter schlägt man um S_l einen Kreis mit dem Radius a, der den Kreis um A außer in B in S_3 schneidet. Um S_2 und S_3 schlägt man Kreise mit dem Radius $S_3B = S_1S_2$, die sich in S_4 schneiden (bzw. in S_4'). Die Strecke $AS_1 = AS_4'$ hat die Länge der Diagonalen $AC = BD$ im Quadrat $ABCD$.

Der Kreis um A mit dem Radius AS_4 schneidet den Kreis um B mit dem Radius AB in C, und der Kreis um B mit dem Radius AS_4 schneidet den Kreis um A mit dem Radius AB in D.
Determination: Alle Konstruktionen sind (bis auf Symmetrie) stets eindeutig.

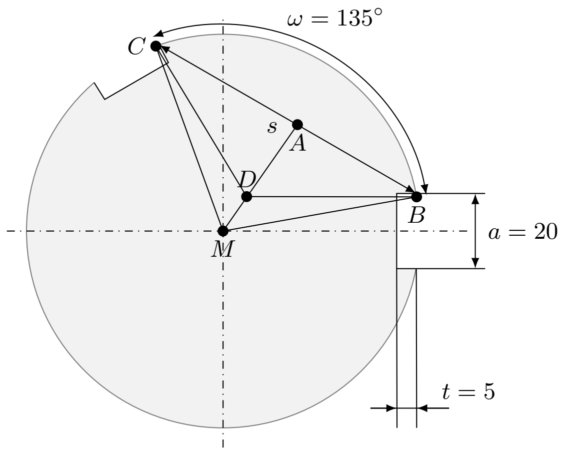
Aufgabe 2/63

In eine Welle sollen zwei Längsnuten eingefräst werden (Querschnittszeichnung siehe Abbildung). Ein Verdrehen der Welle um 135° ist mit den vorhandenen technischen Mitteln nicht zu erreichen. Daher ist die Einstellung mittels eines Sehnenmaßes erforderlich. Wie groß ist das Sehnenmaß s?
Die erforderlichen Maße sind der Abbildung zu entnehmen.



Bekannt sind: $\omega = 135°$, $a = 20$ mm, $t = 5$ mm, $d = 70$ mm. Gesucht ist das Seitenmaß s. Weiterhin seien $\measuredangle BMD = \delta; \measuredangle ABM = \gamma; \measuredangle ABD = \beta; \measuredangle DBM = \alpha$ und Winkel von MB zur Horizontalen α'.
Im Dreieck ABM gilt $\sin\delta = \frac{s}{2} : \frac{d}{2} = \frac{s}{d}$, folglich ist $s = d\sin\delta$.

Ferner gilt $\delta = 90° - \gamma = 90° - (\alpha + \beta)$. Nun ist $\alpha = \alpha'$ (Winkel an geschnittenen Parallelen), und für $\sin\alpha' = \sin\alpha$ gilt



$$\sin\alpha' = \sin\alpha = \frac{a}{2} : \frac{d}{2} = \frac{a}{d} = \frac{20}{70} = 0{,}286$$

also $\alpha = 16°40'$. Für β folgt aus dem Dreieck ABD: $\beta = 90° - \frac{\omega}{2} = 22°30'$. Damit ergibt sich für δ der Wert $\delta = 50°50'$. Es ist also

$$s = d \cdot \sin\delta = 70 \sin 50°50' \approx 54{,}2 \text{ mm}$$

Aufgabe 3/63
In dem linearen Gleichungssystem

$$0{,}9x - 3{,}2y + 10{,}1 = 0 \qquad , \qquad 1{,}1x - 1.0y + 0{,}7 = 0$$

sind für die Koeffizienten der Unbekannten und für die absoluten Glieder Abweichungen von $\pm 0{,}05$ zulässig. Man bestimme für die Lösungen $x = 3$ und $y = 4$ die größtmöglichen Abweichungen nach oben und nach unten!

Ein Gleichungssystem der Form

$$ax - by + c = 0 \qquad , \qquad dx - ey + f = 0$$

hat die Lösungen

$$x = \frac{ec - bf}{bd - ae} \qquad , \qquad y = \frac{cd - af}{bd - ae}$$

Dabei sind die Vorzeichen so gewählt, dass Zähler und Nenner je positiv werden.
Die Werte x und y werden maximal, wenn die Zähler maximal und die Nenner minimal sind; sie werden minimal, wenn die Zähler minimal und die Nenner maximal sind. Demnach ist x maximal, wenn a, e und c maximal, b, d und f aber minimal sind:

$$x_{max} = \frac{1{,}05 \cdot 10{,}15 - 3{,}15 \cdot 0{,}65}{3{,}15 \cdot 1{,}05 - 0{,}95 \cdot 1{,}05} = 3{,}73$$

und minimal, wenn a, e und c minimal, b, d und f dagegen maximal sind:

$$x_{min} = \frac{0{,}95 \cdot 10{,}05 - 3{,}25 \cdot 0{,}75}{3{,}25 \cdot 1{,}15 - 0{,}85 \cdot 0{,}95} = 2{,}43$$

Bei y ist eine zusätzliche Überlegung notwendig, da die Zähler- und die Nennerbedingung nicht gleichzeitig erfüllbar sind: Wenn c und e maximal, b und f minimal sind, wird y maximal. Die Werte d und a beeinflussen Zähler und Nenner jeweils in gleicher Richtung; d beeinflusst den Nenner jedoch stärker als den Zähler, wird also minimal gewählt; auch a beeinflusst den Nenner stärker als den Zähler, wird also maximal gewählt:

$$y_{max} = \frac{10{,}15 \cdot 1{,}05 - 0{,}95 \cdot 0{,}65}{3{,}15 \cdot 1{,}05 - 0{,}95 \cdot 1{,}05} = 4{,}35$$

Analog schließt man: y ist minimal, wenn a, e und c minimal, b, d und f maximal sind.

$$y_{min} = \frac{10{,}15 \cdot 1{,}15 - 0{,}85 \cdot 0{,}75}{3{,}25 \cdot 1{,}15 - 0{,}85 \cdot 0{,}95} = 3{,}73$$

Ergebnis: 2,43 $\leq x \leq$ 3.73, maximale Abweichungen -0,57 und +0,73
3,73 $\leq y \leq$ 4,35, maximale Abweichungen -0,27 und +0,35.

Aufgabe 4/63
Vorhanden sind eine Balkenwaage, ein 3-g-Gewichtsstück und ein 8-g-Gewichtsstück. Es ist zu zeigen, dass man damit alle ganzzahligen Grammmengen $1g, 2g, ..., ng$ mit höchstens n Wägungen bestimmen kann, wenn $n \geq 4$ ist.

Zuerst zeigen wir, dass die Behauptung für $n = 4$ gilt:

1. Wägung: Auf die eine Waagschale legt man das 8-g-Gewichtsstück, auf die andere das 3-g-Gewichtsstück sowie so viel abzuwägende Substanz, dass Gleichgewicht herrscht. Es sind 5 g abgewogen.

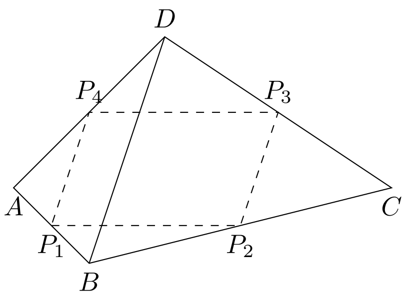
2. Wägung: Das 8-g-Gewichtsstück wird entfernt, von den abgewogenen 5 g Substanz wird so viel auf die andere Waagschale gebracht, dass Gleichgewicht herrscht. Da befinden sich auf der einen Seite 4 g Substanz, auf der anderen 1 g Substanz und das 3-g-Gewichtsstück.

3. Wägung: wie die erste Wägung

4. Wägung: Das 8-g-Gewichtsstück auf der einen Waagschale wird durch das 3-g-Gewichtsstück ersetzt, von den abgewogenen 5 g Substanz wird so viel entferntm dass Gleichgewicht herrscht. Man hat dann 2 g entfernt, 3 g befinden sich noch auf der Waagschale.

Demnach hat man mit 4 Wägungen die Mengen 1 g, 2 g, 3 g und 4 g bestimmt.
Nun zeigen wir: Hat man bereits die Mengen bis k g abgewogen, so kann man mit einer Wägung die Masse $(k + 1)$ g bestimmen. Der Beweis dafür ist trivial:
Da man bereits die Mengen bis k g abgewogen hat, steht auch die Menge $(k - 2)$ g zur Verfügung. Diese benutzt man zusammen mit dem 3-g-Gewichtsstück zum Abwägen von $[(k - 2) + 3] = (k + 1)$ g.
Damit ist gezeigt:
1. Die Behauptung gilt für $n = 4$.
2. Wenn die Behauptung für $n = k$ gilt, gilt sie auch für $n = k + 1$. Damit gilt sie aber für alle $n \geq 4$.
An der Richtigkeit ändert auch die Tatsache nichts, dass einige Mengen auf andere Weise bestimmt werden können. (z.B. 5 g, 8 g, 11 g).

Aufgabe 5/63
Gegeben sind vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in einer Ebene. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, dessen Seitenmittelpunkte die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 sind.
a) Welche Bedingung ist für die Lage der Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 notwendig, damit die Aufgabe lösbar ist?
b) Wieviel Lösungen sind möglich, wenn die Aufgabe lösbar ist?



Hilfssatz 1: Die Seitenmittelpunkte eines jeden Viereck bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.
Beweis: Ist $ABCD$ ein beliebiges Viereck und sind P_1, P_2, P_3 und P_4 die Seitenmittelpunkte (Abbildung), so gilt nach einem Strahlensatz

$$P_1P_4 \parallel BD; P_2P_3 \parallel BD \to P_1P_4 \parallel P_2P_3 \qquad \text{und}$$

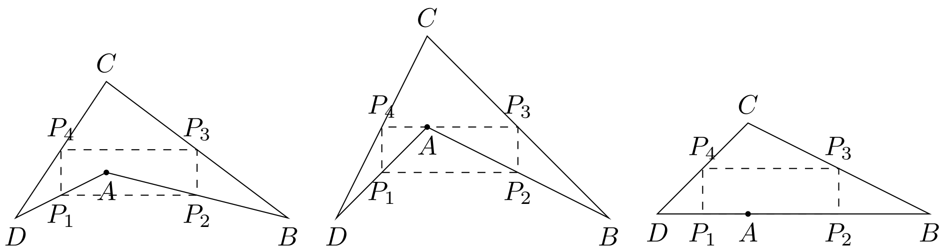
$$P_1P_2 \parallel AC; P_3P_4 \parallel AC \to P_1P_2 \parallel P_3P_4$$

Damit ist $P_1P_2P_3P_4$ ein Parallelogramm. Daraus folgt die Antwort für a):
Damit die Aufgabe lösbar ist, müssen P_1, P_2, P_3 und P_4 ein Parallelogramm bilden.

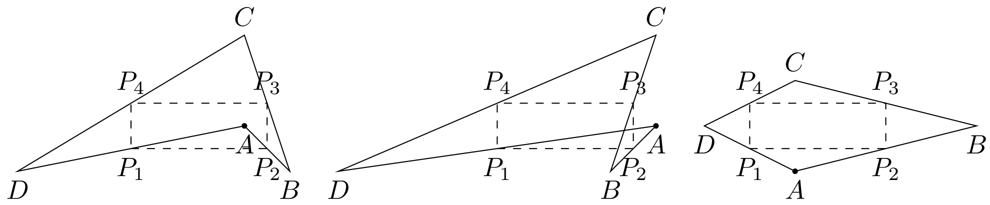
Hilfssatz 2: Wenn die Eckpunkte eines Parallelogramms auf den Seiten eines Vierecks liegen und zwei benachbarte Eckpunkte die Viereckseiten halbieren, so halbieren auch die anderen Eckpunkte die anderen Viereckseiten.
Beweis: Es seien P_1, P_2, P_3 und P_4 die Eckpunkte eines Parallelogramms, die auf den Seiten des Vierecks $ABCD$ liegen, und P_1 bzw. P_4 halbieren AB bzw. AD. Dann ist nach einem Strahlensatz $P_1P_4 \parallel BD$

und $P_1P_4 : BD = 1 : 2$.
Wegen $P_1P_4 \parallel P_2P_3$ und $P_1P_4 = P_2P_3$ ist dann auch $P_2P_3 \parallel BD$ und $P_2P_3 : BD = 1 : 2$. Nach demselben Strahlensatz folgt daraus $CP_2 = P_2B$ und $CP_3 = P_3D$.
Daraus folgt die Antwort für b):
Wenn die Aufgabe lösbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Man wählt nämlich einen beliebigen Punkt A so, dass er nicht auf einer Seite des Parallelogramms $P_1P_2P_3P_4$ liegt und verlängert die Verbindungsstrecken von A zu zwei benachbarten Eckpunkte des Parallelogramms über diese hinaus um sich selbst.

Die Endpunkte der verlängerten Strecken sind die Viereckspunkte B und D. Von B und D aus zieht man Geraden durch die beiden anderen Eckpunkte des Parallelogramms (und zwar durch die jeweils am nächsten liegenden). Der Schnitt dieser Geraden ist der Viereckspunkt C.



Da man A auf beliebig viele Weisen (obere linke Abbildung) wählen kann, ist die Behauptung bewiesen.



Liegt A auf einer Parallelogrammseite, so ist ebenfalls eine Konstruktion möglich (obere mittlere Abbildung), wenn die Parallelogrammpunkte geeignet ausgewählt werden; sonst entartet das Viereck zum Dreieck (obere rechte Abbildung).

Aufgabe 6/63
Man zeige, dass der Ausdruck $n^7 - n$ für jede natürliche Zahl n ohne Rest durch 42 teilbar ist.

Der Beweis ist geführt, wenn gezeigt ist, dass $n^7 - n$ für jede natürliche Zahl n ohne Rest
a) durch 2 und durch 3 und mithin auch durch 6
b) durch 7 teilbar ist.
Beweis für a):
Man zerlegt $n^7 - n$ in die Faktoren $(n-1), n, (n+1)$ und $n^4 + n^2 + 1$:

$$n^7 - n = n(n-1)(n-2)(n^4 + n^2 + 1)$$

Von der Richtigkeit dieser Produktdarstellung überzeugt man sich durch Ausmultiplizieren. Die Zahlen $(n-1), n, (n+1)$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen; von ihnen ist mindestens eine ohne Rest durch 2 und genau eine ohne Rest durch 3 teilbar. Daraus folgt, dass auch das Produkt $n^7 - n$ ohne Rest durch 2 und 3 und folglich auch durch 6 teilbar ist.

Beweis für b):
Dieser Beweis wird mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt. Die Richtigkeit der Behauptung für $n = 1$ ergibt sich aus $1^7 - 1 = 0$ und 7 teilt Null. Angenommen, es sei nun die Behauptung richtig für $n = k$, also es sein $k^7 - k$ ohne Rest durch 7 teilbar: $(k^7 - k) : 7 = m$ Rest 0 mit $m = 1; 2; 3; ....$ Dann ist

$$(k+1)^7 - (k+1) = (k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - (k+1) =$$

$$= (k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k - k = (k^7 - k) + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$$

Nach der Induktionsannahme ist $(k^7 - k) = 7m$. Also ist

$$(k+1)^7 - (k+1) = 7(m + k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$$

ohne Rest durch 7 teilbar.
Da der Ausdruck $n^7 - n$ durch 6 und durch 7 ohne Rest teilbar ist, ist er auch ohne Rest durch $6 \cdot 7 = 42$ teilbar.

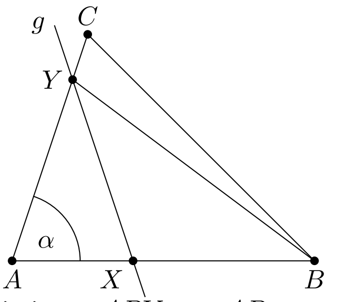
Aufgabe 7/63
Zehn Eimer von gleicher Größe und gleichem Aussehen sind mit Münzen gefüllt, die sich äußerlich durch nichts voneinander unterscheiden. In neun von diesen Eimern wiegt jede Münze 10 g, in einem dagegen 11 g.
Wie kann man durch eine einzige Wägung ermitteln, in welchem Eimer sich die Münzen mit der Masse 11 g befinden?

Man stelle die Eimer in einer Reihe auf und entnehme dem ersten eine, dem zweiten zwei, dem dritten drei Münzen und so fort bis zum zehnten, dem man zehn Münzen entnimmt. Auf diese Weise hat man schließlich 55 Münzen entnommen, die man insgesamt auf ganze Gramm genau abwiegt.
Befanden sich die Münzen mit der Masse 11 g im n-ten Eimer, so sind unter diesen 55 Münzen n Stück mit der Masse von 11 g und $(55 - n)$ Stück mit der Masse 10 g. Die Gesamtmasse G ist demnach (in Gramm)

$$G = (55 - k) \cdot 10 + 11 \cdot n = 550 + n$$

Dann ist aber $n = G - 550$. n ist die Nummer des Eimers, in dem sich die gesuchten Münzen befinden.

Aufgabe 8/63
Gegeben ist ein Dreieck ABC. Gesucht ist die Gerade g, deren Schnittpunkte X mit AB und Y mit AC die Bedingung $BX = XY = YA$ erfüllen.



a) Analysis: Aus $BX = XY = YA$ folgt:
1. $\triangle\ AYX$ ist gleichschenklig (Basis AX), also gilt $\measuredangle AXY = \alpha$ (Basiswinkel);
2. $\triangle\ BXY$ ist gleichschenklig (Basis BY), also gilt $\measuredangle XBY = \measuredangle BYX$ (Basiswinkel).
Nun ist $\measuredangle AXY$ Außenwinkel zum $\triangle\ BXY$; nach dem Außenwinkelsatz ist $\measuredangle AXY = \alpha = \measuredangle XBY + \measuredangle BYX$, und aus $\measuredangle XBY = \measuredangle BYX$ folgt somit $\measuredangle XBY = \frac{\alpha}{2}$.
Damit ist $\triangle\ ABY$ aus AB, α und $\measuredangle XBY = \frac{\alpha}{2}$ nach wsw konstruierbar. Dann ist aber $\triangle\ BXY$ aus $BX = AY$, $XY = AY$ und BY nach sss konstruierbar.

b) Konstruktion: Man halbiert den Winkel α und trägt den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ in B an AB an; der freie Schenkel schneidet AC in Y. Um B und um Y schlägt man mit AY in der Zirkelspanne zwei Kreisbögen, die einander auf AB in X schneiden. Die Gerade durch X und Y ist die gesuchte Gerade.

c) Beweis: Es ist $AY = YX$ nach Konstruktion und $YX = XB$ nach Konstruktion. Ferner liegt Y auf AC nach Konstruktion. Zu beweisen ist also noch, dass auch X auf AB liegt.
Dazu genügt es zu beweisen, dass $\measuredangle AXY + \measuredangle BXY = 180°$ ist oder; was nach dem Außenwinkelsatz dasselbe ist; dass $\measuredangle AXY = \measuredangle XBY + \measuredangle YBX$ ist. Nun ist nach Konstruktion $\triangle\ AYX$ gleichschenklig mit Basis AX, also ist $\measuredangle AXY = \alpha$. Ferner ist $\triangle\ BXY$ gleichschenklig mit Basis BY, also ist $\measuredangle XBY = \measuredangle XYB$. Nach Konstruktion ist aber $\measuredangle XBY = \frac{\alpha}{2}$, folglich gilt

$$\measuredangle XBY + \measuredangle XYB = 2 \cdot \measuredangle XBY = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \measuredangle AXY$$

c) Determination: Sofern der freie Schenkel des in B an AB angetragenen Winkels $\frac{\alpha}{2}$ die Seite AC (bzw. deren Verlängerung) schneidet, ergibt sich der Punkt Y eindeutig. Kein Schnittpunkt ergibt sich, wenn $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 180°$ ist, das heißt, wenn $\alpha = 120°$ ist, da dann AC und der freie Schenkel parallel verlaufen. Alle anderen Konstruktionen sind stets und eindeutig ausführbar.
In besonderen Fällen liegen die Punkte X und (oder) Y auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten.

Aufgabe 9/63
Für die Aufgabe
"Wie lautet die Gleichung des Kreises, der den Mittelpunkt $M(3;-5)$ hat und der die Gerade $2x+6y=3$ berührt?"
wir der folgende analytische Lösungsweg angegeben:
Die Gerade $2x+6y=3$ (1) ist Tangente an den Kreis mit der Gleichung

$$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$$

Wenn $(x_1;y_1)$ die Koordinaten des Berührungspunktes sind, lautet die Gleichung der Kreistangente

$$(x_1-3)(x_1-3)+(y_1+5)(y_1+5)=r^2 \to (x_1-3)x+(y_1+5)y=r^2+3(x_1-3)-5(y_1+5) \quad (3)$$

Da die Gleichungen (1) und (3) die Gleichungen ein und derselben Tangente an den Kreis (2) sind, ergeben sich die Koordinaten des Berührungspunktes und der Radius des Kreises durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} x_1-3&=2; \quad &\text{also} \quad x_1&=5\\ y_1+5&=6; \quad &\text{also} \quad y_1&=1\\ r^2+3(x_1-3)-5(y_1+5)&=3; \quad &\text{also} \quad r^2&=27 \end{aligned}$$

Die Kreisgleichung lautet daher $(x-3)^2+(y+5)^2=27$.
Die Probe (die Koordinaten des Berührungspunktes müssen die Gleichung (1) befriedigen) ergibt, dass das Ergebnis falsch ist.
Andere Lösungsmethoden liefern tatsächlich ein anderes Ergebnis. Wo steckt der Fehler?

Da man die Gleichung (1) mit einem beliebigen Faktor $k\neq 0$ multiplizieren kann, ohne dass die Gültigkeit eingeschränkt würde, ist der Koeffizientenvergleich für die Gleichungen (1) und (3) in der vorliegenden Form nicht durchführbar. Aus (1) folgt nämlich

$$2kx+6ky=3k \quad (4)$$

Führt man den Koeffizientenvergleich zwischen (3) und (4) durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2k&=x_1-3; \qquad & x_1&=2k+3 \quad (5)\\ 6k&=y_1+5; \qquad & y_1&=6k-5 \quad (6)\\ 3k&=r^2+3(x_1-3)-5(y_1+5); \qquad & r^2&=27k \quad (7) \end{aligned}$$

Setzt man die Werte für x_1 und y_1 in die Gleichung (1) ein, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für k mit der Lösung $k=\frac{27}{40}$.
Diesen Wert setzt man in die Ausdrücke (5), (6) und (7) ein und erhält damit die Lösung der Aufgabe

$$x_1=\frac{87}{20}; \qquad y_1=-\frac{19}{20}; \qquad r^2=\frac{729}{40}$$

Die Gleichung des Kreises lautet also

$$(x-3)^2+(y+5)^2=\frac{729}{40}$$

Aufgabe 10/63
Es ist

$$\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}; \qquad \sqrt{17\frac{17}{288}}=17\sqrt{\frac{17}{288}}; \qquad \sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}}$$

Unter welchen Bedingungen für die in den Ausdrücken enthaltenen Zahlen gelten die Gleichungen allgemein?

Hinweis: Die Schreibweise $\sqrt{3\frac{3}{8}}$ ist als gemischte Zahl zu verstehen, d.h. $\sqrt{3\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

Offensichtlich gilt in jedem Fall

$$\sqrt{a+\frac{a}{b}} = a\frac{a}{b}$$

Quadriert man beide Seiten dieser Gleichung, so folgt $a+\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b}$ oder, da $a \neq 0$ vorausgesetzt werden kann,

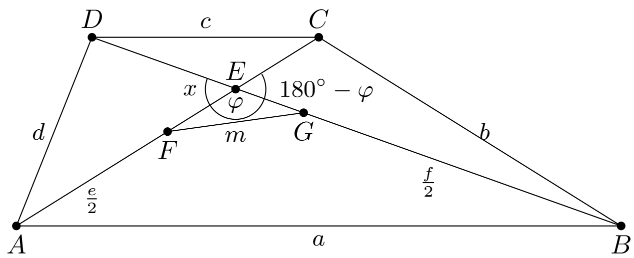
$$1+\frac{1}{b} = \frac{a^2}{b} \rightarrow b+1 = a^2 \rightarrow b = a^2-1$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so ergibt sich

$$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a^3-1}{a^2-1}+\frac{a}{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a^3}{a^2-1}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$$

Die Gleichungen gelten also allgemein, wenn der Zähler des Bruchs mit dem ganzen Teil des Radikanden übereinstimmt und der Nenner gleich den um 1 verminderten Quadrat des Zählers ist (was in den gegebenen Beispielen tatsächlich zutrifft). Dabei muss natürlich $a = 1$ wegen $a^2 - 1 = 0$ ausgeschlossen werden.

Aufgabe 11/63
Der folgende Satz ist zu beweisen: In jedem Viereck ist die Summe aus den Quadraten der Seiten gleich der Summe aus den Quadraten der Diagonalen und dem vierfachen Quadrat des Abstands der Diagonalmitten.



Benutzt man die Bezeichnungen der Abbildung (mit E ist der Diagonalenschnittpunkt, mit F und G sind die Diagonalenmitten bezeichnet, so lautet die zu beweisende Behauptung

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = e^2+f^2+4m^2$$

Aus dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie ergeben sich die folgenden Beziehungen

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}+x\right)^2 + \left(\frac{f}{2}+y\right)^2 - 2\left(\frac{e}{2}+x\right)\left(\frac{f}{2}+y\right)\cos\varphi$$
$$b^2 = \left(\frac{e}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{f}{2}+y\right)^2 + 2\left(\frac{e}{2}-x\right)\left(\frac{f}{2}+y\right)\cos\varphi$$
$$c^2 = \left(\frac{e}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{f}{2}-y\right)^2 - 2\left(\frac{e}{2}-x\right)\left(\frac{f}{2}-y\right)\cos\varphi$$
$$d^2 = \left(\frac{e}{2}+x\right)^2 + \left(\frac{f}{2}-y\right)^2 + 2\left(\frac{e}{2}+x\right)\left(\frac{f}{2}-y\right)\cos\varphi$$

wobei die Beziehung $\cos(180° - \varphi) = -cos\varphi$ verwendet wurde. Nach Auflösen der Klammern und Addition der vier Gleichungen ergibt sich

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = e^2+4x^2+f^2+4y^2-8xy\cos\varphi = e^2+f^2+4(x^2+y^2-2xy\cos\varphi)$$

Ebenfalls nach dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie ist aber $x^2+y^2-2xy\cos\varphi = m^2$, und damit ergibt sich die gesuchte Beziehung.

Aufgabe 12/63
Es sei a eine reelle Zahl. Dann gilt $-\frac{1}{a} = 0$.
Beweis:

$$\int \tan(ax)dx = \int \sin(ax)(\cos(ax))^{-1}dx$$

Durch partielle Integration mit

$$\sin(ax) = u'; \qquad u = -\frac{1}{a}\cos(ax); \qquad (\cos(ax))^{-1}) = v; \qquad v' = \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^2} \cdot a$$

folgt

$$\int \tan(ax)dx = u \cdot v - \int (v' \cdot u)dx = -\frac{1}{a} + \int \left(\frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^2} \cdot a \cdot \frac{1}{a}\cos(ax)dx\right)$$

$$\int \tan(ax)dx = -\frac{1}{a} + \int \tan(ax)dx$$

Durch Subtraktion von $\int \tan x dx$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich die Behauptung. Wo steckt der Fehler?

Bekanntlich liefert ein unbestimmtes Integral eine nicht vollständig bestimmte Funktion; das unbestimmte Integral enthält vielmehr eine unbestimmte additive Konstante. Man kann daher nicht aus der Gleichheit der Integranden allein schon auf die Gleichheit der Integrale schließen.
Im vorliegenden Fall wirkt sich diese Tatsache deshalb sichtbar aus, weil das Glied $u \cdot v$ auf der rechten Seite der Gleichung eine additive Konstante darstellt. Korrekt muss die Herleitung folgendermaßen lauten:

$$\int \tan(ax)dx = -\frac{1}{a} + \int \frac{\sin ax}{(\cos(ax))^2} \cdot a \cdot \frac{1}{a}\cos(ax)dx + C = -\frac{1}{a} + \int \tan(ax) + C$$

woraus richtig folgt, dass bei Gleichheit $C = -\frac{1}{a}$ ist.

Aufgabe 13/63
Einem Mathematiker wurde das Fahrrad gestohlen. Als man ihn nach seiner Fahrradnummer fragt, antwortet er: "Sie können die Nummer aus den folgenden Angaben errechnen:

a) Addiert man zum Quadrat der ersten Stelle das Quadrat der zweiten Stelle, so erhält man das Quadrat der dritten Stelle.

b) Subtrahiert man von der ersten Stelle die zweite Stelle, so erhält man die um 1 vergrößerte fünfte Stelle.

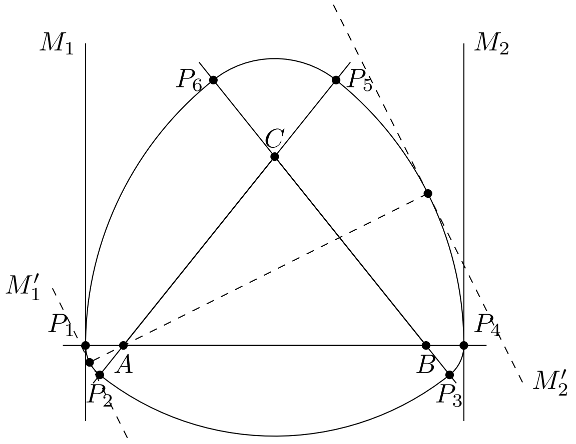
c) Die zweite Stelle ist gleich der vierten, die dritte Stelle ist gleich der sechsten und gleich der siebenten."

Welche Fahrradnummer hatte der Mathematiker?

Die Nummer bezeichnet man vorläufig mit $sbcdefg$, wobei die einzelnen Zeichen eine ganze Zahl zwischen 0 und 9 (beide einschließlich) bedeuten und die Schreibweise gemäß dem dekadischen Positionssystem erfolgt.
Nach c) kann man vereinfachen: $b = d$, $c = f = g$ also $abcbecc$. Nach a) gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Die Zahlen a, b und c sind also pythagoreische Zahlen; als einziges pythagoreisches Tripel erfüllt das Tripel $3; 4; 5$ die Bedingung, dass alle Zahlen unter 10 liegen. Damit ist die Nummer bereits eingegrenzt. Sie lautet entweder 1. $3454e55$ oder 2. $5353e55$.
Nun berechnet man nach b) die Zahl e: $a - b = e + 1$ ergibt $e = a - b - 1$.
1.) Mit $a = 3$ und $b = 4$ folgt $e = -2$. Eine negative Zahl kommt aber offenbar nicht in Frage, damit scheidet die Möglichkeit 1 aus.
2.) Mit $a = 4$ und $b = 3$ folgt $e = 0$. Damit lautet die vollständige Nummer 4353055.

Aufgabe 14/63
Zur Nachprüfung, ob der Querschnitt eines Bolzens genau kreisförmig ist, wird der Bolzen zwischen den angeschobenen Messbacken einer Schiebelehre gedreht und die Veränderung des Messbackenabstandes beobachtet. Zweifellos ermöglicht eine Veränderung des Messbackenabstandes einen Schluss dahingehend, dass der Querschnitt nicht kreisförmig ist.
Lässt umgekehrt die Unveränderlichkeit des Messbackenabstands den Schluss auf einen genau kreisförmigen Querschnitt zu?

Die Frage muss mit "Nein" beantwortet werden. Tatsächlich gibt es Querschnitte, die bei der Messung mit der Schieblehre überall den gleichen "Durchmesser" zeigen und trotzdem nicht kreisförmig sind.
In der Abbildung ist ein spezielles Beispiel gezeigt.



Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, dessen Seiten über die Eckpunkte hinaus verlängert werden. Weiter sei
- P_1P_2 ein Kreisbogen um A mit dem Radius $AP_1 = AP_2$,
- P_2P_3 ein Kreisbogen um C mit dem Radius $CP_2 = CP_3$,
- P_3P_4 ein Kreisbogen um B mit dem Radius $BP_3 = BP_4$,
- P_4P_5 ein Kreisbogen um A mit dem Radius $AP_4 = AP_5$,
- P_5P_6 ein Kreisbogen um C mit dem Radius $CP_5 = CP_6$,
- P_6P_1 ein Kreisbogen um B mit dem Radius $BP_6 = BP_1$

Die Randkurve ist geschlossen, wenn der Ausgangspunkt P_1 so weit von A entfernt liegt, dass alle Kreisbögen die Verlängerungen der Dreiecksseiten treffen. Dann ist

$$P_1P_4 = AP_1 + AP_4 = P_2P_5 = AP_2 + AP_5 = CP_2 + CP_5 = CP_3 + CP_6 = P_3P_6 =$$

$$= BP_3 + BP_6 = BP_4 + BP_1 = P_4P_1$$

Damit folgt aber weiter, dass der Abstand zweier paralleler Tangenten stets gleich $P_1P_4 = P_2P_5 = P_3P_6$, also konstant ist (vgl. die parallelen Tangenten M_1 und M_2 bzw. M_1' und M_2' in der Abbildung).
Man erkennt, dass man nur mit Hilfe von Durchmesserprüfungen eine etwa vorhandene Unrundheit nicht unbedingt erkennen muss.

Aufgabe 15/63
Es ist zu beweisen, das für $a,b \geq 0; n \geq 2$, ganz, gilt:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Man kann den Beweis mit Hilfe der vollständig Induktion führen. Dazu ist ein Hilfssatz erforderlich.
Hilfssatz: Es gilt

$$a^{n+1} + b^{n+1} \geq a^n b + ab^n$$

für $a; b \geq 0$, $n \geq 1$.
Beweis: Es sei 1. $a \geq b$ bzw. 2. $a \leq b$. Dann gilt $a - b \geq 0$ bzw. $a - b \leq 0$ und wegen $a,b \geq 0$ für $n \geq 1$: $a^n \geq b^n$ bzw. $a^n \leq b^n$. Damit folgt in beiden Fällen

$$a^n(a-b) \geq b^n(a-b) \qquad \text{oder} \qquad a^{n+1} - a^n b \geq ab^n - n^b + 1$$

also $a^{n+1} + b^{n+1} \geq a^n b + ab^n$.
Den ersten Schritt des Induktionsbeweises stellt den Beweise der Richtigkeit der Behauptung für $n = 2$ dar.
Behauptung: Es gilt $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ für $a, b \geq 0$.
Beweis: Sicher gilt für jedes $a, b \geq 0$: $(a-b)^2 \geq 0$ also $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Addiert man auf beiden Seiten dieser Ungleichung $a^2 + 2ab + b^2$, so folgt

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Durch Division beider Seiten durch 4 folgt die Behauptung.
Der zweite Schritt besteht in der Durchführung der vollständigen Induktion.
Behauptung: Wenn gilt $\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ dann gilt auch $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}$.
Beweis: Es gelte

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit $\frac{a+b}{2} \geq 0$ (wegen $a; b \geq 0$) wird die Gültigkeit nicht angetastet; es folgt

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \cdot \frac{a+b}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{a^{n+1} + a^n b + ab^n + b^{n+1}}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}$$

Auf der linken Seite der Ungleichung ersetzt man die Summe $a^n b + ab^n$ durch die nach dem Hilfssatz nicht kleinere Summe $a^{n+1} + b^{n+1}$, die Gültigkeit der Ungleichung bleibt davon unberührt:

$$\frac{2(a^{n+1} + b^{n+1})}{4} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}$$

Da gezeigt wurde, dass die Behauptung für $n = 2$ gilt und dass aus der Gültigkeit für ein beliebiges n die Gültigkeit für $n + 1$ folgt, ist bewiesen, dass die Behauptung für jedes ganze $n \geq 2$ gilt.

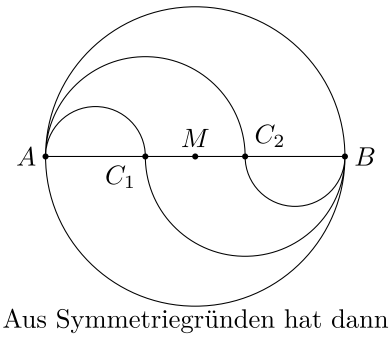
Aufgabe 16/63
Folgendes "Kartenkunststück" ist mathematisch zu begründen:
Man lässt einen Mitspieler aus einem Kartenspiel von 32 Blatt eine beliebige Karte ziehen und verdeckt niederlegen. Es sei dies beispielsweise (ohne Rücksicht auf die Farbe) eine Sieben.
Der Mitspieler legt nun weitere Karten auf die gezogene, indem er von der Augenzahl der gezogenen an bis 11 weiterzählt (im Beispiel also "acht, neun, zehn, elf"). Damit erhält man einen Kartenhaufen.
Das Verfahren wird mit weiteren Kartenhaufen fortgesetzt, bis ein Rest an Karten verbleibt, der keinen vollständigen Haufen mehr ergibt (wird dabei ein As gezogen, so bildet dies alleine einen Haufen).
Aus der Anzahl der Haufen und der Anzahl der Karten im Rest kann man, ohne beim Bilden der Haufen zugesehen zu haben, die Summe der Augen auf den gezogenen Karten ermitteln.
Man gebe die Rechnung an.

Die Summe aus den Augen der gezogenen Karten sei x, die Anzahl der Haufen sei n und die Anzahl der Karten im Rest sei r. Dann gilt für die Anzahl A der Karten in den Haufen

$$A = n + 11n - x = 12n - x$$

Es ist aber $A + r = 32$ also $12n - x + r = 32$. Daraus folgt $x = 12n + r - 32$.
Das Verfahren kann man noch variieren, indem man statt bis 11 bis zu einer anderen (am besten größeren) Zahl weiterzählen lässt oder indem man ein Spiel verwendet, das nicht aus 32 Karten besteht.

Aufgabe 17/63
Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r. Der Kreis soll so in drei flächengleiche Teile zerlegt werden, dass der Umfang eines jeden Teils gleich dem Kreisumfang ist.



Man drittelt einen Kreisdurchmesser AB durch die Punkte C_1 und C_2 und schlägt über AC_1, AC_2, BC_1 und BC_2 Halbkreise so, dass die von A ausgehenden und die von B ausgehenden Halbkreise auf verschiedenen Seiten des Durchmessers AB liegen (Abbildung).
Dann gilt für den Flächeninhalt F der so entstehenden S-förmigen Figur:

$$F = 2\frac{\left(\frac{2}{3}r\right)^2 \pi}{2} - 2\frac{\left(\frac{1}{3}r\right)^2 \pi}{2} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Aus Symmetriegründen hat dann jede der beiden Restfiguren den Flächeninhalt

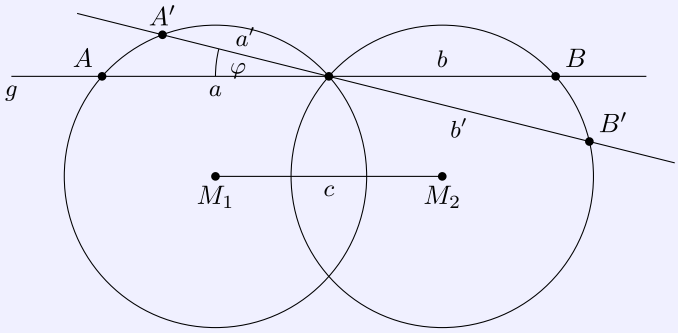
$$F = \frac{\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{3}}{2} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Für den halben Umfang U der S-förmigen Figur gilt

$$\frac{U}{2} = \frac{2}{3}\pi r + \frac{1}{3}\pi r = \pi r$$

Dann gilt für den Umfang U jeder der Teilfiguren $U = 2\pi r$.

Aufgabe 18/63

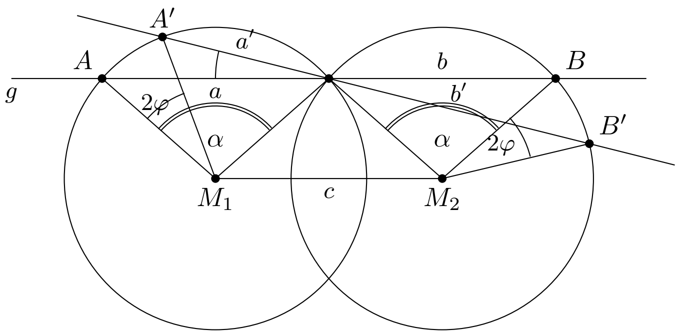


Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien $r_1 = r_2 = r$. Der Abstand ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 sei c, und es gelte die Beziehung $r < c < 2r$. Durch einen Schnittpunkt der beiden Kreise werden eine Gerade g gezogen.
Wenn g parallel zu M_1M_2 verläuft, sind die in den Kreisen entstehenden Sehnen a und b gleich lang: $a = b$. Wird g aus dieser Lage um den Winkel φ gedreht, so entstehen die Sehnen a' und b' mit $a' \neq b'$. Folgende Fragen sind zu beantworten:

1. In welchem Verhältnis stehen die Kreisbögen AA' und BB'?
2. Welches der Produkte ab und $a'b'$ ist kleiner?
3. Für welche Lage von g ist $a'b'$ ein Maximum, wenn $r_1 > r_2$ gilt? (In diesem Fall soll entsprechend gelten $r_1 < c < r_1 + r_2$)

Bezüglich der Bezeichnungen vgl. die Abbildung. Die Gerade g soll sich nur so weit drehen, dass die beiden Sehnen noch beiderseits des Drehpunktes liegen.

a) Dass die beiden Kreisbögen AA' und BB' gleich groß sind, kann sofort aus dem Satz gefolgert werden, dass zu gleichen Umfangswinkeln eines Kreises oder mehrerer gleicher Kreise gleich Kreisbögen gehören. Die bei der gegebenen Aufgabe zu betrachtenden Umfangswinkel sind als Scheitelwinkel gleich.



b) Aus der Abbildung erkennt man

$$a = b = 2r \sin\frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad a \cdot b = 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

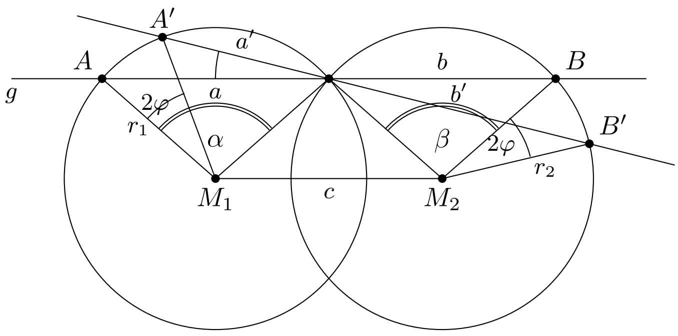
Entsprechend ergibt sich

$$a' = 2r \sin\frac{\alpha - 2\varphi}{2} \qquad ; \qquad b' = 2r \sin\frac{\alpha + 2\varphi}{2} \qquad ; \qquad a' \cdot b' = 4r^2 \sin\frac{\alpha - 2\varphi}{2} \sin\frac{\alpha + 2\varphi}{2}$$

Wendet man auf den letzten Ausdruck die Additionstheoreme an, so erhält das Produkt die Gestalt $a' \cdot b' = 4r^2 \cdot (A-B)(A+B)$ mit $A = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi$ und $B = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$. Unter Verwendung der 3.binomischen Formel ergibt sich daraus

$$a' \cdot b' = 4r^2 \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \leq 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\varphi \leq 4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = a \cdot b$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei nur für $\varphi = 0$. Für $\varphi \neq 0$ gilt somit stets $a' \cdot b' < a \cdot b$.



c) Bei der Beantwortung der dritten Frage ist zu beachten, dass die Sehnen und die Zentriwinkel α und β nicht mehr gleich sind, wenn die Gerade g parallel zu M_1M_2 verläuft. Die Winkel α und β kann man als bekannt voraussetzen, da sie aus den gegebenen Größen r_1, r_2 und c leicht zu ermitteln sind (vgl. Abbildung).
Für eine beliebige Lage von g ist das Produkt $P = a' \cdot b'$ der Sehnen a' und b' in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ gegeben durch

$$P = a' \cdot b' = 2r_1 \sin\frac{\alpha - 2\varphi}{2} \cdot 2r_2 \cdot \sin\frac{\beta + 2\varphi}{2} \qquad \text{und somit}$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = 4r_1r_2\left[\sin\frac{\alpha - 2\varphi}{2}\cos\frac{\beta + 2\varphi}{2} - \cos\frac{\alpha - 2\varphi}{2}\sin\frac{\beta + 2\varphi}{2}\right]$$

Aus $\frac{dP}{d\varphi} = P_1 = 0$ folgt

$$\sin\frac{\alpha - 2\varphi}{2}\cos\frac{\beta + 2\varphi}{2} = \cos\frac{\alpha - 2\varphi}{2}\sin\frac{\beta + 2\varphi}{2}$$

Dividiert man diese Gleichung beiderseits durch $\sin\frac{\alpha-2\varphi}{2}\sin\frac{\beta+2\varphi}{2}$, so erhält man

$$\cot\frac{\beta + 2\varphi}{2} = \cot\frac{\alpha - 2\varphi}{2} \to \beta + 2\varphi_0 = \alpha - 2\varphi_0 \to \varphi_0 = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Abschließend wäre zu untersuchen, ob P für φ_0 einen Maximalwert annimmt. Da diese Rechnung keine Besonderheiten aufweist, sei hier nur das Ergebnis mitgeteilt:

$$P''(\varphi_0) = -8r_1r_2 < 0$$

Setzt man φ_0 in die Ausdrücke für a' und b' ein, so erhält man folgendes Ergebnis:
Das Produkt der Sehnen wird maximal, wenn die Sehnen im gleichen Verhältnis stehen wie die Radien der zugehörigen Kreise: $a' : b' = r_1 : r_2$ oder; was dasselbe aussagt, wenn die zu den Sehnen gehörenden Zentriwinkel gleich groß sind. Sie sind dann gleich dem arithmetischen Mittel aus den Winkeln α und β.

Aufgabe 19/63
Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen unter anderem eine Schafherde. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihm auftragen, er solle ein Schaf für soviel Mark verkaufen, wie die Herde Schafe hat.
Der Mittelsmann bringt dem Erlös in lauter 10-Mark-Scheinen und einem Rest an Kleingeld, der keinen vollen 10-Mark-Schein mehr ergibt. Die Brüder teilen das Geld so, dass beide gleich viele 10-Mark-Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10-Mark-Schein und der Kleingeldrest übrig. Da sagt der ältere zum jüngeren Bruder: "Ich nehme den Schein, und du bekommst den Rest und ein von mir soeben gekauftes Taschenmesser, dann haben wir beide gleich viel bekommen."
Wie teuer war das Taschenmesser?

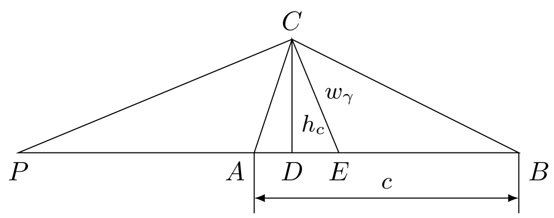
Bestand die Herde aus $n = 10x+y$ Schafen, so betrug der Erlös $n^2 = (10x+y)^2 = 100x^2+20xy+y^2$ Mark, wobei y eine einstellige Zahl ist. Da beim Teilen des Geldes außer dem Kleingeldrest ein 10-Mark-Schein übrigblieb, muss die Anzahl der 10-Mark-Scheine ungerade sein.
Da die Zahl $10x^2 + 2xy$ auf jeden Fall gerade ist, kommt für y^2 nur eine der Zahlen 16 oder 36 in Frage; für $y^2 = 1; 4; 9; 25; 49; 64; 81$ würde nämlich die Anzahl der 10-Mark-Scheine gerade. Das heißt aber nichts

anderes, als dass der Kleingeldrest $r = 6$ Mark ist.
Bezeichnet man nun mit t den Preis des Taschenmessers in Mark, so muss offensichtlich gelten

$$10 - t = r + t \to 10 - r = 2t = 4 \to t = 2$$

Das Taschenmesser kostet demnach 2 Mark.

Aufgabe 20/63
Es ist ein Dreieck aus $h_c = 3{,}5$ cm, $w_\gamma = 4$ cm und $c = 12$ cm zu konstruieren, wobei h_c die Höhe des Dreiecks auf der Seite c und w_γ die Halbierende des Winkels γ ist.



Das Dreieck CDE ist unmittelbar aus $CD = h_c$, $\measuredangle CDE = 90°$ und $CE = w_\gamma$ konstruierbar.
Errichtet man in C auf CE die Senkrechte, so schneidet diese die Verlängerung von DE in P. Da $CE = w_\gamma$ die Halbierende des Innenwinkels γ im Dreieck ABC ist, ist CP die Halbierende des Außenwinkels γ' (die Halbierenden zweier Nebenwinkel stehen senkrecht aufeinander).

Nun gilt der Satz: Die Halbierenden von Innen- und Außenwinkel im Dreieck teilen die Gegenseite harmonisch. Folglich ist die Punktreihe $PAEB$ eine harmonische Punktreihe und es gilt

$$PA : AE = PB : BE$$

Führt man die Bezeichnungen $PA = u$ und $PE = d$ ein, so ist $PB = u+c$, $AE = d-u$ und $BE = u+c-d$. Damit ergibt sich

$$\frac{u}{d-u} = \frac{u+c}{u+c-d}$$

Löst man diese Gleichung nach der einzigen Unbekannten u auf, so erhält man

$$u = \frac{d-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Damit ist die Konstruktion des Punkte A auf PE möglich. B erhält man, indem man an PA in A die Strecke c anträgt. (Bei dem Wurzelwert ist das negative Vorzeichen für die Problemstellung sinnlos, da die Strecken absolut genommen werden.)

Konstruktionsbeschreibung: Man legt $CD = h_c$ fest, errichtet in D die Senkrechte und schlägt um C mit w_γ in der Zirkelspanne einen Kreisbogen; sein Schnittpunkt mit der Senkrechten ist E.
Man verlängert DE über beide Seiten hinaus und errichtet in C auf CE die Senkrechte; deren Schnitt mit der Verlängerung von DE ist P. Von P aus trägt man auf $PE = d$ die Strecke $PQ = \frac{c}{2}$ ab; in Q errichtet man auf PQ die Senkrechte und trägt auf ihr von Q aus die Strecke $QR = \frac{d}{2}$ ab. Dann ist $PR = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ (nach dem Lehrsatz des Pythagoras).
Weiter trägt man auf QR von Q aus die Strecke $QS = \frac{c}{2}$ ab. Um R schlägt man mit $RS = \frac{d}{2} - \frac{c}{2}$ einen Kreisbogen, der die Verlängerung von PR in T schneidet. Nach Konstruktion ist nun

$$PT = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{d-c}{2} = u = PA$$

Man schlägt also um P mit PT in der Zirkelspanne einen Kreisbogen, der PE in A schneidet. Verlängert man PA um c, ergibt sich der Punkt B. Das Dreiecke ABC ist das gesuchte.

Determination: Das Dreieck CDE ist (bis auf Symmetrie) eindeutig konstruierbar, wenn $w_\gamma > h_c$ ist. Ist $w_\gamma = h_c$, so fällt E auf D und die Senkrechte auf CE in C parallel zu AB, schneidet diese als nicht (harmonische Teilung im Verhältnis 1:1). Daraus folgt sofort, dass das Dreieck ABC symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden w_γ bzw. der Höhe h_c liegt, womit die weitere Konstruktion klar ist.
Ist $w_\gamma < h_c$, so existiert das Dreieck CDE nicht und damit ist das Dreieck ABC nicht konstruierbar.
Damit ergibt sich: Das Dreieck ABC ist (bis auf Symmetrie) eindeutig konstruierbarm wenn $w_\gamma \geq h_c$ ist.

Aufgabe 21/63
Von einem konvexen Polyeder mit 53 Ecken und 19 Flächen werden sämtliche Ecken so durch ebene Schnitte abgeschnitten, dass jeder Schnitt genau eine Ecke erfasst und kein Schnitt einen anderen trifft oder berührt.
Wieviel Kanten, Ecken und Flächen hat das dadurch entstehende Polyeder?

Es seien e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten des gegebenen Polyeders. E, F und K die entsprechenden Zahlen des neuen Polyeders.
Stoßen in der i-ten Ecke des gegebenen Polyeders k_i Kanten zusammen, so entstehen durch das Abschneiden dieser Ecke ein Polygon mit k_i Seiten, also eine neue Fläche, k_i neue Kanten und k_i neue Ecken. Keine der ursprünglichen Flächen und Kanten entfällt, wohl aber die ursprüngliche Ecke.
Da jede kante zwei Ecken verbindet, folgt dass die Anzahl der neuen Kanten gleich $2k$ und die der neuen Ecken gleich $2k$ ist, während die Anzahl der neuen Flächen gleich e ist. Damit ergibt sich

$$K = 3k \qquad ; \qquad E = 2k \qquad ; \qquad F = f + e$$

Für k folgt aber aus dem Eulerschen Polyedersatz $e + f = k + 2$, dass $k = e + f - 2 = 53 + 19 - 2 = 70$ ist. Demnach ist

$$K = 210 \qquad ; \qquad E = 140 \qquad ; \qquad F = 72$$

Tatsächlich gilt auch für diese Zahlen der Eulersche Polyedersatz: $E + F = 212 = K + 2$.

Anmerkung: Ein konvexes Polyeder mit 53 Ecken und 19 Flächen aus der Aufgabenstellung existiert nicht, da es nach dem Eulerschen Polyedersatz 70 Kanten haben müsste. In jeder Ecke stoßen mindestens 3 Kanten zusammen, die jede 2 Ecken verbinden. Damit müsste $k \geq \frac{3}{2}e$ gelten, was das "Polyeder" nicht erfüllt.

Aufgabe 22/63
Gesucht sind drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, deren Quadratsumme eine aus vier gleichen Ziffern bestehende Zahl ist.

Die drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen seine $(2n - 1)$, $(2n + 1)$ und $(2n + 3)$ mit zunächst noch unbekanntem, ganzzahligen n. Dann gilt auf Grund der Aufgabenstellung

$$(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 1111a$$

mit $0 \leq a \leq 9$, a ganzzahlig. Es handelt sich also um eine Gleichung mit zwei Unbekannten, die gewissen Einschränkungen unterliegen (diophantisches Problem). Berechnet man die Quadrate, so ergibt sich

$$12n^2 + 12n + 11 = 1111a \rightarrow 12n(n + 1) = 11(101a - 1)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 12 teilbar, daraus folgt, dass auch die rechte Seite durch 12 teilbar ist. Also ist der Ausdruck $(101a - 1)$ durch 12 teilbar. Offenbar kommen für a damit nur ungerade Werte in Frage, da sonst 101a gerade und mithin $(101a - 1)$ ungerade wäre.
Man stellt leicht fest, dass von den Werten $a = 1; 3{,}5; 7; 9$ nur der Wert $a = 5$ die geforderte Bedingung erfüllt: $12n(n + 1) = 11(101 \cdot 5 - 1) = 5544$.
Damit ergibt sich für n die quadratische Gleichung

$$12n^2 + 12n - 5544 = 0$$

mit den Lösungen $n_1 = 21$ und $n_2 = -22$. Aus n_1 ergeben sich die drei ungeraden Zahlen 41, 43 und 45 und aus n_2 die drei ungeraden Zahlen -45, -43 und -41 (also bis auf die Vorzeichen dieselben). Tatsächlich ist

$$(\pm 41)^2 + (\pm 43)^2 + (\pm 45)^2 = 5555$$

Aufgabe 23/63
Ein Dreieck ist aus den drei Höhen zu konstruieren.

Analysis: Für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt $F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. Daraus folgt $a = \frac{2F}{h_a}$, $b = \frac{2F}{h_b}$, $c = \frac{2F}{h_c}$. Daraus ergibt sich die Proportionalität

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} \quad \text{bzw.} \quad a' : b' : c' = \frac{k}{h_a} : \frac{k}{h_b} : \frac{k}{h_c}$$

wobei k eine geeignet gewählte Konstante ist, oder $a' : 1 = k : h_a$, $b' : 1 = k : h_b$, $c' : 1 = k : h_c$. Nach dem 1. Strahlensatz lassen sich demnach für einen beliebigen Wert $k \neq 0$ die Strecken a', b' und c' konstruieren. Damit ist das gesuchte Dreieck bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Eine Ähnlichkeitstransformation legt schließlich die Größe fest.

Konstruktion: Man legt zwei von demselben Punkt S ausgehende Strahlen fest und trägt man dem einen die Strecken $SP = h_a$ und $SQ = k$ sowie auf dem anderen die Strecke $SR = 1$ ab. Durch Q zieht man die Parallele zu PR; ihr Schnittpunkt mit dem Strahl durch R sei T. Dann ist $ST = a'$.
Auf die gleiche Weise konstruiert man b' und c' aus h_b bzw. h_c. Aus a', b' und c' konstruiert man ein Dreiecke $A'B'C'$ auf allgemeine bekannte Weise.
Die Ähnlichkeitstransformation kann man folgendermaßen durchführen: Man zieht zu der Geraden $A'B'$ in der Halbebene, in der C' liegt, im Abstand h_c die Parallele und verlängert (falls erforderlich) $B'C'$ bis zum Schnitt mit dieser. Der Schnittpunkt ist C. Die Parallele zu b' durch C schneidet c' bzw. dessen Verlängerung in A. Das Dreieck $AB'C = ABC$ ist das gesuchte.

Determination: Alle Konstruktionen sind stets und (bis auf Symmetrie) eindeutig ausführbar, wenn die Strecken a', b' und c' so beschaffen sind, dass stets die Summe zweier von ihnen größer ist als die dritte; andernfalls existiert kein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften. Die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Strecken $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ und $\frac{1}{h_c}$ dieselbe Bedingung erfüllen. Das heißt aber, es müssen für h_a, h_b und h_c die Relationen gelten:

$$(h_a + h_b)h_c > h_a h_b; \qquad (h_b + h_c)h_a > h_b h_c; \qquad (h_a + h_c)h_b > h_a h_c$$

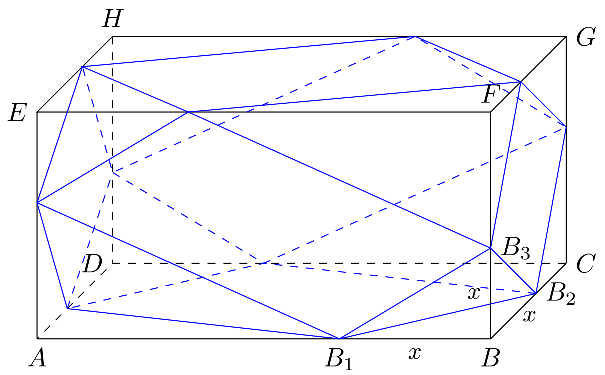
Aufgabe 24/63
Vier nicht benachbarte Ecken eines Quaders $V = abc$ werden durch ebene Schnitte so abgestumpft, dass von jeder Kante die Strecke x wegfällt. Mit den übrigen Ecken wird entsprechend verfahren, und zwar werden dort die Schnitte so geführt, dass an jeder Ecke genau die dort zusammenstoßenden, bei der Abstumpfung der ersten Ecken stehengebliebenen Kantenreste entfernt werden.
Wie groß muss man die Strecke x wählen, wenn der so entstehende, von acht Dreiecken und sechs Parallelogrammen begrenzte Vierzehnflächner einen extremen Inhalt haben soll?

Bei der ersten Abstumpfung entfallen vier Pyramiden mit dem Inhalt $\frac{1}{6}x^3$, dann noch vier (ebenfalls dreiseitige) Pyramiden mit dem Inhalt $\frac{1}{6}(a-x)(b-x)(c-x)$.
Es verbleibt (Abbildung)

$$V(x) = abc - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(a-x)(b-x)(c-x) = \frac{1}{3}abc + \frac{2}{3}(ab+bc+ac)x - \frac{2}{3}(a+b+c)x^2$$

Damit ergibt sich

$$V'(x) = \frac{2}{3}(ab+bc+ac) - \frac{4}{3}(a+b+c)x; \qquad V''(x) = -\frac{4}{3}(a+b+c) < 0$$



Es liegt also ein Maximum vor und aus $V'(x) = 0$ folgt

$$x_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + bc + ac}{a + b + c+}$$

Das maximale Volumen V_{max} des Vierzehnflächners beträgt also

$$V_{max} = \frac{1}{3}abc + \frac{1}{6} \cdot \frac{(ab + bc + ac)^2}{a + b + c}$$

Determination und Spezialfall:
a) Ist (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) $a > b > c$, so muss im Extremfall $x_e \leq c$ sein. Hieraus folgt

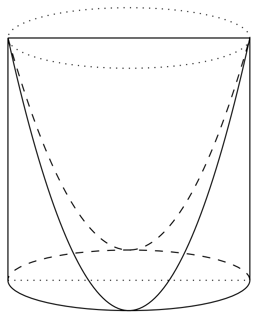
$$c^2 + \frac{a+b}{2}x - \frac{ab}{2} \geq 0$$

und schließlich durch Auflösung der quadratischen Ungleichung (negative Wurzelwerte kommen nicht in Betracht)

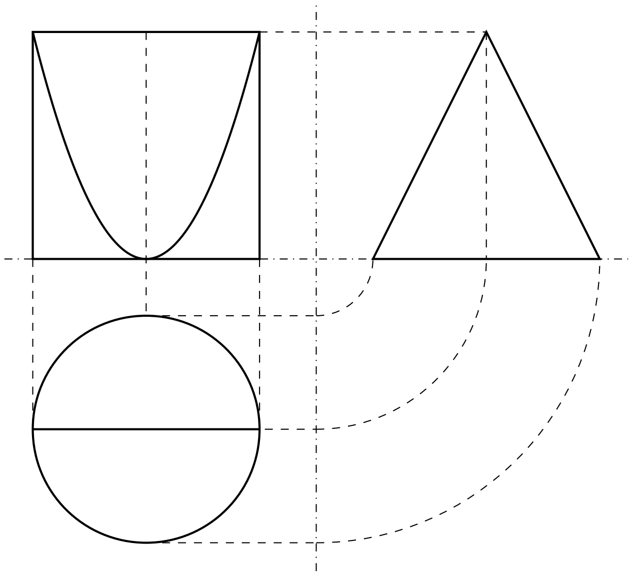
$$c \geq \frac{1}{4}\left[\sqrt{(a+b)^2 + 8ab} - (a+b)\right]$$

b) Für den Würfel a^3 erhält man $x_e = \frac{a}{2}$, $V_{max} = \frac{5}{6}a^3$.
Der Stumpfkörper ist der von acht gleichseitigen Dreiecken und sechs Quadraten begrenzte Körper, einer der 15 halbregulären archimedischen Körper.

Aufgabe 25/63
Aus einem Brett sind ein Kreis mit dem Durchmesser $d = 2r$, ein Quadrat mit der Seite $a = 2r$ und ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $a = 2r$ und der Höhe $b = 2r$ ausgeschnitten.
Welcher Körper lässt sich durch jede der drei Öffnungen hindurchschieben so, dass er sie dabei vollständig ausfüllt?



Die Lösung findet man, wenn man den Körper im Dreitafelverfahren darstellt (Abbildung nächste Seite). Es ergibt sich dann, dass ein Riss ein Kreis, der zweite Riss ein Quadrat und der dritte Riss ein gleichschenkliges Dreieck ist.
Demzufolge muss es sich um einen Zylinder mit der Höhe des Durchmessers handeln, von dem symmetrisch zu einem Achsenschnitt zwei Zylinderhufe abgeschnitten sind.



Aufgabe 26/63
Im Jahre 1604 hatte zum ersten Mal seit Einführung des gregorianischen Kalenders der Februar fünf Sonntage. In welchen Jahren wiederholt sich diese Eigenschaft?

Offenbar kann nur in Schaltjahren die gewünschte Eigenschaft auftreten, und zwar auch nur dann, wenn der 1. Februar auf einen Sonntag fällt. Nach Ablauf eines Jahres von 365 Tagen verschiebt sich der Wochentag für ein bestimmtes Datum um 1 da $365 = 7k+1$ ist. In Schaltjahren beträgt die Verschiebung 2, nach Ablauf von vier Jahren (von denen eines ein Schaltjahr ist) also insgesamt 5.
Soll die Wiederkehr nach $4n$ Jahren eintreten, so muss also $n \cdot 5$ durch 7 teilbar sein. Die kleinste Zahl n, für die gilt $n \cdot 5 = 7m$ mit $m = 1; 2; 3; ...$ ist $n = 7$.
Die erste Wiederholung erfolgt also nach 28 Jahren, die nächste nach weiteren 28 Jahren und so fort. Danach ergeben sich zunächst die Jahreszahlen 1632, 1660 und 1688. Überschreitet man aber ein volles Jahrhundert (nämlich eines der Jahre 1700, 1800 oder 1900), die nach dem Gregorianischen Kalender keine Schaltjahre sind, so ist die Verschiebung um 1 kleiner. Es muss dann $n \cdot 5 - 1$ durch 7 teilbar sein. Das ist für $n = 3; 10; 17; ...$ der Fall.
Der Wert $n = 3$ kommt aber nicht in Frage, da durch ihn das Jahr 1700 noch nicht überschritten wird. Demnach muss $n = 10$ sein, und die Zwischenzeit beträgt 40 Jahre. Man erhält somit die folgenden Jahreszahlen:

1604	1632	1660	1688
	1728	1756	1784
	1824	1852	1880
	1920	1948	1976

Da das Jahr 2000 (ebenso wie das Jahr 1600) ein Schaltjahr ist, folgt bereits nach 28 Jahren ein Februar mit fünf Sonntagen, also im Jahr 2004. Damit beginnt aber ein neuer Zyklus mit denselben Endziffern

2004 2032 2060 2088 ...

Aufgabe 27/63
Man beweise, dass es unendliche viele Primzahlen der Form $6m - 1$ gibt (wobei m eine natürliche Zahl sei).

1. Es gibt mindestens eine Primzahl der Form $6m - 1$, nämlich 5.
2. Angenommen es gäbe endlich viele, und zwar genau k verschiedene Primzahlen $p_1; p_2; p_3; ...; p_k$ der Form $6m - 1$. Dann folgt, dass es mindestens $k + 1$ Primzahlen der Form $6m - 1$ gibt - im Widerspruch zur Annahme.
Beweis: Aus den k Primzahlen $p_1; p_2; p_3; ...; p_k$ bilde man die Zahl $6p_1p_2p_3...p_k - 1$.
a) Entweder ist $6p_1p_2p_3...p_k - 1$ selbst Primzahl. Dann ist sie von der Form $6m-1$, und es gilt $6p_1p_2p_3...p_k - 1 = p_{k+1}$, was zu beweisen war.

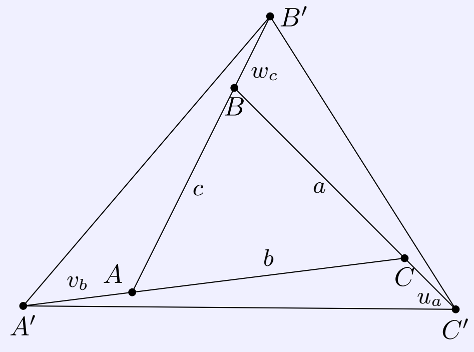
b) Oder $6p_1p_2p_3...p_k - 1$ ist keine Primzahl. Dann müssen ihre Primteiler die Form $6m+1$ oder $6m+5 = 6m' - 1$ haben, denn 2 und 3 sind sicher nicht Primteiler, und Zahlen der Form $6m$, $6m+2$, $6m+3$ sowie $6m + 4$ sind keine Primzahlen und können daher auch nicht Primteiler sein. Es können aber nicht alle Primteiler die Form $6m + 1$ haben, da das Produkt zweier Zahlen $6m_1 + 1$ und $6m_2 + 1$ stets die Form $6m_3 + 1$ hat:

$$(6m_1 + 1)(6m_2 + 1) = 36m_1m_2 + 6m_1 + 6m_2 + 1 = 6(6m_1m_2 + m_1 + m_2) + 1 = 6m_3 + 1$$

Also befindet sich unter den Primteilern der Zahl $6p_1p_2p_3...p_k - 1$ mindestens einer der Form $6m - 1$. Dieser kann aber mit keiner der Primzahlen $p_1; p_2; p_3; ...; p_k$ identisch sein, da $6p_1p_2p_3...p_k - 1$ durch keine dieser Zahlen teilbar ist. Also gibt es noch mindestens eine von $p_1; p_2; ...; p_k$ verschiedene Primzahl p_{k+1} von der Form $6m - 1$, was zu beweisen war.
Damit ist gezeigt, dass die Annahme, es gäbe genau k verschiedene Primzahlen der Form $6m - 1$, auf einen Widerspruch führt. Zu jeder Anzahl k derartiger Primzahlen gibt es noch mindestens eine weitere; also gibt es unendlich viele.

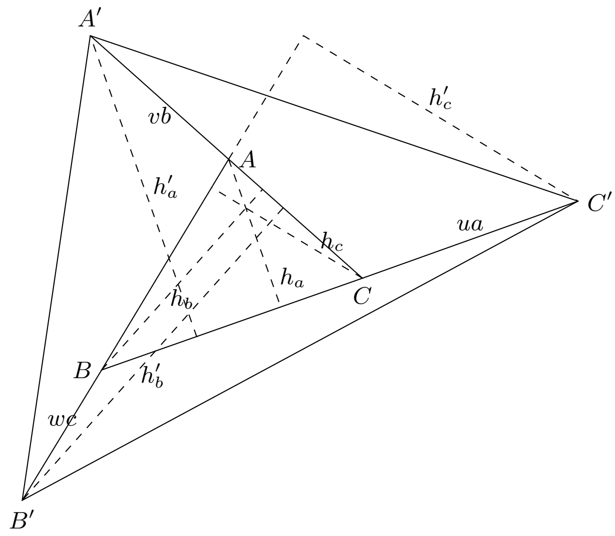
Aufgabe 28/63

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Die Seite $a = BC$ werde über C hinaus um u_a bis C' verlängert, die Seite $b = CA$ über A hinaus um v_b bis A' und die Seite $c = AB$ über B hinaus um w_c bis B'.
Wie groß ist der Flächeninhalt F' des Dreiecks $A'B'C'$, gemessen in Flächeninhalten F des Dreiecks ABC? (Abbildung)



Es seien F_1 der Flächeninhalt und h'_a die Höhe des Dreiecks $CC'A'$, F_2 der Flächeninhalt und h'_b die Höhe des Dreiecks $AA'B'$ sowie F_3 der Flächeninhalt und h'_c die Höhe des Dreiecks $BB'C'$. Dann gelten die Gleichungen (Abbildung)

$$F_1 = \frac{1}{2}uah'_a \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{2}vbh'_b \quad ; \quad F_3 = \frac{1}{2}wch'_c$$



Aus dem Strahlensatz folgt

$$h'_a : h_a = \frac{b + vb}{b} = 1 + v \quad ; \quad h'_a = (1 + v)h_a$$

$$h'_b : h_b = \frac{c + wc}{c} = 1 + w \quad ; \quad h'_b = (1 + w)h_b$$

$$h'_c : h_c = \frac{a + ua}{a} = 1 + u \quad ; \quad h'_c = (1 + u)h_c$$

Damit ergibt sich

$$F_1 = \frac{1}{2}ua(1 + v)h_a \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{2}vb(1 + w)h_b \quad ; \quad F_3 = \frac{1}{2}wc(1 + u)h_c$$

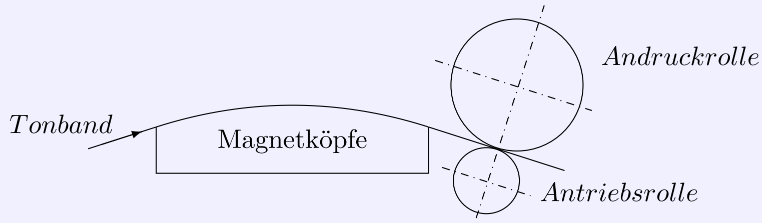
Wenn $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = F$ folgt daraus

$$F_1 = Fu(1 + v) \quad ; \quad F_2 = Fv(1 + w) \quad ; \quad F_3 = Fw(1 + u)$$

Für F' gilt $F' = F + F_1 + F_2 + F_3$ also

$$F' = F + Fu(1 + v) + Fv(1 + w) + Fw(1 + u) = F(1 + u + v + w + uv + vw + wu)$$

Aufgabe 29/63
Bei einem Magnettongerät wird das Tonband nach der in der Abbildung schematisch gezeigten Konstruktion an den Magnetköpfen vorbeigezogen.



Infolge von Herstellungsungenauigkeiten schwankt die Drehzahl n der Antriebsrolle um maximal ±0,1%. Ferner ist der Radius r der Antriebsrolle mit einem Fehler von maximal ±0,01 mm behaftet.
Mit diesem Magnettongerät wird ein 1000-Hz-Ton aufgenommen und anschließend abgespielt.
Um wieviel Hertz schwankt der abgespielte Ton maximal, wenn außer den angegebenen Ungenauigkeiten keine weiteren Fehler vorhanden sind? Dabei sei $n = 600\text{min}^{-1}$ und $r = 3$ mm.
Anleitung: Die Frequenz f ist der Tonbandgeschwindigkeit v proportional; d.h. $f = k \cdot v$, wobei k ein konstanter Faktor ist.

Es ist zunächst die Gleichung für die Bandgeschwindigkeit aufzustellen. Der Umfang der Antriebsrolle ist $U = 2\pi r$. Dividiert man durch die Zeit T einer Umdrehung, so erhält man die Umfangsgeschwindigkeit, die gleich der Bandgeschwindigkeit v ist. Demnach ist $v = \frac{U}{T} = \frac{2\pi r}{T}$.
Mit $T = \frac{1}{n}$ erhält man schließlich $v = 2\pi rn$ (1). Der Radius r und die Drehzahl n sind Schwankungen um maximal $\pm\Delta r$ bzw. $\pm\Delta n$ unterworfen. Infolgedessen schwankt die Bandgeschwindigkeit v um den Wert $\pm \vartriangle v$.
Der größte Wert der Bandgeschwindigkeit ergibt sich, wenn r um $+\Delta r$ und n um $+\Delta n$ abweichen; dann ist

$$v + \Delta v = 2\pi(r + \Delta r)(n + \Delta n)$$

Der absolute Fehler der Bandgeschwindigkeit wird dann

$$\Delta v = 2\pi rn + 2\pi(r\Delta n + \Delta rn + \Delta r\Delta n) - 2\pi rn$$

(wegen $v = 2\pi rn$ nach Gleichung 1). Somit wird

$$\Delta v = 2\pi(r\Delta n + \Delta rn + \Delta r\Delta n) \quad (2)$$

Die Größen Δr und Δn sind sehr klein; ihr Produkt wird dann erst recht klein, d.h. $\Delta r\Delta n \ll r\Delta n + \Delta rn$. Man kann also $\Delta r\Delta n$ gegenüber $r\Delta n + \Delta rn$ vernachlässigen, ohne einen sich auswirkenden Rechenfehler zu begehen. Damit wird der absolute Fehler

$$\Delta v = 2\pi(r\Delta n + n\Delta r) \quad (3)$$

Dass die Vernachlässigung von $\Delta r\Delta n$ sinnvoll ist, kann durch Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte in die Gleichungen (2) und (3) und durch Vergleich der beider Ergebnisse bestätigt werden.
Bei der Aufnahme der Frequenz f wird infolge der Schwankungen der Bandgeschwindigkeit ein Fehler verursacht. Es ist

$$f + \Delta f = k(v + \Delta v) \qquad ; \qquad \Delta f = k(v + \Delta v) - f$$

und wegen $f = kv$: $\Delta f = k\Delta v \quad (4)$.
Durch Kombination von Gleichung (3) mit Gleichung (4) ergibt sich

$$\Delta f = 2k\pi(r\Delta n + n\Delta r) \quad (5)$$

Die Konstante k lässt sich aus $f = kv$ zu $k = \frac{f}{v}$ bestimmen; mit Gleichung (1) erhält man daraus $k = \frac{f}{2\pi rn}$ (6). Setzt man Gleichung (6) in Gleichung (5) ein, so erhält man

$$\Delta f = f\left(\frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta r}{r}\right) \quad (7)$$

Dies ist der maximale Fehler der Frequenz, die bei der Aufnahme auftritt. Im ungünstigsten Fall wird derselbe Fehler nochmals durch die Wiedergabe verursacht; die Frequenz schwankt somit maximal um den Wert

$$\Delta f' = 2f\left(\frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta r}{r}\right) \qquad (8)$$

Mit $\frac{\Delta n}{n} = 0{,}001 = 0{,}01\%$ und $\Delta r = 0{,}01$ mm sowie $r = 3$ mm, $f = 1000$ Hz ergibt sich schließlich $\Delta f' = 8{,}6$ Hz.
Dieselbe Abweichung ergibt sich bei Schwankungen nach unten. Bei der Wiedergabe des aufgenommenen 1000-Hz-Tons schwankt der Ton also um ±8,6 Hz, d.h., die Frequenz ändert sich innerhalb eines Bereiches von 991,4 Hz bis 1008,6 Hz.

Aufgabe 30/63
Auf einer schiefen Ebene verstellbarer Neigung α liegt eine Masse m. Zwischen der Masse und der Ebene besteht Haftreibung. Der Haftreibungskoeffizient sei μ_0. Die Masse ist durch einen Faden am oberen Rand der schiefen Ebene befestigt. Dieser Faden reißt bei einer Belastung L_r. Die Neigung der Ebene wird nun (bei 0° beginnend) vergrößert.
Bei welcher Neigung α_r reißt der Faden?

a) Man löse die Aufgabe in allgemeinen Größensymbolen, d.h., man stelle $\alpha_r = f(m; \mu_0; L_r; g)$ explizit dar.

b) Man berechne α_r zahlenmäßig für $m = 3$ kg, $\mu_0 = 0{,}3$, $L_r = 8$ N und $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$.

Hangabtriebskraft: $P_A = mg \sin\alpha$
Reibungskraft: $P_R = \mu_0 mg \cos\alpha$
Fadenbelastung: $L = mg(\sin\alpha - \mu_0 \cos\alpha)$
Zerreißbedingung: $L_r \geq mg(\sin\alpha - \mu_0 \cos\alpha_r)$
Die Zerreißbedingung ergibt eine Gleichung der allgemeinen Form $\sin x - a\cos x = b$ mit $x = \alpha_r$, $a = \mu_0$ und $b = \frac{L_r}{mg}$.
Setzt man $a = \tan y$ und multipliziert die Gleichung mit $\cos y$, so ergibt sich und weiter mit einem Additionstheorem

$$\sin x \cos y - \sin y \cos x = b\cos y \to \sin(x - y) = b\cos y$$

Nach x aufgelöst, erhält man $x = y + \arcsin b\cos y$. Substituiert man y zurück, so folgt

$$x = \arctan a + \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Lösung und den gesuchten Zahlenwert

$$\alpha_r = \arctan\mu_0 + \arcsin\left(\frac{L_r}{mg\sqrt{1+\mu_0^2}}\right) \approx 31°48'$$

Aufgabe 31/63
Gegeben sei eine vierziffrige Zahl Z mit der folgenden Eigenschaft: Streicht man die ersten beiden Ziffern weg, so erhält man die Quadratwurzel von Z. Wie heißt die Zahl Z?

Es sei $Z = 100x + y$, wobei $1 \leq y 99$ und $10 \leq x \leq 99$, x und y ganzzahlig ist. Dann gilt auf Grund der Eigenschaften von Z: $100x + y = y^2$ oder $100x = y(y-1)$.
Es ist also das Produkt zweier ganzer aufeinanderfolgender Zahlen zu finden, das ein ganzzahliges Vielfaches von 100 ist. Setzt man $x = ab$, so folgt entweder
1.) $y = 4a; y - 1 = 25b$ oder 2.) $y = 25a; y - 1 = 2b$
Man überlegt sich leicht, dass die weitere Faktorenzerlegungen
3.) $y = 2a; y - 1 = 50b$ oder 4.) $y = 50a; y - 1 = 2b$ oder 5.) $y = 10a; y - 1 = 10b$
als unbrauchbar ausscheiden.
Daraus folgt: $25b = 4a - 1$ oder $25a = 4b + 1$. Die linken Seiten der Gleichungen sind durch 25 teilbar, also müssen es auch die rechten sein. Damit kommen nur Werte in Frage, die als letzte Stellen entweder

75 oder 25 haben, also $b = 3; a = 19$ oder $a = 1; b = 6$.
Wegen $ab = x \geq 10$ kommen die Werte $a = 1; b = 6$ nicht in Betracht, und wegen $ab = x \leq 99$ kommen die weiteren Werte $b = 7; a = 44$ bzw. $a = 5; b = 31$ sowie alle größeren nicht in Frage.
Damit ist die Aufgabe gelöst. Es folgt

$$x = ab = 57 \qquad ; \qquad y = 4a = 25b + 1 = 76$$

also $Z = 100x + y = 5776 = 76^2$. Wie der Lösungsweg ausweist, ist dies auch die einzige Lösung.

Aufgabe 32/63
Die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps wurde experimentell ermittelt. Bei Montage auf dem Hinterrad ergaben sich durchschnittlich 15000 km Fahrtstrecke bis zum vollständigen Verschleiß, bei Montage auf dem Vorderrad dagegen 25000 km.

a) Nach welcher Fahrtstrecke müssen zwei gleichzeitig aufmontierte Räder ausgewechselt (Vorder- und Hinterreifen vertauscht) werden, wenn beide nach der gleichen Fahrtstrecke vollständig verschleißt sein sollen?

b) Welche Fahrtstrecke kann man maximal mit zwei Reifen zurücklegen?

Es werde angenommen, dass der Verschleiß proportional zur Fahrtstrecke ist.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen (in km):
x Fahrtstrecke vor Reifenwechsel,
y Fahrtstrecke nach Reifenwechsel bis zum endgültigen Verschleiß
$a = 25000$ Fahrtstrecke des Vorderrades
$b = 15000$ Fahrtstrecke des Hinterrades (beides bis zum endgültigen Verschleiß)
Dann gilt für den Verschleiß des Vorderrades

$$\frac{x}{a} \cdot 100\% + \frac{y}{b} \cdot 100\% = 100\% \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

des Hinterrades

$$\frac{x}{b} \cdot 100\% + \frac{y}{a} \cdot 100\% = 100\% \quad \text{oder} \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

Aus der Symmetrie der beiden Gleichungen bezüglich der Unbekannten x und y (wenn man beide vertauscht, ergeben sich wieder die ursprünglichen Gleichungen) folgt unmittelbar $y = x$. Damit erhält man

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \qquad \text{oder} \qquad x = y = \frac{a \cdot b}{a + b} = 9375$$

als Lösung zur Frage a. Die Lösung zur Frage b ergibt sich aus $x + y = x + x = 2x = 18750$. Die Reifen müssen also nach 9375 km gewechselt werden, die Gesamtfahrstrecke beträgt 18750 km.

Aufgabe 33/63
Es sollen u Teile einer x-prozentigen Lösung mit v Teilen einer y-prozentigen Lösung derselben Chemikalie gemischt werden, so dass sie $u + v$ Teile einer z-prozentigen Lösung ergeben.
1) Man berechne aus den Werten, wobei $u : v$ das Mischungsverhältnis darstellt,
a) x, y und $u : v$ den Wert z
b) x, z und $u : v$ der Wert y
c) x, y und z den Wert $u : v$

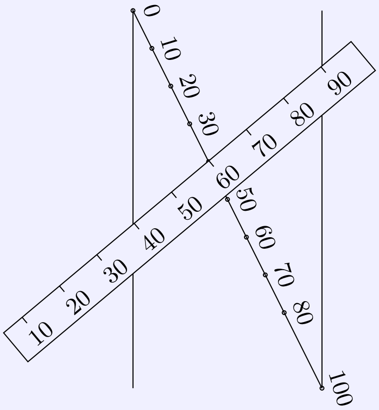
2) In der Praxis wird zur Vereinfachung der Rechnung häufig das sogenannte "Mischungskreuz" angewendet: Die Differenzen aus der Prozentigkeit einer der Ausgangslösungen und der Prozentigkeit der Mischung ergeben jeweils die erforderlichen Anteile der anderen Ausgangslösung.
Beispiel: Aus einer 96-prozentigen und einer 89-prozentigen Lösung soll eine 85-prozentige Lösung hergestellt werden. Das Mischungskreuz erhält folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccc} 96 & & 5 \\ & \searrow \; \nearrow & \\ & 85 & \\ & \nearrow \; \searrow & \\ 80 & & 11 \end{array}$$

Es sind also 5 Teile der 96-prozentigen Lösung mit elf Teilen der 80-prozentigen Lösung zu mischen.

Man beweise die Richtigkeit dieses Verfahrens.

3) Misst man u und v in Prozenten der gewünschten Gesamtmenge, so kann man auch das folgende Nomogramm (Abbildung) verwenden.



Der Mittelteil des N-förmigen Nomogramms trägt eine Einteilung von 0 bis 100, die die Anteile u und v an der gewünschten Gesamtmenge liefert. Auf einem beweglichen Stab ist die Prozentigkeit der Lösungen aufgetragen.
Soll z.B. durch Mischung einer 40-prozentigen mit einer 90-prozentigen eine 60-prozentige Lösung entstehen, so sind Punkte 40 und 60 der beweglichen Skala auf die Parallelen zu legen; der Stab ist nun so lange parallel zu sich selbst zu verschieben, bis er von der schrägen Skala bei 60 geschnitten wird.

Dieser Schnittpunkt teilt die schräge Skala im Verhältnis der zu mischenden Anteile; in unserem Beispiel wären also 40 Teile der 90-prozentigen mit 60 Teilen der 40-prozentigen Lösung zu mischen. Man beweise die Richtigkeit dieses Verfahrens.

1. Die erste Lösung enthält ux Teile reine Substanz, die zweite vy Teile, das Gemisch $(u+v)z$ Teile. Damit ergibt sich die Gleichung: $ux + vy = (u+v)z$.
Nach Division durch v ergibt sich daraus die Grundgleichung

$$\frac{u}{v}x + y = \left(\frac{u}{v} + 1\right) z \quad (1)$$

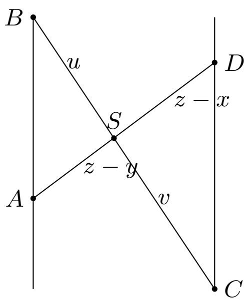
Da jeweils drei der vier Veränderlichen x, y, z und $\frac{u}{v}$ gegeben sind, ist diese Gleichung als Gleichung mit einer Unbekannten lösbar:

$$z = \frac{\frac{u}{v}x + y}{\frac{u}{v} + 1} \quad (2); \qquad y = \left(\frac{u}{v} + 1\right) z - \frac{u}{v}x \quad (3); \qquad \frac{u}{v} = \frac{z-y}{x-z} \quad (4)$$

2. Es sei $x > z > y$ (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit; ist $x < z < y$, so werden x und y vertauscht; ist $z = x; y$, so ist die Aufgabe in der vorliegenden Form nicht lösbar). Die allgemeine Form des Mischungskreuzes ist dann

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & u = z - y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & z & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ y & & & & v = x - z \end{array}$$

Die Division von u durch v liefert die Gleichung (4). Das Mischungskreuz stellt also nichts anderes das als eine Gedächtnishilfe für die Gleichung (4). Damit ist aber die Richtigkeit des Verfahrens bewiesen.



Bei dem Nomogramm ergeben sich zwei ähnliche Dreiecke (Abbildung): Aus $\measuredangle ASB = \measuredangle CSD$ (Scheitelwinkel), $\measuredangle BAS = \measuredangle CDS$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\triangle\ ASB \cong \triangle\ DSC$ (nach dem Hauptähnlichkeitssatz). Daraus folgt: $BS : CS = AS : DS$ oder $u : v = (z-y) : (x-z)$. Das aber ist wieder Gleichung (4), womit die Richtigkeit des Verfahrens bewiesen ist.

Aufgabe 34/63
Gesucht werden die drei positive ganze Zahlen, die nicht sämtlich gerade sind und für die folgende weitere Bedingungen gelten:
1. Ihre Summe beträgt 102.
2. Ihr Produkt ist 24024.

Man zerlegt zunächst das Produkt in seine Primfaktoren: $24024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Da nur eine der drei gesuchten Zahlen gerade sein kann, kommt für die nur 8 oder ein Vielfaches von 8 in Frage. Als Vielfache scheiden $11 \cdot 8 = 88$ und alle größeren von vornherein aus, da sonst die Summenbedingung nicht erfüllbar ist. Damit stehen an geraden Zahlen der Zahlen 8, $3 \cdot 8 = 24$ und $7 \cdot 8 = 56$ zur Verfügung.

1. Die gerade Zahl sei 8. Dann verbleiben für die beiden restlichen Zahlen x und y die Primfaktoren 3, 7, 11 und 13 und es muss gelten: $x + y = 102 - 8 = 94$. Damit ergeben sich folgende Kombinationen:

$$3 + 7 \cdot 11 \cdot 13 \neq 94; \qquad 3 \cdot 7 + 11 \cdot 13 \neq 94; \qquad 7 + 3 \cdot 11 \cdot 13 \neq 94; \qquad 3 \cdot 11 + 7 \cdot 13 \neq 94$$

$$11 + 3 \cdot 7 \cdot 13 \neq 94; \qquad 3 \cdot 13 + 7 \cdot 11 \neq 94; \qquad 13 + 3 \cdot 7 \cdot 11 \neq 94$$

Folglich scheidet diese Möglichkeit aus.

2. Die gerade Zahl sei 24. Dann verbleiben für die beiden restlichen Zahlen x und y die Primfaktoren 7, 11 und 13 und es muss gelten $x - y = 78$.
Die drei möglichen Kombinationen ergeben nicht 78, so dass auch diese Möglichkeit ausscheidet.

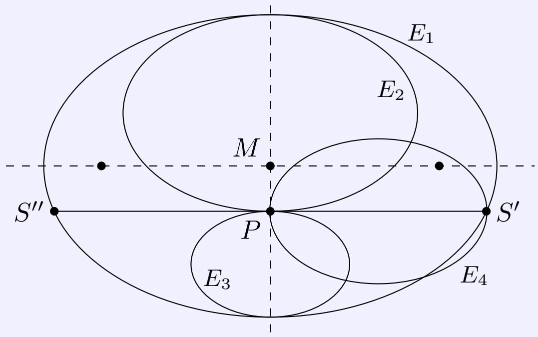
$$7 + 11 \cdot 13 \neq 78; \qquad 11 + 7 \cdot 13 \neq 78; \qquad 13 + 7 \cdot 11 \neq 78$$

3. Die gerade Zahl sei 56. Dann verbleiben für die beiden restlichen Zahlen x und y die Primfaktoren 3, 11 und 13 und es muss gelten: $x + y = 46$. Damit ergeben sich folgende Kombinationen:

$$3 + 11 \cdot 13 \neq 46; \qquad 11 + 3 \cdot 13 \neq 46; \qquad 13 + 3 \cdot 11 = 46$$

Man sieht, dass die letzte Kombination zur Lösung führt. Die gesuchten Zahlen sind also 13, 33 und 56. Ihre Summe ist 102, das Produkt ist 24024.

Aufgabe 35/63
Gegeben ist eine Ellipse E_1 mit den Halbachsen a_1 und b_1, deren kleine (bzw. große) Achse durch den Punkt P in zwei Teilstrecken zerlegt ist. Diese Teilstrecken seien die kleinen (bzw. großen) Achsen zweier weiterer Ellipsen E_2 und E_3, die der Ellipse E_1 ähnlich seien.



Durch P sei die Parallele zur großen (bzw. kleinen) Achse von E_1 gezogen; deren Schnittpunkte mit E_1 sind mit S' und S'' bezeichnet. Wird $PS' = PS''$ als große (bzw. kleine) Achse einer den Ellipsen E_1, E_2 und E_3 ähnlichen Ellipse E_4 gewählt, so gilt

$$F(E_1) - F(E_2) - F(E_3) = 2F(E_4)$$

wobei mit $F(E_i)$ der Flächeninhalt der Ellipse F_i bezeichnet ist. Man führe den Beweis für diese Behauptung!

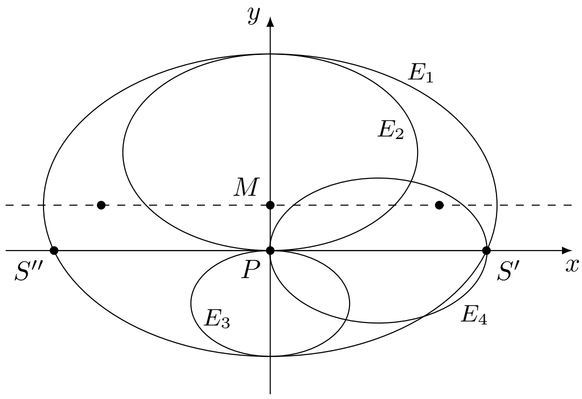
Wir führen den Beweis für den Fall, dass P die kleine Halbachse teilt. Der Beweis für den anderen Fall verläuft analog.

Zweckmäßig wird die Ellipse E_1 so in ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem gelegt, dass P auf den Nullpunkt fällt und die große Achse parallel zur x-Achse liegt. Der Abstand des Mittelpunktes M_1 von P sei m. Wird mit a_i die große und mit b_i die kleine Halbachse der Ellipse E_i bezeichnet, so hat die Ellipse E_1 in dieser Lage die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{(y-m)^2}{b_1^2} = 1$$

Aus ihr erhält man die große Achse $2a_4$ von E_4 als Abszisse von S', indem man $y = 0$ setzt:

$$2a_4 = x_{S'} = \frac{a_1}{b_1}\sqrt{b_1^2 - m^2} \qquad ; \qquad a_4 = \frac{a_1}{2b_1}\sqrt{b_1^2 - m^2}$$



Da die Ellipsen ähnlich sind, ist das Verhältnis entsprechender Halbachsen konstant: $a_1 : b_1 = a_4 : b_4$. Daraus folgt

$$b_4 = \frac{a_4 b_1}{a_1} = \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - m^2}$$

Damit ergibt sich

$$F(E_4) = \pi a_4 b_4 = \frac{\pi a_1}{4b_1}(b_1^2 - m^2)$$

Für die kleinen Halbachsen von E_2 und E_3 gilt auf Grund der Aufgabenstellung $b_2 = \frac{b_1+m}{2}$ und $b_3 = \frac{b_1-m}{2}$. Aus der Ähnlichkeit der Ellipsen E_1, E_2 und E_3 folgt weiterhin $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ und $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$ und damit

$$a_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_1 + m}{2} \qquad ; \qquad a_3 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_1 - m}{2}$$

Mithin ist

$$F(E_2) = \frac{\pi a_1}{4b_1}(b_1 + m)^2 \qquad \text{und} \qquad F(E_3) = \frac{\pi a_1}{4b_1}(b_1 - m)^2$$

Wegen $F(E_1) = \pi a_1 b_1$ ergibt sich damit die Behauptung

$$F(E_1) - F(E_2) - F(E_3) = \pi a_1 b_1 - \frac{\pi a_1}{4b_1}(b_1 + m)^2 - \frac{\pi a_1}{4b_1}(b_1 - m)^2 = 2\frac{\pi a_1}{4b_1}(b^2 - m^2) = 2F(E_4)$$

Aufgabe 36/63
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ die Ungleichung gilt:

$$(n+1)^n < n^{(n+1)}$$

Die zu beweisende Ungleichung ist äquivalent der Ungleichung

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < 1$$

Dies ist für $n = 3$ richtig, denn es ist $\frac{4^3}{3^4} = \frac{64}{81} < 1$.
Angenommen, die Richtigkeit der Ungleichung wäre für $n = k$ bereits beweisen, d.h., es gelte

$$\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} < 1 \qquad \text{dann ist} \qquad \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k} > 1$$

und es folgt

$$\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^k + 2} < \frac{(k+2)^{k+1} \cdot k^{k+1}}{(k+1)^k + 2(k+1)^k} = \frac{[k(k+2)]^{k+1}}{(k+1)^{2k+2}} = \frac{k^2 + 2k)^{k+1}}{(k^2 + 2k + 1)^{k+1}} < 1$$

Aus der Gültigkeit der Ungleichung für $n = k$ folgt somit auch die Gültigkeit für $n = k + 1$ und somit wegen der Gültigkeit für $n = 3$ die für jede natürliche Zahl $n \geq 3$.

2.4 Aufgaben und Lösungen 1964

Aufgabe 1/64
Es gibt in der Folge der natürlichen Zahlen zwei Gruppen von je vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Primzahlen, die symmetrische zu einem Primzahlzwilling angeordnet sind. Der Abstand zwischen der kleinsten und der größten dieser Primzahlen beträgt 70, ihr Produkt ist gleich 3959.
Welches sind die acht dieser Primzahlen und der Primzahlzwilling?

Wir nennen den Mittelpunkt der symmetrischen Gruppierung x. Dann ist die kleinste dieser Primzahlen gleich $x - 35$ und die größte ist dann gleich $x + 35$ und es gilt

$$(x - 35)(x + 35) = 3959 \rightarrow x^2 - 1225 = 3959 \rightarrow x_1 = 72; x_2 = -72$$

Demnach bilden 71 und 73 den Primzahlzwilling. Die kleinste der gesuchten Primzahlen in $72 - 35 = 37$, die größte ist $72 + 35 = 107$. Die beiden Gruppen von je vier aufeinanderfolgenden Primzahlen sind $37; 41; 43; 47$ und $97; 101; 103; 107$. Die Auswertung des x_2-Wertes führt aus die entsprechenden negativen Zahlen.

Aufgabe 2/64
Man beweise die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Dabei beträgt n die Anzahl der Faktoren.

Es sei

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_k \cdot ... \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} = a \text{ und}$$

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ... \cdot b_k \cdot ... \cdot b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n}{2n+1} = b$$

Dann ist $a < b$, da beide Produkte aus gleichviel Faktoren bestehen und für jedes k gilt $a_k < b_k$. Dann ist auch $a^2 < ab = \frac{1}{2n+1}$. Daraus folgt

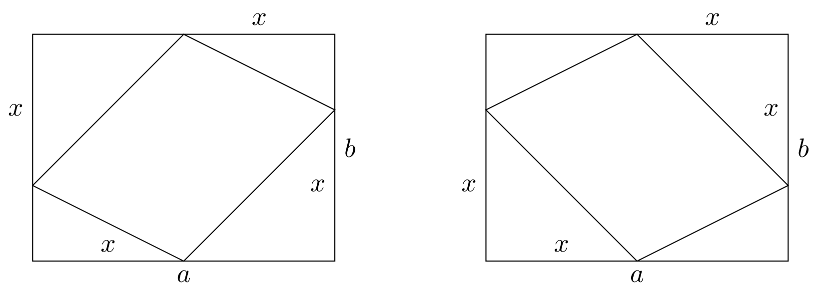
$$a < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Aufgabe 3/64
Auf jeder Ecke eines Rechtecks $F = ab$ wird eine Strecke x abgetragen, und zwar

a) von jeder Ecke im entgegengesetzten Uhrzeigersinn,

b) von zwei gegenüberliegenden Ecken aus in beide Richtungen

Die sich dadurch ergebenden Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms. Für welche Strecke x wird dessen Inhalt extrem?



a) $F_1 = ab - (a-x)x - (b-x)x = ab - (a+b)x + 2x^2$; $\quad F_1' = -(a+b) + 4x$; $\quad F_1'' = 4 > 0$

b) $F_2 = ab - x^2 - (a-x)(b-x) = (a+b)x - 2x^2$; $\quad F_2' = (a+b) - 4x \quad F_2'' = -4 < 0$

Aus $F_1' = 0$ folgt $x_E = \frac{1}{4}(a+b)$. Aus $F_2' = 0$ folgt $x_E = \frac{1}{4}(a+b)$.
In beiden Fällen muss man $x = \frac{1}{4}(a+b)$ abtragen, um ein Extremum zu erhalten. Man findet bei a) ein Minimum, bei b) ein Maximum. (Abbildung)

$$F_{1min} = ab - \frac{(a+b)^2}{8} \qquad ; \qquad F_{2max} = \frac{(a+b)^2}{8}$$

Es ist stets, auch in den Extremfällen, $F_1 + F_2 = F$. Auch die Summe der Restdreiecke ist gleich F. Aus ihnen kann man F in verschiedener Weise zusammensetzen, u.a. auch so, dass ein Trapezoid mit rechtwinkligen Diagonalen entsteht.

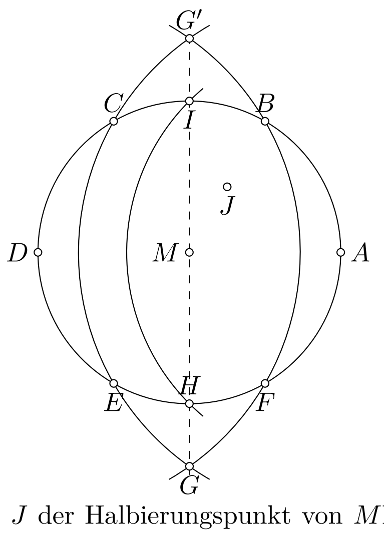
Determination, Sonderfälle:
a) Bezeichnet man die kleinere Seite mit b, so muss $x \leq b$ sein, damit man ein im Rechteck liegendes Parallelogramm erhält. Im Extremfall muss $\frac{a+b}{4} \leq b$, das heißt also, $b \geq \frac{a}{3}$ sein. Im Grenzfall $b = \frac{a}{3}$ fallen zwei Ecken der extremen Fläche in Gegenecken des Rechtecks, $F_{1min} = b^2$, $F_{2max} = 2b^2$.
b) Legt man ein Quadrat mit $F = a^2$ zugrunde, so fallen die Extremfiguren mit dem Quadrat der Seitenmitten zusammen. Dieses erscheint als Minimum aller einbeschriebenen Quadrate und als Maximum aller einbeschriebenen Rechtecke. Die Seiten sind zu den Diagonalen des Quadrates parallel.

Aufgabe 4/64
Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Der Kreisumfang ist unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels in vier gleiche Teile zu teilen.

Analysis: Die Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Konstruktion eines einbeschriebenen Quadrates, d.h. also, eines Quadrates mit der Diagonale $d = 2r$. Ist a die Seite dieses Quadrates, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $2a^2 = d^2 = 4r^2$ und demnach $a = r\sqrt{2}$.
Die Aufgabe verlangt als die Konstruktion der Strecke $a = r\sqrt{2}$ ausschließlich mit Hilfe des Zirkels.
Unproblematisch ist die Konstruktion einer Strecke $b = r\sqrt{3}$. Sie ergibt sich als Seite eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Konstruiert man nun ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis d und den Schenkeln b, so gilt für die Höhe h dieses Dreiecks nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (r\sqrt{3})^2 - r^2 = 2r^2$$

also $h = r\sqrt{2}$.
Um den Fußpunkt der Höhe zu finden, konstruiert man dieses Dreieck über einem Durchmesser eines Kreises, dann ist der Kreismittelpunkt M als Halbierungspunkt des Durchmessers wegen der Symmetrieachsen des gleichschenkligen Dreiecks auf Fußpunkt der Höhe.



Konstruktionsbeschreibung: Man teilt den Kreisumfang in sechs gleiche Teile, indem man von einem beliebigen Punkt A des Kreisumfangs fortgesetzt den Radius r des Kreises abträgt. Die Teilpunkte seien dann A, B, C, D, E und F (Abbildung).
Mit AC in der Zirkelspanne schlägt man um A und d Kreisbögen, die einander in G (und G') schneiden. Ferner schlägt man mit MG (oder MG') in der Zirkelspanne einen Kreisbogen um A, der den Kreisumfang in H und I schneidet. Die Punkte A, H, D und I teilen den Kreis in vier gleiche Teile.

Beweis: Es ist nach Konstruktion

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = MA = MB = MC = r$$

Ist J der Halbierungspunkt von MB, so ist er aus Symmetriegründen auch Halbierungspunkt von AC, und es gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$JC^2 = AJ^2 = MA^2 - MJ^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}r^2 \to JC = AJ = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

und demnach $AC = AJ + JC = r\sqrt{3}$. Weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras $MG^2 = DG^2 - MD^2$ und nach Konstruktion $DG = AC = r\sqrt{3}$ und $MD = r$, also auch $MG^2 = 2r^2$ oder $MG = r\sqrt{2}$.
Nun ist nach Konstruktion $AH = AI = r\sqrt{2}$. Wegen $MH = MA = MI = r$ folgt daraus nach dem Satz des Pythagoras, das

$$\measuredangle HMA = \measuredangle AMI = 90° \qquad ; \qquad \measuredangle HMI = 180°$$

also HI Durchmesser des Kreises ist. Dann ist aus Symmetriegründen $DH = AH$ und $DI = AI$ also $AH = AI = DH = DI$.

Aufgabe 5/64
Es ist zu beweisen, dass stets mindestens eine der drei natürlichen Zahlen x, y und z, die der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen (pythagoreische Tripel), durch 5 teilbar ist!

Wir setzen

$$x = 5r \pm i, \qquad y = 5s \pm j, \qquad z = 5t \pm k$$

wobei r, s und t irgendwelche nichtnegative ganze Zahlen bedeuten, während i, j und k (unabhängig voneinander) die Werte 0, 1 oder 2 annehmen können. Dann gilt

$$(5r \pm i)^2 + (5s \pm j)^2 = (5t \pm k)^2$$

oder; nach entsprechender Umformung;

$$25(r^2 + s^2 + t^2) \pm 10(ri + sj + tk) = k^2 - i^2 - j^2$$

Da die linke Seite der Gleichung ohne Rest durch 5 teilbar ist, muss auch die rechte Seite ohne Rest durch 5 teilbar sein. Demzufolge kann die rechte Seite nur die beiden Werte -5 und 0 annehmen; denn die rechte Seite kann nach der Voraussetzung über die Zahlen i, j und k nicht größer als 4 und nicht kleiner als -8 sein.

1. Fall: $k^2 - i^2 - j^2 = -5$, d.h. $k^2 = i^2 + j^2 - 5$.
   Wegen $k^2 \geq 0$ muss $i^2 + j^2 \geq 5$ sein. Es muss also mindestens einer der beiden Zahlen i, j den Wert 2 haben, während die andere gleich 1 oder 2 ist. Der Fall, dass beide gleich 2 sind, ist aber nicht möglich, weil sich daraus $k^2 = 3$ ergäbe. Damit bleibt nur die Möglichkeit, dass $i = 2$ und $j = 1$ (oder umgekehrt), also $k^2 = 0$ ist.

2. Fall: $k^2 - i^2 - j^2 = 0$, d.h. $k^2 = i^2 + j^2$.
   Wenn diese Gleichung in nichtnegativen ganzen Zahlen erfüllt sein soll, müssen entweder alle drei Zahlen gleich Null sein, oder sie müssen sämtlich voneinander verschieden sein. Da aber für die drei Zahlen i, j und k nur die Werte 0, 1 und 2 zur Verfügung stehen, ist i oder j gleich Null.

Damit ist gezeigt, dass stets mindestens eine der drei Zahlen i, j, k den Wert Null hat, d.h., dass mindestens eine der drei Zahlen x, y und z durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 6/64
Man zeichne eine Gerade durch die zwei gegebenen Punkte P und Q, die etwa 37 cm voneinander entfernt sind. Zur Verfügung stehen ein Lineal (ohne Maßeinteilung) von 20 cm Länge und ein Winkeldreieck mit einer Hypotenusenlänge von 15 cm Länge. Nicht erlaubt ist das Einvisieren des Lineals zwischen den beiden Punkten (etwa so, wie man im Gelände ein Bandmaß zwischen zwei Fluchtstäben einvisiert).

Zur Lösung verwendet man zwei geometrische Lehrsätze, auf deren Beweis hier verzichtet wird.

1. Die Parallele zu zwei gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms durch den Diagonalenschnittpunkt ist Mittelparallele und halbiert die geschnittenen Seiten.

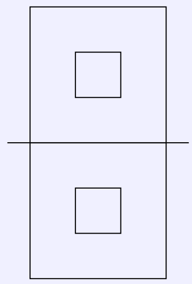
2. Schneiden zwei Geraden auf zwei von einem Punkt ausgehenden Strahlen verhältnisgleiche Abschnitte aus, so sind die Geraden parallel (Umkehrung des zweiten Strahlensatzes).

Man zeichnet durch P und Q je einen Strahl (unter Umständen durch mehrfaches Anlegen des Lineals), der Schnittpunkt der Strahlen sei S. Man halbiert PS in P', indem man über PS als Seite ein Parallelogramm $PSUV$ konstruiert und durch den Diagonalenschnittpunkt D die Parallele zu SU zieht, die PS in P' schneidet.
Entsprechend halbiert man QS in Q'. Man verbindet P' mit Q' (nach dem Strahlensatz ist $P'Q' = \frac{PQ}{2} <$ 20 cm) und zieht zu $P'Q'$ die Parallele zu P, die durch Q geht.

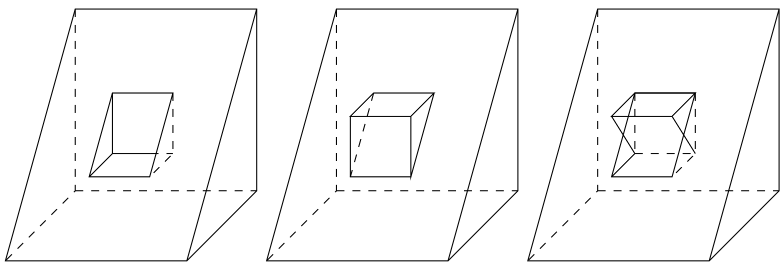
Bei der Konstruktion des Parallelogramms über PS bzw. QS hat man folgendes zu beachten: Im allgemeinen wird eine Diagonale länger sein als das Lineal. Diese Schwierigkeit behebt man folgendermaßen: Nachdem man durch P und durch S (bzw. durch Q und durch S) zwei Parallele gezogen hat, zeichnet man zunächst die längere Diagonale (unter Umständen durch mehrfaches Anlegen des Lineals). Wählt man den Winkel zwischen ihr und PS (bzw. QS) hinreichend klein, kann man immer erreichen, dass die kürzere Diagonale kleiner als die Lineallänge wird (vorausgesetzt, PS und QS sind nicht zu groß).

Aufgabe 7/64

Welche Form hat ein Körper mit dem in der Abbildung gezeigten Grund- und Aufriss?
Dabei sind alle Vierecke Quadrate, alle Kanten, die nicht sichtbar sind, werden im Grund- und Aufriss von den Quadratseiten vollständig überdeckt.



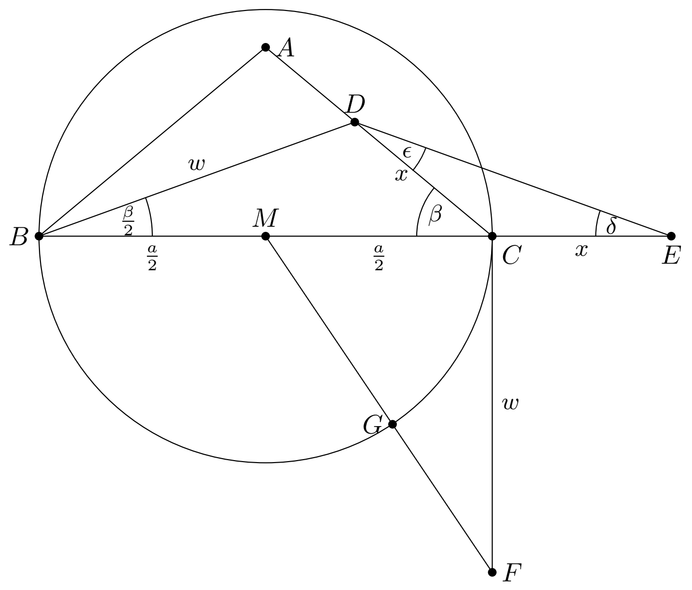
Ein Körper, dessen Grund- und Aufriss Quadrate von gleicher Größe mit der in der Aufgabe gezeigten Lage sind, kann ein Würfel oder ein durch einen Diagonalenschnitt halbierter Würfel sein, wobei zwei benachbarte Seitenflächen in den beiden Rissebenen liegen.
Sonst würden die nicht sichtbaren Kanten nicht sämtlich durch die Quadratseiten verdeckt werden, oder es müssten noch andere sichtbare Kanten eingezeichnet sein. Mit Rücksicht auf die inneren Quadrate in Grund- und Aufriss kann der Körper kein Würfel sein; diese Quadrate müssten nämlich in Grund- und Aufriss von aufgesetzten Körpern oder von Ausschnitten des Würfels sein. Dann müssten aber noch weitere sichtbare Kanten auftreten bzw. nicht sichtbare Kanten eingezeichnet sein.



Es kommt also nur ein halbierter Würfel in Frage, auf dessen Diagonalenfläche ein kleinerer halbierte Würfel mit der Diagonalfläche aufgesetzt ist, bzw. in dessen Diagonalenfläche ein halber Würfel entsprechend eingeschnitten ist bzw. eine Kombination von beiden.
Lösungen der Aufgabe sind also die drei in den Abbildungen im Schrägbild dargestellten Körper.

Aufgabe 8/64
Ein gleichschenkliges Dreieck ist aus der Basis a und der Winkelhalbierenden w eines Basiswinkels zu konstruieren.

Analysis: Aus der Analysisfigur (Abbildung) geht hervor: $\triangle BDE \sim \triangle CED$, nach Hauptähnlichkeitssatz wegen $BD = DE = w$ ist $\delta = \frac{\beta}{2}$, und nach dem Außenwinkelsatz ist $\beta = \epsilon + \delta = \epsilon + \frac{\beta}{2}$, also $\epsilon = \frac{\beta}{2} = \delta$. Daraus folgt $CD = CE = X$ und



$$\frac{x+a}{w} = \frac{w}{x}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach der Unbekannten c ergibt sich $x^2 + ax - w^2 = 0$ oder

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + w^2}$$

(der negative Wert ist für das geometrische Problem bedeutungslos). Man konstruiert also die Strecke $CD = x$, indem man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\frac{a}{2}$ und w um $\frac{a}{2}$ vermindert. Damit ist $\triangle\ BCD$ nach sss und $\triangle\ ABC$ nach wsw konstruierbar.

Konstruktion: Man zeichnet $BC = a$ mit dem Mittelpunkt M. In C errichtet man auf BC die Senkrechte, auf der man $CF = w$ abträgt. Um M schlägt man mit MC als Radius einen Kreis, der MF in G schneidet. Mit GF als Radius schlägt man um C und mit w als Radius um B Kreisbögen, die einander in D schneiden. In B trägt man an BC den Winkel DCM an; der freie Schenkel schneidet die Verlängerung von CD über D hinaus in A. Das Dreieck ABC ist das gesuchte.

Determination: 1. Die Konstruktion von $GF = CD$ ist bei jeder Wahl von a und w möglich.
2. Damit die Kreisbögen mit CD um C und mit w um B einander schneiden, muss gelten $CE + w > a$, Wegen

$$CE = x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + w^2} \qquad \text{folgt} \qquad -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + w^2} + w > a$$

und nach Umrechnung $\frac{w}{a} > \frac{2}{3}$.
3. Damit die Verlängerung von CD und der freie Schenkel des in B angetragenen Winkels einander schneiden, muss gelten $\measuredangle\beta < 90°$ oder, was dasselbe besagt, $-x^2 < a^2 + w^2$. Die Umrechnung liefert $\frac{w}{a} < \sqrt{2}$.
Alle Konstruktionen sind unter diesen Bedingungen (bis auf Symmetrie) eindeutig. Die Aufgabe ist also eindeutig lösbar, wenn gilt

$$\frac{2}{3} < \frac{w}{a} < \sqrt{2}$$

Zusatz: Ist $w = a$, so ist die Bedingung erfüllt, und es gelten die Proportionen

$$\frac{x+a}{a} = \frac{a}{x} \qquad ; \qquad \frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$$

Die Strecke x ist dann also der größere Abschnitt der stetig geteilten Basis.

Aufgabe 9/64
Es sei p eine weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbare ganze Zahl.
Welchen Rest lässt p^4 beim Teilen durch 240?

Zur Untersuchung der Teilbarkeit bildet man die Zahl $p^4 - 1$ und zerlegt diese in Faktoren:

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$$

1. Da p nicht durch 2 teilbar ist, folgt, dass auch p^2 nicht durch 2 teilbar ist, wohl aber $p - 1$, $p + 1$ und $p^2 + 1$. Da $p - 1$ und $p + 1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind, ist genau eine von ihnen sogar durch 4 teilbar. Daraus folgt, dass $p^4 - 1$ durch 16 teilbar ist.
2. Die Zahlen $p - 1, p, p + 1$ sind drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Genau eine von ihnen ist durch 3 teilbar. Da dies nicht p ist, muss es entweder $p - 1$ oder $p + 1$ sein. Daraus folgt, dass $p^4 - 1$ durch 3 teilbar ist.

3. Da p nicht durch 5 teilbar ist, gilt entweder $p = 5k \pm 1$ oder $p = 5k \pm 2$ mit $k = 0; 1; 2; 3; ...$. Daraus folgt entweder

$$p^2 = 25k^4 \pm 10k + 1 \qquad \text{oder} \qquad p^2 = 25k^4 \pm 20k + 1$$

also entweder

$$p^2 - 1 = 25k^4 \pm 10k \qquad \text{oder} \qquad p^2 + 1 = 25k^4 \pm 20k$$

Man sieht, dass in jedem Fall genau einer der beiden Faktoren $p^2 - 1$ oder $p^2 + 1$ und damit auch das Produkt $p^4 - 1$ durch 5 teilbar ist.
Aus 1., 2. und 3. folgt, dass $p^4 - 1$ durch $16 \cdot 3 \cdot 5 = 240$ teilbar ist. Dann lässt aber p^4 beim Teilen durch 240 (unter den angegebenen Bedingungen) stets den Rest 1.

Aufgabe 10/64
Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 und ein Kreis K. Man konstruiere ein Quadrat $ABCD$ mit A auf g_1, B und D auf g_2 und C auf K. Ferner gebe man eine vollständige Determination.

Analysis: Die Diagonale BD des gesuchten Quadrates $ABCD$ liegt auf g_2. Da das Quadrat symmetrisch bezüglich seiner Diagonalen ist, liegt C symmetrisch zu A bezüglich g_2 als Symmetrieachse. Da der geometrische Ort für A die Gerade g_1 ist, folgt, dass C auf einer bezüglich g_2 zu g_1 symmetrischen Geraden g_1' liegt. Außerdem liegt C auf dem Kreis K. Man findet C also als Schnittpunkt der zu g_1 bezüglich g_2 symmetrischen Geraden g_1' mit dem Kreis K.

Konstruktionsbeschreibung: Man konstruiert die zu g_1 bezüglich g_2 symmetrische Gerade g_1'. Ihr Schnittpunkt mit K ist C. Von C aus fällt man auf g_2 das Lot, sein Fußpunkt sei M. Die Verlängerung von CM über M hinaus schneidet g_1 in A. Der Kreis um M mit $MA = MC$ als Radius schneidet g_2 in B und in D.

Determination: Die Konstruktion von g_1' ist stets und eindeutig ausführbar. ist $g_1 \parallel g_2$, so ist auch $g_1' \parallel g_2$; ist $g_1 \perp g_2$, so ist $g_1' = g_1$.
Schneidet g_1' den Kreis in zwei Punkten, so gibt es zwei Lösungen; berührt g_1' den Kreis in einem Punkte, so gibt es genau eine Lösung; meidet g_1' den Kreis, so gibt es keine Lösung.
Entartet der Kreis K zum Punkt, so gibt es genau eine Lösung, wenn dieser auf g_1' liegt, sonst gibt es keine Lösung. Die übrigen Konstruktionen sind stets und; bis auf Symmetrie bezüglich der Geraden durch A und C; eindeutig ausführbar.

Aufgabe 11/64
Von einem Viereck $ABCD$ seien die folgenden Stücke gegeben: $AB = a$, $\measuredangle BCA = \gamma_1$, $\measuredangle ACD = \gamma_2$, $\measuredangle CDB = \delta_1$, $\measuredangle BDA = \delta_2$.
a) Das Viereck ist zu konstruieren.
b) Wie groß ist die Seite $CD = c$, wenn $AB = a = 1$ (LE), $\gamma_1 = 30°$, $\gamma_2 = 30°$, $\delta_1 = 45°$ und $\delta_2 = 60°$ ist? (Lösung durch Berechnung)

a) Analysis: Durch die Winkel $ACD = \gamma_2$ und $CDA = \delta = \delta_1 + \delta_2$ ist das Dreieck ACD bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Durch die Winkel $BDC = \delta_2$ und $BCD = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ist das Dreieck BCD bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Damit ist auch das Viereck $ABCD$ bis auf Ähnlichkeit bestimmt.
Man konstruiert daher zunächst ein dem Viereck $ABCD$ ähnliches Viereck $A'B'C'D'$, indem man an eine beliebig gewählte Seite $D'C'$ in D' die Winkel CDB und CDA und in C' die Winkel ACD und BCD anträgt. Die Schnittpunkte der freien Schenkel sind A' bzw. B'.

Sodann führt man eine Ähnlichkeitstransformation durch derart, dass die Seite $A'B'$ zur Seite $AB = a$ wird.

Konstruktionsbeschreibung: Man legt die Strecke $C'D'$ beliebig fest und trägt in C' den Winkel $ACD = \gamma_2$ sowie in D' den Winkel $CDA = \delta = \delta_1 + \delta_2$ an. Der Schnittpunkt der freien Schenkel ist A'. Dann trägt man in C' den Winkel $BCD = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ und in D' den Winkel $CDB = \delta_1$ an, der Schnittpunkt der freien Schenkel ist B'.
Die Ähnlichkeitstransformation kann man durchführen, indem man auf $A'B'$ die Strecke $AB = a$ von A' aus abträgt und durch B die Parallele zu $B'C'$ zieht; deren Schnittpunkt mit der Geraden durch A' und C' ist C. Man zieht nun noch die Parallele durch C zu $C'D'$, die die Gerade durch $A'D' = AD'$ in D schneidet.

Determination: Alle Teilkonstruktionen sind stets und eindeutig ausführbar, wenn die Summe je dreier der vier gegebenen Winkel ungleich 180° ist; sonst ergeben sich keine Schnittpunkte der freien Schenkel und die Aufgabe hat keine Lösung.

b) Auf Grund der Lösung a) führt man zweckmäßig die Berechnung an einem dem Viereck $ABCD$ ähnlichen Viereck $A'B'C'D'$ durch dann. Es gilt dann

$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'} \qquad ; \qquad CD = \frac{C'D'}{A'B'} AB$$

Da $C'D'$ beliebig ist, wählt man es zweckmäßig gleich der 1 (LE). Dann wird wegen $AB = 1$ (LE): $CD = \frac{1}{A'B'}$. Mittels Sinussatz der ebenen Trigonometrie berechnet man zunächst aus $C'D' = 1$ und den gegebenen Winkel die Strecken $D'A'$ und $D'B'$ und daraus mit Hilfe des Kosinussatzes die Strecke $A'B'$.
Es ist

$$\measuredangle DAC = \alpha_1 = 180° - \gamma_2 - \delta_1 - \delta_2 = 45° \quad \text{und}$$

$$\measuredangle DBC = \beta_2 = 180° - \gamma_1 - \gamma_2 - \delta_1 = 75°$$

$$D'A' = D'C' \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$$

$$D'B' = D'C' \cdot \frac{\sin\gamma_1 + \gamma_2}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\gamma_1 + \gamma_2}{\sin\beta_2} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} \approx 0{,}8966$$

$\sin\beta_2 = \sin 75°$ wurde hier elementar mittels Additionstheorem berechnet.

$$A'B' = \sqrt{(D'A')^2 + (D'B')^2 - 2 \cdot D'A' \cdot D'B' \cdot \cos\delta_2} = ... = \frac{1}{2}\sqrt{20 - 10\sqrt{3}}$$

Aus $CD = \frac{1}{A'B'}$ folgt abschließend $CD = \frac{2}{\sqrt{20-10\sqrt{3}}} \approx 1{,}22$.

Aufgabe 12/64
Es gelte $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = n^n$. Man beweise, dass dann gilt

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \geq n^3$$

Aus $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = n^n$ folgt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} = n$$

Bekanntlich ist das geometrische Mittel $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$ aus n Zahlen a_i mit $i = 1; 2; ...; n$ nie größer als das quadratische Mittel

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

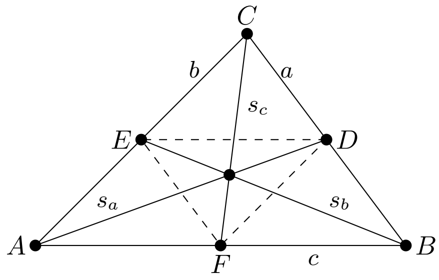
aus denselben Zahlen a_i. Also gilt

$$n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

Damit folgt aber $n^3 \leq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$.

Aufgabe 13/64
Es ist zu beweisen: Sind U der Umfang und $s_a; s_b; s_c$ die Seitenhalbierenden eines Dreiecks, so gilt die Ungleichung

$$\frac{U}{2} < s_a + s_b + s_c < U$$



Der Beweis wird in zwei Schritten geführt (vgl. Abbildung).
1. Beweis für die Richtigkeit der Beziehung $\frac{U}{2} < s-a+s_b+s_c$:
Für jedes Dreieck gilt der Satz: "Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte Seite." und weiterhin "Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden teilt diese im Verhältnis 2 : 1".
Danach gelten die folgenden Beziehungen (S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden):

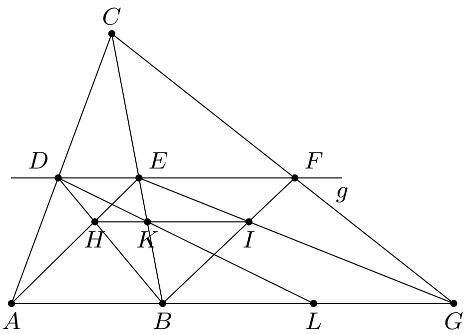
$$AS + SF > AF \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{3}s_a + \frac{1}{3}s_c > \frac{c}{2}$$
$$BS + SD > BD \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{3}s_b + \frac{1}{3}s_a > \frac{a}{2}$$
$$CS + SE > CE \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{3}s_c + \frac{1}{3}s_b > \frac{b}{2}$$

Durch Addition der drei Zeilen folgt unmittelbar die Behauptung.
2. Beweis für die Richtigkeit der Beziehung $U = a + b + c > s - a + s_b + s_c$.
Nach Konstruktion ist $AF = FB$ und $AE = EC$. Es gilt demnach die Beziehung $AF : AB = AE : AC$. Nach dem Strahlensatz folgt $EF \parallel CB$. Außerdem gilt dann $AF : AB = 1 : 2$, $AF : AB = EF : CB$, also $EF : CB = 1 : 2$, folglich ist $EF = \frac{a}{2}$. Analog ergibt sich $FD = \frac{b}{2}$ und $ED = \frac{c}{2}$. Damit erhält man folgende Ungleichungen

$$AF + FD > AD \qquad \text{oder} \qquad \frac{c}{2} + \frac{b}{2} > s_a$$
$$EF + FB > EB \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{2} + \frac{c}{2} > s_b$$
$$EF + EC > CF \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > s_c$$

Durch Addition der Zeilen folgt unmittelbar die Behauptung. Damit ist bewiesen, dass in jedem Dreieck die behauptete Ungleichungskette gilt.

Aufgabe 14/64
Gegeben sind eine Strecke AB und eine dazu parallele Gerade g. Die Strecke ist ausschließlich mit Hilfe eines Lineals zu verdoppeln, d.h., zur Konstruktion ist nur das Ziehen von Geraden zugelassen.



Man wählt einen beliebigen Punkt C so, dass die Verbindungsstrecken AC und BC die Gerade g in den Punkten D bzw. E schneide. Auf g wähle man weiter einen Punkt F außerhalb der Strecke DE (vgl. Abbildung).
Die Gerade durch C und F schneidet die Gerade durch A und B in G. Nun ziehe man in den Trapezen $ABED$ und $BGFE$ die Diagonalen; die Diagonalenschnittpunkte seine H bzw. I.
Die Verbindungsgerade von H und I schneidet die Gerade durch C, E und B in K. Die Gerade durch D und K schneidet die Gerade durch A und B in L. Es ist $BL = AB$ und damit $AL = 2AB$.

Beweis: Wegen der Parallelität von AB und DE gilt nach einem Strahlensatz

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{EB}{BG} \quad ; \quad \frac{DE}{AB} = \frac{DH}{BH} \quad ; \quad \frac{EF}{BG} = \frac{FI}{BI} \quad \text{also} \quad \frac{DH}{BH} = \frac{FI}{BI}$$

Daraus folgt (ebenfalls nach einem Strahlensatz-Umkehrung): $HI \parallel BF$. Damit ergibt sich, wieder nach einem Strahlensatz

$$\frac{AB}{HK} = \frac{BE}{BK} \qquad : \qquad \frac{BL}{HK} = \frac{BD}{DH} = \frac{BE}{EK}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{AB}{HK} = \frac{BL}{HK} \qquad ; \qquad AB = BL$$

Aufgabe 15/64
Ein Exportauftrag über 1500 Stück Type 1 und 800 Stück Type 2 eines Gerätes soll auf zwei Werke I und II verteilt werden. Der maximale Produktionsausstoß beträgt für
- Werk I: 30 Stück/Tag Type 1 oder 20 Stück/Tag Type 2,
- Werk II: 50 Stück/Tag Type 1 oder 40 Stück/Tag Type 2.
Wie muss der Auftrag auf die beiden Werke verteilt werden, wenn er in möglichst kurzer Zeit erfüllt werden soll?

Das Werk I stellt an x_{11} Tagen Type 1 und an x_{12} Tagen Type 2 her, das Werk II an x_{21} Tagen Type 1 und an x_{22} Tagen Type 2.
Bedingung für das Zeitminimum ist, dass beide Werke ihnen Teilauftrag in den gleichen Zeit erledigen; denn würde beispielsweise das Werk I mehr Zeit benötigen als das Werk II, so könnte man durch eine Verlagerung eines Teils des Auftrags von Werk I auf Werk II die Lieferfrist verkürzen. Es gilt somit die erste Gleichung

$$x_{11} + x_{12} = x_{21} + x_{22}$$

Für die Herstellung von Type 1 gilt: $30x_{11} + 50x_{21} = 1500$ und für Type 2: $20x_{12} + 40x_{22} = 800$. Diese drei Gleichungen werden vereinfacht und geordnet

$$x_{11} + x_{12} - x_{21} - x_{22} = 0 \quad (1)$$
$$3x_{11} + 5x_{21} = 150 \quad (2)$$
$$x_{12} + 2x_{22} = 40 \quad (3)$$

Es liegt ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit vier Variablen vor. Die Lösungsmannigfaltigkeit ist einfach unendlich. Betrachtet man x_{22} als freien Parameter, so folgt aus Gleichung (3)

$$x_{12} = 40 - 2x_{22} \quad (4)$$

Dieser Wert ergibt, wenn man ihn in Gleichung (1) einsetzt $x_{11} - x_{21} = 3x_{22} - 40$. Zusammen mit Gleichung (2) ergibt sich die Lösung

$$x_{11} = \frac{15}{8}x_{22} - \frac{25}{4} \quad (5) \qquad ; \qquad x_{21} = -\frac{9}{8}x_{22} + \frac{135}{4} \quad (6)$$

Der Variabilitätsbereich für x_{11} ist $0 \leq x_{11} \leq 50$. Das Werk I brauchte nämlich 50 Tage, wenn es 1500 Stück Type 1 allein herstellen würde. Entsprechend findet man

$$0 \leq x_{21} \leq 30 \qquad ; \qquad 0 \leq x_{12} \leq 40 \qquad ; \qquad 0 \leq x_{22} \leq 20$$

Aus den Gleichungen (4), (5) und (6) folgt aber weiter

$$0 \leq 40 - 2x_{22} \leq 40 \qquad \text{also} \qquad 0 \leq x_{22} \leq 20$$
$$0 \leq \frac{15}{8}x_{22} - \frac{25}{4} \leq 50 \qquad \text{also} \qquad \frac{10}{3} \leq x_{22} \leq 30$$
$$0 \leq -\frac{9}{8}x_{22} + \frac{135}{4} \leq 30 \qquad \text{also} \qquad \frac{10}{3} \leq x_{22} \leq 30$$

Der gemeinsame Variabilitätsbereich für x_{22} ist demnach

$$\frac{10}{3} \leq x_{22} \leq 20$$

Für die Fertigungszeit T gilt: $T = x_{11} + x_{12} = x_{21} + x_{22}$; oder, durch Einführung der Variablen x_{22} aus den Gleichungen (4), (5) und (6)

$$T = \frac{135}{4} - \frac{1}{8}x_{22}$$

Sie ist linear vom Parameter x_{22} abhängig und nimmt den kleinsten Wert an, wenn x_{22} den größten zulässigen Wert annimmt, also für $x_{22} = 20$. Damit ergibt sich die Lösung

$$x_{22} = 20 \quad ; \quad x_{12} = 0 \quad ; \quad x_{21} = \frac{45}{4} \quad ; \quad x_{11} = \frac{125}{4} \quad ; \quad T = \frac{125}{4}$$

Damit berechnet man die Stückzahlen

	Type 1	Type 2
Werk I	937,5	0
Werk II	562,5	800,0

Theoretisch ergeben sich halbe Stückzahlen. In der Praxis wird man dem Werk I 937 Stück und dem Werk II 563 Stück in Auftrag geben. Dadurch erhöht sich die theoretisch kürzeste Lieferzeit von $31\frac{1}{4}$ Tagen ein wenig.

Aufgabe 16/64
Welche zweistelligen Zahlen erfüllen folgende Bedingung: Das um die Quersumme verminderte Produkt der beiden Stellen ist 3?

Bezeichnet man die gesuchte Zahl mit $u = 10x + y$ (wobei x und y ganze Zahlen mit $0 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$ sind), so folgt aus der gestellten Bedingung die Gleichung

$$xy - (x + y) = 3$$

Durch Umformung erhält man daraus die Gleichungen

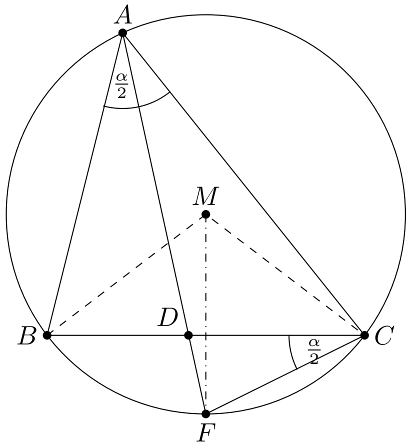
$$y(x-1) = x + 3 \to y = \frac{x+3}{x-1} \to y = 1 + \frac{4}{x-1}$$

Da y ganzzahlig ist, muss $(x-1)$ Teiler von 4 sein. Damit kommen nur die folgenden Werte in Frage

x-1:	1	2	4
x:	2	3	5
y:	5	3	2

Die Zahlen lauten also $u_1 = 25$, $u_2 = 33$ und $u_3 = 52$.

Aufgabe 17/64
Es ist ein Dreieck aus der Seite a, dem ihr gegenüberliegenden Winkel α und der Winkelhalbierenden w_α zu konstruieren.



Analysis: Die Abbildung zeigt, dass für den Punkt A zunächst ein geometrischer Ort existiert: der Kreis um M mit $BC = a$ als Sehne und $\measuredangle BMC = 2\alpha$ als Zentriwinkel (nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel).
Einen zweiten geometrischen Ort findet man durch die folgende Überlegung:
Verlängert man die Winkelhalbierende w_α über den Eckpunkt D auf $BC = a$ hinaus bis zum Schnittpunkt E mit dem Kreis um M, so ergeben sich zwei Dreiecke ACE und CED. Diese Dreiecke sind ähnlich.

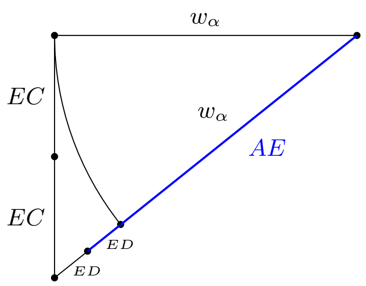
Beweis: Es ist 1. $\measuredangle CEA = \measuredangle DEC$, 2. $\measuredangle EAC = \measuredangle ECD = \frac{\alpha}{2}$; das letztere ergibt sich unmittelbar aus

$\measuredangle ECB = \measuredangle EAB = \frac{\alpha}{2}$.
Damit gilt

$$\frac{EC}{ED} = \frac{w_\alpha + ED}{EC} \qquad \text{oder} \qquad 2ED = \sqrt{w_\alpha^2 + (2EC)^2} - w_\alpha$$

(das andere Vorzeichen der Wurzel ergibt geometrisch keinen Sinn.) Also ist ED konstruierbar, damit aber auch EA. Den Punkt E findet man 1. auf dem Kreis um M, 2. auf der Mittelsenkrechten von BC (wegen $\measuredangle BEC = 180° - \alpha$, $\measuredangle ECD = \frac{\alpha}{2}$ ist auch $\measuredangle EBC = \frac{\alpha}{2}$ und somit $\triangle\, BEC$ gleichschenklig).

Konstruktionsbeschreibung: Man trägt in C an $BC = a$ nach derselben Seite den Winkel α an, errichtet auf dem freien Schenkel von a die Senkrechte und bringt diese mit der Mittelsenkrechten von BC zum Schnitt.
Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt M des Ortskreises für A und E, sein Radius ist $MB = MC$. Der Punkt E ergibt sich als Schnittpunkt des Ortskreises mit der Mittelsenkrechten von BC.
Nunmehr konstruiert man in einer Hilfskonstruktion die Strecke EA: sie ergibt sich, wenn man von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten w_α und $2EC$ die Strecke w_α subtrahiert, die verbleibende Reststrecke halbiert und zu ihr w_α wieder addiert (vgl. Abbildung).

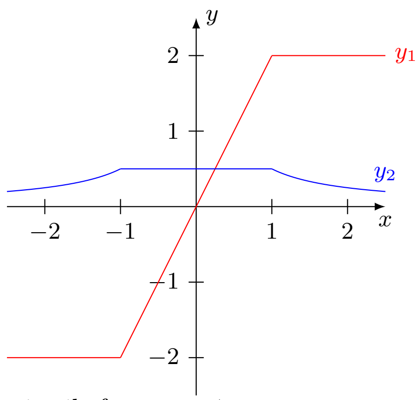


Mit EA als Radius schlägt man um E einen Kreis, dessen Schnittpunkt mit dem Kreis um M der Punkt A ist.

Determination: Ja nach Wahl von w_α gibt es zwei (bezüglich ME symmetrische) Lösungen oder genau eine Lösung (gleichschenkliges Dreieck) oder keine Lösung.

Aufgabe 18/64
Man stelle die beiden Funktionen graphisch dar:

$$\text{a)} \quad y_1 = \sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}; \qquad \text{b)} \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2} + \sqrt{(1-x)^2}}$$



Die exakte Definition der Quadratwurzel besagt, dass es im Bereich der reellen Zahlen zu jeder nicht negativen Zahl a stets genau eine nicht negative Zahl b gibt, für die die Gleichung $b^2 = a$ gilt.
Die beiden Radikanden der Aufgaben sind als Quadrate für jeden Wert von x nicht negativ. Das Radizieren ergibt nach der Definition

$$\sqrt{(1+x)^2} = |1+x| = \begin{cases} (1+x) \text{ für } -1 \leq x \\ -(1+x) \text{ für } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = \begin{cases} (1-x) \text{ für } x \leq 1 \\ -(1-x) \text{ für } 1 \leq x \end{cases}$$

Somit gilt für $x \leq -1$:

$$y_1 = -(1+x) - (1-x) = -2 \qquad ; \qquad y_2 = \frac{1}{-(1+x) + (1-x)} = -\frac{1}{2x}$$

für $-1 \leq x \leq 1$:

$$y_1 = (1+x) - (1-x) = 2x \qquad ; \qquad y_2 = \frac{1}{(1+x) + (1-x)} = \frac{1}{2}$$

für $1 \leq x$:

$$y_1 = (1+x) - (-(1-x)) = 2 \qquad ; \qquad y_2 = \frac{1}{(1+x) + (-(1-x))} = \frac{1}{2x}$$

Jede Bildkurve setzt sich, wie die Abbildung zeigt, aus drei Teilstücken zusammen.

Aufgabe 19/64
Welcher Rest ergibt sich, wenn man eine Quadratzahl durch 8 teilt?

Wir treffen eine Fallunterscheidung

1. Die Quadratzahl sei gerade: $z^2 = 2m$.
   Dann ist sicher auch z gerade: $z = 2n$ und es gilt $z^2 = (2n)^2 = 4n^2$
   a) $n = 2k$: $z^2 = 4n^2 = 4 \cdot 4k^2 = 16k^2$. Die Quadratzahl lässt beim Teilen durch 8 den Rest 0.
   b) $n = 2k + 1$: $z^2 = 4n^2 = 4(4k^2 + 4k + 1) = 16k^2 + 16k + 4$. Die Quadratzahl lässt beim Teilen durch 8 den Rest 4.

2. Die Quadratzahl sei ungerade: $z^2 = 2m + 1$.
   Dann ist sicher auch z ungerade: $z = 2n+1$ und es gilt $z^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Den letzten Ausdruck formen wir um: $4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$.
   a) $n = 2k$: $4n(n + 1) = 4(2k)(2k + 1) = 8k(2k + 1)$; dieser Ausdruck ist durch 8 teilbar, also lässt die Quadratzahl beim Teilen durch 8 den Rest 1.
   b) $n = 2k + 1$: $4n(n+1) = 4(2k+1)(2k+2) = 8(2k+1)(k+1)$. Auch dieser Ausdruck ist durch 8 teilbar, und es gilt dasselbe wie bei 2a)

Daraus folgt: Eine Quadratzahl lässt beim Teilen durch 8 den Rest 0, wenn die Basis durch 4 teilbar ist; sie lässt den Rest 4, wenn die Basis durch 2 teilbar ist und den Rest 1 in allen übrigen Fällen (d.h., wenn die Basis ungerade ist).
Bei den vorstehenden Betrachtungen bedeuten m, n und k (wie sich aus dem Sinn ergibt) stets irgendwelche natürliche Zahlen; einschließlich der Null.

Aufgabe 20/64
Ein Rennwagen durchfährt im fliegenden Start dreimal eine Teststrecke s, wobei die Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 gemessen werden ($v_1 \neq v_2 \neq v_3$). Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit v_m aus den drei Versuchsfahrten?

Die mittlere Geschwindigkeit v_m ergibt sich, wenn man die Summe aller durchfahrenen Strecken durch die Summe der benötigten Zeiten teilt:

$$v_m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}$$

Nun ist $s - 1 = s_2 = s_3 = s$, also $\sum\limits_{i=1}^{3} s_i = 3s$. Aus $v = \frac{s}{t}$ ergibt sich $t_i = \frac{s_i}{v_i} = \frac{s}{v_i}$. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{3} t_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{s}{v_i} = s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$$

Für v_m folgt demnach

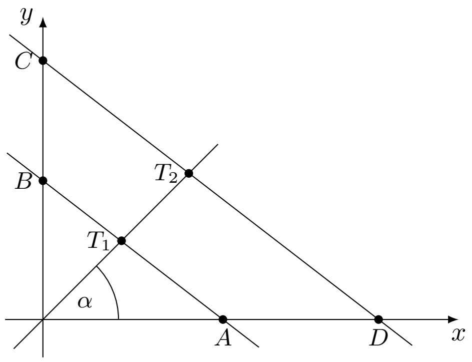
$$v_m = \frac{3s}{s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)} = 3\frac{v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_1 v_3}$$

Bildet man den reziproken Wert $\frac{1}{v_m}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{v_m} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$$

Man erkennt, dass die mittlere Geschwindigkeit nicht etwa gleich dem arithmetischen Mittel aus den Einzelgeschwindigkeiten ist, sondern sie ist gleich dem sogenannten harmonischen Mittel daraus. Der reziproke Wert der mittleren Geschwindigkeit ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den reziproken Werten der Einzelgeschwindigkeiten.

Aufgabe 21/64
Gegeben ist ein Viereck $ABCD$, bei dem die Verlängerungen der Seiten AB und CD einander rechtwinklig schneiden. Es ist zu beweisen:
Teilt man die Seiten BC und DA im Verhältnis der anliegenden Seiten, so schneidet die Gerade die Verlängerungen von AB und CD unter einem Winkel von 45°.



Man legt zweckmäßig das Viereck $ABCD$ so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dass die Eckpunkte auf den Achsen liegen (Abbildung).
Man bestimmt zunächst die Koordinaten der Teilpunkte T_1 und T_2, stellt dann die Gleichung der Geraden durch T_1 und T_2 auf und ermittelt deren Anstieg. Damit erhält man den Tangens des Schnittwinkels mit der Abszissenachse (Verlängerung von AB), aus dem auch der Schnittwinkel mit der Ordinatenachse folgt (Verlängerung von CD).
Der Punkt T_1 teilt die Strecke AD innen im Verhältnis

$$\lambda = -\frac{AB}{CD} = -\frac{b-a}{c-d} = \frac{a-b}{c-d}$$

Der Punkte T_2 teilt die Strecke BC innen im gleichen Verhältnis. Für die Koordinaten des Teilpunktes T einer Strecke P_1P_2 gilt bekanntlich

$$x_T = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} \qquad ; \qquad y_T = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$$

Wendet man diese Formeln an, so erhält man nach entsprechender Rechnung:

$$x_{T_1} = \frac{a(c-d)}{c-d-a+b} \qquad ; \qquad y_{T_1} = \frac{d(b-a)}{c-d-a+b}$$

$$x_{T_2} = \frac{b(c-d)}{c-d-a+b} \qquad ; \qquad y_{T_2} = \frac{c(b-a)}{c-d-a+b}$$

Aus der Zweipunkteform der Geradengleichung

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y}{x_1-y} \qquad \text{folgt} \qquad m = \tan\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Mit den Werten $x_1 = x_{T_1}, y_1 = y_{T_1}, x_2 = y_{T_2}$ und $y_2 = y_{T_2}$ ergibt sich damit

$$m = \frac{\frac{d(b-a)-c(b-a)}{c-d-a+b}}{\frac{a(c-d)-b(c-d)}{c-d-a+b}} = \frac{(b-a)(d-c)}{(c-d)(a-b)} = 1$$

Aus $m = \tan\alpha = 1$ folgt $\alpha = 45°$. Das heißt, die Abszissenachse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten; damit wird aber die Ordinatenachse unter dem gleichen Winkel geschnitten.

Aufgabe 22/64
Gesucht sind zwei natürliche Zahlen a und b mit $a \neq b; a; b \neq 0$, für die die folgende Beziehung gilt: $a^3 + b^3 = (a+b)^2$.
Es ist zu zeigen, dass es (bis auf die Reihenfolge) genau ein derartiges Zahlenpaar a; b gibt.

Die gesuchten Zahlen sollen die Gleichung

$$a^3 + b^3 = (a+b)^2$$

befriedigen. Wegen $a + b \neq 0$ kann man beide Seiten dieser Gleichung durch $a + b$ dividieren, man erhält damit

$$a^2 - ab + b^2 = a + b \qquad ; \qquad a^2 - ab - a + b^2 - b = 0 \to a^2 - a(b+1) + b(b-1) = 0$$

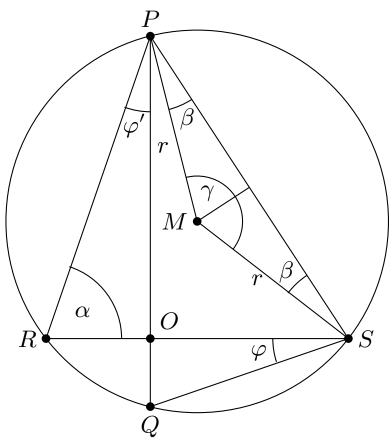
Man betrachtet b als freien Parameter und löst diese quadratische Gleichung nach a auf:

$$a_{1;2} = \frac{b+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - b^2 + 1} = \frac{b+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+6b-3b^2}$$

Notwendige Bedingung dafür, dass a eine natürliche Zahl ist, ist $1 + 6b - 3b^2 \geq 0$.
Betrachtet man die Funktion $y = -3x^2 + 6x + 1$, so stellt man fest, dass Werte $y \geq 0$ nur zwischen den beiden Nullstellen (einschließlich) auftreten. Dies sind aber die Werte $y_1 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $y_2 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Als natürliche Zahlen $b \neq 0$ kommen aus diesem Intervall nur die Werte $b_1 = 1$ und $b_2 = 2$ in Frage. Aus ihnen folgt $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$. Aus dem Gang der Herleitung folgt, dass dies auch die einzigen Zahlen mit der verlangten Eigenschaft sind.

Aufgabe 23/64
Gegeben sei ein Kreis mit zwei zueinander senkrechten, sonst aber beliebigen Sehnen PQ und RS. Es ist zu beweisen, dass für den Radius r des Kreises die Gleichung gilt:

$$4r^2 = PR^2 + QS^2$$



Verwendet man die Bezeichnungen der Abbildung, so gilt $\varphi = \varphi'$ (da φ und φ' Peripheriewinkel über derselben Sehne RQ sind). Weiter erkennt man aus der Abbildung die Gültigkeit der folgenden Beziehungen:

$$OS = QS \cdot \cos\varphi \qquad \text{also} \qquad OS^2 = QS^2 \cdot \cos^2\varphi$$
$$OP = PR \cdot \cos\varphi \qquad \text{also} \qquad OP^2 = PR^2 \cdot \cos^2\varphi$$

Daraus folgt durch Addition

$$OS^2 + OP^2 = PS^2 = (QS^2 + PR^2)\cos^2\varphi \quad (1)$$

Aus dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck folgt $\alpha = 90° - \varphi$, mithin ist $\gamma = 2\alpha = 2(90° - \varphi)$ als Zentriwinkel über dem gleichen Bogen. Für β folgt damit (wieder nach dem Winkelsummensatz des Dreiecks) $\beta = 90° - 90° + \varphi = \varphi$. Nun ist

$$\frac{PS}{2r} = \cos\varphi \qquad \text{also} \qquad \frac{PS^2}{4r^2} = \cos^2\varphi \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt

$$PS^2 = (QS^2 + PR^2)\frac{PS^2}{4r^2} \qquad \text{also} \qquad 4r^2 = QS^2 + PR^2$$

Aufgabe 24/64
Man gebe eine Summenformel für die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu b \cdot e^{\nu(a+bx)}$$

Es ist für $a \neq -x$ (diesen Fall betrachten wir zunächst)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu b e^{\nu(a+bx)} = 0 \cdot be^0 + be^{a+bx} + 2be^{2(a+bx)} + ... + nbe^{n(a+bx)}$$

und da $\nu b e^{\nu(a+bx)} = (e^{\nu(a+bx)})'$ ist, kann man schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu b e^{\nu(a+bx)} = \sum_{\nu=0}^{n} \left[be^{\nu(a+bx)}\right]' = (e^0)' + (e^{a+bx})' + ... + (e^{n(a+bx)})' = \left[e^0 + e^{a+bx} + ... + e^{n(a+bx)}\right]'$$

Innerhalb der eckigen Klammern steht eine geometrische Reihe mit $a_1 = e^0 = 1; q = e^{a+bx}$ und mit $n+1$ Gliedern, deren Summe mit

$$s_{n+1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{e^{(n+1)(a+bx)} - 1}{e^{a+bx} - 1}$$

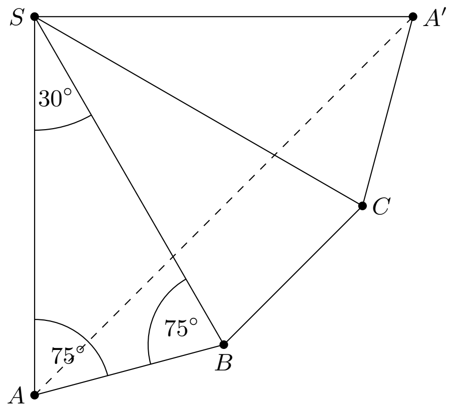
angegeben werden kann. Damit folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu b e^{\nu(a+bx)} = \sum_{\nu=0}^{n} \left[b e^{\nu(a+bx)}\right]' = \left[\frac{e^{(n+1)(a+bx)} - 1}{e^{a+bx} - 1}\right]' = \frac{b[ne^{(n+2)(a+bx)} - (n-1)e^{(n+1)(a+bx)} + e^{a+bx}]}{(e^{a+bx} - 1)^2}$$

(nach der Quotientenregel der Differentialrechnung).
Für den Fall $a = -bx$ erhält man ein arithmetische Reihe:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu b e^{\nu(a+bx)} = \sum_{\nu=0}^{n} \nu b = b\frac{n(n+1)}{2}$$

Aufgabe 25/64
Gegeben ist eine dreiseitige regelmäßige Pyramide mit der Seitenkante $s = 10$ cm und dem Winkel $\alpha = 75°$ zwischen der Seiten- und Grundkante.
Wie lang ist der kürzeste Weg auf dem Mantel der Pyramide, der von einem Eckpunkt der Grundfläche ausgehend einmal um die Pyramide herum zum Ausgangspunkt führt?



Man denke sich den Mantel längs der Seitenkante aufgeschnitten, auf der der Ausgangspunkt liegt, und in die Ebene abgewickelt. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten der Ebene ist die Verbindungsstrecke dieser Punkte (vgl. Abbildung).
Der Mantel setzt sich aus drei kongruenten gleichschenkligen Dreiecken zusammen. Aus dem Winkelsummensatz für das ebene Dreieck folgt, dass jeder Winkel zwischen zwei Seitenkanten gleich 30° ist, für den Winkel ASA' folgt damit $\angle ASA' = 90°$. Damit ist

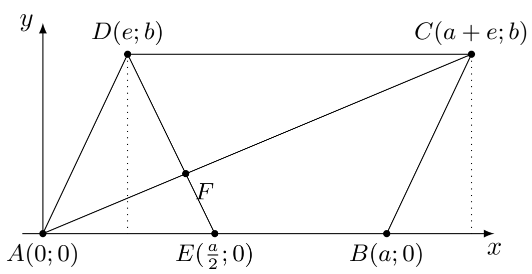
$$aa' = s\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}$$

Aufgabe 26/64
Es ist zu beweisen, dass in jedem Parallelogramm jede Seitenhalbierende ein Drittel einer Diagonale abschneidet (unter Seitenhalbierender ist die Verbindungsstrecke einer Seitenmitte mit einer Ecke zu verstehen.)

Der Beweise kann mit Hilfe der analytischen Geometrie geführt werden. Dazu legt man zweckmäßigerweise ein beliebiges Parallelogramm so in das Koordinatensystem, wie es die Abbildung zeigt.
Die Koordinaten der Eckpunkte sind dann $A(0;0); B(a;0); C(a+e;b); D(e;b)$, der Punkte E (Halbierungspunkt von $AB = a$) hat die Koordinaten $E(\frac{a}{2};0)$.
Die Gleichung der Diagonalen AC ergibt sich damit zu $y = \frac{b}{a+e}x$, die der Seitenhalbierenden zu

$$y = \frac{b}{e - \frac{a}{2}}x + \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{\frac{a}{2} - e} = \frac{2b}{2e - a}x + \frac{ab}{a - 2e}$$

(wie man leicht aus der Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung herleitet).



Durch Gleichsetzen ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes:

$$\frac{b}{a+e}x = \frac{2b}{2e-a}x + \frac{ab}{a-2e} \qquad ; \qquad \frac{1}{a+e} = \frac{2}{2e-a} + \frac{a}{(a-2e)x}$$

$$x = \frac{a+e}{3} \qquad ; \qquad y = \frac{b}{a+e}x = \frac{b}{3}$$

Bereits aus diesen Koordinaten ist zu erkennen, dass dieser Schnittpunkt F die Diagonale AC drittelt. Tatsächlich ergibt sich für die Länge der Diagonalen AD

$$AD = \sqrt{(a+e)^2 + b^2}$$

und für die Länge der Strecke AF

$$AF = \sqrt{\left(\frac{a+e}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(a+e)^2 + b^2} = \frac{1}{3}AD$$

Analog lässt sich der Beweis für die anderen Seitenhalbierenden bzw. für die andere Diagonale führen.

Aufgabe 27/64
Man bestimme die Folge (x_n) derjenigen x_n-Werte, für die gilt: $\sin\frac{1}{x_n} = 1$.

Wegen der Periodizität der sin-Funktion folgt aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\sin\frac{1}{x_n} = 1 \qquad \text{die Gleichung} \qquad \sin(a + 2k\pi) = 1$$

(k beliebig, ganz) mit $\frac{1}{x_n} = a + 2k\pi$ oder $x_n = \frac{1}{a+2k\pi}$. Da aus $\sin(a + 2kpi) = \sin a = 1$ folgt $a = \frac{\pi}{2}$, gilt

$$x_n = \frac{2}{\pi + 4n\pi} = \frac{2}{\pi(1+4n)}$$

Dass es sich bei der Folge

$$(x_n) = \left(\frac{2}{\pi(1+4n)}\right)$$

deren erste Glieder $x_0 = \frac{2}{\pi}$, $x_1 = \frac{2}{5\pi}$, $x_{-1} = \frac{2}{-3\pi}$, $x_2 = \frac{2}{9\pi}$, $x_{-2} = \frac{2}{-7\pi}$, ... sind, um eine Nullfolge handelt, ist ohne weiteres erkennbar.

Aufgabe 28/64
Man suche eine dreistellige Zahl, für die die folgenden Bedingungen gelten:
1. Ihre Quersumme ist 17.
2. Multipliziert man die erste Stelle mit 4, so erhält man die aus den letzten beiden Stellen bestehende Zahl.

Die gesuchte Zahl sei $u = 100x + 10y + z$, wobei gilt $0 < x \leq 9$, $0 \leq y; z \leq 9$, $x; y; z$ ganzzahlig. Dann gilt auf Grund der Bedingungen:

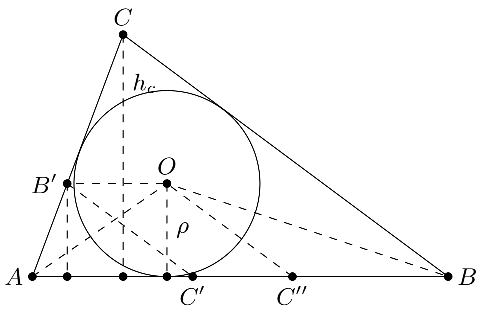
$$x + y + z = 17 \quad (1) \qquad ; \qquad 10y + z = 4x \quad (2)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen z, so folgt

$$5x - 9y = 17 \rightarrow x = 4 + 2y - \frac{3-y}{5}$$

Es muss also $3 + y$ durch 5 teilbar sein. Folglich kann y nur die Werte $y_1 = 2$ und $y_2 = 7$ annehmen. Daraus folgt $x_1 = 7$ und $x_2 = 16$. da $x_2 = 16 > 9$ ist, entfallen x_2 und y_2. Es folgt weiter $z = 8$.
Damit ergibt sich die gesuchte Zahl u zu $u = 728$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Aufgabe 29/64
In ein gegebenes Dreieck ABC ist ohne Benutzung äußerer Punkte eine Parallele $B'C'$ zur Seite BC so zu konstruieren (B' auf AC, C' auf AB), dass der Umfang des Dreiecks $AB'C'$ gleich der Seite AB des gegebenen Dreiecks ist.



Konstruktion: Man konstruiere den Inkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC mit Hilfe der Winkelhalbierenden in bekannter Weise und ziehe durch O die Parallele zu AB. Ihr Schnittpunkt mit AC sei B'. Durch B' ziehe man die Parallele zu BC, ihr Schnittpunkt mit AB sei C'. Das Dreieck $AB'C'$ ist das gesuchte.

Beweis (vgl. Abbildung): Zu beweisen ist, dass

$$AB' + B'C' + C'A = AB$$

ist. Zum Beweise ziehe man die Hilfslinien AO, BO und $OC'' \parallel B'C'$ (C'' auf AB). Dann ist
1) $C'C'' = B'O$ (Gegenseiten im Parallelogramm nach Konstruktion)
2) $C'C'' = B'A$ ($\triangle\ AOB'$ ist gleichschenklig, da $\measuredangle B'AO = \measuredangle C'AO = \measuredangle AOB'$, folgt aus AO als Winkelhalbierender bzw. $AC'' \parallel OB'$ nach Konstruktion)
3) $C''B = C''O$ ($\triangle\ BOC''$ ist gleichschenklig, da $\measuredangle OBC'' = \measuredangle BOC''$; folgt aus BO als Winkelhalbierender bzw. $OC'' \parallel B'C' \parallel BC$ nach Konstruktion)
4) $C''B = C'B'$ (Gegenseiten im Parallelogramm nach Konstruktion).
Also ist

$$AB' + B'C' + C'A = C'C'' + C''B + AC' = AB$$

Der Beweis lässt sich auch rechnerisch führen. Nach den Strahlensätzen ist

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{B'C'}{CB} = \frac{\rho}{h_c}$$

Daraus folgt

$$2s' = AB' + B'C' + C'A = \frac{\rho}{h_c}(AC + CB + AB) = \frac{2\rho s}{h_c}$$

Wegen $F = \rho s = c\frac{h_c}{2}$ folgt $2s' = c$.

Aufgabe 30/64
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die folgende Ungleichung gilt:

$$n! > \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1}$$

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Die Behauptung gilt, wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt, für $n = 1$ und $n = 2$. Angenommen, sie gilt für $n = k$

$$k! > \left(\frac{k+1}{4}\right)^{k+1}$$

Dann folgt

$$k!(k+1) > \left(\frac{k+1}{4}\right)^{k+1} \cdot (k+1) = \left(\frac{k+2}{4}\right)^{k+2} \cdot \frac{4(k+1)^{k+1}}{(k+2)^{k+2}}$$

$$(k+1)! > \left(\frac{k+2}{4}\right)^{k+2} \cdot \frac{4}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}}$$

Nun ist

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$$

Bekanntlich gilt

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right) < e < 3$$

und für $k \geq 2$ ist $1+\frac{1}{k+1} \leq \frac{4}{3}$. Folglich ist

$$\frac{4}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}} \geq 1$$

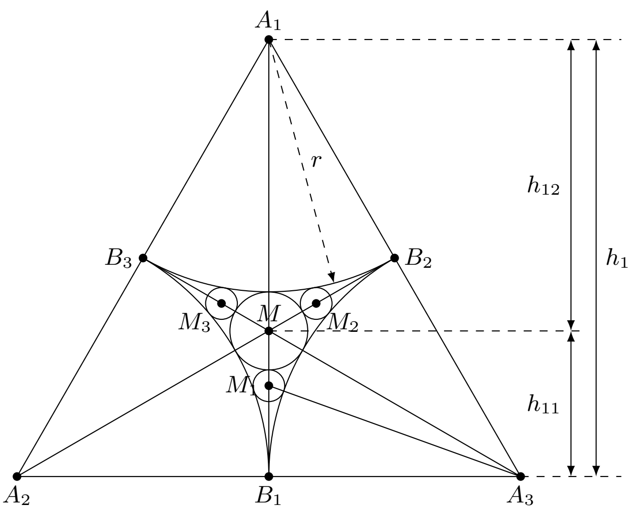
Daraus folgt unmittelbar, dass

$$(k+1)! > \left(\frac{k+2}{4}\right)^{k+2}$$

ist, denn die rechte Seite der Ungleichung wird durch das Weglassen des Faktors nur noch verkleinert. Also folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung für $n = k \geq 2$ die Gültigkeit für $n = k+1$; da ihre Gültigkeit für $n = 1$ und $n = 2$ bereits erwiesen ist, gilt sie somit für alle n.

Aufgabe 31/64

Gegeben sind drei gleichgroße Kreise in einer Ebene, von denen jeder die beiden anderen berührt. Die (kleineren) Bögen zwischen den Berührungspunkten bilden ein Bogendreieck, dessen Spitzen die Berührungspunkte sind. Zeichnet man in dieses den Inkreis, so entstehen drei neue Bogendreiecke. Man berechne und konstruiere die Radien der Inkreise für alle vier Bogendreiecke.



Berechnung: Die Zentren der gegebenen Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit den Seiten $a = 2r$ und den Höhen $h_i = r\sqrt{3}$, wobei r der Radius der Kreise ist. Da im gleichseitigen Dreieck die Höhen mit den Seitenhalbierenden zusammenfallen, teilt der Höhenschnittpunkt M jede Höhe h_i in zwei Abschnitte h_{i1} und $h_{i2} = h_{i1}$ (vgl. Abbildung).

Der große Inkreis habe den Radius x, jeder kleinere, die aus Symmetriegründen einander gleich sind, den Radius y. Ebenfalls aus Symmetriegründen ist der Höhenschnittpunkt M das Zentrum der großen Inkreises.

Wegen $r + x = h_{i2} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ wird

$$x = \frac{1}{3}r(2\sqrt{3}-3) \approx 0{,}1547r$$

Zur Berechnung von y kann man auf das Dreieck M_1B_1A3 den Lehrsatz des Pythagoras anwenden. Es ist

$$M_1B_1 = h_{11} - x - y = \frac{1}{3}h_1 - x - y = \frac{1}{3}r\sqrt{3} - x - y \qquad \text{und} \qquad x = \frac{2}{3}\sqrt{3} - r$$

$$M_1B_1 = r(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}) - y \qquad \text{ferner} \qquad B_1A_3 = r; \quad A_3M_1 = r + y$$

Daraus folgt

$$\left[r(1-\frac{1}{3}\sqrt{3} - y\right]^2 + r^2 = (r+y)^2$$

Löst man diese Gleichung nach y auf, so ergibt sich

$$y = \frac{r}{33}(9 - 4\sqrt{3}) \approx 0{,}0628r$$

Konstruktion: Man findet x ohne weiteres durch Konstruktion des Höhenschnittpunktes. Um y zu finden, führt man y auf x zurück:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{r}{33}(9 - 4\sqrt{3})}{\frac{1}{3}r(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{11(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{11} = \frac{1}{2\sqrt{3} - 1}$$

Damit kann man den ersten Strahlensatz anwenden, indem man auf dem einen Strahl; mit beliebig gewählter Strecke 1; die Strecken 1 und $2\sqrt{3} - 1$ abträgt, denen y und k auf dem anderen Strahl entsprechen.
Die Strecke $2\sqrt{3} - 1$ erhält man, indem man aus der Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 und der Strecke als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, dessen Hypotenuse nach dem Lehrsatz des Pythagoras gleich $\sqrt{3}$ ist.
Vom Doppelten dieser Hypotenuse subtrahiert man die Strecke 1.

Aufgabe 32/64
Welche Kubikzahlen unter 10^9 enden mit ihren letzten drei Ziffern wieder mit einer Kubikzahl?

Das Basis der gesuchten Kubikzahl habe die Form $10x + y$. Die Fälle $x = 0$ und $y = 0$ sind trivial und können daher außer acht gelassen werden. Es gilt also $0 < x \leq 99$ und $0 < y \leq 9$, x und y ganzzahlig.
Die Forderung der Aufgabe besagt, dass

$$(10x + y)^3 = 10^3k + z^2 = 10^3k + y^3 \quad (1)$$

ist. Zunächst beweisen wir, dass $z = y$ ist, wäre nämlich

$$(10x + y)^3 = 10^3k + z^2 \qquad \text{mit } z \neq y \text{ und } 0 < z \leq 9$$

so würde folgen

$$10^3x^3 + 3 \cdot 10^2x^2y + 3 \cdot 10xy^2 + y^3 = 10^3k + z^3$$
$$10(10^2x^3 - 10^2k + 30x^2y + 3xy^2) = z^33 - y^3$$

d.h., $z^3 - y^3$ müsste durch 10 teilbar sein. Das wäre aber nur möglich, wenn zwei der ersten neun Kubikzahlen gleiche Einerziffern hätten, diese sind aber sämtlich voneinander verschieden: $1; 8; 7; 4; 5; 6; 3; 2; 9$.
Eine Umformung von (1) ergibt

$$10^3x^3 + 3 \cdot 10^2x^2y + 3 \cdot 10xy^2 + y^3 = 10^3k + z^3$$
$$10 \cdot 3xy(10x + y) = 10^3(k - x^3)$$
$$3xy(10x + y) = 100(k - x^3)$$

Das links stehende Produkt muss also durch 100 teilbar sein. Da 3 zu 100 teilerfremd ist, folgt, dass $xy(10x + y)$ durch 100 teilbar ist. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. Für $y = 1; 3; 7; 9$ bedeutet das: x muss durch 100 teilbar sein. Das widerspricht aber der Voraussetzung $0 < x \leq 99$, und damit scheiden dieser Werte für y aus.

2. Für $y = 5$ ist $(10x+y)$ nicht durch 4 teilbar; also muss x durch 4 teilbar sein: $x = 4n$ mit $0 < n \leq 24$, n ganzzahlig.
   Das liefert die 24 Werte $x = 4; 8; 12; ...; 92; 96$.

3. Für $y = 2; 4; 6; 8$ ergibt sich, da weder y noch $(10x + y)$ durch 5 teilbar ist; dass x durch 25 teilbar sein muss. Das liefert die Werte $x = 25; 50; 75$.

Damit erhalten wir das folgende Ergebnis:
Von den 999 Kubikzahlen unter 10^9 haben 36 die verlangte Eigenschaft, nämlich die folgenden:

45^3	85^3	125^3	165^3	205^3	245^3	285^3	325^3	365^3
405^3	445^3	485^3	525^3	565^3	605^3	645^3	685^3	725^3
765^3	805^3	845^3	885^3	925^3	965^3	252^3	254^3	256^3
258^3	502^3	504^3	506^3	508^3	752^3	754^3	756^3	758^3

Aufgabe 33/64
Zur näherungsweisen Berechnung des Rauminhalts von Körpern in der Form von Pyramiden- und Kegelstümpfen, wie sie oft in der Technik vorkommen, wird oft die Faustformel

$$V \approx V_N = \frac{h}{2}(G_1 + G_2)$$

angewandt. Dabei bedeuten h die Höhe des Stumpfkörpers, G_1 und G_2 die Inhalte der beiden parallelen, zur Höhe h senkrecht verlaufenden Begrenzungsflächen.
Bei großen prozentualen Unterschieden der parallelen Begrenzungsflächen wird der Fehler bei der Verwendung dieser Formel beträchtlich (bis zu 50 %). Daher ist die Lösung der folgenden Aufgabe wichtig:
Wieviel Prozent darf der Unterschied der Größen G_1 und G_2 höchstens betragen, wenn der Fehler der Näherungsformel 1 % bzw. n % nicht überschreiten soll?

Der Fehler bei der Verwendung der Faustformel ist

$$f = V_N - V = \frac{h}{2}(G_1 + G_2) - \frac{h}{3}(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2}) = \frac{h}{6}(G_1 + G_2 - 2\sqrt{G_1 G_2}) = \frac{h}{6}(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2$$

Hieraus ergibt sich zunächst, dass die Faustformel für $G_1 \neq G_2$ stets einen zu großen Wert liefert. Die weitere Umformung

$$f = \frac{h}{6} G_1 \left(1 - \sqrt{\frac{G_2}{G_1}}\right)^2$$

zeigt, dass der Fehler f bei konstantem Verhältnis $G_2 : G_1$ zur Höhe h sowie zu G_1 buw. zu G_2 proportional ist.
Für den relativen Fehler $\frac{f}{V}$ erhält man

$$\frac{f}{V} = \frac{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2}{2(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 G_2}} = \left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right)^2 : 2\left(1 + \frac{G_2}{G_1} + \sqrt{\frac{G_2}{G_1}}\right)$$

Ersetzt man nun $\sqrt{\frac{G_2}{G_1}}$ durch x (wobei also x das Verhältnis entsprechende Strecken in den parallelen Begrenzungsflächen ist), so folgt

$$\frac{f}{V} = \frac{(1-x)^2}{2(1 + x + x^2)}$$

Der relative Fehler ist also nur vom Verhältnis $G_2 : G_1$ abhängig. Wenn er kleiner oder höchstens gleich $0{,}01 = 1\%$ sein soll, gilt für x die Ungleichung

$$(1-x)^2 \leq 0{,}01 \cdot 2(1 + x + x^2)$$

da $2(1 + x + x^2) > 0$ ist. Durch entsprechende Umformungen folgt

$$50(1-x)^2 \leq 1 + x + x^2 \rightarrow x^2 - \frac{101}{49}x \leq -1 \rightarrow \left(x - \frac{101}{98}\right)^2 < \frac{597}{98^2}$$

Es sei nun (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) $G_2 \leq G_1$, also $x \leq 1$. Dann erhält man (bei Rechenstabgenauigkeit)

$$x \geq \frac{101 - \sqrt{597}}{98} = 0{,}781 \rightarrow 0{,}610 \leq x \leq 1$$

Also muss $G_2 \geq 0{,}610 G_1$ sein, d.h. G_2 muss mindestens die Größe 61,0% von G_1 haben, wenn der Fehler bei der Verwendung der Faustformel 1% nicht überschreiten soll. Der Unterschied $|G_1 - G_2|$ darf höchstens

39% der größeren Fläche betragen.
Soll der Fehler n% nicht überschreiten, so ergibt sich entsprechend die Ungleichung

$$(1-x)^2 \leq \frac{2n}{100}(1+x+x^2)$$

Hierdurch ergibt sich entsprechend der für $n=1$ durchgeführten Rechnung, wobei noch $\frac{100+n}{50-n}=k$ gesetzt und beachtet wird, dass $k \geq 2$ bzw. $\frac{k}{2} \geq 1$ ist:

$$x \geq \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$$

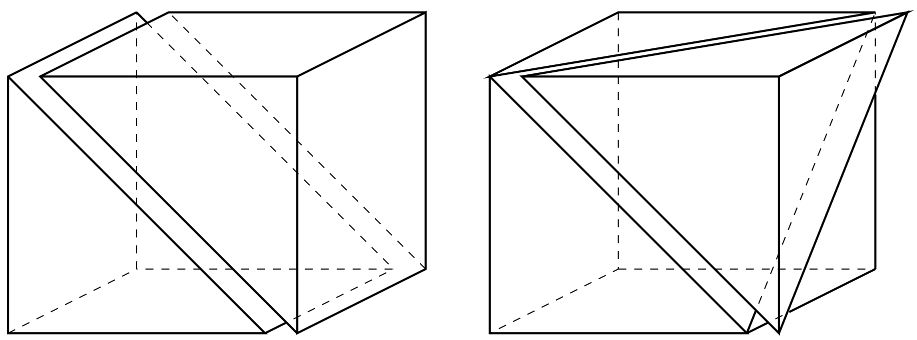
Eine Untersuchung der Fehlerfunktion

$$y = \frac{f}{V} = \frac{(1-x)^2}{2(1+x+x^2)}$$

liefert übrigens im Intervall $0 \leq x \leq 1$ den Maximalwert $0{,}5 = 50\%$, und zwar für $x=0$. Dieser Wert wird also angenommen, wenn der Körper eine Pyramide bzw. ein Kegel ist ($G_2 = 0$).

Aufgabe 34/64
Von einem Würfel soll durch einen ebenen Schnitt ein Körper abgeschnitten werden, dessen Volumen $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens beträgt. Dabei ist jegliche Messung ausgeschlossen.

Zwei Überlegungen führen zum Ziel. 1) Da jegliche Messung ausgeschlossen ist, muss die Schnittfläche durch bereits fixierte Punkte festgelegt werden. Als solche kommen nur die Eckpunkte des Würfel in Frage.
Die Schnittfläche wird durch mindestens drei (nicht sämtlich auf der gleichen Geraden liegende) Punkte fixiert; es können höchstens vier Punkte sein, da es keine Ebene durch den Würfel gibt, die mehr als vier Eckpunkte enthält. Die drei bzw. vier Punkte können nicht Eckpunkte der gleichen Seitenfläche sein, da sonst die Schnittfläche mit dieser zusammenfiele und damit kein Körper abgeschnitten würde.

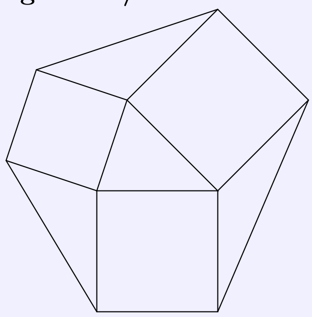


a) Bei vier Punkten müsste der Schnitt mit einer Diagonalfläche zusammenfassen (vgl. linke Abbildung); der Würfel würde damit, wie man leicht erkennt, halbiert, und die Aufgabe wäre demnach nicht gelöst. Also entfällt diese Möglichkeit.

b) Bei drei Punkten wird der Schnitt so geführt, dass er durch die einer Ecke benachbarten Eckpunkte geht (vgl. rechte Abbildung). Es wird eine Pyramide abgeschnitten, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist, deren Seitenkanten die Länge a haben und senkrecht aufeinander stehen (wobei mit a die Länge der Würfelkante bezeichnet wird).
Dass dieser Schnitt auch die weiteren Bedingungen der Aufgabe erfüllt, prüft man leicht nach, indem man eine Seitenfläche als Grundfläche und eine (darauf senkrecht stehende!) Seitenkante als Höhe wählt. Es ist dann $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$.

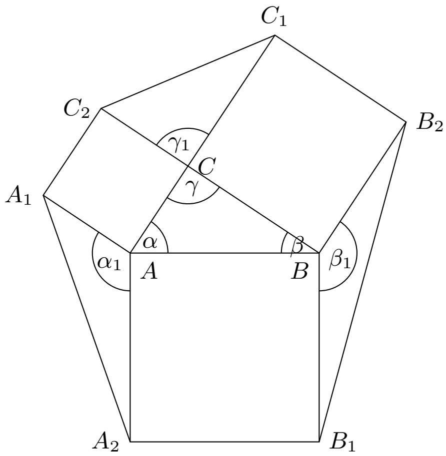
2) Das Volumen des abgeschnittenen Körpers soll $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a$ betragen.
Die Faktorenzerlegung zeigt, dass die Bedingungen von einer Pyramide erfüllt werden, deren Grundfläche gleich der halben Seitenfläche des Würfels und deren Höhe gleich der Würfelkante ist. Damit gelangt man zum gleichen Ergebnis wie unter 1).

Aufgabe 35/64



Über den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks seien die Quadrate gezeichnet. Ja zwei benachbarter Ecken dieser Quadrate seien (vgl. Abbildung) geradlinig miteinander verbunden. Die dadurch entstehenden Dreiecke heißen pythagoreische Ergänzungsdreiecke.
Es ist zu beweise, dass jedes der pythagoreischen Ergänzungsdreiecke dem ursprünglichen Dreieck inhaltsgleich ist.

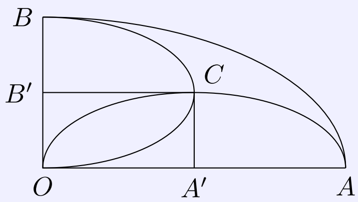
Jedes der pythagoreischen Dreiecke hat einen Eckpunkt mit dem ursprünglichen Dreieck gemeinsam, die beiden von von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten des pythagoreischen Dreiecks stimmen mit den beiden von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten des ursprünglichen Dreiecks überein, und die eingeschlossenen Winkel ergänzen einander zu 180° (vgl. Abbildung).
Daraus und aus der Flächeninhaltsformel für das Dreieck folgt



$$2I_1 = bc\sin\alpha_1 = bc\sin 180° - \alpha = bc\sin\alpha = 2I$$
$$2I_2 = ac\sin\beta_1 = ac\sin 180° - \beta = ac\sin\beta = 2I$$
$$2I_3 = ab\sin\gamma_1 = ab\sin 180° - \gamma = ab\sin\gamma = 2I$$

Daraus folgt unmittelbar $I_1 = I_2 = I_3 = I$.

Aufgabe 36/64



In einen Quadranten einer Ellipse mit den Halbachsen a und b sind gemäß Abbildung zwei Halbellipsen mit den Halbachsen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ eingezeichnet.

1. Es ist der Flächeninhalt des Flächenstücks zu ermitteln, das den beiden Halbellipsen gemeinsam ist.
2. Es ist zu beweisen, dass dieses Flächenstück inhaltsgleich dem Flächenstück des Quadranten ist, das von keiner der beiden Halbellipsen überdeckt wird.

a) Das in der Abbildung eingezeichnete Rechteck $OA'CB'$ mit den Seiten $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ wird von je einem Quadranten der beiden kleineren Ellipsen vollständig, zum Teil doppelt überdeckt. Der doppelt überdeckte Teil ist seinem Inhalt nach demzufolge gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte jedes der beiden Ellipsenquadranten und dem Inhalt des Rechtecks.
Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist $F = \pi ab$. Für die beiden im Rechteck liegenden Ellipsenquadranten folgt daraus $F_1 = F_2 = \frac{\pi ab}{16}$, ihre Summe ist also $F_S = \frac{\pi ab}{8}$. Damit ergibt sich für den Inhalt des doppelt überdeckten Flächenstückes

$$F_d = \frac{\pi ab}{8} - \frac{ab}{4} = \frac{ab}{4}(\frac{\pi}{2} - 1)$$

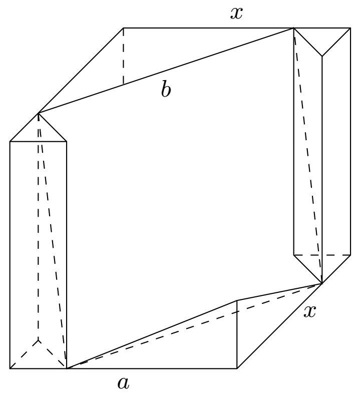
b) Der Beweis kann auf mehrere Weisen geführt werden.
b1) Die Summe aus den Flächeninhalten der beiden kleinen Halbellipsen ist gleich dem Flächeninhalt der großen Ellipsenquadranten: $2F_1 + 2F_2 = \frac{F}{2}$, da $F_1 = F_2 = \frac{\pi ab}{16}$ und $F = \pi ab$ (vgl. a). Daraus folgt unmittelbar, dass der doppelt überdeckte und der nicht überdeckte Flächenteil des Quadranten inhaltsgleich sind.
b2) Man subtrahiert von dem Inhalt des großen Ellipsenquadranten die Inhalte der beiden kleinen Ellipsenquadranten und den Inahlt des Rechtecks $OA'CB'$:

$$\frac{\pi ab}{4} - 2 \cdot \frac{\pi ab}{16} - \frac{ab}{4} = \frac{ab}{4}(\frac{\pi}{2} - 1)$$

womit die Übereinstimmung mit dem doppelt überdeckten Flächenstück gezeigt ist.

2.5 Aufgaben und Lösungen 1965

Aufgabe 1/65
Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a. Es ist zu zeigen, dass man aus diesem Würfel ein Loch so herausschneiden kann, dass ein Würfel mit der Kantenlänge $b > a$ hindurchpasst.

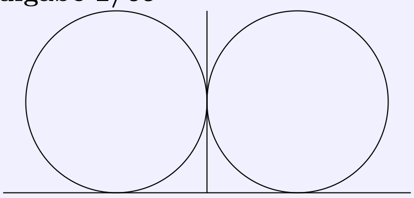


Eine Möglichkeit besteht darin, dass man das Loch mit quadratischem Querschnitt in Richtung einer Raumdiagonale des Würfels legt (Abbildung). Dann ist

$$b^2 = 2x^2 \quad \text{und} \quad b^2 = a^2 + 2(a-x)^2 = 3a^2 + 2x^2 - 4ax$$

Daraus folgt durch Gleichsetzen und Auflösen nach x: $x = \frac{3}{4}a$.
Damit ergibt sich $b^2 = 2(\frac{3}{4}a)^2 = \frac{18}{16}a^2$, also $b > a$.

Aufgabe 2/65



In der Abbildung sind Aufriss und Seitenriss eines nicht kugelförmigen Körpers dargestellt (der Grundriss braucht demnach kein Kreis zu sein!).
Welche Form kann der Körper haben?

Der gesuchte Körper ergibt sich als Durchdringung zweier gerader Kreiszylinder mit gleichen Radien. man erhält ihn beispielsweise, wenn ein gerader Kreiszylinder senkrecht zu seiner Achse kreisförmig abgedreht wird, wobei der Drehradius gleich dem Zylinderradius ist.

Aufgabe 3/65
Die Gleichung $a^x = ax$ hat für jede reelle positive Zahl a eine Lösung $x_1 = 1$. Welche Bedingung muss die Zahl a erfüllen, damit die Gleichung

a) eine weitere Lösung $x_2 < 1$

b) eine weitere Lösung $x_2 > 1$

c) keine von 1 verschiedene Lösung hat?

Die Lösungen der Gleichung $a^x = ax$ sind die Nullstellen der stetigen Funktion $y = a^x - ax$, die die erste Ableitung $y' a^x \ln a - a$ und die zweite Ableitung $y'' = a^x (\ln a)^2$ hat.
Für jedes reelle x ist $y'' > 0$, die erste Ableitung ist also monoton steigend, und die Funktion hat eine von oben konkave (von unten konvexe) Kurve, mithin höchstens ein Minimum und kein Maximum.
Hat die Funktion kein Minimum, so ist $x_1 = 1$ die einzige Nullstelle. Hat die Funktion ein Minimum und liegt dies unterhalb der x-Achse, so gilt

$$x_2 < x_{min} < x_1 = 1 \qquad \text{oder} \qquad x_2 > x_{min} > x_1 = 1$$

Hat die Funktion ein Minimum und liegt dies auf der x-Achse, so ist $x_2 = x_{min} = x_1 = 1$. Oberhalb der x-Achse kann das Minimum nicht liegen, da die Funktion sonst auch ein Maximum haben müsste.
Zur Ermittlung des Wertes x_{min} setzen wir $y' = 0$. Daraus folgt

$$x_{min} = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}$$

Ist $0 < a \leq 1$, so ist $\ln a \leq 0$, $\ln \ln a$ ist nicht reell und es existiert kein Minimum.
Ist $1 < a \leq e$, so ist $0 < \ln a < 1$, $\ln \ln a < 0$, $x_{min} < 1$ und damit ist auch $x_2 > 1$.
Ist $a = e$, so ist $\ln a = 1$, $\ln \ln a = 0$, $x_{min} = 1$ und damit ist auch $x_2 = x_1 = 1$.
Ist $a > e$, so ist $\ln a > 1$, $\ln \ln a > 0$, $x_{min} < 1$ also auch $x_2 < 1$.
Wir erhalten also das folgende Ergebnis: Im Falle a) muss $a > e$, im Falle b) muss $1 < a < e$ und im Falle c) muss entweder $0 < a \leq 1$ oder $a = e$ sein.

Aufgabe 4/65
Es seien p_1 und p_2 zwei Primzahlzwillinge mit $p_1; p_2 > 3$. Man beweise, dass p_1p_2+1 durch 36 teilbar ist.

Jede natürliche Zahl n lässt sich auf genau eine der folgenden Weisen darstellen: $6k; 6k+1; 6k+2; 6k+3; 6k+4; 6k+5$, wobei $k = 0,1,2,...$ ist.
Mit $k' = k+1$ kann man für $6k+4$ auch $6k'-2$, für $6k+5$ auch $6k'-1$ schreiben. Offensichtlich sind $6k; 6k+2$ und $6k+4$ durch 2 und $6k$ sowie $6k+3$ durch 3 teilbar, also niemals Primzahlen. Daraus folgt, dass sich Primzahlen stets entweder durch $6k+1$ oder durch $6k-1$ darstellen lassen (was nicht heißt, dass jede so dargestellte Zahl Primzahl ist).
Soll die Differenz zweier Primzahlen 2 sein (Primzahlzwillinge), so muss demzufolge die erste Primzahl die Form $6k-1$ und die zweite die Form $6k+1$ haben (vorausgesetzt, die Primzahlen sind beide größer als 3).
Für zwei Primzahlzwillinge p_1 und p_2 gilt also: $p_1 = 6k-1$ und $p_2 = 6k+1$. Dann ist

$$p_1p_2 + 1 = (6k-1)(6k+1) + 1 = 36k^2 - 1 + 1 = 36k^2$$

also durch 36 teilbar.

Aufgabe 5/65
Welche dreistelligen natürlichen Zahlen haben die folgende Eigenschaft:
Zerschneidet man ihr im Dezimalsystem dargestelltes Quadrat in zwei je dreistellige Abschnitte, so ist der rechte Abschnitt um 1 größer als der linke.

Bezeichnet man die gesuchte Zahl mit n und die Stellen von n^2 mit $a; b; c; a; b; (c+1)$, so gilt

$$n^2 = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10b + c + 1 = (10^3+1)(10^2a + 10b + c) + 1$$

oder $n^2 - 1 = 1001(10^2a + 10b + c)$. Das heißt, $n^2 - 1$ ist durch 1001 teilbar.
Da $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ und $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ist, muss man n so bestimmen, dass $(n+1)(n-1$ durch $7; 11; 13$ teilbar ist. Dafür gibt es 8 Möglichkeiten:

1. $n+1$ ist teilbar durch $7; 11; 13$
2. $n+1$ ist teilbar durch $7; 11$; $n-1$ ist teilbar durch 13
3. $n+1$ ist teilbar durch $7; 13$; $n-1$ ist teilbar durch 11
4. $n+1$ ist teilbar durch $11; 13$; $n-1$ ist teilbar durch 7
5. $n-1$ ist teilbar durch $7; 11; 13$
6. $n-1$ ist teilbar durch $7; 11$; $n+1$ ist teilbar durch 13
7. $n-1$ ist teilbar durch $7; 13$; $n+1$ ist teilbar durch 11
8. $n-1$ ist teilbar durch $11; 13$; $n+1$ ist teilbar durch 7

Zur Berechnung der einzelnen Fälle:

1. $n+1 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k = 1001k$; für $k = 0$ ergibt sich $n = -1$, für $k \geq 1$ folgt $n > 1000$, diese Zahlen scheiden aus, da sie nicht den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

2. $n+1 = 7 \cdot 11 \cdot k = 77k$; $77k - 2$ muss durch 13 teilbar sein. Dies ist für $k = 11$ der Fall. Folglich ist $n_1 = 846$.

3. $n+1 = 7 \cdot 13 \cdot k = 91k$; $91k - 2$ muss durch 11 teilbar sein. Dies trifft für $k = 8$ zu. Demnach ist $n_2 = 727$.

4. $n+1 = 11 \cdot 13 \cdot k = 143k$; $143k - 2$ muss durch 7 teilbar sein. Dies ist für $k = 3$ der Fall. Damit ergibt sich $n_3 = 428$.

5. $n-1 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k = 1001k$; die Bemerkung zu 1. trifft zu

6. $n-1 = 7 \cdot 11 \cdot k = 77k$ ergibt analog $n_4 = 155$.

7. $n-1 = 7 \cdot 13 \cdot k = 91k$; ergibt $n_5 = 274$.

8. $n-1 = 11 \cdot 13 \cdot k = 143k$; ergibt $n_6 = 573$.

Damit hat man die folgenden Ergebnisse $(n; n^2)$ gefunden: $(846; 715716)$; $(727; 528529)$; $(428; 183184)$; $(155; 024025)$; $(274; 075076)$; $(573; 328329)$.

Aufgabe 6/65
Ein Radfahrer auf regennasser Straße sieht Tropfen vom höchsten Punkt des Vorderrades wegfliegen. Welche Geschwindigkeit haben diese bezüglich der Straße?

Der Radfahrer habe die Geschwindigkeit v. Dies ist dann auch die Umlaufgeschwindigkeit des Rades. Für jeden Punkt des Rades gilt, dass sich die Geschwindigkeit in Fahrtrichtung und die Umfangsgeschwindigkeit des Rades vektoriell addieren. Da im höchsten Punkt des Rades die Tangentialrichtung mir der Fahrtrichtung übereinstimmt, wird die Geschwindigkeit der Tropfen in Fahrtrichtung $2v$.

Eine zweite Lösung ergibt sich mit Hilfe der Differentialrechnung: Jeder Punkt des Rades beschreibt eine Zykloide; für Punkte des Radumfangs ist dies eine gemeinsame Zykloide mit der Parameterdarstellung

$$x = r\omega t - r \sin \omega t \qquad ; \qquad y = r - r \cos \omega t$$

wobei r der Radius des Rades und ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades sind. Mit t ist die Zeit bezeichnet. Für die Geschwindigkeit v des Fahrrades gilt $v = r\omega$ (sie ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Rades). Die Geschwindigkeit eines Punktes des Radumfangs in x-Richtung ergibt sich zu

$$\frac{dx}{dt} = r\omega - r\omega \cos \omega t \quad (1)$$

Für den höchsten Punkt des Rades ist $y_h = 2r = r - r\cos\omega t - h$; daraus folgt $\cos \omega t_h = -1$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$\frac{dx}{dt(y_h)} = r\omega - r\omega(-1) = 2r\omega = 2v$$

als Geschwindigkeit des höchsten Punktes in Fahrtrichtung. Dies ist die Geschwindigkeit der wegfliegenden Tropfen.

Aufgabe 7/65
Gesucht sind drei Quadratzahlen a, b und c so, dass $a - b = b - c = 24$ ist.

Setzt man $a = x^2, b = y^2$ und $c = z^2$, so folgt aus der Aufgabe $x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = 24$. Daraus ergibt sich

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 24 \quad (1); \qquad y^2 - z^2 = (y+z)(y-z) = 24 \quad (2)$$

Für $x+y$ und $x-y$ bzw. für $y+z$ und $y-z$ kommen nur die ganzzahligen Teiler von 24 in Frage. Damit ergeben sich die folgenden Wertepaare:

	1.	2.	3.	4.
$x+y$ bzw. $y+z$	24	12	8	6
$x-y$ bzw. $y-z$	1	2	3	4

Die Paare 1. und 3. entfallen, da Summe und Differenz beider ungerade sind und sich damit keine ganzzahligen Lösungen für x, y und z ergeben. Aus den restlichen zwei Paaren ergeben sich die folgenden Lösungen:

$$2.\ x = 7, y = 5 \text{ bzw. } y = 7, z = 5 \qquad ; \qquad 4.\ x = 5, y = 1 \text{ bzw. } y = 5, z = 1$$

Hieraus folgt (durch Kombination beider Lösungen), dass $x = 7$, $y = 5$ und $z = 1$ ist.
Die gesuchten Zahlen sind also $a = 7^2 = 49$, $b = 5^2 = 25$, $c = 1^2 = 1$.

Aufgabe 8/65
a) Man bestimme die kleinsten beiden natürlichen Zahlen, für die die Zahl $Z = 248011n - 1$ durch 36 teilbar ist.
b) Man weise nach, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für welche die Zahl $Z' = 248001n - 1$ durch 36 teilbar ist.

Eine Zahl x ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar ist.

1. Nach der bekannten Teilbarkeitsregel ist eine Zahl x genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Stellen von x gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
   Die Beziehung $4 \mid (11n - 1)$ wird für jede ganze Zahl n erfüllt, die Element der Menge $M_1 = \{3; 7; 11; ...\}$ ist, d.h. der aus den Gliedern a_k der arithmetischen Folge $\{a_k\} = \{4k - 1\}$ mit $k = 1; 2; 3; ...$ bestehenden Menge.

2. Die Zahl $Z_1 = 248011$ lässt bei der Division durch 9 den Rest 7, das n-fache demzufolge einen Rest $7n$ (der nicht der kleinstmögliche Rest ist). Die Zahl $Z = 248011n - 1$ lässt demnach bei der Division durch 9 einen Rest $7n - 1$, sie ist genau dann durch 9 teilbar, wenn $7n - 1$ durch 9 teilbar ist.

3. Für diejenigen Zahlen n, die sowohl der Menge M_1 als auch der Menge M_2 angehören, d.h., die Elemente des Durchschnitts $M_1 \cap M_2$ sind, ergibt sich sowohl die Teilbarkeit durch 4 als auch die Teilbarkeit durch 9, also auch die Teilbarkeit durch 36. Es ist
   $$M = M_1 \cap M_2 = \{31; 67; 103; 139; ...\}$$
   Die kleinsten beiden dieser Zahlen sind $n_1 = 31$ und $n_2 = 67$. Demzufolge sind die beiden gesuchten Zahlen
   $$248011n_1 - 1 = 7688340 \qquad ; \qquad 248011n_2 - 1 = 16616736$$

b) Die Zahl $Z'_1 = 248001$ ist durch 3 teilbar, da ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Dann ist auch $Z'_2 = 248001n$ durch 3 teilbar. Damit kann $Z' = 248001n - 1$ nicht durch 3, folglich auch nicht durch 9 und demnach auch nicht durch 36 teilbar sein.

Aufgabe 9/65
Man weise die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n nach:
$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Die Ungleichung gilt, wie man durch Einsetzen bestätigt, für $n = 1$. Angenommen, sie gelte für $n = k$: $k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$. Dann folgt:
$$k!(k+1) > \left(\frac{k}{3}\right)^k (k+1) = \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \cdot \frac{3k^k}{(k+1)^k} = \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \cdot \frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k}$$

Nun gilt für jede natürliche Zahl k $(1 + \frac{1}{k})^k < e < 3$. Folglich ist $\frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k} > 1$.
Daraus folgt unmittelbar, dass
$$k!(k+1) = (k+1)! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$
ist, denn die rechte Seite wird durch das Weglassen des zweiten Faktors nur noch verkleinert. Da aus der Gültigkeit der Ungleichung für $n = k$ die Gültigkeit für $n = k + 1$ folgt und da die Gültigkeit für $n = 1$ feststeht, gilt die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n.

Aufgabe 10/65
Ein Herr löst auf der Bank einen Scheck ein und kontrolliert nicht den ausgezahlten Betrag. In einem Geschäft bezahlt er von diesem Geld eine Rechnung über 26,66 MDN. Zu seiner Verwunderung verbleibt nun ein Rest, der doppelt so groß ist wie der Betrag, über den der Scheck ausgestellt war. Der Herr geht deshalb wieder zur Bank, wo sich herausstellt, dass der Kassierer die Zahlen für Mark und Pfennig verwechselt hat.
Über welchen Betrag lautete der Scheck?

Der Scheck lautete über x Mark und y Pfennig = $(100x + y)$ Pfennig. Ausgezahlt wurden y Mark und x Pfennig = $(100y + x)$ Pfennig. Davon wurden ausgegeben 26 Mark und 66 Pfennig = 2666 Pfennig. Es verblieb ein Rest von $2x$ Mark und $2y$ Pfennig = $(200x + 2y)$ Pfennig. Somit ergibt sich die Gleichung

$$100y + x - 2666 = 200x + 2y \to y = \frac{199x + 2666}{98} = 2x + 27 + \frac{3x + 20}{98}$$

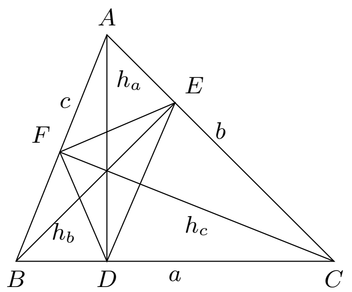
Damit x und y ganzzahlig sind, muss es eine ganze Zahl u geben, so dass $3x + 20 = 98u$ ist. Also folgt

$$x = \frac{98u - 20}{3} = 32u - 7 + \frac{2u + 1}{3}$$

Damit x ganzzahlig wird, kommen nur die Werte $u = 1; u = 4; u = 7; ...u = 3k + 1$ mit $k = 0; 1; 2; ...$ in Frage. Daraus folgt $x = 26$ als einziger Wert (da x ein Pfennigbetrag war, gilt $x \leq 99$, was nur für $u = 1$ erfüllt ist). Damit ergibt sich auch $y = 80$.
Der Scheck lautete also auf 26,80 MDN, es wurden versehentlich 80,26 MDN ausgezahlt und nach Begleichen der Rechnung über 26,66 MDN verblieben noch 53,60 MDN, also das Doppelte von 26,80 MDN.

Aufgabe 11/65
Es sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck. D, E und F seien Fußpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c. Es ist zu beweisen, dass die Höhen gleichzeitig Winkelhalbierende im Dreieck DEF sind.

Wir führen den Beweis an Hand der Abbildung. Dabei genügt es, den Beweis für eine der drei Höhen zu führen, die Behauptung für die anderen Höhen folgt dann durch zyklische Vertauschung der entsprechenden Stücke.



Es ist $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (beide Dreiecke enthalten den Winkel γ bei C und je einen rechten Winkel, Hauptähnlichkeitssatz). Daraus folgt $\frac{DC}{CE} = \frac{a}{b}$, $\triangle DCE \sim \triangle ABC$ (beide Dreiecke enthalten den Winkel γ und stimmen im Verhältnis zweier Seiten überein).
Demnach ist $\measuredangle DEC = \beta$; $\measuredangle EDC = \alpha$ (Gleichheit der Winkel in ähnlichen Dreiecken). Analog schließt man $\measuredangle DFB = \gamma$; $\measuredangle FDC = \alpha$. Für den Winkel $\measuredangle FDA$ und für den Winkel $\measuredangle EDA$ ergibt sich damit $\measuredangle FDA = 90° - \alpha$; $\measuredangle EDA = 90° - \alpha$, also $\measuredangle FDA = \measuredangle EDA$.

Folglich ist $AD = h_a$ Halbierende des Winkels $\measuredangle FDE$, was zu beweisen war.

Aufgabe 12/65
Eine gut brauchbare Iterationsformel für die näherungsweise Berechnung von $\sqrt{a}$ ist

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

wobei u_n ein n-ter Näherungswert ist. Es ist zu beweisen:

1. Ist $u_0 \neq 0$ ein zu kleiner Näherungswert für $\sqrt{a}$, so ist $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right)$ ein zu großer Näherungswert.

2. Ist u_n ein zu großer Näherungswert für $\sqrt{a}$, so ist $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ ein besserer zu großer Näherungswert.

3. Die Folge $\{u_n\}$, die man durch wiederholte Anwendung der Iterationsformel gewinnt, konvergiert tatsächlich gegen $\sqrt{a}$.

Es sei $\sqrt{a} = x$, also $a = x^2$.
1.) Zu beweisen ist: Ist $0 < u_0 < x$, so ist $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) > x$.
Beweis: Es sei $u_0 x - \Delta x$ mit $x > \Delta x > 0$ (nach Voraussetzung). Dann ist

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) = \left(x - \Delta x + \frac{x^2}{x - \Delta x}\right) = x + \frac{\Delta x^2}{2(x - \Delta x)}$$

Wegen $x > \Delta x$ ist $x - \Delta x > 0$, folglich ist auch

$$\frac{\Delta x^2}{2(x - \Delta x)} > 0$$

und damit $u_1 > x = \sqrt{a}$.
2.) Zu beweisen ist: Ist $u_n > x$, so ist $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) > x$.
Beweis: Es sei $u_n = x + \Delta x$ mit $\Delta x > 0$ (nach Voraussetzung). Dann ist

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = \left(x + \Delta x + \frac{x^2}{x + \Delta x}\right) = x + \frac{\Delta x^2}{2(x + \Delta x)}$$

Nun ist

$$0 < \frac{\Delta x^2}{2(x + \Delta x)} = \frac{\Delta x}{2\left(\frac{x}{\Delta x} + 1\right)} < \Delta x$$

wegen $2\left(\frac{x}{\Delta x} + 1\right) > 2$ (da $\Delta x > 0$, ist $\frac{x}{\Delta x} > 0$), also

$$u_n = x + \Delta x > u_{n+1} = x + \frac{\Delta x^2}{2(x + \Delta x)} > x = \sqrt{a}$$

3.) Mit diesen Beweisen ist zwar gezeigt, dass die Folge $\{u_n\}$ sich immer mehr $\sqrt{a} = x$ (spätestens vom zweiten Glied an von oben) nähert, es ist aber noch nicht bewiesen, dass sie tatsächlich gegen diesen Wert konvergiert (d.h., dass sie sich ihm beliebig nähert). Es könnte nämlich sein, dass sie gegen eine Wert $x + c$ konvergiert, wobei c eine positive Konstante ist.
Ist $u_n = x + \Delta x_n$ (also $\Delta x_n > 0$, so ist

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x + \Delta x_n + \frac{x^2}{x + \Delta x_n}\right) = x + \frac{\Delta x_n^2}{2(x + \Delta x_n)} = x + \Delta x_{n+1}$$

Nun ist

$$0 < \Delta x_{n+1} = \frac{\Delta x_n^2}{2(x + \Delta x_n)} = \frac{\Delta x_n}{2\left(\frac{x}{\Delta x_n} + 1\right)} < \frac{1}{2}\Delta x_n$$

wegen $\frac{x}{\Delta x_n} + 1 > 1$. Also ist die Folge

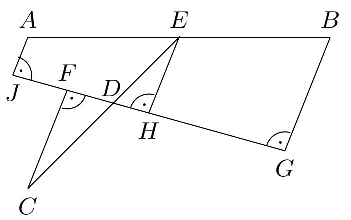
$$\{v_n\} = \left\{x + \frac{\Delta x_1}{2^{n-1}}\right\}$$

eine Majorante für die Folge $\{u_n\}$. Da

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{\Delta x_1}{2^{n-1}}\right) = x$$

und $u_n > x$ für jedes n, ist nach dem Majorantenkriterium auch $\lim_{n\to\infty} u_n = x\sqrt{a}$.
Schlussfolgerung: Für jedes $a > 0$ und für jedes $\Delta x_0 > 0$ konvergiert die Folge $\{u_n\}$ mit $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ gegen $\sqrt{a}$.
Man kann also von einem völlig beliebigen Näherungswert (auch von scheinbar unsinnigen wie beispielsweise $\sqrt{a} \approx 1$ oder $\sqrt{a} \approx a$) ausgehen. Dabei erfolgt die Annäherung spätestens von zweiten Glied an von oben.

Aufgabe 13/65
Gegeben sind drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen. Man konstruiere einen vierten Punkt D, der die folgende Eigenschaft hat:
Legt man durch D einige beliebige Gerade und fällt man auf sie die Lote von den gegebenen Punkten, so ist das Lot von C gleich der Summe der Lote von A und von B.



Analysis: Angenommen, die Aufgabe sei bereits gelöst (vgl. Abbildung). Dann bilden die Punkte A, B, G und J ein bei G und J rechtwinkliges Trapez. Ist E der Halbierungspunkt von AB und EH das Lot von E auf GJ, so gilt $AJ + BG = 2EH$ (EH ist Mittellinie im Trapez).
Ferner ist $CF = AJ + BG = 2EH$ nach den Bedingungen der Aufgabe. Ist nun D der Schnittpunkt der Geraden EC mit GJ, so gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CFD und EHD (nach dem Hauptähnlichkeitssatz), dass $DE : DC = EH : CF = 1 : 2$ ist. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion.

Konstruktion: Man halbiere die Strecke AB. Der Mittelpunkt sei E. Man verbinde E mit C und teile EC innen im Verhältnis $1 : 2$. Der Teilpunkt D ist der gesuchte Punkt.

Beweis: Zieht man durch D eine beliebige Gerade und fällt man auf sie die Lote AJ, BG, CF und EH (wobei E der Halbierungspunkt von AB ist), so gilt:
$\triangle\, CFD \sim \triangle\, EHD$ (Gleichheit der Winkel $\measuredangle CFD = \measuredangle EHD$ und $\measuredangle FDC = \measuredangle HDE$, Hauptähnlichkeitssatz),
also $FC : EH = CD : ED = 2 : 1$, folglich $FC = 2EH$.
Da nun AJ, EH und BG parallel sind und $AE = EB$ gilt, ist EH Mittellinie im Trapez $ABGJ$ und mithin $EH = \frac{AJ+BG}{2}$, also $FC = AJ + BG$.

Aufgabe 14/65
Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen ($a; n > 0$; ganz), wenn $m = \sqrt{a^n + a^{n+1}}$ eine natürliche Zahl sein soll?

Es ist

$$m = \sqrt{a^n + a^{n+1}} = \sqrt{a^n(a+1)}$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle.
1) Es sei $n = 2k$ mit $k = 1; 2; 3; ....$ Dann ist

$$m = \sqrt{a^{2k}(a+1))}a^k\sqrt{a+1}$$

Damit m eine natürliche Zahl ist, muss $a + 1$ eine Quadratzahl sein: $a + 1 = b^{2r}$ mit $b; r > 0$, ganz. Daraus folgt $a = b^{2r} - 1$. Wenn n gerade ist, muss also a um 1 kleiner sein als eine Potenz mit geradem Exponenten.
2) Es sei $n = 2k - 1$ mit $k = 1; 2; 3; ....$ Dann ist

$$m = \sqrt{a^{2k-1}(a+1))}a^{k-1}\sqrt{a(a+1)}$$

Damit m eine natürliche Zahl ist, muss $a(a+1)$ eine Quadratzahl sein. Das ist aber nicht möglich, denn a und $a+1$ sind teilerfremd, so dass ihr Produkt nur dann eine Quadratzahl sein kann, wenn jeder Faktor eine Quadratzahl wäre, woraus jedoch folgen würde $a = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $a > 0$.
Die Bedingungen lauten also:
1.) n muss eine gerade Zahl sein und 2.) a muss um 1 kleiner als eine Potenz mit geradem Exponenten sein.

Aufgabe 15/65
Welcher Beschränkung unterliegt μ, wenn die Ungleichung für alle reellen a, b und λ gelten soll:

$$a^4 + \lambda^2 b^4 \geq \mu a^2 b^2$$

Zunächst ist klar, dass die Ungleichung für $a = 0$ oder für $b = 0$ oder für $a = b = 0$ bei jedem reellen λ gilt. Sieht man von diesen Fällen ab, so kann man für die weiteren Betrachtungen $a \neq 0; b \neq 0$ voraussetzen, durch a^4 dividieren und $\frac{b^2}{c^2} = x$ substituieren; man erhält also

$$1 + \lambda^2 x^2 \geq \mu x \qquad 1 - \mu x + \lambda^2 x^2 \geq 0 \quad (1)$$

Hiervon kann man ohne weiteres zu der gegebenen Ungleichung zurückkommen. Die Aufgabe besteht jetzt darin, festzustellen, unter welchen Bedingungen die quadratische Form

$$y = 1 - \mu x + \lambda^2 x^2 \quad (2a)$$

nicht negativ ist. Man ergänzt die ersten Glieder quadratisch und findet

$$y = \left(1 - \frac{\mu}{2}x\right)^2 + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{4}\right) x^2 \quad (2b)$$

Diese Summe von Quadraten reeller Zahlen ist nichtnegativ, wenn es die Koeffizienten der Quadrate sind, d.h., wenn

$$\lambda^2 - \frac{\mu^2}{4} \geq 0; \qquad \mu \leq 2|\lambda| \quad (3)$$

gilt. Das ist die gesuchte Bedingung. Aus der Gleichheit in (3) folgt allerdings nicht die Gleichheit in (1), denn in (2b) bleibt das erste Quadrat stehen und ma hat

$$\left(1 - \frac{\mu}{2}x\right)^2 \geq (1 - |\lambda|x)^2 \geq 0$$

und nur für

$$x = \frac{1}{|\lambda|} \quad (4)$$

tritt auch in (1) Gleichheit ein.
Ist (3) nicht erfüllt, ist also $\mu > 2|\lambda|$, so gilt die Ungleichung nicht für alle a und b; eine Umgebung des kritischen Wertes (4) muss man ausnehmen. Dies erkennt man leicht, wenn man (2) als Parabel deutet, deren Achse in Richtung der positiven y-Achse eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems verläuft. Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse liegen bei

$$x_{1;2} = \frac{1}{2\lambda^2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}) \quad (5)$$

Für $\mu < 2|\lambda|$ sind sie komplex, die Parabel liegt in den ersten beiden Quadranten, y ist stets positiv.
Bei $\mu = 2|\lambda|$ berührt sie die x-Achse an der Stelle (4), y ist gleich Null an der Stelle $x_{1;2} = \frac{\mu}{2\lambda^2} = \frac{1}{2|\lambda|}$, sonst positiv, also überall nicht negativ. Damit sind (3) und (4) auch geometrisch gewonnen.
Und für $\mu > 2|\lambda|$ ist y nur dann nichtnegativ, wenn x nicht zwischen x_1 und x_2 gemäß (5) liegt.

Zusammenfassung:
Ist $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b = 0$, so gilt die Ungleichung uneingeschränkt für jedes λ und jedes μ. Ist $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sowie

1. $\mu \leq 2|\lambda|$, so gilt sie für alle a, b und λ.
2. $\mu = 2|\lambda|$ oder $|\lambda| = x = \frac{a^2}{b^2}$, so besteht Gleichheit.
3. $\mu > 2|\lambda|$, so gilt die Ungleichung nur für diejenigen a und b, für die $x = \frac{b^2}{a^2}$ nicht in dem offenen Intervall $x_1 < x < x_2$ liegt.

Aufgabe 16/65
Der Unterschied zwischen der Differenz der Kuben und der Differenz der Quadrate zweier benachbarter natürlicher Zahlen beträgt 114. Um welche Zahlen handelt es sich?

Die beiden benachbarten Zahlen können durch ein Symbol ausgedrückt werden. Ist a die größere von beiden, so ist $a - 1$ die kleinere. Die Differenz der Kuben ist $a^3 - (a-1)^3 = 3a^2 - 3a - 1$, die Differenz der Quadrate ist $a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$. Der Unterschied zwischen beiden ist demnach

$$|(3a^2 - 3a + 1) - (2a - 1)| = |3a^2 - 5a + 2|$$

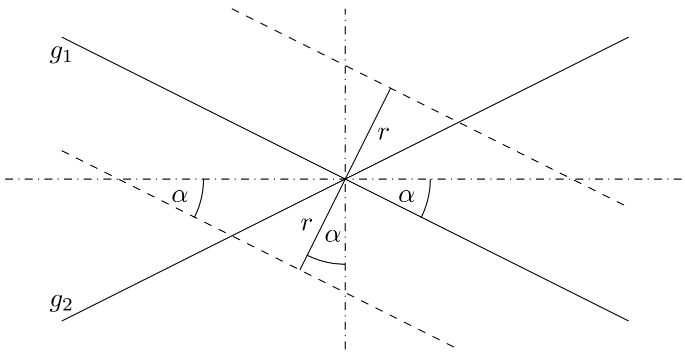
Nach den Bedingungen der Aufgabe gelten also die beiden Gleichungen

$$3a^2 - 5a + 2 = 114 \to a^2 - \frac{5}{3}a - \frac{112}{3} = 0 \qquad \text{und} \qquad -3a^2 + 4a - 2 = 114 \to a^2 - \frac{5}{3}a + \frac{116}{3} = 0$$

Die rechte Gleichung hat keine reellen Lösungen, die linke liefert die Lösungen $a_1 = 7$ und $a_2 = -\frac{32}{6}$. Die Lösung a_2 ist keine Lösung im Sinne der Aufgabe, de sie nicht ganzzahlig ist. Die gesuchten Zahlen sind also 7 und 6.
Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man mit a die kleinere der beiden Zahlen bezeichnet. Das Ergebnis ist also eindeutig.

Aufgabe 17/65
Man bestimme den geometrischen Ort für den Mittelpunkt einer Kugel mit gegebenem Radius r, die zwei einander unter dem Winkel 2α schneidende Geraden berührt.

Vorüberlegung: Der Kugelmittelpunkt hat in jeder Lage den gleichen Abstand von den Geraden, die Kugeltangenten sind. Der geometrische Ort des Kugelmittelpunktes gehört demnach den beiden Symmetriebenen des Geradenpaares an.
Diese Ebenen stehen senkrecht auf der durch die beiden Geraden bestimmten Ebene und schneiden diese in den beiden Winkelhalbierenden.



Der geometrische Ort des Mittelpunktes einer Kugel, die nur eine Gerade berührt, ist eine Zylinderfläche, deren Radius gleich dem Kugelradius und deren Achse die Gerade ist.
Der gesuchte Ort ist demnach der Schnitt der beiden Symmetriebenen mit dem Zylinder vom Radius r um eine der beiden Geraden. Da eine nicht achsenparallele Ebene einen Zylinder in einer Ellipse schneidet, besteht der geometrische Ort aus zwei Ellipsen, deren Nebenachsen zusammenfallen und deren Hauptachsen senkrecht aufeinander stehen.
Die halben Nebenachsen sind gleich dem Kugelradius r, die halben Hauptachsen ergeben sich nach der Abbildung (die den Grundriss des Schnitts darstellt) zu

$$\frac{r}{\sin\alpha} \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{\cos\alpha}$$

Aufgabe 18/65
Es ist zu beweisen, dass für beliebige positive Zahlen a, b, c, d die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

gilt. In welchem Fall tritt Gleichheit ein?

Offensichtlich tritt Gleichheit ein für $a = b = c = d$. Dann gilt nämlich

$$\frac{a}{3a} + \frac{a}{3a} + \frac{a}{3a} + \frac{a}{3a} = \frac{4}{3}$$

Ob noch in einem anderen Fall die Ungleichung zur Gleichung wird, bleibt nachzuprüfen. Substituiert man

$$b+c+d = A; \qquad a+c+d = B \qquad a+b+d = C \qquad a+b+c = D$$

so nimmt die linke Seite der Ungleichung die Form

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}$$

an. Daraus folgt

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}=\frac{a+A}{A}+\frac{b+B}{B}+\frac{c+C}{C}+\frac{d+D}{D}-4$$

Nun ist $a+A=b+B=c+C=d+D=a+b+c+d=E$. Damit ergibt sich

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}=\frac{E}{A}+\frac{E}{B}+\frac{E}{C}+\frac{E}{D}-4=E\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)-4$$

Weiter ist $3E=3a+3b+3c+3d=A+B+C+D$. Es folgt

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}=\frac{1}{3}(A+B+C+D)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)-4=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{A+B+C+D}{A}+\frac{A+B+C+D}{B}+\frac{A+B+C+D}{C}+\frac{A+B+C+D}{D}\right)-4=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{B}{A}+\frac{C}{A}+\frac{D}{A}+1+\frac{A}{B}+\frac{C}{B}+\frac{D}{B}+1+\frac{A}{C}+\frac{B}{C}+\frac{D}{C}+1+\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}\right)-4=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)+\left(\frac{A}{C}+\frac{C}{A}\right)+\left(\frac{A}{D}+\frac{D}{A}\right)+\left(\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)+\left(\frac{B}{D}+\frac{D}{B}\right)+\left(\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right)\right]-\frac{8}{3}$$

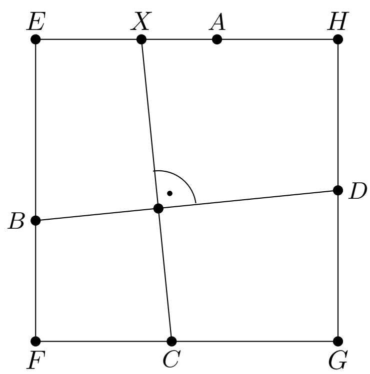
In der eckigen Klammer stehen 6 Summen zu je zweier positiver einander reziproker Zahlen. Wir beweisen nun den folgenden Hilfssatz:
Für zwei positive Zahlen x und y gilt stets $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.
Beweis: Es ist sicher für jedes positive x und y: $(x-y)^2\geq 0$. Daraus folgt

$$x^2+y^2\geq 2xy\rightarrow\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2\rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

Dabei tritt Gleichheit offensichtlich genau dann ein, wenn $x=y$ ist.
Demzufolge gilt

$$\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}\right)\geq\frac{1}{3}\cdot 12-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

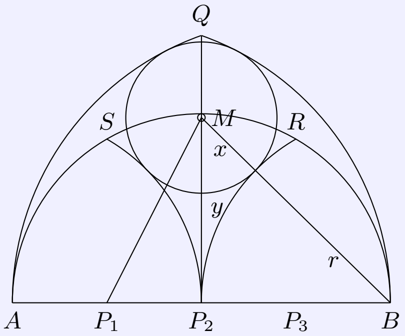
Aufgabe 19/65
In einer Ebene seien vier Punkte A, B, C, D gegeben, von denen nicht mehr als zwei auf derselben Geraden liegen. Man konstruiere in dieser Ebene ein Quadrat so, dass auf jeder Quadratseite (oder ihrer Verlängerung) je einer der gegebenen Punkte liegt.



Analysis: Es seien A, B, C, D die gegebenen Punkte, $EFGH$ das gesuchte Quadrat und X der Schnittpunkt des Lotes von C auf BD mit der gegenüberliegenden Seite EH (oder ihrer Verlängerung). Dann ist $BD=CX$.
Der Beweis folgt aus der Kongruenz der Dreiecke CXX' und BDD' (wobei X' bzw. D' die Fußpunkte der Lote von X und D auf die Gegenseite sind); es ist nämlich $DD'=XX'=FG=EH$, $\angle DD'B=\angle XX'C=90°$ und $\angle D'BD=\angle X'CX$ (senkrecht aufeinanderstehende Schenkel).
Daraus ergibt sich sofort die folgende Konstruktion.

Konstruktion: Man zeichne BD und fälle von C das Lot auf BD. Auf dessen Verlängerung bestimme man X so, dass $CX=BD$ ist. Die Fußpunkte der Lote von B und D auf die durch X und A bestimmte Gerade sind E und H, die Fußpunkte der Lote von B und D auf die zu AX parallele Gerade durch C sind F und G.
Die Konstruktion ist stets ausführbar.

Aufgabe 20/65



Eine Strecke $AB = 2r$ wird durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 in vier gleiche Teile geteilt. Kreisbögen mit den Radien $\frac{3}{2}r$ um P_1 und P_3 schneiden einander über AB in Q. Kreisbögen um A, P_2 und B mit dem Radius r schneiden einander auf derselben Seite von AB in den Punkten R und S.

Wie groß ist der Radius x des Kreises, der die Spitzbögen ARP_2 und P_2SB von außen und den Spitzbogen AQB von innen berührt (vgl. Abbildung)? Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises?

Hilfssatz: Die Zentralen einander berührender Kreise verlaufen durch den Berührungspunkt (auf den Beweis wird verzichtet, da er allgemein bekannt ist).

Im Dreieck P_1MB gilt

$$(\frac{3}{2}r - x)^2 - \frac{r^2}{4} = (r + x)^2 - r^2$$

daraus folgt durch Auflösung nach x: $x = \frac{2}{5}r$. Für y ergibt sich aus dem Dreieck P_1P_2M:

$$y^2 = (r + x)^2 - r^2 = \frac{24}{25}r^2 \to y = \frac{2}{5}r\sqrt{6}$$

Damit ist die auf Grund der Abbildung naheliegende Vermutung widerlegt, M liege auf dem Halbkreis mit dem Radius r um P_2, denn es ist

$$\frac{2}{5}r\sqrt{6} = r\sqrt{\frac{24}{25}} \neq r$$

Aufgabe 21/65

Es sei $S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{r}}$. Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Ungleichung gilt:

$$2\sqrt{n+1} - 2 < S_n < 2\sqrt{n} - 1$$

Induktionsbasis: Für $n = 2$ gilt die Ungleichung, denn es ist

$$2\sqrt{3} - 2 \approx 1{,}46 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}71 < 2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}85$$

Induktionsannahme: Es sei die Ungleichung für $n = k$ richtig, d.h., es gelte

$$2\sqrt{k+2} < S_k < 2\sqrt{k} - 1$$

Hilfssatz: Es ist

$$2\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$$

Beweis

$$2\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} = \frac{2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})} = \frac{2}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$$

Induktionsschluss: Die Addition der Ungleichungen

$$2\sqrt{k+1} - 2 < S_k < 2\sqrt{k} - 1 \qquad \text{und} \qquad 2\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$$

ergibt unmittelbar

$$2\sqrt{k+2} < S_{k+1} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$$

Somit gilt die gegebene Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

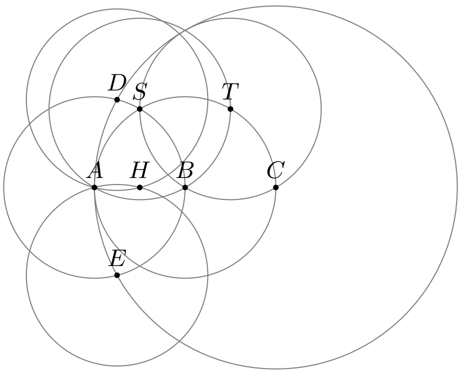
Aufgabe 22/65
Gesucht ist eine natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Die letzte Ziffer ist z; streicht man diese Ziffer weg und setzt sie als erste Stelle vor die übrigen Ziffern, so entsteht das Siebenfache der ursprünglichen Zahl.

Da die "neue Zahl" das Siebenfache der ursprünglichen sein soll und aus dieser durch das Wegstreichen und Vorsetzen der letzten Stelle hervorgehen soll, muss sich die vorletzte Stelle aus der letzten durch Multiplikation mit 7 ergeben.

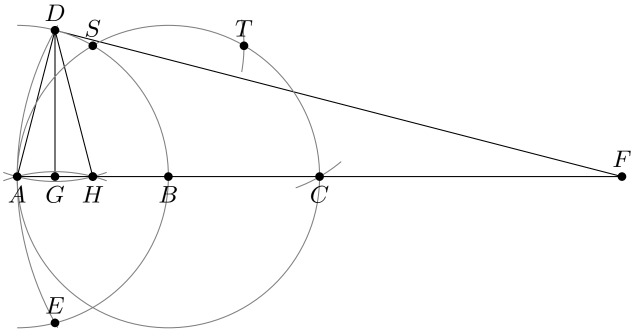
Da $7 \cdot z = 49$ ist die vorletzte Stelle eine 9.
Die drittletzte Stelle ergibt sich wiederum durch Multiplikation der vorletzten mit 7, wobei jedoch der Übertrag der 4 Zehner aus 49 zu beachten ist; sie ergibt sich also durch $7 \cdot 9 + 4 = 67$ zu 7. Damit erhält man auch die viertletzte Stelle aus $7 \cdot 7 + 6 = 55$ zu 5.
Das Verfahren setzt man fort, bis schließlich eine Ziffernfolge 10 aufgetreten ist. Man hat damit die kleinste natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft erhalten. Würde man das Verfahren darüber hinaus fortsetzen, so ergebe sich eine Periodizität; damit ist gezeigt, dass es beliebig viele derartige Zahlen gibt.

Die auf diese Weise gefundene Zahl ist 1014492753623188405797.
Streicht man die letzte Stelle und setzt sie vor die erste, so ergibt sich die Zahl 7101449275362318840579, die tatsächlich das Siebenfache der ursprünglichen ist.

Aufgabe 23/65
Gegeben sind die beiden Punkte A und B. Gesucht ist der Halbierungspunkt der Strecke AB. Zur Konstruktion ist nur der Zirkel zugelassen.



Konstruktion: Man schlage um die Punkte A und B je einen Kreis mit dem Radius $r = AB$. Es ergeben sich die Schnittpunkte S und S'. Ein weiterer Kreis um S mit dem Radius $r = AB$ schneidet den Kreis um B außer in A in T. Ein Kreis um T mit demselben Radius schneidet den Kreis um B in S und C (vgl. Abbildung).
Ein Kreis um C mit dem Radius $R = AC$ schneidet den Kreis um A in den Punkten D und E. Die beiden Kreise, die man mit dem Radius $r = AB$ um D und E schlägt, haben die Schnittpunkte A und H. Der Punkt H ist der gesuchte Halbierungspunkt.



Beweis: Verlängert man die Strecke AC um sich selbst hinaus bis F und verbindet D mit A und F, so ergibt sich ein bei D rechtwinkliges Dreieck ADF, denn der Winkel ADF ist Peripheriewinkel im Halbkreis über AF (vgl. Abbildung 2).
Die Hypotenuse hat die Länge $4r$, die Kathete $AD = AB$ hat die Länge r. Der Fußpunkt die Höhe auf AF sei G.
Nach dem Kathetensatz gilt dann $r^2 = 4r \cdot AG = AB^2$. Daraus ergibt sich $AB = 4AG$ oder $AG = \frac{1}{4}AB$.
Nun ist G gleichzeitig Fußpunkt der Höhe auf der Basis AH des gleichschenkligen Dreiecks ADH. Damit gilt $AG = GH$ oder $AH = 2AG$, folglich $AH = \frac{1}{2}AB$.

Aufgabe 24/65
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n} = 0$$

Es ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n} = \cos \frac{1\pi}{2n} + \cos \frac{3\pi}{2n} + ... + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} = \sum_{\nu=1}^{n} \cos \frac{(2\nu-1)+1}{2n}\pi$$

Dann ist (wegen $\cos(\pi - x) = \cos x$)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \left[\cos \frac{(2\nu-1)}{2n}\pi - \cos \frac{(2\nu-1)+1}{2n}\pi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \left[\cos \frac{(2\nu-1)}{2n}\pi - \cos\left(\pi - \frac{(2\nu-1)+1}{2n}\pi\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} 0 = 0$$

Aufgabe 25/65
Gesucht ist ein Paar natürlicher Zahlen m und n mit $m \neq n$, $m; n \neq 0$, das die Gleichung

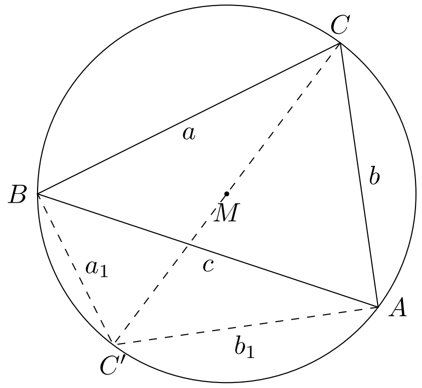
$$\left(\frac{m}{4}\right)^m = \left(\frac{n}{4}\right)^n$$

erfüllt. Es ist weiter zu zeigen, dass es (bis auf die Reihenfolge) genau ein derartiges Paar gibt.

Da $m \neq n$ ist, kann $m > n$ angenommen werden,. Aus $m \geq 1$ und $m > n$ folgt $\left(\frac{m}{4}\right)^m > \left(\frac{n}{4}\right)^n$. Demnach muss $m < 4$ sein, und es folgt $m^m = n^n \cdot 4^{m-n}$. Da $m > n$ ist, muss m eine gerade Zahl sein. Für m kommt demnach nur $m = 2$ in Frage. Tatsächlich ist $m = 2, n = 1$ das einzige Lösungspaar.

Aufgabe 26/65
Man beweise den folgenden Satz: Ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c und dem Umkreisradius r ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$$



Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, C' der dem Punkt C diagonal gegenüberliegende Punkt auf dem Umkreis. Dann ist nach dem Satz des Thales

$$a^2 + a_1^2 = (2r)^2; \quad b^2 + b_1^2 = (2r)^2 \to a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2 = 8r^2$$

Die Behauptung $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$ ist genau dann richtig, wenn $c^2 = a_1^2 + b_1^2$ ist. Das aber ist genau dann der Fall (nach dem Satz des Thales bzw. nach dem Satz des Pythagoras), wenn c Durchmesser des Umkreises ist, also wenn ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Aufgabe 27/65
Die Kurve der Funktion $y = f(x) = a^x$ soll die Kurve der Funktion $y = g(x) = x^n$ im 1.Quadranten berühren.
Für welche Werte von a und n ist dies möglich? Man bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes.

Werden zwei Kurven durch die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ dargestellt, so lauten die Bedingungen für die Berührung in einem Punkt mit der Abszisse: $f(x) = g(x)$ und $f'(x) = g'(x)$.
Die gegebenen Funktionen und ihre Ableitungen sind $f(x) = a^x; f'(x) = a^x \ln x$ und $g(x) = x^n; g'(x) = nx^{n-1}$. Der Berührungspunkt sei $(x_1; y_1)$. Dann gelten die Gleichungen

$$a^{x_1} = x_1^n \qquad \text{und} \qquad a^{x_1} \ln x_1 = n x_1^n$$

Logarithmieren der 1.Gleichung und Division mit der zweiten ergibt $\frac{x_1^n}{a^{x_1}} = \ln x_1$. Mit der 1.Gleichung wird damit $\ln x_1 = 1$, also $x_1 = e$. Einsetzen in die Gleichung ergibt $n = e \ln a$ bzw. $a = \sqrt[e]{e^n}$. Für y_1 ergibt sich somit $y_1 = e^n$.
Ergebnis: Die Koordinaten des Berührungspunktes sind $(e; e^n)$. Eine Berührung ist nur möglich, wenn a und n durch die Gleichung $n = e \ln a$ verbunden sind. Eine Berührung ist unmöglich, wenn $a = 1$ ist, da dann $n = 0$ wird und die beiden Funktionen als identische Geraden zusammenfallen. Wenn $a < 1$ ist, dann ist $n < 0$.

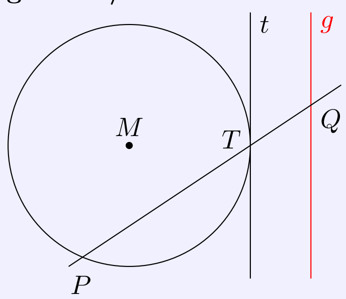
Aufgabe 28/65
Eine zweistellige Zahl ist zu finden, bei der das Produkt aus den beiden Ziffern gleich der Differenz aus dem fünffachen Quadrat der letzten Ziffer und der um 10 vermehrten Quersumme ist.

Die gesuchte Zahl sei $z = 10x - y$ mit $0 \leq x; y \leq 9$, ganz. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt die Gleichung

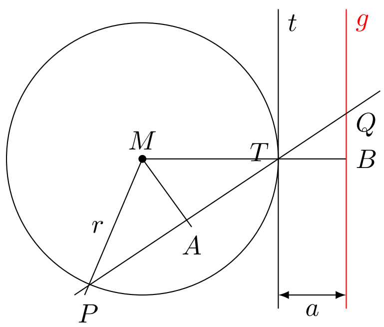
$$xy = 5y^2 - x - y - 10 \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = \frac{xy + x + y + 10}{5}$$

Da $xy + x + y$ wegen der Bedingungen für x und y sicher kleiner als 100 ist, folgt für $y^2 < 22$ und damit $y \leq 4$. Unter den damit in Frage kommenden Werten $y = 1; 2; 3; 4$ erfüllt nur der Wert $y = 3$ mit $x = 8$ die Gleichung. Also ist nur das Zahlenpaar mit $x = 8, y = 3$ eine Lösung und es ist $z = 83$.

Aufgabe 29/65



Gegeben sind ein Kreis k mit einer Tangente sowie dem Berührungspunkt T von k mit t und eine zu t parallele Gerade g. Jede Gerade durch T schneidet k in einem Punkt P und g in einem Punkt Q.
Es ist zu beweisen: Der Produkt $p = TP \cdot TQ$ ist konstant, d.h., p ist unabhängig von der speziellen Lage der Geraden durch T.



Die zu t parallele Gerade g kann bezüglich des Kreises drei prinzipiell verschiedene Lagen einnehmen. Eine Möglichkeit zeigt die Abbildung. Weiterhin kann g durch den Kreis verlaufen oder auch auf der anderen Kreisseite diesen passieren. In allen drei Fällen kann man jedoch die folgenden Gleichungen mit dem Winkel $\alpha = \measuredangle MTA = \measuredangle BTQ$ aufstellen: $\cos\alpha = \frac{a}{TQ}$ $\quad \cos\alpha = \frac{TP}{2r}$
Daraus ergibt sich unmittelbar

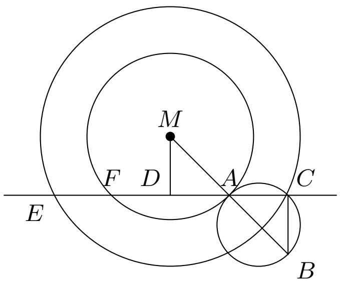
$$\frac{a}{TQ} = \frac{TP}{2r} \qquad \text{also} \qquad TP \cdot TQ = 2ar$$

Da a und r konstante Faktoren; unabhängig vom Anstieg der Sekante; ist also $TP \cdot TQ$ konstant.

Aufgabe 30/65
Man beweise den folgenden Satz:
Ist p eine Primzahl und $p > 5$, so ist jede aus $p - 1$ gleichen Ziffern n bestehende Zahl z durch p teilbar.
Beispiele: 444444 ist durch 7 teilbar, 1111111111 ist durch 11 teilbar.

Jeder Primzahlstammbruch (außer für $p = 2$ und $p = 5$) lässt sich einen reinperiodischen Dezimalbruch mit genau $(p-1)$-stelliger Periode schreiben. Dass eventuell kürzerer Perioden auftreten, kann hier unbeachtet bleiben, da die Periodenlänge in einem solchen Falle stets Teiler von $p-1$ sein muss, also eine entsprechend vervielfachte Periode anzunehmen wäre.)
Eine solche $(p-1)$-stellige Periode ergibt, mit p multipliziert, eine $(p-1)$-stellige aus lauter Neunen aufgebaute Zahl, die bei Division durch 9 in eine durch p teilbare, aus lauter Einsen geschriebene $(p-1)$-stellige Zahl übergeht. Jedes Vielfache solcher Zahl ist dann auch durch p teilbar, natürlich $p > 5$ vorausgesetzt.

Aufgabe 31/65
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise. Es ist eine gemeinsame Sekante zu konstruieren, so dass die Sehne des äußeren Kreises doppelt so groß ist wie die Sehne des inneren Kreises.



Analysis: Angenommen, die Aufgabe wäre bereits gelöst. Verlängert man den Radius MA über A hinaus um sich selbst bis B, so ist das entstehende Dreieck ABC kongruent dem Dreieck ADM. (Wegen $AD = CD$, $AM = AB$, $\measuredangle DAM = \measuredangle CAB$). Wegen $\measuredangle ADM = 90°$ ist dann auch $\measuredangle ACB = 90°$. Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

2. Konstruktion: Man zeichne in den inneren Kreis einen beliebigen Radius MA und verlängere ihn um sich selbst bis zum Punkt B. Über AB schlage man den Thaleskreis, der den äußeren Kreis in C schneidet. Die Gerade durch A und C ist die gesuchte Sekante.

3. Beweis: Folgt unmittelbar aus der Analysis.
4. Determination: Die Wahl des Punktes A ist auf beliebig viele Weisen möglich. Zu jeder Wahl gibt es genau zwei Schnittpunkte C und C' des Thaleskreises mit dem äußeren Kreis, wenn der Radius R des äußeren Kreises kleiner ist als das Doppelte des Radius r des inneren Kreises: $R < 2r$.
Ist $R = 2r$, so berührt der Thaleskreis den äußeren Kreis in genau einem Punkt. Für $R > 2r$ gibt es keinen Schnittpunkt und die Aufgabe ist unlösbar.

Aufgabe 32/65
Man zeige, dass die beiden Ungleichungen

$$xyz(x+y+z) > 0 \qquad \text{und} \qquad xy + yz + xz > 0$$

mit $x; y; z \neq 0$ genau dann gelten, wenn $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$ ist. Dabei ist $\operatorname{sgn} a = 0$, wenn $a = 0$, $\operatorname{sgn} a = 1$, wenn $a > 0$ und $\operatorname{sgn} a = -1$, wenn $a < 0$ ist.

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile.
1. Aus $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$ folgt $\operatorname{sgn} xyz = \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} x+y+z$ und damit $\operatorname{sgn} xyz(x+y+z) = 1$ sowie $\operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} yz = \operatorname{sgn} zx = 1$, also $\operatorname{sgn}(xy + yz + zx) = 1$.
Das heißt aber nichts anderes als

$$xyz(x+y+z) > 0 \qquad \text{und} \qquad xy + yz + xz > 0$$

2. Angenommen, es wäre $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y = -\operatorname{sgn} z$, so würde folgen $\operatorname{sgn} xy = 1, \operatorname{sgn} yz = -1, \operatorname{sgn} xz = -1$, also $xy > 0, yz < 0, xz < 0$. Durch Division der ersten gegebenen Ungleichung durch $yz < 0$ folgt $x^2 + xy + xz < 0$.
Addiert man auf beiden Seiten dieser Ungleichung yz und subtrahiert man x^2, so ergibt sich

$$xy + yz + zx < -x^2 + yz < 0$$

(da $yz < 0$) im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch und es kann nur gelten $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} z$ (da die Annahme $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} z = -\operatorname{sgn} y$ auf einen analogen Widerspruch führt).

Aufgabe 33/65
Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl. Man beweise:

a) Ist $x \neq \sqrt[n]{a}$ und $a > 0$, so ist
$$y = \frac{a + (n-1)x^n}{nx^{n-1}} > \sqrt[n]{a}$$

b) Ist
$$y_1 > \sqrt[n]{a}; \quad y_k = \frac{a + (n-1)y_{k-1}^n}{ny_{k-1}^{n-1}} \quad \text{und} \quad z_k = \frac{a}{y_k^{n-1}}$$
so konvergiert die Folge $\{y_k\}$ monoton fallend (also von oben) und die Folge $\{z_k\}$ monoton steigend (also von unten) gegen $\sqrt[n]{a}$.

a) Die n positiven Zahlen $\frac{a}{x^{n-1}}; x; x; ...; x$ mit $x \neq \frac{a}{xn-1}$ haben das arithmetische Mittel y und das geometrische Mittel $\sqrt[n]{a}$. Ersteres ist bekanntlich immer größer als letzteres.

b) Nach a) sind alle Glieder der Folge $\{y_k\}$ größer als $\sqrt[n]{a}$. Alle Glieder der Folge $\{z_k\}$ sind kleiner als $\sqrt[n]{a}$, denn es ist
$$z_k^n = \left(\frac{a}{y_k^{n-1}}\right)^n = \frac{a^n}{(y_k^n)^{n-1}} < \frac{a^n}{a^{n-1}} = a$$
und das Radizieren eine monotone Operation. Also ist
$$z_1 < \sqrt[n]{a} < y_1 \qquad ; \qquad z_2 < \sqrt[n]{a} < y_2, ...$$
Somit ist
$$y_k = \frac{z_{k-1} + (n-1)y_{k-1}}{n} = y_{k-1} - \frac{y_{k-1} - z_{k-1}}{n} < y_{k-1}$$
und natürlich $z_k > z_{k-1}$, also $\{y_k\}$ monoton fallend, $\{z_k\}$ monoton steigend. Demnach ist jedes der Intervalle $I_k = (z_k; y_k)$ im vorherigen Intervall $I_{k-1} = (z_{k-1}; y_{k-1})$ enthalten, und jedes Intervall I_k enthält $\sqrt[n]{a}$.
Da nun aber die Intervalllängen
$$y_k - z_k < y_k - z_{k-1} = y_{k-1} - \frac{y_{k-1} - z_{k-1}}{n} - z_{k-1} = (y_{k-1} - z_{k-1})\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
von Index zu Index stärker als mit dem konstanten Faktor $\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$ schrumpfen, also gegen Null konvergieren, zieht sich die Intervallschachtelung $\{I_k\}$ auf einen Punkt zusammen: $\sqrt[n]{a}$. Somit konvergieren beide Begrenzungsfolgen $\{y_k\}$ und $\{z_k\}$ gegen $\sqrt[n]{a}$.

Aufgabe 34/65
Es gibt vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen gilt:
Die Summe der Kuben der beiden kleineren ist gleich der Differenz der Kuben der beiden größeren.
Diese vier Zahlen sind zu finden.

Wenn w, x, y und z die vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind, so gilt auf Grund der Behauptung
$$w^3 + x^3 = z^3 - y^3 \to w^3 + x^3 + y^3 = z^3$$
Ferner gilt, wenn mit w die kleinste der vier Zahlen bezeichnet wird, $x = w + 1, y = w + 2, z = w + 3$, also
$$w^3 + (w+1)^3 + (w+2)^3 = (w+3)^3 \to 2w^3 - 12w = 18 \to w(w^2 - 6) = 9$$
Da w als natürliche Zahl ganz sein muss, ist w^2 ebenfalls ganz und damit auch der Faktor in der Klammer.
Die Zahl 9 ist also in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, mit den Möglichkeiten:
1. $9 = 1 \cdot 9$: diese Möglichkeit scheidet aus, da weder $w = 1$ noch $w = 9$ die Gleichung erfüllt.
2. $9 = 3 \cdot 3$: durch $w = 3$ ist die Gleichung erfüllt
Wenn $w = 3$, so folgt $x = 4, y = 5, z = 6$. Einsetzen dieser Werte in die Ausgangsgleichung liefert $27 + 64 = 216 - 215$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 35/65
Es seien A, B, C und D die Eckpunkte eines ebenen Vierecks. Man beweise, dass dann gilt

$$\sin\measuredangle CAB \cdot \sin\measuredangle DBC \cdot \sin\measuredangle ACD \cdot \sin\measuredangle BDA = \sin\measuredangle ABD \cdot \sin\measuredangle BCA \cdot \sin\measuredangle CDB \cdot \sin\measuredangle DAC$$

Zunächst sei das Viereck konvex. Im weiteren verwenden wird die Bezeichnungen aus der Abbildung. Nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$a : x = \sin\rho : \sin\alpha_1; \quad x : y = \sin\gamma_1 : \sin\beta_1; \quad y : c = \sin\delta_2 : \sin\rho$$

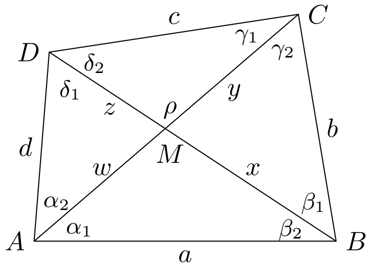
Durch Auflösung des Systems (Elimination von x und y) ergibt sich:

$$c \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\delta_2 = a \cdot \sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \qquad (1)$$

Weiter gelten, ebenfalls nach dem Sinussatz, die folgenden Gleichungen:

$$a : w = \sin\rho : \sin\beta_2; \quad w : z = \sin\delta_1 : \sin\alpha_2; \quad z : c = \sin\gamma_1 : \sin\rho$$

Die Elimination von z und w ergibt: $c \cdot \sin\delta_1 \cdot \sin\gamma_1 = a \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \qquad (2)$



Dividiert man (1) durch (2), so folgt:

$$\frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\delta_1}{\sin\gamma_2 \cdot \sin\delta_2} = \frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1}$$

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 \cdot \sin\delta_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\delta_2$$

Das ist aber die Behauptung. Der Nachweis für ein konkaves Viereck führt zu analogen Gleichungen und Beziehungen.

Aufgabe 36/65
Es ist zu beweisen: Wenn $|x_i| \leq 1$ und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

1. Die Behauptung ist trivial, wenn für mindestens ein i gilt $x_i = 0$, da die Summe nicht negativ und das Produkt 0 ist.
2. Die Behauptung ist trivial, wenn für genau $2m+1$ Indizes i mit $m = 0, 1,...$ gilt $x_i < 0$, da dann die Summe nicht negativ ist, das Produkt aber negativ.
3. Wenn für genau $2m$ Indizes i gilt $x_i < 0$, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \text{ und } \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$$

Es genügt also, die Behauptung für $0 \leq x_i \leq 1$ zu beweisen.
Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion:

1. Die Behauptung ist sich richtig für $n = 2$. Für jedes $x_i > 0$ mit $i = 1, 2$ ist

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \to x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \to x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$$

2. Angenommen, die Behauptung gelte für $n = r$: $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2 \geq n \cdot \prod\limits_{i=1}^{r} x_i$

   Dann ist

$$\sum_{i=1}^{r+1} x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + x_{r+1}^2 \geq \prod_{i=1}^{r} x_i + x_{r+1}^2$$

und wegen $x_{r+1} < 1$ wird

$$r\prod_{i=1}^{r} x_i \geq r\prod_{i=1}^{r} x_i x_{r+1} = r\prod_{i=1}^{r+1} x_i$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_{r+1} \geq x_r$. Dann ist aber

$$x_{r+1} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i \to x_{r+1}^2 \leq \prod_{i=1}^{n} x_i x_{r+1} = \prod_{i=1}^{r+1} x_i$$

$$r\prod_{i=1}^{r} x_i + x_{r+1}^2 \geq r\prod_{i=1}^{r+1} x_i + \prod_{i=1}^{r+1} x_i = (r+1)\prod_{i=1}^{r+1} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} x_i^2 \geq (r+1)\cdot\prod_{i=1}^{r+1} x_i$$

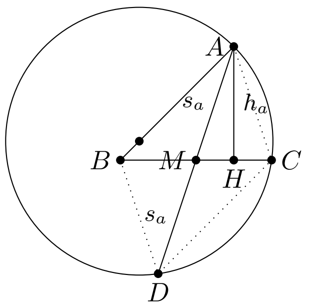
Damit gilt die Behauptung für alle $n \geq 2$ und für alle x_i mit $|x_i| \leq 0$.

2.6 Aufgaben und Lösungen 1966

Aufgabe 1/66
Es ist zu beweisen, dass man unter n ganzen Zahlen stets k Zahlen mit $k \leq n$ so auswählen kann, dass ihre Summe durch n teilbar ist. Dabei gelte auch eine einzelne Zahl als Summe.

Die n Zahlen seien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Daraus kann man mindestens n Summen bilden: $a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; ...; a_1 + a_2 + ... + a_n$.
Da bei der Division durch n insgesamt n verschiedene Reste $0; 1; 2; ...; n$ möglich sind, ist unter diesen Summen entweder eine, die bei der Division durch n den Rest null lässt (dann ist die Behauptung bewiesen), oder unter diesen Summen sind mindestens zwei, die bei der Division durch n denselben Rest m lassen ($m < n$). Dann lässt aber die Differenz zweier solcher Summen mit demselben Rest m bei der Division durch n den Rest null. Da diese Differenz eine Summe im Sinne der Aufgabe ist, ist damit die Behauptung vollständig bewiesen.

Aufgabe 2/66
Es ist ein Dreieck aus dem Winkel α, der Halbierenden s_a seiner Gegenseite a und der Höhe h_a auf der Gegenseite a zu konstruieren!



Analysis: Das Dreieck AMH ist nach ssw ohne weiteres konstruierbar, wenn $s_a \geq h_a$ ist. Im Falle $s_a = h_a$ fällt M mit H zusammen, das Dreieck ABC wird gleichschenklig, damit ist sogar das Dreieck ABC aus den Dreiecken AMB und AMC nach sww konstruierbar.
Verlängert man $AM = s_a$ über M hinaus um sich selbst bis zu Punkt D, so bilden die Punkte A, B, D, C ein Viereck, indem sich die Diagonalen halbieren, also ein Parallelogramm. Daraus folgt, dass $\angle DCA = 180° - \alpha$ ist. Der Punkt C liegt also auf dem Kreis, der $AD = 2s_a$ als Sehne und $180° - \alpha$ als Peripheriewinkel fasst.

Ferner liegt er auf der Geraden durch M und H (falls $M = H$, auf der Senkrechten zu AD in M).
Die Konstruktion ergibt sich aus der Analysis. Das Dreieck ABC ist genau dann konstruierbar, wenn $s_a \geq h_a$ und $\alpha < 180°$ ist und zwar, bis auf Symmetrie, eindeutig.

Aufgabe 3/66
Man löse die Gleichung

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

Setzt man $y = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, so wird

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$$

Damit erhält die gegebene Gleichung die Form $y + \frac{1}{y} = 4$. Da stets $y \neq 0$ ist, folgt $y^2 - 4y + 1 = 0$ und damit $y = 2 \pm \sqrt{3}$.
1.) Ist $y = 2 + \sqrt{3}$, so ergibt sich $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$. Damit ist die Lösung $x = 2$ offensichtlich.
2.) Ist $y = 2 - \sqrt{3}$, so ergibt sich $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$. Da ferner gilt

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$$

ergibt sich $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ mit der Lösung $x = -2$.

Aufgabe 4/66
Welches reguläre Polyeder hat folgende Eigenschaften?

1. Werden die Flächenmitten untereinander entsprechend verbunden, so entsteht wieder ein reguläres Polyeder.
2. Werden die Kantenmitten dieses zweiten Polyeders untereinander entsprechend verbunden, so entsteht ein drittes reguläres Polyeder.
3. Werden die Flächenmitten dieses dritten Polyeders untereinander entsprechend verbunden, so entsteht ein viertes reguläres Polyeder. Welches Polyeder ist das?

Es gibt fünf reguläre Polyeder. Zur Lösung stellen wir eine Tabelle dieser Polyeder mit der Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten auf:

Polyeder	Ecken	Flächen	Kanten
Tetraeder	4	4	6
Hexaeder	8	6	12
Oktaeder	6	8	12
Dodekaeder	20	12	30
Ikosaeder	12	20	30

Die unter 1. geforderte Eigenschaft weist jedes der Polyeder auf. Bei der Verbindung der Kantenmitten zu einem Polyeder scheiden jedoch Dodekaeder und Ikosaeder aus, weil es kein reguläres Polyeder mit 12 bzw. mit 30 Ecken gibt (die Kantenmitten müssten Eckpunkte des dritten Polyeders werden).
Aber auch Hexaeder und Oktaeder scheiden aus, weil von den 12 Kantenmittelpunkten des Hexaeders bzw. Oktaeders jeweils 4 in einer Ebene liegen. Nur beim Tetraeder ergäbe sich wegen der 6 Kanten ein Polyeder mit 6 Ecken, also ein Oktaeder. Dessen Flächenmittelpunkte, untereinander entsprechend verbunden, liefern ein Hexaeder.
Also einziges reguläres Polyeder hat das Tetraeder die geforderten Eigenschaften, und das vierte "eingeschachtelte" Polyeder ist ein Hexaeder (Würfel).

Aufgabe 5/66
Man beschreibe einem Kreis ein Viereck ein. Welche Bedingungen müssen die Diagonalen erfüllen, wenn die Summe der Kreisbögen über zwei nicht benachbarten Seiten gleich dem halben Kreisumfang sein sollen?

Die beiden Diagonalen schneiden einander im Punkt P unter dem Winkel α bzw. seinem Supplement $180° - \alpha$. Angenommen es gelte $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \frac{u}{2}$, wobei u der Umfang des Kreises ist, so folgt

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = \frac{u}{2} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA} = u$$

also $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA} = \frac{u}{2}$. Das heißt, genau dann, wenn die eine Bogensumme gleich dem Halbkreisbogen ist, ist es auch die andere. Daher genügt es zu untersuchen, für welchen Winkel α die Relation $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \frac{u}{2}$ richtig ist.
Da der Peripheriewinkel über einem Kreisbogen gleich dem halben Zentriwinkel ist, addieren sich die Kreisbögen bei der Addition von Peripherie- und Zentriwinkeln und umgekehrt. Im Dreieck PBC sind $\measuredangle PBC = \beta$ und $\measuredangle PCB = \gamma$ Peripheriewinkel der Bögen $\overset{\frown}{CD}$ und $\overset{\frown}{AB}$. Ihre Summe ist $\beta + \gamma = 180° - \alpha$.
Daraus folgt nach der vorherigen Überlegung, dass für die Summe φ der Zentriwinkel über beiden Bögen gilt: $\varphi = 2(\beta + \gamma) = 360° - 2\alpha$.
Nur im Fall $\alpha = 90°$ ist die Summe der Zentriwinkel über beiden Bögen gleich $180°$, so dass sie einen Halbkreis erfasst. Notwendig und hinreichend ist also die Orthogonalität der beiden Diagonalen, d.h. die beiden Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe 6/66
In der Gaußschen Zahlenebene wird eine komplexe Zahl

$$z = u + i \cdot v = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

durch einen Punkt mit den Koordinaten $u = r\cos\varphi$ und $v = r\sin\varphi$ abgebildet. Dabei wird die u-Achse als reelle und die v-Achse als imaginäre Achse bezeichnet.

Zwischen der Geraden, die den Winkel zwischen den Achsen im ersten Quadranten halbiert und der positiven reellen Achse liegt eine Punktmenge, deren Elemente ganzzahlige Koordinaten $u; v$ haben. Diese Elemente haben die Eigenschaft, dass jedem von ihnen ein pythagoreisches Zahlentripel eindeutig zugeordnet ist; die Zahlen des Tripels entsprechen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Ecken der Ursprung, der Punkt z^2 und der Fußpunkt des Lotes von z^2 auf die reelle Achse sind.
Weshalb gehören die Punkte der erwähnten Winkelhalbierenden mit ganzzahligen Koordinaten $u; v$ nicht zu der genannten Punktmenge?

Der Punkt z^2 ist der Schlüssel zur Lösung. Quadriert man z, so ergibt sich

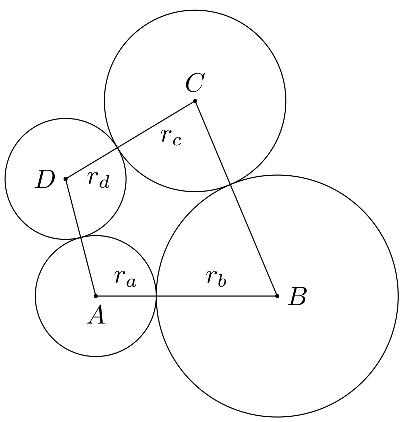
$$z^2 = u^2 - v^2 + 2uv \cdot i = r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$$

Liegt nun ein Punkt z auf der erwähnten Winkelhalbierenden, so ist $u = v$ und $\varphi = 45°$. Setzt man diese Werte ein, so folgt $z^2 = 2uv \cdot i = r^2 \cdot i$. Der Punkt liegt also dann auf der imaginären Achse, der Fußpunkt des Lotes auf die reelle Achse fällt mit dem Ursprung zusammen.
Das Dreieck ist damit zur Strecke entartet. Damit wird in dem durch z bestimmten Tripel eine Zahl gleich Null, während die beiden anderen einander gleich werden. Ein solches "triviales" Tripel gilt nicht als pythagoreisches Tripel.

Aufgabe 7/66
Welche Bedingungen muss ein Viereck erfüllen, damit um jeden seiner Eckpunkte ein Kreis existiert, der die Kreise um die ihm benachbarten Eckpunkte berührt?

Angenommen, ein Viereck erfülle die Bedingung. Dann gilt (siehe Abbildung)

$$AB = r_a + r_b; \quad BC = r_b + r_c; \quad CD = r_c + r_d; \quad DA = r_a + r_a$$



Durch Subtraktion folgt daraus $AB = BC = r_a - r_c$ und $DA - CD = r_a - r_c$, d.h. $AB - BC = DA - CD$, also $AB + CD = BC + DA$, das heißt, die Summen der gegenüberliegenden Seiten sind gleich. Da alle durchgeführten Umformungen umkehrbar eindeutig sind, folgt umgekehrt aus der Gleichheit der Summen gegenüberliegender Seiten die Existenz der Kreise.

Aufgabe 8/66
Man beweise: Gilt für zwei Zahlenpaare $(a; b)$ und $(c; d)$ die folgende Gleichung

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$$

so gilt auch die Gleichung

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$$

Die Voraussetzung lautet

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$$

Formt man diese Gleichung um, so ergibt sich

$$2(a^2 + ab + b^2) = 2(c^2 + cd + d^2)$$

Durch Quadrieren folgt

$$4(a^4 + a^2b^2 + b^4 + 2a^3b + 2ab^3 + 3a^2b^2) = 4(c^4 + c^2d^2 + d^4 + 2c^3d + 2cd^3 + 3c^2d^2)$$

Nach Dividieren durch 2 und Umstellung der Glieder erhält man

$$a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = c^4 + d^4 + c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$$

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$$

Aufgabe 9/66
Man berechne

$$\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1}) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$$

Es gilt

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1}) \right) dx = \int \left(1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} \right) = \sum_{k=1}^{n} x^k + c = x + x^2 + x^3 + ... + x^n + c$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $a_1 = x$, dem Quotienten $q = x$ und der Gliederzahl n dar. Damit ist nach der Summenformel geometrischer Reihen

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1}) \right) dx = x\frac{1 - x^n}{1 - x} + c$$

Differenziert man wieder, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1}) = \frac{d(x\frac{1-x^n}{1-x} + c)}{dx}$$

Mit Hilfe der Produktregel und der Quotientenregel ergibt sich daraus

$$\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1}) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{1 - (n + 1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}$$

Aufgabe 10/66
"Beweis" dafür, dass der Gewicht einer Lokomotive gleich dem Gewicht eines Ziegelsteins ist:
Das Gewicht der Lokomotive betrage m, das Gewicht des Ziegelsteins z.
Dann sei $m + z = es$ die Summe beider. Damit gilt $m - 2s = -z$ und $m = -z + 2s$. Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$m^2 - 2ms = z^2 - 2zs$$

oder, nach Addition von s^2 auf beiden Seiten

$$m^2 - 2ms + s^2 = z^2 - 2zs + s^2 \rightarrow (m - s)^2 = (z - s)^2 \rightarrow \text{ also } m = z$$

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler liegt in der letzten Schlussfolgerung. Aus

$$(m-s)^2 = (z-s)^2$$

kann man nicht folgern, dass $m - s = z - s$ und damit $m = z$, sondern nur $|m - s| = ||z - s|$. Daraus ergibt sich dann entweder $m - s = z - s$ oder $m - s = -(z - s)$. Tatsächlich gilt im vorliegenden Falle die zweite dieser Relationen. Damit folgt aber wieder die Ausgangsgleichung $m + z = 2s$.

Aufgabe 11/66
Es sind die fünf Zahlen einer Lottoziehung (1 bis 90) gesucht, über die folgendes ausgesagt wird:

a) Es treten alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal auf.

b) Nur die drei mittleren Zahlen sind gerade.

c) Die kleinste Zahl hat mit der größten einen (von ihr selbst verschiedenen) gemeinsamen Teiler.

d) Die Quersumme einer Zahl ist ein Viertel der Quersumme der größten Zahl.

e) Die Quersummen zweier anderer Zahlen verhalten sich wie 1:2.

a) Da fünf Zahlen gesucht sind, aber nur neun Ziffern auftreten, muss die kleinste Zahl einstellig sein.

b) Diese kleinste Zahl ist ungerade.

c) Da sie mit der größten Zahl einen (von ihr selbst verschiedenen) gemeinsamen Teiler hat, ist sie die Zahl Neun. (alle anderen ungeraden einstelligen Zahlen sind Primzahlen oder die Eins). Der gemeinsame Teiler ist also 3. Die Quersumme der größten Zahl ist somit durch 3 teilbar.

d) Da die Quersumme der größten Zahl außerdem durch 4 teilbar sein muss und die Quersumme einer zweistelligen Zahl mit verschiedenen Ziffern höchstens 17 ist (im vorliegenden Fall sogar höchstens 15, da die Ziffer 9 nicht mehr auftreten kann), ist die Quersumme der größten Zahl 12. Da die größte Zahl ungerade ist, kommen für sie nur 75 oder 57 in Frage.
Die Quersumme einer anderen Zahl ist $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$. Für sie kommen demnach nur 12 oder 21 in Frage. Nach b) ist sie gerade, also ist 12 die zweite Zahl.

e) Es verbleiben die Ziffern 3, 4, 6, 8. Daraus müssen zwei Zahlen gebildet werden, deren Quersummen sich wie 1:2 verhalten. Man probiert leicht aus (6 Möglichkeiten), dass dies nur für die beiden Kombinationen 3;4 und 6;8 möglich ist.
Nach b) ist nun die dritte Zahl 34 (43 ist ungerade). Da nach b) die größte Zahl ungerade ist, scheiden die Möglichkeiten 86 für die vierte und 57 für die größte Zahl aus.

Die fünf Zahlen sind also 9, 12, 34, 68, 75.

Aufgabe 12/66
Die Summe

$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-2}(n-1)^2 + (-1)^{n-1}n^2$$

soll berechnet werden!

1.) Es sei n eine gerade Zahl. Dann ist

$$s_n = (1^2-2^2)+(3^2-4^2)+...+[(n-1)^2-n^2] = -3-7-11-...-(2n-1) = -(3+7+11+...+(2n-1)) =$$

$$= -\frac{1}{2}[(3+(2n-1)] \cdot \frac{n}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}$$

2.) Es sei n eine ungerade Zahl. Dann ist $s_n = s_{n-1} + n^2$, wobei n-1 eine gerade Zahl ist. Auf sie kann man das Ergebnis von 1.) anwenden: $s_n = -\frac{(n-1)n}{2} + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$.
Fasst man beide Ergebnisse zusammen, so folgt

$$s_n = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

Beachtet man, dass rechts, abgesehen vom Vorzeichen, die Summenformel der natürlichen Zahlen steht, so erhält man das Ergebnis in der Form $1^2 - 2^2 + 3^3 - 4^2 + ... \pm n^2 = \pm(1 + 2 + ...n)$.

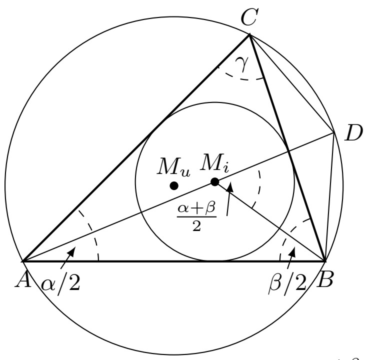
Aufgabe 13/66
Man beweise, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für dass $z = x^y - 4$ eine Primzahl ist, wenn y eine gerade Zahl ist!

Es sei $y = 2k$ mit $k = 1, 2, 3, ...$ Dann ist

$$x^y - 4 = x^{2k} - 4 = (x^k + 2)(x^k - 2) = z$$

Da z Primzahl sein soll, muss einer der beiden Faktoren gleich 1 und der andere gleich z sein. Da $x^k \geq 1$ ist, muss also gelten $x^k - 2 = 3$ oder $x^k = 3$, also $x = 3$ und $k = 1$.
Das heißt, nur das Paar $x = 3, y = 2$ liefert für z eine Primzahl.

Aufgabe 14/66
Von einem Dreieck ABC sind festgelegt der Eckpunkt A, der Mittelpunkt M_i des Inkreises und der Mittelpunkt M_u des Umkreises. Das Dreieck ist zu konstruieren.



Analysis: Der Punkt liege erstens auf dem Umkreis des Dreiecks und zweitens auf der Winkelhalbierenden w_α. Auf der Winkelhalbierenden w_α liegt auch M_i, da die Seiten b und c Tangenten an den Inkreis sind.

Wegen $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$ ist $BD = CD$ (zu gleichen Peripheriewinkeln gehören im selben Kreis auch gleiche Sehnen). Weiter ist $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$ (Peripheriewinkel über derselben Sehne) und $\angle CBM_i = \angle ABM_i = \frac{\beta}{2}$ (M_i liegt auch auf der Winkelhalbierenden w_β).

Aus beidem folgt $\angle BM_iD = \frac{\alpha+\beta}{2}$ (Außenwinkel im Dreieck ABM_i) und $\angle ABD = \beta + \frac{\alpha}{2}$ (nach dem Winkelsummensatz, Dreieck ABD), also $\angle DBM_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$, d.h., das Dreieck BDM_i ist gleichschenklig: $BD = M_iD$. Aus $BD = CD$ folgt unmittelbar $CD = M_iD$.

Konstruktion: Um den Punkt M_u schlägt man mit dem Radius $M_uA = r_u$ einen Kreis. Durch A und M_i legt man eine Gerade, die den Kreis um M_u in D schneidet. Um D schlägt man einen Kreis mit DM_i als Radius. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Umkreis (Kreis um M_u) sind die Punkte B und C.

Determination: Ist $M_uMi < M_uA$, d.h. der Inkreismittelpunkt liegt innerhalb des Umkreises, so ist das Dreieck ABC (bis auf die Bezeichnung) eindeutig konstruierbar. Ist speziell $M_i = M_u$, so ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck. Ist $M_uMi \geq M_uA$, so ist das Dreieck ABC nicht konstruierbar.

Aufgabe 15/66
Für die Berechnung der Quadratwurzel aus einer Zahl $z = p^2 + a$ mit $0 \leq a \leq 2p + 1$ gilt die Näherungsformel

$$\sqrt{z} = \sqrt{p^2 + a} \approx p + \frac{a}{2p + 1}$$

Wir groß ist der maximale Fehler dieser Näherung in Abhängigkeit von a? Wie ändert sich dieser in Abhängigkeit von p?

Es sei $\sqrt{z} = \sqrt{p^2 + a} = p + \frac{a}{2p+1} + \epsilon$, also

$$\epsilon = f_1(a) = \sqrt{p^2 + a} - \frac{a}{p + 1} - p$$

(mit $p =$ konstant). Daraus folgt

$$\epsilon' = f_1'(a) = \frac{2}{\sqrt{p^2 + a}} - \frac{1}{2p + 1}$$

$$\epsilon'' = f_1''(a) = -\frac{1}{4(p^2+a)\sqrt{p^2+a}} < 0$$

(für jedes $a \geq 0$). Also liefert die Lösung der Gleichung $\epsilon' = 0$ die Maxima. Es ergibt sich $a = p + \frac{1}{4}$ und damit $\epsilon_{max} = \frac{1}{4(2p+1)} = f_2(p)$.
Man erkennt, dass ϵ_{max} mit wachsendem p sich immer mehr der Null nähert, es ist

$$\lim_{p\to\infty} \epsilon_{max} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{4(2p+1)} = 0$$

Wie leicht zu sehen ist, hat ϵ Minima an den Grenzen des Definitionsintervalls $\epsilon_{min_1} = 0$ für $a = 0$ und $\epsilon_{min_2} = 0$ für $a = 2p+1$.

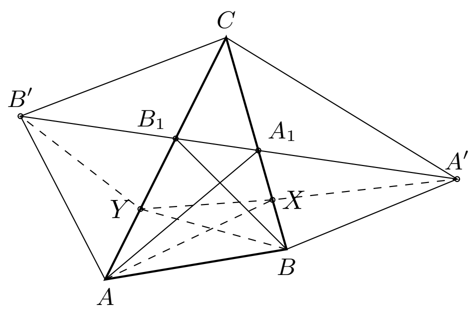
Aufgabe 16/66
In der Zeitung "Neues Deutschland" vom 29. Juni 1965 fand sich folgende Notiz:
Als dieser Tage ein Kleintierhalter in Christdorff im Kreis Wittstock ein Huhn schlachtete, gab es neben dem Sonntagsbraten auch noch eine Summe Bargeld als Zusatz. Im Magen des Huhns befanden sich 17 Münzen, insgesamt 34 Pfennig ...
Angenommen, es handelte sich um Münzen, die gegenwärtig im Umlauf sind. Welche Münzen waren es in welcher Anzahl?

Die Aufgabe führt auf eine leicht lösbare diophantische Gleichung. Bezeichnet man die Anzahl der 10-Pf-Stücke mit x, die der 5-Pf-Stücke mit y und die der 1-Pf-Stücke mit z (größere Münzen kommen nicht in Frage), so ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$x + y + z = 17 \qquad , \qquad 10x + 5y + z = 34$$

wobei x, y und z natürliche Zahlen bedeuten. Subtrahiert man die erste von der zweiten Gleichung, so ergibt sich $9x + 4y = 17$.
Da 17 nicht durch 4 teilbar ist, muss $x > 0$ sein, da $y \geq 0$ ist, muss $x < 2$ sein. Also ist $x = 1$. Durch Einsetzen dieses Wertes ergibt sich $y = 2$ und schließlich $z = 14$. Es handelte sich demnach um 1 10-Pf-Stück, 2 5-Pf-Stücke und 14 1-Pf-Stücke. Die Probe bestätigt die Richtigkeit dieser Lösung.

Aufgabe 17/66
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Wie lang ist der kürzeste der Streckenzüge $AXYB$, wobei X ein beliebiger Punkt im Innern der Strecke BC und Y ein beliebiger Punkt im Innern der Strecke AC ist?



Man spiegele A an BC und nenne den Bildpunkt A'. Weiter spiegele man B an AC und nenne den Bildpunkt B' (siehe Abbildung). Die Gerade durch A' und B' schneide AC in B_1 und BC in A_1.
Der Symmetrie wegen wird $B'Y = YB$ und $A'X = XA$, Folglich haben die Streckenzüge $AXYB$ und $A'XYB'$ die gleiche Länge. Da offensichtlich $A'XYB'$ für $X = A_1$ und $Y = B_1$ die minimale Länge s_{min} besitzt, kann nur AA_1BB_1 der gesuchte kürzeste Streckenzug sein.

Wegen $B'C = BC = a, A'C = AC = b$ und $\angle B'CA' = 3\gamma$ wird für $\gamma < 60°$ laut Kosinussatz

$$s_{min} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 3\gamma}$$

AA_1BB_1 sind jedoch dann und nur dann der gesuchte Streckenzug, wenn die Schnittpunkte A_1 und B_1 auf den Seiten BC und AC liegen. Man kann zeigen, dass das der Fall ist, wenn $90° - \alpha < 2\gamma < 120°$ gilt.

Interessant sind die Grenzfälle $2\gamma = 120°$ und $2\gamma = 90° - \alpha$. Im ersten Fall wird $A_1 = B_1 = C$, der minimale Streckenzug verläuft nicht mehr im Inneren des Dreiecks, sondern er entartet zum Streckenzug ACB mit der Länge $a + b$. Dieser Grenzfall folgt auch aus der Gleichung für s_{min}, wenn man in ihr $\gamma = 60°$ setzt. Im anderen Fall wird $A_1 = B$ und $\angle AB_1B = 90°$. Der minimale Streckenzug ABB_1B ist ebenfalls keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung, sondern wiederum ein Grenzfall. Seine Länge beträgt $c(1 + 2\sin\alpha)$.

Aufgabe 18/66
Zeichnet man über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC gleichseitige Dreiecke nach außen und verbindet man die dadurch entstehenden Eckpunkte mit den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks, so gelten für die Verbindungsstrecken die folgenden Sätze:

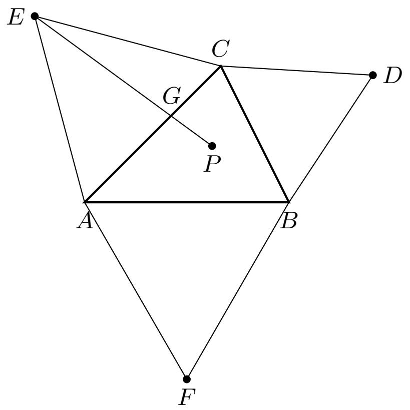
1. Die drei Verbindungsstrecken sind gleich lang.
2. Die drei Verbindungsstrecken schneiden einander unter Winkeln von je 60°.
3. Die drei Verbindungsstrecken schneiden einander in einem einzigen Punkt im Innern des Dreiecks.

Diese Sätze sind zu beweisen.

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung auf der nächsten Seite.

1. Beweis von Satz 1 - Es ist $\Delta ACD \cong \Delta ECB$
nach sws; AC = EC, CD = CB nach Konstruktion, $\measuredangle ACD = \measuredangle ECB = \measuredangle ACB + 60°$, wegen $\measuredangle ACE = \measuredangle BCD = 60°$.
Damit ist auch $AD = BE$. Analog beweist man mit Hilfe der Dreiecke ADB und CDF, dass $AD = CF$, bzw. mit Hilfe der Dreiecke AEB und CAF, dass $EB = CF$ ist. Also gilt der Satz 1.

2. Beweis von Satz 2 - Es ist $\Delta APG \sim \Delta DEG$
nach Hauptähnlichkeitssatz, $\measuredangle GAP = \measuredangle GEC$ wegen $\Delta ACD \cong \Delta ECB$, $\measuredangle AGP = \measuredangle EGP$ als Scheitelwinkel.
Daraus folgt $\measuredangle AGF = \measuredangle ECG = 60°$. Demnach schneiden AD und BE einander unter einem Winkel von 60°. Analog beweist man, dass auch AD und CF bzw. BE und CF einander unter einem Winkel von 60° schneiden. Also gilt der Satz 2.



3. Beweis von Satz 3 - Es ist $\measuredangle CAD = \measuredangle CAD = \measuredangle CEB = \measuredangle CEP$ (wegen $\Delta ACD \cong \Delta ECB$).
Demnach sind die Winkel CAP und CEP nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes Umfangswinkel desselben Kreises über der Sehne PC. Damit sind aber auch die Winkel EAC und EPC Umfangswinkel desselben Kreise über der Sehne EC.
Also folgt $\measuredangle EPC = \measuredangle EAC = 60°$.
Weiter ist $\measuredangle ABP = 120°$ (Nebenwinkel zu $\measuredangle EPA = 60°$) und $\measuredangle AFB = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck), also $\measuredangle APB + \measuredangle AFB = 180°$.

Das heißt, das Viereck $APBF$ ist ein Sehnenviereck. Damit folgt $\measuredangle ABF = \measuredangle APF$. Aus $\measuredangle APF = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) folgt somit $\measuredangle ABF = 60°$.

Da $\measuredangle APF = \measuredangle APE = \measuredangle EPS = 60°$ ist, muss der Streckenzug CPF auf einer Geraden liegen. Das heißt aber, dass die Verbindungsstrecke CF die Verbindungsstrecken BE und AD in deren Schnittpunkt P schneidet. Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

Aufgabe 19/66
Man beweise: Die letzten beiden Ziffern der Quadrate zweier natürlicher Zahlen, für die gilt $a \pm b = 50n$ mit $n = 1, 2, 3,...$ stimmen überein.

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit sei $a \geq b$. Aus $a \pm b = 50n$ folgt $\pm b = 50n - a \to b^2 = 2500n^2 - 100an + a^2$.
Durch einfache Umformung erhält man daraus $a^2 - b^2 = 100n(a - 25n)$. Die Differenz der Quadrate a und b ist also durch 100 teilbar. Demnach haben die beiden Quadrate gleiche Zehner und gleiche Einer.

Aufgabe 20/66
Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b ist in einen flächengleichen Kreis umzuformen.

Der Flächeninhalt der Ellipse ist $ab\pi$, der des gesuchten Kreises ist $r^2\pi$. Es gilt also

$$ab\pi = r^2\pi \qquad \text{oder} \qquad r^2 = ab; \qquad r = \sqrt{ab}$$

Der gesuchte Radius ist demnach gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden Halbachsen. Die Aufgabe besteht also darin, ein Rechteck mit den Seiten a und b in ein flächengleiches Quadrat mit der Seite r zu verwandeln. Das ist mit Hilfe des Höhensatzes (oder auch mit Hilfe des Satzes von Euklid) möglich.
Man trägt auf einer Geraden die Strecken $AB = a$ und $BC = b$ ab, schlägt über $AC = a+b$ den Halbkreis und errichtet in B die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis sei D.
Das Dreieck ACD ist nach dem Satz des Thales rechtwinklig bei D, BD ist Höhe auf die Hypotenuse in diesem Dreieck. Nach dem Höhensatz ist die Höhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mittlere Proportionale zu den beiden Hypotenusenabschnitten. Also gilt

$$BD^2 = AB \cdot BC = ab \qquad \text{oder} \qquad BD = \sqrt{ab} = r$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 21/66
Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$xy(x+y) = 20 \qquad , \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}$$

Dem gegebenen System äquivalent ist das System

$$xy(x+y) = 20 \qquad , \qquad x+y = \frac{5}{4}xy$$

Mit $x+y = a_1, xy = a_2$ nimmt es die Gestalt $a_1a_2 = 20$, $a_1 = \frac{5}{4}a_2$ an. Durch Einsetzen folgt $a_1 = \pm 5, a_2 = \pm 4$. Damit hält man die beiden Systeme

$$x+y = 5, xy = 4 \qquad , \qquad x+y = -5, xy = -4$$

Wegen $x \neq 0$ ergibt sich nach Einsetzen als Lösungen: $x_{11} = 4, y_{11} = 1$; $x_{12} = 1, y_{12} = 4$; $x_{21} \approx 0{,}7, y_{21} \approx -5{,}7$; $x_{22} \approx -5{,}7, y_{22} \approx -0{,}7$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 22/66
Man beweise: Sind a, b und c drei nicht negative, voneinander verschiedene Zahlen, so gilt stets

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Man kann die Behauptung auch in der Form $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc > 0$ schreiben. Nun besteht die Identität

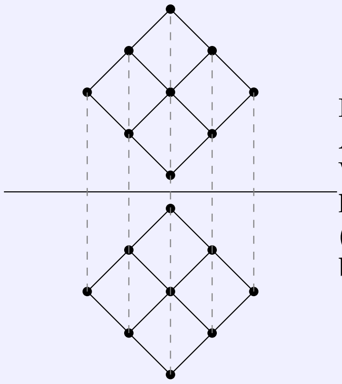
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c+)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

wovon man sich durch Ausmultiplizieren leicht überzeugt. Des weiteren ist

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2) = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

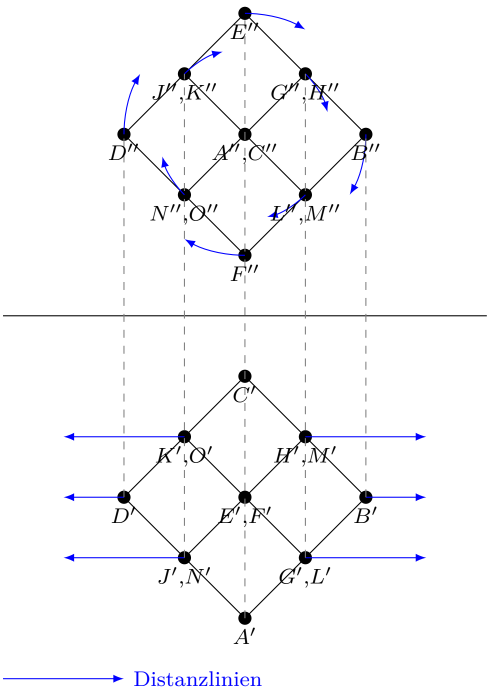
Der letzte Ausdruck ist aber sicher größer als null, da wegen der für a, b und c getroffenen Voraussetzung jeder einzelne Faktor größer als null ist.
Bei den durchgeführten Umformungen wurden nur eindeutig umkehrbare Rechenoperationen verwendet. Daher folgt umgekehrt aus der letzten Feststellung die Behauptung.

Aufgabe 23/66

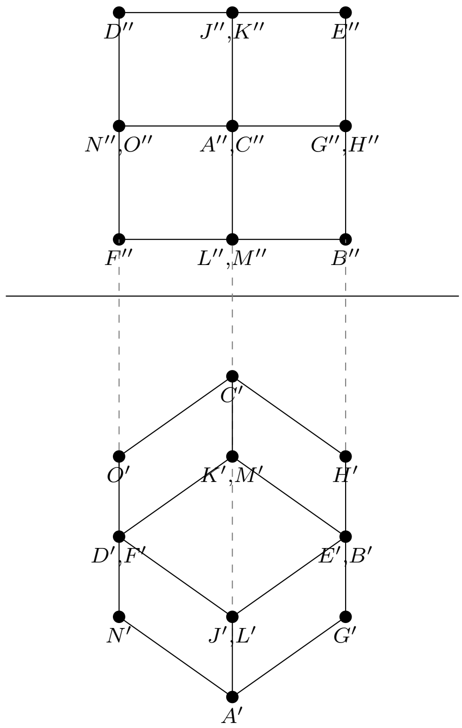


Der in der Abbildung im Zweitafelbild dargestellte Körper soll um eine Achse, die senkrecht auf der Aufrisstafel steht, um 45° gedreht werden. Wie sieht das Zweitafelbild nach der Drehung aus? Um welchen Körper handelt es sich?
(Stellt man sich den Körper als Drahtmodell vor, so werden alle "hinten" bzw. "unten"liegenden Kanten in den Rissen verdeckt.)

Wir stellen uns den Körper als Drahtmodell vor. In die gegebenen Risse (Abbildung) werden Punktsymbole eingetragen. Der Originalpunkt A z.B. ergibt den Grundriss A' und den Aufriss A''. Die Symbole für verdeckte Punkte werden an die zweite Stelle gesetzt. So wird z.B. im Grundriss Punkt F von Punkt E verdeckt.
Der Körper soll nun um eine Achse, die senkrecht auf der Aufrisstafel steht, um 45° gedreht werden. Nun kann man ohne weiteres den Aufriss drehen, weil sich alle Verschiebungen auf Bahnen vollziehen, die parallel zur Aufrisstafel liegen.
Bezüglich der Grundrisstafel ist der Sachverhalt anders; wegen der genannten Verschiebungseigenschaft bleiben die Abstände der Risse von der Aufrisstafel erhalten.



Infolgedessen bewegen sich die Grundrisse der Punkte auf Distanzlinien parallel zur Rissachse; die Schnittpunkte der Ordnungslinien aus dem (neuen) Aufriss mit diesen Distanzlinien liefern die Grundrisse der Punkte.



Dabei kann man die folgende wichtige Feststellung treffen:
Betrachtet man die Risse der Fläche $DKEJ$, so stellt man fest, dass im Grundriss der zweiten Abbildung die Fläche $DKEJ$ in wahrer Größe und Gestalt vom Riss $D'K'E'J'$ wiedergegeben wird; sie ist offenbar ein Rhombus. Da nun alle anderen in der Abbildung dargestellten Flächen die gleichen Projektionseigenschaften zeigen, müssen sich auch die Original gleichen. Das heißt, alle Seitenflächen sind Rhomben, im ganzen 12.
Ergebnis: der Körper ist ein Rhombendodekaeder.

Aufgabe 24/66
Beweis, dass $\pi = 1$ ist: Es wird das Integral $I = \int \frac{dx}{x \ln x^\pi}$ auf zwei Arten bestimmt.

1. Substitution $t = \ln x^\pi, dx = \frac{x}{\pi} dt$. Es ergibt sich
$$\int \frac{dx}{x \ln x^\pi} = \int \frac{xdx}{\pi x t} = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi} \ln |t| + C = \frac{1}{\pi} \ln |\ln x^\pi| + C$$

2. Substitution $t = \ln x, dx = xdt$. Es ergibt sich
$$\int \frac{dx}{x \ln x^\pi} = \int \frac{dx}{\pi x \ln x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi} \ln |t| + C = \frac{1}{\pi} \ln |\ln x| + C$$

Demnach ist $x^\pi = x$, also $\pi = 1$. Wo steckt der Fehler?

Der Fehler beruht darauf, dass die beiden unbestimmten Integrationskonstanten gleichgesetzt wurden. Es muss richtig heißen
$$\int \frac{dx}{x \ln x^\pi} = \frac{1}{\pi} \ln |\ln x^\pi| + C_1 = \frac{1}{\pi} \ln |\ln x| + C_2$$
Dann folgt aus dieser Gleichung
$$C_1 - C_2 = \frac{1}{\pi} \ln |\ln x| - \frac{1}{\pi} \ln |\ln x^\pi| = \frac{1}{\pi} \ln \frac{|\ln x|}{|\ln x^\pi|} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{|\ln x|}{\pi |\ln x|} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\pi}$$
Die beiden Konstanten C_1 und C_2 unterscheiden sich also um einen konstanten Wert.

Aufgabe 25/66
Welches ist das größte Vielfache von 11, in dem keine der Zehn mehr als einmal vorkommt?

Sollen alle zehn Ziffern genau einmal vorkommen, so muss die Zahl zehnstellig sein und die Quersumme 45 haben. Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus der Summe x der geradstelligen Ziffern und der Summe y der ungeradstelligen Ziffern gleich null oder einem Vielfachen von 11 ist. Man hat also das Gleichungssystem
$$x + y = 45 \qquad ; \qquad x - y = 11k$$
mit $k = 0; \pm 1; \pm 2, ...$ in positiven ganzen Zahlen zu lösen. Es ergibt sich
$$x = \frac{45 + 11k}{2} \qquad ; \qquad y = \frac{45 - 11k}{2}$$
Daraus folgt: 1. k ist ungerade; 2. $|k| < 5$ (da sonst entweder x oder y negativ würde). Also kommen nur die Werte $k = \pm 1$ und $k = \pm 3$ in Frage.
I. $k = \pm 1$ liefert $x = 28, y = 17$ bzw. $x = 17, y = 28$.
II. $k = \pm 3$ liefert $x = 39, y = 6$ bzw. $x = 6, y = 39$.
Fall II ergibt keine brauchbare Lösung, da fünf verschiedene Ziffern stets eine Summe ergeben, die größer als 6 ist.

Man muss also (Fall I) die zehn Ziffern so in zwei Fünfergruppen aufteilen, dass die eine die Summe 28, die andere die Summe 17 ergibt. Die gesuchte größte Zahl wird sich dann ergeben, wenn man die Ziffern in jeder Gruppe nach fallender Größe (von links her) ordnet und bei der geradstelligen Gruppe möglichst viele ungerade, bei der ungeradstelligen Gruppe möglichst viele gerade Ziffern verwendet (wobei die Stellen von der Einerstelle aus gezählt wurden):
geradstellige Gruppe: 9 7 5 4 3
ungeradstellige Gruppe: 8 6 2 1 0
gesuchte Zahl: 9 8 7 6 5 2 4 1 3 0

Aufgabe 26/66
Eine Fläche, die sich aus einem Rechteck mit den Seiten a und b und einem Halbkreis mit dem Radius $r = \frac{b}{2}$ zusammensetzt, habe einen Flächeninhalt $A = 100$ cm^2.
Ohne Benutzung der Differentialrechnung ermittle man die Seiten a und $b = 2r$ so, dass der Umfang der Fläche minimal wird. Wie groß ist U_{min}?
(Der Halbkreis grenzt mit seiner geraden Begrenzungslinie an die Seite b des Rechtecks an.)

Es ist $A = ab + \frac{\pi}{8}b^2$ und $U = 2a + b + \frac{\pi}{2}b$. Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Variable a, so erhält man für die Variable b die quadratische Gleichung

$$b^2 - \frac{4U}{4+\pi}b + \frac{8A}{4+\pi} = 0$$

Die Bedingung für die Existenz einer reellen Lösung lautet

$$D = \frac{4U^2 - 8A(4+\pi)}{(4+\pi)^2} \geq 0$$

Daraus folgt $U^2 \geq 2A(4+\pi)$ und $U_{min} = \sqrt{2A(4+\pi)} \approx 37{,}8$ cm (Rechenstabgenauigkeit). Die quadratische Gleichung für b hat dann die Doppellösung (entsprechend für a):

$$b = \frac{2U_{min}}{4+\pi} = 2\sqrt{\frac{2A}{4+\pi}} \approx 10{,}58 \text{ cm}; \qquad a = \frac{U_{min}}{4+\pi} = \sqrt{\frac{2A}{4+\pi}} \approx 5{,}29 \text{ cm}$$

Anmerkung: Man hätte anfangs auch b eliminieren können und hätte so eine quadratische Gleichung für a erhalten, die zum selben Ergebnis geführt hätte.

Aufgabe 27/66
Welche Bedingungen müssen die Diagonalen eines ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt S erfüllen, wenn die Flächensumme der Dreiecke ABS und DSC gleich der Flächensumme der Dreiecks BCS und ASD sein soll?

Werden die Diagonalabschnitte folgendermaßen bezeichnet: $AS = w; BS = x; CS = y; DS = z$, ist ferner $F(ABS) = A_1; F(BSC) = A_2; F(CSD) = A_3; F(DSA) = A_4$ und $\angle ASB = \rho$, so gilt

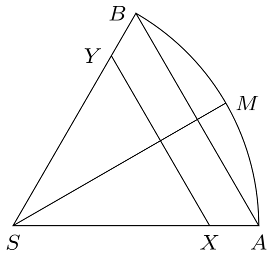
$$A_1 = \frac{1}{2}wx \sin\rho \qquad ; \qquad A_2 = \frac{1}{2}xy \sin 180° - \rho = \frac{1}{2}xy \sin\rho$$

$$A_3 = \frac{1}{2}yz \sin\rho \qquad ; \qquad A_4 = \frac{1}{2}wz \sin 180° - \rho = \frac{1}{2}wz \sin\rho$$

$$A_1 + A_3 = \frac{1}{2}\sin\rho(wx + yz) \qquad ; \qquad A_2 + A_4 = \frac{1}{2}\sin\rho(xy + wz)$$

Ist nun $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$, so folgt, dass $wx + yz = xy + wz$ sein muss (da $\rho \neq 0°$ und $\rho \neq 180°$, ist auch $\sin\rho \neq 0$). Eine Umformung ergibt $(w - y)(x - z) = 0$.
Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $w = y$ oder wenn $x = z$ ist, d.h., wenn mindestens eine der beiden Diagonalen durch S halbiert wird.
Aus $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ folgt also $w = y$ oder $x = z$. Da alle durchgeführten Operationen eindeutig umkehrbar sind, folgt umgekehrt aus $w = y$ oder aus $x = z$, dass $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ ist. Die Bedingung, dass mindestens eine der beiden Diagonalen die andere halbiert, ist demnach zugleich notwendig und hinreichend dafür, dass die beiden Flächensummen einander gleich sind.

Aufgabe 28/66
Ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\frac{\pi}{3}$ werde so durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierende geteilt, dass der Umfang des einen Teils gleich dem Umfang des anderen Teils ist.
Welcher der beiden Teile hat den größeren Flächeninhalt?



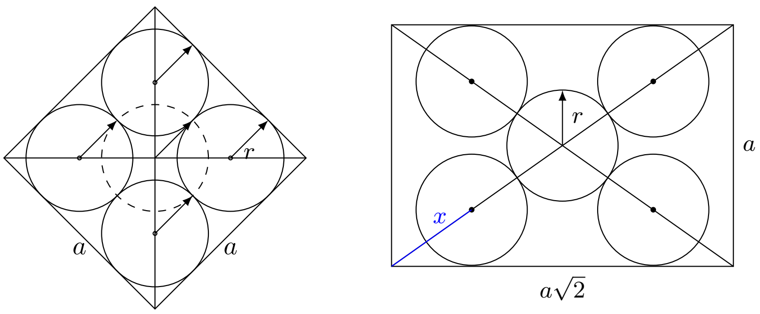
Zunächst wird die Lage der Senkrechten XY zur Winkelhalbierenden SM festgestellt. Für sie gibt es drei Möglichkeiten (Abbildung): Entweder schneidet XY den Kreisbogen, oder XY fällt mit AB zusammen, oder XY schneidet die Schenkel des Zentriwinkels.
Im Falle der Übereinstimmung von XY und AB müsste der Umfang des gleichseitigen Dreiecks SAB mit $AB = BS = SA = r$ dem Umfang des Kreissegments AMB gleich sein. Die Nachrechnung ergibt, dass der Dreiecksumfang größer ist als der Segmentumfang. Daraus folgt zugleich, dass XY den Kreisbogen nicht schneiden kann; durch Verschieben der Senkrechten in Richtung auf M würde nämlich der kleinere Umfang weiter verkleinert, der größere dagegen vergrößert werden.

Also schneidet XY die Schenkel SA und SB, so dass das gleichseitige Dreieck SXY mit den Seiten $SX = XY = YS = x$ entsteht.
Soll der Umfang der beiden Teilfiguren gleich sein, so muss gelten $3x = 2(r-x)+x+\frac{\pi}{3}r$. Durch Auflösen dieser Gleichung nach x erhält man $x = \frac{r}{12}(6+\pi)$. Die Flächeninhalte sind

$$A_1 = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{576}r^2(6+\pi)^2\sqrt{3} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{1}{6}\pi r^2 - A_1 = \frac{1}{576}r^2[96\pi - (6+\pi)^2]\sqrt{3}$$

Die Ausrechnung zeigt, dass $A_1 < A_2$ ist.

Aufgabe 29/66
In einem Würfel mit der Kantenlänge a sind neun möglichst große gleiche Kugeln derart einzulagern, dass eine davon als Mittelpunkt den Schnittpunkt der Körperdiagonalen hat, während die übrigen acht in die Ecken des Würfels gelegt werden.
Wie groß ist der Durchmesser d der Kugeln, ausgedrückt durch die Würfelseite a?



Auf einer Körperdiagonale des Würfels müssen die Mittelpunkte der Zentralkugel und der zwei Kugeln liegen, die entgegengesetzte Ecken füllen. In der Abbildung sind ein Schnitt durch den Würfel, der zwei Körperdiagonalen enthält, und die Draufsicht auf den Würfel dargestellt.
Die Länge der Körperdiagonale ist $a\sqrt{3}$. Aus dieser Abbildung liest man die Gültigkeit der folgenden Gleichungen ab:

$$r : x = a : a\sqrt{3} \quad (1) \qquad 4r + 2x = a\sqrt{3} \quad (2)$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach r durch Substitution von $x = r\sqrt{3}$ (aus Gleichung I) auf, so erhält man

$$r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{a}{2}(2\sqrt{3}-3) \approx 0{,}232a$$

Daraus folgt unmittelbar $d = a(2\sqrt{3}-3) \approx 0{,}464a$.

Aufgabe 30/66
Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$$

Man gebe $f(x+1)$ als Polynom in x an.

Das Polynom stellt eine endliche geometrische Reihe mit $a = 1, q = x$ und $n+1$ Gliedern dar, es ist also

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Daraus folgt

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{x}$$

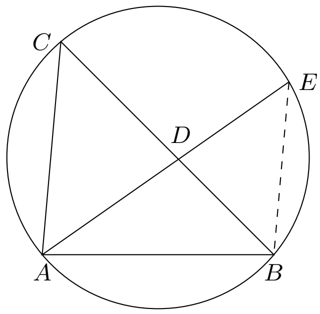
Entwickelt man den Zähler nach dem binomischen Satz folgt

$$f(x+1) = \frac{1}{x}\left[x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n + \binom{n+1}{2}x^{n-1} + ... + \binom{n+1}{n}x\right] =$$

$$= x^n + \binom{n+1}{1}x^{n-1} + \binom{n+1}{2}x^{n-2} + ... + \binom{n+1}{n}$$

Damit ist die gesuchte Darstellung gefunden.

Aufgabe 31/66
Ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$ und g eine beliebige Gerade durch A, die BC oder die Verlängerung von BC in D und den Umkreis des Dreiecks in E schneidet, so ist stets $AD \cdot AE = AB^2 = AC^2$.
Dieser Satz ist zu beweisen.



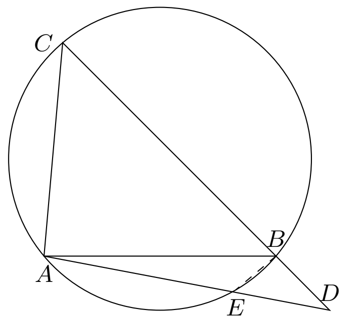
Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. Der Punkt D liegt auf der Strecke BC. Es ist (1. Abbildung) $\angle ACB = \angle ABC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck), $\angle AEB = \angle ACB$ (Peripheriewinkel über demselben Bogen). Demnach gilt $\triangle\ ABC \sim \triangle\ AEB$. Daraus folgt unmittelbar

$$AD : AB = AB : AE \quad \text{oder} \quad AD \cdot AE = AB^2 = AC^2$$

2. Der Punkt D liegt auf der Verlängerung der Strecke BC über B hinaus (liegt D auf der Verlängerung der Strecke BC über C hinaus, so verläuft der Beweis analog). Es ist $\angle ACB = 180° - \angle AEB$ (nach dem Satz über Periphere- und Zentriwinkel), $\angle ABD = 180° - \angle ACB$ (Außenwinkelsatz). Daraus folgt $\angle AEB = \angle ABD$ und $\triangle\ ABD \sim \triangle\ AEB$ und damit wieder

$$AD : AB = AB : AE \quad \text{oder} \quad AD \cdot AE = AB^2 = AC^2$$

Die Spezialfälle $E = B$ und $E = C$ sind trivial, da in diesem Fällen auch $D = B$ und $D = C$ gilt.



Aufgabe 32/66
Eine elektrischer Heizofen enthält zwei Widerstände R_1 und R_2, die in vier Schaltstufen A, B, C und D geschaltet werden können.
In der Stufe A werden R_1 und R_2 parallel geschaltet, in den Stufen B und C ist je einer der beiden Widerstände in Betrieb, in der Stufe D liegen R_1 und R_2 in Reihe.
Die Widerstände sollen so bemessen werden, dass bei einer Spannung von 22 V eine maximale Leistung von 6000 W auftritt und die Leistungen in den verschiedenen Stufen eine geometrische Folge bilden.
Wie groß müssen die Widerstände sein und welche Leistungen treten bei den einzelnen Schaltstufen auf?

Es ist $N = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$, wobei mit N die Leistung, mit U die Spannung, mit I die Stromstärke und mit R der Widerstand bezeichnet wird. Daraus folgt für die maximale Leistung

$$N_{max} = U^2 \cdot \frac{1}{R_{min}} \quad \text{oder} \quad R_{min} = \frac{U^2}{N_{max}} = \frac{220^2}{6000}\Omega$$

Nach dem Kirchhoffschen Gesetz über die Stromverzweigung ergibt sich R_{min} bei Parallelschaltung von R_1 und R_2 zu

$$R_{min} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{also} \quad R_{min} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{220^2}{6000}\Omega$$

Es sei nun $N_{max} = N_A = aN_B = a^2 N_C = a^3 N_D$, wobei a der Quotient der geforderten geometrischen Folge ist und der Index bei N die Schaltstufe angibt. Dann ist

$$N_B = \frac{U^2}{R_1}; \quad N_C = \frac{U^2}{R_2}; \quad N_D = \frac{U^2}{R_1 + R_2} \qquad \text{oder} \qquad R_1 = \frac{U^2}{N_B} = \frac{aU^2}{N_A}; \quad R_2 = \frac{U^2}{N_C} = \frac{aU^2}{N_D}$$

und damit folgt aus der Gleichung für R_{min} durch Einsetzen und Vereinfachen $a^2 - a - 1 = 0$ oder $a = 0{,}5(1 + \sqrt{5})$. Aus den Gleichungen kann man nun die Widerstände R_1 und R_2 berechnen:

$$R_1 = \frac{220^2 \cdot 0{,}5(1 + \sqrt{5})}{6000} \approx 13\Omega \quad , \quad R_2 = \frac{220^2 \cdot 0{,}5^2(1 + \sqrt{5})^2}{6000} \approx 21{,}1\Omega$$

Für die Leistungen wird $N_B \approx 3710$ W, $N_C \approx 2290$ W, $N_D \approx 1420$ W. Es zeigt sich, dass die Leistungsstufen eine zusätzliche Beziehung aufweisen: $N_B = N_C + N_D$ und $N_A = N_B + N_C$.

Aufgabe 33/66
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen z mit $100 \leq z < 1000$, die folgende Eigenschaft haben:
Bei jeder beliebigen Potenz z^k mit natürlichem k werden die letzten drei Stellen von den Ziffern von z in derselben Reihenfolge gebildet.

Nach den Forderungen der Aufgabe muss für jedes natürliche k gelten $z^k = 1000n + z$ (wobei n eine natürliche Zahl ist).
Daraus folgt $z^k - z = 1000n$, das heißt, $z^k - z$ ist durch 1000 teilbar. Nun ist $z^k - z$ sowohl durch z als auch durch $z - 1$ teilbar (wenn $k > 1$; dies folgt aus der Tatsache, dass $z = 0$ und $z = 1$ Nullstellen des Polynoms $z^k - z$ sind).
Da dies für jedes $k > 1$ gilt, gilt es speziell auch für $k = 2$, woraus folgt, dass $z(z - 1)$ bereits durch 1000 teilbar ist.
Zu suchen sind also alle Produkte aus zwei aufeinanderfolgenden dreistelligen natürlichen Zahlen, die durch 1000 teilbar sind.
Es ist $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Da z und $z - 1$ aufeinanderfolgende Zahlen sind, ist eine von ihnen gerade, die andere ungerade. In einer von ihnen ist also sicher der Faktor $2^3 = 8$ enthalten. Da die zweite sicher mindestens durch 5 teilbar ist, kommen für sie nur Zahlen mit der Endziffer 5, für die erste nur Zahlen mit den Endziffern 4 oder 6 (nicht aber 0, 2, 8) in Frage.
Folglich muss die zweite Zahl sogar durch 125 teilbar sein (sonst käme ein Faktor 5 neben Faktoren 2 in der ersten Zahl vor, und die Endziffer wäre damit 0). Als ungerade Zahlen stehen damit nur noch die Zahlen 125, 375, 625 und 875 zur Verfügung, zu denen entweder 124 oder 126 bzw. 374 oder 376, 624 oder 626, 874 oder 876 als gerade Zahlen gehören.
Man überzeugt sich leicht davon, dass unter ihnen nur die Zahlen $z_1 = 376$ mit $z_1 - 1 = 375$ und $z_2 = 625$ mit $z_2 - 1 = 624$ die geforderten Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 34/66
Wieviel Raumdiagonalen hat ein Rhombendodekaeder?

Das Rhombendodekaeder besteht aus 12 begrenzenden Rhomben mit 14 Ecken und 24 Kanten.

1. Rechnerische Lösung: Aus 14 Eckpunkten lassen sich $\binom{14}{2} = 91$ Paare bilden; jedes Paar bestimmt eine Verbindungsstrecke. Also kann man 14 Ecken auf 91 verschiedene Weisen paarweise miteinander verbinden. Von diesen 91 Verbindungen müssen erstens 24 Kanten und zweitens 24 Flächendiagonalen (je Rhombus 2) ausgeschieden werden, es verbleiben also 43 Raumdiagonalen.

2. Anschauliche Lösung: An 6 Ecken stoßen je 4 und an 8 Ecken je 6 Rhomben zusammen. Jede "vierzählige" Ecke E_4 hat 8 Nachbarecken, zu denen keine Raumdiagonalen führen; die restlichen 5 Ecken sind "Fernecken" mit Raumdiagonalen. Damit stellt man zunächst $6 \cdot 5 = 30$ Raumdiagonalen fest.

Entsprechend besitzt jede E_3 6 Nachbar- und 7 Fernecken. Es finden sich also weitere $7 \cdot 8 = 56$ Raumdiagonalen, insgesamt also 86. Damit ist aber offenbar jede Raumdiagonale zweimal erfasst worden, nämlich von jedem Eckpunkt aus; daraus folgt dann, dass das Rhombendodekaeder $\frac{86}{2} = 43$ Raumdiagonalen hat.

Aufgabe 35/66
Es ist zu beweisen: Jede ganze Zahl $n > 1$, die nicht durch 2 oder durch 5 teilbar ist, ist ein Teiler mindestens einer Zahl der Form $10^n - 1$.

Es sei $k > 1$ und k enthalte nicht die Teiler 2 oder 5. Dann ist nach der Theorie der Dezimalbrüche $\frac{1}{k}$ ein reinperiodischer Dezimalbruch mit n-stelliger Periode ($n \geq 1$, ganz):

$$\frac{1}{k} = 0{,}b_1b_2...b_nb_1b_2...b_nb_1b_2...$$

(wobei die Schreibweise auf der rechten Seite der Gleichung die Darstellung des Dezimalbruchs in der üblichen Positionsschreibweise sei, die b_i also nichtnegative ganze Zahlen sind).
Durch Multiplikation mit 10^n ergibt sich

$$10^n \cdot \frac{1}{k} = b_1b_2...b_n{,}b_1b_2...b_nb_1b_2...$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung folgt

$$10^n \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = b_1b_2...b_n = B \qquad \text{mit } B = \frac{10^n - 1}{k}$$

Die letzte Gleichung besagt aber nichts anderes, als dass $10^n - 1$ durch k teilbar ist.

Aufgabe 36/66
Es sei $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ein Polynom n-ten Grades ($n \geq 1$, ganz), und es gelte weiterhin $|a_n| \geq |a_1|$ für $i = 0{,}1{,}2{,}...n$.
Man zeige: Für jede Nullstelle x_0 gilt $|x_0| \leq n$.

Für $x_0 = 0$ ist die Behauptung sicher richtig, daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 \neq 0$ voraussetzen. Nach Voraussetzung soll $P(x_0) = 0$ sein, das heißt aber

$$a_nx_0^n = -(a_0 + ... + a_{n-1}x_0^{n-1}) = -x_0^{n-1}\left(\frac{a_0}{x_0^{n-1}} + \frac{a_1}{x_0^{n-2}} + ... + \frac{a_{n-2}}{x_0} + a_{n-1}\right)$$

Da das Polynom den Grad n tatsächlich haben soll, ist $a_n \neq 0$. Mithin folgt

$$x_0 = -\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_0}{x_0^{n-1}} + ... + a_{n-1}\right); \qquad |x_0| = \left|\frac{1}{a_n}\right| \left(\left|\frac{a_0}{x_0^{n-1}} + ... + a_{n-1}\right|\right)$$

Die Dreiecksungleichung für n Summanden liefert

$$|x_0| \leq \left|\frac{1}{a_n}\right| \left(\left|\frac{a_0}{x_0^{n-1}}\right| + ... + |a_{n-1}|\right)$$

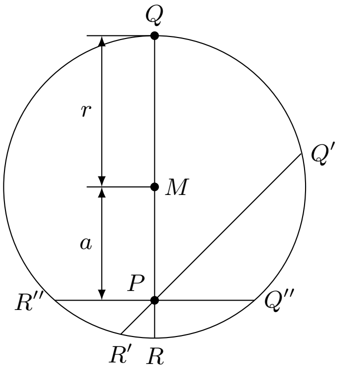
Bei $|x_0| \geq 1$ ist $\left|\frac{1}{x_0^\nu}\right| < 1$ ($\nu > 0$) und damit (da $|a_n| \geq |a_i|$)

$$|x_0| \leq \frac{1}{a_n}(|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|) \leq \frac{1}{a_n}(|a_n| + |a_n| + ... + |a_n|) \leq \frac{n|a_n|}{|a_n|} = n$$

Für $|x| < 1$ ist die Behauptung wegen $n \geq 1$ trivial.

2.7 Aufgaben und Lösungen 1967

Aufgabe 1/67
Unter welchen Voraussetzungen ist die folgende Aufgabe lösbar?
In einem Kreis mit dem Radius r soll durch einen gegebenen Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkt M gleich a ist, eine Sehne gelegt werden, so dass P die Sehne im Verhältnis $m : n$ teilt ($m < n$).



Durch jeden Punkt im Innern des Kreises kann man beliebig viele Sehnen legen. Die größte Sehne durch einen gegebenen Punkt P ist der Durchmesser QR (siehe Abbildung). Sie wird durch P im Verhältnis

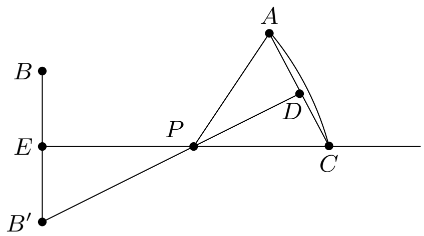
$$PR : PQ = (r - a) : (r + a)$$

geteilt. Dreht man die Sehne um P (ganz gleich, in welchem Sinne), so wird stets $PR' > PR$ und $PQ' < PQ$, also ist $\frac{PR'}{PQ'} > \frac{PR}{PQ}$. Wenn die Sehne durch P senkrecht zum Durchmesser durch P steht, ist $PR'' = PQ''$, und in diesem Falle isr $\frac{PR'}{PQ'} = 1$.

Da aber nach der Aufgabenstellung $m < n$ sein soll, ist $\frac{m}{n} < 1$. Daraus folgt unmittelbar, dass Voraussetzung für die Lösbarkeit der Aufgabe einzig die Gültigkeit der Ungleichung ist:

$$1 > \frac{m}{n} > \frac{PR}{PQ} = \frac{r-a}{r+a}$$

Aufgabe 2/67
Gegeben sind eine Gerade g sowie zwei Punkte A und B, die beide in der gleichen von g begrenzten Halbebene liegen. Man konstruiere einen Punkt P auf g derart, dass die Strecke AP mit g den doppelten Winkel bildet wie die Strecke BP mit g.



Man spiegele den Punkt B an g nach B' und schlage um B' mit dem Radius $B'A$ einen Kreis, der g in C schneidet. Das Lot von B' auf AC schneidet g im gesuchten Punkt P (Abbildung).
Beweis: Nach Konstruktion ist $B'A = B'C$, also Dreieck $AB'C$ gleichschenklig mit der Basis AC. Damit ist das Lot von B' auf AC Symmetrieachse zu AC. Daraus folgt, dass $\measuredangle APD = \measuredangle DPC$ ist. Da g Symmetrieachse zu BB' ist, folgt, dass $\measuredangle BPE = \measuredangle EPB'$ ist.

Ferner ist $\measuredangle EPB' = \measuredangle DPC$ (Scheitelwinkel). Daraus ergibt sich durch Zusammenfassung dieser Gleichungen:

$$\measuredangle APC = 2\measuredangle DPC = 2\measuredangle EPB' = 2\measuredangle EPB$$

Aufgabe 3/67
Man beweise die Identität durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$$

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig: $1^3 = 1^2$.
Die Behauptung sei nun für n richtig, d.h., es gelte

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

Nun gelten die folgenden Beziehungen

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) = (n+1)^2 + n(n+1)(n+1) = (n+1)^2 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) =$$

$$= (n+1)^2 + 2(1+2+3+...+n)(n+1)$$

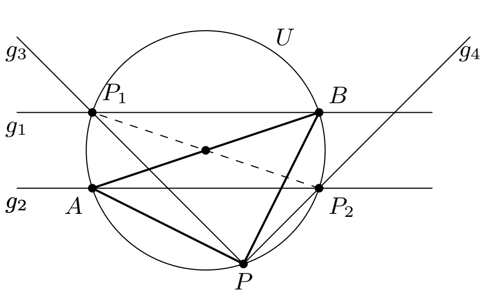
Daraus folgt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (1+2+3+...+n)^2 + 2(n+1)(1+2+3+...+n) + (n+1)^2 =$$

$$= [(1+2+...+n)+(n+1)]^2 \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$$

Damit ist gezeigt: Die Behauptung gilt für $n = 1$. Wenn die Behauptung für ein beliebiges n gilt, so gilt diese auch für $n+1$. Damit gilt die Behauptung für jedes n.

Aufgabe 4/67
Gegeben sind zwei parallele Geraden g_1 und g_2, sowie ein Punkt P, der weder zwischen noch auf diesen Geraden liegt.
Man konstruiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck so, dass P der Scheitelpunkt des rechten Winkels ist und die beiden anderen Eckpunkte je einer auf g_1 und g_2 liegen!



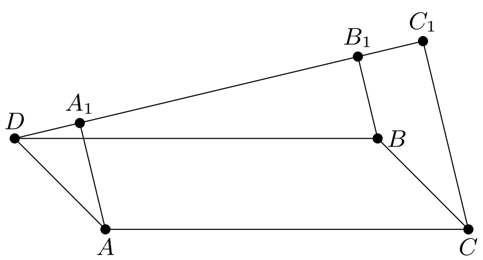
Analysis (siehe Abbildung): Das gesuchte Dreieck sei APB. U sei sein Umkreis. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt $\measuredangle BAP = \measuredangle BDP = 45°$ und $\measuredangle ABP = \measuredangle ACP = 45°$. Daraus ergibt sich unmittelbar die Konstruktion.

Konstruktion: Man ziehe durch P zwei Geraden g_3 und g_4, die g_1 und g_2 unter Winkeln von 45° schneiden. Der Schnittpunkt von g_1 und g_3 sei P_1, der Schnittpunkt von g_2 und g_4 sein P_2.

Über P_1P_2 als Durchmesser schlägt man einen Kreis, der g_1 außer in P_1 in B und g_2 außer in P_2 in A schneidet. Das Dreieck ABP ist das gesuchte.
Determination: Die Konstruktion ist bis auf Symmetrie eindeutig und stets ausführbar.

Aufgabe 5/67
Gegeben sind drei Punkte A, B, C, die nicht sämtlich auf der gleichen Geraden liegen. Man konstruiere einen vierten Punkt D, der die folgende Eigenschaft hat:
Legt man durch D eine beliebige Gerade und fällt man auf sie die Lote von den gegebenen Punkten und bezeichnet man die Fußpunkte dieser Lote mit A', B' und C', so ist $DC' = DA' + DB'$.

Der gesuchte Punkt D ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $ABCD$, und zwar der dem Punkt C gegenüberliegende (Abbildung).
Beweis: Ist $DA \parallel BC$ und $DA = BC$, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Dann ist aber auch $DA' = B'C'$ (Projektionen gleichlanger paralleler Strecken auf dieselbe Gerade sind gleichlang). Wegen $DC' = DB' + B'C'$ ist dann aber $DC' = DB' + DA'$. Der Punkt D hat also die verlangte Eigenschaft.



Aufgabe 6/67
Bestimme alle reellen Zahlen x, für die gilt

$$\frac{\sqrt{x} - 0{,}5x}{0{,}5\sqrt{x} - x} \leq 15\sqrt{x}$$

Man substituiert $p = \sqrt{x}$, so dass die Ungleichung die Form

$$\frac{p - 0{,}5p^2}{0{,}5p - p^2} \leq 15p$$

annimmt, kürzt die linke Seite mit p ($p = 0$ ist offenbar ausgeschlossen) und subtrahiert auf beiden Seiten $15p$

$$\frac{15p^2 - 8p + 1}{0{,}5 - p} \leq 0$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn entweder
1.) $15p^2 - 8p + 1 \leq 0$ und $0{,}5 - p > 0$ oder 2.) $15p^2 - 8p + 1 \geq 0$ und $0{,}5 - p < 0$
gilt. Nun ist $15p^2 - 8p + 1 = (5p - 1)(3p - 1) \leq 0$ genau dann, wenn $5p - 1 \geq 0$ und $3p - 1 \leq 0$ ist. Daraus folgt unmittelbar $\frac{1}{5} \leq p \leq \frac{1}{3}$, womit auch $0{,}5 - p > 0$ erfüllt ist. Damit folgt zunächst

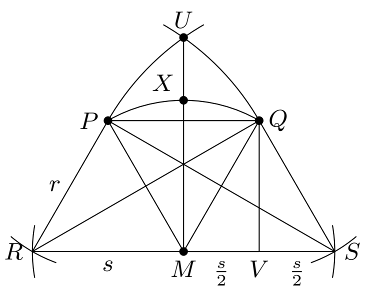
$$\frac{1}{25} \leq x \leq \frac{1}{9}$$

Für 2. folgt, dass $p > 0{,}5$ ist. Die Ungleichung $15p^2 - 8p + 1 = (5p - 1)(3p - 1) \geq 0$ ist aber für alle Werte $p > 0{,}5$ sicher erfüllt. Damit ergibt sich weiter $x > \frac{1}{4}$.
Die Ungleichung ist also für alle reellen Zahlen erfüllt, für die gilt

$$\frac{1}{25} \leq x \leq \frac{1}{9} \quad \text{oder} \quad x > \frac{1}{4}$$

Aufgabe 7/67
Man halbiere einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt M und dessen Endpunkte P und Q gegeben sind, nur mit Benutzung des Zirkels durch Schlagen von Kreisbögen.

Analysis: Da nur Kreisbögen geschlagen werden dürfen und dafür zunächst als Mittelpunkte nur die Punkte M, P und Q sowie als Radien nur die Strecken $MP = MQ = r$ und $PQ = s$ zur Verfügung stehen, liegt es nahe, die Verwendbarkeit derjenigen Punkte zu überprüfen, die sich als Schnittpunkte von Kreisen mit r und s um P, Q und M ergeben.



Zu diesen Punkten gehören auch die Punkte R und S (Abbildung), die das Dreieck MPQ zu Parallelogrammen ergänzen. Dann steht als neuer Radius der Strecke $RQ = SP$ zur Verfügung; es ist:

$$RQ = PS = \sqrt{(s + \frac{s}{2})^2 + r^2 - (\frac{s}{2})^2} = \sqrt{2s^2 + r^2}$$

wegen $MQ = SQ = r$ ist $MV = VS$, wegen $MS = s$ ist $MV = VS = \frac{s}{2}$.

Angenommen der Kreisbogen wäre durch den Punkt X bereits halbiert; dann wäre

$$RX = \sqrt{RM^2 + MX^2} = \sqrt{s^2 + r^2}$$

Man erhält also $RX = SX$ als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der ersten Kathete s und der Hypotenuse $\sqrt{2s^2 + r^2}$. Dieses Dreieck ergibt sich, wenn man über RS als Basis ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln $RU = SU = \sqrt{2s^2 + r^2} = RQ = SP$ konstruiert; die gesuchte Strecke RX ist dann UM.

Konstruktionsbeschreibung: Man schlägt um P einen Kreisbogen mit dem Radius r und um M einen Kreisbogen mit dem Radius s. Von den beiden Schnittpunkten wählt man jenen aus, der das Dreieck PQM zu einem Parallelogramm ergänzt; dieser Punkt ist R. Entsprechend konstruiert man durch Kreisbögen um Q den Punkt S.
Mit RQ als Radius schlägt man um R und S Kreisbögen, die einander in U und in U' schneiden. Mit $UM = U'M$ als Radius schlägt man um R und S Kreisbögen, die einander in X und X' schneiden. Derjenige der beiden Punkte X und X', der auf dem Bogen PQ liegt, halbiert den Bogen PQ.

Aufgabe 8/67
Gegeben sind zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 und einen Punkt P, der weder auf g_1 noch auf g_2 liegt. Gesucht ist eine gerade durch P, auf der die durch g_1 und g_2 begrenzte Strecke von P halbiert wird.

a) Der Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 liege auf dem Zeichenblatt.

b) Der Schnittpunkt S der beiden Geraden g_2 und g_2 liege nicht auf dem Zeichenblatt, die Konstruktion ist jedoch auf das Zeichenblatt beschränkt.

Man betrachtet SP als halbe Diagonale eines zu konstruierenden Parallelogramms, wobei die von S ausgehenden Seiten auf g_1 und g_2 liegen. (Benutzung des Satzes "Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander").
a) Man verbindet S mit P und verlängert SP über P hinaus um sich selbst bis T. Durch T zieht man Parallelen zu g_1 und g_2; deren Schnittpunkt mit g_1 und g_2 seien Q_1 und Q_2. Die Verbindungsstrecke Q_1Q_2 hat die verlangte Eigenschaft.

b) Man führt eine Verschiebung der gegebenen Stücke parallel zu g_1 (oder zu g_2) durch, so dass der Schnittpunkt S' der verschobenen Geraden mit der sich in verschobenen auf dem Zeichenblatt liegt.
Vorausgesetzt, dass danach auch P auf dem Zeichenblatt liegt, führt man die Konstruktion nach a) durch; anschließend macht man die Verschiebung durch die entgegengesetzte Verschiebung rückgängig.

c)Wenn bei der Konstruktion nach a) der Punkt T oder bei der Konstruktion nach b) einer der Punkte P' und T' oder beide außerhalb des Zeichenblattes liegen würden, so führt folgendes Verfahren zum Ziel: Bezüglich des gegebenen Punktes P als Ähnlichkeitszentrum wird eine zentrale Streckung mit einem Streckenverhältnis kleiner als 1 so durchgeführt, dass alle zur Konstruktion erforderlichen Punkte auf dem Zeichenblatt liegen.
Man verkürzt die Lote l_1 und l_2 von P auf g_1 und g_2 im gleichen Verhältnis so, dass die Parallelen zu g_1 und g_2 durch die Teilpunkte einander auf dem Zeichenblatt in einem Punkt S' schneiden. Mit S' und P führt man die Konstruktion nach a) durch. Die sich damit ergebende Gerade erfüllt die gestellte Bedingung.

Aufgabe 9/67
In einer Klasse haben drei Schüler in Mathematik die Note sehr gut, zwölf die Note gut und die übrigen befriedigend und ausreichend. Um die besten Schüler zu fördern, stellt der Lehrer jedem der sehr guten Schüler ein eigenes mathematisches Problem zur Lösung; jeder dieser Schüler soll sich vier der guten Schüler zur Mitarbeit auswählen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, die zwölf Mitarbeiter in Gruppen zu je vier auf die drei sehr guten Schüler zu verteilen?

Der erste der sehr guten Schüler hat 12 Möglichkeiten, sich den ersten Mitarbeiter auszuwählen, 11 Möglichkeiten für den zweiten, 10 für den dritten und 9 für den vierten. Da die Reihenfolge des Mitarbeiter aber keine Rolle spielt, hat er nicht $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ sondern nur $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$ Möglichkeiten, sich seine Mitarbeiter auszuwählen.
Der zweite der sehr guten Schüler hat entsprechend noch $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ Möglichkeiten, der dritte muss den Rest nehmen.
Insgesamt gibt es damit $495 \cdot 70 = 34650$ Möglichkeiten, die zwölf Mitarbeiter auf die drei sehr guten Schüler zu verteilen.

Aufgabe 10/67
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen z mit der folgenden Eigenschaft:
Setzt man als weitere Stelle an ihr Ende die Ziffer 1, so erhält man das Siebenfache der Zahl, die sich durch Erhöhung der höchsten Stelle von z um 1 ergibt.

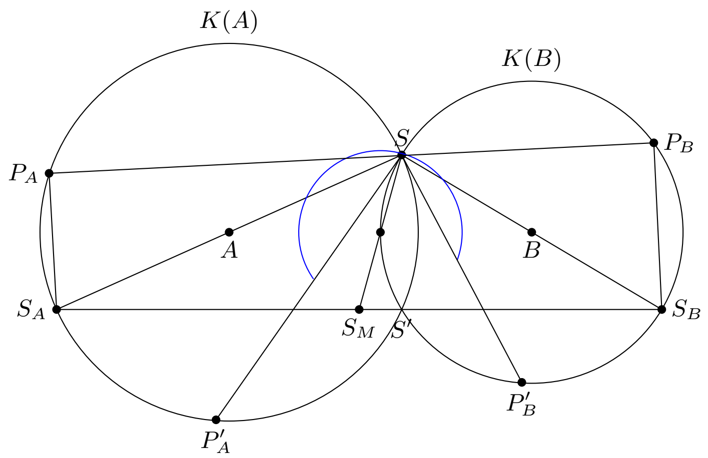
Die Zahl z habe n Stellen ($n = 0; 1; 2; ...$). Durch Anfügen der ergibt sich die Zahl $10z + 1$, durch Erhöhen der höchsten Stelle um 1 die Zahl $10^n + z$. Dann besteht die Gleichung

$$7(10^n + z) = 10z + 1$$

mit der Lösung $z = \frac{1}{3}(7 \cdot 10^n - 1)$.

Für $n = 0$ folgt $z = 2$, für $n = 1$ ergibt sich $z = 23$, für $n = 3$ ist $z = 233$. Allgemeine besteht die Zahl z_k aus der höchsten Stelle 2 und k nachfolgenden Stellen, die sämtlich gleich 3 sind.
Erhöht man nämlich die höchste Stelle um 1, so ergibt sich eine Zahl deren $n = k + 1$ Stellen sämtlich gleich 3 sind. Multipliziert man diese Zahl mit 7, so ist die niedrigste Stelle wegen $3 \cdot 7 = 21$ gleich 1; die folgenden k Stellen ergeben sich aus der Multiplikation $3 \cdot 7 = 21$ und dem Übertrag 2 sämtlich zu 3, die höchste Stelle aber aus dem Übertrag allein zu 2.
Dieses Produkt ist aber gerade die Zahl $10z + 1$.

Aufgabe 11/67
Gegeben sind zwei Kreise $K(A)$ und $K(B)$ mit den Mittelpunkten A bzw. B, die einander in S und S' schneiden. P_A und P_B seien Punkte auf $K(A)$ bzw. $K(B)$ derart, dass S auf der Strecke P_AP_B liegt.
Gesucht ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller möglichen Strecken P_AP_B.



Es seien S_A und S_B je ein Endpunkt eines Durchmessers von $K(A)$ bzw. $K(B)$, deren zweiter gemeinsamer Endpunkt S ist. Ferner sei S_M der Mittelpunkt von S_AS_B, P'_A und P'_B seien die Schnittpunkte der Tangenten in S an $K(B)$ mit $K(A)$ bzw. an $K(A)$ mit $K(B)$ (Abbildung).
Dann ist der Kreisbogen um den Halbierungspunkt von SS_M mit $\frac{1}{2}SS_M$ als Radius, der von P'_AS bis P'_BS verläuft, der gesuchte geometrische Ort.

Beweis: Nach dem Satz des Thales ist $P_AS_A \perp P_AP_B$ und $P_BS_B \perp P_AP_B$, also sind P_AS_A und P_BS_B parallel zur Mittelsenkrechten von P_AP_B. Nach dem Strahlensatz schneidet daher diese Mittelsenkrechte die Strecke S_AS_B in S_M. Der Mittelpunkt von P_AP_B liegt daher auf dem Thaleskreis über SS_M.
Da P_AP_B nicht durch das Dreieck $SP'_AP'_B$ verlaufen kann (in diesem Fall würde S außerhalb von P_AP_B liegen), entfällt der in diesem Dreieck liegende Teil des Thaleskreises.

Aufgabe 12/67
Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung mit $0 < x < 1$, n eine natürliche Zahl:

$$(1+x)^n < 1 + (2^n - 1)x$$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

Wegen $0 < x < 1$ gilt $0 < x^{k-1} < 1$. Daraus folgt

$$(1+x)^n < x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

Weiter ist

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

Daraus ergibt sich aber ohne weiteres $(1+x)^n < 1 + x(2^n - 1)$.

Aufgabe 13/67
Zwei Brüder haben am selben Tage Geburtstag. Als sie ihn das letztemal feierten, waren sie zusammen 48 Jahre alt. Das Alter des einen wurde durch eine Kubikzahl angegeben. Teilte man sein Alter und das Alter des anderen durch die Basis dieser Kubikzahl, so ergaben die Resultate in dieser Reihenfolge das Datum des Geburtstages.
Wie alt waren die beiden Brüder und an welchem Tage hatten sie Geburtstag?

Es kommen nur die Kubikzahlen 1; 8; 27 in Frage, da bereits die vierte Kubikzahl 64 größer als 48 ist. Probiert man sie der Reihe nach aus, so ergeben sich folgende Rechnungen:

1. $48 - 1 = 47$; $1 : 1 = 1$; $47 : 1 = 47$
   Das Datum 1.47. ist unmöglich (außerdem ist es unwahrscheinlich, dass von zwei Brüdern einer 47 Jahre und der andere 1 Jahr alt ist).
2. $48 - 8 = 40$; $8 : 2 = 4$; $40 : 2 = 20$
   Für das Ergebnis gilt entsprechendes wie unter 1.
3. $48 - 27 = 21$; $27 : 3 = 9$; $21 : 3 = 7$
   Es ergibt sich als Geburtsdatum der 9.7., die beiden Brüder waren also 27 und 21 Jahre at.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, ist dieses Ergebnis eindeutig.

Aufgabe 14/67
Ohne Benutzung der Differentialrechnung ist zu beweisen:
Unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfang U und gegebener Seite $BC = a$ hat das gleichschenklige den maximalen Flächeninhalt.

Aus $U = a + b + c$ folgt $b + c = U - a =$ konstant. Der Punkt A des Dreiecks hat also von B und C eine konstante Abstandssumme und liegt demzufolge auf einer Ellipse mit den Brennpunkten B und C und dem Brennpunktabstand a sowie der großen Achse $b + c$.
Aus der Flächeninhaltsformel $F = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ folgt, dass bei konstantem a der Flächeninhalt maximal ist, wenn h_a maximal ist. Offensichtlich ist das genau dann der Fall, wenn h_a mit der kleinen Halbachse der Ellipse zusammenfällt, wenn also A im Nebenscheitel der Ellipse liegt.
Aus Symmetriegründen ist das Dreieck dann gleichschenklig.

Aufgabe 15/67
Man beweise, dass

a) die 5. Potenz einer natürlichen Zahl a die gleiche Endziffer hat wie a selbst.

b) die 21. Potenz einer zu 10 teilerfremden natürlichen Zahl a die gleiche Zehner- und die gleiche Einerziffer hat wie a selbst.

a) Die Behauptung besagt, dass für jede natürliche Zahl a der Ausdruck

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$$

durch 10 teilbar ist. Da $a^5 - a$ auf jeden Fall gerade ist (mit a ist auch a^5 gerade oder ungerade), genügt es, die Teilbarkeit durch 5 zu beweisen.
Neben dem trivialen Fall $a = 5k$ unterscheidet man noch die Fälle $a = 5k \pm 1$ und $a = 5k \pm 2$. Im ersten Fall ist $a - 1$ bzw. $a + 1$ durch 5 teilbar; im zweiten Fall ist

$$a^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5(k^2 \pm 4k + 1)$$

durch 5 teilbar.

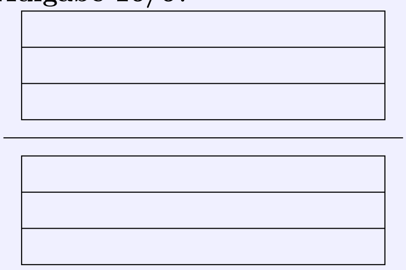
b) Die Behauptung besagt, dass unter der Voraussetzung "a ist zu 10 teilerfremd" der Ausdruck

$$a^{21} - 1 = a(a^{20} - 1)$$

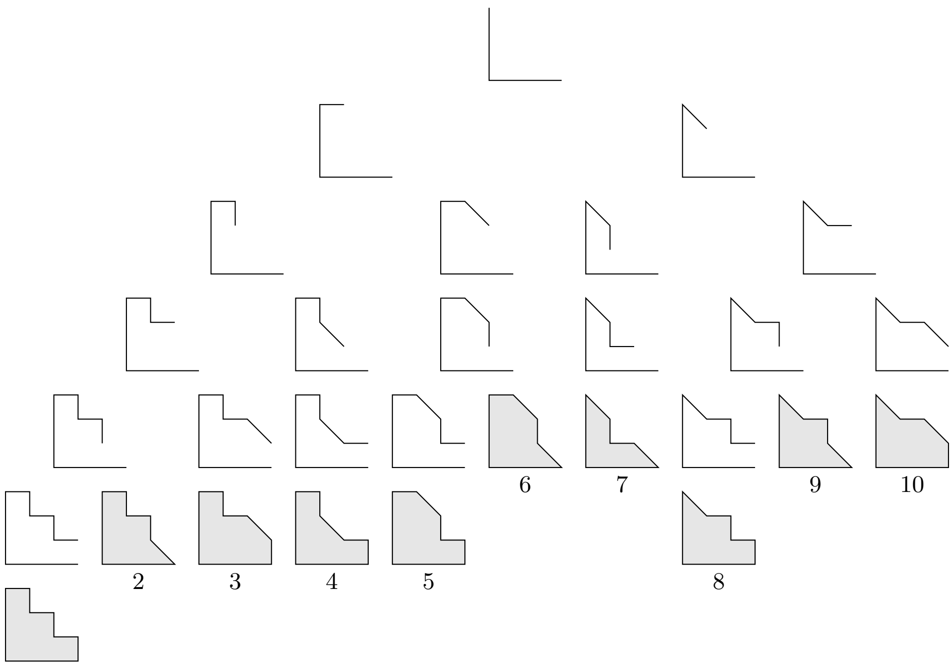
durch 100 teilbar ist. Man unterscheidet wieder zwei Fälle:
1. $a = 10k \pm 1$ und 2. $a = 10k \pm 3$.
(in allen anderen Fällen ist a entweder durch 2 oder durch 5 teilbar und demzufolge nicht teilerfremd zu 10). Entwickelt man a^{20} nach dem binomischen Satz, so sind alle Summanden bis auf den letzten durch 100 teilbar. Man erhält also im Falle
1. $(10k \pm 1)^{20} = 100A + 1$ oder $a^{20} - 1 = 100A$,
2. $(10k \pm 3)^{20} = 100B + 3^{20}$ oder $a^{20} - 1 = 100B + 3^{20} - 1$

Nun ist $3^{20} = (3^4)^5 = (8 \cdot 10 + 1)^5$. Entwickelt man diesen Ausdruck nach dem binomischen Satz, so enthalten alle Summanden bis auf den letzten der Faktor 100: $3^{20} = 100C + 1$. Dann ist $3^{20} - 1$ durch 100 teilbar, womit alles bewiesen ist.

Aufgabe 16/67



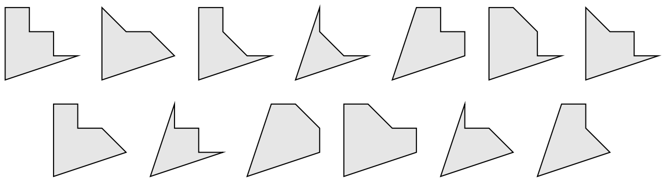
Das in der Abbildung gegebene Zweitafelbild stellt Grund- und Aufriss von Profilstäben dar und hat (außer an den äußeren Begrenzungen) keine verdeckten Kanten. Sämtliche Flächen sind eben.
Die Darstellung ist nicht eindeutig. Es sind Querschnitte (Seitenrisse) aller auf Grund dieser Darstellung möglichen Profilstäbe zu finden.



Da keine verdeckten Kanten vorhanden sind, müssen alle möglichen Profilstäbe zwei zueinander senkrechte Flächen gleicher Breite haben (Abbildung, oben).
Die folgenden Tatsachen ermöglichen es, auf dem Wege von Alternativentscheidungen sukzessiv alle Möglichkeiten zu erfassen. Dazu kann man die Form eines "Stammbaums" (Abbildung) benutzen.
An eine zur Grundrissebene senkrechte Fläche können nur eine zum Grundriss parallele oder eine zum Grundriss um 45° geneigte Fläche angrenzen.
An eine zur Grundrissebene parallele Fläche können nur eine zum Grundriss senkrechte oder eine zum Grundriss um 45° geneigte Fläche angrenzen.

An eine zur Grundrissebene um 45° geneigte Fläche können nur eine zum Grundriss parallele oder eine zum Grundriss senkrechte Fläche anschließen.
Die Abbildung zeigt, das insgesamt 10 Lösungen existieren, unter denen sich jedoch drei Paare von je zwei zueinander symmetrischen Profilen befinden. Die drei symmetrische Profilpaare sind 2 und 8, 3 und 5, 6 und 10. Es gibt also 7 wesentlich verschiedene Lösungen.

Zusätzlich zu den in der offiziellen Lösung genannten Profilen, sind weitere möglich:



Aufgabe 17/67
Gesucht ist eine (im dekadischen System) vierstellige Zahl, von der folgendes bekannt ist:

1. Die Summe aller zweistelligen Zahlen, die sich aus je zwei Ziffern der gesuchten Zahl darstellen lassen, ist 594.
2. Dividiert man die gesuchte Zahl durch ihre Quersumme, so erhält man eine Zahl, die gleich dem Siebenfachen der letzten Ziffer der gesuchten Zahl ist.
3. Alle Ziffern der gesuchten Zahl sind voneinander verschieden und nicht gleich Null.

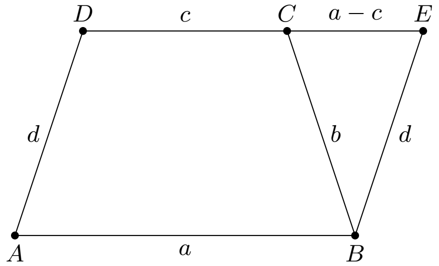
Es sei $z = 1000a + 100b + 10c + d$ die gesuchte Zahl, $Q = a + b + c + d$ ihre Quersumme. Die zweistelligen Zahlen, die man aus den Ziffern a, b, c, d bilden kann, sind
$10a + b, 10a + c, 10a + d, 10b + a, 10b + c, 10b + c, 10c + a, 10c + b, 10c + d, 10d + a, 10d + b, 10d + c$
Die Summe aller dieser zweistelligen Zahlen ist $33(a + b + c + d) = 594$, also $a + b + c + d = 18 = Q$. Aus $\frac{z}{Q} = 17d$ folgt nun sofort $z = Q \cdot 17d = 306d$. Es ergibt sich also die Gleichung

$$z = 1000a + 100b + 10c + d = 306d \qquad ; \qquad 10(100a + 10b + c) = 305d$$

Die Zahl d miss also gerade sein:
$d = 2$, dann ist $z = 612$, entfällt, da nicht vierstellig
$d = 4$, dann ist $z = 1224$, entfällt, da $b = c$
$d = 6$, dann ist $z = 1836$, möglich, Probe bestätigt Richtigkeit
$d = 8$, dann ist $z = 2448$, entfällt, da $b = c$
Die Zahl 1836 ist also die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 18/67
Gegeben ist ein beliebiges Viereck mit den Seiten a, b, c, d.
Man konstruiere ein Trapez aus den Seiten des Vierecks so, dass die Reihenfolge der Seiten unverändert bleibt.

Da die Reihenfolge der vier Seiten durch das Viereck bereits festgelegt ist, gibt es nur noch zwei Möglichkeiten, die für ein Trapez notwendigen parallelen Gegenseiten auszuwählen. E seien dies (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit, im anderen Fall verläuft die Konstruktion analog) die Seiten a und c.



a) Analysis und Konstruktion: Es sei zunächst $a \neq c$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a > c$ (im anderen Fall analog). Die Verlängerung der Seite c im Trapez schneidet eine durch den Punkt B parallel zu d verlaufende Gerade in E. Es ist $BC = d, BE = d$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABED$), $ED = a$ (Gegenseiten im Parallelogramm), also $EC = a - c$. Das Dreieck BEC ist demnach nach sss eindeutig konstruierbar.

Damit ist der Abstand der parallelen Seiten a und c bestimmt und das Trapez konstruierbar; Man konstruiert zunächst die Seitendifferenz $a - c$, danach aus dieser Differenz, der Seite b und der Seite d das

Dreieck BEC. Die Seite EC wird über C hinaus um c verlängert, der Endpunkt ist D. Auf der Parallelen zu CD durch B wird von B aus nach derselben Seite, auf der D liegt, die Strecke $BA = a$ abgetragen.
Ist $a = c$, so ist diese Konstruktion nicht ausführbar. Entweder ist auch $b = d$; dann ist das gegebene Viereck ein Parallelogramm und mithin bereits ein Trapez (Spezialfall). Oder er ist $b \neq d$; dann können nur b und d als parallele Gegenseiten gewählt werden, und das Trapez wird gleichschenklig.

Determination: Das Dreieck BEC ist eindeutig konstruierbar, wenn die Summe zweier beliebiger Dreiecksseiten jeweils größer ist als die dritte Dreiecksseite. Es muss also gelten:

$$b + d > |a - c|; \qquad b + |a - c| > d; \qquad d + |a - c| > b$$

Daraus ergibt sich $b + d > |a - c|$ und $|a - c| > |b - d|$ als notwendige und hinreichende Bedingung für die eindeutige Konstruierbarkeit des Trapezes mit a und c als parallele Seiten.

Aufgabe 19/67
Zwei Kinder spielen mit einer Fünf-Pfennig-Münze und mit einem Würfel. Sie vereinbaren: A wirft einmal die Münze, B wirft dreimal den Würfel. Gewinnen soll, wer eine "Fünf" wirft.
Wie sind die Gewinnchancen verteilt?

Es ist offensichtlich, dass für A der Wahrscheinlichkeit $P(5) = 0{,}5$ ist, da zwei Fälle möglich sind, von denen einer günstig ist. B muss um zu gewinnen, mindestens eine Fünf unter den drei Würfen haben. Da die drei Ereignisse "5 beim i-ten Wurf" ($i = 1; 2; 3$) einander nicht ausschließen, kann man den Additionssatz anwenden. Man geht daher zum entgegengesetzten Ereignis über: B verliert, wenn die drei Ereignisse "nicht 5 beim i-ten Wurf" eintreten; dafür gilt (da sie voneinander unabhängig sind) der Multiplikationssatz. Demzufolge ist für B die Wahrscheinlichkeit, eine Fünf zu werfen

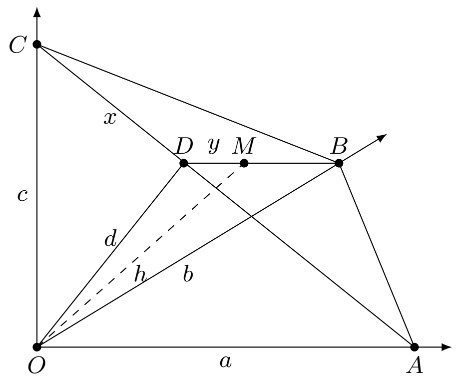
$$P(5) = 1 - P(\overline{5})^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right) 13 \approx 0{,}42$$

B hat also wesentlich geringere Gewinnchancen.

Aufgabe 20/67
Man trage vom Ursprung O eines räumlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems auf den Achsen die Strecken a, b und c bis zu den Punkten A, B bzw. C ab. Dann fälle man von O das Lot auf die Ebene ABC. Sein Fußpunkt sei M. Es ist zu beweisen, dass das Lot die Länge hat:

$$h = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Verwendeter Hilfssatz: Steht eine Gerade auf zwei nicht zueinander parallelen geraden einer Ebene senkrecht bzw. kreuzt sie diese senkrecht, so steht sie auf jeder Geraden dieser Ebene senkrecht oder sie kreuzt sie senkrecht.



Man verbindet B mit M und bezeichnet den Schnittpunkt der Verlängerung von BM über M hinaus mit AC mit D. Weiter bezeichnet man OC mit d, CD mit x und MD mit y (Abbildung).
Die Strecke OB steht aus OA und OC und damit nach dem Hilfssatz auf OD senkrecht. Das Dreieck BOD ist also bei O rechtwinklig. Die Strecke AC kreuzt nach dem Hilfssatz OM senkrecht, da OM auf der Ebene ABC senkrecht steht und AC eine Gerade dieser Ebene ist.
AC kreuzt aber auch OB senkrecht, da OB auf der Ebene AOC senkrecht steht und AC auch in dieser Ebenen liegt. Demnach steht AC auch auf OD senkrecht, und somit ist das Dreieck ODC bei D rechtwinklig.

Wendet man nun auf die rechtwinkligen Dreiecken BOD, OMD, AOC und ODC die Sätze des Pythagoras und des Euklid an, so erhält man

$$h^2 = d^2 - y^2; \qquad d^2 = c^2 - x^2; \qquad c^2 = x\sqrt{a^2 + c^2}; \qquad x^2 = \frac{c^4}{a^2 + c^2}$$

$$d^2 = c^2 - \frac{c^4}{a^2+c^2} = \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}; \qquad d^2 = y\sqrt{d^2+b^2}; \qquad y^2 = \frac{d^2}{d^2+b^2}$$

Demnach gilt

$$h = d - \frac{d^4}{d^2+b^2} = \frac{d^2b^2}{d^2+b^2} = \frac{\frac{a^2b^2c^2}{a^2+c^2}}{\frac{a^2c^2}{a^2+c^2}+b^2} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}$$

Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung

$$h = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$

Aufgabe 21/67
Es seien A, B, a_0, b_0, a_1, b_1 und x natürliche Zahlen und es gelte

$$x \mid A^{a_0} + B^{b_0} \qquad \text{sowie} \qquad x \mid A^{a_1} - B^{b_1}$$

wobei $c \mid d$ bedeutet, dass c Teiler von d ist). Man weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen auch

$$x \mid Z_n = A^{a_1n+a_0} + B^{b_1n+b_0}$$

für jede natürliche Zahl n gilt.

Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
1. Wegen $Z_0 = A^{a_0} + B^{b_0}$ laut Voraussetzung gilt die Behauptung sicher für $n = 0$.
2. Angenommen, die Behauptung gelte für ein $n = k$:

$$x \mid Z_k = A^{a_1k+a_0} + B^{b_1k+b_0}$$

Nun ist

$$Z_{k+1} = A^{a_1(k+1)+a_0} + B^{b_1(k+1)+b_0} = A^{a_1k+a_0} \cdot A^{a_1} + B^{b_1k+b_0} \cdot B^{b_1} =$$
$$= A^{a_1}(A^{a_1k+a_0} + B^{b_1k+b_0}) + (B^{b_1} - A^{a_1})B^{b_1k+b_0} = A^{a_1}Z_k - (A^{a_1} - B^{b_1})B^{b_1k+b_0}$$

Wegen $x \mid Z_k$ laut Induktionsannahme und $x|(A^{a_1} - B^{b_1})$ laut Voraussetzung folgt daraus $x \mid Z_{k+1}$. Aus 1. und 2. folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 22/67
Gegeben ist eine Strecke mit der Länge a Längeneinheiten (LE) sowie die Längeneinheit selbst. Wie kann man daraus eine Strecke mit der Länge $\sqrt[4]{a^3}$ LE konstruieren?

Es ist $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt{a\sqrt{a}}$. Die Strecke mit der Länge $\sqrt{a\sqrt{a}}$ LE findet man als Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt $a\sqrt{a}$ LE^2. Dieses Quadrat erhält man mit Hilfe des Kathetensatzes aus einem flächengleichen Rechteck mit den Seiten $x = a$ LE und $y = \sqrt{a}$ LE. Die Strecke $y = \sqrt{a}$ LE ergibt sich nach dem Höhensatz aus den Strecken a LE und 1 LE. Damit folgt die Konstruktion:

1. Man schlägt über der Strecke $AC = (a + 1)$ LE den Thaleskreis und errichtet im Punkt B, der von C den Abstand 1 LE hat, auf dieser Strecke die Höhe; sie schneidet den Thaleskreis in D. Die Strecke BD hat die Länge $y = \sqrt{a}$ LE.
2. Man schlägt über der Strecke $AB = a$ LE den Thaleskreis und errichtet im Punkt E, der von B den Abstand $y = \sqrt{a}$ LE hat, auf dieser Strecke die Höhe; sie schneidet den Thaleskreis in F. Die Strecke BF hat die Länge $\sqrt{a\sqrt{a}}$ LE $= \sqrt[4]{a^3}$ LE und ist somit die gesuchte Strecke.

Aufgabe 23/67
Man beweise: Ist n eine natürliche Zahl und $2^n - 1$ eine Primzahl, so ist auch n eine Primzahl.

Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, $2^n - 1$ sei eine Primzahl, n dagegen nicht. Dann ist n in Faktoren zerlegbar: $n = ab$ mit $a; b \neq 1$ und damit $a; b \neq n$, $a; b$ natürliche Zahlen.
Damit ist $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$. Diese Zahl ist aber durch $2^a - 1$ teilbar:

$$\frac{(2^a)^b - 1}{2^a - 1} = (2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + ... + (2^a)$$

nach der Summenformel für die endliche geometrische Reihe. Wegen $b \neq 1$ ist aber $2^a - 1 \neq (2^a)^b - 1$, und wegen $a \neq 1$ ist $2^a - 1 \neq 1$. Der Teiler von $2^n - 1$ ist also von 1 und von $2^n - 1$ verschieden. Daraus folgt, dass $2^n - 1$ keine Primzahl ist - im Widerspruch zur Annahme. Also ist die Annahme falsch, folglich muss der zu beweisende Satz richtig sein.

Aufgabe 24/67
Bei der serienmäßigen Montage von 1000 Geräten, die 100 MDN je Gerät kostet, werden 300 Widerstände je Gerät eingebaut, deren Prüfung auf Einhaltung der Toleranz 0,12 MDN je Widerstand entstehen.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Widerstand die Toleranz nicht einhält, beträgt (nach statistischen Unterlagen) 0,1 %. Das Gerät funktioniert nur dann einwandfrei, wenn alle Widerstände maßhaltig sind. Eine Endkontrolle ist auf jeden erforderlich.
Was ist ökonomisch vorteilhafter - eine Kontrolle der Widerstände vor der Montage oder ein Verzicht darauf?
Die Materialkosten für fehlerhafte Geräte können außer Betracht bleiben, da das Material verwertbar bleibt.

Man stellt zur Entscheidung der Frage die Kosten K_1 bei Prüfung der Widerstände vor der Montage und die voraussichtlichen Kosten K_2 für die Montage nicht funktionstüchtiger Geräte bei Verzicht auf die Kontrolle gegenüber.
Es werden 300 Widerstände je Gerät $\cdot$ 1000 Geräte = 300000 Widerstände benötigt, die einwandfrei sind. Da (wahrscheinlich!) nur 99,9% der Widerstände maßhaltig sind, müssen $\frac{300000 \cdot 100}{99{,}9} = 300300$ Widerstände geprüft werden.
Die Kosten dafür betragen $K_1 = 36036$ MDN.
Die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ dafür, dass in ein Gerät bei Verzicht auf vorherige Kontrolle nur einwandfreie Widerstände eingebaut werden, ist $P(\overline{A}) = 0{,}999^{300}$; für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es auf Grund fehlerhafter Widerstände Ausschuss ist, gilt

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}999^{300} \approx 0{,}256 = 25{,}6\%$$

D.h., wahrscheinlich sind 25,6 % der Geräte fehlerhaft, es müssten $\frac{1000 \cdot 100}{74{,}6} \approx 1340$ Geräte produziert werden, so dass für 340 Geräte die Montagekosten zusätzlich anfallen. Damit ist $K_2 = 34000$ MDN.
Man erkennt: $K_1 > K_2$. Verzicht auf vorherige Kontrolle ist ökonomisch vorteilhafter.

Aufgabe 25/67
Gesucht sind alle Primzahlen p, für die gilt $3p + 4 = a^2$ (wobei a eine natürliche Zahl ist).

Aus $3p + 4 = a^2$ folgt $3p = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$. Da p eine Primzahl ist, gilt
(1) entweder $a + 2 = 3$ und $a - 2 = p$
(2) oder $a - 2 = 3$ und $a + 2 = p$
(1) kann nicht gelten, da sonst $a = 1$ und p negativ wäre; folglich gilt (2). Dann ist aber $a = 5$ und $p = 7$.
Tatsächlich ist $3 \cdot 7 + 4 = 25 = 5^2$. Der Lösungsweg schließt weitere Lösungen für p aus.

Lösung von Emil Donath:

Aus der Gleichung $3p + 4 = a^2$ ist ersichtlich, dass die linke Seite ein Quadrat sein muss und durch den Term $(n + 2)^2$ dargestellt werden kann.
Nun ist $(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4 = a^2$. Durch Koeffizientenvergleich der letzten mit der ersten Gleichung ergibt sich

$$3p = n^2 + 4n \qquad \text{oder} \qquad p = \frac{n(n + 4)}{3}$$

Für p ergibt sich dann und nur dann eine Primzahl, wenn entweder $|n|$ oder $|n+4|$ gleich 3 und $n(n+4) > 0$ ist. Ist n ein Vielfaches von 3, so bleibt $\frac{n(n+4)}{3}$ ein Produkt, das nicht nur 1 und p als Faktoren enthält, und p kann dann keine Primzahl sein.
Ist $n = 3$, so ist $p = 7$ die einzige Primzahl, durch die diese Gleichung erfüllt wird. Für $n = -1$ ergibt sich $p = -1$, also keine Primzahl. Setzt man jedoch $n = -7$, so erhält man wiederum $p = 7$.
Also ist $p = 7$ die einzige Primzahl, die die vorgegebene Gleichung erfüllt.

Aufgabe 26/67
Es seien a, b und c die Seiten eines beliebigen ebenen Dreiecks, r dessen Umkreisradius und ρ der Inkreisradius. Man beweise die Richtigkeit der Formel

$$2r \cdot \rho = \frac{abc}{a+b+c}$$

Es ist bekanntlich wegen $h_a = b \sin\gamma$ der Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$.
Zerlegt man das Dreieck ABC in drei Teildreiecke mit dem Inkreismittelpunkt als allen drei Teildreiecken gemeinsamem Eckpunkt, so ergibt sich

$$A = \frac{1}{2}\rho(a+b+c) \quad \text{und weiter} \quad \frac{1}{2}ab\frac{c}{2r} = \frac{1}{2}\rho(a+b+c)$$

und damit $2r\rho = \frac{abc}{a+b+c}$.

Aufgabe 27/67
Beweisen Sie, dass die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$$

für jedes positive, reelle $a; b; c$ gilt!

Wegen $a > 0, b > 0, c > 0$ gilt auch $a + b > 0, b + c > 0, c + a > 0$ und

$$a+b < a+b+c; \qquad b+c < a+b+c; \qquad c+a < a+b+c$$

Damit aber auch

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}; \qquad \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}; \qquad \frac{1}{a+c} > \frac{1}{a+b+c}$$

Multipliziert man die letzten drei Ungleichungen mit c, mit a bzw. mit b und addiert man diese, so erhält man

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} > \frac{c+a+b}{a+b+c} = 1$$

Lösung von Wolfgang Burmeister:

Nach einem bekannten Satz ist das arithmetische Mittel von n positiven Zahlen nicht kleiner als deren harmonisches Mittel. Es gilt also speziell für die positiven Zahlen $x; y; z$:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

Auf den Fall

$$x = \frac{a+b+c}{a+b} \quad ; \quad y = \frac{a+b+c}{a+c} \quad ; \quad z = \frac{a+b+c}{c+b}$$

angewandt, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{c}{a+b} + \frac{b}{c+a} + \frac{a}{b+c} &= 3 \cdot \frac{\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{c+b}}{3} - 3 \\ &\geq 3 \cdot \frac{3}{\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{c+b}{a+b+c}} - 3 = 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Es gilt also die schärfere Ungleichung

$$\frac{c}{a+b} + \frac{b}{c+a} + \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

in der die Gleichheit nur für $x = y = z$ eintritt, was wiederum nur für $a = b = c$ möglich ist.

Lösung von Jörg Seeländer:

Ich schätze die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 1$$

nach unten ab, indem ich jeden Bruch der linken Seite verkleinere (was lt. Voraussetzung $a; b; c > 0$ möglich ist):

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+a+b} = 1$$

womit alles bewiesen ist.

Lösung von Karl Böllmann:

Richtig ist sicher die folgende Ungleichung:

$$(a+b)(a-b)^2 + (a+c)(a-c)^2 + (b+c)(b-c)^2 \geq 0$$

wobei Gleichheit nur für den Fall $a = b = c$ gilt.
Addiert man auf beiden Seiten das Produkt $3(a+b)(a+c)(b+c)$, so erhält man nach entsprechender Rechnung

$$2[a(a+b)(a+c) + b(a+b)(b+c) + c(a+c)(b+c)] \geq 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

Dividiert man beide Seiten der Ungleichung durch $2(a+b)(a+c)(b+c)$ und kürzt man die entstehenden Brüche, so ergibt sich

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Es gilt also sogar eine schärfere Ungleichung.

Lösung von Manfred Kießling:

Zu zeigen ist

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$$

für reelle $a, b, c > 0$. Da der Ausdruck zyklisch ist, gilt o.B.d.A. $a < b < c$. Damit wird wegen $c + a < c + b$ und $a + b < c + b$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > \frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+b} = \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c} > 1$$

Lösung von Eckehard Krauß:

Ist $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$, so gilt wegen $a_i > 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{s} \cdot s = 1$$

In unserem Falle ist $n = 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

Aufgabe 28/67
Gegeben sei ein beliebiges regelmäßiges n-Eck mit dem Inkreisradius r. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Summe der Abstände von den n-Eckseiten bzw. deren Verlängerungen gleich dem n-fachen des Inkreisradius r ist.

Behauptung: Der gesuchte geometrische Ort ist das gesamte n-Eck einschließlich der n-Eckseiten.
Beweis: Verbindet man den Mittelpunkt des n-Ecks mit den Ecken, so entstehen n Dreiecke, wobei jedes den Flächeninhalt $F = \frac{sr}{2}$ hat (dabei ist s die n-Eckseite). Der Flächeninhalt des n-Ecks ist also $F_g = \frac{nsr}{2}$.
Verbindet man einen beliebigen Punkt P im Inneren des n-Ecks mit den Ecken, so entstehen ebenfalls n

Dreiecke mit dem Flächeninhalt $F_k = \frac{sa_k}{2}$, wobei a_k der Abstand des Punktes von der k-ten Seiten ist, $k = 1; 2; 3; ...; n$. Damit erhält man für den Flächeninhalt des n-Ecks

$$F_g = \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{sa_k}{2} = \frac{s}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Durch Vergleich (Gleichsetzen) ergibt sich

$$\frac{nsr}{2} = \frac{s}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{oder} \qquad nr = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Man überlegt sich leicht, dass die Beziehung auch Gültigkeit hat, wenn für ein k gilt $a_k = 0$, d.h., wenn P auf einer n-Eckseite liegt.

Aufgabe 29/67
Die Gleichung $\sin(x+y)\sin(x-y) - \cos(x+y)\cos(x-y) = 0{,}5$ ist zu lösen.

Nach den Additionstheorem gilt

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

Setzt man dies in der Gleichung ein und multipliziert man die Produkt aus, so ergibt sich

$$\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = 0{,}5$$

Durch Ausklammern folgt

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\cos^2 y + \sin^2 y) = 0{,}5$$

Mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ wird die Gleichung zu $2\sin^2 x = 1{,}5$. Man erkennt, dass die Gleichung für beliebiges y erfüllt ist. Die weitere Lösung ergibt

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \to |\sin x| = \frac{1}{2}\sqrt{3} \to x_{1;2} = \frac{\pi}{3} \pm k\pi; x_{3;4} = \frac{2\pi}{3} \pm k\pi$$

($k = 1; 2; 3; ...$) Die Gleichung gilt also für diese vier Werteschare und für jeden beliebigen y-Wert.

Aufgabe 30/67
Gesucht ist die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

von der folgendes bekannt ist:

1. Die Glieder der Reihe bilden eine monotone Folge.
2. Es ist $a_1 = 1, a_n > 0$ für jedes n.
3. Es ist $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.
4. Es ist $a_{2k} = a_{2k-2} - a_{2k-1}$.

Aus der Bedingung 3 folgt

$$a_1 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{2k-1} \cdot ... = a_2 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{2k} \cdot ... \qquad \text{oder} \qquad \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot ... \cdot \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}} \cdot ... = 1$$

Wäre die Folge $\{a_k\}$ streng monoton wachsend, so wäre $a_{2k-1} < a_{2k}$ und somit $\frac{a_{2k-1}}{a_{2k}} < 1$ für jedes k im Widerspruch zu der vorstehenden Gleichung. Analog schließt man, das sie nicht streng monoton fallend sein kann. Also ist $a_{2k-1} = a_{2k}$ für jedes k.
Damit nimmt S die folgende Gestalt an:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + ... + a_n + ... = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

Aus 4. ergibt sich damit $a_{2k} = a_{2k-2} - a_{2k}$, also $a_{2k} = \frac{1}{2}a_{2k-2}$. Das heißt aber, die Folge $\{a_{2k}\}$ ist eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = \frac{1}{2}$. Nach der Summenformel für unendliche geometrische Reihen gilt damit (wegen $a_2 = a_1 = 1$)

$$S = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = 2\frac{a_2}{1-q} = 4$$

Lösung von Hans-Jörg Roos:

Da $a_{2k} = a_{2k-2} - a_{2k-1}$ gilt und $a_{2k} > 0$ ist, gilt auch $a_{2k-2} > a_{2k-1}$, die Folge fällt also monoton. Alle a_k mit $k \geq 3$ sind demnach kleiner als 1, und

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = 0, \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_{2k} = 0 \qquad \text{also} \qquad \prod_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \prod_{k=1}^{\infty} a_{2k}$$

Aus den Bedingungen 1), 2) und 4) allein kann man also die Summe der Folge nicht eindeutig angeben, da a_2 und alle a_{2k-1} frei wählbar sind.
Ändert man die Bedingung 3) der Aufgabe so, dass man

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \prod_{k=1}^{\infty} a_{2k} \qquad \text{in} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \prod_{k=1}^{n} a_{2k}$$

umwandelt, so ist die Aufgabe eindeutig lösbar. Für $k = 1$ gilt dann $a_1 = a_2$, für $k = 2$ gilt $a_1 \cdot a_3 = a_2 \cdot a_4$ usw. Daraus folgt aber $a_{2k-1} = a_{2k}$.
Wegen $a_{2k} = a_{2k-2} - a_{2k-1}$ gilt $a_{2k} = \frac{1}{2}a_{2k-2}$. Damit kann man die Glieder der Folge ermitteln. Man erhält:

$$S = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + ... = 4$$

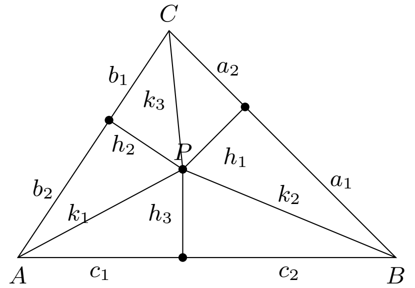
Aufgabe 31/67
Fällt man von einem beliebigen Punkt P der Ebene die Lote auf die Verbindungsgeraden AB, BC und CA dreier nicht auf derselben Geraden liegender Punkte A, B und C dieser Ebene, so entstehen die Fußpunkte X, Y bzw. Z. Man beweise, dass stets gilt:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = BX^2 + CY^2 + AZ^2$$

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung und nehmen P im Inneren des Dreiecks ABC an. Dann lautet die Behauptung

$$c_1^2 + a_1^2 + b_1^2 = c_2^2 + a_2^2 + b_2^2$$

Zum Beweis wende man auf die entstehenden sechs rechtwinkligen Dreiecke den Satz des Pythagoras an. Man erhält:



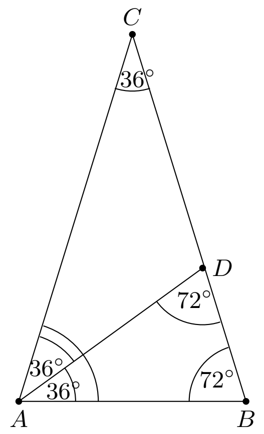
$$c_1^2 = k_1^2 - h_3^2; \quad a_1^2 = k_2^2 - h_1^2; \quad b_1^2 = k_3^2 - h_2^2 \qquad (1)$$
$$c_2^2 = k_2^2 - h_3^2; \quad a_2^2 = k_3^2 - h_1^2; \quad b_2^2 = k_1^2 - h_2^2 \qquad (2)$$

Die Additionen der Gleichungen (1) bzw. (2) liefern

$$c_1^2 + a_1^2 + b_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$
$$c_2^2 + a_2^2 + b_2^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Der Beweis verläuft analog, wenn P außerhalb des Dreiecks ABC oder auf seinem Umfang liegt.

Aufgabe 32/67
Man bestimme an Hand einer geometrischen Überlegung den exakten Wert von $\sin 18°$!



In einem Dreieck ABC (Abbildung) gilt

$$\measuredangle BAD = \measuredangle CAD = \measuredangle ACB = 36°$$

$$\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BDA = 72°$$

Daraus folgt $\triangle\ ABC \sim \triangle\ BDA, AB = AD = AC, AC = BC$. Setzt man $AB = 2a$ und $AC = b$, so gilt wegen der Ähnlichkeit $(b - 2a) : 2a = 2a : b$. Daraus folgt die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{2b} = \frac{1}{4} \quad \text{mit der Lösung} \quad \frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Nun ist $\frac{a}{b} = \sin\frac{360°}{20} = \sin 18°$. Da die sin-Funktion im 1. Quadranten positiv ist, kommt der negative Wert für uns nicht in Frage. Damit ergibt sich

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Aufgabe 33/67
Man beweise: Erfüllen drei natürliche Zahlen $x; y; z$, die keinen gemeinsamen Teiler haben, die Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ (sogenannte pythagoreische Grundtripel), so können x und y nicht beide ungerade sein.

1. Indirekter Beweis: Angenommen, x und y wären beide ungerade. Dann könnte man sie in der Form $x = 2k+1$ und $y = 2l+1$ schreiben, und z wäre gerade: $z = 2m$ (wobei $k; l; m$ ganze nichtnegative Zahlen sind). Dann wird

$$x^2 + y^2 = 4(k^2 + l^2) + 4(k + l) + 2 = 4m^2$$

Das ist jedoch ein Widerspruch, da 2 nicht durch 4 teilbar ist. Also ist die Annahme falsch und es muss eine der beiden Zahlen x und y gerade, die andere ungerade sein (dass nicht beide gerade sein können, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung, da dann auch z gerade wäre und somit die drei Zahlen den gemeinsamen Teiler 2 hätten).

2. Direkter Beweis: Drei pythagoreische Zahlen $x; y; z$ kann man stets in der Form

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad ; \quad y = uv \quad ; \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

darstellen, wobei u und v ungerade Zahlen mit $u > v$ sind. Dann ist y als Produkt zweier ungerader Zahlen selbst ungerade.
Setzt man $u = 2m + 1, v = 2n + l$ (wobei m und n ganze nichtnegative Zahlen mit $m > n$ sind), so ist

$$x = \frac{(2m + 1)^2 - (2n + 1)^2}{2} = 2(m - n)(m + n + 1)$$

also gerade. Wegen der Kommutativität der Addition könnte man auch $x = uv, y = \frac{u^2 - v^2}{2}$ setzen; dann ist x ungerade, y gerade. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lösung von Peter Beckmann:

Wären sowohl x als auch y ungerade, so wäre $x \equiv \pm 1 \pmod 4$ und $y \equiv \pm 1 \pmod 4$, d.h. $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ und $y^2 \equiv 1 \pmod 4$ und damit

$$x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$$

Es gibt aber kein z, das die Kongruenz $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ erfüllt, da 2 quadratischer Nichtrest (mod 4) ist. Die beiden Zahlen x und y können also nicht beide Ungerade sein (die Forderung der Teilerfremdheit von

$x; y; z$ ist überflüssig).

Lösung von Karl-Heinz Tuschel:

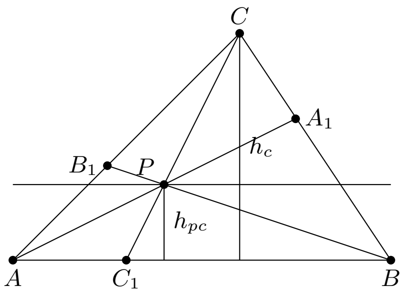
Wir können ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit annehmen, dass $y > x$ ist. Es sei $y = x + n$ mit $n > 0$. Dann ist

$$x^2 + (x+n)^2 = z^2 \quad \to \quad x^2 = \frac{z}{2} \cdot z - nx - \frac{n}{2} \cdot n$$

Wenn x und y beide ungerade sind, so sind z und n gerade. Dann ist aber offenbar jeder Summand auf der rechten Seite der letzten Gleichung gerade. Folglich müsste auch x^2 und damit auch x gerade sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Aufgabe 34/67
Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein Punkt P im Inneren des Dreiecks. Die Verlängerungen der Strecken AP, BP und CP schneiden die Dreiecksseiten in den Punkten A_1, B_1 und C_1. Man beweise, dass gilt

$$\frac{A_1P}{AA_1} + \frac{B_1P}{BB_1} + \frac{C_1P}{CC_1} = 1$$



Man errichte im Dreieck ABC die Höhe h_c auf die Seite $AB = c$ und ziehe die Parallele zu c durch P (Abbildung). Der Abstand der Parallelen von c sei h_{pc}. Dann gilt für den Flächeninhalt $A(ABC)$ des Dreiecks ABC die Gleichung

$$A(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot h_c$$

und für den Flächeninhalt $A(ABP)$ des Dreiecks AB: $A(ABP) = \frac{1}{2} AB \cdot h_{pc}$. Daraus folgt $\frac{A(ABP)}{A(ABC)} = \frac{h_{pc}}{h_c}$.

Nach dem Strahlensatz gilt aber $\frac{h_{pc}}{h_c} = \frac{C_1P}{CC_1}$. Also gilt

$$\frac{A(ABP)}{A(ABC)} = \frac{C_1P}{CC_1}$$

Analog erhält man

$$\frac{A(BCP)}{A(ABC)} = \frac{A_1P}{AA_1} \quad ; \quad \frac{A(ACP)}{A(ABC)} = \frac{B_1P}{BB_1}$$

Addiert man die drei Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{A_1P}{AA_1} + \frac{B_1P}{BB_1} + \frac{C_1P}{CC_1} = \frac{A(ABP) + A(BCP) + A(ACP)}{A(ABC)} = 1$$

wegen $A(ABP) + A(BCP) + A(ACP) = A(ABC)$.

Aufgabe 35/67
Man zeige, dass man unter $(n+1)$ verschiedenen natürlichen Zahlen, die sämtlich kleiner als $2n$ sind, stets drei finden kann, bei denen die Summe zweier stets gleich der dritten Zahl ist.

Die Zahlen seien $z_1; z_2; ...; z_{n+1}$; sie seien der Größe nach geordnet: $0 < z_1 < z_2 < z_3 < ... < z_{n+1}$. Wir bilden nun die n Zahlen $z_2 - z_1; z_3 - z_1, z_4 - z_1; ...; z_{n+1} - z_1$.
Diese Zahlen sind wieder sämtlich voneinander verschieden und kleiner als $2n$. Unter ihnen ist mindestens eine, die gleich einer der Zahlen $z_2; z_3; z_4; ...; z_{n+1}$ ist. Wäre das nämlich nicht der Fall, so könnten die $2n$ Zahlen

$$z_2; z_3; z_4; ...; z_{n+1}; z_2 - z_1; z_3 - z_1, z_4 - z_1; ...; z_{n+1} - z_1$$

nicht sämtlich kleiner als $2n$ sein.
Es gilt also sicher für mindestens ein k und ein m $z_k - z_1 = z_m$ mit $k; m \leq n+1$. Daraus folgt sofort $z_k = z_m + z_1$.

Aufgabe 36/67
Weisen Sie durch elementare Umformungen nach, dass die Gleichung

$$x^4 - 12x^3 + 63x^2 - 102x + 85 = 0$$

keine reellen Lösungen hat!

Der Nachweis ist erbracht, wenn gezeigt ist, dass der Wertevorrat der Funktion

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 63x^2 - 102x + 85$$

für die reelle Variable x nur positive Zahlen enthält. Dies wiederum ist bewiesen, wenn sich das Polynom 4. Grades als Summe von mindestens einem positiven und sonst nur nichtnegativen Summanden darstellen lässt. Sicher nicht negativ sind Potenzen mit geraden Exponenten. Man ergänzt daher zunächst die ersten beiden Glieder $x^2 - 12x^3$ des Polynoms zur vollen 4. Potenz eines Binoms:

$$f(x) = x^3 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 + 9x^2 + 6x + 4 = (x-3)^4 + 9x^2 + 6x + 4$$

Nun ergänzt man die folgenden beiden Glieder $9x^2 + 6x$ zum vollen Quadrat eines Binoms:

$$f(x) = (x-3)^4 + 9x^2 + 6x + 1 + 3 = (x-3)^4 + (3x+1)^2 + 3$$

Da die ersten beiden Summanden wegen der geraden Exponenten sicher nicht negativ sind und der dritte Summand positiv ist, kann die Funktion nirgends den Wert 0 annehmen. Daraus folgt, dass die vorgelegte Gleichung keine reellen Lösungen hat.

2.8 Aufgaben und Lösungen 1968

Aufgabe 1/68
In einem Punkt A befinden sich n Scheiben S_i mit den Durchmessern d_i ($i = 1; 2; ...; n$) so übereinander-gestapelt, dass $d_j < d_k$ für $j < k$ gilt.
Sie sollen einzeln nach einem Punkt B gebracht werden, wobei ein Punkt C als Äblageplatz"benutzt werden darf.
Dabei ist die Bedingung zu beachten, dass niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen darf.
Wie viele Transportschritte sind mindestens erforderlich?

Man versucht zunächst durch Probieren eine Vermutung zu finden:
Für $n = 1$ ist offensichtlich ein Schritt erforderlich. Bei $n = 2$ wird zunächst der erste (oberste) Scheibe nach C, darauf die zweite nach B und schließlich die erste nach B gebracht (3 Schritte).
Ebenso überlegt man, dass für $n = 3$ sich 7 und für $n = 4$ sich 15 Schritte ergeben.

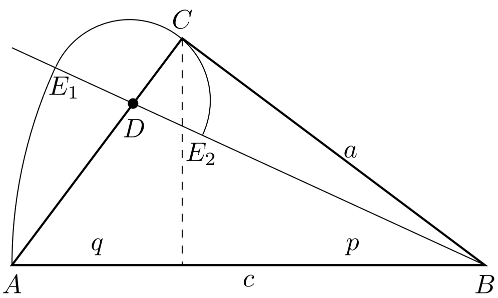
Vermutung: Bei n Scheiben ist die Anzahl der erforderlichen Schritte $2^n - 1$.

Beweis durch vollständige Induktion:
Für $n = 1$ bis $n = 4$ ist die Vermutung offensichtlich richtig.
Denn $2^1 - 1 = 1; 2^2 - 1 = 3; 2^3 - 1 = 7; 2^4 - 1 = 15$.
Wir nehmen an, die ersten k Scheiben ließen sich in $2^k - 1$ Schritten umordnen. Dann ordnet man sich entsprechend nach C, bringt die $(k + 1)$-te Scheibe nach B und ordnet die ersten k Scheiben in $2^k - 1$ Schritten von C nach B.
Die Gesamtzahl der Schritte ist dann

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Damit ist die Richtigkeit der Vermutung bewiesen.

Aufgabe 2/68
Ein rechtwinkliges Dreieck ist aus einer Kathete und dem Hypotenusenabschnitt, der zur anderen Kathete gehört zu konstruieren.



Analysis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\gamma = 90°$ und a sowie q gegeben. Es gilt (siehe Skizze) nach dem Satz von Euklid

$$a^2 = pc \text{ und } p = c - q \text{ (wegen } p + q = c)$$

also

$$a^2 = (c - q)c$$

Daraus folgt

$$c = \frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + a^2}$$

wobei das Minuszeichen geometrisch keine Bedeutung hat (sonst wäre $c < 0$).

Konstruktion: Auf dem freien Schenkel eines rechten Winkels mit dem Scheitelpunkt C trägt man die Strecken $a = \overline{AB}$ und $\frac{q}{2} = \overline{CD}$ ab.
Der Kreis um D mit dem Radius $\frac{q}{2}$ schneidet $\overline{BD}$ in E_1 und E_2. Man bezeichne so, dass D zwischen den Punkten E_1 und B liegt.
Der dritte Punkt A des gesuchten Dreiecks ist der Schnittpunkt der Verlängerung von $\overline{CD}$ über D hinaus mit dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{BE_1}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$$\overline{AB} = \overline{BE_1} = \overline{BD} + \overline{DE_1} = \sqrt{a^2 + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2} = c$$

Determination: Analysis und Konstruktion zeigen, dass die Aufgabe stets eindeutig lösbar ist; a und q können als Strecken beliebig vorgegeben werden.

Aufgabe 3/68
Man bestimme sechs Primzahlen so, dass sie eine arithmetische Folge bilden und ihre Summe ein Minimum ist.

Es sei p_1 die kleinste der sechs Primzahlen, $p_2, ..., p_6$ die übrigen und d die (nach Definition konstante) Differenz der arithmetischen Folge. Dann gilt

$$p_1 = p_1, p_2 = p_1 + d, p_3 = p_1 + 2d, p_4 = p_1 + 3d, p_5 = p_1 + 4d, p_6 = p_1 + 5d$$

Damit $S = 6p_1 + 15d$ ein Minimum wird, müssen p_1 und d minimal gewählt werden.
Für p_1 kommen $2; 3; 5$ nicht in Frage, denn wäre $p_1 = 2$, so wäre $p_3 = 2 + 2d$ nicht Primzahl, wäre $p_1 = 3$ so folgt, dass $p_4 = 3 + 3d$ nicht Primzahl ist, und entsprechend ergibt sich für $p_1 = 5$, dass $p_6 = 5 + 5d$ nicht Primzahl sein kann.
Daraus folgt $p_1 \geq 7$, der kleinste in Frage kommende Wert für p_1 ist 7.

Für die Wahl von d ergeben sich folgende Überlegungen:
1. d muss durch 2 teilbar sein, da sonst $p_2 = p_1 + d$ gerade und somit keine Primzahl wäre.
2. d muss durch 3 teilbar sein, da sonst wenigstens eine der Zahlen $p_2, ..., p_6$ durch 3 teilbar wäre.
Beweis: Wenn d nicht durch 3 teilbar ist, lässt es beim Teilen durch 3 entweder den Rest 1 oder 2.
Die Zahl p_1 ist als Primzahl nicht durch 3 teilbar, lässt also ebenfalls entweder den Rest 1 oder 2.
Wie man leicht nachprüft, führt jede der vier möglichen Kombinationen auf mindestens eine Zahl p_i mit $i = 2,...,6$, die durch 3 teilbar ist.
3. d muss durch 5 teilbar sein (Schlussfolgerung analog).
Also ist d durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar, das kleinste mögliche d ist also 30.

Tatsächlich bilden die Zahlen $7; 37; 67; 97; 127; 157$ eine Primzahlfolge.
Ihre Summe ist 492; es ist die kleinste Summe aus sechs Primzahlen, die eine arithmetische Folge bilden.

Aufgabe 4/68
Es sei $0 < a < 1$, n eine natürliche Zahl. Welche Zahlen a unterscheiden sich von n von ihrer reziproken Zahl?
Welcher Wert ergibt sich speziell für $n = 1$?

Aus der in der Aufgabe geforderten Bedingung ergibt sich sofort die Gleichung

$$n = \frac{1}{a} - a$$

oder - nach Multiplikation mit $a \neq 0$ und Umformung - $a^2 + na - 1 = 0$ mit der (wegen $a > 0$) einzigen Lösung

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{n^2 + 4} - n)$$

Speziell für $n = 1$ folgt $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618...$, also die Maßzahl des Goldenen Schnitts. Tatsächlich ist $\frac{1}{0{,}618...} = 1{,}618....$
Alle Zahlen a, die die Gleichung erfüllen, haben die geforderte Eigenschaft. Es sind, wie man sich leicht überzeugt, abzählbar unendlich viele.

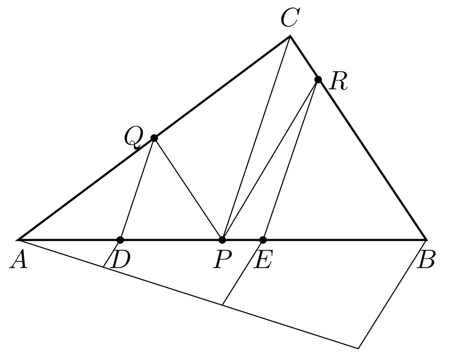
Aufgabe 5/68
Auf der Seite $\overline{AB}$ des beliebigen Dreiecks ABC liege ein Punkt P.
Ferner sei Q ein innerer Punkt der Seite $\overline{AC}$ und R ein innerer Punkt der Seite $\overline{BC}$.
Wird P mit Q und R verbunden, so zerfällt das Dreieck in drei Teilstücke.

a) Wie müssen die Lagen von Q und R gewählt werden, wenn die drei Teilstücke flächengleich sein sollen?

b) Unter welchen Bedingungen sind alle drei Teilstücke Dreiecke?

Analysis zu a): Wenn alle drei Teilstücke flächengleich sein sollen, muss jedes Teilstück den Flächeninhalt $\frac{F}{3}$ haben (wobei mit F der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichnet ist).

Wir konstruieren zunächst ein Dreieck ACD mit D auf $\overline{AB}$ so, dass sein Flächeninhalt gleich $\frac{F}{3}$ ist, indem wir D im Inneren von $\overline{AB}$ so festlegen, dass $\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{3}$ ist.
Dieses Dreieck wird dann in ein flächengleiches Dreieck APQ verwandelt.



Da denn Dreiecken ADC und APQ das Dreieck ADQ gemeinsam ist, läuft dieser Teil der Lösung darauf hinaus, ein zum Dreieck DQC flächengleiches Dreieck DQP zu konstruieren.
Nun haben die Dreiecke DQC und DQP diesselbe Grundlinie DQ; sie sind also dann flächengleich, wenn sie die gleiche Höhe auf dieser haben.
Das heißt aber, dass Q auf der Parallelen durch D zu PC liegen muss. Eine analoge Überlegung zur Konstruktion von R. Konstruktion und Beweis zu a) folgen unmittelbar aus der Analysis.

Überlegung zu b): Alle drei Teilstücke sind genau dann Dreiecke, wenn entweder Q oder R mit zusammenfällt. Da nach Analysis zu a) sowohl DQ als auch ER zu PC parallel sein müssen (wobei E der zweite Drittelungspunkt von AB ist), gilt entweder $P = D$ oder $P = E$.

Aufgabe 6/68
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $k > 0$ die Zahl $x_k = 7^{2k} + 343$ ohne Rest durch 392 teilbar ist!

Zum Ziel führt eine geschickte Umformung und Faktorenzerlegung. Es ist

$$x_k = 7^{2k} + 343 = 7^{2k} - 49 + 392 = 7^{2k} - 7^2 + 392 = 7^2(7^{2k-2} - 1) + 392 = 7^2(7^{k-1} - 1)(7^{k-1} + 1) + 392$$

Da der zweite Summand ohne Rest durch 392 teilbar ist, genügt es, nachzuweisen, dass dies auch für den ersten Summanden zutrifft.
Er ist genau dann ohne Rest durch 392 teilbar, wenn er mindestens die Primfaktoren von 392 enthält: $392 = 2^3 \cdot 7^2$. Die Primzahlpotenz 7^2 ist enthalten; es bleibt also noch zu zeigen, dass die Faktoren $7^{k-1} - 1$ und $7^{k-1} + 1$ die Primzahlpotenz 2^3 enthalten.
Mit 7 ist auch 7^{k-1} ein ungerade Zahl. Folglich sind $7^{k-1} - 1$ und $7^{k-1} + 1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, also sind beide durch 2 und genau eine von ihnen sogar durch $4 = 2^2$ ohne Rest teilbar. Ihr Produkt enthält also den Faktor $2 \cdot 2^2 = 2^3$.

Aufgabe 7/68
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, für die $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern ist.

Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

nach der Aufgabenstellung soll dieser Ausdruck eine dreistellige Zahl mit gleichen Ziffern sein.
Eine solche Zahl kann man durch $111a$ mit $1 \leq a \leq 9$ (a ganzzahlig) darstellen. Also muss die Gleichung

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111a$$

gelten. Umgeformt ergibt sich $n(n+1) = 222a = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$.
Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Produkt aus zwei aufeinanderfolgenden Zahlen. Folglich muss auch die rechte Seite ein solches Produkt sein. Daraus schließt man, dass

$$2 \cdot 3 \cdot a = 6a = 36 \text{ oder } 2 \cdot 3 \cdot a = 6a = 38$$

sein muss (man überzeugt sich leicht, dass andere Faktorenkombinationen wegen der Bedingung für a nicht in Frage kommen). Nur die erste dieser beiden Gleichungen hat für a eine ganzzahlige Lösung, nämlich $a = 6$. Damit folgt $n = 36$, und die dreistellige Zahl ist 666.

Aufgabe 8/68
Eine Ebene werde von n Geraden in 56 Teile geteilt. Keine der n Geraden sei parallel zu einer anderen, und in keinem Punkt schneiden einander mehr als zwei Geraden.
Wie groß ist n?

Behauptung: Unter den in der Aufgabe genannten Bedingungen teilen n Geraden die Ebene in

$$k_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Teile.
Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 0$ (die Ebene wird nicht geteilt, besteht also aus einem Teil) und für $n = 1$ (die Ebene wird einmal, also in zwei Teile geteilt).
Angenommen, die Behauptung sei für $n = i$ richtig: $k_i = 1 + \frac{i(i+1)}{2}$.
Dann werden durch die $(i + 1)$-te Gerade $i + 1$ Ebenenteile erzeugt. Da diese Gerade nämlich zu keiner anderen parallel ist, schneidet sie jede andere; da sie außerdem durch keinen anderen Schnittpunkt zweier Geraden geht, schneidet sie $i - 1$ zwischen den i Geraden liegende und 2 außerhalb von ihnen liegende Ebenenteile, insgesamt also $i + 1$ Ebenenteile in je 2 Teile. Es ist also

$$k_{i+1} = 1 + \frac{i(i+1)}{2} + i + 1 = 1 + \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

Aus der Gültigkeit für $n = i$ folgt also die Gültigkeit für $n = i + 1$. Damit ist insgesamt gezeigt, dass die Behauptung richtig ist.
Aus der Gleichung $k_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = 56$ folgt nun $n = 10$.
(Da n eine natürliche Zahl ist, scheidet die negative Lösung der sich ergebenden quadratischen Gleichung aus.) Es liegen demnach 10 Geraden in der Ebene.

Aufgabe 9/68
Man beweise, dass alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $0 < k \leq n - 1$ durch n ohne Rest teilbar sind, wenn n eine Primzahl ist, und dass für jede Nichtprimzahl n mindestens ein Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $0 < k \leq n - 1$ nicht durch n ohne Rest teilbar ist!

Alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ sind ganzzahlig, wenn n und k ganzzahlig sind (im übrigen ist $\binom{n}{k}$ nur für ganzzahliges k definiert).
Nach der Definition des Binomialkoeffizienten ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

Nimmt man an, dass n eine Primzahl ist, so sind für $0 < k \leq n-1$ alle Faktoren des Nenners stets kleiner als diese Primzahl. Wegen der Ganzzahligkeit von $\binom{n}{k}$ muss dann auch $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$ ganzzahlig sein.
Daher ist $\binom{n}{k}$ ein ganzzahliges Vielfaches der Primzahl n, d.h., $\binom{n}{k}$ ist dann für $0 < k \leq n-1$ stets durch n teilbar.
Ist n keine Primzahl, so ist unter allen k mit $0 < k \leq n - 1$ mindestens ein k_1 zu finden, das Primteiler von n ist. Dann ist nur der erste Faktor n des Zählers von $\binom{n}{k_1}$ durch k_1 ohne Rest teilbar, da das nächstkleinere Vielfache von k_1, nämlich $n - k_1$, im Zähler nicht mehr als Faktor vorkommt.
Ist k_1^m (wobei m eine natürliche Zahl ist) die höchste in n enthaltene Potenz von k_1, so enthält demnach $\binom{n}{k_1}$ nur noch k_1^{m-1} und nicht k_1^m als Teiler. Folglich ist $\binom{n}{k_1}$ nicht ohne Rest durch n teilbar, wenn n keine Primzahl ist.
Beispiele:

$$1. \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220 = 2 \cdot 11 \cdot 10$$

(nicht durch 12 teilbar, da 12 Nichtprimzahl und 3 Primteiler von 12 ist)

$$2. \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792 = 12 \cdot 66$$

(durch 12 teilbar, da 12 zwar Nichtprimzahl, 5 aber nicht Primteiler von 12 ist).

Aufgabe 10/68
Beim Schachspiel kann man mit den Türmen Züge beliebiger Länge (sofern kein Feld besetzt ist) in seitlicher Richtung und senkrecht dazu ausführen.
Auf wieviel Wegen kann ein Turm von einem Eckfeld in das diagonal gegenüberliegende Eckfeld überführt werden, wenn keine rückläufigen Züge zugelassen sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, das Ausgangsfeld sei das linke untere, das Zielfeld das rechte obere Feld.
Den Übergang zum rechts benachbarten symbolisieren wir mir r, den zum oberhalb benachbarten Feld mit o. Solche Züge nennen wir "Elementarzüge". Jede erlaubte Zugfolge, z.B.

$$3r...2o...r...4o...r...o...2r$$

lässt sich in einer Folge von 14 Elementarzügen auflösen: $rrroorooooror r$.
Es liegt demnach eine Permuation von 14 Elementen $rrrrrrrooooooo$ vor, wobei je 7 Elemente einander gleich sind. Die Anzahl der Permutationen ist in diesem Falle

$$P(14) = \frac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$$

Der Turm kann sein Ziel auf 3432 verschiedenen Wegen erreichen.

Aufgabe 11/68
Ist von drei natürlichen Zahlen a, b, c, die ein pythagoreisches Tripel bilden (für die also gilt $a^2 + b^2 = c^2$), einer der beiden Zahlen a oder b eine Primzahl, so sind die beiden anderen zwei aufeinanderfolgende Zahlen, und die Primzahl ist die kleinste der drei Zahlen.
Dieser Satz ist zu beweisen. Es ist ferner zu prüfen, ob umgekehrt auch gilt:
Sind unter drei pythagoreischen Zahlen zwei aufeinanderfolgende Zahlen, so ist die dritte Zahl die kleinste und Primzahl.

Angenommen, unter den drei natürlichen Zahlen a, b, c, für die gilt $a^2 + b^2 = c^2$, sei a eine Primzahl: $a = p$. Dann gilt

$$a^2 = p^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

Daraus folgt bereits $p^2 < c^2$ und damit $p < c$. Da $c + b > c - b$ ist, muss wegen der Primzahleigenschaft von p gelten $p^2 = c + b$ und $c - b = 1$. Daraus folgt $c = b + 1 > b$.
Nun ist $p \neq b$ (unter drei pythagoreischen Zahlen sind niemals zwei gleiche, wie man leicht nachweist), also ist $p < b$. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Umkehrung gilt nicht, wie man an Hand des Gegenbeispiels 9; 40; 41 beweisen kann:
Diese Zahlen bilden ein pythagoreisches Tripel, und die zwei größeren sind zwei aufeinanderfolgende Zahlen. Die kleinste dieser drei Zahlen ist aber keine Primzahl.

Aufgabe 12/68
Man berechne die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$

Es ist

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\cdot\sum_{l=0}^{n}\binom{n-l}{l}\cdot 1^l\cdot 1^{n-1-l} = n(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

Aufgabe 13/68
Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $\sqrt{y^2-80} = 2(x+2)$.

Da der rechte Term der Gleichung ganzzahlig sein soll, muss auch der linke Term ganzzahlig sein. Es gilt also $\sqrt{y^2-80} = z$ mit ganzzahligem z oder

$$y^2-80 = z^2, y^2-z^2 = (y-z)(y+z) = 80$$

Offensichtlich sind y und z entweder beide gerade oder beide ungerade, da sonst die Faktoren $y-z$ und $y+z$ beide ungerade und damit ihr Produkt ungerade wären. Man zerlegt also die Zahl 80 in ihre geraden Faktoren:

$$80 = |40|\cdot|2| = |21+19|\cdot|21-19]$$
$$80 = |20|\cdot|4| = |12+8|\cdot|12-8]$$
$$80 = |10|\cdot|8| = |9+1|\cdot|9-1]$$

Für y kommen also nur die Zahlen $\pm 9; \pm 12; \pm 21$ in Frage. Dabei ergibt sich für ± 12 ein ganzzahliger Wert für x: $x = 2$. Die ganzzahligen Lösungen sind demnach $x_1 = 2; y_1 = 12$ und $x_2 = 2; y_2 = -12$.

Aufgabe 14/68
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, die gleich dem Quadrat ihrer Quersumme sind.

Ist q die Quersumme der gesuchten Zahl x, so soll laut Aufgabenstellung die Gleichung $x = q^2$ gelten. Nun gehören q und q^2 derselben Restklasse mod 9 an:

$$q^2 \equiv q \pmod 9 \to q(q-1) \equiv 0 \pmod 9 \qquad (1)$$

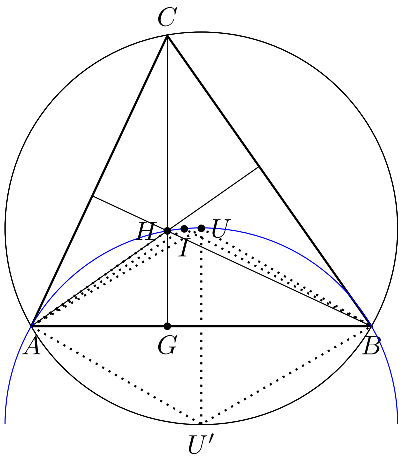
woraus sich $q \equiv 0 \pmod 9$ oder $q \equiv 1 \pmod 9$ ergibt.
Die einstelligen q-Werte 1 und 9 erfüllen die Bedingungen der Aufgabe: $1 = 1^2$ und $81 = 9^2$.
Hat die Quersumme n Stellen ($n \geq 2$), gilt also $10^{n-1} \leq q_n \leq 10^n$ (2), so hat q_n^2 entweder $2n-1$ oder $2n$ Stellen. Die Quersumme einer solchen Zahl ist höchstens $9\cdot 2n = 18n$. Also gilt $q_n \leq 18n$ (3).
Aus den Ungleichungen (2) und (3) folgt als notwendige Bedingung $10^{n-1} \leq 18n$. (4)

Diese Ungleichung ist für die natürlichen Zahlen 1 und 2 erfüllt. Dies sind aber auch die einzigen natürlichen Zahlen, für die sie gilt; wie man leicht aus einer graphischen Darstellung der Funktionen $f(x) = 10^{x-1}$ und $g(x) = 18x$ erkennt. Bereits für $n = 3$ gilt diese Ungleichung nicht mehr.
Wir stellen nunmehr die zweistelligen q-Werte und ihre Quadrate zusammen, die unter Beachtung der Ungleichung (3) die Kongruenzen (1) erfüllen:

$$q = 10; 18; 19; 27; 28; 36$$
$$q^2 = 100; 324; 361; 729; 784; 1296$$

Es zeigt sich, dass die Quersummen von q^2 nicht q ergeben, sondern nur zu q kongruent (mod 9) sind. Also hat die Aufgabe nur die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = 81$ (wobei $x = 1$ als trivial angesehen werden kann).

Aufgabe 15/68
Unter welcher Bedingung liegen in einem Dreieck ABC die Eckpunkte A und B, der Höhenschnittpunkt H, der Umkreismittelpunkt U und der Inkreismittelpunkt I auf einem Kreis?
Radius und Lage des Mittelpunktes dieses Kreises sind zu bestimmen.



Wenn H, I und U auf einem Kreis durch A und B liegen, so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\measuredangle(AHB) = \measuredangle(AIB) = \measuredangle(AUB)$.
Nun ist $\measuredangle(AHB) = \measuredangle(AHG) + \measuredangle(GHB) = \alpha + \beta$ (senkrecht aufeinanderstehende Schenkel). Aus dem Dreieck AIB ergibt sich $\measuredangle(AIB) = 180° - \measuredangle(IAB) - \measuredangle(IBA)$ (Winkelsummensatz); da IA und IB die Winkel α und β halbieren

$$\measuredangle(AIB) = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

Aus diesen Betrachtungen folgt

$$\alpha + \beta = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \to \alpha + \beta = 120°$$

Nach dem Winkelsummensatz ist dann $\gamma = 60°$. Da $\gamma = \measuredangle(ACB)$ Peripheriewinkel im Umkreis über der Sehne AB ist, muss nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel $\measuredangle(AUB) = 2\gamma = 120°$ sein. Folglich liegt auch U nach dem Satz über Peripheriewinkel auf dem Kreis, auf dem A, H, I und B liegen.

Damit ist gezeigt: Wenn H und I auf einem Kreis durch A und B liegen, so ist $\gamma = 60°$, und U liegt auf demselben Kreis.
Man folgert umgekehrt: Wenn $\gamma = 60°$ ist, so sind $\measuredangle(AUB) = 120°, \measuredangle(AIB) = 120°, \measuredangle(AHB) = 120°$, folglich liegen A, H, I, U und B auf einem Kreis. Die Bedingung ist also sowohl notwendig als auch hinreichend.

Das ΔAUB wegen $AU = AB$ gleichschenklig mit der Basis AB ist, folgt aus der Gleichschenkligkeit von $\Delta ABU'$, dass $\measuredangle(BAU') = \measuredangle(ABU') = 30°$ ist. Das Dreieck $UU'A$ ist also gleichseitig, und es ist

$$UU' = AU = BU = AU' = BU'$$

Daraus folgt, dass der gesuchte Radius UU' gleich dem Umkreisradius des Dreiecks ABC ist und U' symmetrisch zu U bezüglich AB als Symmetrieachse liegt.

Aufgabe 16/68
Beweise: Der Ausdruck $3n^2 - 1$ ergibt für kein ganzzahliges n eine Quadratzahl!

Zur Lösung benutzen wir folgenden Satz:
Jede Quadratzahl lässt beim Dividieren mit 4 den Rest 0 oder den Rest 1.
Beweis dieses Satzes: Ist die Basis der Quadratzahl m^2 gerade, also $m = 2k$ (mit natürlichem k), so ist $m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ohne Rest durch 4 teilbar. Ist die Basis m der Quadratzahl ungerade, also $m = 2k + 1$ (mit natürlichem k), so ist $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ durch 4 mit dem Rest 1 teilbar.

Beweis der Behauptung: Nach dem eben bewiesenen Satz ist

$$n^2 \equiv 0 \pmod 4 \text{ , oder } n^2 \equiv 1 \pmod 4$$

$$3n^2 \equiv 0 \pmod 4 \text{ , oder } 3n^2 \equiv 3 \pmod 4$$

$$3n^2 - 1 \equiv 3 \pmod 4 \text{ , oder } 3n^2 - 1 \equiv 2 \pmod 4$$

Die Zahl $3n^2 - 1$ lässt also bei ganzzahligem n nie den Rest 0 oder den Rest 1 beim Dividieren durch 4, kann also nach dem oben bewiesenen Satz nicht Quadratzahl sein.

Aufgabe 17/68
Im Raum seien $2n$ Punkte gegeben ($n \leq 1$, ganz). Wir verbinden diese Punkte paarweise derart durch 2^{n-1} Strecken, dass jeder Punkt genau einmal Endpunkte einer Strecke ist.
Mit den 2^{n-1} Mittelpunkten dieser Strecken verfahren wir analog usw. Nach dem n-ten Schritt erhalten wir genau einen Mittelpunkt, dieser heiße A. Es ist zu beweisen, dass die Lange von A unabhängig von der Bildung der Punktepaare ist.

Wir betrachten die gegebenen Punkte als Massepunkte mit der Masse m. Nachdem wir das angegebene Verfahren einmal durchgeführt haben, erhalten wir 2^{n-1} Punkte, von denen jeder Schwerpunkt von zwei Punkten ist und somit die Masse $2m$ verkörpert.
Beim zweiten Schritt erhalten wir 2^{n-2} Schwerpunkte, deren jeder die Masse $4m$ verkörpert usw. Der Punkt A ist demnach Masseschwerpunkt aller gegebenen Punkte. Da das gegebene Punktsystem sicher genau einen Schwerpunkt hat, muss sich A unabhängig von der Zusammenfassung der Punkte zu Paaren ergeben.

Aufgabe 18/68
Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n} < \sqrt[n]{3} - 1$$

gilt (wobei $\sqrt[1]{a} = a$ bedeute)!

Sicher gilt für jedes natürliche $n \geq 1$ die Ungleichung

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

mit $n = 1{,}2{,}3{,}...$ strebt bekanntlich von unten gegen die Basis $e = 2{,}718...$ der natürlichen Logarithmen: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Für $n = 1$ ist $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2$. Damit ist aber

$$\sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{3} \text{ und } \sqrt[n]{2} - 1 \leq \frac{1}{n} < \sqrt[n]{3} - 1$$

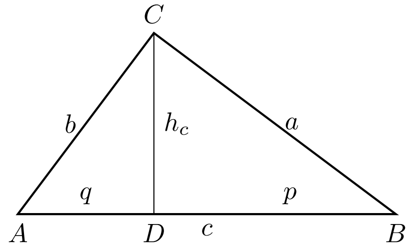
Aufgabe 19/68
Im Jahre 1968 ist jemand genau so alt, wie die Quersumme seines Geburtsjahres angibt. In welchem Jahr ist er geboren?

Das Geburtsjahr muss offensichtlich im 20. Jahrhundert liegen; würde es nämlich noch ins 19. Jahrhundert fallen, so wäre die höchste in Frage kommende Quersumme die das Jahres 1899, sie beträgt 27. Es ist aber $1899 + 27 < 1968$.
Man kann daher ansetzen

$$1900 + 10z + e + (1 + 9 + z + e) = 1968$$

wobei z die Zehnerstelle und e die Einerstelle des Geburtsjahres sind. Daraus folgt nach Umformung $z = \frac{2}{11}(29 - e)$.
Da für e die Ungleichung $0 \leq e \leq 9$ gilt und z ganzzahlig sein muss (beides auf Grund ihrer Definition als Einer- bzw. Zehnerstelle) kann nur $e = 7$ gelten. Damit wird $z = 4$.
Das Geburtsjahr ist also 1947 mit der Quersumme 21, die genau das Alter im Jahre 1968 angibt.

Aufgabe 20/68
Gesucht ist der Flächeninhalt des kleinstmöglichen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse c, dessen Seiten a, b und c sowie dessen Höhe h_c ganzzahlig sind.



Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung. Durch h_c entstehen außer dem rechtwinkligen Dreieck ABC noch die beiden bei D rechtwinkligen Dreiecke ADC und BCD, so dass die folgenden Beziehungen gelten, die sämtlich in ganzen Zahlen erfüllt sein müssen:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1) \quad ; \quad q^2 + h_c^2 = b^2 \quad (2) \quad ; \quad p^2 + h_c^2 = a^2 \quad (3)$$

$$pq = h_c^2 \quad (4) \quad ; \quad p + q = c \quad (5)$$

Aus (4) folgt $p = \frac{h_c^2}{q}$ (6), d.h., h_c und q haben einen gemeinsamen Teiler; dann muss wegen (2) auch b diesen Teiler haben:

$$q = tu \quad ; \quad h_c = tv \quad ; \quad b = tw \quad (7)$$

Daraus ergibt sich, dass q, h_c und p kein primitives pythagoreisches Tripel bilden können.
Es sei nun $u; v; w$ ein primitives pythagoreisches Tripel, d.h., u, v und w seien paarweise teilerfremd. Dann folgt aus (6), wenn man (7) einsetzt, dass das kleinstmögliche t sich für $t = u$ ergibt: $q = u^2, h_c = uv, b = uw$ (8).
Damit folgt aber aus (6) auch $p = v^2$ und aus (3) und (5) $a = vw, c = w^2$. Die Probe zeigt, dass auch (1) erfüllt ist:

$$a^2 + b^2 = (vw)^2 + (uw)^2 = w^2(v^2 + u^2) = w^2 \cdot w^2 = w^4 = c^2$$

Das kleinste Dreieck erhält man, wenn man für u, v, w das kleinste primitive pythagoreische Tripel einsetzt. Das ist bekanntlich 3, 4, 5. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}vw \cdot uw = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 150 \text{ Flächeneinheiten}$$

Aufgabe 21/68
Man löse das System folgender Gleichungen

$$\begin{aligned} \log_2 x \cdot \log_x (x - 3y) = 2 \qquad (I) \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}} \qquad (II) \end{aligned}$$

Geht man bei der Gleichung (I) zur Basis 2 über, so erhält man

$$\log_2 x \cdot \log_x (x - 3y) = \log_2 x \frac{\log_2 (x - 3y)}{\log_2 x} = \log_2 (x - 3y) = 2$$

oder $x - 3y = 4$. Logarithmiert man die Gleichung (II) zur Basis x, so ergibt sich die Gleichung

$$\log_x^2 y - \frac{5}{2} \log y + 1 = 0 \to \log_x y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

Daraus folgt 1. $\log_x y = 2, y = x^2$; und 2. $\log_x y = 0{,}5, x = y^2$.
Man erhält nun wieder zwei Systeme

$$\begin{array}{lll} (A) & x - 3y = 4 & y = x^2 \\ (B) & x - 3y = 4 & x = y^2 \end{array}$$

System (A) hat keine reellen Lösungen; die Lösungen von System (B) sind $x_1 = 1, y_1 = -1$ und $x_2 = 16, y_2 = 4$.
Da aber nach Definition des Logarithmus (im Reellen) y stets positiv sein muss, erfüllt nur $x_2 = 16, y_2 = 4$ das System (I)(II).

Aufgabe 22/68
Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen $(m, n > 0)$, so treten beim Teilen von m^n durch n^2 höchstens n verschiedene Reste auf.

Jede natürliche Zahl m kann man als $m = kn + r$ darstellen, wobei auch k und r natürliche Zahlen (einschließlich der Null) sind und r einen der Werte $0; 1; 2; ...; n - 1$ hat. Dann ist nach dem binomischen Satz

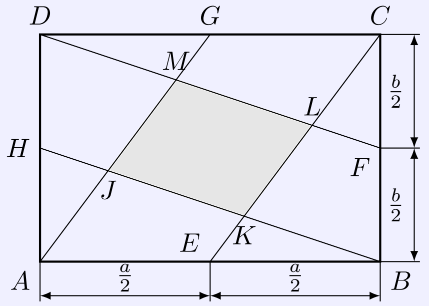
$$m^n = (k \cdot n + r)^n = k^n n^n + \binom{n}{1} k^{n-1} n^{n-1} r + \cdots + \binom{n}{n-1} knr^{n-1} + r^n$$

Da alle Glieder dieser Summe bei auf das letzte durch n^2 ohne Rest teilbar sind, gilt

$$m^n \equiv r^n \pmod{n^2}$$

Da r nur die Werte $0; 1; ...; n-1$ annehmen kann, also insgesamt n Werte möglich sind, kann r^n ebenfalls höchstens n Werte annehmen.

Aufgabe 23/68
Wie groß ist die in der Abbildung gefärbte Parallelogrammfläche?



Nach Konstruktion ist $AG \parallel EC$ und $BH \parallel FD$. Nach einem Strahlensatz gilt daher (wegen $AE = EB$ nach Konstruktion)

$$AI = 2EK, \quad BK = 2FL, \quad IK = KB, \quad KL = LC$$

Dreht man das Dreieck BKE um den Punkt E um 180°, so dass der Punkt B mit dem Punkt A zusammenfällt, so ergibt sich ein Parallelogramm $AIKK'$ (gleichlange Gegenseiten im Viereck). In der gleichen Weise ergänzen die Dreiecke AIH, DMG und CLF die Trapeze $HIMD$, $GMLC$ bzw. $FLKB$ zu Parallelogrammen.
Jedes dieser vier (ergänzten) Parallelogramme ist kongruent dem Parallelogramm $IKLM$ (Übereinstimmung in den Seiten und Winkeln). Also ist der Flächeninhalt A des Parallelogramms $IKLM$ $A = \frac{1}{5}ab$, wenn mit a und b die Seitenlängen des Rechtecks bezeichnet werden.

Aufgabe 24/68
Es ist zu beweisen: Sind a und b natürliche Zahlen, die teilerfremd sind, und ist p eine ungerade Primzahl, die ein Teiler von $a+b$ ist, so ist $a^p + b^p$ ohne Rest durch p^2 teilbar.

Da p ungerade ist, lässt sich $a^p + b^p$ ohne Rest durch $a+b$ teilen:

$$a^p + b^p = (a+b)(a^{p-1} - a^{p-2}b \pm \cdots + b^{p-1}) = (a+b) \cdot S$$

Da p Teiler von $a+b$ ist, gilt $a+b \equiv 0 \pmod p$ oder $b \equiv -a \pmod p$. Also ist

$$S \equiv a^{p-1}a^{p-1} + \cdots + a^{p-1} \equiv pa^{p-1} \text{ (mod p)}$$

Demnach ist p Teiler eines jedes Faktors und p^2 ein Teiler von $a^p + b^p$.

Aufgabe 25/68
Man beweise, dass es keine Primzahl der Form $a^4 + 4$ (mit $a \neq 0; 1$, a eine natürliche Zahl) gibt.

Die Zahl $a^4 + 4$ lässt sich in der Form

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$$

schreiben. Wegen $a \neq 1$ ist jeder dieser Faktoren sowohl von 1 als auch von $a^4 + 4$ verschieden. Daraus folgt, dass $a^4 + 4$ nicht Primzahl ist.

Aufgabe 26/68
Unter welchen Bedingungen ist in einem Dreieck das Quadrat des Umkreisdurchmessers gleich der Summe aus den Quadraten zweier Dreiecksseiten?

Wir verwenden die übliche Bezeichnungsweise (Dreieckseiten a, b, c; gegenüberliegende Winkel α, β, γ; Umkreisdurchmesser d). Gefordert wird $s^3 = a^2 + b^2$. Wegen $a = d \cdot \sin\alpha$ und $b = d \cdot \sin\beta$ ergibt sich andererseits

$$a^2 + b^2 = d^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt daraus

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1; \quad \sin^2\beta = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha; \quad \sin\beta = |\cos\alpha|$$

Diese Relation ist für $0° < \alpha; \beta < 180°$ offensichtlich genau dann erfüllt, wenn entweder

$$1.\ \alpha + \beta = 90° \text{ oder } 2.\ |\alpha - \beta| = 90°$$

ist. Die Lösung 1 kann als trivial angesehen werden (das Dreieck ist rechtwinklig, der Umkreis ist gleich dem Thaleskreis, sein Durchmesser ist gleich der Hypotenuse).
Ergebnis: In einem Dreieck ist das Quadrat des Umkreisdurchmessers gleich der Summe aus den Quadraten zweier Dreieckseiten, wenn die Summe oder Differenz zweier Dreieckwinkel 90° ist. Wie die Herleitung zeigt, ist die Bedingung sowohl notwendig als auch hinreichend. Der Satz ist also umkehrbar.

Aufgabe 27/68
Es ist zu beweisen, dass es genau eine natürliche Zahl n gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sie besteht (in der dekadischen Schreibweise) aus drei verschiedenen Ziffern, von denen keine gleich 1 ist.
2. Je zwei ihrer Ziffern bezeichnen zueinander teilerfremde Zahlen.
3. Sie ist durch jede der von ihren Ziffern bezeichneten Zahlen teilbar.

Wie sich weiter zeigt, besteht die Zahl n aus Primzahlziffern.

Die Ziffern der Zahl n, die das Verlangte leistet, seien a, b, c. Weder a noch b können gerade oder gleich 5 sein, da sonst n ebenfalls gerade bzw. durch 5 teilbar wäre; demnach müsste in diesem Falle c gerade bzw. durch 5 teilbar sein, was der Bedingung 2 widerspricht.
Ferner können a, b, c nicht gleich null sein, da keine Zahl, und demnach auch nicht n, durch Null teilbar ist. Nach Bedingung 1 kann auch keine der Ziffern a, b, c gleich 1 sein. Es verbleiben für a und b:

$$a \in \{3; 7; 9\}; b \in \{3; 7; 9\}$$

Wegen Bedingung 2 können a und b nicht gleichzeitig die beiden Werte 3 und 9 annehmen. Sicher ist also einer von ihnen gleich 7, während der andere 3 oder 9 ist. In jedem Falle gilt daher $(a + b) \equiv 1 \pmod 3$, woraus folgt $c \equiv 2 \pmod 3$, also $c \in \{2; 5; 8\}$.
Nun lässt sich die Lösung durch Fallunterscheidung ermitteln. Man hat insgesamt 12 Fälle zu überprüfen:

$$\begin{array}{llllll} 1. & a = 7 & b = 3 & c \in \{2; 5; 8\} \text{ bzw. } b = 9 & c \in \{2; 5; 8\} \\ 2. & b = 7 & a = 3 & c \in \{2; 5; 8\} \text{ bzw. } a = 9 & c \in \{2; 5; 8\} \end{array}$$

Von ihnen erweist sich nur der Fall $a = 7$, $b = 2$; $c = 5$ als mögliche Lösung. Die gesuchte Zahl lautet somit 735.

Aufgabe 28/68
Man beweise, dass für jede Primzahl $p \geq 7$ der Term

$$T = p^4 - 20p^2 + 64$$

durch 45 ohne Rest teilbar ist!

Der gegebene Term wird in Faktoren zerlegt:

$$T = p^4 - 20p^2 + 64 = (p^2 - 4)(p^2 - 16) = (p - 2)(p + 2)(p - 4)(p + 4)$$

Man untersucht die Teilbarkeit der Faktoren durch 3 und 5. Da $p \neq 3$ ist, gilt $p \equiv 1 \pmod 3$ oder $p \equiv 2 \pmod 3$. Dann ist aber $p - 4 \equiv 0 \pmod 3$ und $p + 2 \equiv 0 \pmod 3$ oder $p - 2 \equiv 0 \pmod 3$ und $p + 4 \equiv 0 \pmod 3$, d.h., in jedem Fall sind zwei Faktoren durch 3 teilbar; 9 ist also Teiler von T.
Da $p \neq 5$ ist, gilt $p \equiv 1$, 2, 3 oder 4 (mod 5). Dann ist aber $p + 4$, $p - 2$, $p + 2$ oder $p - 4 \equiv 0 \pmod 5$, d.h. in jedem Fall ist ein Faktor von T durch 4 teilbar.
Ergebnis: Für jede Primzahl $p \geq 7$ ist der Term $T = p^4 - 20p^2 + 64$ durch 45 ohne Rest teilbar.

Aufgabe 29/68
Es sind die kleinsten sechs natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften zu bestimmen:

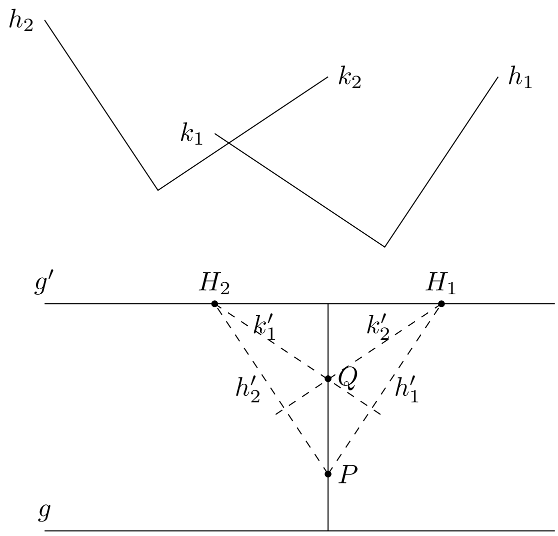
1. Jede Zahl besteht mindestens aus den an beliebiger Stelle stehenden und in beliebiger Reihenfolge angeordneten Ziffer 3, 5 und 9.
2. Jede Zahl ist wenigstens durch 3, 5 und 8 teilbar.

Die letzte Ziffer der kleinsten Zahl n_1 sei a, die vorletzte b usw.: $n_1 = ...edcba$.
Wegen 2 muss n durch $5 \cdot 8 = 40$ teilbar sein, d.h. $a = 0$ und b ist gerade. Wäre n_1 5stellig„ so müsste $n_1 = 359b0$ sein.
Auch bei einer beliebigen Permutation der Ziffern 3, 5 und 9 könnte b wegen der Teilbarkeit von n_1 durch 8 (alle drei Zahlen 3, 5 und 9 sind ungerade) nur 2 oder 6 sein. Dann wäre aber die Quersumme nicht durch 3 teilbar, folglich ist n_1 mindestens 6stellig. Die kleinste 6.Ziffer wäre 1, falls ein entsprechendes b ($b = 2$ oder $b = 6$) existiert. Tatsächlich ist die Quersumme von $n_1 = 1359b0$ für $b = 6$ durch 3 teilbar. Daraus folgt $n_1 = 135960$.
Die übrigen gesuchten Ziffern ergeben sich durch Permutationen der Ziffern 3, 5 und 9, da dabei die gestellten Bedingungen nicht verletzt werden zu

$$n_2 = 139560; n_3 = 153960; n_4 = 159360; n_5 = 193560; n_6 = 195360$$

Aufgabe 30/68
In der Ebene seien zwei rechte Winkel mit den Schenkeln h_1 und h_2 bzw. k_1 und k_2 so gegeben, dass kein Schenkel des einen Winkels zu irgendeinem Schenkel des anderen Winkels parallel verläuft.
Man zeige, dass man allein mit einem Parallelenlineal (einem Instrument, des über ein gewöhnliches Lineal hinaus noch die Parallelverschiebung von Geraden ermöglicht) zu jedem Punkt P und zu jeder Geraden g die zu g senkrechte Gerade durch P konstruieren kann!

Falls g zu irgendeinem Schenkel der gegebenen rechten Winkel parallel ist, ist die Konstruktion trivial.
Im Folgenden können wir voraussetzen, dass g nicht zu h_i oder k_i ($i = 1{,}2$) parallel ist. Wir ziehen durch P die Parallelen h_i' zu h_i. Eine beliebig gewählte Parallele g' zu g, die nicht durch P geht, schneidet h_i' in den Punkte H_i, die voneinander und von P verschieden sind.
Die Parallelen zu k_i durch H_l ($l = 1{,}2; l \neq i$) schneiden einander in einem von P verschiedenen Punkt Q.



Nach Konstruktion (bzw. Voraussetzung) sind die Geraden H_1Q und H_2Q Höhen im Dreieck PH_1H_2. Da sich die Höhen eines Dreiecks stets in genau einem Punkt schneiden, ist PQ die Senkrechte von P auf g' und damit auch auf g.
Die Hilfsgerade g' ist für die Konstruktion nur nötig, wenn der Punkt P auf der Geraden g liegt; sonst kann $g' = g$ gewählt werden.

Aufgabe 31/68
Beweisen Sie: Wenn die Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen durch 11 teilbar ist, so ist jede der Zahlen durch 11 teilbar.

Die beiden natürlichen Zahlen seien a und b und es gelte $a \equiv r \pmod{11}$, $b \equiv s \pmod{11}$. Dann ist $a^2 \equiv r^2 \pmod{11}$, $b^2 \equiv s^2 \pmod{11}$. Für r und s kommen nur die Zahlen

$$0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5$$

in Frage, für r^2 und s^2 demnach $0; +1; +4; +9 \equiv 2 \pmod{11}$; $+16 \equiv +5 \pmod{11}$ und $+25 \equiv +3$ (mod 11).
Nun ist $a^2+b^2 \equiv r^2+s^2 \pmod{11}$ genau dann durch 11 teilbar, wenn $r^2+s^2 \equiv 0 \pmod{11}$ gilt. Man prüft leicht nach, dass unter den 21 Kombinationen von je 2 Elementen (mit Wiederholung) aus der Menge der 6 quadratischen Reste nur eine einzige zu finden ist, bei der die Summe der Elemente diese Kongruenz erfüllt, nämlich $r^2 = 0$ und $s^2 = 0$.
Also ist auch $r = s = 0$ und damit sind a und b durch 11 teilbar.

Aufgabe 32/68
Man zeige, dass für $n \geq 3$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

Bekanntlich ist die Folge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Demnach ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < 3$. Für $n \geq 3$ folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3 \leq n \to (n+1)^n < n \cdot n^n = n^{n+1}$$

Erhebt man beide Seiten der Ungleichung in die $\frac{1}{(n+1)^n}$-te Potenz (da beide Seiten nicht negativ sind, wird dadurch die Gültigkeit der Ungleichung nicht beeinflusst), so ergibt sich

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

Aufgabe 33/68
Gegeben sind eine Symmetrieachse g und zwei bezüglich derselben symmetrische Punkte P und P'. Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung des Lineals (d.h. nur durch Ziehen von Geraden) zu einem beliebigen Punkt X den bezüglich g symmetrischen Punkt X'.

Der Fall, dass X auf g liegt, ist trivial und braucht daher nicht erörtert zu werden ($X = X'$). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden angenommen, dass X in derselben Halbebene wie P liegt. Es sind dann die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Der Punkt X liegt nicht auf der Geraden durch P und P' und die Strecke XP ist nicht parallel zu g.
2. Der Punkt X liegt auf der Geraden durch P und P' oder die Strecke XP ist parallel zu g.

Zu 1.): Man ziehe die Gerade durch P und X; da PX nicht parallel zu g ist, schneidet diese h in einem Punkt H_1. Man ziehe ferner die Gerade durch P' und X; da X nicht auf der Geraden durch P und P' liegt, schneidet diese g in einem von H_1 verschiedenen Punkt H_2 (die Geraden PX und $P'X$ haben den Schnittpunkt X; da X nicht auf g liegt, könnte $H_1 = H_2$ nur dann gelten, wenn die Geraden PX und $P'X$ zusammenfallen, dann läge aber X auf PP' im Widerspruch zur Voraussetzung).
Die Geraden PH_2 und $P'H_1$ schneiden einander in einem zu X symmetrischen Punkt X'.

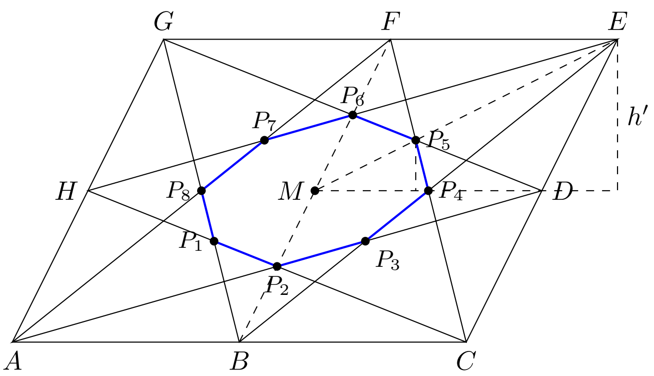
Beweis: $\Delta H_1XH_2 \simeq \Delta H_1X'H_2$ wegen $H_1H_2 = H_1H_2$, $\measuredangle XH_1H_2 = \measuredangle X'H_1H_2$ (Symmetrie der auf den Schenkeln liegenden Punkte P und P'), $\measuredangle XH_2H_1 = \measuredangle X'H_2H_1x$ (ebendeshalb).
Folglich liegt X' symmetrisch zu X bezüglich g.

Zu 2.): Man nehme zunächst einen Hilfspunkt Q an, der den Bedingungen des Falles 1 entspricht und konstruiere nach Fall den symmetrischen Punkt Q'. Dabei ist es ohne weiteres möglich, Q so zu wählen, dass QX nicht parallel zu g ist. Dann ist die Konstruktion von X' nach dem Fall 1 mit Hilfe den beiden symmetrischen Punkte Q und Q' anstelle von P und P' möglich.

Aufgabe 34/68
Es ist zu beweisen: Wenn die Summe dreier gegebener Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so sind unter ihnen zwei, die beim Teilen durch 9 den gleichen Rest lassen.

Jede natürliche Zahl n lässt sich in der Form $n = 9k \pm r$ darstellen, wobei k eine natürliche Zahl (einschließlich Null) und $r = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4$ ist. Für eine Quadratzahl ergibt sich demnach $n^2 = 81k^2 - 18kr + r^2$.
Daraus folgt, dass als Rest einer Quadratzahl beim Teilen durch 9 nur die Zahlen 0; 1; 4; 7 in Frage kommen.
Ist nun die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 ohne Rest teilbar, so muss die Summe der Reste der Quadratzahlen ohne Rest durch 9 teilbar sein. Das ist aber für die Restkombinationen (0; 0; 0), (1; 4; 4), (1; 1; 7), (4; 7; 7) möglich. Man sieht, dass in jedem Fall zwei Quadratzahlen den gleichen Rest lassen.

Aufgabe 35/68
Verbindet man die Eckpunkte eines Parallelogramms mit den Mittelpunkten benachbarter Seiten, so begrenzen die acht Verbindungsstrecken ein Achteck.
Es ist zu beweisen, dass dessen Flächeninhalt ein Sechstel des Parallelogramminhalts ist.



Man beweist, dass der Flächeninhalt des Dreiecks MP_4P_5 ein Sechstel vom Flächeninhalt des Dreiecks MDE ist. Es ist $FBCE$ ein Parallelogramm; folglich halbiert P_4 die Strecken FC und BE und damit auch MD: $MP_4 = P_4D$. Entsprechend folgt $MP_6 = P_6F$.
Die Strecken DP_6 und FP_4 sind also Seitenhalbierende im Dreieck MDF. Da sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis $1 : 2$ schneiden, gilt nach einem Strahlensatz $h : h' = 1 : 3$ und $h = \frac{1}{3}h'$.
Für den Flächeninhalt $A(MP_4P_5)$ des Dreiecks MP_4P_5 ergibt sich damit

$$A(MP_4P_5) = \frac{1}{2} \cdot MP_4 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{MD}{2}\frac{h'}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MDh'}{6} = \frac{1}{2}A(MDE)$$

Analog kann die entsprechende Aussage für die übrigen Dreiecke MP_iP_{i+} mit $i = 1, 2, ..., 8$ und $P_9 \equiv P_1$ bewiesen werden. Damit folgt die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung.

Aufgabe 36/68
Man beweise, dass für jede ungerade Zahl $n > 1$ die Gleichung

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} [n^2 - (2k-1)^2] = (n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2) \cdots [n^2 - (n-2)^2] = 2^{n-1}(n-1)!$$

erfüllt ist!

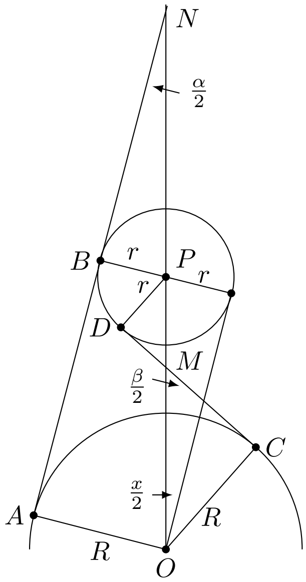
Eine Umformung des Produktes ergibt

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} [n^2 - (2k-1)^2] = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (n+2k-1)(n-2k+1) = (n+1)(n-1)(n+3)(n-3)...(2n-2)2$$

Dieses Produkt besteht aus $n-1$ geraden Faktoren, und zwar sind dies alle geraden Zahlen von 2 bis $2n-2$. Demnach hat das gegebene Produkt für alle ungeraden Zahlen $n > 1$ den Wert $2^{n-1}(n-1)!$

2.9 Aufgaben und Lösungen 1969

Aufgabe 1/69
An zwei einander nicht schneidende, verschieden große Kreise seien die gemeinsamen Tangenten gelegt. Der Winkel zwischen den äußeren Tangenten sei α, der zwischen den inneren sei β.
Gesucht ist der Winkel zwischen den Tangenten vom Zentrum des größeren Kreises an den kleineren Kreis.



Wir verwenden die Bezeichnungen gemäß der Abbildung. Dann gilt

$$PO - NO - NP = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = MO + MP = \frac{R}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

Daraus folgt $PO\sin\frac{\alpha}{2} = R - r \quad (I)$ und $PO\sin\frac{\beta}{2} = R + r \quad (II)$.
Aus (I) und (II) ergibt sich $2r = PO\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ und weiterhin

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{r}{PO} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

Damit gilt für den gesuchten Winkel x:

$$x = 2\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Aufgabe 2/69
Man geben alle Werte für x und y an, die dem Gleichungssystem

$$[x] + 2y = \frac{9}{2}, \qquad [2x] + 3y = \frac{31}{4}$$

mit $x \geq 0$ genügen. Dabei ist $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.

Es sei $[x] = n$. Es gilt, zwei Fälle zu unterscheiden:
1.) $n \leq x < n + 0{,}5$
Dann wird $[2x] = [2n]$ und es ergibt sich das Gleichungssystem

$$n + 2y = 4{,}5 \qquad , \qquad 2n + 3y = 7{,}75$$

mit der Lösung $n = 2$, $y = 1{,}25$. Für x ergibt sich daraus die Ungleichung $2 \leq x < 2{,}5$.
2.) $n + 0{,}5 \leq x < n + 1$
Dann ist $[2x] = 2n + 1$ und es ergibt sich das Gleichungssystem

$$n + 2y = 4{,}5 \qquad , \qquad 2n + 1 + 3y = 7{,}75$$

mit den Lösung $n = 0$, $y = 2{,}25$. Für x ergibt sich daraus die Ungleichung $0{,}5 \leq x < 1$.
Demzufolge genügen die Werte $2 \leq x < 2{,}5; y = 1{,}25$ und $0{,}5 \leq x < 1; y = 2{,}25$ dem vorgegebenen Gleichungssystem.

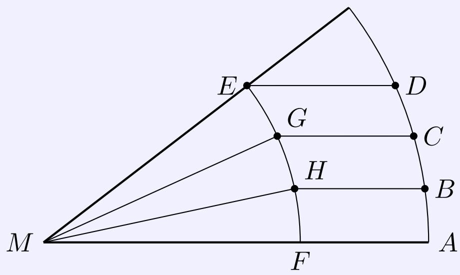
Aufgabe 3/69
Man beweise: Ist die Summe von n ganzen Zahlen $a_1; a_2; a_3; \cdots; a_n$ ohne Rest durch 5 teilbar, so ist auch die Summe der 5.Potenzen dieser Zahlen ohne Rest durch 5 teilbar.

Der Satz von Fermat besagt, dass für einen Primzahlmodul p und jede ganze Zahl a die Kongruenz $a^p \equiv a \pmod p$ gilt. Für jede der ganzen Zahlen a_i gilt nach der Aufgabenstellung mit $i = 1, 2, ..., n$

$$a_i^5 \equiv a_i \pmod 5 \; ; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^5 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \pmod 5$$

In Verbindung mit der Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \pmod 5$ folgt aus der Transitivität der Kongruenz $\sum_{i=1}^{n} a_i^5 = 0 \pmod 5$, d.h. die Summe der 5.Potenzen ist ohne Rest durch 5 teilbar, w.z.b.w.
Verallgemeinerung: Ist die Summe von n ganzen Zahlen restlos durch eine Primzahl p teilbar, so ist auch die Summe der p-ten Potenzen dieser Zahlen restlos durch p teilbar.

Aufgabe 4/69
Man zeichne um den Scheitelpunkt eines beliebigen spitzen Winkels einen Kreisbogen mit beliebigem Radius MA und trage darauf drei gleich lange Kreisbögen AB, BC und CD ab (Abbildung).
Dann zeichne man durch B, C und D Parallele zu MA. E sei der Schnittpunkt der Paralleln durch D mit dem freien Schenkel des Winkels. Mit dem Radius ME schlage man den Kreisbogen um M, der die Parallelen durch B und C in H und G und MA in F schneidet.



Warum ist die Behauptung falsch, MG und MH würden den Winkel in drei gleiche Teile teilen? Bekanntlich ist die Trisektion eines beliebigen Winkels allein mit Zirkel und Lineal unmöglich!

Der Fehler liegt in der Annahme, dass Parallele zwei konzentrische Kreisbögen, die von ihnen begrenzt werden, in gleichem Verhältnis teilen. Es sei $\measuredangle BMA = \varphi, \measuredangle HMF = \varphi_1, \measuredangle GMH = \varphi_2, MA = R$ und $MF = r$. Der Abstand d der Geraden durch BH und MA ist dann $d = R \sin\varphi = r \sin\varphi_1$, der Abstand d' der Geraden durch GC und MA ist $d' = R \sin 2\varphi = r \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.
Wäre nun $\varphi_1 = \varphi_2$, so würde durch Division folgen

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin 2\varphi_1}{\sin\varphi_1}$$

woraus folgt $2\cos\varphi = 2\cos\varphi$ und damit wegen $\varphi; \varphi_1 < \pi : \varphi = \varphi_1$. Das ist aber ein Widerspruch, da M, H und B nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Damit sind aber bereits die ersten beiden Teilwinkel φ_1 und φ_2 voneinander verschieden.

Aufgabe 5/69
Gegeben ist ein Parallelogramm mit dem Umfang $u = 30$ LE, dessen Winkel sämtlich nicht kleiner als 60° sind. In dieses Parallelogramm sei ein gleichseitiges Dreieck derart einbeschrieben, dass eine Seite des Dreiecks mit der Parallelogrammseite $AB = a$ übereinstimmt und die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks auf der gegenüberliegenden Parallelogrammseite liegt.
Wie groß sind die Parallelogrammseiten a und b, wenn ihre Maßzahlen ganzzahlig sind?

Die Höhe des Parallelogramms ist auf Grund der Aufgabenstellung gleich der des gleichseitigen Dreiecks und also $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Die Seite b ist am längsten, wenn das Parallelogramm ein Rhombus und am kürzesten, wenn es ein Rechteck ist. Im ersten Fall ist $u = 4a$ und also $a = 7{,}5$ LE, im zweiten Fall ist $u = 2a + 2h = 2a + a\sqrt{3}$ und also $a = 8{,}038$ LE. Daraus folgert man $7{,}5 \text{ LE} \leq a \leq 8{,}038$ LE.
Wegen der geforderten Ganzzahligkeit der Maßzahlen von a und b kann hieraus nur $a = 8$ LE gefolgert werden. Damit ist $b = \frac{u}{2} - a = 7$ LE.

Aufgabe 6/69
Gegeben sind die rationalen Zahlen a, b, c, d. Man beweise:
Ist $ad - bc = 0$, so ist $q = \frac{ap+b}{cp+d}$ rational für jede beliebige reelle Zahl p.
Ist $ad - bc \neq 0$, so ist $q = \frac{ap+b}{cp+d}$ irrational für jede irrationale Zahl p.

Aus $q = \left|\frac{ap+b}{cp+d}\right|$ folgt durch äquivalente Umformung $p(cq - a) = -(dq - b)$.
Es sei nun zunächst $ad - bc = 0$. Ist $cq - a = 0$, so ist auch $b - dq = 0$ und es folgt $q = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Also ist q

als Quotient zweier rationaler Zahlen bei beliebigem p selbst rational.
Ist $dq - b = 0$, so folgt für $cq - a = 0$ dasselbe, für $cq - a \neq 0$, dass $p = 0$ ist. In diesem Fall ist aber $q = \frac{b}{d}$ ebenfalls rational.
Nun sei $ad - bc \neq 0$. Dann ist $a \neq \frac{bc}{d}, a = \frac{bc}{d} + \Delta a$ mit rationalem Δa. Durch Einsetzen folgt

$$\frac{pc}{d} = -\frac{dq - b}{dq - b - \Delta a}$$

Wäre nun q rational, so wäre auch p rational. Für irrationales p kann also q nicht rational sein.

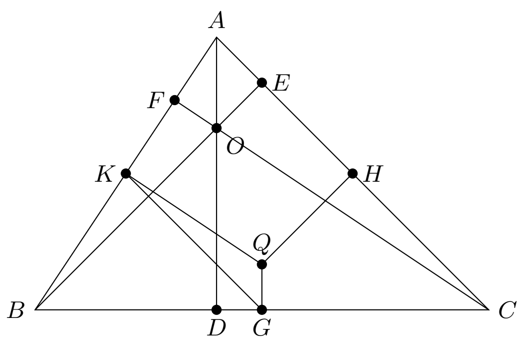
Aufgabe 7/69
Für welche ganzen Zahlen n ist der Ausdruck $3n^2 + 3n - 1$ durch 5 teilbar?

Es ist die Kongruenz $3n^2 + 3n - 1 \equiv 0 \pmod 5$ zu lösen. Da $-1 \equiv -6 \pmod 5$ ist, kann man dafür schreiben $3n^2 + 3n - 6 \equiv 0 \pmod 5$ oder; da 3 und 5 teilerfremd sind; $n^2 + n - 2 \equiv 0 \pmod 5$.
Es ist aber $m^2 + n - 2 = (n - 1)(n - 2)$. Da 5 einer Primzahl ist, gibt es nur die beiden Lösungen

$$n_1 \equiv 1 \pmod 5 \ ; \qquad n_2 \equiv -2 \equiv -3 \pmod 5$$

Der Ausdruck $3n^2 + 3n - 1$ ist also durch 5 teilbar, wenn n bei Division durch 5 den Rest 1 oder den Rest 3 lässt.

Aufgabe 8/69
Man beweise: In jedem Dreieck ist der obere Abschnitt einer Höhe doppelt so groß wie die Länge des Lotes vom Umkreismittelpunkt auf die Seite, auf der die Höhe steht.



Wir verwenden die aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnungen. Es sei O der Schnittpunkt der Höhen, Q der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, d.h. der Umkreismittelpunkt. Ferner seien GK die Verbindungsstrecke der Seitenmitten G von BC und K von AB sowie F und D die Fußpunkte der Höhen auf AB bzw. BC.
Es ist $GQ \parallel AD$ und $KQ \parallel FC$ da Höhe und Mittelsenkrechte senkrecht auf derselben Seite stehen. Weiter ist wegen $BA = 2BK$ und $BC = 2BG$ auch $KG \parallel AC$ und; nach einem Strahlensatz; $AC = 2KG$. Damit sind die Dreiecke OAC und QGK ähnlich mit einem Ähnlichkeitsverhältnis $2 : 1$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Aufgabe 9/69
Es sei $f(x)$ eine Funktion 3.Grades und $q(x)$ eine Funktion 2.Grades. An den Stellen $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h$ mögen die Funktionswerte beider Funktionen übereinstimmen, also $f(x_0) = q(x_0), f(x_1) = q(x_1), f(x_2) = q(x_2)$.
Man beweise, dass dann die Gleichung gilt

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} q(x)dx$$

Wir betrachten die Differenz der beiden Integrale:

$$D = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_2} q(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} [f(x) - q(x)]dx$$

Der Integrand ist eine Funktion 3.Grades, die bei x_0, x_1 und x_2 Nullstellen hat, also in der Form $c(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ geschrieben werden kann. Mit der Hilfsvariablen $u = x - x_1$ erhalten wir

$$D = \int_{-h}^{+h} c(u + h)u(u - h)du = \int_{-h}^{+h} c(u^3 - h^2 u)du = c\left[\frac{u^4}{4} - \frac{h^2 u^2}{2}\right]_{-h}^{+h} = 0$$

Aufgabe 10/69
Bekanntlich gibt es Primzahlzwillinge; das sind Primzahlen, die in der Folge der ungeraden natürlichen Zahlen unmittelbar aufeinanderfolgen. Es ist zu beweisen, dass es außer (3; 5; 7) keine Primzahldrillinge gibt.

In der Folge der ungeraden natürlichen Zahlen oberhalb 3 lassen sich drei aufeinanderfolgende Zahlen stets durch eines der drei folgenden Tripel darstellen:

$$(6n-3; 6n-1; 6n+1), \quad (6n-1; 6n+1; 6n+3), \quad (6n+1; 6n+3; 6n+5)$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. In jedem dieser Tripel ist eine Zahl enthalten, die durch 3 teilbar, also keine Primzahl ist (nämlich $6n-3$ oder $6n+3$). Folglich gibt es oberhalb der Primzahl 3 keine Primzahldrillinge.

Aufgabe 11/69
Man beweise: Es gibt unendlich viele ganze Zahlen, die sich nicht als Summe dreier Kubikzahlen darstellen lassen.
Welche Zahlen sind dies?

Jede ganze Zahl kann man in der Form $g = 9k \pm r$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl und $r = 0, \pm 1, \pm 2; \pm 3; \pm 4$ ist. Für eine Kubikzahl ergibt sich demnach

$$g^3 = 729k^3 \pm 243k^2r + 27kr^2 \pm r^3$$

Daraus folgt, dass als Reste einer Kubikzahl beim Teilen durch 9 nur die Zahlen $0, \pm 1$ in Frage kommen. Angenommen, es ließe sich jede ganze Zahl als Summe dreier Kubikzahlen darstellen; dann müsste sich jeder mögliche Rest als Summe aus einer Kombination der drei Zahlen 0; +1; -1 (mit Wiederholung) darstellen lassen. Die möglichen Kombinationen sind aber

$$(0;0;0), (0;0;+1), (0;0;-1), (0;+1;+1), (0;-1;+1), (0;-1;-1),$$
$$(+1;+1;+1), (-1;-1;-1), (+1;+1;-1), (-1;-1;+1)$$

Man erkennt, dass sich keine darunter befindet, bei der die Summe +4 oder -4 ergibt. Daher kann man die ganzen Zahlen der Form $g = 9k \pm 4$ nicht als Summe dreier Kubikzahlen darstellen, das sind aber unendlich viele.

Aufgabe 12/69
Es sind alle Paare $(x; y)$ zu finden, die das Gleichungssystem

$$|y-x| = |x+1|$$
$$\frac{y-3}{4} = \left[\frac{x-1}{5}\right]$$

befriedigen, wobei $[a]$ eine ganze Zahl mit $a - 1 < [a] \leq a$ ist.

Wir beseitigen in (1) die Betragszeichen durch Fallunterscheidung:
1.Fall: $\operatorname{sgn}(y-x) = \operatorname{sgn}(x+1)$. Dann ist $y - x = x + 1, y = 2x + 1$
2.Fall: $\operatorname{sgn}(y-x) \neq \operatorname{sgn}(x+1)$. Dann ist $y - x = -x - 1, y = -1$
Man formt (2) um und setzt ein: $y = 4\left[\frac{x-1}{5}\right] + 3$.
1.Fall:

$$2x + 1 = 4\left[\frac{x-1}{5}\right] + 3 \rightarrow \frac{x-1}{2} = \left[\frac{x-1}{5}\right]$$

Daraus folgt, dass x ungerade ist, $x = 2k + 1$ (k ganz). Damit ergibt sich

$$\frac{x-1}{5} - 1 < \frac{x-1}{2} \leq \frac{x-1}{5} \rightarrow 2x - 12 < 5x - 5 \leq 2x - 2 \rightarrow -12 < 3(2k+1) - 5 \leq -2 \rightarrow$$

$$\rightarrow -10 < 6k \leq 0 \rightarrow -\frac{5}{3} < k \leq 0$$

also (wegen der Ganzzahligkeit k) $k_1 = -1, k_2 = 0$. Da alle Umformungen umkehrbar sind, ergeben sich daraus die Lösungspaare $(-1;-1)$ und $(1;3)$.
2.Fall:

$$-1 = 4\left[\frac{x-1}{5}\right] + 3 \rightarrow \frac{x-1}{5} - 1 < -1 \leq \frac{x-1}{5} \rightarrow -4 \leq x < 1$$

Da alle Umformungen umkehrbar sind, erhalten wir die Lösungen $(x_0;-1)$ mit $-4 \leq x_0 < 1$, in denen das bereits ermittelte Paar $(-1;-1)$ mit enthalten ist.
Die gesuchten Paare sind also $(1;3)$ und $(x_0;-1)$ mit $-4 \leq x_0 < 1$.

Aufgabe 13/69
Gesucht sind die fünf kleinsten, nicht einstelligen aufeinanderfolgenden Zahlen z_i (mit i = 1;2;3;4;5), für die gilt: z_i ist durch $i + 4$ teilbar und hat die Endziffer $i + 4$.

Es sei $z_i = 10a+i+4$, wobei a eine natürliche Zahl ist. Dann müssen nach Aufgabenstellung die folgenden Beziehungen gelten (dabei sind b, c, d, e, f ebenfalls natürliche Zahlen)

$$10a + 5 = 5b, 10a + 6 = 6c, 10a + 7 = 7d, 10a + 8 = 8e, 10a + 9 = 9f$$

Durch Umstellen ergibt sich daraus

$$b - 1 = 2a, c - 1 = \frac{5a}{3}, d - 1 = \frac{10a}{7}, e - 1 = \frac{5a}{4}, f - 1 = \frac{10a}{9}$$

Daraus folgt, dass a durch 3, 7, 4, 9 teilbar sein muss. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen ist 252. Die fünf gesuchten Zahlen sind somit 2525, 2526, 2527, 2528, 2529. Die Probe zeigt, dass diese Zahlen tatsächlich die geforderten Eigenschaften haben. Gleichzeitig geht aus dem Lösungsweg hervor, dass es die kleinsten fünf derartigen Zahlen sind, die nicht einstellig sind.

Aufgabe 14/69

$$B = \frac{34z + 5}{51z + 8}$$

für keine natürliche Zahl z gekürzt werden kann!

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe eine natürliche Zahl, für die Zähler und Nenner des Bruches B ohne Rest durch die natürliche Zahl $f > 1$ teilbar sind. Dann würde gelten $34z + 5 \equiv 0 \pmod{f}$ und $51z + 8 \equiv 0 \pmod{f}$.
Multipliziert man die linke dieser Kongruenzen mit 3, die rechte mit 2, so folgt $102z + 15 \equiv 0$ (mod f) und $102z + 16 \equiv 0$ (mod f).
Durch Subtraktion der linken von der rechten Kongruenz ergibt sich $1 \equiv 0 \pmod{f}$, das ist aber für $f > 1$ ein Widerspruch. Folglich ist die Annahme falsch, d.h., es gibt kein natürliches z, für das der Bruch kürzbar ist.

Aufgabe 15/69
Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Zahl 30030 als Produkt dreier natürlicher Zahlen (von 1 verschiedener) Faktoren schreiben (wobei die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle spielt)?

Die Primfaktorzerlegung der gegebenen Zahl 30030 ist

$$30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Die Zahl 30030 enthält also 6 voneinander verschiedene Primfaktoren, von denen mehrere zu einem Faktor zusammengefasst werden müssen. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten:

1. Man fasst 4 Primfaktoren zu einem Faktor zusammen, die beiden übrigen Primfaktoren bilden den zweiten und dritten Faktor. Aus den 6 Primfaktoren kann man auf $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ verschiedene Weisen 4 auswählen.

2. Man fasst 3 Primfaktoren zum ersten, 2 weitere zum zweiten Faktor zusammen, der verbleibende Primfaktor bildet den dritten Faktor. Aus den 6 Primfaktoren kann man auf $\binom{6}{3} = 20$ verschiedene Weisen 3 auswählen, aus den restlichen 3 Primfaktoren auf $\binom{3}{2} = 3$ verschiedene Weisen 2, so dass sich für die Gesamtzahl der auf dieser Art zu bildenden Faktoren $20 \cdot 3 = 60$ ergibt.

3.Man fasst je 2 Primfaktoren zu einem Faktor zusammen. Das ist, analog zu den Überlegungen im 2.Fall, auf $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 90$ verschiedene Weisen möglich. Da die drei Faktoren aber auf $3! = 6$ verschiedene Weisen permutiert werden können, ohne dass sie eine neue Faktorenzerlegung liefern, muss man diese Anzahl noch durch 3! dividieren. Die Gesamtzahl der auf diese Art zu bildenden Produkte beträgt also $90 : 4 = 15$.
Damit ergibt sich die Anzahl aller möglichen Dastellungen der Zahl 30030 durch ein Produkt von 3 natürlichen Faktoren (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) $15 + 60 + 15 = 90$.

Aufgabe 16/69
Zwei Freunde A und B treffen sich. Nach dem Alter seiner Kinder befragt, sagt A: "Du kannst es selbst ausrechnen. Meine vier Kinder sind zusammen 15 Jahr alt. Das Produkt ihrer ganzzahligen Altersangaben ist gleich deiner Postleitzahl."
B rechnet. Nach einer Weile fragt er: "Sind unter deinen Kindern Zwillinge?" A antwortet darauf, sofort gibt B das Alter der Kinder an.
Wie lautete A's Antwort? Wie alt sind die Kinder?

B bildete alle Quadrupel natürlicher Zahlen, deren Summe 13 ist, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt und Wiederholung möglich ist. In jedem Quadrupel berechnete er das Produkt der vier Zahlen. Wäre seine Postleitzahl als Produkt nur einmal aufgetreten, so hätte er sofort die Antwort geben können.
Bei der Rekonstruktion von B's Gedankengang können wir also alle Quadrupel ausschließen, deren Produkt nur einmal auftritt. Es verbleiben dann noch die folgenden Quadrupel:

$$\text{Produkt } 40: \quad (1;1;5;8),(1;2;2;10)$$
$$\text{Produkt } 72: \quad (1;2;6;6),(1;3;3;8),(2;2;2;9)$$
$$\text{Produkt } 96: \quad (1;4;4;6),(2;2;3;8)$$

Alle Quadrupel bis auf $(2;2;2;9)$ enthalten genau 2 gleiche Zahlen. Hätte A mit "Ja" auf B's Frage geantwortet, so hätte B das Alter der Kinder nicht nennen können. Die Antwort war also "Nein" so dass B das Alter der Kinder mit 2, 2, 2 (Drillinge) und 9 angab.

Aufgabe 17/69
Von einem geraden Kreiskegel seien die Oberfläche A und das Verhältnis k der Höhe h zum Radius r gegeben ($k = \frac{h}{r}$).
Gesucht ist eine Formel, die das Volumen V in Abhängigkeit von A und k angibt.

In der gebräuchlichen Formel $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ sind r und h durch A und k auszudrücken. Aus

$$A = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \quad \text{und} \quad h = kr \quad \text{wird}$$

$$r^2 = \frac{A}{\pi(1 + \sqrt{1 + k^2})} \quad \text{und } h = k\sqrt{\frac{A}{\pi(1 + \sqrt{1 + k^2})}}$$

und damit die gewünschte Formel

$$V = \frac{Ak}{3(1 + \sqrt{1 + k^2})}\sqrt{\frac{A}{\pi(1 + \sqrt{1 + k^2})}}$$

Aufgabe 18/69
Gegeben ist eine quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$, der die (im allgemeinen komplexen) Zahlen x_1 und x_2 genügen. Gesucht ist eine quadratische Gleichung

$$x^2+f(p;q)x+g(p;q)=0$$

der die Zahlen x_1^2 und x_2^2 genügen. Die Koeffizienten p und q seien reell, f und q seien irgendwelche Funktionen.
In welchen Fällen sind die beiden Gleichungen identisch? Man bestimme alle derartigen Fälle!

Nach dem Satz des Vieta gilt $x_1+x_2=-p$ und $x_1x_2=q$ sowie $x_1^2+x_2^2=-f(p;q)$, $x_1^2x_2^2=g(p;q)$. Es ist aber

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q=-f(p;q); x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=q^2=g(p;q)$$

Der Gleichung $x^2+(2q-p^2)x+q^2=0$ genügen also die Zahlen x_1^2 und x_2^2, sie sind bei gegebenem p und q eindeutig bestimmt.
Wenn beide Gleichungen identisch sein sollen, muss gelten $p=2q-p^2$ und $q=q^2$. Daraus folgt sofort $q=0$ oder $q=1$.
a) $q=0$ führt zu $p=-p^2$, also $p=0$ oder $p=-1$.
b) $q=1$ führt zu $p=2-p^2$, also $p=1$ oder $p=-2$.
Es sind also vier Fälle möglich: $x^2=0$ (trivial), $x^2-x=0$, $x^2+x+1=0$ und $x^2-2x+1=0$. Die Ermittlung der Lösungen dieser Gleichung bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 19/69
Gegeben ist ein beliebiges n-Eck, das zwei Symmetrieachsen s_1 uns s_2 besitzt. Man beweise, dass sich s_1 und s_2 im Inneren des n-Ecks schneiden!

Angenommen, s_1 und s_2 fallen nicht zusammen und schneiden einander nicht im Inneren des n-Ecks. Dann teilen sie die Fläche des n-Ecks in drei Flächenstücke A_1, A_2 und A_3. Auf Grund der Eigenschaften der Symmetrie gilt: $A_1=A_2+A_3$, $A_3=A_1+A_2$.
Daraus folgt $A_1=A_2+A_1+A_2$, also $A_2=0$. Das heißt aber, s_1 und s_2 fallen zusammen im Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 20/69
Welche natürlichen Zahlen sind als Differenz der Quadrate zweier von 0 verschiedener natürlicher Zahlen darstellbar?

Aus der Identität $k^2-(k-1)^2=2k-1$ folgt zunächst, dass alle ungeraden natürlichen Zahlen außer 1 in der geforderten Weise dargestellt werden können. Es bleibt also noch zu untersuchen, welche geraden natürlichen Zahlen in dieser Weise darstellbar sind.
Eine gerade natürliche Zahl kann Differenz entweder zweier gerader oder zweier ungerader Zahlen sein. Sind k und m natürliche Zahlen mit $k>m\geq 1$, so gilt für die geforderte Darstellung demnach entweder

$$(2k)^2-(2k-2m)^2=4m(2km-m) \quad \text{oder} \quad (2k-1)^2-(2k-2m-1)^2=4m(2k-m-1)$$

In jedem Fall ist die dargestellte Zahl durch 4 teilbar. Es erhebt sich die Frage, ob alle durch 4 teilbaren Zahlen eine solche Darstellung haben. Das ist genau dann der Fall, wenn mit den Darstellungen $n=m(2k-m)$ oder $n=m(2k-m-1)$ alle natürlichen Zahlen erfasst werden.
Man erkennt leicht, dass alle ungeraden natürlichen Zahlen sich aus $n=m(2k-m)$ für $m=1$ ergeben (wegen $k>m=1$ allerdings mit Ausnahme der Zahl 1), während alle geraden natürlichen Zahlen aus $n=m(2k-m-1)$ für $m=1$ folgen (aus dem gleichen Grund mit Ausnahme der Zahl 0). Man braucht dann nur $k=\frac{n+1}{2}$ bzw. $k=\frac{n+2}{2}$ zu setzen.
Da die Zahl 0 trivialerweise als Differenz der Quadrate zweier von 0 verschiedener natürlicher Zahlen darstellbar ist, kann man feststellen, dass
1. alle ungeraden natürlichen Zahlen außer 1 und
2. alle durch 4 teilbaren Zahlen außer 4
und nur diese die gestellte Bedingung erfüllen. Die Darstellung ist allerdings nicht eindeutig (wie aus den Betrachtungen und den Beispielen $4^2-1^2=8^2-7^2=15$ und $5^2-1^2=7^2-5^2=24$ hervorgeht).

Aufgabe 21/69
Es ist die Gleichung

$$\sqrt[x]{16} + \sqrt[x]{20} = \sqrt[x]{25}$$

im Bereiche der reellen Zahlen zu lösen.

Nach Division beider Seiten der Gleichung durch $\sqrt[x]{25}$ ergibt sich

$$\sqrt[x]{\frac{16}{25}} + \sqrt[x]{\frac{4}{5}} = 1 \qquad \text{oder} \qquad \sqrt[x]{\left(\frac{4}{5}\right)^2} + \sqrt[x]{\frac{4}{5}} = 1$$

Es liegt nahe, die Substitution $a = \sqrt[x]{\frac{4}{5}}$ durchzuführen. Dann folgt $a^2 + a - 1 = 0$ mit $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Der negative Wert entfällt; mit dem positiven Wert folgt

$$\sqrt[x]{\frac{4}{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Durch Logarithmieren erhält man die Näherungslösung $x = 0{,}4637$. Eine Überschlagsrechnung mit $x \approx 0{,}5$ bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

Aufgabe 22/69
Lässt man vom Geburts- und vom Todesjahr eines berühmten deutschen Gelehrten die erste Ziffer weg, so erhält man zwei Zahlen a und b, für die folgendes gilt:

1. Beide Zahlen lassen sich in ein Produkt von je drei von einander verschiedenen Faktoren (die sämtlich größer als 1 sind) zerlegen, wobei unter den 6 Faktoren 5 Primzahlen sind.
2. Die beiden kleineren Faktoren von a sind je um 2 kleiner als die entsprechenden Faktoren von b.
3. Der größte Faktor von a ist gleich der Summe aus dem Zehnfachen des kleinsten Faktors und dem mittleren Faktor von a.
4. Der größte Faktor von b ist gleich der Summe aus dem Doppelten des kleinsten Faktors und dem mittleren Faktor von b und um 1 größer als das Doppelte des mittleren Faktors.

Man bestimme die beiden Jahreszahlen und nenne den Gelehrten!

Die nach zunehmender Größe geordneten Faktoren von a seien x, y, z, und die Faktoren von b seien u, v, w. Dann gelten die folgenden Gleichungen: $z = 10x + y, w = 2u + v = 2v + l$ oder $z = 10x + y, v = 2u - 1$.
Als Lösungswerte für u kommen nach der letzten Gleichung nur die natürlichen Zahlen von 2 bis 5 in Frage, da 12 größer als 1 sein soll und bei $u > 5$ sich Werte für v und w ergeben würden, bei denen das Produkt uvw größer als 1000 wäre.
Die Werte 2 und 3 scheiden für u aus, da sonst $x < 2$ wäre. Für $u = 4, v = 7$ ergäbe sich $w = 15$. Dann wären aber zwei Faktoren keine Primzahlen. Demnach ist nur die Lösung $u = 5, v = 9, w = 19$ möglich, aus der sich $x = 3, y = 7$ und $z = 37$ ergibt.
Die beiden Jahreszahlen sind demnach 1777 und 1855. Sie sind das Geburtsjahr und das Todesjahr von Carl Friedrich Gauß.

Aufgabe 23/69
Für die reellen Zahlen a, b, x, y gelte

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad ay - bx = 1$$

Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen $ax + by = 0$ ist!

Man setze $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha, x = \sin\beta, y = \cos\beta$. Dann ist

$$a^2 + b^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad x^2 + x^2 = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$ay - bx = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) = 1$$

Weiterhin ist

$$ax + by = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

Aus $\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) = 1$ folgt dann $\sin(\alpha+\beta) = 0$, d.h. $ax + by = 0$.

Aufgabe 24/69
Man beweise, dass das Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit ganzen Koeffizienten für kein ganzes x der Wert Null annimmt, wenn es für $x = 0$ und für $x = 1$ ungerade Werte hat.

Es ist $f(0) = a_0$ ungerade, ferner $f(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ ungerade, also $a_n + a_{n_1} + \dots + a_l$ gerade.
In der Summe $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$ ist daher die Summe der ungeraden Koeffizienten gerade.
Ist nun x eine gerade Zahl, so ist $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x$ ebenfalls gerade, und wegen a_0 ungerade ist $f(x)$ ungerade. Ist x eine ungerade Zahl, so folgt aus der Tatsache, dass das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl stets gerade ist, und aus der Tatsache, dass die Anzahl der ungeraden Koeffizienten gerade ist, dass $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x$ gerade ist.
Das heißt aber, dass auch in diesem Fall $f(x)$ ungerade ist. Demnach kann $f(x)$ für kein ganzes x gerade sein, insbesondere also nicht den Wert null annehmen.

Aufgabe 25/69
Für welche ganzen, positiven Zahlen n ist die Zahl $2^n \pm 1$ das Quadrat einer ganzen Zahl?

Wir unterscheiden die beiden Fälle $2^n + 1$ und $2^n - 1$.
1. Es sei $z = 2^n + 1$ eine Quadratzahl. Dann gilt $z = 2^n + 1 = q^2$ also $2^n = q^2 - 1 = (q+1)(q-1)$. Damit ist $q + 1 = 2^\nu; q - 1 = 2^\mu$ mit $\nu > \mu, \nu + \mu = n$.
Durch Subtraktion erhält man

$$2^\nu - 2^\mu = 2; \quad 2^{\nu-1} - 2^{\mu-1} = 2^{\nu-1} - 2^{n-\nu-1} = 1$$

Die einzigen Potenzen der Zahl 2, die sich um 1 voneinander unterscheiden, sind 2^1 und 2^0. Daraus folgt $\nu - 1 = 1, \mu - 1 = n - \nu - 1 = 0$ also $\nu = 2, n = 3$. Tatsächlich ist $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9 = 3^2$.

2. Es sei $z = 2^n - 1$ eine Quadratzahl. Offensichtlich ist dies für $n = 1$ der Fall: $2^1 - 1 = 1 = 1^2$. Wir setzen also im folgenden $n > 1$ voraus.
Für jedes $n > 1$ lässt 2^n beim Teilen durch 4 den Rest 0. Also lässt $2^n - 1$ beim Teilen durch 4 den Rest 3. Jede Quadratzahl lässt aber beim Teilen durch 4 den Rest 0 oder 1, wie sich aus $(2k)^2 = 4k^2$ und $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sofort ergibt. Daraus folgt, dass die Annahme für $n > 1$ falsch ist.
Es gibt also nur zwei Quadratzahlen der Form $2^n \pm 1$, nämlich für $n = 3$ (Pluszeichen) und für $n = 1$ (Minuszeichen).

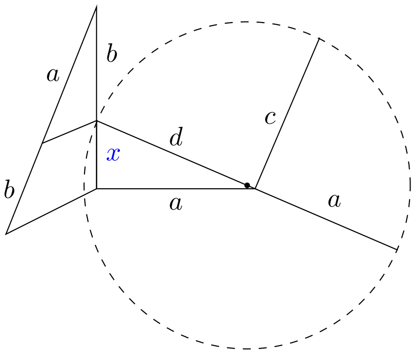
Aufgabe 26/69
Aus den Strecken a und b konstruiere man die Strecke $c = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$!
Bemerkung: Dabei sei der Einfachheit halber auf die - streng genommen notwendige - Unterscheidung zwischen Strecke und Maßzahl der Strecke verzichtet.

Die Lösung muss auf bestimmte "Grundkonstruktionen" zurückgeführt werden. Es sind dies hier im wesentlichen die Konstruktionen mittels des rechtwinkligen Dreiecks und des Strahlensatzes sowie die Konstruktion des geometrischen Mittels. Das wird durch die folgenden Umformungen erreicht:

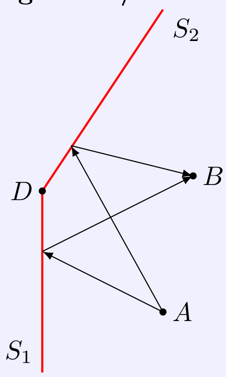
$$c = \sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}} = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}}} = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}} = \sqrt{a\sqrt{a^2 + x^2}}$$

mit $x = \frac{b^2}{a}$, d.h. $\frac{x}{b} = \frac{b}{x}$.

Konstruktion: (Auf die Beschreibung der Grundkonstruktionen wird verzichtet, da sie als bekannt vorausgesetzt werden können.) Man konstruiere aus a und b die vierte Proportionale mach $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$. Sei d die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und x; dann ist c das geometrische Mittel aus a und d. Alle Konstruktionen sind stets und eindeutig ausführbar (siehe Abbildung).

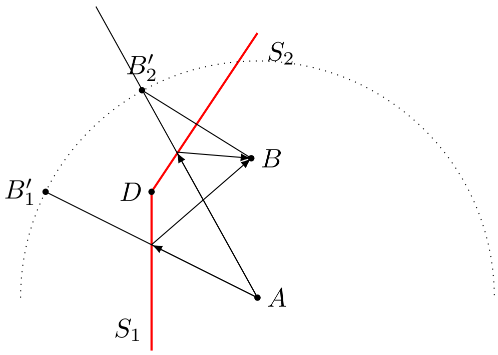


Aufgabe 27/69



Zwei von einem Punkt A ausgehende Strahlen werden an zwei Spiegeln S_1 und S_2 so reflektiert, dass sie sich in einem Punkt B schneiden. Die beiden Spiegel stoßen im Punkt D aneinander. S_1 sei fest, S_2 sei um D drehbar. Man bestimme durch Konstruktion die Stellung des Spiegels S_2 so, dass die beiden Strahlenwege gleich lang sind.

Bekanntlich ist der Strahlenweg von einem Punkt A über einen Spiegel zu einem Punkt B gleich der Entfernung AB', wobei B' der zu B in bezug auf den Spiegel als Symmetrieachse symmetrische Punkt ist. Man konstruiert daher zunächst den zu B bezüglich S_1 symmetrischen Punkt B'_1. Der zu B bezüglich S_2 symmetrische Punkt B'_2 liegt dann nach den Voraussetzungen auf dem Kreis um A mit AB'_1 als Radius. Da B'_2 symmetrisch zu B bezüglich S_2 liegt und da D auf S_2 liegt, ist ferner $DB = DB'_2$. Damit liegt B'_2 auf dem Kreis um D mit DB als Radius. Die gesuchte Stellung von S_2 ist demnach die Mittelsenkrechte von BB'_2.



In der Praxis tritt bei der Ermittlung des Schnittpunktes zweier Kreise mitunter eine Ungenauigkeit auf. Man kann sie auf Grund der folgenden Überlegungen vermeiden:
Da B und B'_1 symmetrisch bezüglich S_1 sind und D auf S_1 liegt, ist $DB = DB'_1$. Da B und B'_2 symmetrisch bezüglich S_2 sind und D auf S_2 liegt, ist $DB = DB'_2$. Folglich liegen B'_1 und B'_2 auf einem Kreis um D. Da sie ferner auch auf einem Kreis um A liegen, müssen sie symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und D sein. Man kann also B'_2 als symmetrischen Punkt zu B'_1 in Bezug auf die Gerade AD konstruieren.

Aufgabe 28/69
Gegeben sei ein Dreieck, dessen Seitenlängen eine arithmetische Folge erster Ordnung bilden. Man beweise, dass dann der Inkreisradius gleich $\frac{1}{3}$ einer der Dreieckshöhen ist.

Die Seiten des Dreiecks seien (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) a, $b = a + d$, $c = a + 2d$. A sei der Flächeninhalt des Dreiecks. Dann gilt

$$A = \rho \cdot \frac{a+b+c}{2} = \rho \cdot \frac{3(a+d)}{2}$$

Anderseits gilt

$$A = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2}(a+d) h_b = \frac{1}{2}(a+2d) h_c$$

Durch Gleichsetzen folgt daraus $\frac{1}{2}(a+d)h_b = \rho\frac{3(a+d)}{2}$ und damit $\frac{h_b}{3} = \rho$. Der Inkreisradlus ist also gleich einem Drittel der Höhe auf der mittleren Seite.

Lösung von Wolfgang Prinzing:

Wir gehen aus von der (als bewiesen vorausgesetzten) Beziehung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

und ersetzen h_a und h_c mit Hilfe der Gleichung $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$; damit erhalten wir

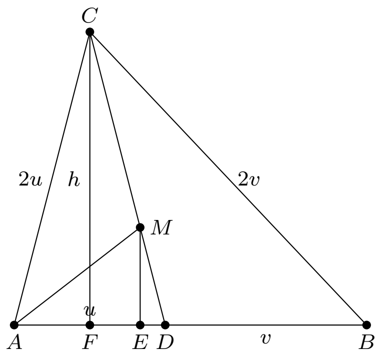
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_b}\left(\frac{a+b+c}{b}\right)$$

Setzen wir nun die Folge $(a;b;c) = (a;a+x;a+2x)$ ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_b} \cdot \frac{a+a+x+a+2x}{a+x} = \frac{3}{h_b}$$

und damit $r = \frac{1}{3}h_b$.

Lösung von Friedrich Timme:



Ein Dreieck mit den Seitenlängen $2u$, $u+v$ und $2v$ genügt den Bedingungen der Aufgabe; denn $u+v$ ist arithmetisches Mittel aus $2u$ und $2v$, d.h., die Seitenlängen bilden eine arithmetische Folge erster Ordnung.
Verbindet man den Teilpunkt D der Seite $AB = u+v$ des Dreiecks ABC (Abbildung) mit dem Punkt C, so ist CD Winkelhalbierende im Dreieck, da D die Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.
Auf CD liegt also der Mittelpunkt M des Inkreises. Dann ist aber auch AM Winkelhalbierende im Dreieck ADC, und es gilt

$$DM : MC = AD : AC = u : 2u = 1 : 2 \qquad \text{oder} \qquad DM : DC = 1 : 3$$

Nun ist $\angle CFB = 90°$ (CF ist Höhe auf FB) und $\angle MEB = 90°$ (der Radius des Inkreises steht senkrecht auf der Dreieckseite). Also ist $CF \parallel ME$ oder $h \parallel r$.
Dann gilt nach dem Strahlensatz $r : h = DM : DC = 1 : 3$, d.h. $r = \frac{h}{3}$.
Damit ist die Behauptung bewiesen. Sie gilt natürlich nur für die Höhe auf der "mittleren" Seite des Dreiecks.

Aufgabe 29/69
Man beweise, dass für alle positiven Zahlen a; b; c die folgende Ungleichung gilt:

$$a+b+c \leq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

Es ist

$$abc(a+b+c) = a^2bc + b^2ca + c^2ab = a^2\sqrt{b^2c^2} + b^2\sqrt{a^2c^2} + c^2\sqrt{b^2a^2}$$

Daraus folgt

$$abc(a+b+c) \leq a^2\frac{b^2+c^2}{2} + b^2\frac{c^2+a^2}{2} + c^2\frac{b^2+a^2}{2}$$

da das arithmetische Mittel $\frac{x^2+y^2}{2}$ zweier Zahlen x^2 und y^2 nie kleiner ist als ihr geometrisches Mittel $\sqrt{x^2y^2}$. Damit folgt weiter

$$abc(a+b+c) \leq a^2v^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^2b^2c^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$$

und wegen $abc > 0$

$$a + b + c \leq abc(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

Lösung von Eckart Keller:

Da Quadratzahlen (im Reellen) nicht negativ sind, gilt sicher die Ungleichung

$$(ab - ac)^2 + (ab - bc)^2 + (ac - bc)^2 \geq 0$$

Quadriert man aus, so ergibt sich nach Umformung .

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$$

Nach Voraussetzung sind $a; b; c$ positiv. Folglich erhält man durch Division mit abc:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a + b + c$$

Lösung von Günter Endtricht:

Für zwei positive Zahlen m und n gilt stets $(m - n)^2 \geq 0$, woraus sich

$$m^2 + n^2 \geq 2mn \qquad ; \qquad \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$$

ergibt. Somit ist

$$2a + 2b + 2c \leq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) a + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) d$$

$$a + b + c \leq \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$

Aufgabe 30/69
Mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat ist zu beweisen, dass $a^p - a$ stets durch $6p$ ohne Rest teilbar ist, wenn a eine natürliche Zahl und p eine Primzahl mit $p > 3$ ist.

Es ist $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Nach dem kleinen Satz von Fermat ist $a^{p-1} - 1$ durch p ohne Rest teilbar, wenn p eine Primzahl und a eine zu p teilerfremde natürliche Zahl ist. Demnach ist $a(a^{p-1} - 1)$ sicher durch p teilbar, wenn p Primzahl ist. Entweder sind nämlich a und p teilerfremd, so dass der kleine Satz von Fermat anwendbar ist, oder a und p haben einen gemeinsamen Teiler; dieser kann aber wegen der Primzahleigenschaft von p nur p selbst sein: $a = k \cdot p$, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Es bleibt also nachzuweisen, dass $a(a^{p-1} - 1)$ stets auch durch $6 = 2 \cdot 3$ teilbar ist, wenn p eine Primzahl oberhalb 3 ist. Entweder ist a gerade und damit durch 2 ohne Rest teilbar, oder a ist ungerade; dann ist aber auch a^{p-1} ungerade, und $a^{p-1} - 1$ ist gerade, also durch 2 ohne Rest teilbar.
Entweder ist a durch 3 ohne Rest teilbar, oder a lässt beim Teilen durch 3 einen der Reste ± 1. Da $p > 3$ ist, ist p ungerade und $p - 1$ gerade. Damit lässt im zweiten der beiden Falle a^{p-1} beim Teilen durch 3 den Rest 1 und $a^{p-1} - 1$ den Rest 0.
Wir haben gezeigt, dass unter den gegebenen Bedingungen stets einer der Faktoren von $a(a^{p-1} - 1)$ durch p, durch 2 und durch 3 ohne Rest teilbar ist. Da 2, 3 und $p > 3$ auf jeden Fall paarweise teilerfremd sind, ist das Produkt auch durch $2 \cdot 3 \cdot p = 6p$ teilbar.

Aufgabe 31/69
Die Breiten des nördlichen Polarkreises und des nördlichen Wendekreises sind $\alpha = 66°33'$ bzw. $\beta = 23°27'$ nördlicher Breite.
Man beweise, dass der Abstand h der beiden Breitenkreisebenen gleich der Differenz der Radien r_1 und r_2 der beiden Kreise ist (wobei Kugelgestalt der Erde angenommen werde).

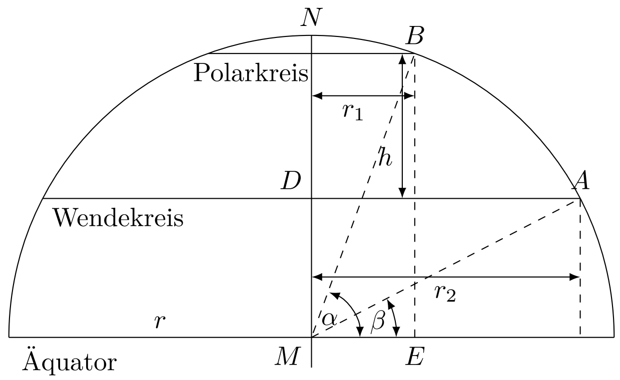
Der Radius der Erdkugel sei r. Dann gelten die Gleichungen

$$r_1 = r\cos\alpha; \quad r_2 = r\cos\beta; \quad h = r(\sin\alpha - \sin\beta$$

Wegen

$$\beta = 90° - \alpha; \quad \cos\beta = \sin\alpha; \quad \alpha = 90° - \beta; \quad \cos\alpha = \sin\beta$$

ergibt sich $r_2 - r_1 = r\cos\beta - r\cos\alpha = r(\sin\alpha - \sin\beta) = h$.



Aufgabe 32/69
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, die durch 7, 11 und 13 restlos teilbar sind und deren drei Endziffern eine vorgegebene dreistellige natürliche Zahl q bilden.

Bekanntlich ist $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Die gesuchten Zahlen z lassen sich in der Form $z = 1000x + q$ mit $x \geq 0$, ganz, schreiben. Es gilt

$$1000x + q \equiv -x + q \equiv 0 \pmod{1001} \to x \equiv q \pmod{1001}$$

Das heißt aber nichts anderes als $x = 1001n + q$ mit $n = 0, 1, 2, ...$ Somit ist $z_n = 1000(1001n + q) + q = 1001(1000n + q)$. Die gesuchten Zahlen bilden also eine unendliche arithmetische Folge 1. Ordnung mit dem Anfangsglied $1001q$ und der Differenz 1001000.

Aufgabe 33/69
Man beweise: Unter der Voraussetzung, dass a, b und c rationale Zahlen sind, ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

genau dann gleich null, wenn a, b und c gleich null sind.

Angenommen, es sei eine der Zahlen von null verschieden. Man sucht zunächst den Hauptnenner der drei Zahlen a, b und c (da es sich um rationale Zahlen handelt, ist dies möglich), multipliziert die Zahlen a, b und c mit diesem und teilt anschließend durch den größten gemeinsamen Teiler.
Man erhält auf diese Weise drei ganze Zahlen a', b' und c', die keinen gemeinsamen Teiler haben. Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a' & 2c' & 2b' \\ b' & a' & 2c' \\ c' & b' & a' \end{vmatrix}$$

sind hinsichtlich der Eigenschaft, null oder nicht null zu sein, äquivalent.
Es sei nun $a'^3 + 2b'^3 + 4c'^3 - 8a'b'c' = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a' \neq 0$. Von den übrigen Summanden muss noch mindestens ein weiterer ungleich null sein — sämtliche der übrigen sind aber gerade. Folglich muss auch a' gerade sein: $a' = 2a''$. Damit folgt

$$8a''^3 + 2b'^3 + 4c'^3 - 16a''b'c' = 0 \quad \text{oder} \quad 4a''^3 + b'^3 + 2c'^3 - 8a''b'c' = 0$$

Analog schließt man daraus weiter, dass auch b' und danach c' gerade sein müssen. Dies ist aber ein Widerspruch zu der oben getroffenen Feststellung, dass a', b' und c' zueinander teilerfremd sind (nach Konstruktion). Daraus folgt, dass die Annahme $a'^3 + 2b'^3 + 4c'^3 - 8a'b'c' = 0$ mit $a' \neq 0$ falsch ist. Entsprechend verläuft der Beweis für $b' \neq 0$ bzw. $c' \neq 0$. Dass die Behauptung für $a = b = c = 0$ richtig ist, ist trivial.

Aufgabe 34/69
Gesucht ist die kleinste, natürliche, vierstellige Zahl x (deren erste Ziffer nicht null ist) mit der folgenden Eigenschaft:
Vertauscht man in $x+1$ die beiden mittleren Ziffern miteinander und streicht man anschließend die letzte (vierte) Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl y derart, dass x ohne Rest durch $11y$ teilbar ist.

Es sei $x = 1000a + 100b + 10c + d$ mit $a \neq 0$. Man unterscheidet zwei Fälle:
1. $d = 0; 1; 2; ...; 8$. Dann ist $y = 100a + 10c + b$ und es folgt die Gleichung

$$1000a + 100b + 10c + d = 11k(100a + 10b + c)$$

und da das kleinste x gesucht ist, muss $k = 1$ sein; damit ergibt sich $100b + d = 100a + 100c + 11b$. Man erkennt, dass $d = b$ sein muss. Die resultierende Gleichung $9b = 10a + 10c$ ist für nichtnegative b und c und positive a nicht lösbar.
2. $d = 9$. Dann ist $y = 100a + 10(c + 1) + b$ und es folgt die Gleichung

$$1000a + 100b + 10c + d = 11k(100a + 10c + 10 + b)$$

auch hier schließt man $k = 1$, folglich $100b + d = 100a + 100c + 110 + 11b$. Auch in diesem Fall muss $d = b$ sein, und es ergibt sich wegen $d = b = 9$ die Gleichung $7 = a + c$.
Da die kleinste Zahl gesucht ist, folgert man $a = 1, c = 6$. Die gesuchte Zahl x ist damit x = 1960 (die nächstgrößere Zahl wäre 2959).

Aufgabe 35/69
Gesucht ist eine natürliche Zahl n mit vierstelliger Dezimaldarstellung, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Ihre Quersumme ist eine ungerade Quadratzahl.
2. Sie ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.
3. Die Summe der beiden Primzahlen ist das Zehnfache der Zahl, die man erhält, wenn man bei der Zahl n die Einerstelle und die Zehnerstelle streicht.
4. Die Differenz aus dem einen Primfaktor und dem Zehnfachen des anderen ist gleich der Zahl, die man erhält, wenn man bei der Zahl n die Hunderterstelle und die Tausenderstelle streicht.

Da die Quersumme einer vierstelligen Zahl höchstens 36 betragen kann, kommt für n nur die Quersumme 25 in Frage; denn die Quersummen 1 und 9 stehen im Widerspruch zur Eigenschaft 2. Es sei nun $n = 1000a + 100b + 10c + d$, wobei a, b, c, d natürliche Zahlen mit $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b; c; d \leq 9$ sind. Aus den angegebenen Eigenschaften ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} n &= p_1 \cdot p_2 && \text{(Eigenschaft 2)} \\ p_1 + p_2 &= 10(10a + b) && \text{(Eigenschaft 3)} \\ p_2 - 10p_1 &= 10c + d && \text{(Eigenschaft 4)} \\ a + b + c + d &= 25 && \text{(Eigenschaft 5)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$n = p_1 p_2 = 1000a + 100b + 10c + d = 1p(p_1 + p_2) + (p_2 - 10p_1) = 11p_2 \to p_1 = 11$$

Die gesuchte Zahl ist mithin durch 11 ohne Rest teilbar; das ist aber genau dann der Fall, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Diese muss also -11 oder 0 oder +11 sein. Damit ergeben sich die Systeme

$$\begin{aligned} a + b + c + d = 25; -a + b - c + d &= -11 && (1) \\ a + b + c + d = 25; -a + b - c + d &= 0 && (2) \\ a + b + c + d = 25; -a + b - c + d &= +11 && (3) \end{aligned}$$

Das System (2) führt durch Addition der beiden Gleichungen sofort auf den Widerspruch, dass eine gerade Zahl gleich einer ungeraden Zahl sei, kann also als nicht lösbar ausgeschieden werden.
Aus System(1) ergibt sich $a + c = 18; b + d = 7$, woraus $a = c = 9$ sowie die folgenden Werte für b und d resultieren: $b = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$, $d = 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0$. Keine der sich daraus ergebenden Zahlen n hat jedoch die geforderten Eigenschaften.
Aus System (3) folgt schließlich $a + c = 7, b + d = 18$ mit $b = d = 9$ und $a = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ sowie $c = 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0$. Von den daraus bildbaren Zahlen n weist nur $n = 1969$ alle geforderten Eigenschaften auf.

Aufgabe 36/69
Gesucht ist eine natürliche, vierstellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Summe aus der Tausenderstelle und der Hunderterstelle ist gleich der Zahl, die sich ergibt, wenn man in in der gesuchten Zahl die beiden mittleren Stellen streicht.
2. Diese Summe ist kleiner als das Doppelte der Zehnerstelle.
3. Genau einer der vier Stellenwerte ist eine Primzahl.

Es seien a, b, c und d die Tausender-, Hunderter-, Zehner- bzw. Einerstelle der gesuchten Zahl z. Dann gilt zunächst

$$z = 1000a + 100b + 10c + d$$

mit $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b; c; d \leq 9$, a, b, c, d ganz ($a = 0$ kann ausgeschlossen werden, da die Zahl z sonst nicht echt vierstellig wäre). Aus der Bedingung 1 ergibt sich dann

$$a + b = 10a + d \qquad \text{oder} \qquad b = 9a + d$$

Daraus folgt sofort $a = 1, b = 9, d = 0$. Da alle drei Zahlen keine Primzahlen sind, muss $c = p$ nach Bedingung 3 Primzahl sein. Aus Bedingung 2 folgt nun noch

$$a + b < 2c = 2p; \qquad 10 < 2c = 2ß; \qquad 5 < c = p$$

Also ist $c = p = 7$. Damit ist $z = 1970$.

Lösung von Nguyenthitrong Hien Tarrago:

Die gesuchte zahl sei $1000a + 100b + 10c + d$. Dann gilt

$$a + b = 10a + d \qquad ; \qquad a + b < 2c$$

Die Zahl c ist nicht größer als 9: $c \leq 9$, also $a + b < 18$, $10 + d \leq 18$.
Daraus folgt $a = 1$, $d \leq 8$, $b = 9 + d$. Die Zahl b ist nicht größer als 9: $b \leq 9$. Also ist $b = 9$ und $d = 0$. Nunmehr gilt

$$1 + 9 < 2c \leq 18 \qquad ; \qquad 5 < c \leq 9$$

also $c = 7$ (c muss Primzahl sein, und 7 ist die einzige Primzahl zwischen 5 und 9).
Die gesuchte Zahl ist 1970.

2.10 Aufgaben und Lösungen 1970

Aufgabe 1/70
In einem Dreieck ABC seien a, b und c die Maßzahlen der Seiten und s_a, s_b sowie s_c die Maßzahlen der entsprechenden Seitenhalbierenden. Man beweise, dass gilt

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Die Winkel zwischen s_c und c seien mit φ und $180° - \varphi$ derart bezeichnet, dass φ der Seite b, $280° - \varphi$ der Seite a gegenüberliegt. Dann gilt nach dem Kosinussatz

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + s_c^2 - cs_c \cos\varphi, \qquad a^2 = \frac{c^2}{4} + s_c^2 + cs_c \cos\varphi$$

Durch Addition folgt

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2s_c^2 \quad \text{und} \quad s_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

Analog folgt für s_b und s_a: $s_b^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4}; s_a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$
Durch Addition ergibt sich $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Aufgabe 2/70
Man beweise, dass die Gleichung

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x} - \sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x} = a$$

für jedes ganze a genau eine reelle Lösung hat, die ganzzahlig ist!

Wir setzen

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x} = m; \sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x} = n$$

aus der gegebenen Gleichung folgt dann durch beiderseitiges Kubieren

$$a^3 = (m-n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 = 2x - 3\sqrt[3]{1}a = 2x - 3a \to x = \frac{a^3+3a}{2}$$

Da sich alle Schritte umkehren lassen, ist $x = \frac{a^3+3a}{2}$ tatsächlich eine Lösung der Gleichung.
Der Ausdruck $a^3 + 3a$ ist in jedem Fall durch 2 teilbar; denn für $a \equiv 0 \pmod 2$ ist $a^3 + 3a \equiv 0 \pmod 2$ und für $a \equiv 1 \pmod 2$ ist $a^3 + 3a \equiv 4 \equiv 0 \pmod 2$. Also ist x ganzzahlig für jedes ganze a.

Aufgabe 3/70
Es ist $x^0 = 1$ und $0^x = 0$ für $x \neq 0$. Welchen Wert hat $\lim_{x\to 0} x^x$?

Man berechnet zweckmäßig den natürlichen Logarithmus des Grenzwertes. Ist dieser gefunden, so kann man daraus den Grenzwert selbst ermitteln. Es ist

$$\ln \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}}$$

Auf den Grenzwert ist der Satz von Bernoulli-L'Hospital anwendbar, da $\lim_{x\to 0} \ln x = -\lim_{x\to 0} x^{-1} = -\infty$ ist:

$$\ln \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Damit ist der Grenzwert $\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$.

Aufgabe 4/70
Von einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c und den Höhen h_a, h_b und h_c seien der von den Seiten a und b eingeschlossene Winkel γ sowie die Strecken $a+b$ und h_a+h_b gegeben.
Man zeige, dass aus diesen drei Bestimmungsstücken das Dreieck nicht konstruierbar ist!

Ein Dreieck ist durch 3 voneinander unabhängige Stücke vollständig bestimmt. Wenn man zeigen kann, dass γ, $a+b$ und h_a+h_b voneinander abhängig sind, ist der geforderte Beweis erbracht.
Es ist $\sin\gamma = \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}$, also $a = h_b \sin\gamma, b = h_a \sin\gamma$. Daraus folgt $a+b = (h_a+h_b)\sin\gamma$. Mit h_a+h_b und γ ist also auch $a+b$ bestimmt. Die drei Stücke sind voneinander abhängig.

Aufgabe 5/70
Es ist zu beweisen, dass die Gleichung $x^2 - a^2y^2 = b$ mit a, b ganzzahlig, $b > 0$, höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen $(x; y)$ haben kann.

Es ist $x^2 - a^2y^2 = (x+ay)(x-ay) = b$. Die Zahl b ist also Produkt zweier Faktoren f_1 und f_2. Ist b Primzahl, so ist einer der Faktoren gleich 1, der andere gleich b. Ist b nicht Primzahl, so kann man b auf endlich viele Weisen in ein Produkt aus zwei Faktoren zerlegen (das folgt aus der Tatsache, dass die Primfaktorzerlegung von b eindeutig ist und nur endlich viele Faktoren enthält).
Für jede mögliche Zerlegung von b in zwei Faktoren ergeben sich demnach zwei Gleichungssysteme:

$$x+ay = f_1 \quad x-ay = f_2 \qquad (a)$$
$$x+ay = f_2 \quad x-ay = f_1 \qquad (b)$$

Die Lösungen sind

$$x = \frac{f_1+f_2}{2a} \quad y = \frac{f_1-f_2}{2a} \qquad (a)$$
$$x = \frac{f_1+f_2}{2a} \quad y = \frac{f_2-f_1}{2a} \qquad (b)$$

Sie sind genau dann ganzzahlig, wenn $2a$ Teiler von $|f_1 - f_2|$ ist. Da jede Faktorenzerlegung höchstens zwei Lösungen liefert und die Anzahl der Faktorenzerlegungen endlich ist, kann auch die Anzahl der (ganzzahligen) Lösungen höchstens endlich sein.

Aufgabe 6/70
Man ermittle alle positiven reellen Zahlen x und y, die der Gleichung

$$\frac{\log_a y \cdot \log_x y}{(\log_{2x} y)^2} = \frac{9}{2}$$

Da die Zahl 1 als Basis eines Logarithmensystems ungeeignet ist und da $\log 1 = 0$ für jede Basis ist, scheiden zunächst $x = 1$ und $y = 1$ als Lösung aus. Für die weitere Untersuchung ist es zweckmäßig, alle Logarithmen auf dieselbe Basis zu reduzieren. Dazu dient die Gleichung $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$. Damit ist

$$\frac{log_2 y \cdot \log_x y}{(\log_{2x} y)^2} = \frac{(\log_y 2x)^2}{\log_y 2 \cdot \log_y x} = \frac{(\log_y 2 + \log_y x)^2}{\log_y 2 \cdot \log_y x} = \frac{\left(1 + \frac{\log_y x}{\log_y 2}\right)^2}{\frac{\log_y x}{\log_y 2}} = \frac{9}{2}$$

Substituiert man nun $a = \frac{\log_y x}{\log_y 2}$, so ergibt sich

$$\frac{(1+a)^2}{a} = \frac{9}{2} \to a^2 - \frac{5}{2}a + 1 = 0 \to a_1 = 2; a_2 = \frac{1}{2}$$

Aus $a = \frac{\log_y x}{\log_y 2}$ folgt weiter $\log_y x = a \cdot \log_y 2 = \log_y 2^a$ und damit $x = 2^a$.
Man erkennt, dass die Gleichung von y unabhängig ist, dass sie also für jedes positive reelle y außer $y = 1$ erfüllt ist. Mit den beiden für a ermittelten Werte ergibt sich $x_1 = 4$ und $x_2 = \sqrt{2}$.

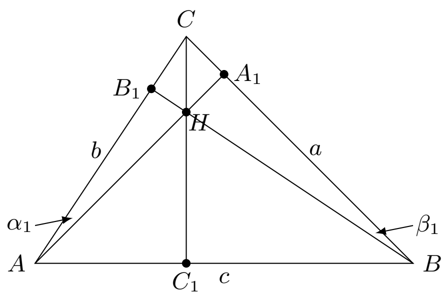
Aufgabe 7/70
Gesucht sind alle Primzahlen p, die der Gleichung $c^3 - c^2 - 11c - 1452 = p$ für irgendein positives, ganzzahliges c genügen.

Da jede Primzahl (bis auf die Reihenfolge) genau eine Darstellung als Produkt aus zwei Faktoren besitzt, $p = 1 - p$, liegt es nahe, den Term $c^3 - c^2 - 11c - 1452$ in ein Produkt aus zwei Faktoren zu zerlegen und zu untersuchen, für welche Werte von c einer der Faktoren den Wert 1 annimmt. Wir setzen daher

$$c^3 - c^2 - 11c - 1452 = (c + a)(c^2 + a_1c + a_0) = c^3 + (a + a_1)c^2 + (a_0 + aa_1)c + aa_0$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $a = -12, a_1 = 11, a_0 = 121$, so dass sich die gesuchte Produktdarstellung zu $p = (c-12)(c^2+11c+121)$ ergibt. Es sind nun die Gleichungen $c-12 = 1$ und $c^2+11+121 = 1$ zu lösen.
Die erste Gleichung liefert $c = 13$, die zweite hat keine reellen Lösungen. Demnach ist $c = 13$ der einzige Wert, für den sich eine Primzahl ergibt: $p = 433$.

Aufgabe 8/70
Es ist zu beweisen, dass die Höhen jeden beliebigen spitzwinkligen Dreiecks gleichzeitig Winkelhalbierende im zugehörigen Fußpunktdreieck sind.



Wegen $\measuredangle HA_1B = \measuredangle HC_1B = 90°$ ist das Viereck HA_1BC_1 ein Sehnenviereck; d.h., die Punkte H, A_1, B und C_1 liegen auf einem Kreis mit dem Durchmesser BH.
Daraus folgt, dass $\measuredangle HC_1A_1 = \beta_1$ ist, denn beide Winkel sind Peripheriewinkel über der Sehne HA_1.
Auf analoge Weise zeigt man, dass $\measuredangle HC_1B_1 = \alpha_1$ ist (Sehnenviereck HC_1AB_1). Die Schenkel der Winkel α_1 und β_1 stehen paarweise senkrecht aufeinander; demnach gilt $\alpha_1 = \beta_1$ und mithin auch $\measuredangle HC_1A_1 = \measuredangle HC_1B_1$.

Das heißt aber nichts anderes, als dass die Höhe auf der Seite c den Winkel $\measuredangle A_1B_1C_1$ halbiert. Durch zyklische Vertauschung gilt dieser Beweis zugleich auch für die Höhen auf den Seiten a und b.

Aufgabe 9/70
Gesucht sind alle wachsenden arithmetischen Folgen 1.Ordnung aus 9 nichtnegativen ganzzahligen Gliedern, bei denen das letzte Glied gleich dem Quadrat des zweiten ist.
Welche bemerkenswerte Eigenschaft hat eine davon?

Das Bildungsgesetz der arithmetischen Folge 1.Ordnung lautet $a_n = a_1 + (n-1)d$. Es ist also

$$a_2 = a_1 + d \quad \text{und} \quad a_9 = a_1 + 8d = (a_1 + d)^2 = a_2^2$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die für d quadratische Gleichung mit den Lösungen

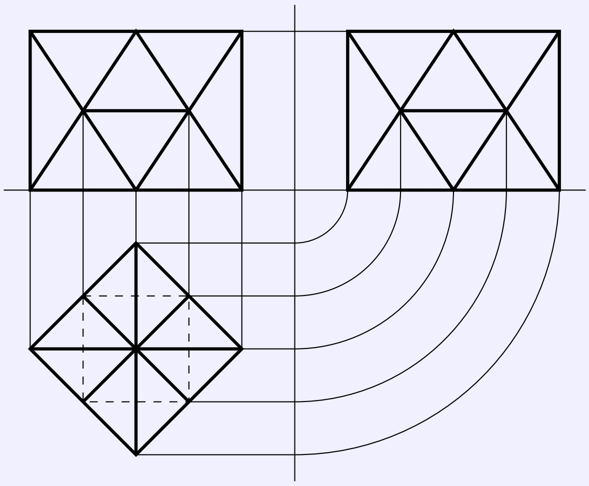
$$d^2 - 2d(4 - a_1) + a_1^2 - a_1 = 0 \to d_{1;2} = 4 - a_1 \pm \sqrt{16 - 7a_1}$$

Da die Glieder der Folgen sämtlich ganzzahlig sein sollen, ist sowohl a_1 als auch d ganzzahlig; in Frage kommen für a_1 demnach nur die Werte $a_{11} = 0$ und $a_{12} = 1$. Für d ergeben sich damit die möglichen Werte $d_{11} = 8, d_{12} = 0, d_{21} = 6, d_{22} = 0$.
Die Werte $d_{12} = d_{22} = 0$ entfallen jedoch, da die gesuchten Folgen wachsend sein sollen, was $d > 0$ voraussetzt. Es sind demnach nur zwei Folgen mit den vorgegebenen Eigenschaften möglich, nämlich

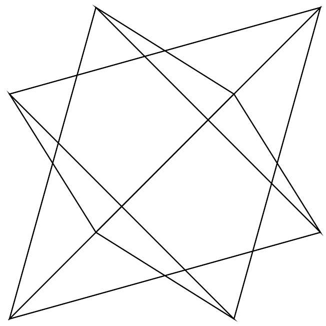
$$\{a_k\} = 0; 8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64 \quad \text{und} \quad \{a_k\} = 1; 7; 13; 19; 25; 31; 37; 43; 49$$

Die zweite von ihnen hat die besondere Eigenschaft, dass sie aus drei gleichmäßig verteilten Quadratzahlen $a_1 = 1, a_5 = 25, a_9 = 49$ und sechs Primzahlen $a_2 = 7, a_3 = 13, a_4 = 19, a_5 = 31, a_7 = 37, a_8 = 43$ besteht. Das ist kein Zufall, sondern liegt an der Differenz $d = 6$ und an $a_1 = 1$.
Bekanntlich lässt sich jede Primzahl in der Form $p = 6k \pm 1$ darstellen, sofern $p > 3$ ist. Die betrachtete Folge umfasst aber gerade die Zahlen der Form $6k + 1$, woraus sich die Häufung der Primzahlen erklärt (sie bleibt bestehen, wenn man die Folge über das 9. Glied hinaus fortsetzt).

Aufgabe 10/70
In der Abbildung sind Grund-, Auf- und Seitenriss eines Körpers dargestellt. Man beschreibe diesen Körper eindeutig in einem Satz und gebe eine Skizze in schräger Parallelprojektion.



Der Körper wird aus zwei kongruenten, einander symmetrisch durchdringenden regulären Tetraedern gebildet.



Aufgabe 11/70
In welchem Dreieck sind die Maßzahlen der Höhe h_b und der Dreiecksseiten a, b und c in dieser Reihenfolge vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen?

Es sei β der von den Seiten a und c eingeschlossene Dreieckswinkel. Dann gilt nach dem Sinussatz bzw. nach dem Kosinussatz

$$bh_b = ac\sin\beta \qquad \text{und} \qquad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

Daraus folgt

$$b^2h_b^2 = a^2c^2\sin^2\beta = a^2c^2(1-\cos^2\beta) = a^2c^2(1-\frac{(a^2+c^2+b^2)^2}{4a^2c^2}$$

Nun soll sein $a = h_b+1, b = h_b+2, c = h_b+3$. Setzt man diese Werte ein und vereinfacht man die Gleichung, so ergibt sich (wegen $h_b \neq 0$) $h_b^4 + 8h_b^3 - 44h_b^2 - 48h_b = 0 = h_b^3 + 8h_b^2 - 44h_b - 48$.
Durch sinnvolles Probieren findet man zunächst die Lösung $h_b = -2$, die jedoch geometrisch keinen Sinn hat, da $h_b > 0$ gilt. Damit kann man jedoch die Gleichung weiter reduzieren.

$$h_b^2 - 10h_b - 24 = 0 \rightarrow h_b = -2 \text{ (Doppellösung!) }, h_b = 12$$

Das gesuchte Dreieck hat also Seiten mit den Maßen $a = 13$ LE, $b = 14$ LE, $c = 15$ LE und die Höhe $h_b = 12$ LE.

Aufgabe 12/70
Ohne Verwendung der Differentialrechnung bestimme man den kleinsten und größten Wert der Funktion

$$y = f(x) = 2 - 2\cos^2 x - \sin x$$

Man formt den Term $2 - 2\cos^2 x - \sin x$ mit Hilfe bekannter Beziehungen der Goniometrie um:

$$y = f(x) = 2 - 2\cos^2 x - \sin x = 2(1 - \cos^2 x) - \sin x = 2\sin^2 x - \sin x$$

Der größte Wert wird offensichtlich für $\sin x = -1$ erreicht, da dann $\sin^2 x = 1$ und $-\sin x = 1$ ist. Damit ist $f_{max}(x) = +3$.
Zur Ermittlung des kleinsten Funktionswertes werden weitere Umformungen durchgeführt

$$y = f(x) = 2\sin^2 x - \sin x = 2(\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}) - \frac{1}{8} = 2\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

Der kleinste Wert ergibt sich, wenn $\sin x - \frac{1}{4} = 0$ ist. Es ist $f_{min} = -\frac{1}{8}$.

Aufgabe 13/70
Gesucht ist das rechtwinklige Dreieck, dessen Seitenlängen a, b, c sämtlich ganzzahlig sind und bei kleinstmöglichem a der Relation $4a = \frac{b+c}{2}$ genügen.
Dabei bezeichne a eine Kathete.

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann angenommen werden, dass c die Hypotenuse ist. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $a^2 = c^2 - b^2$.
Andererseits folgt aus $4a = \frac{b+c}{2}$ die Gleichung $8a = c + b$. Nun ist $a^2 = 8a \cdot \frac{1}{8}a = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$.
Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$c + b = 8a \qquad ; \qquad c - b = \frac{1}{8}a$$

das die Lösungen $b = \frac{63}{16}a$ und $c = \frac{65}{16}a$ hat. Auf Grund der Aufgabenstellung folgert man $a = 16$ LE, $b = 63$ LE, $c = 65$ LE.

Aufgabe 14/70
Eine n-stellige Dualzahl habe die Quersumme m (wobei n und m natürliche Zahlen mit $1 \leq m \leq n$ sind).
Wieviel solche Zahlen gibt es bei vorgegebenem n und m?

Im Dualsystem gibt es nur die Ziffern 0 und 1. Die Quersumme m entsteht also aus der Addition von m Einsen, die übrigen $n - m$ Ziffern der Dualzahl sind Nullen. Hinter der ersten Ziffer (von links), die eine Eins sein muss, folgen in beliebiger Reihenfolge $m - 1$ Einsen und $n - m$ Nullen. Die Anzahl der Permutationen dieser Ziffern ist

$$P = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \binom{n-1}{m-1}$$

Dies ist zugleich die Anzahl der n-stelligen Dualzahlen mit der Quersumme m.
Beispiel: $n = 10$, $m = 6$. Es ist $\binom{9}{5} = 126$, es gibt also 126 zehnstellige Dualzahlen mit der Quersumme 6.

Aufgabe 15/70
Man finde alle Primzahlen, die sowohl als Summe als auch als Differenz von je zwei Primzahlen darstellbar sind.

Es sei p eine der gesuchten Primzahlen. Wenn sich p als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt, gilt sicher $p > 2$. Folglich ist p ungerade. Ist weiter p als Differenz zweier Primzahlen darstellbar, d.h., gilt $p = p_1 - q_1$ wobei p_1 und q_1 ebenfalls Primzahlen sind, so folgt $p_1 > p$, also ungerade.
Weiter folgt sofort, dass q_1 gerade ist, da sonst p gerade wäre (Widerspruch zur obigen Feststellung). Also ist $q_1 = 2$, denn weitere gerade Primzahlen gibt es nicht.
Analog folgt aus $p = p_2 + q_2$, dass genau eine der beiden Primzahlen p_2 und q_2 gerade und demnach gleich 2 sein muss; ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit (wegen der Kommutativität der Addition) sei dies q_2. Dann gilt

$$p_2 + 2 = p = p_1 - 2$$

Die gesuchten Primzahlen sind demnach mittlere Zahlen von Primzahltripeln.
Nach der Aufgabe 10/69 (Heft 4/1969) gibt es aber genau ein Primzahltripel, nämlich 3; 5; 7. Damit ist $p = 5$ die einzige Primzahl, die sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Primzahlen darstellbar ist: $3 + 2 = 5 = 7 - 2$.

Aufgabe 16/70
Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie eine Strecke x beliebiger Länge.
Man zeige: Wenn A die kleinere der Strecken a und x, B die kleinere der Strecken b und x und C die kleinere der Strecken c und x ist, so ist aus A, B und C mit Sicherheit ein Dreieck konstruierbar.

Zum Beweis genügt es, die Dreiecksungleichungen für A, B und C herzuleiten. Wir beweisen:

$$\text{Aus} \quad a + b > c \quad \text{folgt} \quad A + B > C$$

1. Angenommen, wenigstens eine der beiden Strecken A und B sei gleich x. Dann gilt $A+B > x$, außerdem ist nach den Bedingungen der Aufgabe $x \geq C$. Also folgt $A + B > C$.
2: Angenommen, keine der beiden Strecken A und B sei gleich x. Dann ist nach den Bedingungen der Aufgabe $A = a$ und $B = b$. Es folgt

$$A + B = a + b > c \geq C$$

Welche mögliche Annahme man auch trifft, in jedem Fall ist also die Dreiecksungleichung $A + B > C$ erfüllt. Durch zyklische Vertauschung erhält man auf die gleiche Weise die Ungleichungen $B + C > A$ und $C + A > B$. Daraus folgt die Existenz eines Dreiecks mit den Seiten A, B und C.

Aufgabe 17/70
Für welche natürlichen Zahlen n ist $z_n = 4^n - 3^n$ durch 7 teilbar?

E ist $4 \equiv -3 \pmod 7$. Folglich ist $41n \equiv (-3)^n \pmod 7$. Für $n = 2k$ ist

$$4^n = 4^{2k} \equiv (-3)^{2k} = 3^{2k} = 3^n \pmod 7$$

und deshalb $4^n - 3^n \equiv 0 \pmod 7$.
Ist dagegen $n = 2k + 1$, so ist

$$4^n = 4^{2k+1} \equiv (-3)^{2k+1} = -3^{2k+1} = -3^n \pmod 7$$

Man erkennt, dass in diesem Fall $4^n - 3^n = -3^n - 3^n = -2 \cdot 3^n \neq 0 \pmod 7$ ist. Bildet man jedoch $4^n+3^n = -3^n+3^n \equiv 0 \pmod 7$, so erkennt man, dass in diesem Fall die Teilbarkeit durch 7 bei $n = 2k+1$ gegeben ist.

Aufgabe 18/70
Gesucht ist die Menge aller Paare von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Quersummen beide geradzahlig sind.

Die gesuchten Zahlenpaare haben die Form $(n - 1, n))$ mit $n \in N$ (wobei N die Menge der natürlichen Zahlen ist). Die Quersumme von n bezeichnen wir mit $Q(n)$.
1. Wenn n eine von Null verschiedene Endziffer hat, unterscheiden sich die Quersummen von $n - 1$ und n im 1: $Q(n) = Q(n - 1) + 1$. Beide Quersummen können also nicht zugleich geradzahlig sein.
2. Infrage kommen also nur Zahlen n, die als Endziffer 0 haben. Dann hat aber die Zahl $n - 1$ wenigstens eine Endziffer 9.
Die Zahl $n - 1$ habe nun genau k Endziffern 9, so dass die $(k + 1)$-te Ziffer von rechts $m \neq 9$ ist. Dann hat n genau k Endziffern 0 und die $(k+1)$-te Ziffer von rechts ist $m+1 \neq 0$. Da alle übrigen Ziffern beim Übergang von $n - 1$ zu n unverändert bleiben, gilt für die Quersummen

$$Q(n - 1) - Q(n) = 9k - 1$$

Ist nun k eine ungerade Zahl, so ist $9k - 1$ geradzahlig, und die Quersummen sind entweder beide gerade oder beide ungerade. Die Menge der gesuchten Zahlenpaare ist demnach

$$M = \{(10^k a - 1; 10^k a) \text{ mit } a, k \in N, a \neq 9 \pmod{10}\ , Q(a) \equiv 0 \pmod 2\ , k \equiv 1 \pmod 2\}$$

Beispiele: (2419; 2420) $a = 242, k = 1, Q(n) = 8, Q(n-1) = 16$
(160999; 161000) $a = 161, k = 3, Q(n) = 8, Q(n-1) = 34$

Aufgabe 19/70
Ein Prisma mit n-eckiger Grundfläche habe $10n$ Diagonalen (Körper- und Flächendiagonalen).
Wie groß ist n?

Ein n-eckiges Prisma hat $2n$ Körperecken und $3n$ Kanten. Jede Ecke kann mit jeder anderen Ecke durch eine Strecke verbunden werden, die entweder Kante oder Diagonale ist. Die Anzahl der Verbindungsstrecken ist

$$\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = 2n^2 - n$$

Folglich ist die Anzahl der Diagonalen $10n = 2n^2 - n - 3n$. Daraus ergibt sich die für n quadratische Gleichung ohne Absolutglied: $n^2 - 7n = 0$ mit den Lösungen $n_1 = 0, n_2 = 7$. Da es kein nulleckiges Prisma gibt (der Variablenbereich für n ist $n \geq 3$, ganz!), ist $n = 7$ einzige Lösung. Ein siebeneckiges Prisma hat also insgesamt 70 Diagonalen.

Aufgabe 20/70
Sind in einem nicht überschlagenen, konvexen Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleichlang und sind alle Winkel paarweise voneinander verschieden, so liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den beiden ungleich langen Seiten stets außerhalb des Vierecks.
Dieser Satz ist zu beweisen.

Wir führen den Beweis indirekt: Angenommen, der Schnittpunkt S der beiden Mittelsenkrechten h_1 und h_2 auf den ungleich langen Seiten liegt innerhalb des Vierecks. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, die beiden Seiten AD und BC seien gleich lang, und h_1 sowie h_2 seien die Mittelsenkrechten auf den Seiten AB bzw. CD. Es gilt dann $AS = BS$ und $DS = CS$.
Wegen $AD = BC$ stimmen damit die Dreiecke ASD und BSC in allen drei Seiten überein, d.h., sie sind kongruent. Das bedeutet aber, dass sie auch in den Winkeln übereinstimmen:

$$\measuredangle DAS = \measuredangle SBC \quad \text{und} \quad \measuredangle ADS = \measuredangle SCB$$

Es ist aber auch

$$\measuredangle SAB = \measuredangle SBA \quad \text{und} \quad \measuredangle SCD = \measuredangle SDC$$

wegen der Gleichschenkligkeit der Dreiecke ABS und CDS. Daraus folgt, dass

$$\measuredangle DAB = \measuredangle CBA \quad \text{und} \quad \measuredangle BCD = \measuredangle ADC$$

ist, mit anderen Worten, dass das Viereck im Widerspruch zur Voraussetzung zwei Paare gleicher Winkel hat. Damit ist der Beweis geführt, dass S nicht im Inneren des Vierecks liegt.

Es bleibt noch zu prüfen, ob S auf einer Viereckseite liegen kann. Dieser Fall ist aber nur ein Sonderfall des oben beschriebenen allgemeinen Falles Dreieck ABS beispielsweise ist zur Strecke entartet, $\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 0$) und somit in diesem enthalten.

Aufgabe 21/70
Man beweise: Wenn $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ beliebige komplexe Zahlen sind, die den Gleichungen

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$
$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3$$

genügen, dann sind die Mengen $\{a_1; a_2; a_3\}$ und $\{b_1; b_2; b_3\}$ einander gleich.

Es gilt für beliebige komplexe Zahlen x, y, z die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

Damit folgt aus den gegebenen Gleichungen (1) und (2)

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = q \qquad (4)$$

Weiter gilt

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(xy + yz + zx)(x + y + z) + 6xyz$$

Mit (1) und (4) ergibt sich daraus $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 = r$. Setzt man nun zur Abkürzung noch $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = p$, so erkennt man, dass sowohl die a_i als auch die b_i die kubische Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ erfüllen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra folgt damit unmittelbar die Behauptung.
Bemerkung: Die Aufgabe lässt sich für Mengen $\{a_i\}, \{b_i\}$ mit $i = 1, 2, 3, ..., n$ verallgemeinern.

Aufgabe 22/70
Verbindet man benachbarte Seitenmitten eines regelmäßigen n-Ecks miteinander, so entsteht ein neues regelmäßiges n-Eck, das dem ursprünglichen ähnlich ist. Es sei $\triangle\ A = A - A'$ die Differenz der Flächeninhalte beider n-Ecke.
Für welche n gilt $\triangle\ A = \frac{A}{10}$?

Aus $\Delta A = A - A' < \frac{A}{10}$ folgt zunächst durch äquivalente Umformung $\frac{A'}{A} > \frac{9}{10}$. Weiter gilt: $A = \frac{n}{2}r^2 \sin\frac{360°}{n}$ (wobei mit r der Umkreisradius bezeichnet ist) und

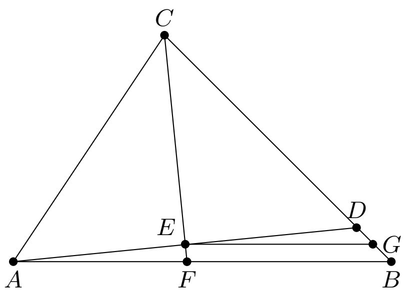
$$A' = \frac{n}{2}r'^2 \sin\frac{360°}{n} \qquad \text{also} \qquad \frac{A'}{A} = \frac{r'2}{r^2} > \frac{9}{19}$$

Wegen $r' = r\cos\frac{360°}{n}$ ergibt sich daraus $\cos^2\frac{360°}{2n} > \frac{9}{10}, \cos\frac{360°}{2n} > 0{,}9487$, (da $n \geq 3$ gilt, ist $\cos\frac{360°}{2n} > 0$), also $\frac{360°}{2n} < 18{,}5°$.
Damit erhält man schließlich $n \geq 10$ (wegen der Ganzzahligkeit von n).

Aufgabe 23/70
Man beweise den Tangenssatz

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

mit geometrischen Mitteln!



Es sei $AC = DC, CF \perp AD, EG \parallel AB$ (Abbildung). Da $2\measuredangle CAD = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC$ ist (das Dreieck ADC ist gleichschenklig), gilt

$$\measuredangle CAD = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{und damit} \qquad \measuredangle DAB = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Damit wird

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\frac{CE}{AE}}{\frac{EF}{AE}} = \frac{CE}{EF} = \frac{CG}{GB}$$

Nun wird aber die Strecke DB durch den Punkt G nach einem Strahlensatz halbiert ($DE : DA = 1 : 2 = DG : DB$), folglich ist

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

Aufgabe 24/70
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit drei Würfeln die Augenzahl 12 zu erzielen?

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit kann man die klassische Definition verwenden, da nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten existiert. Es ist also der Quotient $\frac{g}{m}$ aus der Anzahl g den günstigen und der Anzahl m der möglichen Fälle zu bilden.

Die Anzahl m der möglichen Fälle ist $m = 6^3 = 216$. Es handelt sich nämlich um alle Zusammenstellungen der 6 Augenzahlen in Dreiergruppen mit Berücksichtigung der Anordnung, wobei Wiederholung auftritt (also um Variationen von 6 Elementen zur 3. Klasse mit Wiederholung).
Die Anzahl g der günstigen Fälle ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Günstig sind alle die Fälle, in denen die Addition von drei natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6 (einschließlich) die Summe 12 ergibt, wobei die Reihenfolge zu beachten ist. Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ergeben sich zunächst die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llll} 1) & 6+5+1=12 & 2) & 6+4+2=12 \\ 3) & 6+3+3=12 & 4) & 5+5+2=12 \\ 5) & 5+4+3=12 & 6) & 4+4+4=12 \end{array}$$

Berücksichtigt man nun noch die Anordnung, so erkennt man: In den Fällen 1., 2. und 5. gibt es je genau $3! = 6$ verschiedene Möglichkeiten, in den Fällen 3. und 4. je genau $\frac{3!}{2!} = 3$ und im Fall 6. nur 1, Damit ergibt sich $g = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$ und es ist $\frac{g}{m} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$.

Aufgabe 25/70
Man beweise, dass es keine arithmetische Folge erster Ordnung aus mehr als zwei Gliedern gibt, deren Differenz $d = 1000$ ist und deren Glieder sämtlich Primzahlen sind.

Angenommen, es gäbe eine derartige Folge. Die ersten drei Glieder wären dann $a_1 = p, a_2 = p+1000, a_3 = p + 2000$, wobei p eine Primzahl wäre. Sicher ist $p \neq 3$; denn wäre $p = 3$, so wäre $p_2 = 1003 = 17 \cdot 59$ keine Primzahl (im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe).
Also ist $a_1 = p \equiv \pm 1 \pmod 3$.
Wegen $1000 \equiv 1 \pmod 3$, $2000 \equiv 2 \pmod 3$ folgt dann aber

$$a_2 \equiv 0 \pmod 3 \text{ oder } a_2 \equiv 2 \pmod 3 \text{ und}$$

$$a_3 \equiv 1 \pmod 3 \text{ oder } a_3 \equiv 0 \pmod 3$$

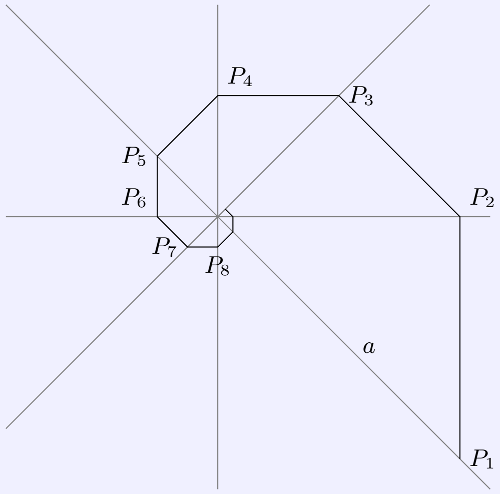
In jedem Fall ist also eines der Glieder a_2 und a_3 durch 3 teilbar, also keine Primzahl (im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe). Da die Annahme stets zu einem Widerspruch führt, ist sie falsch. Damit ist bewiesen, dass es keine derartige Folge gibt.

Aufgabe 26/70
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, die genau 10 Teiler haben.

Die gesuchten Zahlen n können höchstens zwei voneinander verschiedene Primfaktoren p und q enthalten. Man prüft nämlich leicht nach, dass bei drei voneinander verschiedenen Primfaktoren p, q und r sich acht (falls alle in der ersten Potenz auftreten) oder mehr als 10 Teiler ergeben; bei mehr als vier Primfaktoren ist die Teilerzahl auf jeden Fall größer als 10.
Enthält n genau einen Primfaktor p, so muss dieser in der 9. Potenz enthalten sein: $n = p^9$. Die 10 Teiler sind dann nämlich die 10 Potenzen $p^0, p^1, p^2, ..., p^9$.
Enthält n genau zwei voneinander verschiedene Primfaktoren p und q, so kann einer von ihnen nur in der ersten Potenz auftreten. Wäre er nämlich in der k-ten Potenz mit $k > 1$ vorhanden, so würde er bereits $k + 1$ Teiler liefern.
Da jeder dieser Teiler mit einem aus dem anderen Primfaktor resultierenden Teiler multipliziert wieder einen Teiler von n liefert, muss die Anzahl der Teiler von n ein Vielfaches von $k+1$ sein. Damit kommen aber als Exponenten der Primfaktoren p und q in unserem Fall nur 1 und 4 in Frage. Tatsächlich hat p^4q genau 10 Teiler.
Die gesuchten Zahlen n haben also die Primfaktorzerlegungen $n = p^9$ und $n = p^4q$ mit $p \neq q$.

Aufgabe 27/70

Acht Geraden schneiden einander so in einem Punkt, dass je zwei benachbarte Geraden einen Winkel von $\frac{\pi}{8}$ einschließen. Auf einer beliebigen dieser Geraden liege im Abstand a vom Schnittpunkt der Punkt P_1.
Von ihm fälle man das Lot auf eine benachbarte Gerade, der Fußpunkt sei P_2. Setzt man das Verfahren von P_2, P_3, ... aus fort, so erhält man einen Streckenzug (Abbildung nächste Seite), dessen Streckenzahl über alle Grenzen wächst.
Man ermittle die Länge dieses Streckenzuges.



Die Strecken bilden eine Folge, deren Glieder die Maßzahlen

$$a_1 = a\sin\frac{\pi}{8};\quad a_2 = a\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8};\quad a_3 = a\sin\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}...\quad a_n = a\sin\frac{\pi}{8}\cos^n\frac{\pi}{8}$$

haben. Man erkennt, dass es sich um eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = a\sin\frac{\pi}{8}$ und dem Quotienten $q = \cos\frac{\pi}{8}$ handelt. Da $|q| < 1$ gilt, konvergiert die zugehörige Reihe, und es ist

$$s_\infty = \frac{a\sin\frac{\pi}{8}}{1-\cos\frac{\pi}{8}}$$

Diesen Ausdruck kann man mit Hilfe der Halbwinkelformeln noch umformen. Es ist

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\quad;\quad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Also ist

$$s_\infty = \frac{a\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = a\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{4-2\sqrt{2}} + \sqrt{2}+1\right) = a\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}+1\right)$$

Aufgabe 28/70
Es seien a und b positive reelle Zahlen mit $a, b \neq 1$. Gesucht sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$[(\log_b x) - 1]\cdot \log_a b = 1$$

Wegen $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ kann man die gegebene Gleichung wie folgt äquivalent umformen:

$$(\log_b x) - 1 = \log_b a \to \log_b x - \log_b a = 1 \to \log_b \frac{x}{a} = 1$$

Daraus folgt unmittelbar $\frac{x}{a} = b$ also $x = ab$.

Aufgabe 29/70
Es ist nachzuweisen, dass $z = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ genau dann ohne Rest durch 5 teilbar ist, wenn n nicht ohne Rest durch 4 teilbar ist (wobei n eine natürliche Zahl bedeutet).

Wegen $3 \equiv -2 \pmod 5$ und $4 \equiv -1 \pmod 5$ ist

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \pmod 5$$

Ist nun $n = 4k$ (mit k natürliche Zahl), so folgt

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^{4k} + 2^{4k} + (-2)^{4k} + (-1)^{4k} = 1^k + 1^k + 1^k + 1^k = 4 \pmod 5$$

(wegen $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5$ und $(-2)^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5$). Ist also n durch 4 ohne Rest teilbar, so lässt z beim Teilen durch 5 den Rest 4, ist also nicht ohne Rest durch 5 teilbar.
Es sei nun $n = 4k + m$ mit $m = 1; 2; 3$. Dann ist

$$1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \equiv 1^{4k+m} + 2^{4k+m} + (-2)^{4k+m} + (-1)^{4k+m} \pmod 5 =$$

$$= 1^k \cdot 1^m + 1^k \cdot 2^m + 1^k \cdot (-2)^m + 1^k \cdot (-1)^m = 1^m + 2^m + (-2)^m + (-1)^m \pmod 5$$

Mit $m = 1$ ergibt sich sofort $z \equiv 0 \pmod 5$. Man prüft jedoch leicht nach, dass sich auch für $m = 2$ und für $m = 3$ $z \equiv 0 \pmod 5$ ergibt:

$$1^2 + 2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 1 + 4 + 4 + 1 = 10 \equiv 0 \pmod 5$$

$$1^3 + 2^3 + (-2)^3 + (-1)^3 = 1 + 8 - 8 - 1 = 0 \equiv 0 \pmod 5$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 30/70
Man beweise: Wenn p eine Primzahl, k und n natürliche Zahlen sind, dann folgt aus $p^k \mid n!$ sogar $(p!)^k \mid n!$.

Da $n!$ das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n und p Primzahl ist, folgt aus $p \mid n$, dass $n \geq p$ ist; da p Primzahl ist, muss nämlich p unter den Zahlen 1 bis n vorkommen.
Gilt $p^k \mid n$, so müssen diese Zahlen auch die Vielfachen $2p, 3p, ..., kp$ enthalten, und es folgt $n \geq kp$. Damit ist $n!$ das Produkt von wenigstens kp aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Von diesen sind wenigstens k Zahlen durch p teilbar, wenigstens k durch $p - 1$, ebenso wenigstens k durch $p - 2$ usf. bis $p - p + 2, p - p + 1$. Mithin enthält $n!$ das Produkt $p!$ mindestens k mal, das heißt aber $(p!)^k \mid n!$.

Aufgabe 31/70
Man ermittle sämtliche gemeinsame Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

ohne ein Näherungsverfahren zu verwenden!

Subtrahiert man (2) von (1), so ergibt sich nach Division durch 2

$$6x^3 + 14x^2 + 3x + 7 = 0 \qquad (I)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man

$$6x^4 + 14x^3 + 12x^2 + 28x = 0 \qquad (II)$$

Da $x = 0$ keine gemeinsame Lösung ist, kann man $x \neq 0$ setzen und (II) durch x dividieren:

$$6x^3 + 14x^2 + 12x + 28 = 0 \qquad (III)$$

Subtrahiert man nunmehr (III) von (I), so folgt

$$-9x - 21 = 0 \qquad \text{also} \qquad x = -\frac{7}{3}$$

Wie die Probe zeigt, ist dieser Wert tatsächlich Lösung beider Gleichungen, und wie der Rechengang ausweist, auch die einzige gemeinsame.

Aufgabe 32/70
Man gebe die kleinste natürliche Zahl k an, die mit der Ziffer 7 beginnt (falls man sie im Dezimalsystem darstellt) und die folgende weitere Eigenschaft aufweist:
Streicht man die vorderste Ziffer 7 weg und hängt man sie hinten an, so ist die neu entstehende Zahl $z = \frac{1}{3}k$.

Wir schreiben $k = 7 \cdot 10^x + a$, wobei x und a natürliche Zahlen mit $a < 10^x$ sind. Auf Grund der geforderten Eigenschaft gilt

$$k = 7 \cdot 10^x + a = 3(10a + 7)$$

Daraus ergibt sich durch äquivalente Umformung

$$a = \frac{7 \cdot 10^x}{29} - \frac{21}{29}$$

Nunmehr dividieren wir $7 \cdot 10^x$ durch 29; dabei bestimmen wir die Zahl x, indem wir die Division solange fortsetzen, bis der Rest 21 auftritt. Damit wird nämlich a eine natürliche Zahl. Es ergibt sich

$$a = 241\,379\,310\,344\,827\,586\,206\,896\,551 \quad \text{und} \quad k = 7\,241\,379\,310\,344\,827\,586\,206\,896\,551$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 33/70
Es ist zu beweisen, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} = \pi$$

Der Flächeninhalt A_n eines regelmäßigen n-Ecks ist:

$$A_n = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

(wobei r der Radius des Umkreises ist). Der Flächeninhalt A_u des Umkreises ist $A_u = \pi r^2$. Wächst die Anzahl n der Ecken über alle Grenzen, so geht das n-Eck gegen den Umkreis; d.h., es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = A_u$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \pi r^2$$

Daraus folgt nach einem bekannten Grenzwertsatz (Grenzwert eines Produktes gleich Produkt der Grenzwerte, vorausgesetzt die Existenz derselben) und da $r \neq 0$ sicher gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} = \pi$$

Aufgabe 34/70
Von einer arithmetischen Folge 1. Ordnung sei bekannt, dass alle Glieder nichtnegative ganze Zahlen sind. Genau 1 Glied ist einstellig, 9 Glieder sind zweistellig, 81 sind dreistellig und 819 sind vierstellig. Man bestimme die Folge!

Die Folge sei $\{a_i\}$ mit $i = 1; 2; ...; 910$. Da alle a_i ganzzahlig sind, ist auch d ganzzahlig, und wenn a_1 die kleinste Zahl der Folge ist (was ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit angenommen werden kann), ist $d > 0$. Nach dem Bildungsgesetz der arithmetischen Folge 1. Ordnung ist $a_i = a_1 + (i-1)d$. Aus den Angaben der Aufgabe kann man nun die folgenden Ungleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \geq 10 && (1) \\ a_{10} &= a_1 + 9d \leq 99 && (2) \\ a_{92} &= a_1 + 91d \geq 1000 && (3) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt $8d \leq 89$, $d \leq 11$. Aus (2) und (3) ergibt sich $82d \geq 901$, $d > 10$. Also ist $d = 11$. Aus (2) folgt nun mit diesem Wert $d = 11$ sofort $a_1 \leq 0$; da aber alle Glieder nichtnegativ sind, ist $a_1 = 0$. Damit ist die Folge $\{a_i\} = \{11(i-1)\}$ mit $i = 1; 2; ..., 910$ die gesuchte.

Aufgabe 35/70
Man bestimme alle Tripel $(x;y;z)$ aus natürlichen Zahlen mit kleinstmöglichem z, welche die Gleichung

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$$

erfüllen.

Multipliziert man die gegebene Gleichung

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2} \qquad (1)$$

mit $x^2y^2z^2$, so ergibt sich die Gleichung $(yz)^2+(xz)^2=(xy)^2$. Durch Substitution $u=yz, v=xz, w=xy$ erhält man daraus $u^2+v^2=w^2 \quad (3)$.
Da nach der Aufgabenstellung x, y und z natürliche Zahlen sein sollen, sind nach der Substitution auch u, o und w natürliche Zahlen, und $(u;v;w)$ ist ein pythagoreisches Tripel. Jeder Lösung der Gleichung (1) lässt sich daher durch die Substitution eindeutig ein pythagoreisches Tripel zuordnen.
Um Lösungen von (1) in natürlichen Zahlen zu finden, kann man also von pythagoreischen Tripeln ausgehen. Hat man ein solches Tripel gefunden, so liefert die Division von (3) mit $u^2v^2w^2$ die Gleichung

$$\frac{1}{v^2w^2}+\frac{1}{u^2w^2}=\frac{1}{u^2v^2}$$

aus der man $x=vw, y=uw, z=uv$ erhält. Die Zahl z nimmt offenbar genau dann den kleinstmöglichen Wert an, wenn man in (3) das pythagoreische Tripel mit kleinstmöglichen Zahlen wählt, dies sind aber die Tripel $(3;4;5)$ und $(4;3;5)$. Sie liefern die Lösungstripel $(20;15;12)$ und $(15;20;12)$ der Gleichung (1) mit kleinstem z.

Aufgabe 36/70
Man beweise, dass in keinem Dreieck die Beziehung

$$(a+b)\cos\gamma+c=0$$

gilt, wenn mit a, b und c die Dreieckseiten und mit γ der Winkel zwischen den Seiten a und b bezeichnet sind.

Angenommen, die Behauptung $(a+b)\cos\gamma+c=0$ wäre richtig. Dann folgt $\cos\gamma=-\frac{c}{a+b}$. Nach dem Kosinussatz ist $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, also

$$c^2=a^2+b^2+\frac{2abc}{a+b} \qquad \text{oder} \qquad c^2-\frac{2ab}{a+b}c-(a^2+b^2)=0$$

Diese in c quadratische Gleichung hat die Lösungen $c_1=a+b; c_2=-\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Beide Lösungen stehen jedoch im Widerspruch zu der Tatsache, dass c Dreieckseite ist (was $c<a+b$ und $c>0$ bedingt). Also ist die Annahme falsch, d.h., in keinem Dreieck gilt die Beziehung $(a+b)\cos\gamma+c=0$.

2.11 Aufgaben und Lösungen 1971

Aufgabe 1/71
Man bestimme das Dreieck maximalen Flächeninhaltes, das den Bedingungen $0 < a \leq 2 \leq b \leq 4 < c < 5$ unterliegt.

Wir verwenden die Formel $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Offensichtlich wird A maximal, wenn sowohl a als auch b als auch $\sin\gamma$ maximal sind - vorausgesetzt, dass dann c der geforderten Bedingung genügt:

$$A_{max} = \frac{1}{2}a_{max}b_{max}(\sin\gamma)_{max} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

Es ergibt sich also $\gamma = \frac{\pi}{2}$, d.h., das Dreieck müsste rechtwinklig mit c als Hypotenuse sein. Es gilt also

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

Da $4 < c = 2\sqrt{5} < 5$ gilt, ist mithin $a = 2, b = 4, c = 2\sqrt{5}$ einzige Lösung dieser Aufgabe.

Aufgabe 2/71
Man beweise: Bei einer kontinuierlich laufenden Uhr (d.h., die Zeiger springen nicht auf diskrete Zifferblattstellen) mit Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger auf einer Achse können außerhalb des Zeitpunktes 0 h 00 m 00 s die drei Zeiger niemals genau übereinanderstehen.

Wir bestimmen zunächst die Winkel x_n zwischen der Richtung Achse - Zwölf und den sich deckenden Minuten- und Stundenzeigern. Da eine Überdeckung beider Zeiger im Verlauf von 12 h genau 11 mal stattfindet, hat der Stundenzeiger bei der n-ten Überdeckung $\frac{n}{1}360°$ überstrichen (dabei ist die Überdeckung um 0 h 00 min 00 s als nullte Überdeckung bezeichnet). Die bis zur n-ten Überdeckung dieser beiden Zeiger verstrichene Zeit beträgt $\frac{12}{11}n$ h. In dieser Zeit überstreicht der Sekundenzeiger einen Winkel von $\frac{12}{11}n \cdot 60 \cdot 360°$. (da er in jeder Stunde 60 volle Umläufe vollzieht).
Zieht man von diesem Winke] alle vollen Umläufe ab, so erhält man den Winkel, den der Sekundenzeiger zum Zeitpunkt der Überdeckung von Stunden- und Minutenzeiger mit der Richtung Achse - Zwölf bildet; angenommen, es seien k volle Umläufe. Dann 11 gilt für diesen Winkel:

$$\frac{12}{11}n \cdot 60 \cdot 360° - k \cdot 360° = \frac{1}{11}\cdot 360°(720n - 11k)$$

Gleichheit beider Winkel bestünde genau dann, wenn

$$720n - 11k = n \qquad \text{oder} \qquad 719n = 11k$$

wäre. Man erkennt sofort, dass diese Gleichung nur für $n = k = 0$ bzw. für $n = 11, k = 719$ (ganzzahlig) erfüllt ist. Beide Werte liefern aber den Winkel 0°.

Aufgabe 3/71
Gesucht sind drei Lösungspaare $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$x^{2\sin y+1} + (\sin y)^{\frac{4}{3}\sqrt{3x}} = 1$$
$$\cos y - x = 0$$

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$(\cos x)^{2\sin y+1} + (\sin y)^{\frac{4}{3}\sqrt{3}\cos y} = 1$$

Diese Gleichung ist sicher dann erfüllt, wenn entweder
1. $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$ oder
2. $\cos y = 0$ und $\sin y = 1$ oder
3. $2\sin y + 1 = 2$ und $\frac{4}{3}\sqrt{3}\cos y = 2$
ist. Unter Verwendung von (2) ergibt sich aus 1. $y = 0, x = 1$; aus 2. $y = \frac{\pi}{2}, x = 0$. Aus 3. folgt $\sin y = \frac{1}{2}, \cos y = \frac{1}{2}\sqrt{3} = x$ und damit $y = \frac{\pi}{6}, x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Drei Lösungspaare des gegebenen Gleichungssystems sind also $(1; 0)$, $(0; \frac{\pi}{2})$ und $(\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{\pi}{6})$.

Aufgabe 4/71
Es ist zu zeigen, dass für jede gerade Zahl n, die Summe zweier Quadratzahlen ist, auch die Zahl $\frac{n}{2}$ Summe zweier Quadratzahlen ist.

Vorausgesetzt sei, dass $n = 2k = a^2 + b^2$ mit $a; b; k \in N$ ist. Dann ist

$$\frac{n}{2} = k\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Wegen $a^2 + b^2 = 2k$ ist entweder $a = 2m_1$ und $b = 2m_2$ oder $a = 2m_1 + 1$ und $b = 2m_2 + 1$ mit $m_1; m_2 \in N$. Also ist entweder

$$\frac{n}{2} = k = (m_1+m_2)^2 + (m_1-m_2)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{n}{2} = k = (2m_1+2m_2+2)^2 + (2m_1-2m_2)^2$$

Das heißt aber, $\frac{n}{2}$ ist Summe zweier Quadratzahlen.

Aufgabe 5/71
Man beweise, dass für natürliche Zahlen $a, b, c, d > 0$ die Ungleichung gilt

$$(ab+cd)^{a+c} \geq (ab+bc)^a (ad+cd)^d$$

Stets ist das arithmetische Mittel aus natürlichen Zahlen nicht kleiner als das geometrische Mittel aus diesen Zahlen.
Werden die Mittelwerte aus $a + c$ Zahlen errechnet, wobei a mal die Zahl b und c mal die Zahl d auftritt, so nimmt dieser Satz die Form

$$\frac{ab+cd}{a+c} \geq \sqrt[a+c]{b^2 d^c}$$

an. Durch äquivalente Umformung gewinnt man daraus schrittweise

$$\left(\frac{ab+cd}{a+c}\right)^{a+c} \geq b^a d^c \to (ab+cd)^{a+c} \geq (a+c)^{a+c} b^a d^c \to$$

$$\to (ab+cd)^{a+c} \geq (a+c)^a b^a + (a+c)^c d^c \to (ab+cd)^{a+c} \geq (ab+bc)^a + (ad+cd)^c$$

Aufgabe 6/71
Die kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten p, q und r

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

habe drei reelle Lösungen. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten p, q und r genügen, wenn die Lösungen Maßzahlen der Seiten eines ebenen Dreiecks sein sollen?

Die Lösungen der gegebenen Gleichung seien x_1, x_2, x_3. Sollen sie Maßzahlen der Seiten eines ebenen Dreiecks sein, so müssen sie die Dreiecksgleichungen erfüllen; es muss also gelten

$$x_1 + x_2 > x_3; \qquad x_2 + x_3 > x_1; \qquad x_3 + x_1 > x_2$$

Damit gilt sicher

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) > 0$$

Bekanntlich gilt aber nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p; \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q; \qquad x_1x_2x_3 = -r$$

Setzt man dies in die oben abgeleitete Ungleichung ein, so erhält man nach entsprechender Rechnung $p^3 - 4pq + 8r > 0$.

Aufgabe 7/71
Es sei p_n die n-te Primzahl. Gesucht sind alle i, für die gilt $p_i = 2i + 1$.

Es sei

$$p_1 = 2 \neq 2 \cdot 1 + 1, \qquad p_2 = 3 \neq 2 \cdot 2 + 1, \qquad p_3 = 5 \neq 2 \cdot 3 + 1,$$
$$p_4 = 7 \neq 2 \cdot 4 + 1, \qquad p_5 = 11 = 2 \cdot 5 + 1, \qquad p_6 = 13 = 2 \cdot 6 + 1, \qquad p_7 = 17 \neq 2 \cdot 7 + 1$$

Wir behaupten nun, dass $i = 5$ und $i = 6$ die einzigen i sind, für die gilt $p_i = 2i + 1$. Es ist nämlich mit $k \geq 0$, ganz,

$$p_{7+k} \geq 17 + 2k = 2(7 + k) + 3 > 2(7 + k) + 1$$

Aufgabe 8/71
Es sei bekannt, dass das Polynom mit ganzen Koeffizienten a, b, c, d

$$P(m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

für beliebiges ganzes x durch 5 teilbar ist. Zu zeigen ist, dass dann alle Koeffizienten durch 5 teilbar sind.

Wenn $P(x)$ für alle ganzen Zahlen x durch 5 teilbar ist, so auch für $x = 0$: $5 \mid P(0) = d$. Entsprechendes gilt dann auch für $x = 1$ und für $x = -1$:

$$5 \mid P(1) = a + b + c + d \quad (1) \qquad ; \qquad 5 \mid P(-1) = -a + b - c + d$$

Damit gilt aber auch $5 \mid P(1) + P(-1) = 2(b + d)$, und wegen $5 \mid P(2)$ gilt $5 \mid (b + d)$, woraus mit $5 \mid d$ folgt $5 \mid b$. Ferner gilt dann

$$5 \mid P(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

unter Verwendung von $5 \mid b$ und $5 \mid d$ folgt daraus nach Subtraktion von $2 \cdot P(1)$: $5 \mid 6a$ und damit $5 \mid a$. Schließlich folgt damit aus (1) unmittelbar auch $5 \mid c$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 9/71
Für welche reellen Zahlen a hat das Gleichungssystem

$$2x^3 - 2ay^3 = (a + 1)^2$$
$$x^3 + ax^2y + xy^2 = 1$$

genau eine reelle Lösung $(x; y)$ mit $x = -y$?

Durch die Forderung $x = -y$ geht das System in die Gleichungen

$$2x^3(a + 1) = (a + 1)^2 \qquad ; \qquad x^3(2 - a) = 1$$

über. Die erste Gleichung ist sicher für $a = -1$ erfüllt. Es ergibt sich dann aus der zweiten Gleichung die Lösung $x = -y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
Für $a \neq 1$ geht die 1.Gleichung über in $2x^3 = a + 1 \quad ; \quad x^3 = \frac{a+1}{2}$.
Setzt man in die 2.Gleichung ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung die in a quadratische Gleichung $a^2 - a = 0$ mit den Lösungen $a = 0$ und $a = 1$. Die entsprechenden Lösungen sind $x = -y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ und $x = -y = 1$.
Genau eine Lösung $(x; y = -x)$ ergibt sich also für die Werte $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = +1$.

Aufgabe 10/71
Es ist nachzuweisen, dass die beiden Produkte $505055 \cdot 8808$ und $808088 \cdot 5505$ einander gleich sind, ohne dass die Produkte ausgerechnet werden. Das Beispiel ist: zu verallgemeinern.

Man wendet das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation an. Es ist

$$505055 \cdot 8808 = 5 \cdot 101011 \cdot 8 \cdot 1101 = 8 \cdot 101011 \cdot 5 \cdot 1101 = 808088 \cdot 5505$$

Verallgemeinerung: Es X_m eine m-stellige Zahl, die nur die Ziffern 1 und 0 enthält, und Y_n eine n-stellige Zahl, die ebenfalls nur die Ziffern 1 und 0 enthält. Ferner seien a und b zwei einstellige natürliche Zahlen. Dann gilt stets

$$(aX_m)(bY_n) = aX_m bY_n = bX_m aY_n = (bX_m)(aY_n)$$

Wenn man in den Faktoren eines Produktes aus einer m-stelligen Zahl mit den Ziffern a und 0 und einer n-stelligen Zahl mit den Ziffern a und b miteinander vertauscht, so ändert sich das Produkt nicht.
Weitere Verallgemeinerung: Sind a, b, c, d einstellige natürliche Zahlen, die der Gleichung $ab = cd$ genügen, so gilt $(aX_m)(bY_n) = (cX_m)(dY_n)$.

Aufgabe 11/71
Für welche reellen Zahlen a hat die Gleichung

$$\sin^2(ax) - \cos x + 1 = 0$$

genau eine Lösung?

Wegen $\sin^2 ax \geq 0$ und $\cos x \leq 1$ muss gelten $\sin^2 ax = 0$ und $\cos x = 1$. Damit kommen zunächst als Lösungen in Frage $ax = k\pi; x = 2l\pi$ mit k, l ganzzahlig. Daraus ergibt sich als Bedingung für a die Gleichung $a = \frac{k}{2l}$.
Ist nun a eine reelle Zahl der Form $\frac{k}{2l}$, so hat die Gleichung beliebig viele, also nicht genau eine Lösung.
Ist a dagegen eine reelle Zahl der Form $\frac{k}{2l+1}$, so ergibt sich $x = 2l\pi$, also der Widerspruch $2l = 2l + 1$; d.h., es gibt keine Lösung.
Es bleibt noch der Fall, dass a eine irrationale Zahl ist. Dann wird die Gleichung durch den einzigen Wert $x = 0$ befriedigt. Damit hat die Gleichung für alle irrationalen Zahlen a genau eine Lösung.

Aufgabe 12/71
Gegeben ist die Determinante einer Matrix vom Typ 3:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dabei seien die a_{ik} $(i; k = 1,2,3)$ natürliche Zahlen. Es ist zu zeigen:
Wenn die Zahlen $z_i = 100a_{i1} + 10a_{i2} + a_{i3}$ jede ohne Rest durch eine Primzahl p mit $p \neq 2; 5$ teilbar ist, so ist auch D ohne Rest durch p teilbar.

Wir benutzen zwei Eigenschaften der Determinante:
1. Multipliziert man eine Zeile (Spalte) der Matrix mit einer Zahl λ, so multipliziert man auch die Determinante der Matrix mit λ.
2. Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert.
Nach 1. ist

$$100D = \begin{vmatrix} 100a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 100a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 100a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nach 2. folgt

$$100D = \begin{vmatrix} 100a_{11} + 10a_{12} + a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ 100a_{21} + 10a_{22} + a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ 100a_{31} + 10a_{22} + a_{23} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Nach Voraussetzung ist die 1. Spalte ohne Rest durch p teilbar. Damit ist aber auch $100D$ ohne Rest durch p teilbar. Wegen $p \neq 2; 5$ sind 100 und p teilerfremd, also ist D durch p ohne Rest teilbar (dass D eine ganze Zahl ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die a_{ik} natürliche Zahlen sind).

Aufgabe 13/71
Man gebe mit Hilfe einer modifizierten Quersumme eine Teilbarkeitsregel für Division durch 17 an, die für bis zu sechsstellige Zahlen brauchbar ist.

Es lassen sich leicht die folgenden Kongruenzen ausrechnen:

$$10^0 \equiv +1 \pmod{17}, \qquad 10^1 \equiv -7 \pmod{17}, \qquad 10^2 \equiv -2 \pmod{17}$$
$$10^3 \equiv -3 \pmod{17}, \qquad 10^4 \equiv +4 \pmod{17}, \qquad 10^5 \equiv +6 \pmod{17}$$

Damit ergibt sich für eine höchstens sechsstellige Zahl z:

$$z = a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$
$$= 6a_5 + 4a_4 - 3a_3 - 2a_2 - 7a_1 + a_0 \pmod{17}$$

Man multipliziert also die Hunderttausenderstelle mit 6, die Zehntausenderstelle mit 4, die Tausenderstelle mit -3, die Hunderterstelle mit -2, die Zehnerstelle mit -7 und die Einerstelle mit 1.
Die Summe der Produkte wird auf Teilbarkeit durch 17 (am einfachsten durch Division) überprüft; ihr Rest ist gleich dem Rest der ursprünglichen Zahl z bei Division durch 17.

Aufgabe 14/71
Es ist zu beweisen, dass jede Primzahl $P > 5$ von der Form $P = p + k \cdot 30$ ist, wobei p eine Primzahl mit $7 \leq p \leq 31$ und k eine natürliche Zahl ist ($k = 0$ eingeschlossen).

Trivial ist, dass man jede natürliche Zahl $N \geq 2$ in der Form $N = n + 30k$ darstellen kann, wobei n eine natürliche Zahl mit $2 \leq n \leq 31$ und k eine natürliche Zahl ist ($k = 0$ eingeschlossen).
Weiter ist jede natürliche Zahl n mit $2 \leq n \leq 31$, die nicht Primzahl ist, durch 2 oder durch 3 oder durch 5 teilbar.
Ist nun n durch 2 oder durch 3 oder durch 5 teilbar, so ist auch $N = n + 30k$ durch 2 oder durch 3 oder durch 5 teilbar, und N ist demnach nicht Primzahl. Daraus folgt sofort: Wenn $N = P$ Primzahl ist, so ist auch $n = p$ Primzahl.
Die Umkehrung gilt nicht. Für $k = p \cdot m$ (wobei m eine natürliche Zahl, $m > 0$ ist) gilt

$$N = p + 30k = p + 30pm = p(1 + 30m)$$

also ist N durch p und durch $(1 + 30m)$ teilbar, mithin keine Primzahl.
Analog kann man beweisen, dass unter entsprechenden Voraussetzungen jede Primzahl $P > 7$ in der Form $P = p + 210k$ darstellbar ist (mit $11 \leq p \leq 211$).

Aufgabe 15/71
Die natürlichen Zahlen a und b seien in einem Zahlensystem mit der Basis n dargestellt. Dabei gehe b aus a dadurch hervor, dass man die erste Ziffer a streicht und am Ende anfügt.
Man ermittle n und die kleinstmöglichen Zahlen a und b aus der Tatsache, dass $a - b = 1211$ ist (wobei auch 1211 im System mit der Basis n dargestellt ist).

Hilfssatz: Eine in einem System der Basis $n > 2$ dargestellte natürliche Zahl x lässt beim Teilen durch $n - 1$ denselben Rest wie ihre Quersumme.
Beweis des Hilfssatzes:
Es sei

$$x = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$$

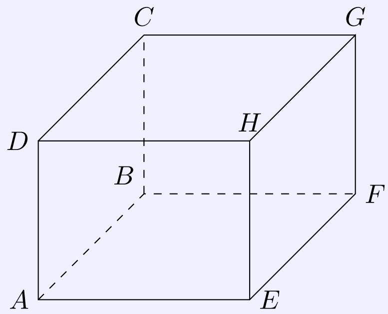
Da n^k beim Teilen durch $n - 1$ den Rest 1 lässt, ergibt $a_k n^k$ beim Teilen durch $n - 1$ den Rest 0 (wenn $a_k = n - 1$ ist) oder den Rest a_k. Die Summe der Reste aller Glieder unterscheidet sich also vom Rest der Summe aller Glieder höchstens um ein Vielfaches von $n - 1$. Damit folgt unmittelbar die Behauptung.

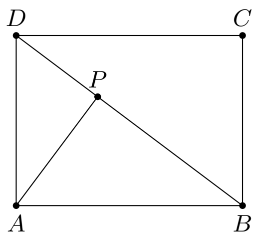
Aus dem Hilfssatz folgt weiter der Satz: In jedem System der Basis $n > 2$ ist die Differenz zweier Zahlen,

die aus den gleichen Ziffern bestehen, stets ohne Rest durch $n|l$ teilbar. Dieser Satz trifft auf die Differenz unserer Aufgabe zu.
Da 1211 die Quersumme 5 hat und 5 als Primzahl nur durch 5 und durch 1 teilbar ist, kommen nur $n_1 - 1 = 1$ und $n_2 - 1 = 5$ mit $n_1 = 2$ und $n_2 = 6$ in Frage. Die Basis $n_1 = 2$ scheidet aus, da im Dualsystem die Ziffer 2 nicht vorkommt. Also ist $n = n_2 = 6$.
Nun ist $a = 1211 + b$. Die Zahl a muss mindestens vierstellig sein; ihre erste Ziffer kann $1; 2; 3; 4; 5$ sein. Angenommen, sie wäre gleich 1; dann ist die letzte Ziffer von b ebenfalls gleich 1, und die letzte Ziffer von a (vorletzte von b) ist 2. Fortsetzung des Verfahrens führt auf eine fünfstellige Zahl a, die möglicherweise nicht die kleinste Zahl a ist.
Mit der Annahme, die erste Stelle von a wäre 2, ergibt sich $a = 2043, b = 0432$.

Aufgabe 16/71

Gegeben ist ein Quader mit den Kanten $AB = a$, $AD = b$ und $AE = c$ (Abbildung). Gesucht sind
a) der Abstand der Ecke A von der Flächendiagonalen BD,
b) der Abstand der Kante AE von der Raumdiagonalen BH.





a) Die Dreiecke ABD und ABP sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz einander ähnlich (Abbildung). Daher gilt $AP : AB = AD : BD$ und $e : a = b : \sqrt{a^2 + b^2}$. Daraus folgt sofort

$$AP = e = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b) Der Abstand zwischen zwei zueinander windschiefen Geraden ist gleich der Länge der Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht. Die Strecken AE und BH sind Teile zweier zueinander windschiefer Geraden.

Die Strecke AP steht senkrecht auf AE; denn AE verläuft senkrecht zur Ebene $ABCD$ und damit zu jeder Geraden durch A in dieser Ebene. Die Strecke BH liegt in der Diagonalebene $BDHF$, die senkrecht auf der Ebene $ABCD$ steht. Die Strecke AE und die Ebene $BDHF$ sind also parallel zueinander.
Man denke nun eine Parallele zu AE durch P. Sie liegt in $BDHF$ und ist nicht parallel zu BH. Infolgedessen hat sie einen Schnittpunkt S mit BH; eine Parallele zu AP durch S schneidet AE in T und steht senkrecht auf AE und auf BH. Da $APST$ ein Rechteck ist, folgt

$$ST = AP = e = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Überraschend an diesem Ergebnis ist, dass es unabhängig von der Kantenlänge c ist.

Aufgabe 17/71
Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:
Teilt man die vierstellige Zahl in der Mitte in zwei zweistellige Zahlen, bildet man die Summe dieser beiden zweistelligen Zahlen und erhebt man die Summe ins Quadrat, so ergibt sich die gesuchte vierstellige Zahl.

Die gesuchte Zahl sei n^2, die beiden zweistelligen Zahlen seien x und y. Dann ist

$$n^2 = 100x + y = (x + y)^2$$

nach den Bedingungen der Aufgabenstellung. Daraus ergibt sich

$$n^2 = 100x + y, \qquad n^2 = (x + y)^2, \qquad n = x + y$$

Durch Subtraktion der dritten von der ersten dieser drei Gleichungen erhält man $n^2 - n = n(n-1) = 99x$. Das Produkt aus zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$ und n muss also durch 99 teilbar sein. Das ist aber dann der Fall, wenn n oder $n-1$ durch $99 = 9 \cdot 11$ teilbar ist oder wenn n durch 11 und $n|1$ durch 9 oder wenn n durch 9 und $n-1$ durch 11 teilbar sind.
Da n^2 vierstellig sein soll, muss n zweistellig sein, d.h. $10 \leq n \leq 99$. Eine erste Lösung ist also

$$n = 99, \qquad x = 98, \qquad y = 1, \qquad n^2 = 9801$$

Um weitere Lösungen zu finden, suchen wir unter den zweistelligen Zahlen diejenigen auf, die durch 9 oder durch 11 teilbar sind, und prüfen, ob $n-1$ durch 11 bzw. durch 9 teilbar ist. Diese Bedingung erfüllen aber nur

$$n = 45, \qquad n-1 = 44, \qquad n^2 = 2025 \qquad \text{mit } x = 20, \quad y = 25$$

$$n = 55, \qquad n-1 = 54, \qquad n^2 = 3025 \qquad \text{mit } x = 30, \quad y = 25$$

Es gibt also genau drei Zahlen 2025, 3025, 9801 mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 18/71
Für welche Werte von t hat das Gleichungssystem

$$x^{2n} + y^{2n} = 1000 \qquad , \qquad x^n + y^n = t$$

mit natürlichem n positive reelle Lösungen?

Es ist

$$x^n + y^n = t = \sqrt{x^{2n} + y^{2n} + 2(xy)^n} = \sqrt{1000 + 2(xy)^n}$$

Bezeichnet man mit $Min\ t$ bzw. mit $Max\ t$ den kleinsten bzw. den größten Wert, den t annehmen kann, so gilt

$$Min\ t = Min\ \sqrt{1000 + 2(xy)^n} = \sqrt{1000}$$

$$Max\ t = Max\ \sqrt{1000 + 2(xy)^n} = \sqrt{1000 + 2Max(xy)^n}$$

Nun ist bekanntlich das arithmetische Mittel aus nichtnegativen Zahlen nie kleiner als das geometrische Mittel; daraus folgt

$$1000 = x^{2n} + y^{2n} \geq 2\sqrt{x^{2n}y^{2n}} = 2(xy)^n$$

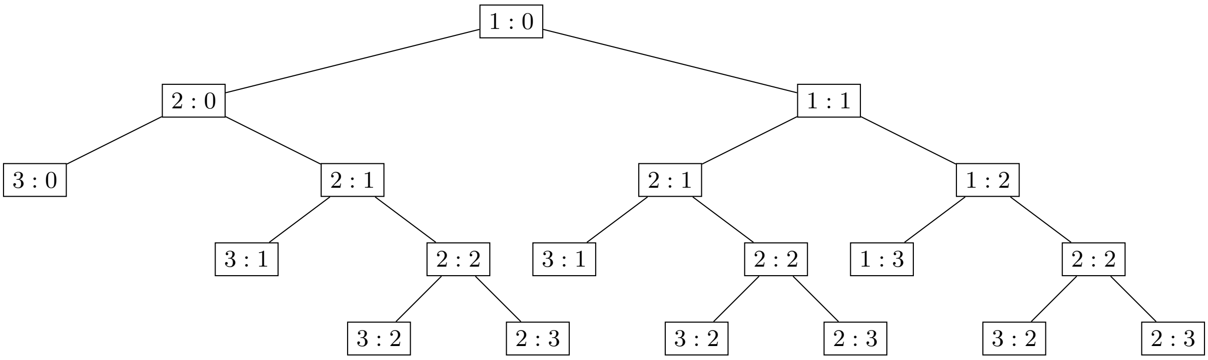
Damit ist $Max\ t = \sqrt{1000 + 1000} = \sqrt{2000}$.
Mithin hat das Gleichungssystem für alle t mit

$$10\sqrt{10} = \sqrt{1000} < t \leq \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$$

positive reelle Lösungen. Die untere Grenze des Intervalls ist offen, da sie von t nur für $x = 0$ oder für $y = 0$ angenommen werden kann; die obere Grenze wird für $x = y$ angenommen, was unmittelbar aus der Beziehung zwischen dem arithmetischen Mittel und dem geometrischen Mittel folgt.

Aufgabe 19/71
Zwei Personen A und B vertreiben sich die Zeit mit einem Glücksspiel. Den Einsatz soll derjenige erhalten, der dabei als erster drei Gewinnpunkte erreicht (bei jedcm Spiel wird ein Gewinnpunkt vergeben; ein Unentschieden eines Spiels ist unmöglich). Gewisse Umstände erfordern den Abbruch beim Stande von 1 : 0 für A.
Wie ist der Einsatz unter den beiden Spieler zu verteilen?

Es geht darum, die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, mit der jeder der beiden Spieler gewinnt. Dazu sind die möglichen Spielausgänge zu analysieren. Ein gangbarer Weg besteht in der Anwendung eines Wahrscheinlichkeitsbaumes, der die erforderlichen Überlegungen vereinfacht und auf ein Minimum beschränkt (Abbildung).



Daraus geht hervor: Die Chancen für A, nach zwei weiteren Spielen zu gewinnen, betragen $\frac{1}{4}$. Die Chancen für A, nach drei weiteren Spielen zu gewinnen, sind gleich $\frac{2}{6}$ der restlichen $\frac{3}{4}$, also $\frac{1}{4}$.
In $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ der Fälle steht es nach drei weiteren Spielen unentschieden, die Hälfte davon sind für einen Gewinn von A günstig, so dass A nach dem 4. Spiel noch die Gewinnchance $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$ hat. Da die verschiedenen Möglichkeiten einander ausschließen, ist die Gewinnchance für A:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

Entsprechend errechnet man die Chance für B zu

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{16}$$

Diesen Wert hätte man auch aus $1 - \frac{11}{16}$ erhalten können. Der Gewinn ist also im Verhältnis 11 Teile für A zu 5 Teile für B zu verteilen.

Aufgabe 20/71
Man bestimme alle Lösungen der goniometrischen Gleichung

$$\sin^{70} x + \frac{1}{13} \cos^{13} x = 1$$

Für $|\sin x| = 1$ ist $\sin^{70} x = 1$ und $\cos x = 0$, also auch $\frac{1}{13} \cos^{13} x = 0$. Man erhält damit zunächst die Lösungen

$$x_{0k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ mit } k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; ...$$

Angenommen, es gäbe noch (wenigstens) eine weitere Lösung x_{1k}. Dann gilt

$$x_{1k} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad |\sin x_{1k}| < 1, \qquad |\cos x_{1k}| \leq 1$$

also auch

$$\sin^{70} x_{1k} < \sin^2 x_{1k}; \qquad \frac{1}{13} \cos^{13} x_{1k} < \cos^2 x_{1k}$$

Damit ist

$$\sin^{70} x_{1k} + \frac{1}{13} \cos^{13} x_{1k} < \sin^2 x_{1k} + \cos^2 x_{1k} = 1$$

im Widerspruch zur Annahme, die aus der Aufgabenstellung folgt. Die Lösung $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ist also die einzige.

Aufgabe 21/71
Gesucht sind zwei natürliche Zahlen mit vierstelliger Dezimaldarstellung, die folgende Eigenschaften haben:

1. Ihre Differenz beträgt 1000.
2. Jede ist das Produkt von genau zwei voneinander verschiedenen Primzahlen.
3. Bei der kleineren der beiden Zahlen ist das Dreifache des einen Faktors um 8 größer, bei der größeren um 8 kleiner als der andere Faktor.

Auf Grund der Aufgabenstellung setzen wir

$$b - a = 1000 \quad (1); \qquad a = x(3x+8); \qquad b = y(3y-8);$$

$x; y; (3x+8); (3y-8)$ sind Primzahlen. Durch Einsetzen von a und b in (1) erhält man

$$y(3y-8) - x(3x+8) = 1000; \qquad (x-y)(3y-3x-8) = 1000$$

Man überlegt sich, dass beide Klammern eine gerade Zahl darstellen. Darum setzen wir $1000 = u \cdot v$ ($u; v$ gerade) und folgern aus $(x+y)(3y-3x-8) = uv$ das System

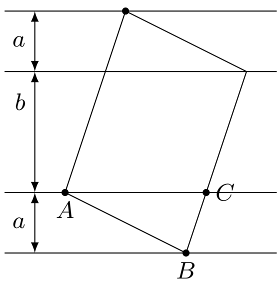
$$x + y = u; \qquad 3y - 3x - 8 = v \quad \text{bzw.} \quad 3(x+y) = 3u; \qquad 3(-x+y) = v + 8$$

geben. Wir lesen ab $3u > v + 8$ und errechnen $x = \frac{3u-(v+8)}{6}$ und $y = \frac{3u+(v+8)}{6}$. Als Teiler von 1000 kommen auf Grund der angestellten Überlegungen $u = 20; 50; 100; 250; 500$ sowie $v = 50; 20; 10; 4; 2$ in Betracht, so dass $3u = 60; 150; 300; 750; 1500$ und $v + 8 = 58; 28; 18; 12; 10$ wäre. Daraus folgt

$$x = \frac{1}{3}; \frac{122}{6}; 47; \frac{728}{6}; \frac{1480}{6}$$

Nur $x = 47$ genügt den Bedingungen der Aufgabe. Als zugehöriges y bestimmt man $y = 53$ (Primzahl!). Nunmehr errechnet man die beiden anderen Faktoren $3x+8 = 149$ (Primzahl!), $3y-8 = 151$ (Primzahl!). Damit sind $a = 47 \cdot 149 = 7003$, $b = 53 \cdot 151 = 8003$ die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 22/71
Gegeben seien zwei Paare paralleler Geraden mit gleichen Abständen, die auch untereinander parallel sind. Gesucht ist das Rechteck mit kleinstem Flächeninhalt, dessen vier Eckpunkte auf je einer der vier Geraden liegt.



Um das gesuchte Rechteck zu finden, zeichnet man zunächst ein beliebiges Rechteck, dessen vier Eckpunkte auf je einer der vier Geraden liegen (Abbildung).
Die Fläche des Rechtecks wird durch die beiden inneren Geraden in zwei Dreiecke mit der Höhe a und in ein Parallelogramm mit der Höhe b zerlegt. Da sich durch eine Lageänderung der Eckpunkte keine Höhe ändert, hängt die Fläche des Rechtecks unter den geforderten Bedingungen ausschließlich von der Länge der Strecke AC ab.

Es gilt also, die Lage zu finden, bei der AC minimal wird. Das ist aber (aus Symmetriegründen) offenbar genau dann der Fall, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist, d.h., wenn die Seiten des Rechtecks die parallelen Geraden unter einem Winkel von 45° schneiden.

Aufgabe 23/71
Man beweise, dass die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$ außer der Triviallösung $x = y = z = 0$ keine Lösung in natürlichen Zahlen hat.

Angenommen, die gegebene Gleichung hatte Lösungen in natürlichen Zahlen w; y; z. Dann würden x^2, y^2 und z^2 ein pythagoreisches Tripel bilden, und es gälte

$$x^2 = 2mn, \qquad y^2 = m^2 - n^2, \qquad z = m^2 + n^2$$

(oder untereinander getauscht, was in der gegebenen Gleichung keinen wesentlichen Unterschied darstellt). Aus $x^2 = 2mn$ folgt entweder 1.) $n = 2k^2m$, oder 2.) $m = 2k^2n$. Dabei ist k eine natürliche Zahl, $k > 0$. Die erste Möglichkeit scheidet aus, da sich daraus $y^2 = m^2 - 4k^4m^2 < 0$ ergibt. Aus 2. folgt dann

$$x^2 = 4k^2n^2, \qquad y^2 = 4k^4n^2 - n^2, \qquad z = 4k^4n^2 + n^2$$

also $x = 2kn, y = n\sqrt{(2k^2)^2 - 1}, z = n^2(4k^4 + 1)$.
Der Ausdruck $\sqrt{(2k^2)^2 - 1}$ wird aber für kein k ganzzahlig, da es bis auf das Paar $(1; 0)$ kein Paar von Quadratzahlen gibt, die sich nur um 1 voneinander unterscheiden. Damit ist die Annahme auf einen Widerspruch geführt und somit widerlegt.

Aufgabe 24/71
Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $2^{n-1}-1$ und $2^{n+1}-1$ für $n=2;3;...$!

Angenommen, der größte gemeinsame Teiler von $2^{n-1}-1$ und $2^{n+1}-1$ sei p. Dann ist

$$2^{n-1}-1=pk_1; \qquad 2^{n+1}-1=pk_2; \qquad \text{also} \qquad 2^{n-1}=pk_1+1; \qquad 2^{n+1}=pk_2+1$$

folglich $pk_2+1=4(pk_1+1)=4pk_1+4$. Daraus ergibt sich $p(k_2-4k_1)=3$. Es ist also entweder $p=1$ und $k_2-4k_1=3$ oder $p=3$ und $k_2-3k_1=1$.
Es bleibt noch zu untersuchen, für welche n sich $p=1$ bzw. $p=3$ ergibt. Die Potenz 2^m lässt beim Teilen durch 3 den Rest 1, wenn m gerade, den Rest 1, wenn m ungerade ist (vgl. Aufgabe 35, Heft 2/1962). Nun sind $n-1$ und $n+1$ entweder beide gerade, dann folgt $p=3$, oder sie sind beide ungerade, dann folgt $p=1$. Damit kann man zusammenfassen: Ist n ungerade, so ist der größte gemeinsame Teiler von $2^{n-1}-1$ und $2^{n+1}-1$ die Zahl $p=3$; ist n gerade, so ist der größte gemeinsame Teiler dieser Zahlen die Zahl $p=1$.

Aufgabe 25/71
Man beweise, dass für natürliche Zahlen n die Zahl

$$z_n=11^{n+1}+12^{2n-1}$$

ohne Rest durch 133 teilbar ist!

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.
1. Die Behauptung ist offensichtlich für $n=1$ richtig: $z_1=11^2+12^1=133$.
2. Ist die Behauptung für $n=k$ richtig, so ist sie auch für $n=k+1$ richtig:

$$z_{k+1}=11^{k+2}+12^{2k+1}=11\cdot 11^{k+1}+144\cdot 12^{2k-1}=11(11^{k+1}+12^{2k-1})-133\cdot 12^{2k-1}=11z_k+133\cdot 12^{2k-1}$$

Der zweite Summand ist auf jeden Fall durch 133 teilbar; der erste Summand ist durch 133 teilbar, wenn z_k durch 133 teilbar ist. In diesem Fall ist also auch z_{k+1}, durch 133 teilbar.
3. Damit ist die Behauptung für jedes n richtig.

Aufgabe 26/71
Es ist zu beweisen, dass die Summe aus den Quadraten der Abstände irgendeines Punktes auf dem Umkreis von den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks unabhängig von der speziellen Lage des Umkreispunktes konstant ist.

Wir legen das gleichseitige Dreieck mit dem Umkreisradius r so in ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem, dass der Umkreismittelpunkt M mit dem Ursprung zusammenfällt und der Punkt A auf der positiven y-Achse liegt. Die Koordinaten der Eckpunkte sind dann

$$A(0;r), \qquad B\left(-1\frac{1}{2}\sqrt{3r};-\frac{1}{2}r\right), \qquad C\left(1\frac{1}{2}\sqrt{3r};-\frac{1}{2}\right)$$

Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis; für seine Koordinaten $(x;y)$ gilt dann $x^2+y^2=r^2$. Die Summe aus den Quadraten der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten A; B; C errechnet man darin aus

$$x^2+(y-r)^2+\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{3r}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}r\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{3r}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}r\right)^2=6r^2$$

Die Summe ist also konstant und nur vom Umkreisradius abhängig. Wird mit a die Seite des gleichseitigen Dreiecks bezeichnet, so gilt bekanntlich $r^2=3a^2$ (was unmittelbar aus dem Kosinussatz folgt). Damit kann man für die Summe auch $6r^2=2a^2$ setzen.

Aufgabe 27/71
Man beweise: Für keine natürliche Zahl n gibt es ein Paar $(x;y)$ natürlicher Zahlen so, dass gilt

$$x^2+y^2=(n+4)!-1$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, für irgendein n gäbe es ein solches Paar $(x;y)$, das die Gleichung

$$x^2+y^2=(n+4)!-1$$

erfüllt. Nun ist $(n+4)!\equiv 0 \pmod 4$, da $(n+4)!$ wegen $n>0$ den Faktor 4 enthält. Also ist $(n+4)!-1\equiv 3 \pmod 4$. Nun lässt das Quadrat einer natürlichen Zahl beim Teilen durch 4 stets einen der Reste 0 und 1. Lässt nämlich die Zahl selbst den Rest 0 oder den Rest 2, so ist der Rest des Quadrats 0; lässt sie den Rest 1 oder 3, so ist der Rest des Quadrats 1. Daher kann die Summe x^2+y^2 beim Teilen durch 4 nur einen der Beste $0;1;2$ haben. Das ist aber ein Widerspruch zu $(n+4)!-1\equiv 3 \pmod 4$.
Somit gibt es tatsächlich kein n mit den angegebenen Eigenschaften.

Aufgabe 28/71
In einem Rechteck mit den Seitenlängen $a=6$ und $b=10$ seien 16 Punkte beliebig verteilt. Man beweise: Mindestens 2 dieser 16 Punkte haben einen Abstand voneinander, der kleiner als $2\sqrt{2}$ ist!

Das gegebene Rechteck kann man in 15 Quadrate mit der Seitenlänge 2 unterteilen. Da 16 Punkte im Rechteck verteilt sind, liegen in mindestens einem dieser 15 Quadrate 2 Punkte. Der Abstand dieser beiden Punkte voneinander ist kleiner als die Quadratdiagonale $2\sqrt{2}$.

Aufgabe 29/71
Es ist zu beweisen: Wenn $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\tan\gamma=1$.

Aus $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ folgt $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$ und damit

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\beta\cdot\tan\gamma+\tan\gamma\cdot\tan\alpha=\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\gamma(\tan\alpha+\tan\beta)=$$

$$=\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)(\tan\alpha+\tan\beta)=\tan\alpha\cdot\tan\beta+\cot(\alpha+\beta)(\tan\alpha+\tan\beta)=$$

$$=\tan\alpha\cdot\tan\beta+\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}(\tan\alpha+\tan\beta)=\tan\alpha\tan\beta+1-\tan\alpha\tan\beta=1$$

wobei von dem Additionstheorem gebraucht wurde:

$$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot x+\cot y}=\frac{1-\tan x\tan y-1}{\tan x+\tan y}$$

Aufgabe 30/71
Gegeben seien die Strecken a und b. Man beweise, dass es möglich ist, mit Zirkel und Lineal aus ihnen die Strecke

$$c=\sqrt[4]{a^4+b^4}$$

zu konstruieren und man gebe eine kurze Konstruktionsbeschreibung!

Der geforderte Beweis ist geliefert, wenn der Ausdruck für c derart umgeformt wurde, dass höchstens zweite Potenzen und höchstens zweite Wurzeln auftreten. Es gilt

$$c=\sqrt[4]{a^4+b^4}=\sqrt{\sqrt{a^4+b^4}}=\sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2}+\frac{b^4a^2}{a^2}}}=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{ab}}{b}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{ab}}{a}\right)^2}}$$

Konstruktionsbeschreibung: Die Strecke $d = \sqrt{ab}$ konstruiert man mit Hilfe des Höhensatzes als Höhe im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten a und b. Die Strecken $x = \frac{ad}{b}$ und $y = \frac{bd}{a}$ erhält man über die Proportionen $x : a = d : b$ und $y : b = d : a$ unter Verwendung des Strahlensatzes.
Aus x und y konstruiert man nach dem Satz des Pythagoras die Strecke $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ als Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten x und y. Schließlich konstruiert man noch $c = \sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{dz}$ mit Hilfe des Höhensatzes als Höhe im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten d und z.

Aufgabe 31/71
Es ist zu beweisen, dass bei pythagoreischen Zahlentripeln die mittlere Zahl niemals geometrisches Mittel der beiden anderen Zahlen sein kann.

Angenommen, es existiere ein Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und $b = \sqrt{ac}$. Dann gilt $a^2 + ac = c^2$ und wegen $c \neq 0$ auch

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{ac}{c^2} = 1 \qquad \text{also} \qquad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{a}{c} - 1 = 0$$

woraus

$$\frac{a}{c} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

folgt. Das heißt aber, das Verhältnis $a : c$ ist nicht rational im Widerspruch zu der Annahme, a und c wären natürliche Zahlen und demnach das Verhältnis $a : c$ rational.

Aufgabe 32/71
Es sei m eine natürliche Zahl. Ist die Zahl $z = (m-1)! + 1$ durch m ohne Rest teilbar, so ist m eine Primzahl. Dieser Satz ist zu beweisen.

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, $z = (m-1)! + 1$ sei durch m ohne Rest teilbar, aber m sei keine Primzahl. Dann gibt es wenigstens zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 mit $1 < n_1; n_2 < m$ so, dass $n_1 n_2 = m$ ist.
Demnach ist $(m-1)!$ durch jede dieser Zahlen ohne Rest teilbar (weil sie unter den Zahlen $2; 3; 4; ...; m-1$ zu finden sind und weil

$$(m-1)! = \prod_{i=1}^{m-1} i$$

ist). Ferner ist $(m-1)!+1$ durch jede dieser Zahlen ohne Rest teilbar, weil $m = n_1 n_2$ Teiler von $(m-1)!+1$ ist. Dann muss aber auch die Differenz $[(m-1)! + 1] - (m-1)! = 1$ durch jede dieser Zahlen ohne Rest teilbar sein, woraus folgt, dass $n_1; n_2 = 1$ ist, im Widerspruch zu $1 < n_1; n_2$. Damit ist die Annahme falsch und folglich die Behauptung richtig.

Aufgabe 33/71
Unter welchen Bedingungen existiert zu einem Tetraeder eine Kugel, die sämtliche Tetraederkanten berührt (Verlängerungen ausgeschlossen)?

Die vier Eckpunkte des Tetraeders seien P_1, P_2, P_3 und P_4, die Länge der Kante P_iP_j (mit $i, j = 1; 2; 3; 4$) sei a_{ij}. Die gesuchte Kugel schneidet (falls sie existiert) die Seitenflächen des Tetraeders in den Inkreisen dieser Dreiecke. Die Inkreise berühren einander paarweise in je einem Kantenpunkt, der auf der Kante P_iP_j mit B_{ij} bezeichnet wird. Die Länge des Abschnitts P_1B_{12} berechnet man

1. im Dreieck $P_1P_2P_3$ zu $P_1B_{12} = \frac{a_{12}+a_{13}+a_{23}}{2} - a_{23}$
2. im Dreieck $P_1P_2P_4$ zu $P_1B_{12} = \frac{a_{12}+a_{14}+a_{24}}{2} - a_{24}$

Gleichsetzung der rechten Seiten ergibt nach einigen Umformungen $a_{13} + a_{24} = a_{14} + a_{23}$. Entsprechend erhält man durch Berechnung der Strecke P_1B_{13}: $a_{12} + a_{34} = a_{14} + a_{23}$.
Fasst man beide Gleichungen zusammen, so erhält man die notwendige Bedingung für die Existenz einer sämtliche Tetraederkanten berührenden Kugel:

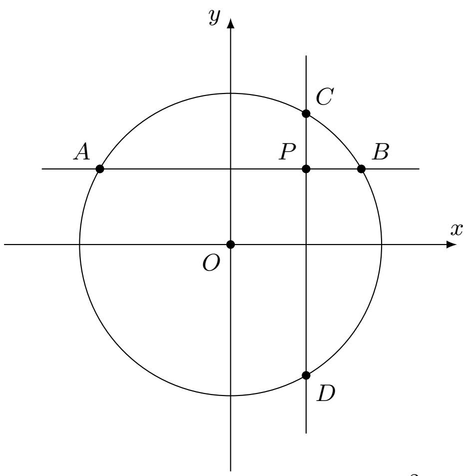
$$a_{12} + a_{34} = a_{13} + a_{24} = a_{14} + a_{23}$$

Die drei Summen der Längen von je zwei einander nicht schneidenden Kanten müssen sämtlich einander gleich sein. Es ist nun noch zu zeigen, dass die Erfüllung dieser Bedingung auch hinreichend ist. Dies folgt jedoch unmittelbar aus der Tatsache, dass alle durchgeführten Schlüsse und Umformungen umkehrbar sind.

Aufgabe 34/71
Man beweise: Wenn
$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$$
drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge erster Ordnung sind, dann sind auch a^2, b^2, c^2 aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Folge.

Nach Voraussetzung gilt
$$\frac{1}{c+a} = \frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}}{2}$$
Daraus folgt durch äquivalente Umformung
$$\frac{2}{c+a} = \frac{a+b+b+c}{ab+b^2+ac+bc} \to 2ab+2b^2+2ac+2bc = 2ac+2bc+c^2+a^2+2ab \to b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$$
Das heißt aber, a^2, b^2 und c^2 sind aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge 1. Ordnung.

Aufgabe 35/71
Gegeben ist ein Kreis mit zwei aufeinander senkrecht stehenden, einander schneidenden Sehnen. Der Schnittpunkt teilt die Sehnen in je zwei Abschnitte. Es ist zu beweisen: Sind a, b, c, d diese Abschnitte, so ist (wobei r der Radius des gegebenen Kreises ist)
$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 4r^2$$

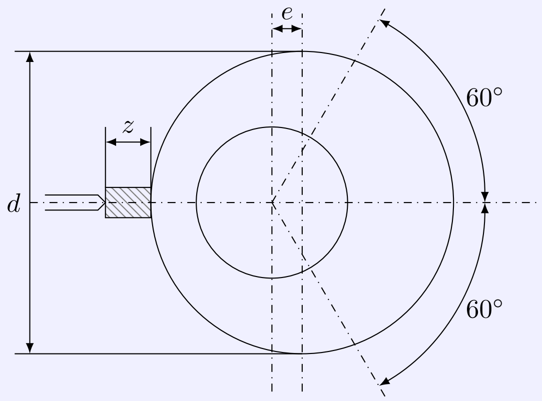


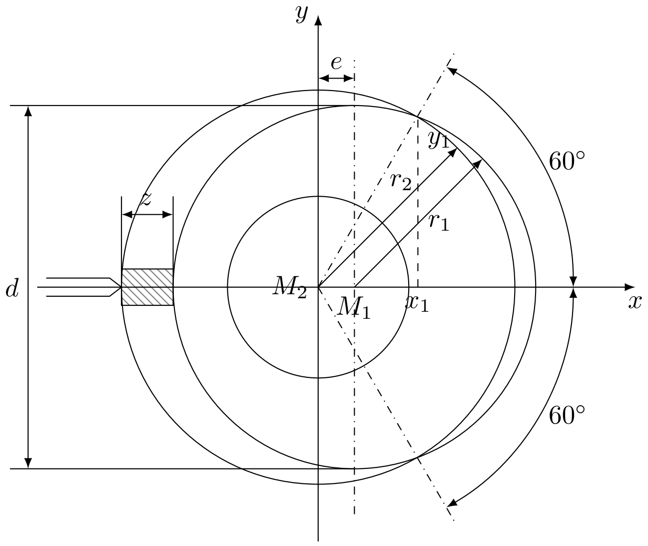
Ich zeichne den Kreis mit den Sehnen so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dass der Mittelpunkt des Kreises mit dem Nullpunkt zusammenfällt und die Sehnen jeweils parallel zu einer Achse verlaufen (Abbildung). Für jeden Punkt des Kreises gilt
$$x^2+y^2=r^2, \qquad x = \pm\sqrt{r^2-y^2}, \qquad y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$$
Dann gilt auch
$$AP = a = x + \sqrt{r^2-y^2}, \qquad BP = b = \sqrt{r^2-y^2} - x$$
$$CP = c = \sqrt{r^2-x^2} - y, \qquad DP = d = y + \sqrt{r^2-x^2}$$
Damit folgt nach kurzer Rechnung $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4r^2$.

Koordinaten: $A(-\sqrt{r^2-y^2}; y)$, $B(\sqrt{r^2-y^2}; y)$, $C(x; \sqrt{r^2-x^2})$, $D(x; -\sqrt{2-x^2})$, $P(x; y)$

Aufgabe 36/71
Auf einer Drehmaschine mit zentrisch spannendem Dreibackenfutter soll an einem kreisrunden Teil mit dem Durchmesser d ein exzentrischer Ansatz mit kreisrundem Querschnitt gedreht werden.
Die Achse des Ansatzes soll zur Achse des Teils um e vorsetzt sein (Abbildung).

Damit das Teil exzentrisch eingespannt wird, soll unter eine Spannbacke ein Metallzwischenstück der Dicke z gelegt werden. Man bestimme z als Funktion von d und e: $f = f(d; e)$!





Wir stellen den Sachverhalt in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem dar, wobei die Drehachse die Zeichenebene im Nullpunkt des Koordinatensystems durchstoße; die Spannbacke, die das Zwischenstück fasst, liege (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) auf der negativen x-Achse (Abbildung). Dann liegt der Mittelpunkt M_1 des Gesamtteils auf der positiven x-Achse im Abstand e vom Nullpunkt. Aus der Zeichnung erkennt man, dass

$$z = r_2 - r_1 + e$$

ist, wobei r_2 der Spannbackenabstand vom Zentrum ist, $r_1 = \frac{d}{2}$. Es gilt also, r_2 zu bestimmen. Dazu stehen die folgenden Gleichungen zur Verfügung:

$$K_1: \quad (x_1 - e)^2 - y_1^2 = r_1^2 \qquad (1)$$
$$K_2: \quad x_1^2 + y_1^2 = r_2^2 \qquad (2)$$
$$\frac{y_1}{x_1} = \tan 60° \qquad (3)$$

Aus (3) folgt $y_1 = x_1\sqrt{3}$. Setzt man dies in (1) und (2) ein, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$4x_1^2 - 2x_1 e + e^2 - r_1^2 = 0 \qquad (1a)$$
$$r_2 = 2x_1 \qquad (2a)$$

Aus (1a) ergibt sich

$$x_1 = \frac{e}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{4r_1^2 - 3e^2}$$

Damit folgt

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(e + \sqrt{d^2 - 3e^2}\right)$$

(da $r_2 > \frac{1}{2}e$ ist, entfällt der negative Wurzelwert). Folglich ist $z = \frac{1}{2}(3e - d + \sqrt{d^2 - 3e^2})$.
Zusatzbemerkung: Für ein auf diese Weise herzustellendes Teil muss $r_1 = \frac{d}{2} > e$ sein.

2.12 Aufgaben und Lösungen 1972

Aufgabe 1/72
Das Symbol $*$ kennzeichne eine Operation, die für natürliche Zahlen $x; y$ folgendermaßen definiert sei: $x * y = (x + y)^2$.
Es ist zu prüfen, ob

a) die Operation kommutativ ist, d.h., ob gilt $x * y = y * x$,

b) die Operation assoziativ ist, d.h., ob gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$,

c) die Operation distributiv bezüglich der Addition ist, d.h. ob gilt $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$,

d) für die Operation ein neutrales Element existiert, d.h., ob es ein Element e gibt so, dass $x * e = e * x = x$ für jedes x und e eine natürliche Zahl ist.

Zu a) Es ist $(x * y)(x + y)^2 = (y + x)^2 = y * x$, die Operation ist also kommutativ.
Zu b) Es ist

$$(x * y) * z = (x + y)^2 * z = (x^2 + 2xy + y^2 + z^2)^2$$
$$\text{und } x * (y * z) = x * (y + z)^2 = (x^2 + y^2 + 2yz + z^2)^2$$

Man erkennt, dass im allgemeinen $(x * y) * z \neq x * (y * z)$ ist. Die Operation ist also nicht assoziativ.
Zu c) Es ist

$$x * (y + z) = (x + y + z)^2 \text{ und } (x * y) + (x * z) = (x + y)^2 + (x + z)^2$$

Durch Ausrechnen der beiden rechten Seiten und Vergleich ergibt sich, dass die Operation nicht distributiv bezüglich der Addition ist.
Zu d) Angenommen, es gäbe ein Element e so, dass $x * e = (x + e)^2 = x$ für jedes x gilt. Dann müsste die Gleichung $x^2 + 2xe + e^2 = x$ mit den Lösungen $e_{1;2} = -x \pm \sqrt{x}$ gelten. Man erkennt aber sofort, dass e von x anhängt und zudem nicht natürlich ist. Es existiert also kein neutrales Element.

Aufgabe 2/72
Aus drei Strecken mit den Maßzahlen a, b und c $(a, b, c > 0)$ sei ein Dreieck konstruierbar. Man beweise, dass man dann auch aus den Strecken mit den Maßzahlen $\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1}$ ein Dreieck konstruieren kann.

Es genügt der Nachweis, dass aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen für a, b und c die Gültigkeit der Dreiecksungleichungen für $\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1}$ folgt. Nun ist

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \frac{a+b+2ab}{1+a+b+ab} = \frac{c}{c+1} \cdot \frac{(a+b+2ab)(c+1)}{(1+a+b+a+b)c} >$$

$$> \frac{c}{c+1} \cdot \frac{(a+b)c+abc+a+b+2ab}{(a+b)c+abc+c} > \frac{c}{c+1} \cdot \frac{(a+b)c+abc+c}{(a+b)c+abc+c} = \frac{c}{c+1}$$

(die letzte Ungleichung gilt wegen $a + b > c$). Durch zyklische Vertauschung folgt auf die gleiche Weise

$$\frac{a}{a+1} + \frac{c}{c+1} > \frac{b}{b+1} \text{ und } \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} > \frac{a}{a+1}$$

Aufgabe 3/72
Gegeben seien die vier Scheitelpunkte einer Ellipse. Man konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal das der Ellipse umbeschriebene Quadrat.

Vorüberlegung: Aus Symmetriegründen müssen die Eckpunkte des gesuchten Quadrates auf den Symmetrieachsen der Ellipse liegen. Da man diese allein mit dem Lineal durch Verbinden der beiden Hauptscheitelpunkte bzw. der beiden Nebenscheitelpunkte finden kann, genügt es, den Radius eines Kreises zu finden, dessen Durchmesser Diagonale des gesuchten Quadrates ist.

Behauptung: Die halbe Diagonale des gesuchten Quadrates (der Radius des Kreises) ist gleich dem Abstand von Haupt- und Nebenscheitel der Ellipse.
Beweis: Es seien a und b die beiden Halbachsen der Ellipse mit der Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$y = r - x$ ist die Gleichung einer Geraden, die im Punkt r die y-Achse schneidet und um 45° gegen die x-Achse geneigt ist. Bestimmt man r so, dass diese Gerade Tangente an die Ellipse wird, so erhält man nach Einsetzen der Geradengleichung in die Ellipsengleichung eine Doppellösung für x:

$$b^2x^2 + a^2(r-x)^2 = a^2b^2 \to x_{1;2} = \frac{a^2r}{a^2+b^2} \pm \sqrt{\frac{a^4r^2 - a^2(r^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}$$

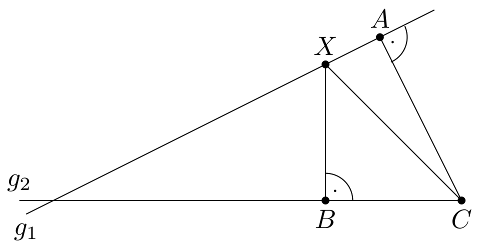
Damit sich tatsächlich eine Doppellösung ergibt, muss die Diskriminante null werden, d.h., es muss

$$a^2r^2 - (r^2-b^2)(a^2+b^2) = a^2b^2 - b^2r^2 + b4 = 0$$

$$r^2 = a^2 + b^2 \qquad ; \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

sein. Das aber ist die Behauptung.
Konstruktion: Man verbinde die Hauptscheitelpunkte durch eine Gerade und die Nebenscheitelpunkte durch eine Gerade. Man schlage den Kreis um den Schnittpunkt der beiden Geraden, der den Abstand zweier benachbarter Scheitelpunkte als Radius hat. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit den beiden Geraden sind die Eckpunkte des gesuchten Quadrates.

Aufgabe 4/72
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2, weiterhin auf g_1 ein Punkt A. Gesucht ist der Punkt X auf g_1, für den der Abstand zur Geraden g_2 gleich dem Abstand zu A ist.



Angenommen, der Punkt X sei bereits gefunden (Abbildung).
Der Schnittpunkt der in A auf g_1 errichteten Senkrechten mit g_2 sei C, der Fußpunkt des Lotes von X auf g_2 sei B. Dann gilt $XA = XB$, (Forderung der Aufgabe), $\measuredangle XBC = \measuredangle XAC$, (nach Konstruktion) $XC = XC$. Das heißt, $\triangle\, BXC \cong \triangle\, AXQ$, also $AC = BC$.

Damit ist die Konstruktion klar: Man errichtet in A die Senkrechte auf g_1, die g_2 in C schneidet, trägt auf g_2 von C aus in beiden Richtungen die Strecke $CB = CA$ ab und errichtet in B die Senkrechte auf g_2, deren Schnittpunkt mit g_1 der gesuchte Punkt X ist. Oder man halbiert die bei C von der Senkrechten auf g_1 und von g_2 gebildeten Winkel, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit g_1 ist der gesuchte Punkt X (es existieren 2 Punkte X).

Aufgabe 5/72
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Zahl n ist das Produkt von genau drei verschiedenen Primzahlen, die je größer als 10 sind.
2. Die Zahl n kann man so als Produkt zweier natürlicher Zahlen darstellen, dass deren Summe einmal 600, ein zweites Mal 240 ist.

Die drei Primfaktoren von n seien p_1, p_2 und p_3, wobei gilt $n = p_1p_2p_3$ und $p_1 \neq p_2$, $p_2 \neq p_3$, $p_1 \neq p_3$, $p_1; p_2; p_3 > 10$. Dann lässt sich n sogar auf drei verschiedene Weisen als Produkt zweier natürlicher Zahlen darstellen:

$$n = (p_1p_2)p_3 = (p_2p_3)p_1 = (p_1p_3)p_2$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit setzen wir $(p_1p_2) + p_3 = 600$ und $(p_2p_3) + p_1 = 240$. Dann ist $p_1 = 240 - p_2p - 3$, woraus wegen $p_1; p_2; p_3 > 10$ sofort folgt $p_2; p_3 < 23$. Für p_2 und p_3 kommen also nur die Primzahlen 11, 13, 17 und 19 in Frage. Da $p_1 \geq 11$ ist, folgt $p_2p_3 \leq 229$ oder $p_2 \leq \frac{229}{p-3}$.
Für $p_3 = 19$ erhält man daraus $p_2 \leq 12$, also $p_2 = 11$ und damit $p_1 = 31$; diese Werte befriedigen aber nicht die zweite der gegebenen Gleichungen: $(p_1p_2) + p_3 = 360 \neq 600$.
Aus $p_3 = 17$ folgt auf dieselbe Weise $p_2 \leq 13$, also $p_2 = 13$ oder $p_2 = 11$ mit $p_1 = 19$ bzw. $p_1 = 53$. Durch Einsetzen in die Gleichung $(p_1p_2) + p - 3 = 600$ stellt man fest, dass $p_1 = 53; p_2 = 11; p_3 = 17$ eine Lösung ist.
Analog prüft man $p_3 = 13$ (ergibt keine Lösung) und $p_3 = 11$, wobei sich als zweite Lösung $p_1 = 31; p_2 = 19; p_3 = 11$ ergibt. Da der Lösungsweg weitere Lösungen ausschließt, sind dies die einzigen. Die gesuchten Zahlen sind also $n_1 = 53 \cdot 11 \cdot 17 = 9911$ und $n_2 = 31 \cdot 19 \cdot 11 = 6479$.

Aufgabe 6/72
In der Gleichung

$$\cot(m \cos(2\pi x)) = \sqrt{3}$$

ist der Koeffizient $m > 0$ so zu bestimmen, dass die Gleichung die Lösungen $x_{1;2} = \pm\frac{1}{6}$ hat. Ferner sind alle übrigen Lösungen der Gleichung zu bestimmen.

Setzt man $x_{1;2} = \pm\frac{1}{6}$ in die gegebene Gleichung ein, so folgt

$$\cot\left(m \cos\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

da $\cos(-x) = \cos x$ ist. Daraus erhält man weiter wegen $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \to \cot\frac{m}{2} = \sqrt{3}$, also $m = \frac{\pi}{3}$.
Die Gleichung (1) nimmt damit die Gestalt

$$\cot\left(\frac{\pi}{3}\cos(2\pi x)\right) = \sqrt{3}$$

an. Aus ihr folgt

$$\frac{\pi}{3}\cos(2\pi x) = \operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

mit $k = 0; \pm 1; \pm 2; ....$ Durch Multiplikation mit $\frac{3}{\pi}$ ergibt sich damit $\cos(2\pi x) = 3k + \frac{1}{2}$.
Wegen $|\cos(2\pi x)| \leq 1$ muss $k = 0$ sein, d.h. $\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$, also $2\pi x = \arccos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ mit $n = 0; \pm 1; \pm 2; ....$ Damit folgt schließlich $x = \pm\frac{1}{6} + n$.

Aufgabe 7/72
Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte der Ebene, und es sei $AB + CD = BC + AD$. Man beweise, dass die Strecken AB, BC, CD, DA ein nicht überschlagenes Viereck bilden.

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, das Viereck sei überschlagen, o.B.d.A. schneiden einander die Seiten AD und BC in X. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann $AB + CD < (AX + DX) + (BX + CX) = AD + BC$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 8/72
Man bestimme alle reellen Zahlen a, für die die Gleichung

$$\sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) = 0$$

bei beliebigem reellem x gilt.

Durch Anwendung der Additionstheoreme wird die gegebene Gleichung in

$$\sin(x + a) \cdot (1 + 2\cos a) = 0$$

äquivalent umgeformt. Da $\sin x + a = 0$ nicht für beliebiges reelles x gilt, muss $1 + 2\cos a = 0$ sein, wenn die Gleichung erfüllt sein soll. Daraus folgt sofort

$$\cos a = -0{,}5 \to a_1 = 2\left(\frac{1}{3} + k\right)\pi; a_2 = 2\left(\frac{2}{3} + k\right)\pi$$

(wobei k eine beliebige ganze Zahl ist). Die Probe bestätigt die Richtigkeit.
Bemerkung: Diese Gleichung findet beim Dreiphasen-Wechselstrom ihre praktische Anwendung.

Aufgabe 9/72
Es seien a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0, |a| \neq 1$. Gesucht sind alle Funktionen $f(x)$, für die für jedes reelle $x \neq 0$ die Beziehung gilt:

$$ax \cdot f(x) + \frac{1}{ax} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = b$$

Da die Beziehung für alle reellen $x \neq 0$ gelten soll, muss sie auch für $\frac{1}{x}$ gelten:

$$\frac{a}{x} \cdot f(\frac{1}{x}) + \frac{x}{a} \cdot f(x) = b$$

Demnach ist

$$\frac{a}{x} \cdot f(\frac{1}{x}) + \frac{x}{a} \cdot f(x) = ax \cdot f(x) + \frac{1}{ax} \cdot f(\frac{1}{x}) \to \left[xf(x) - \frac{1}{x}f(\frac{1}{x})\right] \cdot (a - \frac{1}{a}) = 0$$

Wegen $|a| \neq 1$ ist $a - \frac{1}{a} \neq 0$ Damit folgt $xf(x) = \frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$. Setzt man dies in die geforderte Bedingung ein, so erhält man

$$ax \cdot f(x) + \frac{x}{a} \cdot f(x) = b \to f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{ab}{a^2 + 1}$$

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

Aufgabe 10/72
Man beweise, dass für zwei verschiedene reelle Zahlen x und y stets die Ungleichung gilt:

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 < (x - y)^2$$

Nach den Additionstheoremen gilt

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 y + \sin^2 y) - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) =$$

$$= 2 - 2\cos(x - y) = 4\sin^2 \frac{x - y}{2}$$

(letzteres wegen $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$). Nun hat die sin-Funktion die Eigenschaft $|\sin x| < |x|$ für $x \neq 0$; wegen $x \neq y$ ist $x - y \neq 0$ und es folgt

$$4\sin^2 \frac{x - y}{2} < 4\left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = (x - y)^2$$

Damit ist der Beweis geführt.

Aufgabe 11/72
Gesucht sind alle geometrischen Folgen $\{a_k\}$ mit $a_k = a_1 q^{k-1}$, die den folgenden vier Bedingungen genügen:
1. Die Glieder a_k sind natürliche Zahlen.
2. Das 1. Glied a_1 ist einstellig.
3. Das 11. Glied $a_1 1$ ist sechsstellig.
4. Das 15. Glied $a_1 5$ ist siebenstellig.

Eine geometrische Folge ist durch a_1 und q (bis auf die Anzahl der Glieder) vollständig bestimmt. Es genügt also, a_1 und q zu ermitteln.
Aus der Bedingung 1 folgt sofort, dass auch q eine natürliche Zahl sein muss. Aus den Bedingungen 2 bis 4 ergibt sich zunächst, dass $q > 1$, also $q \geq 2$ ist. Nach dem Bildungsgesetz für geometrische Folgen ist $\frac{a_k}{a_1} = q^{k-1}$. Setzt man in diese Beziehung das größtmögliche a_{15} und das kleinstmögliche a_1 ein, so erhält man eine obere Grenze für q^{14}; entsprechend ergibt sich eine untere Grenze für q^{14}, wenn man das

kleinstmögliche a_{15} und das größtmögliche a_1 einsetzt.
Wegen $1 \leq a_1 \leq 9$ und $1000000 \leq a_{15}; \leq 9999999$ ergibt sich für q^{14} damit die Abschätzung

$$\frac{9999999}{1} \geq q^{14} \geq \frac{1000000}{9}$$

woraus mit Hilfe logarithmischer Rechnung $3{,}2 \geq q \geq 2{,}3$, also q = 3 folgt. Damit wird

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = a_1 \cdot 3^{14} = 4782969 a_1$$

Damit $a_1 5$ siebenstellig ist, muss demnach a_1 entweder gleich 1 oder gleich 2 sein. Wäre nun $a_1 = 1$, so ergäbe sich $a_{11} = 118098$, also fünfstellig im Widerspruch zur Bedingung 3. Mit $a_1 = 2$ dagegen ergibt sich $a_{11} = 118098$.
Es gibt also genau eine derartige geometrische Folge mit $a_1 = 2, q = 3$.

Aufgabe 12/72
Man untersuche, ob es eine reelle Zahl x gibt, mit

$$x = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \cdot \cot\frac{1}{n}}$$

Eine reelle Zahl x mit der geforderten Eigenschaft existiert genau dann, wenn

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \cot\frac{1}{n} < \infty$$

gilt. Wir untersuchen also den Grenzwert. Dazu setzen wir $\frac{1}{n} = z$, also $n = \frac{1}{z}$. Mit $n \to \infty$ geht $z \to 0$. Der Grenzwert nimmt damit die Gestalt an

$$\lim_{z\to 0} (z^3 + 2z^3 - z) \cot z$$

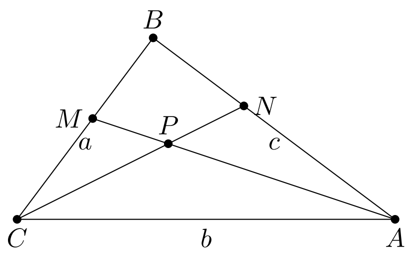
Wir formen um:

$$\lim_{z\to 0} (z^3 + 2z^3 - z) \cot z = \lim_{z\to 0} (z^2 + 2z^2 - 1) \frac{z}{\sin z} \cos z =$$

$$= \lim_{z\to 0} (z^2 + 2z^2 - 1) \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \lim_{z\to 0} \cos z = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

Die (zugleich notwendige und hinreichende) Bedingung, dass der Grenzwert eine nichtnegative reelle Zahl ist, ist also nicht erfüllt. Das heißt aber, es gibt keine reelle Zahl x mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 13/72
Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden AM und BN, deren Schnittpunkt P sei. Von dem Dreieck ABC sei bekannt, dass $AP = MP\sqrt{3}$ und $NP = BP(\sqrt{3} - 1)$ ist. Gesucht sind die Winkel des Dreiecks.



Es sei $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Nach einem bekannten Satz verhalten sich zwei Seiten eines Dreiecks zueinander wie die von der Winkelhalbierenden auf der dritten Seite erzeugten anliegenden Abschnitte. Demnach gilt im Dreieck ABM (Abbildung)

$$\frac{c}{BM} = \frac{AP}{PM} = \sqrt{3} \qquad ; \qquad BM = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Analog gilt für das Dreieck ABN: $AN = c(\sqrt{3} - 1)$. Im Dreieck ABC ist nach demselben Satz

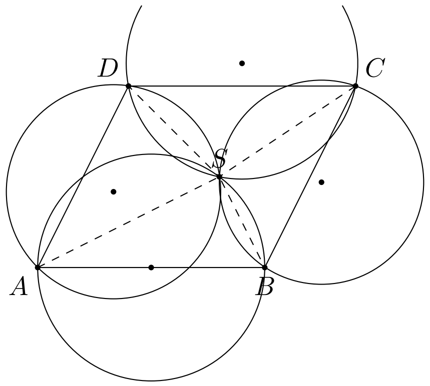
$$\frac{c}{a} = \frac{AN}{b - AN} \qquad ; \qquad \frac{c}{b} = \frac{BM}{a - BM}$$

Setzt man in diese Gleichungen die oben für AN und BM gefundenen Werte ein, so erhält man nach Auflösung $a = c\sqrt{3}$, $b = 2c$, woraus sofort folgt, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist, d.h., das Dreieck ABC ist bei B rechtwinklig. Dann ist aber

$$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{und damit} \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}; \beta = \frac{\pi}{6}$$

(wobei mit α und β die Dreieckswinkel bei Abzw. B bezeichnet wurden).

Aufgabe 14/72
Gegeben seien vier Kreise mit gleichen Radien, die einander sämtlich in einem Punkt S schneiden. Je zwei dieser Kreise heißen "benachbart", wenn bei Drehung eines Strahls um S ihre Mittelpunkte unmittelbar nacheinander von dem Strahl überstrichen werden.
Man beweise: Die vier Schnittpunkte je zweier benachbarter Kreise bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.



Da die Radien der vier Kreise gleich sind, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz (Bezeichnungen gemäß Abbildung)

$$\measuredangle ADS = \measuredangle ABS; \quad \measuredangle SBC = \measuredangle CDS;$$

$$\measuredangle DAS = \measuredangle DCS; \quad \measuredangle SAB = \measuredangle SCB.$$

Daraus folgt:

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABS + \measuredangle SBC = \measuredangle ADS + \measuredangle CDS = \measuredangle ADC$$
$$\measuredangle BCD = \measuredangle SBC + \measuredangle DCS = \measuredangle SAB + \measuredangle DAS = \measuredangle DAB$$

Im Viereck $ABCD$ sind also gegenüberliegende Winkel einander gleich. Das heißt aber nichts anderes, als dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 15/72
Man beweise: Ist p eine von 2 verschiedene Primzahl und m eine beliebige natürliche Zahl, so ist die Summe ohne Rest durch p^m teilbar.

$$z = \sum_{k=1}^{p^m} k^p$$

Der Beweis ist geführt, wenn man die Summe so in Teilsummen zerlegen kann, dass für jeden Teilsummanden die Teilbarkeit durch p^m sichtbar wird. Wegen $p \neq 2$, p Primzahl, ist p^m sicher ungerade. Die Zahl z setzt sich also aus einer ungeraden Anzahl von Summanden zusammen. Der letzte Summand $(p^m)^p$ ist trivialerweise durch p^m teilbar.
Die verbleibende Anzahl der Summanden ist gerade; man kann sie paarweise zu Teilsummen zusammenfassen:

$$z = \sum_{k=1}^{p^m} k^p = \sum_{k=1}^{\frac{p^m-1}{2}} [k^p + (p^m - k)^p] + (p^m)^p$$

(Dabei wurden das erste und das vorletzte, das zweite und das drittletzte, ... Glied zusammengefasst.) Man erkennt nun sofort, dass jeder Summand der letzten Summe durch p^m teilbar ist; potenziert man nämlich aus, so heben sich die Glieder k^p auf, und jedes andere Glied enthält den Faktor p^m in wenigstens erster Potenz. Damit ist der Beweis geführt.

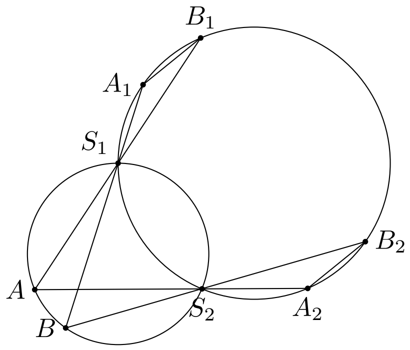
Aufgabe 16/72
In der Ebene sei die Strecke $AB = 1$ gegeben. Man finde die Menge aller der Punkte M, für die sich die Längen der Strecken MA und MB durch ganze Zahlen ausdrücken lassen.

Jeder Punkt M der gesuchten Menge bildet mit den Punkten A und B ein (möglicherweise entartetes) Dreieck. Es gilt also die Dreiecksungleichung $|MA - MB| \leq AB = 1$ (wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn das Dreieck entartet ist). Da $|MA - MB|$ nichtnegativ ist und entsprechend der Aufgabenstellung nichtnegativ sein soll, sind nur die beiden Fälle möglich $|MA - MB| = 0$ und $|MA - MB| = 1$.
Im ersten Fall ist $MA = MB$, woraus folgt, dass M auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt (mit ganzzahligem Abstand zu A und B). Im zweiten Fall liegt M auf der Geraden durch A und B (ebenfalls mit ganzzahligem Abstand zu A und B). Die gesuchte Menge enthält also zweifach abzählbar unendlich viele Punkte.

Aufgabe 17/72
Gegeben sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt unbekannt ist. Gesucht sind zwei beliebige, aber gleichlange Sehnen dieses Kreises ohne gemeinsamen Punkt, wobei zur Konstruktion nur das Lineal (ohne Maßstab!) und ein einziger Zirkelschlag zugelassen sind.

Man schlägt mit dem Zirkel einen Hilfskreis um einen Punkt außerhalb des gegebenen Kreises, der den gegebenen Kreis in zwei Punkten S_1 und S_2 mit $S_1 \neq S_2$ schneidet (Abbildung).

Auf dem außerhalb des gegebenen Kreises gelegenen Bogen des Hilfskreises wählt man zwei beliebige Punkte A und B mit $A \neq B$ derart, dass die Geraden durch diese Punkte und durch S_1 bzw. S_2 den gegebenen Kreis außerhalb des Hilfskreises schneiden; die Schnittpunkte seien A_1 und B_1 (Geraden durch S_1) bzw. A_2 und B_2 (Geraden durch S_2). Die Sehnen A_1B_1 und A_2B_2 sind gleichlang.



Beweis: Es ist $\alpha = \measuredangle A_1S_1B_1 = \measuredangle AS_1B$ (Scheitelwinkel), $\alpha = \measuredangle AS_2B$ (Peripheriewinkel über AB!), $\alpha = \measuredangle A_2S_2B_2$ (Scheitelwinkel). Also sind die Peripheriewinkel über den Sehnen A_1B_1 und A_2B_2 gleichgroß; dann sind aber auch die Sehnen gleichgroß (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes).

Aufgabe 18/72
Man berechne die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1}$$

Nach dem binomischen Satz ist

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n \quad \text{und}$$

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Ferner ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$. Addiert man beide Gleichungen, so ergibt sich

$$2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... + ...\right] = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} = 2^n$$

Durch Subtraktion folgt

$$2\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... + ...\right] = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} = 2^n$$

Es ist also

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

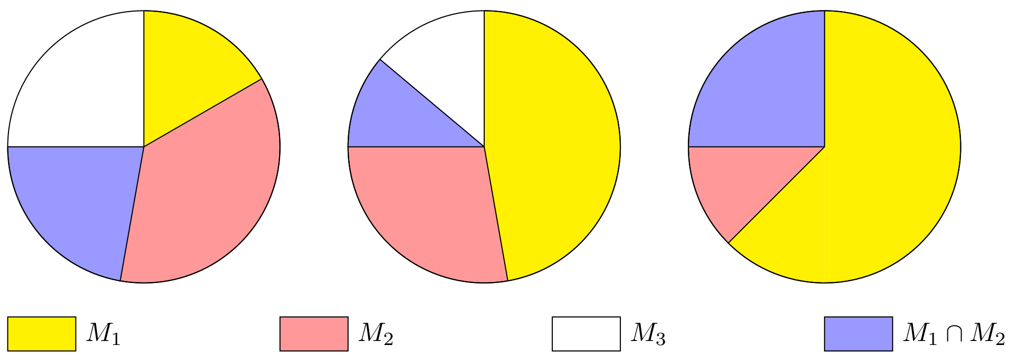
Aufgabe 19/72
In einer Klasse einer EOS haben 75 % der Schüler die Zeitschrift "Wissenschaft und Fortschritt", 35 % die Zeitschrift "Urania" abonniert.
Es ist der Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen festzustellen (wahr, falsch, nicht entscheidbar).

a) Alle Schüler der Klasse haben eine der beiden Zeitschriften, aber nicht beide abonniert. item Die meisten der Schüler, die "Urania" abonniert haben, sind auch Abonnenten von "Wissenschaft und Fortschritt".

b) Der kleinere Teil der Abonnenten von "Wissenschaft und Fortschritt" hat auch "Urania" abonniert.

Hilfe bei der Analyse des Sachverhalts kann die Mengenlehre (in Verbindung mit der elementaren Logik) geben. Es gibt zunächst zwei Möglichkeiten:
1. Die Durchschnittsmenge der beiden Abonnentenmengen ist leer,
2. die Durchschnittsmenge der beiden Abonnentenmengen ist nicht leer.
Die Möglichkeit 1 scheidet sofort aus, da in diesem Falle mehr als 100% der Schüler Abonnenten einer der beiden Zeitschriften sein müssten, was offenbar unmöglich ist. Damit ist aber auch schon die Aussage (a) als falsch erkannt.

Für die Möglichkeit 2 gibt es wieder zwei Fälle:
2a) Die (nicht leere) Durchschnittsmenge der beiden Abonnentenmengen ist gleich einer der beiden Abonnentenmengen,
2b) die (nicht leere) Durchschnittsmenge der beiden Abonnentenmengen ist nicht gleich einer der beiden Abonnentenmengen (d.h., sie ist eine echte Teilmenge jeder der beiden Mengen).



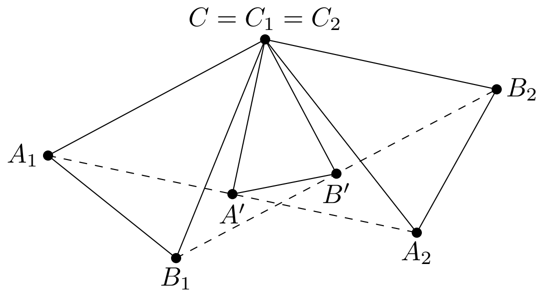
Der Sachverhalt nach 2a) und 2b) ist in der Abbildung dargestellt; offenbar kann man aus den mitgeteilten Tatsachen nicht entscheiden, welcher der beiden Fälle zutrifft. Damit folgt: (b) ist nicht entscheidbar, (c) ist auf jeden Fall wahr.

Aufgabe 20/72
In einer orientierten Ebene fallen die Spitzen C_1 und C_2 von zwei gleichsinnig umlaufenden, einander ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zusammen.
Man beweise: Verbindet man die Mittelpunkte A' und B' der Verbindungsstrecken A_1A_2 und B_1B_2 miteinander und mit $C' = C_1 = C_2$, so erhält man ein Dreieck $A'B'C'$, das den gegebenen Dreiecken ähnlich ist.

Wir bezeichnen $\measuredangle A_1CB_1 = \measuredangle A_2CB_2$ (Abbildung) und drehen beide Dreiecke um den Punkt C um den Winkel γ (durch die Orientierung der Ebene und die Festlegung des Umlaufsinns für die Dreiecke sind das Vorzeichen des Winkels γ und die Richtung der Drehung eindeutig festgelegt).
Bei dieser Drehung finden die folgenden Übergänge statt:

$$A_1 \to B_1; A_2 \to B_2; A_1A_2 \to B_1B_2; A' \to B'; CA' \to CB'$$

d.h., das Dreieck $A'B'C$ ist gleichschenklig. Ferner geht CA' bei dieser Drehung in CB' über, also ist $\measuredangle A'CB' = \gamma$. Demnach ist das Dreieck $A'B'C$ den gegebenen Dreiecken ähnlich.



Aufgabe 21/72
Gegeben sei die Gleichung $x^4+x^3+x^2+(62-k)x+k=0$ mit den reellen Lösungen x_i ($i=1;2;3;4$). Welche reellen Werte kann k annehmen, wenn

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}>5$$

sein soll?

Es ist

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}$$

Stellt man ein Polynom 4. Grades in der Form $x4+px^3+qx^2+rx+s$ dar, so gilt für die Nullstellen x_i dieses Polynoms nach dem Wurzelsatz des Vieta

$$x_1x_2x_3x_4=s \qquad ; \qquad x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-r$$

In unserem Falle ist $s=k, r=62-k$. Also gilt

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{k-62}{k}>5$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
a) $k>0$, dann führt die Lösung der Ungleichung auf einen Widerspruch: $\frac{k-62}{k}>5$, $k<-\frac{31}{2}$.
b) $k<0$, $\frac{k-62}{k}>5$, $k>-\frac{31}{2}$.
(der Fall $k=0$ ist nicht möglich, da dann nach dem Wurzelsatz des Vieta $x_i=0$ für wenigstens ein i und damit die Bildung der $\frac{1}{x_i}$ nicht möglich wäre).
Der Definitionsbereich für k ist also unter der geforderten Bedingung $-\frac{31}{2}<k<0$.

Aufgabe 22/72
Man beweise: Es existieren keine ganzen Zahlen a_k mit $k=0;l;2;...;n$ so, dass das Polynom

$$P(x)a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

für $x=12$ den Wert 3 und für $x=7$ den Wert 2 annimmt.

Angenommen, es gäbe ein Polynom $P(x)$ der geforderten Art, dann wäre $P(12)-P(7)=1$. Andererseits ist $P(12)-P(7)=a_1(12-7)+...+a_n(12^n-7^n)$.
Da nun $12\equiv 7\equiv 2 \pmod 5$ und damit $12^k\equiv 7^k\equiv 2^k \pmod 5$ ist, folgt $12^k-7^k\equiv 0 \pmod 5$ für alle natürlichen Zahlen k.
Das heißt also, dass $P(12)-P(7)$ einmal gleich 1, zum anderen aber durch 5 teilbar wäre. Das aber ist ein Widerspruch, woraus unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Aufgabe 23/72
Es bedeute $[d]$ die größte ganze Zahl x mit $x\leq d$. Zu zeigen ist, dass

$$\left[\frac{n}{p^aq^b}\right]\geq\left[\frac{n}{p^{a+c}}\right]\cdot\left[\frac{p^c}{q^b}\right]$$

für alle positiven reellen Zahlen n,p,q,a,b,c gilt.

Es sei

$$\frac{n}{p^{a+c}} = x + \alpha \quad \text{mit} \quad x = \left[\frac{n}{p^{a+c}}\right]; 0 < \alpha < 1$$

$$\frac{p^c}{q^b} = y + \beta \quad \text{mit} \quad y = \left[\frac{p^c}{q^b}\right]; 0 < \beta < 1$$

Dann ist

$$\left[\frac{n}{p^a q^b}\right] = \left[\frac{n}{p^{a+c}} \cdot \frac{p^c}{q^b}\right] = [(x+\alpha)(y+\beta)] = xy + [y\alpha + x\beta + \alpha\beta] > xy = \left[\frac{n}{p^{a+c}}\right] \cdot \left[\frac{p^c}{q^b}\right]$$

Aufgabe 24/72
Man bestimme im Bereich der natürlichen Zahlen sämtliche Lösungen des Gleichungssystems

$$\binom{y+1}{x+1} - \binom{y}{x+1} = 6$$

$$\binom{x}{x-2} \cdot \frac{2}{x-1} + \binom{y}{y-1} \cdot \frac{1}{y} = 3$$

Wegen $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ kann man die zweite der gegebenen Gleichungen in der Form

$$\binom{x}{2} \cdot \frac{2}{x-1} + \binom{y}{1} \cdot \frac{1}{y} = 3$$

schreiben, woraus mit

$$\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} \quad ; \quad \binom{y}{1} = y$$

folgt

$$\frac{2x(x-1)}{2(x-1)} + \frac{x}{y} = 3$$

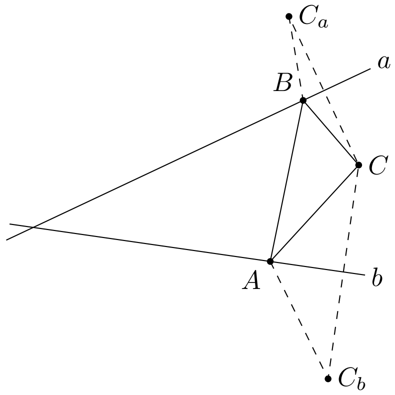
Offensichtlich ist $x \neq 1$ und $y \neq 1$; damit ergibt sich $x = 2$ als einzige Lösung für x. Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$\binom{y+1}{3} - \binom{y}{3} = 6 \quad ; \quad \frac{(y+1)y(y-1)}{6} - \frac{y(y-1)(y-2)}{6} = 6$$

woraus die in y quadratische Gleichung $y^2 - y - 12 = 0$ folgt. Die Lösungen sind $y_1 = 4$ und $y_2 = -3$, von denen aber nur $y_1 = 4$ im Lösungsbereich liegt. Tatsächlich erfüllen $x = 2$ und $y = 4$ das gegebene Gleichungssystem (wie eine Probe bestätigt).

Aufgabe 25/72
Gegeben sind zwei Geraden a und b, die einander unter einem spitzen Winkel schneiden, und ein im "spitzen Winkelraum" liegender Punkt C. Man konstruiere ein Dreieck ABC derart, dass A auf a und B auf b liegt und der Umfang minimal ist.

Sind C_a und C_b die zu C bezüglich a und b symmetrischen Punkte, so gilt für jeden Punkt A auf a bzw. B auf b, dass $CA = C_aA$ bzw. $CB = C_bB$ ist. Der Streckenzug $CABC$ (Umfang des Dreiecks ABC) ist also längengleich dem Streckenzug C_aABC_b. Dieser wird aber offenbar genau dann ein Minimum, wenn A und B auf der Verbindungsstrecke C_aC_b liegen. (Abbildung)



Konstruktionsbeschreibung: Man konstruiert in bekannter Weise die zu C bezüglich a und b symmetrischen Punkte C_a und C_b; die Verbindungsstrecke C_aC_b schneidet a bzw. b in den fehlenden Punkten A bzw. B des gesuchten Dreiecks.

Aufgabe 26/72
Gegeben seien zwei Zahlenfolgen $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ mit

$$a_k = 4^{2k+1} + 4^{k+1} + 7 \qquad \text{und} \qquad b_k = 4^{2k+1} - 4^{k+1} + 7$$

Man zeige, dass für natürliches k a_k oder k_k ein Vielfaches von 5 ist!

Wenn a_k oder b_k ein Vielfaches von 5 ist, so ist $a_k b_k$ ohne Rest durch 5 teilbar und umgekehrt. Nun ist

$$a_k b_k = \left(4^{2k+1} + 7 + 4^{k+1}\right)\left(4^{2k+1} + 7 - 4^{k+1}\right) = \left(4^{2k+1} + 7\right)^2 - \left(4^{k+1}\right)^2 =$$

$$= 4^{2k+1}(4^{2k+1} + 14 - 4) + 49 = 4 \cdot 16k(4 \cdot 16^k + 1) + 49$$

Nun ist $16 \equiv 1 \pmod 5$, also auch $16^k \equiv 1 \pmod 5$. Wegen $10 \equiv 0 \pmod 5$ und $49 \equiv 4 \pmod 5$ folgt

$$a_k b_k \equiv 4 \cdot 1 \cdot (4 \cdot 1 + 0) + 4 \pmod 5 \;\equiv 20 \pmod 5 \;\equiv 0 \pmod 5$$

Damit ist der Beweis geführt.

Aufgabe 27/72
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen m und n, für die die Proportion gilt:

$$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = 5 : 5 : 3$$

Wir betrachten zunächst die erste der Proportionen:

$$\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} = \frac{(n+1)!m!(n-m+1)!}{(m+1)!(n-m)!(n+1)!} = \frac{n-m+1}{m+1} = 1$$

Daraus folgt $n = 2m$. Die zweite Proportion liefert

$$\binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = \frac{(n+1)!(m-1)!(n-m+2)!}{m!(n-m+1)!(n+1)!} = \frac{n-m+2}{m} = \frac{5}{3}$$

Setzt man $n = 2m$ in diese letzte Relation ein, so ergibt sich $\frac{m+2}{m} = \frac{5}{3}$, also $m = 3$ und damit $n = 6$. Wie der Lösungsweg zeigt, ist dies die einzige Lösung.

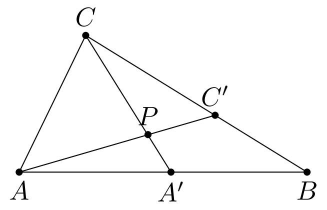
Aufgabe 28/72
Welche Zahl ist größer, 99! oder $33^9 9$?

Durch vollständige Induktion beweisen wir, dass für jede natürliche Zahl n gilt $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$. Für $n = 99$ folgt daraus die Behauptung $99! > 33^{99}$.
1 Für $n = 1$ gilt $1! > \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$.
2. Gilt für irgend ein k, dass $k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$ ist, so gilt auch

$$(k+1)! = k!(k+1) > \left(\frac{k}{3}\right)^k (k+1) = \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \frac{3k^k}{(k+1)^k} = \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$

(die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass der Nenner des letzten Bruches bekanntlich für wachsende k monoton wachsend gegen $e < 3$ strebt, also immer kleiner als 3 ist, womit der Bruch selbst größer als 1 ist). Damit ist der Beweis geliefert.

Aufgabe 29/72
Gegeben sei das Dreieck ABC mit unterschiedlich langen Seiten, wobei AC die kürzeste sei. Auf den Seiten AB und CB liegen im Abstand AC von A und C die Punkte A' bzw. C'. Der Punkt P sei der Schnittpunkt der Diagonalen im Viereck $AA'C'C$. Es ist zu beweisen, dass unter diesen Bedingungen die Flächen der Dreiecke $Aa'P$ und $CC'P$ niemals gleich sein können.



Angenommen, die beiden Flächen wären gleichgroß. Dann gälte

$$\frac{1}{2}AP \cdot PA' \sin\measuredangle APA' = \frac{1}{2}CP \cdot PC' \sin\measuredangle CPC'$$

Wegen $\measuredangle APA' = \measuredangle CPV'$ (beide sind Scheitelwinkel, Abbildung) folgt daraus

$$AP \cdot PA' = CP \cdot PC' \qquad ; \qquad \frac{AP}{CP} = \frac{PC'}{PA'}$$

Die beiden Dreiecke stimmen also in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten überein, d.h., sie sind einander ähnlich. Da sie zudem in einer Seite übereinstimmen; es ist $AA' = CC' = AC$, sind sie sogar kongruent. Daraus folgt $AP = CP$ und $PA' = PC'$.
Das heißt aber, das Dreieck APC ist gleichschenklig mit der Basis AC, woraus $\measuredangle PAC = \measuredangle PCA$ folgt. Aus der Kongruenz ergibt sich weiter $\measuredangle PAA' = \measuredangle PCC'$. Damit ist

$$\measuredangle BAC = \measuredangle A'AP + \measuredangle PAC = \measuredangle C'CP\measuredangle PCA = \measuredangle BCA$$

Das heißt aber wieder nichts anderes als $AB = BC$ im Widerspruch zur Bedingung "mit unterschiedlich langen Seiten". Also ist die Annahme falsch, die Flächen sind verschieden groß.

Aufgabe 30/72
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b mit $ab > 0$ die Ungleichung

$$a^4 + 2a^3b - 6a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 > 0$$

erfüllt ist.

Ist wenigstens eine der beiden Zahlen a, b (etwa a) gleich 0, so ist

$$a^4 + 2a^3b - 6a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = b^4 > 0$$

Für $a, b \neq 0$ gilt, da das harmonische Mittel nie größer als das quadratische Mittel ist,

$$\frac{2|a||b|}{|a| + |b|} \leq \sqrt{\frac{|a|^2 + |b|^2}{2}}$$

Durch Quadrieren (beide Seiten der Ungleichung sind positiv !) und Multiplikation mit $2(|a| + |b|)^2 > 0$ folgt daraus

$$8a^2b^2 \leq (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2|a||b|) = (a^2 + b^2)(a + b)^2$$

(wegen $ab > 0$ ist $|a| \cdot |b| = ab$). Durch Ausmultiplizieren und Subtrahieren von $8a^2b^2$ ergibt sich sofort die Behauptung.

Aufgabe 31/72
Man beweise: Erfüllten die reellen Zahlen a, b, c, d die vier Ungleichungen

$$\begin{aligned} a + b + c + d &> 0, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &> 0, \\ abc + abd + acd + bcd &> 0, \\ abcd &> 0 \end{aligned}$$

so sind a, b, c, d positive Zahlen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} p &= a + b + c + d > 0, \\ q &= ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0, \\ r &= abc + abd + acd + bcd > 0, \\ s &= abcd > 0 \end{aligned}$$

Dann sind a, b, c, d die Lösungen der Gleichung $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ (nach dem Vietaschen Wurzelsatz). Angenommen, wenigstens eine der Zahlen (etwa a) sei nicht positiv; dann ist wegen $abcd > 0$ diese Zahl sogar negativ. Damit folgt

$$a^4 > 0; \qquad -p^3 > 0; \qquad qa^2 > 0; \qquad s > 0$$

also $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s > 0$ im Widerspruch zum Wurzelsatz des Vieta. Also ist die Annahme falsch, d.h., keine der Zahlen a, b, c, d ist nicht positiv - jede der Zahlen a, b, c, d ist positiv!

Aufgabe 32/72
Ist n eine natürliche Zahl mit der Quersumme m, so ist die Differenz $n - m$ bekanntlich stets ohne Rest durch 9 teilbar.
Es erhebt sich die Frage, ob umgekehrt jede durch 9 teilbare Zahl $k \leq 900$ eine Darstellung der Form $n - m$ besitzt?

Wenn es für jede durch 9 teilbare Zahl $k \leq 900$ eine solche Darstellung gibt, dann muss $n < 1000$ sein; denn aus $k = n - m$ folgt $k + m = n$, für eine vierstellige Zahl n ist aber $m \leq 36$.
Es sei also $n = 100n_2 + 10n_1 + n_0$, wobei n_2, n_1 und $n : 0$ natürliche Zahlen zwischen 0 und 9 (beide einschließlich) sind. Dann ist $m = n_2 + n_1 + n_0$, also

$$k = n - m = 99n_2 + 9n_1 \qquad ; \qquad \frac{k}{9} = \frac{n-m}{9} = 11n_2 + n_1$$

Demnach kann man diejenigen Zahlen k nicht in der Form $n - m$ darstellen, deren 9. Teil nicht in der Form $11n_2 + n_1$ mit $n_1; n_2 \leq 9$, natürlich darstellbar ist. Das sind aber genau die Zahlen, bei denen n_1 oder n_2 gleich 10 wäre, also

$$10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98; 109; 110$$

mit k = $90; 189; 288; 387; 486; 585; 684; 783; 882; 981; 990$ (die letzten beiden angegebenen Zahlen entsprechen bereits nicht mehr der Aufgabenstellung).

Aufgabe 33/72
Man finde alle positiven ganzzahligen Lösungen $(a; b; k)$ des Systems

$$a = b^{k+1} \quad (1) \qquad ; \qquad a^b = b^a \quad (2)$$

Trivial ist die Lösung $a = b = 1$, k beliebig. Um weitere Lösungen zu finden, setzt man (1) in (2) ein. Es folgt

$$(b^{k+1})^b = b^{(b^{k+1})} \qquad ; \qquad b^{b^{k+1}} = b^{(b^{k+1})}$$

also $b(k+1) = b^{k+1} = b \cdot b^k$, $k + 1 = b^k$ (wegen $b \neq 0$). Damit ist $b = \sqrt[k]{k+1}$.
Für $k = 1$ ist offenbar $b = 2$ und damit $a = 4$. Eine Lösung ist also $(a; b; k) = (4; 2; 1)$. Dass dies auch die einzige nicht triviale ist, ergibt folgende Überlegung:
Es ist

$$1 < \sqrt[k+1]{k+2} < \sqrt[k]{k+1}$$

Da $k \geq 1$ ist, ist, nämlich $k + 2 > 1$ und damit auch jede Wurzel aus $k + 2$. Ferner ist

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < k + 1$$

für $k \geq 2$ (für $k = 1$ ergibt sich die Gültigkeit der Ungleichung unmittelbar durch Nachrechnen). Daraus folgt

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k < k + 1 \quad \to \quad (k+2)^k < (k+1)^k(k+1) = (k+1)^{k+1}$$

$$\sqrt[k(k+1)]{(k+2)^k} < \sqrt[k(k+1)]{(k+1)^{k+1}} \quad \to \quad \sqrt[k+1]{k+2} > \sqrt[k]{k+1}$$

Aufgabe 34/72
Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Zahl $k = 46^{2n} - 12^{2n}$ durch 1972 teilbar ist.

Es ist
$$k = 46^{2n} - 12^{2n} = 2^{2n}(23^{2n} - 6^{2n}) = 4^n[(23^n)^2 - (6^n)^2] = 4^n(23^n + 6^n)(23^n - 6^n)$$
Die Zahl k ist also sicher durch 4 teilbar. Weiter ist
$$23^n - 6^n = (17+6)^n - 6^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 17^i 6^{n-i} - 6^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 17^i 6^{n-i}$$
d.h., die Zahl k ist durch 17 teilbar. Schließlich ist
$$23^n - 6^n = (29-6)^n - 61n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 29^i 6^{n-i} - 6^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 29^i 6^{n-i}$$
d.h., die Zahl k ist durch 29 teilbar. Damit ist aber k durch $4 \cdot 17 \cdot 29 = 1972$ teilbar.

Aufgabe 35/72
Man beweise, dass $1973^{1973} - (1+9+7+3)$ keine Primzahl ist!

Es ist
$$z = 1973^{1973} - (1+9+7+3) = 1973^{1973} - 20 \equiv (-1)^{1973} - (-1) \equiv (-1) - (-1) \equiv 0 \pmod 3$$
Oder:
$$z = 1973^{1973} - (1+9+7+3) = 1973^{1973} - 20 \equiv (-1)^{1973} - (-1) \equiv (-1) - (-1) \equiv 0 \pmod 7$$
Das heißt, $1973^{1973}|(1+9+7+3)$ ist sowohl durch 3 als auch durch 7 teilbar, also keinesfalls Primzahl.

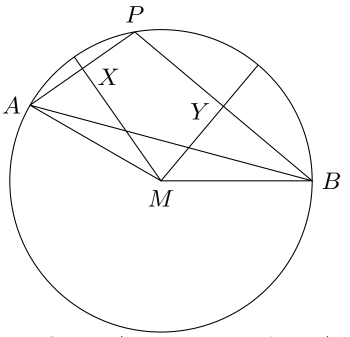
Aufgabe 36/72
Gesucht sind alle vierstelligen Primzahlen mit; den folgenden Eigenschaften:

1. Alle Ziffern der dezimalen Darstellung sind voneinander verschieden.
2. Zerlegt man die Zahl in der Mitte in zwei zweistellige Zahlen, so sind beide Zahlen Primzahlen, deren jede die Quersumme 10 hat.
3. Die letzten beiden Stellen sind; jede für sich; ebenfalls Primzahlen.

Wir ermitteln zunächst diejenigen zweistelligen Zahlen, deren Quersumme 10 ist:
$$19; 28; 37; 46; 55; 64; 73; 82; 91$$
Unter ihnen sind nur drei Primzahlen: $19; 37; 73$.
Da 1 und 9 keine Primzahlen sind, kommen als zweite der zweistelligen Primzahlen nur 37 und 73 in Frage. Dann muss wegen Bedingung 1 die erste der beiden zweistelligen Primzahlen die Zahl 19 sein. Es wären also zunächst die beiden Zahlen 1937 und 1973 als Lösung möglich; 1937 ist aber keine Primzahl: $1937 = 13 \cdot 449$. Damit bleibt als einzige Lösung die Primzahl 1973.

2.13 Aufgaben und Lösungen 1973

Aufgabe 1/73
Fällt man in einem gegebenen Kreisausschnitt von einem beliebigen Punkt des Bogens Lote auf die den Ausschnitt begrenzenden Radien, so ist der Abstand der Fußpunkte voneinander unabhängig von der Wahl des Punktes. Man beweise diesen Satz!



Es sei P der beliebige Punkt des Bogens, X und Y seien die Fußpunkte der Lote (Abbildung). Ferner seien A und B die Schnittpuukte der über X bzw. Y hinaus verlängerten Lote mit dem Umfang des Kreises um den Mittelpunkt M mit dem Radius r des Kreisausschnittes. Dann gilt

1. $\frac{PX}{PA} = \frac{PY}{PB} = \frac{1}{2}$, da $\measuredangle PXM = \measuredangle AXM = 90° = \measuredangle PYM = \measuredangle BYM$, $AM = PM = BM = r$ ist (Kongruenz der Dreiecke AXM und PXM' bzw. BYM und PYM). Demnach gilt (nach einem Strahlensatz): $XY = \frac{1}{2}AB$.

Weiter gilt 2. $\measuredangle XPY = 180° - \measuredangle XMY$ =konstant. (nach dem Winkelsummensatz im Viereck). Also ist auch AB konstant und unabhängig von der Lage des Punktes P. Aus 1. und 2. folgt unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe 2/73
Man zeige, dass $971^{130} + 970^{65}$ keine Quadratzahl ist!

Es ist

$$971^{130} = (971^{65})^2 < n = 971^{130} + 970^{65} \qquad \text{und}$$
$$n = 971^{130} + 970^{65} < (971^{65})^2 + 2 \cdot 971^{65} + 1$$

Das heißt aber, n liegt zwischen den Quadraten der zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 971^{65} und $971^{65} + 1$, kann also nicht selbst Quadrat einer natürlichen Zahl sein.

Aufgabe 3/73
Es ist zu untersuchen, für welche reelle Zahl a das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = z \qquad ; \qquad x + y + z = a$$

genau eine reelle Lösung $(x; y; z)$ hat. Diese Lösung ist zu finden.

In dem gegebenen System treten die Variablen x und y symmetrisch auf. Deshalb ist für die geforderte Eindeutigkeit der Lösung notwendig, dass $x = y$ ist. (da sonst mit $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ auch $x = y_0$, $y = x_0$, $z = z_0$ Lösung wäre). Damit nimmt das System die Form

$$2x^2 = z \qquad ; \qquad 2x + z = a$$

an. Durch Elimination von z folgt $2x^2 + 2x - a = 0$. Damit auch diese Gleichung nur eine einzige reelle Lösung hat, ist notwendig, dass die Diskriminante $D = \frac{2a+1}{4} = 0$ ist. Daraus folgt unmittelbar $a = -\frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$ und weiter $y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4/73
Einem Kreis sei ein regelmäßiges Dreieck ABC einbeschrieben, CD sei eine Sehne des Kreises, die die Dreieckseite AB schneidet. Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen $AB + BD = CD$ ist.

Man ziehe zu CD eine Parallele durch B, die die Verlängerung von AD in E schneidet. Dann gilt:

1. $\measuredangle BED = \measuredangle CDA$, (Winkel an geschnittenen Parallelen); $\measuredangle CDA = \measuredangle CBA$, (Peripheriewinkel über AC), also $\measuredangle BED = \measuredangle CBA = 60°$.

2. $\measuredangle CDA = \measuredangle CBA = 60°$, (Peripheriewinkel über AC), $\measuredangle BDC = \measuredangle BCA = 60°$, (Peripheriewinkel über BC) also $\measuredangle EDB = 180° - \measuredangle CDA - \measuredangle BDC = 60°$.

Das heißt aber, das Dreieck BED ist gleichseitig, es ist $DE = BE = BD$. Weiter folgt daraus, dass $\triangle\ ABE \cong CBD$ ist. Beide Dreiecke stimmen nämlich in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein: $AB = BC$, $BE = BD$, $\measuredangle CBD = 60° + \measuredangle ABD = \measuredangle ABE$.
Demnach ist $CA = AE = AD + DE = AD + BD$.

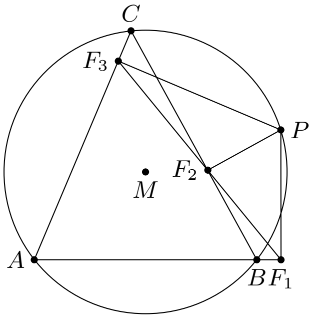
Aufgabe 5/73
Man bestimme alle Primzahlen der Form $p = x^4 + 4y^4$, wobei x und y natürliche Zahlen sind.

Es ist
$$p = x^3 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$
Da p Primzahl sein soll, muss einer der beiden Faktoren gleich 1, der andere gleich p sein.
Wegen
$$x^2 + 2y^2 - 2xy < x^2 + 2y^2 + 2xy \quad \text{und} \quad 1 < p \quad \text{ist} \quad x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$$
Nun ist
$$x^2 + 2y^2 - 2xy = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 = (x - y)^2 + y^2 \quad \text{also} \quad 0 \leq (x - y)^2 = 1 - y^2$$
woraus entweder $x = 1; y = 0$ oder $x = 1; y = 1$ folgt. Die Lösung $x = 1; y = 0$ kommt nicht in Frage, da sich daraus $p = 1$ ergäbe und 1 keine Primzahl ist. Die Lösung $x = 1, y = 1$ führt auf $p = 5$. In der Tat ist $p = 5$ Primzahl und somit die einzige, da alle anderen Zahlen; wie aus dem Rechengang folgt; zusammengesetzte Zahlen wären.

Aufgabe 6/73
Man gebe alle reellen Lösungen des Gleichungssystems an:
$$x^2 + y^2 = 8 \quad (1)$$
$$x^2y^2 - z^2 = 16 \quad (2)$$
$$\sin(x^2 - 2y) = z \quad (3)$$

Angenommen, $(x; y; z)$ sei eine reelle Lösung. Dann gilt sicher $(x - y)^2 \geq 0$, also $8 = x^2 + y^2 \geq 2xy$ und $(x + y)^2 \geq 0$, also $8 = x^2 + y^2 \geq -2xy$; folglich $|xy| \leq 4$ und $x^2y^2 \leq 16$.
Wegen (2) ist aber $x^2y^2 = 16 + z^2$, damit folgt $z = 0$, wodurch man aus (1) und (2) $x^2 = y^2 = 4$ erhält.
Als Lösungen kommen also nur in Frage $(2; 2; 0)$, $(2; -2; 0)$, $(-2; 2; 0)$, $(-2; -2; 0)$.
Für $(2; -2; 0)$ und $(-2; -2; 0)$ ist (3) nicht erfüllt; es ist nämlich $2\pi < 8 = x^2 - 2y < 3\pi$, also $\sin(x^2 - 2y) \neq 0 = z$.
Für die beiden anderen Tripel sind aber alle Gleichungen erfüllt. Damit sind $(2; 2; 0)$ und $(-2; 2; 0)$ die einzigen Lösungen des Gleichungssystems.

Aufgabe 7/73
Es ist zu beweisen: Fällt man von einem beliebigen Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks Lote auf die Dreiecksseiten (bzw. deren Verlängerungen), so liegen die Fußpunkte der Lote auf einer Geraden.



Wie verwenden die Bezeichnungen der Abbildung. Da $ABPC$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\measuredangle BPC = 180° - \alpha$.
Da $\measuredangle AF_1P + \measuredangle AF_3P = 90° - 90° = 180°$ ist, ist auch AF_1PF_3 ein Sehnenviereck: $\measuredangle F_1PF_3 = 180° - \alpha$.
Demnach ist $\measuredangle BPC = \measuredangle F_1PF_3$ und $\measuredangle F_1PB = \measuredangle F_3PC$. Da $\measuredangle CF_2P + \measuredangle CF_3P = 180°$ gilt, ist auch CF_2PF_3 ein Sehnenviereck, und nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\measuredangle CF_2F_3 = \measuredangle CPF_3$.
Entsprechend folgt $\measuredangle BF_2F_1 = \measuredangle BPF_1$.

Da die Punkte B, F_2 und C auf einer Geraden liegen und die Winkel BF_2F_1 und CF_2F_3 ihrer Lage nach Scheitelwinkel und einander gleich sind, liegen auch F_1, F_2 und F_3 auf einer Geraden.

Aufgabe 8/73
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n + \ln n! \leq n[\ln(x_1 + 2x_2 + ... + n_x) - \ln n]$$

für beliebige positive, reelle Zahlen $x_1; x_2; ...; x_n$ (mit $n \geq 1$) gilt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Bekanntlich gilt für beliebige positive reelle Zahlen $y_1; y_2; ...; y_n$ $(n \geq 1)$ die Ungleichung

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 y_3 ... y_n} \leq \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n)$$

wobei Gleichheit genau für $y_1 = y_2 = ... = y_n$ eintritt.
Setzt man $y_i = ix_i$ $(i = 1; 2; ...; n)$, so folgt

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n \cdot n!} \leq \frac{1}{n}(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n)$$

Durch Logarithmieren der beiden (positiven!) Seiten der Ungleichung zur Basis e folgt nun

$$\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n \cdot n!} \leq \ln \left[\frac{1}{n}(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n)\right]$$

$$\frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 x_3 ... x_n \cdot n!) \leq \ln(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n) - \ln n$$

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + ... + \ln x_n + \ln n! \leq n[\ln(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n) - \ln n]$$

Gleichheit gilt genau für $x_1 = 2x_2 = ... = nx_n$.

Aufgabe 9/73
Man bestimme das Minimum der Funktion $y = x^{10} - 1 - \sqrt{2x^{10}} - 1$ ohne dazu Hilfsmittel der Differentialrechnung zu verwenden.

Wir führen den Parameter $t = \sqrt{2x^{10} - 1}$ ein. Dann ist

$$x^{10} = \frac{t^2 + 1}{2} \qquad ; \qquad y = \frac{t^2 + 1}{2} - 1 - t = \frac{(t-1)^2 - 2}{2}$$

Offensichtlich wird wegen $(t-1)^2 \geq 0$ das Minimum für $t - 1 = 0$, also für $t = 1$ angenommen. Dieser Wert ist tatsächlich möglich, es ergibt sich $x_{1;2} = \pm 1; y_{min} = -1$.

Aufgabe 10/73
Gegeben sei eine natürliche Zahl n, die in dezimaler Schreibweise k-stellig sei. 300 dieser k Stellen seien mit Einsen besetzt, der Rest mit Nullen. Man beweise, dass n keine Quadratzahl ist.

Da die Quersumme q der natürlichen Zahl n sich als Summe von 300 Einsen ergibt, ist $q = 300$. Daraus folgt, dass n zwar durch 3, nicht aber durch 9 teilbar ist.
Da jede Quadratzahl jeden Primfaktor in gerader Potenz enthält, ist damit bereits bewiesen, dass n keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 11/73
Ein Eisenbahnzug fährt an einem Kilometerstein mit einer zweistelligen Kilometerzahl vorüber. Nach der Zeit Δt_1 fährt er an einem weiteren Kilometerstein vorbei, auf dem die gleichen Ziffern mit vertauschter Reihenfolge stehen.

Schließlich trifft er nach der weiteren Zeit $\Delta t_2 = \Delta t_2$ auf einen dritten Kilometerstein, dessen Angabe gleich der ersten Zahl mit dazwischengesetzter Null ist.
Die Durchschnittsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 während der Zeiten Δt_1 bzw. Δt_2 sind die gleichen: $v - 1 = v_2$.
Wie lauten die Zahlen auf den Kilometersteinen?

Da $v_1 = v_2$ und $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ist, gilt $\Delta s_1 = v_1 \Delta t_1 = v_2 \Delta t_2 = \Delta s_2$.
d.h., die beiden Strecken zwischen den drei Kilometersteinen sind einander gleich. Die Zahlen auf den Kilometersteinen bilden also eine arithmetische Folge 1. Ordnung.
Bezeichnet man mit $10a + b$ die erste Zahl ($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$, a, b ganz), so ist nach den Angaben der Aufgabe $10b + a$ die zweite (woraus sofort $b \neq 0$ folgt) und $100a + b$ die dritte, und es gilt

$$100a + b - 10b - a = 10b + a - 10b - b \rightarrow b = 6a$$

Wegen der getroffenen Einschränkungen für a und b kommt als Lösung dieser diophantischen Gleichung nur $a = 1, b = 6$ in Frage. Die Zahlen an den Kilometersteinen sind demnach 16, 61, 106 (die Differenz ist 45).

Aufgabe 12/73
Man zeige, dass es kein Polynom $P(x)$ zweiten Grades gibt, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$P(x) \equiv 0 \pmod 8 \text{ für } x \equiv 1 \pmod 2 \quad (1)$$
$$P(x) \equiv 1 \pmod 8 \text{ für } x \equiv 0 \pmod 2 \quad (2)$$

Wir nehmen an, es gäbe ein Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$, dass die Bedingungen (1) und (2) der Aufgabe erfüllt. Für $x = 0$ gilt dann

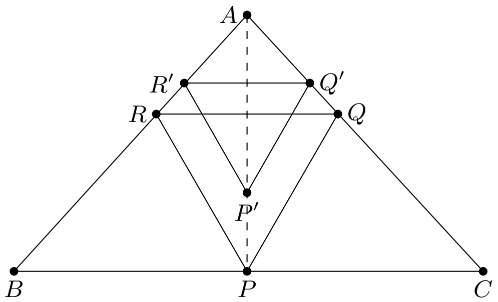
$$ax^2 + bx + c \equiv c \equiv 1 \pmod 8$$

für $x = 1$ bzw. $x = -1$ ergibt sich

$$a + b + c \equiv a + b + 1 \equiv 0 \pmod 8 \qquad ; \qquad a - b + c \equiv a - b + 1 \equiv 0 \pmod 8$$

also $2a + 2 \equiv 0 \pmod 8$, $a + 1 \equiv 0 \pmod 4$, $a \equiv -1 \pmod 4$ (1) und $2b \equiv 0 \pmod 8$ (2).
Für $x = 2$ erhält man $4a + 2b + 1 \equiv 1 \pmod 8$ und mit Hilfe von (2): $4a \equiv 0 \pmod 8$ (3).
Die Kongruenzen (1) und (3) stellen aber einen Widerspruch dar (nach (1) ist a ungerade, nach (3) aber gerade). Demnach ist die Annahme falsch; es gibt kein Polynom mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 13/73
Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c. Gesucht ist das gleichseitige Dreieck PQR so, dass $QR \parallel a$ ist und P auf a, Q auf b, R auf c liegt.



Man konstruiert zunächst ein dem gesuchten Dreieck ähnliches Dreieck $P'Q'R'$ so, dass $Q'R' \parallel a$ ist und Q' auf b, R' auf c liegt. Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Ähnlichkeitszentrum A überführt man dieses Dreieck in das gesuchte.

Konstruktionsbeschreibung: 1. Ziehe zu a eine Parallele, die b in Q' und c in R' schneidet.
2. Konstruiere über $Q'R'$ in bekannter Weise nach der Seite, auf der a liegt, das gleichseitige Dreieck $Q'R'P'$.
3. Der Schnittpunkt der Geraden AP' mit a ist P.
4. Die Schnittpunkte der Parallelen durch P zu $P'Q'$ und $P'R'$ mit b bzw. c sind Q bzw. R (Abbildung)

Aufgabe 14/73
Es seien a und b je eine der zehn Ziffern $0; 1; ...; 9$. Wieviele verschiedene Zahlen der Form *ababab* sind möglich? Welche Primzahlen sind Teiler jeder dieser Zahlen?

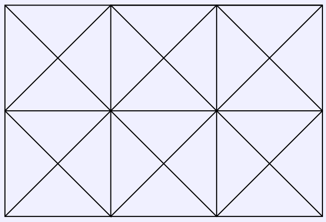
Da man für jede der beiden Variablen a und b zehn verschiedene Ziffern einsetzen kann, gibt es insgesamt $10^2 = 100$ verschiedene Möglichkeiten (Anzahl der Variationen von $n = 10$ Elementen zur 2. Klasse mit Wiederholung).
Darunter befindet sich auch die Zahl 000 000. Abgesehen von diesem Trivialfall ist die kleinste dieser Zahlen die Zahl 010 101; alle anderen Zahlen sind Vielfache dieser Zahl, enthalten also auch die in ihr enthaltenen Primfaktoren. Die Primfaktorzerlegung von 010 101 liefert

$$010101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$$

Die nichttrivialen Zahlen enthalten also sämtlich die Primzahlen $3; 7; 13; 37$ als Teiler.

Aufgabe 15/73

Wieviele verschiedene Streckenzüge sind notwendig, wenn man das in der Abbildung dargestellte Muster nachzeichnen will, ohne eine Strecke zweimal zu zeichnen?



Das Muster stellt einen Graphen mit insgesamt 18 Knoten und 41 Kanten dar. Da in 10 Knoten eine ungerade Anzahl von Kanten zusammentrifft, sind mindestens 5 Streckenzüge notwendig; jeder dieser 10 Knoten ist nämlich entweder Anfangs- oder Endpunkt eines Streckenzuges.
Dass nicht mehr als 5 Streckenzüge erforderlich sind, beweist man durch Angabe von 5 Streckenzügen, durch die das Muster nachgezeichnet wird. Dazu denken wir uns die Knoten zeilenweise von links nach rechts und von oben nach unten nummeriert. Die Streckenzüge werden durch Angabe der Knotennummern dargestellt.
1.Zug: 1-5-9-13-17-14-11-7-3-6-9-12-15-16-17-18-11-4-3-2-1-8-9-10-11
2.Zug: 4-7-10-13-16-12-8-5-2-6-10-14-18
3.Zug: 2-9-16
4.Zug: 3-10-17
5.Zug: 8-15
Selbstverständlich leisten auch andere Streckenzüge das Verlangte. Es sind also genau 5 Züge erforderlich.

Aufgabe 16/73 Man beweise ohne Hilfsmittel der Differentialrechnung, dass für beliebiges reelles c die Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$$

Es ist

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1^2 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

Wegen $0 \leq \sin^2(2x) \leq 1$ folgt daraus sofort

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) = \sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$$

Die Grenzen werden offensichtlich für die Werte $x_1 = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}+k)$ (untere Grenze), $x_2 = \frac{1}{2}k\pi$ (obere Grenze), $k = 0; \pm 1; \pm 2; ...$ angenommen.

Aufgabe 17/73

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k x^k$$

ein Polynom 5.Grades. Man bestimme ganzzahlige Koeffizienten $a_k > 0$ derart, dass höchstens einer von ihnen durch 120 teilbar ist, $f(x)$ aber für alle ganzzahligen $x >= 1$ durch 120 teilbar ist.

Es ist $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Das Polynom ist sicher dann für alle ganzzahligen $x \geq 1$ durch 120 teilbar, wenn man es als ein Produkt von 5 aufeinanderfolgenden positiven, ganzen Zahlen darstellen kann. Unter 5 aufeinanderfolgenden ganzen, positiven Zahlen ist nämlich stets wenigstens eine durch 2, wenigstens eine durch 3, wenigstens eine durch 4 und genau eine durch 5 teilbar. Damit bietet sich eine Darstellung der Form

$$f_1(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + a_0 \qquad \text{oder} \qquad f_2(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$$

an. Man erhält

$$f_1(x) = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x + 120$$

($a_0 = 120$ ergibt sich aus der Überlegung, dass a_0 durch 120 teilbar sein muss),

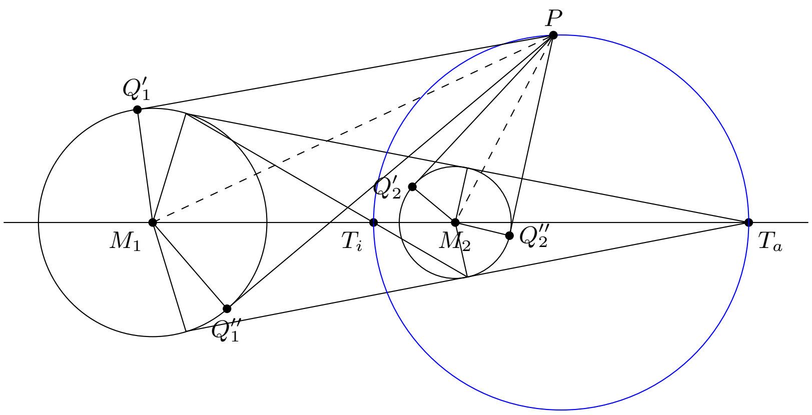
$$f_2(x) = x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120$$

Einen allgemeinen Ansatz erhält man mit

$$f_n(x) = (x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)(x+n+4)(x+n+5)$$

mit n als nichtnegativer, ganzer Zahl.

Aufgabe 18/73
Man finde die Menge aller der Punkte in einer Ebene, von denen aus zwei gegebene Kreise der Ebene unter gleichen Winkeln erscheinen.



M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der gegebenen Kreise, r_1 und r_2 entsprechend ihre Radien (Abbildung). Zieht man von einem Punkt P der gesuchten Punktmenge die Tangenten PQ_1', PQ_1'' und PQ_2', PQ_2'' an die beiden Kreise, so gilt nach Voraussetzung

$$\alpha = \measuredangle Q_1'PQ_1'' = \measuredangle Q_2'PQ_2'' \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\alpha}{2} = \measuredangle Q_1'PM_1)\measuredangle Q_2'PM_2$$

Da außerdem noch $\measuredangle M_1Q_1'P = \measuredangle M_2Q_2'P = 90°$ ist, folgt, dass $\triangle\ M_1Q_1'P \sim\triangle\ M_2Q_2'P$ ist. In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis homologer Strecken gleich, deshalb gilt

$$PM_1 : PM_2 = r_1 : r_2$$

Die Menge aller der Punkte, deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten M_1 und M_2 in einem festen Verhältnis $k = r_1 : r_2$ stehen, ist aber der Kreis des Apollonius mit T_iT_a als Durchmesser, wobei T_i und T_a die Strecke M_1M_2 innen und außen im Verhältnis $r_1 : r_2$ teilen.

Umgekehrt genügen alle Punkte dieses Kreises den gegebenen Bedingungen, sofern sie nicht im Inneren oder auf der Peripherie eines der gegebenen Kreise liegen. Somit stellt dieser Kreis die gesuchte Punktmenge dar.

Aufgabe 19/73
Man bestimme alle Primzahlen p, für $P = 20p^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Für jede natürliche Zahl n gilt $n \equiv 0 \pmod 3$ oder $n \equiv \pm 1 \pmod 3$. Gilt $n \equiv \pm 1 \pmod 3$, so gilt auch $n^2 \equiv 1 \pmod 3$, $20n^2 \equiv 20 \equiv -1 \pmod 3$ und damit $20n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$.
Wenn es also ein p gibt, so dass $P = 20p^2 + 1$ eine Primzahl ist, so muss $p \equiv 0 \pmod 3$ sein.
Einzige Primzahl p mit dieser Eigenschaft ist $p = 3$. Tatsächlich ist $P = 20 \cdot 3^3 + 1 = 181$ eine Primzahl.

Aufgabe 20/73
Gegeben sind ein Kreis mit dem Radius r und ein dem Kreis einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck. Gesucht ist die Summe aus den Quadraten der Abstände eines beliebigen Punktes A auf der Peripherie des Kreises von den Eckpunkten des n-Ecks.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $n = 2k$ gerade ist. Dann gibt es zu jedem Eckpunkt P_m des n-Ecks einen diametral gegenüberliegenden Punkt P_{m+k} $(m \leq k)$. Die Punkte P_m, P_{m+k}, A bilden demnach ein Dreieck über dem Durchmesser, nach dem Satz des Thales also ein bei A rechtwinkliges Dreieck. Demnach ist:

$$AP_m^2 + AP_{m+k}^2 = 4r^2$$

Damit folgt für die Summe aller Abstandsquadrate (da $k = \frac{n}{2}$ derartige Punktpaare existieren) $S = 4kr^2 = 2nr^2$.
Ist nun $n = 2k+1$ ungerade, so bildet man zunächst ein regelmäßiges $2n$-Eck, indem man jeweils zwischen zwei Ecken eine weitere einfügt. Für dieses 2n-Eck ergibt sich auf die gleiche Weise $S = 4nr^2$. Kehrt man nunmehr zum n-Eck zurück, so ist diese Summe zu halbieren. Es gilt also allgemein $S = 2nr^2$.

Aufgabe 21/73
Man bestimme ein Polynom $P(x)$ kleinsten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, das für ungeradzahliges x stets durch 8 teilbar ist. Dabei soll $P(x)$ nicht für jedes ganzzahlige x durch 2 teilbar.

Zunächst ist klar, dass kein lineares Polynom die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllt. Setzt man nämlich in der Kongruenz $ax + b \equiv 0 \pmod 8$ nacheinander $x = 1$ und $x = -1$, so erhält man

$$a + b \equiv 0 \pmod 8 \qquad ; \qquad -a + b \equiv 0 \pmod 8$$

woraus $a \equiv b \equiv 0 \pmod 4$ folgt. Das heißt aber, dass das Polynom für beliebiges ganzzahliges x durch 2 teilbar ist.
Zum Auffinden eines Polynoms 2. Grades mit den geforderten Eigenschaften benutzen wir die folgende Tatsache: Es ist

$$1^2 \equiv (-1)^2 \equiv 3^2 \equiv (-3)^2 \equiv 1 \pmod 8$$

D.h., das Quadrat einer jeden ungeraden Zahl lässt beim Teilen durch 8 den Rest 1. Demnach gilt für das Polynom

$$P(x) = x^2 - c^2 \equiv 0 \pmod 8$$

wenn x und c ungerade Zahlen sind. Für gerade Zahlen x ist aber $x^2 \equiv 0 \pmod 2$, für ungerade Zahlen c gilt $c^2 \equiv 1 \pmod 2$. Folglich ist das Polynom $P(x) = x^2 - c^2$ mit ungeradem c nicht für alle ganzzahligen x durch 2 teilbar.

Aufgabe 22/73
Es ist zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl $n > 2$ gilt

$$5! \mid n^6 - 2n^5 - n^2 + 2n$$

Es ist

$$n^6 - 2n^5 - n^2 + 2n = n^5(n-2) - n(n-2) = (n-2)(n^5-n) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n^2+1)$$

Nun kann man folgende Teilbarkeitsbetrachtungen anstellen:
1. Nach dem Satz von Format gilt $5 \mid (n^5 - n)$.
2. Von den vier aufeinanderfolgenden Zahlen $(n-2)$,$(n-1)$,n,$(n+1)$ sind genau zwei durch zwei teilbar davon genau eine sogar durch 4, wenigstens eine ist durch 3 teilbar.
Daraus folgt, dass $n^6 - 2n^5 - n^2 + 2n$ durch $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$ teilbar ist.

Aufgabe 23/73
Man beweise: Wenn das Dreieck ABC mit den Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ bei C einen stumpfen Innenwinkel hat, dann hat die Gleichung $c = a\sin x + b\cos x$ keine Lösung in reellen Zahlen x.

Es sei γ der Innenwinkel bei C. Dann gilt nach dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
Wegen $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ist $\cos\gamma < 0$, also $c^2 > a^2 + b^2$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$. Andererseits folgt aus $c = a\sin x + b\cos x$, dass

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x$$

ist. Nun kann man setzen

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \qquad ; \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$$

denn es ist $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ Dann ergibt sich aber

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \sin\varphi + x > 1$$

Die letzte Ungleichung gilt aber für kein reelles x und φ. Demnach hat die Gleichung keine reelle Lösung x.

Aufgabe 24/73
Eine Funktion $f(x)$ habe die folgenden Eigenschaften:

1. Für reelle x ist $f(x) > 0$.
2. Für reelle x_i ist $f(x_1 + x_2) = 2 \cdot f(x_1)f(x_2)$.
3. Es ist $f(2) = 2$.

Man bestimme die Funktionswerte $f(1)$, $f(0)$, $f(3)$ und $f(6)$! Um welche Funktion handelt es sich?

Wegen $2 = f(2) = f(1+1) = 2 \cdot f(1) \cdot f(1)$ ergibt sich sofort $[f(1)]^2 = 1$, woraus wegen $f(x) > 0$ folgt, dass $f(1) = 1$ ist.
Auf analoge Weise folgt $1 = f(1) = f(1+0) = 2 \cdot f(1) \cdot f(0)$, also $f(0) = 0{,}5$. Weiter gilt $f(3) = f(2+1) = 2 \cdot f(2) \cdot f(1) = 4$, $f(6) = f(3+3) = 2 \cdot f(3) \cdot f(3) = 32$.

Skizziert man aus den berechneten Worten den Kurvenverlauf, so kommt man zu der Vermutung, dass es sich bei der Funktion um eine Exponentialfunktion $a \cdot b^x$ handeln könnte.
Tatsächlich gilt für eine solche Funktion für reelle x stets $f(x) > 0$ (Eigenschaft 1). Weiter gilt für sie

$$f(x_1 + x_2) = a \cdot b^{x_1+x_2} = a \cdot b^{x_1} \cdot b^{x_2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b^{x_1} \cdot a \cdot b^{x_2} = c \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Setzt man $c = \frac{1}{a} = 2$, also $a = 0{,}5$, so ist auch die Eigenschaft 2 erfüllt. Es bleibt also nur noch nachzuprüfen, ob Eigenschaft 3 bei einer solchen Funktion auftreten kann:
$0{,}5 \cdot b^2 = 2$ führt sofort zu $b = 2$. Die gesuchte Funktion ist also $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$. Einsetzen der Werte 0, 1, 3 und 6 für x bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 25/73
Man zeige, dass die Funktion
$$f(x) = x^{10} - x^9 + x^4 - x + 1$$
keine reelle Nullstellen hat!

Für $x < 0$ sind alle Glieder der Summe positiv, es ist also $f(x) > 0$. Für $x = 0$ und $x = 1$ ist $f(x) = 1 > 0$ (wie man durch Einsetzen leicht nachprüft). Es verbleiben für mögliche reelle Nullstellen daher nur noch die Intervalle $0 < x < 1$ und $1 < x$.
Es gilt, für die Untersuchung beider Intervalle geeignete Darstellungen der Funktion zu finden. Wenn $0 < x < 1$ gilt, so ist sicher $(1 - x^n) > 0$ und $x^n > 0$. Man versucht also, $f(x)$ in eine Summe derartiger Summanden oder in eine Summe aus Produkten derartiger Faktoren zu zerlegen:
$$f(x) = x^{10} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{10} + x^4(1 - x^5) + (1 - x) > 0$$
Wenn $1 < x$ gilt, ist sicher $x^n > 0$ und $(x^n - 1) > 0$. Also sucht man nach einer entsprechenden Zerlegung:
$$f(x) = x^{10} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x - 1) + x(x^3 - 1) + 1 > 0$$
somit ist bewiesen, dass $f(x) > 0$ für jedes x ist, dass also $f(x) = 0$ für kein reelles x gilt.

Aufgabe 26/73
Man konstruiere ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC aus den Strecken $AC = b$ und $c - a$ (wobei $c = AB, a = BC$ ist)!

Nach dem pythagoreischen Lehrsatz gilt für das rechtwinklige Dreieck ABC:
$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$$
Daraus folgt
$$\frac{c + a}{b} = \frac{b}{c - a}$$
Nach dem Strahlensatz konstruiert man die Strecke $c + a$ als vierte Proportionale aus den Strecken b und $c - a$. Wegen $2c = (c + a) + (c - a)$ kann man c durch Halbieren der Summe der Strecken $(c + a)$ und $(c - a)$ erhalten. Damit ist die Konstruktion des Dreiecks ABC in bekannter Weise möglich.
Die Konstruktion ist stets ausführbar, wenn $(c - a) < b$ ist; anderenfalls ist $c \geq a + b$, und die Dreiecksungleichung ist nicht erfüllt.

Aufgabe 27/73
Gegeben seien n positive Zahlen $a_1; a_2; ...; a_n$, so dass
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$$
ist. Man beweise, dass dann gilt
$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 2^n$$

Vorausgesetzt wird der Satz über die Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel aus n positiven Zahlen a_i (mit $i = 1; 2; ...; n$):
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$
Daraus folgt
$$\frac{1}{2}(1 + a_i) \geq \sqrt{1 \cdot a_i} \qquad ; \qquad (1 + a_i) \geq 2\sqrt{a_i} \quad \text{also}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq \prod_{i=1}^{n} 2\sqrt{a_i} = 2^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} = 2^n \sqrt{\prod_{i=1}^{n} a_i} = 2^n$$

Aufgabe 28/73
Für welche reellen Zahlen a und b hat die Gleichung

$$\frac{a}{b-x} - \frac{x}{b+x} = 1$$

genau eine reelle Lösung $x = 2$?

Löst man die gegebene Gleichung nach x auf, so ergibt sich

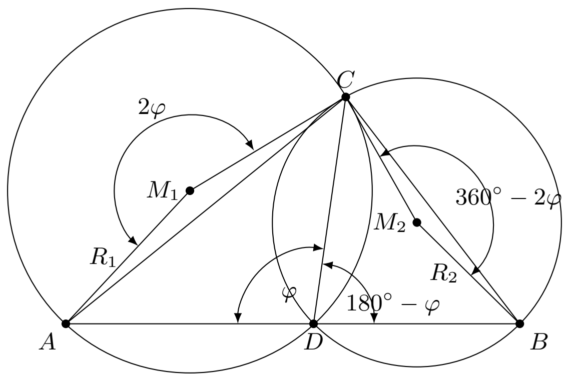
$$x_{1;2} = \frac{1}{4}(b - a \pm \sqrt{a^2 - 10ab + 9b^2}$$

Wenn genau eine Lösung existieren soll, muss die Diskriminante gleich null sein, woraus folgt, dass entweder $a = b$ oder $a = 9b$ ist. Für $a = b$ wäre $x = 0$, damit kommt nur $a = 9b$ in Frage. Daraus erhalten wir

$$x = \frac{1}{4}(b - 9b) = -2b = 2$$

also $b = 1$, $a = -9$. Demnach hat die gegebene Gleichung für $a = -9$, $b = 1$ genau die Lösung $x = 2$. Eine Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 29/73
Gegeben sei das Dreieck ABC. Auf der Strecke AB liege ein beliebiger Punkt D, durch den zwei Dreiecke ADC und BDC bestimmt sind.
Man beweise, dass das Verhältnis der Umkreisradien dieser Dreiecke konstant ist, also nicht von der Lage des Punktes D abhängt.



Wir wählen die Bezeichnungen gemäß der Abbildung. Dann gilt

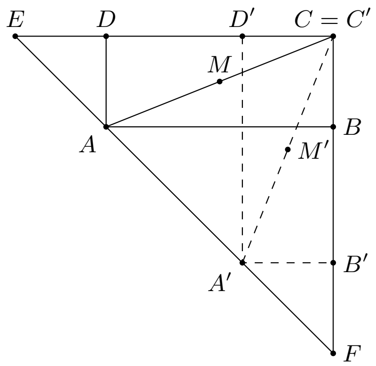
$$\measuredangle AM_1C = 2\varphi \qquad ; \qquad \measuredangle BM_2C = 360° - 2\varphi$$

(nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel) und damit

$$\frac{2R_1}{b} = \sin\varphi; \qquad \frac{2R_2}{a} = \sin(180° - \varphi) = \sin\varphi \quad \text{also} \quad \frac{2R_1}{b} = \frac{2R_2}{a}$$

Daraus folgt unmittelbar $R_1 : R_2 = b : a$ für jede beliebige Lage von D.

Aufgabe 30/73
Gegeben sind zwei Strecken a und b. Man konstruiere ein Rechteck $ABCD$ so, dass a sein Umfang und b Durchmesser des Umkreises ist.



Angenommen, das Rechteck $ABCD$ sei bereits konstruiert, durch den Punkt A sei eine Gerade gelegt, die mit den Rechteckseiten Winkel von 45° bildet (Abbildung). Dann gilt mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$ED + DC = AD + DC = \frac{a}{2} \quad ; \quad FB + BC = AB + BC = \frac{a}{2}$$

Damit ist die Konstruktion klar:

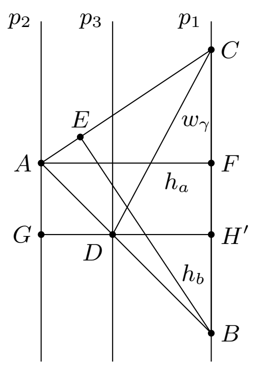
1. Man konstruiert ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\frac{a}{2}$.
2. Man schlägt um den Scheitelpunkt des rechten Winkels einen Kreis mit b als Radius. Ein Schnittpunkt mit der Hypotenuse ist A.
3. Man fällt von A die Lote auf die Katheten. Ihre Fußpunkte sind B und D. Der Scheitelpunkt des rechten Winkels ist C.

Determination: Ist $b < \frac{a}{4}\sqrt{2}$, so schneidet der Kreis um C die Hypotenuse nicht und es existiert kein Rechteck mit der geforderten Eigenschaft.
Ist $b = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, so existiert genau ein Rechteck, das ein Quadrat ist. Ist $\frac{a}{4}\sqrt{2} < b < \frac{a}{2}$, so schneidet der Kreis um C die Hypotenuse genau zweimal; es entstehen zwei Rechtecke, die (bis auf die Bezeichnungen) kongruent sind.
Ist $b > \frac{a}{2}$, so schneidet der Kreis um C die Hypotenuse nicht und es existiert kein Rechteck.

Aufgabe 31/73
Gesucht sind alle Primzahlen p, für die $p^4 - 1$ nicht durch 15 teilbar ist.

Wenn $p^4 - 1$ nicht durch 15 teilbar sein soll, so darf es nicht durch 3 oder nicht durch 5 teilbar sein. Nun gilt für jede natürliche Zahl $n \neq 0$ mod 3, dass $n \equiv \pm 1$ mod 3 und demnach $n^4 \equiv 1$ mod 3, $n^4 - 1 \equiv 0$ mod 3 ist.
Entsprechend gilt für jede natürliche Zahl $n \neq 0$ mod 5, dass $n \equiv \pm 1$ mod 5 oder $n \equiv \pm 2$ mod 5. in jedem Fall also $n^4 \equiv 1$ mod 5 und damit $n^4 - 1 \equiv 0$ mod 5 ist. Daraus folgt unmittelbar, dass nur die Primzahlen $p_1 = 3$ und $p_2 = 5$ als Lösung in Frage kommen. Die Probe beweist, dass diese beiden Zahlen tatsächlich das Verlangte leisten.

Aufgabe 32/73
Zu konstruieren ist ein Dreieck aus den Höhen h_a und h_b und der Winkelhalbierenden w_γ (wobei die übliche Bezeichnungsweise verwendet wird.)



Angenommen, das Dreieck sei bereits konstruiert. Dann gilt (Abbildung)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AG}{BH} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b}$$

wegen $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$, Strahlensatz, Satz über das Verhältnis der von der Winkelhalbierenden erzeugten Seitenabschnitte und wegen $a \cdot h_a = b \cdot h_b = 2A$.
Daraus folgt die Konstruktion:
1. Zeichne im Abstand $h : a$ ein Parallelenpaar p_1 und p_2!
2. Zeichne zwischen p_1 und p_2 eine Parallele p_3 so, dass der Abstand von p_1 sich zum Abstand von p_2 wie $h_a : h_b$ verhält.
3. Wähle auf p_1 beliebig den Punkt C und schlage um C den Kreis mit dem Radius $CD = w_\gamma$. Die Schnittpunkte mit p_3 sind D bzw. D'.
4. Trage in C an CD den von CD und p_1 gebildeten spitzen Winkel so an, dass der freie Schenkel nicht mit p_1 zusammenfällt. Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit p_2 ist A.
5. Ziehe durch A und D die Gerade; ihr Schnittpunkt mit p_1 ist B.

Determination: Der Punkt D' liefert ein kongruentes Dreieck mit entgegengesetztem Umlaufsinn. Die Konstruktion ist immer ausführbar, wenn $w_\gamma > h_a \cdot h_b : (h_a + h_b)$ ist; genau dann entsteht nämlich ein Punkt D mit $\measuredangle DCB < 90°$. Bis auf die erwähnte Kongruenz ist die Konstruktion dann auch immer eindeutig.

Aufgabe 33/73
Die diophantische Gleichung $ax + by = c$ mit $a; b; c; x; y$ ganzzahlig und $ggT(a,b) = 1$ habe zwei Lösungen $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$, für die gilt $x_1 = x_2 + 1$.
Man zeige, dass dann gilt $|b| = 1$ und $|a| = |y_2 - y_1|$.

Nach Aufgabenstellung gelten die drei Gleichungen

$$ax_1 + by_1 = c \quad (1)$$
$$ax_2 + by_2 = c \quad (2)$$
$$x_1 - x_2 = 1$$

Subtrahiert man (2) von (1) und setzt man (3) ein, so ergibt sich

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = a + b(y_1 - y_2) = 0 \text{ also } \quad b(y_2 - y_1) = a$$

Wegen $(a, b) = 1$ folgt sofort $|b| = 1$ und $|y_2 - y_1| = |a|$.

Aufgabe 34/73
Bei welchem der fünf platonischen Körper ist es möglich, alle Kanten in einem Zug (ohne Wiederholung einer Kante) zu durchlaufen?

Die Aufgabe stellt eine Variante des bekannten "Königsberger Brückenproblems" dar. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so gilt als Bedingung für die Lösbarkeit:
Fall 1: Ausgangspunkt und Endpunkt des Kantenzuges fallen zusammen; dann müssen alle Ecken von einer geradzahligen Anzahl von Kanten gebildet werden.
Fall 2: Ausgangspunkt und Endpunkt des Kantenzugs fallen nicht zusammen; dann müssen genau $n - 2$ Ecken von einer geradzahligen Anzahl von Kanten gebildet werden.
Da bei einem platonischen Körper alle Ecken untereinander gleichberechtigt sind, kommt Fall 2 nicht in Frage. Der einzige platonische Körper, der die Bedingung des Falles 1 erfüllt, ist das Oktaeder (jede Ecke wird von vier Kanten gebildet).

Aufgabe 35/73
Es ist zu beweisen, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Zahl der Gestalt 111...111000...000 gibt, die durch n teilbar ist.

Wir betrachten die $n+1$ Zahlen $1; 11; 111; ...; 111...1$ (wobei die letzte $n+1$ Stellen habe). Da es genau n verschiedene Restklassen mod 11 gibt, befinden sich unter diesen $n+1$ Zahlen genau zwei, die derselben Restklasse mod n angehören.
Es seien dies a und b, wobei ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit $a > b$ sei. Dann ist die Zahl $a - b$ ohne Rest durch n teilbar. Außerdem hat $a - b$ die gewünschte Form. War nämlich a k-stellig und b m-stellig (mit $m < k$ nach Voraussetzung), so enthält $a - b$ zunächst $k - m$ Stellen, die mit Einsen besetzt sind, und anschließend m mit Nullen besetzte Stellen.

Aufgabe 36/73
Aus einer Urne, in der sich insgesamt 53 schwarze und weiße Kugeln befinden, werden willkürlich vier Kugeln gezogen.
Dabei werden gezogene Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt. Wieviel Kugeln jeder Sorte müssten in der Urne sein, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder vier schwarze Kugeln oder zwei schwarze und zwei weiße Kugeln gezogen werden, einander gleich sein sollen?

Angenommen, in der Urne seien a schwarze und $b = 53 - a$ weiße Kugeln. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vier schwarze Kugeln gezogen werden,

$$W_{4s} = \frac{\binom{a}{4}}{\binom{53}{4}} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei schwarze und zwei weiße Kugeln gezogen werden,

$$W_{2s2w} = \binom{4}{2} \frac{\binom{a}{2}\binom{b}{2}}{\binom{53}{2}\binom{51}{2}} = 6 \cdot \frac{a \cdot (a-1) \cdot b \cdot (b-1)}{53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50}$$

(der Faktor $\binom{4}{2} = 6$ ergibt sich aus der Tatsache, dass die Kombination der schwarzen und weißen Kugeln auf $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Weisen möglich ist).
Ist nun $a \leq 1$, so ist $W_{4s} = 0$ und $W_{2s2w} = 0$, also $W_{4s} = W_{2s2w}$. Wir untersuchen nun den Fall $a \geq 2$. Aus $W_{4s} = W_{2s2w}$ folgt

$$a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) = 6a(a-1)b(b-1) \to (a-2)(a-3) = 6(53-a)(52-a)$$

Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung $a^2 - 125a + 3306 = 0$, die im Bereich $2 \leq a \leq 53$ nur die Lösung $a = 38$ hat. Für b erhält man damit $b = 15$.
Die Wahrscheinlichkeiten sind also genau dann gleich, wenn entweder weniger als zwei oder genau 38 schwarze Kugeln in der Urne sind.

2.14 Aufgaben und Lösungen 1974

Aufgabe 1/74
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die der Term

$$T(n) = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

ohne Rest durch 10 teilbar ist.

Offensichtlich ist $T(n)$ für beliebiges n stets ohne Rest durch 2 teilbar, da stets genau zwei der vier aufeinanderfolgenden Zahlen $n, (n+1), (n+2), (n+3)$ gerade und genau zwei ungerade sind; die Summe der Quadrate ist also stets eine gerade Zahl. Damit genügt es, zu untersuchen, für welche natürlichen Zahlen n der Term $T(n)$ ohne Rest durch 5 teilbar ist.
Ist $n \equiv k \pmod 5$, so ist

$$T(n) \equiv k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 + (k+3)^2 \equiv 4k^2 + 12k + 14 \equiv -k^2 + 2k - 1 \equiv -(k-1)^2 \pmod 5$$

Daraus folgt unmittelbar, dass $k = 1$ sein muss, wenn $T(n) \equiv 0 \pmod 5$ sein soll. Es sind also alle natürlichen Zahlen n der Form $n = 5m + 1$ mit m als natürlicher Zahl und nur diese Elemente der Lösungsmenge.

Aufgabe 2/74
Es sind alle Rechtecke mit folgender Eigenschaft zu finden: Die Seitenlängen kann man durch ganze Zahlen ausdrücken, deren Summe zahlenmäßig gleich der Fläche des Rechtecks ist.

Bezeichnet man die Seitenlängen des Rechtecks mit x und y, so führt die Bedingung der Aufgabe auf die diophantische Gleichung $2x + 2y = xy$. Daraus folgt

$$x = \frac{2y}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$$

Damit x ganzzahlig wird, muss $4 = k(y-2)$ sein, wobei k und $y-2$ ganze Zahlen sind; ferner muss $y > 0$ sein. Wegen $x > 0$ scheidet auch $y = 1$ aus, wegen $y - 2 <> 0$ auch $y = 2$. Damit verbleiben
1. $y = 3$ mit $x = 6$
2. $y = 4$ mit $x = 4$
3. $y = 6$ mit $x = 3$
Für $y > 6$ wird x nicht ganzzahlig. Es existieren also genau zwei verschiedene Rechtecke mit der geforderten Eigenschaft:
1.) Seitenlängen 3 und 6 und 2.) Seitenlängen 4 und 4 (Quadrat)

Aufgabe 3/74
Gesucht ist eine quadratische Matrix vom Typ 3 mit folgender Eigenschaft:
1. Ihre Elemente sind aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
2. Die Matrix stellt ein magisches Quadrat dar.
3. Die Determinante der Matrix ist gleich null.

Entsprechend der Bedingung 1 seien die Elemente der Matrix $k-4, k-3, ..., k, ...k+3, k+4$, wobei k eine noch zu bestimmende ganze Zahl ist. Die Summe dieser neun aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist $9k$.
Die Zeilensumme, die Spaltensumme und die Diagonalensumme muss stets, unabhängig von der Zeilen- bzw. Spaltennummer $\frac{1}{3} \cdot 9k = 3k$ sein (Bedingung 2). Damit kann man die folgende Anordnung der Elemente finden:

$$\begin{pmatrix} k-3 & k+2 & k+1 \\ k+4 & k & k-4 \\ k-1 & k-2 & k+3 \end{pmatrix}$$

Die Determinante D dieser Matrix ergibt sich nach der bekannten Regel zu $D = 72k$. Soll $D = 0$ sein, so muss $k = 0$ sein (Bedingung 3). Damit erhält man schließlich als eine Matrix, die die gestellten

Bedingungen erfüllt

$$\begin{pmatrix} -3 & +2 & +1 \\ +4 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & +3 \end{pmatrix}$$

Aus ihr gehen durch Symmetrie (Vertauschen der ersten und dritten Zeile bzw. Spalte, Spiegelung an den Diagonalen) oder durch Drehung noch sieben weitere hervor.

Aufgabe 4/74
In einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem sei eine Kurve durch die Gleichung

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{12}$$

gegeben. Gesucht sind alle Punkte der Kurve mit ganzzahligen Koordinaten.

Offensichtlich sind die Koordinaten $x_1 = 0$, $y_1 = 12$ und $x_2 = 12$, $y_2 = 0$ ganzzahlige Lösungen der gegebenen Gleichung, also erfüllen die Punkte $P_1/0;12)$ und $P_2(12;0)$ die gestellte Bedingung. Um weitere Punkte zu finden, lösen wir die Gleichung nach y auf.

$$\sqrt{y} = \sqrt{12} - \sqrt{x} \quad (1)$$
$$y = 12 - 4\sqrt{3x} + x \quad (2)$$

Aus (1) folgt bereits $0 \leq x; y \leq 12$, aus (2) folgt (wegen der geforderten Ganzzahligkeit von y), dass $\sqrt{3x}$ eine ganze Zahl ist, also $3x = k^2$ mit $k \in N$. Dann muss aber k ein Vielfaches von 3 sein. Daher kommen nur $k = 0$, $k = 3$ und $k = 6$ in Frage.
Für $k > 6$ ergäbe sich $x > 12$. Für $k = 0$ und $k = 6$ ergeben sich die bereits bekannten Punkte P_1 und P_2, für $k = 3$ folgt $x_3 = 3$, $y_3 = 3$ und somit $P_3(3;3)$.

Aufgabe 5/74
Es sei n eine natürliche Zahl. Wieviel Stellen hinter dem Komma (ohne nachfolgende Nullen) hat die Zahl 4^{-n}?

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, die Zahl 4^{-n} als Produkt aus einer natürlichen Zahl (die nicht durch 10 teilbar ist) und einer Zehnerpotenz mit negativem Exponenten zu schreiben. Zehnerpotenzen enthalten die Primfaktoren 2 und 5 stets in gleicher Anzahl.
Damit bietet sich die folgende Zerlegung an:

$$4^{-n} = 2^{-2n} = 2^{-2n} \cdot 5^{-2n} \cdot 5^{2n} = 5^{2n} \cdot 10^{-2n}$$

Da Potenzen von 5 den Primfaktor 2 nicht enthalten, ist keine Potenz von 5 durch 10 teilbar (jede Potenz von 5 endet mit 5 als letzter Stelle).
Folglich hat die Zahl 4^{-n} genau $2n$ Stellen hinter dem Komma.

Aufgabe 6/74
Es ist zu beweisen, dass aus der Gültigkeit der Beziehung

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos y \quad (1)$$

die Gültigkeit der Beziehung folgt

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(ny) \quad (2)$$

Löst man die Gleichung (1) nach x auf, so erhält man zwei komplexe Lösungen

$$x_{1;2} = \cos y \pm i \sin y$$

Nach dem Satz von Moivre ist

$$x_{1;2}^n = \cos(ny) \pm i \sin(ny)$$

Setzt man dies in Gleichung (2) ein, so ergibt sich

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \cos(ny) \pm i \sin(ny) + \frac{1}{\cos(ny) \pm i\sin(ny)} =$$

$$= \cos(ny) \pm i\sin(ny) + \frac{\cos(ny) \mp i\sin(ny)}{\cos^2(ny) + \sin^2(ny)} = 2\cos(ny)$$

Aufgabe 7/74
Man beweise, dass für $p \neq 3$ der Term $14p^2 + 1$ keine Primzahl liefert.

Ist $p \neq 3$, so ist $p \equiv \pm 1 \pmod 3$, also $p^2 \equiv +1 \pmod 3$.
Damit ist $14p^2 + 1 \equiv 14 \cdot 1 + 1 \equiv 15 \equiv 0 \pmod 3$.
Der Term $14p^2 + 1$ ist also für $p \neq 3$ stets durch 3 ohne Rest teilbar, mithin keine Primzahl.

Aufgabe 8/74
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\measuredangle BAC = \alpha \neq 90°$, $\measuredangle ABC = \beta \neq 90°$. Man beweise, dass

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$$

Wir bezeichnen die Höhe auf c mit h, die Projektionen von a bzw. b auf c mit p bzw. q. Dann gilt

$$\frac{\tan\alpha}{tan\beta} = \frac{\frac{h}{q}}{\frac{h}{p}} = \frac{p}{q} = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}$$

Mit Hilfe des Kosinussatzes erhält man

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad ; \qquad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

Damit folgt

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}}{\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$$

Aufgabe 9/74
Gesucht ist der Grenzwert derjenigen Zahlenfolge $\{a_n\}$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $a_n = \frac{b_n}{c_n}$
2. $b_1; c_1$ sind natürliche Zahlen
3. $b_{n+1} = 2b_n$
4. $c_{n+1} = b_n + c_n$

Es ist

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{2b_n}{b_n + c_n} = \frac{b_n + c_n + b_n - c_n}{b_n + c_n} = 1 + \frac{b_n - c_n}{b_n + c_n}$$

Wegen der Eigenschaften 2. und 3. ist die Folge $\{b_n\}$ monoton wachsend; wegen der Eigenschaften 2., 3. und 4. ist die Folge $\{c_n\}$ monoton wachsend, also auch die Folge $\{b_n + c_n\}$. Aus den Eigenschaften 3. und 4. folgt weiter

$$c_{n+1} - b_{n+1} = b_n + c_n - 2b_n = c_n - b_n$$

da diese Beziehung für beliebiges n gilt, folgt $c_n - b_n =$ konstant. Damit ist

$$a_{n+1} = 1 + \frac{\text{konstant}}{b_n + c_n} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Aufgabe 10/74
Gesucht sind alle reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung gilt:

$$\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$$

Wir setzen $\pi \cdot \lg x = \alpha$. Dann nimmt die Gleichung die Gestalt $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ an. Die Lösungen dieser goniometrischen Gleichung sind $\alpha_1 = 2k\pi$ und $\alpha_2 = (2k + \frac{1}{2})\pi$.
(wobei k die Menge der ganzen Zahlen durchläuft). Daraus folgt

$$\lg x_1 = 2k; \lg x_2 = 2k + \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad x_1 = 10^{2k} = 100^k; x_2 = 10^{2k+0,5} = 100^k\sqrt{10}$$

Aufgabe 11/74
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 sowie ein reguläres n-Eck, dessen Umkreis K_1 ist. Es ist zu beweisen, dass die Summe aus den Quadraten der Abstände eines beliebigen Punktes P auf K_2 von den Eckpunkten des n-Ecks unabhängig von der speziellen Lage des Punktes P ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit liege der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kreise im Koordinatenursprung und die Koordinaten des k-ten Eckpunktes p_k seien $P_k\left(r_1 \cos\frac{2k\pi}{n}; r_1 \sin\frac{2p\pi}{n}\right)$. Die Koordinaten von P sind $P(x;y)$ und es gilt $x^2 + y^2 = r_2^2$.

$$r_1^2 \cos^2\frac{2k\pi}{n} + r_1^2 \sin^2\frac{2k\pi}{n} = r_1^2$$

Zur Abkürzung setzen wir $\varphi_k = \frac{2k\pi}{n}$. Für die gesuchte Summe ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n}[(x - r_1\cos\varphi_k)^2 + (y - r_1\sin\varphi_k)^2] = \sum_{k=1}^{n}[(x^2 + y^2) - 2r_1(\cos\varphi_k + \sin\varphi_k) + r_1^2(\cos^2\varphi_k) + \sin^2\varphi_k] =$$

$$\sum_{k=1}^{n}[(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1(\cos\varphi_k + \sin\varphi_k)] = \sum_{k=1}^{n}(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1\sum_{k=1}^{n}(\cos\varphi_k + \sin\varphi_k) = n(r_1^2 + r_2^2)$$

Es ist nämlich

$$\sum_{k=1}^{n}(\cos\varphi_k + \sin\varphi_k) = 0$$

für $n >= 2$. Man kann $(\cos\varphi_k; \sin\varphi_k)$ als die Komponenten von n Einheitsvektoren deuten, die den Kreis in n gleiche Teile zerlegen (d.h., je zwei benachbarte Vektoren schließen stets den gleichen Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ ein).
Die Summe dieser n Einheitsvektoren ist aber stets gleich dem Nullvektor, woraus folgt, dass die Summen der Komponenten je gleich null sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 12/74
Es sei $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Man zeige, dass die Bedingung $a^2 - 3b < 0$ hinreichend für die Existenz komplexer Nullstellen von $f(x)$ ist.

Die Nullstellen von $f(x)$ seien x_1,x_2,x_3. Nach dem Satz von Vieta gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \qquad ; \qquad x_1x - 2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

Somit ist

$$a^2 - 3b = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]$$

Sind alle x_i reell, so ist die rechte seite dieser Gleichung nicht negativ, d.h. $a^2 - 3b >= 0$. Deshalb folgt aus $a^2 - 3b < 0$ die Existenz komplexer Nullstellen.
Zusatz: Dass die Bedingung nicht notwendig ist, erkennt man leicht an Gegenbeispielen. So hat

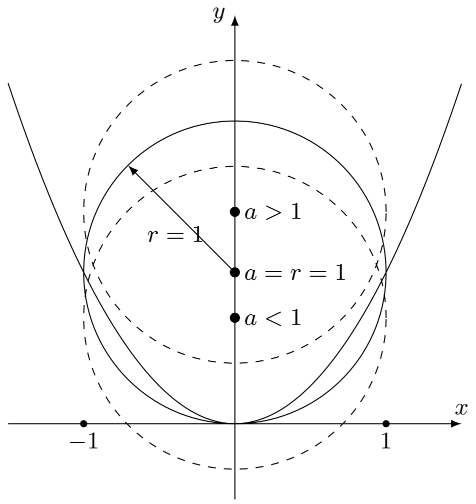
$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x = 0$$

die komplexen Nullstellen $x_{1;2} = 2 \pm i$, es ist aber $a^2 - 3b = 1 > 0$.

Aufgabe 13/74
Für welche positiven reellen Zahlen a und b hat das Gleichungssystem

$$(y-a)^2 = 1 - x^2 \qquad ; \qquad x^2 = by$$

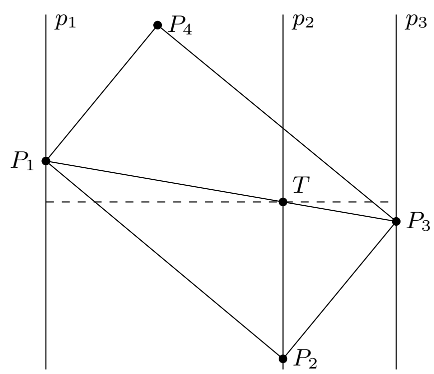
genau drei reelle Lösungen?



Die Gleichung (1) ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt in a auf der y-Achse liegt; die Gleichung 2 stellt die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel im Ursprung dar (vgl. Abbildung). Aus der Abbildung erkennt man, dass genau drei Lösungen genau dann existieren, wenn $a = r = 1$ ist (ist $a > 1$, so existieren 4 oder 2 oder keine Lösung; ist $0 < a < 1$, so existieren 2 Lösungen).
Daraus ergibt sich: $(y-1)^2 = 1 - by$. Die Lösung dieser in y quadratischen Gleichung führt auf $y_1 = 0$, $y_{2;3} = 2 - b$ mit $x_1 = 0$, $x_{2;3} = \pm\sqrt{(2-b)b}$.
Damit $x_{2;3}$ reell wird, ist notwendig und hinreichend, dass $b \leq 2$ ist. Für $b = 2$ ergäbe sich jedoch $x_{2;3} = 0$, so dass dieser Fall ausgeschlossen werden muss. Das Gleichungssystem hat also für $a = 1, b < 2$ genau drei reelle Lösungen.

Aufgabe 14/74
Man konstruierte ein Rechteck $P_1P_2P_3P_4$ mit dem Seitenverhältnis $m : n$, dessen drei Eckpunkte P_1, P_2, P_3 beziehungsweise auf den drei gegebenen Parallelen p_1, p_2, p_3 liegen.

Mit d_{ik} sei der Abstand der Parallelen p_i und p_k bezeichnet, und o.B.d.A. sei d_{13} der größte der Abstände d_{ik} (d.h., p_2 liege zwischen p_1 und p_3). Dann teilt p_2 die Diagonale P_1P_3 innen im Verhältnis $d_{12} : d_{23}$ nach einem Strahlensatz.
Man konstruiert ein dem gesuchten Rechteck $P_1P_2P_3P_4$ ähnliches Rechteck $P_1'P_2'P_3'P_4'$ und teilt die Diagonale $P_1'P_3'$ innen durch den Teilpunkt T' im Verhältnis $d_{12} : d_{23}$.
Die Verbindungsstrecke $P_2'T'$ trägt man beliebig auf der Parallelen p_2 ab; man zeichnet über $P_2'T'$ das Rechteck $P_1'P_2'P_3'P_4'$.
Schließlich führt man mit P_2' (oder T') als Ähnlichkeitszentrum eine Ähnlichkeitstransformation so durch, dass P_1 auf $_1$ und P_3 auf p_3 zu liegen kommen.



Aufgabe 15/74
Es ist zu beweisen: Erfüllen die reellen Zahlen a, b, c, x, y, z die Bedingungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad ; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

so gilt $|ax + by + cz| \leq 1$.

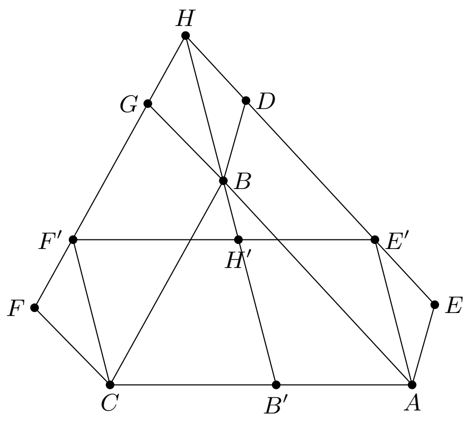
Sind $\vec{a} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ und $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ zwei Einheitsvektoren, so gilt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 = |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sowie

$$|\vec{a} \bullet \vec{b}| = |ax + by + cz| = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a};\vec{b}) = \cos(\vec{a};\vec{b}) \leq 1$$

Aufgabe 16/74
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Über der Seite AB sei ein beliebiges Parallelogramm $ABDE$ errichtet, über der Seite BC ein beliebiges Parallelogramm $BCFG$. Der Schnittpunkt von DE und FC sei H.
Man beweise: Die Summe der Flächeninhalte beider Parallelogramme ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms über der Seite AC, dessen zweite Seite gleich der Strecke BH und dieser parallel ist.



Man ziehe durch A und C Parallelen zu BH, die Schnittpunkte mit DE und FG seien E' bzw. F' (vgl. Abbildung). Dann gilt

$$AE' = BH = CF'; \qquad A(ABDE) = A(ABHE');$$

$$A(BCFG) = A(BCF'H)$$

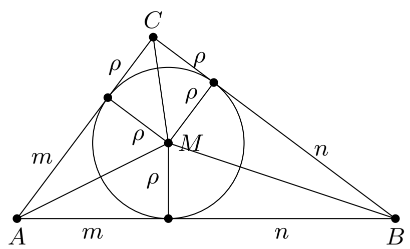
(die Parallelogramme haben jeweils gleiche Grundlinie und gleiche Höhe; mit A ist der Flächeninhalt des betreffenden Parallelogramms bezeichnet). Ferner ist $ACF'E'$ das dritte Parallelogramm, dessen Fläche gleich der Summe aus den Flächeninhalten der beiden anderen Parallelogramme sein soll.
Der Schnittpunkt der Geraden durch B und H mit $E'F'$ sei H', mit AC werde er mit B' bezeichnet. Dann gilt

$$A(ABHE') = A(AB'H'E'); \qquad A(BCF'H) = A(B'CF'H') \qquad \text{also auch}$$

$$A(ABDE) = A(AB'H'E'); \qquad A(BCFG) = A(B'CF'H') \qquad \text{mithin}$$

$$A(ABDE) + A(BCFG) = A(AB'H'E') + A(B'CF'H') = A(ACF'E')$$

Aufgabe 17/74
Man beweise, dass für den Flächeninhalt $A(ABC)$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt: $A(ABC) = m \cdot n$, wenn mit m und n, die vom Berührungspunkt des Inkreises erzeugten Hypotenusenabschnitte bezeichnet sind.



Ist M der Mittelpunkt des Inkreises, so gilt

$$A(ABC) = A(ABM) + A(BCM) + ACAM)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit sei das Dreieck bei C rechtwinklig; wir verwenden die üblichen Bezeichnungen (vgl. Abbildung). Dann ist

$$A(ABM) = \frac{c\rho}{2}; \qquad A(BCM) = \frac{a\rho}{2}; \qquad A(CAM) = \frac{b\rho}{2}$$

also $A(ABC) = \frac{\rho}{2}(a + b + c)$.
Nun ist aber $c = m + n$ und (wegen der Gleichheit der Tangenten vom gleichen Punkt an einen Kreis und wegen der Rechtwinkligkeit bei C: $a = n + \rho; b = m + \rho$. Damit folgt

$$A(ABC) + \frac{\rho}{2}(2m + 2n + 2\rho) = \rho(m + n + \rho)$$

Weiter ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$c^2 = (m + n)^2 = a^2 + b^2 = (n + \rho)^2 + (m + \rho)^2$$

woraus nach kurzer Rechnung folgt

$$\rho(m + n + rho))m \cdot n$$

Setzt man (2) in (1) ein, so ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 18/74
Man beweise mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=0}^{10^n-1} 2^{Q(i)} = 1023^n$$

für jedes natürliche n gilt, wenn $Q(i)$ die Quersumme der Zahl i bezeichnet.

1. Durch Nachrechnen bestätigt man leicht, dass die Gleichung für $n = 0$ gilt. Für $n = 1$ ist $10^n - 1 = 9$ und $Q(i) = i$ für $i = 0; 1,...; 9$, also

$$\sum_{i=0}^{10n-1} 2^{Q(i)} = \sum_{i=0}^{9} 2^i = 1023$$

sie ist also auch für $n = 1$ gültig.
2. Angenommen, die Gleichung gilt für irgend ein $n = k$:

$$\sum_{i=0}^{10k-1} 2^{Q(i)} = 1023^k$$

Nun sei i_k die erste Ziffer den (gegebenenfalls mit Hilfe von vorgesetzten Nullen) $(k + 1)$-stellig geschriebenen Zahl i. Dann ist $i = 10^k \cdot i_k + r$, wobei r alle höchstens k-stelligen Zahlen durchläuft, und $Q(i) == i_k + Q(r)$. Damit ist

$$\sum_{i=0}^{10k+1-1} 2^{Q(i)} = \sum_{i_k=0}^{9} \sum_{r=0}^{10k-1} 2^{i_k+Q(r)} = \sum_{i_k=0}^{9} 2^{i_k} \sum_{r=0}^{10k-1} 2^{Q(r)}$$

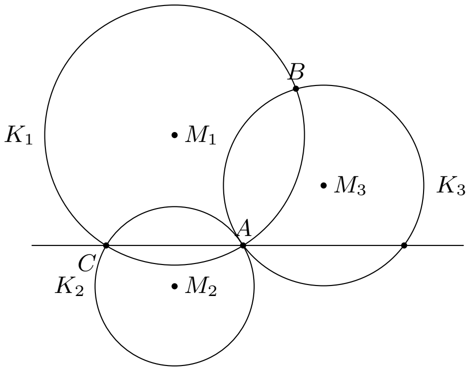
In diesem letzten Ausdruck ist der erste Faktor; wie oben ermittelt, gleich 1023, der zweite ist nach der Induktionsannahme gleich 1023^k. Demnach gilt die Gleichung unter der Voraussetzung, dass sie für k gilt, auch für $k + 1$. Damit ist aber bewiesen, dass sie für jedes natürliche n gilt.

Aufgabe 19/74
Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $a^b + 7 = c$, wobei a, b und c Primzahlen sind.

Sicher gilt für c, dass $c > 7$, also auch $c > 2$ ist. Damit ist; die Existenz wenigstens einer Lösung vorausgesetzt; c eine ungerade Primzahl. Da die Summe zweier ungerader Zahlen stets gerade ist, muss a^b gerade sein. Damit kommt nur $a = 2$ in Frage.
Da $7 \equiv 1 \pmod 3$ gilt, muss $a^b = 2^b \neq -1 \pmod 3$ sein, da sonst $c \equiv 0 \pmod 3$ und wegen $c > 7$ somit keine Primzahl wäre. Wegen $a = 2 \equiv -1 \pmod 3$ kann b nicht ungerade sein; es ist nämlich $(-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod 3$. Damit verbleibt für b als einzige Möglichkeit $b = 2$.
Tatsächlich ergibt sich für $a = 2, b = 2$ für c eine Primzahl: $2^2 + 7 = 11$. Damit ist die einzige Lösung $a = 2, b = 2, c = 11$.

Aufgabe 20/74
Gegeben sind zwei Kreise mit verschiedenen Radien, so dass sich die Kreise in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Durch einen der Schnittpunkte ist eine Gerade so zu konstruieren, dass die Kreise auf ihr zwei gleich lange Sehnen ausschneiden.

Es seien k_1 und k_2 die gegebenen Kreise, A und B deren Schnittpunkte (Abbildung). Als Konstruktionshilfsmittel verwenden wir die Zentralsymmetrie.
Sei z.B. A der Schnittpunkt, durch den die gesuchte Gerade verlaufen soll. Dann konstruiert man zu einem der beiden Kreise, etwa k_2, mit A als Symmetriezentrum den zentralsymmetrischen Kreis k_3. Auf allen durch A verlaufenden Geraden werden (aus Symmetriegründen) von k_2 und k_3 gleichlange Sehnen ausgeschnitten; speziell auch auf der Geraden, die durch den Schnittpunkt C zwischen k_1 und k_3 verläuft. Diese Gerade ist die gesuchte.



Es bleibt noch nachzuweisen, dass ein von A verschiedener Schnittpunkt C der Kreise k_1 und k_3 existiert. Angenommen, k_1 und k_3 würden einander in A berühren (so dass $A = C$ wäre); dann würden die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der drei Kreise und Punkt A auf ein und derselben Geraden liegen, also würde auch k_2 den Kreis k_1 berühren; im Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabe.

Aufgabe 21/74
In einem Dreieck seien u der Umfang, r der Umkreisradius und A der Flächeninhalt. Man zeige, dass stets gilt:

$$\frac{u^3}{rA} \geq 108$$

Es seien a, b und c die Seiten des Dreiecks, α, β und γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel. Dann gilt

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha; \qquad \frac{a}{2r}\sin\alpha \qquad \text{also} \qquad A = \frac{abc}{4r}$$

Nach der bekannten Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel gilt ferner

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{u}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

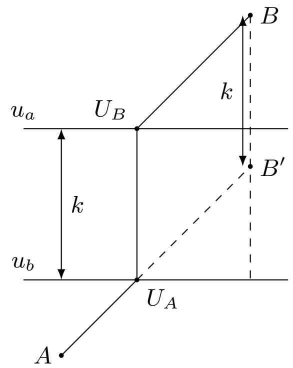
Folglich ist $u^3 \geq 27abc = 27 \cdot 4Ar$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung

$$\frac{u^3}{r \cdot A} \geq 108$$

Aufgabe 22/74
Auf verschiedenen Seiten eines geradlinig verlaufenden Kanals mit parallelen Ufern liegen in verschiedenen Abständen und nicht auf gleicher Höhe zwei Orte A und B. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B so, dass der Kanal rechtwinklig gekreuzt wird.

Da die Kanalufer parallel sind, ist die Länge des senkrecht zu den Kanalufern verlaufenden Verbindungsabschnitts unabhängig von der Lage gleich der Kanalbreite. Die Lage der schräg zum Kanal verlaufenden Abschnitte findet man durch die folgende Überlegung:

Hätte der Kanal die Breite Null, so wäre die kürzeste Verbindung zwischen A und B die Strecke AB. Wir bezeichnen mit u_a und u_b die Kanalufer, die A bzw. B am nächsten liegen. Denkt man sich nun u_b senkrecht zu sich selbst bis u_a verschoben, so verschiebt sich damit B um die Kanalbreite senkrecht zum Kanal in Richtung des Kanals nach B' (Abbildung).



Die Strecke AB' bestimmt die Richtung der schräg zum Kanal verlaufenden Abschnitte. Es sei U_a der Schnittpunkt dieser Strecke mit u_a. Dann verläuft die gesuchte kürzeste Verbindung von A bis U_a geradlinig, von U_a senkrecht zum Kanalufer bis zum Schnittpunkt U_b mit u_b und von da geradlinig (und parallel zu AU_a) nach B.

Aufgabe 23/74
Man ermittle sämtliche reellen Lösungen der Gleichung

$$\left[x^3\right] = [x]^4$$

(wobei mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet ist, die nicht größer als x ist).

Zunächst erkennt man, dass die Gleichung für $0 \leq x \leq 1$ erfüllt ist; denn für $0 \leq x < 1$ ist $[x] = 0$, also auch $[x]^4 = 0$, und $0 \leq x^3 < 1$, also auch $[x^3] = 0$, und für $x = 1$ ist $x^3 = 1$, $[x] = 1$, $[x^3] = [x]^4 = 1$.
Dass für $x < 0$ keine Lösung existiert, ergibt sich aus folgender Überlegung: Für $x < 0$ ist $x^3 < 0$, $[x^3] < 0$, aber $[x]^4 > 0$.
Als weitere Lösungen kommen also nur Werte $x > 1$ in Frage. Um sie zu finden, setzen wir $x = [x] + \alpha$ mit $0 \leq \alpha < 1$. Dann ist

$$[x]^4 = [([x] + \alpha)^3] < [([x] + 1)]^3$$

Diese Ungleichung hat außer für $[x] = 0$ und $[x] = 1$ nur für $[x] = 2$ eine Lösung; denn setzt man $[x] = 3 + C$ (wobei C eine nichtnegative ganzzahlige Konstante ist), so folgt

$$C^4 + 11C^3 + 42C^2 + 60C + 17 < 0$$

also ein Widerspruch.
Setzt man nun der Reihe nach $[x] = 1$ und $[x] = 2$, so ergibt sich
1. $1^4 \leq (1 + \alpha)^3 < 2$, also $1 \leq 1 + \alpha \leq \sqrt[3]{2}$
2. $2^4 \leq (2 + \alpha)^3 < 2^4 + 1$, also $2\sqrt[3]{2} \leq 2 + \alpha < \sqrt[3]{17}$
Die Lösungen lauten somit

$$0 \leq x < \sqrt[3]{2} \qquad ; \qquad 2\sqrt[3]{2} \leq x < \sqrt[3]{17}$$

Aufgabe 24/74
Man beweise, dass keine Zahl der Form $4^n(4k+3)$ mit $n; k \in N$ als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar ist!

Angenommen, es gäbe zwei natürliche Zahlen x und y derart, dass $x^2+y^2 = 4^n(4k+3)$ gilt. Dann müssen x und y beide gerade sein, weil nämlich die Quadrate ungerader Zahlen stets beim Teilen durch 4 den Rest 1 lassen, die rechte Seite der Gleichung aber durch 4 teilbar ist. Damit sind aber x^2 und y^2 beide durch 4 teilbar, und es gilt

$$x_1^2 + y_1^2 = 4^{n-1}(4k + 3)$$

wobei $x = 2x_1$; $y = 2y_1$ gilt. Diesen Schluss kann man n mal durchführen, und man erhält dann mit $x = 2^n x_n$, $y = 2^n y_n$

$$x_n^2 + y_n^2 = 4^0(4k + 3))4k + 3$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt beim Teilen durch 4 den Rest 3; dieser Rest kann aber in der Summe zweier Quadratzahlen nie auftreten, da Quadratzahlen beim Teilen durch 4 nur die Reste 0 oder 1 lassen, die Summe zweier Quadratzahlen also nur die Reste 0, 1 oder 2 ermöglicht. Damit ist die Annahme auf einen Widerspruch geführt und somit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 25/74
Es sind die Maße aller Zylinder anzugeben, bei denen die Maßzahlen von Radius und Höhe natürliche Zahlen sind und bei denen Oberfläche und Volumen den Maßzahlen nach übereinstimmen.

Bezeichnet man die Maßzahlen von Radius und Höhe mit r bzw. mit h, wobei $r, h > 0$, $r, h \in N$ gilt, so erfordert die Aufgabe die Gültigkeit der Gleichung

$$\pi r^2 h = 2\pi r(r + h)$$

Daraus ergibt sich sofort

$$rh = 2r + 2h \to r = \frac{2h}{h-2} = 2 + \frac{4}{h-2}$$

Damit r eine natürliche Zahl wird, ist notwendig und hinreichend, dass h einen der Werte 6, 4 oder 3 annimmt. Es gibt also drei Zylinder der geforderten Art:
a) $h_1 = 6$; $r_1 = 3$; $V_1 = 54\pi = O_1$
b) $h_2 = 4$; $r_2 = 4$; $V_2 = 64\pi = O_2$
c) $h_3 = 3$; $r_3 = 6$; $V_3 = 108\pi = O_3$

Aufgabe 26/74
Es sei ABC ein bei A rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c (wobei die Seiten den gleichbezeichneten Ecken gegenüberliegen). Welche Werte kann das Verhältnis der Seitenhalbierenden $s_c : s_b$ annehmen?

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ergeben sich die Längen der Seitenhalbierenden zu

$$s_b = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + c^2} \qquad ; \qquad s_c = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + b^2}$$

Das Verhältnis $s_c : s_b$ ist dann

$$\frac{s_c}{s_b} = \sqrt{\frac{4b^2 + c^2}{b^2 + 4c^2}}$$

Kürzt man den Radikanden mit c^2 und führt man das Verhältnis $\lambda = \frac{b}{c}$ ein (wobei $0 < \lambda < \infty$ wegen $b > 0, c > 0$ gilt), so folgt

$$\frac{s_c}{s_b} = \sqrt{\frac{4\lambda^2 + 1}{\lambda^2 + 4}} = \sqrt{4 - \frac{15}{\lambda^2 + 4}}$$

Für $\lambda \to 0$ ergibt sich $s_c : s_b \to \sqrt{4 - \frac{15}{4}} = \frac{1}{2}$. Für $\lambda \to \infty$ folgt $s_c : s_b \to \sqrt{4} = 2$. Damit ist $\frac{1}{2} < s_c : s_b < 2$.

Aufgabe 27/74
Nach Wieferichs Beweis der Waringschen Vermutung kann man jede Zahl als Summe von höchstens neun Kuben darstellen. Man zeige, dass jedes Vielfache von 6 schon durch höchstens vier Kuben darstellbar ist!

Es ist

$$6x = 3x + 3x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^3 = (x+1)^3 + (x-1)^3 - x^3 - x^3$$

Aufgabe 28/74
Man beweise: Ist a eine irrationale Zahl, so ist die Funktion $y = \cos(ax) + \cos x$ nicht periodisch.

Angenommen, y sei periodisch mit der Periode T. Dann gilt

$$\cos(ax) + \cos x = \cos(a(x+T)) + \cos(x+T)$$

Insbesondere ergibt sich für $x = 0$ (die Relation muss für jedes beliebige x gelten)

$$\cos 0 + \cos 0 = \cos(aT)) + \cos T = 2$$

Daraus folgt, dass
1.) $\cos(aT) = 1$ mit $aT = 2k\pi$,
2.) $\cos T = 1$ mit $T = 2m\pi$,
$k; m \in G$, ist. Dann aber ist $a = \frac{aT}{T} = \frac{k}{m}$, d.h., a ist als Quotient zweier ganzer Zahlen eine rationale Zahl im Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabenstellung. Demnach ist die Annahme falsch, y ist nicht periodisch.

Aufgabe 29/74
Gesucht sind alle Kegel, bei denen die Maßzahlen von Radius, Höhe und Mantellinie natürliche Zahlen sind und bei denen die Maßzahlen von Oberfläche und Volumen einander gleich sind.

Bezeichnet man die Maßzahlen von Radius, Höhe und Mantellinie mit r, h bzw. s, wobei $r, h, s \in N$ und $r, h, s > 0$ gilt, so erfordert die Aufgabenstellung die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r(r + s)$$

mit der Nebenbedingung $r^2 + h^2 s^2$. Daraus ergibt sich

$$\frac{rh}{3} = r + s \to rh - 3r = 3s \to r^2h^2 - 6r^2h - 9h^2 = 0$$

und wegen $h \neq 0$

$$r^2h - 6r^2 - 9h = 0 \to r^2 = \frac{9h}{h-6} = 9 + \frac{54}{h-6}$$

Damit r^2 eine natürliche Zahl wird, muss $k = h - 6$ ein Teiler von 54 Sein. In Frage kommen also die Werte $k = 1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54$ mit $h = 7; 8; 9; 12; 15; 24; 33; 60$.
Von ihnen liefert aber nur $k = 2$ mit $h = 8$ eine Quadratzahl r^2, so dass auch r eine natürliche Zahl wird. Es gibt also genau einen derartigen Kegel, dessen Maßzahlen $r = 6, h = 8, s = 10$ sind. Bei ihm ist $V = O = 96\pi$.

Aufgabe 30/74
Es sind alle Paare dreistelliger natürlicher Zahlen $(x; y)$ gesucht, die die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Zahlen eines Paares unterscheiden sich in den letzten beiden Stellen genau durch die Reihenfolge der Ziffern.
2. Die Differenz $x - y$ beträgt 18.
3. Jede der beiden Zahlen eines Paares ist das Produkt von genau zwei je zweistelligen Primzahlen.

Sind $x = 100x_1 + 10x - 2 + x_3$ und $y = 100y_1 + 10y_2 + y_3$ die beiden Zahlen eines der gesuchten Paare, so gilt nach Bedingung 1: $y_2 = x_3$ und $y_3 = x_2$.
Nach Bedingung 2 gilt

$$x - y = 100x_1 + 10x_2 + x_3 - (100y_1 + 10y_2 + y_3) = 100(x_1 - y_1) + 9(x_2 - x_3) = 18$$

Dividiert man beide Seiten der letzten Gleichung durch 9, so ergibt sich

$$11(x_1 - y_1) + \frac{1}{9}(x_1 - y_1) + x_2 - x_3 = 2$$

Diese Gleichung ist aber nur dann ganzzahlig mit einstelligen Werten für x_1, x_2, x_3, y_1 lösbar, wenn $x_1 = y_1$ ist. Dann folgt weiter $x_2 = x_3 + 2$.
Nach Bedingung 3 müssen x_2 und x_3 ungerade und ungleich 5 sein. Damit kommen nur $x_3 = 1; x_2 = 3$ und $x_3 = 7; x_2 = 9$ in Frage. Außerdem muss nach Bedingung 3 die Quersumme $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0 \pmod 3$ sein; da $x_2 + x_1 \equiv 1 \pmod 3$ ist, gilt also $x_1 \neq 2 \pmod 3$. Damit kann x_1 die Werte $1; 3; 4; 6; 7; 9$ annehmen. In Betracht kommen also zunächst die 12 Zahlenpaare

$$(131; 113), (197; 179), (331; 313), (397; 379), (431; 413), (497; 479)$$
$$(631; 613), (697; 679), (731; 713), (797; 779), (931; 913), (997; 979)$$

Aus ihnen scheidet man zunächst (etwa mit Hilfe einer Primzahltabelle) alle die Zahlenpaare aus, bei denen wenigstens eine Zahl selbst Primzahl ist. Sie widersprechen nämlich der Bedingung 3. Es verbleiben dann nur noch die Paare

$$(697; 679), (731; 713), (931; 913)$$

Zerlegt man die Zahlen dieser Paare in ihre Primfaktoren, so stellt man fest, dass das Paar (731; 713) das einzige Paar ist, das die Bedingung 3 erfüllt.

Aufgabe 31/74
Man zeige, dass das Produkt aus den Ziffern einer mehrstelligen natürlichen Zahl n stets kleiner ist als die Zahl n selbst.

Es sei $\sum\limits_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i$ mit $m > 1$. Dann gilt wegen $a_i \leq 9$ für jedes i:

$$\prod_{i=0}^{m} a_i = a_m \prod_{i=0}^{m-1} a_i \leq a_m \prod_{i=0}^{m} 9 = a_m \cdot 9^m < a_m \cdot 10^m \leq \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i$$

Aufgabe 32/74
Für welche natürlichen Zahlen n ist $z = 4^n + 4^4 + 4^8$ eine Quadratzahl?

Die Zahl $z = 4^n + 4^4 + 4^8$ ist genau dann Quadratzahl, wenn die Zahl $z' = 4^k + 4 + 1 = (2^k)^2 + 2^8 + 1$ mit $k = n - 4$ Quadratzahl ist. Es ist nämlich $z = 4^4 \cdot z' = 16^2 \cdot z'$. Der Ansatz

$$z' = (2^k)^2 + 2^8 + 1 = (2^k)^2 + 2 \cdot 2^7 + 1 = (2^k + 1)^2$$

liefert zunächst $k = 7, n = 11$ als Lösung. Nun ist noch nachzuprüfen, ob ein anderer Ansatz weitere Lösungen liefern kann.
Angenommen, es gäbe ein m mit

$$(2^k)^2 + 2^8 + 1 = m; \quad k \neq 7$$

dann wäre m sicher ungerade: $m = 2r + 1$, wobei r eine natürliche Zahl ist. Also gilt

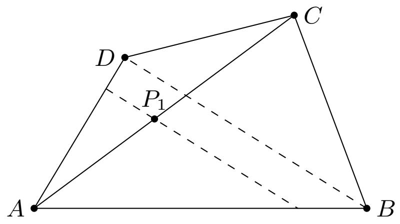
$$(2^k)^2 + 2^8 + 1 = (2r + 1)^2 = 4r + 4r + 1; \qquad (2^{k-1})^2 + 2^6 = r(r + 1)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist ein Produkt aus zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, also muss auch die linke Seite als ein solches Produkt darstellbar sein. Man prüft durch Rechnung leicht nach, dass dies für $k \leq 4$ nicht möglich ist. Für $k > 4$ folgt

$$(2^{k-1})^2 + 2^6 = 2^6(2^{2k-8} + 1); \quad \text{also} \quad r = 2^6 = 2^{2k-8}; k = 7$$

im Widerspruch zur Annahme. Demnach ist $n = 11$ die einzige Zahl, für die z eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 33/74
Gegeben sei ein konvexes, sonst aber beliebiges Viereck $ABCD$. Gesucht ist der geometrische Ort aller der Punkte P im Inneren des Vierecks, für die die Vierecke $ABPD$ und $BCDP$ flächengleich sind.



Zuerst sucht man einen Punkt P_1, der der gestellten Forderung entspricht. Man findet ihn als Mittelpunkt der Diagonalen AC (Abbildung). Es ist nämlich

$$\triangle\ AP_1D = \triangle\ P_1CD \qquad \text{und} \qquad \triangle\ ABP_1 = \triangle\ BCP_1$$

(wobei das Gleichheitszeichen die Flächengleichheit bedeutet), da die, entsprechenden Dreiecke stets gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe haben.

Durch eine Verschiebung des Punktes P, auf der Parallelen zur Diagonale BD durch P_1 wird der Flächeninhalt des Dreiecks BDP_1 nicht verändert, da sich Grundlinie und Höhe nicht ändern. Das heißt, der gesuchte geometrische Ort ist; die Parallele zur Diagonale BD durch den Mittelpunkt der Diagonale AC, soweit die Parallele im Inneren des Vierecks $ABCD$ verläuft.

Aufgabe 34/74
Man wähle eine mindestens zweistellige natürliche Zahl n, deren dezimale Darstellung keine Null enthält. Vertauscht man in ihr beliebig die Stellen, so ergibt sich eine zweite natürliche Zahl n'. Streicht man in der Differenz $n - n'$ eine Ziffer, so kann man aus der Summe der verbliebenen Ziffern die gestrichene ermitteln. Wie ist das möglich?

Es sei $n \equiv k \pmod 9$ mit $k \in G, 0 \leq k \leq 8$. Dann ist auch $n' \equiv k \pmod 9$. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sich beim Vertauschen der Ziffern die Quersumme nicht ändert; es ist also $Q(n) = Q(n')$, wobei $Q(n)$ die Quersumme der Zahl n bezeichnet. Bekanntlich gilt aber stets $Q(n) \equiv n \pmod 9$. Damit ergibt sich sofort $n - n' \equiv 0 \pmod 9$, also

$$Q(n - n') = 9m$$

mit $m \in G$. Ist z die gestrichene Ziffer und S die Summe der verbliebenen Ziffern, so gilt demnach

$$S + z = Q(n - n') = 9m \qquad ; \qquad z = 9m - S$$

Man kann also die gestrichene Ziffer ermitteln, indem man die Summe S von der nächstgrößeren durch 9 teilbaren Zahl subtrahiert (von der nächstgrößeren deshalb, weil $0 < z \leq 9$ gilt).

Aufgabe 35/74
Für die Koeffizienten a_i der Gleichung $x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ gelte

$$\frac{a_2a_1}{a_0} < 9$$

Man zeige, dass dann nicht alle Lösungen der Gleichung positiv reell sind.

Sind x_1, x_2 und x_3 die Lösungen der Gleichung, so gilt nach dem Wurzelsatz von Vieta

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_1$$
$$x_1x_2x_3 = -a_0$$

also

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) =$$
$$= 3 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + \left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) = \frac{a_2a_1}{a_0} < 9$$

Sind nun alle x_i $(i = 1; 2; 3)$ positiv reell, so gilt wegen $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ positive reelle $a; b$

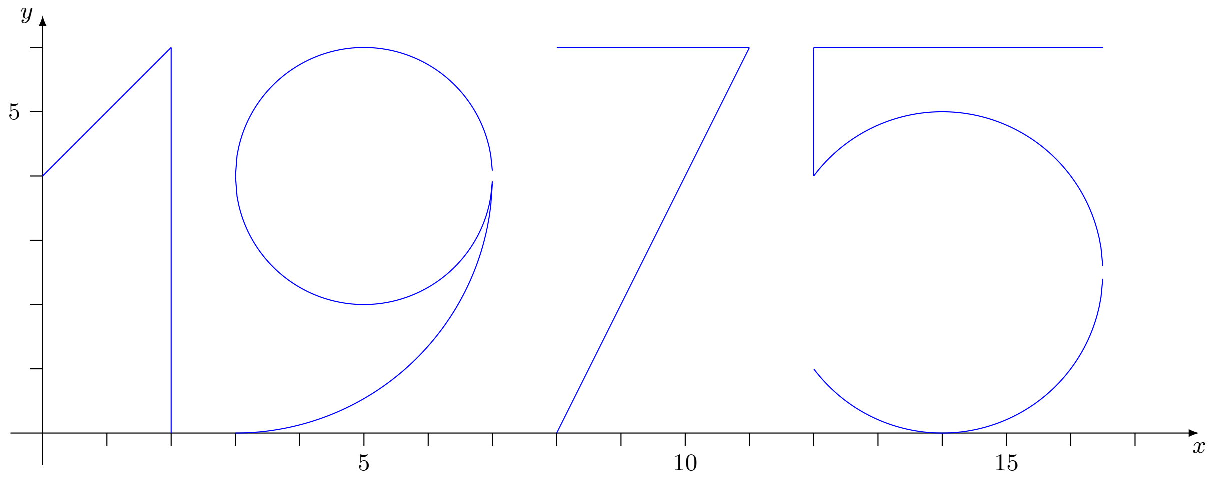
$$\frac{a_2a_1}{a_0} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 36/74
Es seien $(x; y)$ Paare reeller Zahlen. Man stelle die Abbildung

$$\begin{aligned} \{(m; y) : y = x + 4 \text{ für } 0 \leq x < 2;\\ 0 \leq y \leq 6 \text{ für } x = 2;\\ (x-5)^2 + (y-4)^2 = 4; y = 4 - \sqrt{7 - x^2 + 6x} \text{ für } 3 \leq x \leq 7;\\ y = 6 \text{ und } y = 2x - 16 \text{ für } 8 \leq x \leq 11;\\ 4 \leq y \leq 6 \text{ für } x = 12;\\ y = 6 \text{ und } (x - 14)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 6{,}25 \text{ für } 12 \leq x \leq 16{,}5\} \end{aligned}$$

in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem graphisch dar!


y
5
x
5
10
15

2.15 Aufgaben und Lösungen 1975

Aufgabe 1/75
Gegeben sei das Polynom $P(x) = x^3 + px + q$, dessen Koeffizienten p, q reell sind, und es sei $q \neq 0$. Es ist zu beweisen: Sind alle Nullstellen des Polynoms reell, so ist $p < 0$.

Sind x_1, x_2, x_3 die Nullstellen des gegebenen Polynoms, so gilt nach dem Wurzelsatz des Vieta:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad ; \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p$$

Daraus folgt

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0 \qquad ; \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0$$

Da x_1, x_2, x_3 sämtlich reell sind und (wegen $q \neq 0$) $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ gilt, ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung, dass $p < 0$ ist.

Aufgabe 2/75
Man bestimme alle nicht negativen ganzen Zahlen m und n, die der Gleichung $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$ genügen.

Aus der gegebenen Gleichung folgt durch äquivalente Umformung

$$3 \cdot 2^m = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

Da die linke Seite der Gleichung gerade ist (falls $m \neq 0$), müssen sowohl n + 1 als auch n - 1 gerade sein; also ist die linke Seite der Gleichung in ein Produkt aus zwei geraden Faktoren zu zerlegen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1: $n + 1 = 3 \cdot 2^x$; $n - 1 = 2^y$
Fall 2: $n + 1 = 2^x$; $n - 1 = 3 \cdot 2^y$
wobei in beiden Fällen $x + y = m$ gilt. Aus den zweiten Gleichungen folgt jeweils $n = 2^y + 1$ bzw. $n = 3 \cdot 2^y + 1$. Dies, in die ersten Gleichungen eingesetzt, liefert
Fall 1: $2^y + 2 = 3 \cdot 2^x$; $2^{y-1} + 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$
Fall 2: $3 \cdot 2^y + 2 = 2^x$; $3 \cdot 2^{y-1} + 1 = 2^{x-1} - 1$
In jeder der beiden Gleichungen ist eine Seite ungerade; folglich muss es auch die andere Seite sein. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $2^{x-1} = 1$ (Fall 1) bzw. $2^{y-1} = 1$ (Fall 2) ist. Daraus folgt
Fall 1: $x = 1$; $y = 2$; Fall 2: $y = 1$; $x = 3$. Damit ergibt sich $m = 3; n = 5$ bzw. $m = 4$; $n = 7$.
Es bleibt noch der oben zunächst ausgeschlossene Fall $m = 0$ zu untersuchen. Für ihn folgt aus der gegebenen Gleichung die dritte Lösung $m = 0$; $n = 2$.

Aufgabe 3/75
Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c (wobei $a \geq b \geq c$ sei) und dem Flächeninhalt A. Man zeige, dass $b \geq \sqrt{2A}$ gilt.

Es ist $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ und nach dem Sinussatz $a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, also

$$A = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta} \to b^2 = 2A\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

Nun gilt $\sin\alpha \leq 1$, also $\frac{1}{\sin\alpha} \geq 1$, $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \geq 1$ (wegen $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ und $b \geq c$). Damit folgt unmittelbar

$$b^3 = 2A\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} \geq 2A \to b \geq \sqrt{2A}$$

Aufgabe 4/75
Es seien h_c die Höhe auf der Hypotenuse c und ρ der Inkreisradius eines bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC. Man beweise, dass dann gilt

$$2 < \frac{h_c}{\rho} \leq 1 + \sqrt{2}$$

Wird mit A die Fläche des Dreiecks bezeichnet, so gilt

$$A = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}\rho(a+b+c) \quad \text{also} \quad \frac{h_c}{\rho} = \frac{a+b+c}{c} = 1 + \frac{a+b}{c}$$

Wegen der Gültigkeit der Dreiecksungleichung ist $\frac{a+b}{c} > 1$. Damit folgt unmittelbar der erste Teil der Behauptung

$$\frac{h_c}{\rho} = 1 + \frac{a+b}{c} > 2$$

(dies gilt übrigens für jedes Dreieck, da bei der Beweisführung von der Rechtwinkligkeit kein Gebrauch gemacht wurde). Ferner folgt aus $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, dass

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad ; \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt aber in einem bei C rechtwinkligen Dreieck $a2 + b^2 = c^2$. Folglich gilt $(a+b)^2 \leq 2c^2$, d.h. $a + b \leq c\sqrt{2}$.
Damit folgt aber der zweite Teil der Behauptung:

$$\frac{h_c}{\rho} = 1 + \frac{a+b}{c} \leq 1 + \sqrt{2}$$

Aufgabe 5/75
Gesucht sind alle Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen, für die die Gleichung $\frac{x+y}{x-y} = z$ gilt.

Aus der gegebenen Gleichung folgt:
1) $x > y$ (aus $x > y$ folgt $z < 0$, aus $x = y$ folgt, dass z nicht existiert)
2) $z \neq 2$ (aus $z = 2$ folgt $x + y = 2x - 2y$, also $x = 3y$ im Widerspruch zur Forderung, dass x und y Primzahlen sein sollen).
Wegen $z \neq 2$ ist $z = 2k + 1$ mit $k \in N$. Daraus folgt

$$x + y = (2k+1)(x-y) = 2kx + x - 2ky - y \to 2kx = 2(k+1)xy \to x = y + \frac{y}{k}$$

Da x als Primzahl ganzzahlig und y ebenfalls Primzahl ist, kommen für k zunächst nur die Werte $k = 1$ und $k = y$ in Frage. Der Wert $k = 1$ entfällt, da sich damit $x = 2y$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft von x und y ergäbe.
Für $k = y$ folgt $x = y + 1$. Die einzigen aufeinanderfolgenden Primzahlen sind aber 2 und 3, so dass $y = 2$ und $x = 3$ sein müssten. Tatsächlich ergibt sich für diese beiden Werte auch z als Primzahl:

$$z = \frac{x+y}{x-y} = 5$$

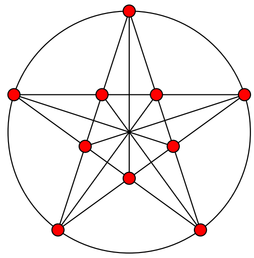
Das Tripel $(x; y; z) = (3; 2; 5)$ ist also das einzige, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 6/75
Ein Gärtner will 25 Rosen so auf eine Fläche verteilen, dass in 15 Reihen je 5 Rosen stehen. Dabei sollen die Rosen rotationssymmetrisch so angeordnet werden, dass mehr als $\frac{3}{4}$ davon weniger als halb so weit vom Symmetriezentrum entfernt sind wie die äußersten und dass das Symmetriezentrum selbst unbepflanzt bleibt. Wie ist eine solche Anordnung möglich?

1. Die Anzahl der Symmetrieachsen muss ein echter Teller der Rosenanzahl außerhalb des Symmetriezentrums sein. Da 5 der einzige echte Teiler von 25 ist, muss man die fünfstrahlige Symmetrie wählen.

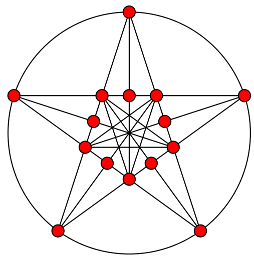
2. Es sollen mehr als $\frac{3}{4}$ der Rosen, also mindestens 19, innerhalb eines Kreises angeordnet werden, dessen Radius kleiner ist als der halbe Abstand der äußersten Rosen vom Zentrum. Aus Symmetriegründen muss diese Anzahl ebenfalls den Teiler 5 haben, sie beträgt also 20.

3. Daraus folgt, dass man zunächst 5 Rosen als "äußerste" in Form eines regelmäßigen Fünfecks anordnen wird und dass die Seiten des Fünfecks nicht mit weiteren Rosen bepflanzt werden dürfen.



4. Es liegt damit nahe, die 5 Diagonalen des Fünfecks als die ersten 5 Reihen anzusehen. Ihre 5 Schnittpunkte liegen innerhalb des unter 2. angeführten Kreises (wie man durch Rechnung bestätigen kann). Bepflanzt man diese Schnittpunkte, so liegen auf jeder Fünfeckdiagonalen (Pentagrammseite) bereits 4 Rosen (1.Abbildung). Außerdem legt jede der äußeren Rosen mit der ihr gegenüberliegenden inneren eine neue Reihe fest (Pentagrammdiagonale).

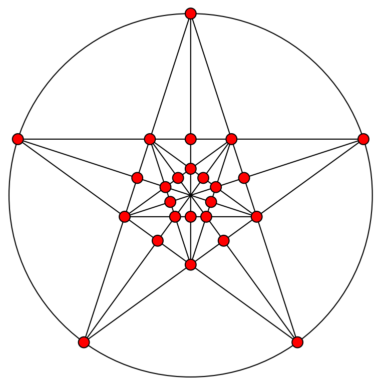
5. Setzt man auf jeden Schnittpunkt einer Pentagrammseite mit einer Pentagrammdiagonalen eine Rose, so werden die Pentagrammseiten zu Reihen "komplettiert", die Pentagrammdiagonalen sind dann Träger von je 3 Rosen (Abbildung 2).



6. Damit hat man mit 15 Rosen 5 komplette Reihen und 5 noch nicht komplette Reihen erzielt.

7. Wählt man die 53 Rosen auf den Schnittpunkten der Pentagrammseiten untereinander oder die 5 Rosen auf den Schnittpunkten der Pentagrammseiten mit den Pentagrammdiagonalen als Ausgangspunkte einer ähnlichen (verkleinerten) Figur, so kann man 5 weitere komplette Reihen erzielen, wobei 10 weitere Rosen benötigt werden.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn dabei die nichtkompletten Reihen der größeren Figur durch die nichtkompletten Reihen der kleineren Figur zu kompletten Reihen ergänzt werden. Tatsächlich trifft dies zu (wie man an Hand der Symmetrieeigenschaften leicht nachweisen kann).
Es gibt also zwei (nicht wesentlich verschiedene) Varianten der Lösung, von denen eine in Abbildung 3 dargestellt ist.
Lässt man auch nur eine der gestellten Bedingungen weg, so ergeben sich weitere, wesentlich verschiedene Lösungen.



Aufgabe 7/75
Es sei $p = ABC$ eine in dekadischer Schreibweise dargestellte dreistellige Zahl, wobei $0 \leq A, B, C \leq 9$, A, B, C natürlich gilt, also A, B, C die Ziffern der entsprechenden Stellen angeben. Es ist zu beweisen: Wenn $p = ABC$ durch 37 teilbar ist, dann sind auch die Zahlen $q = BCA$ und $r = CAB$ durch 37 teilbar.

Wenn $p = ABC$ durch 37 teilbar ist, so gilt

$$p = 100A + 10B + C = 37k$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Damit ist weiter

$$q = 100B + 10C + A = 1000A + 100B + 10C - 999A = 10p - 999A = 37(10k - 27A)$$

(wegen $999 = 37 \cdot 27$) und

$$r = 100C + 10A + B = 10000A + 1000B + 100C - 9990A - 999B =$$

$$= 100p - 999(10A + B) = 37[100k - 27(10A + B)]$$

Damit sind auch q und r durch 37 teilbar.

Aufgabe 8/75
Es ist zu beweisen, dass die Zahl $23 \cdot 52^n + 102 \cdot 27^n$ für jede ungerade natürliche Zahl n durch 1975 teilbar ist.

Die Behauptung ist richtig für n = 1, wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt. Angenommen, die Behauptung gelte für $n = 2k + 1$. Dann gilt

$$23 \cdot 52^{2k+3} + 102 \cdot 27^{2k+3} = 52^2 \cdot 23 \cdot 52^{2k+1} + 27^2 \cdot 102 \cdot 27^{2k+1} = 2704 \cdot 23 \cdot 52^{2k+1} + 729 \cdot 102 \cdot 27^{2k+1} =$$

$$= 729 \cdot 23 \cdot 52^{2k+1} + 729 \cdot 102 \cdot 27^{2k+1} + 1975 \cdot 23 \cdot 52^{2k+1} = 729 \cdot (23 \cdot 52^{2k+1} + 102 \cdot 27^{2k+1}) + 1975 \cdot 23 \cdot 52^{2k+1}$$

Der erste Summand ist nach der Induktionsannahme durch 1975 teilbar, der zweite, weil er den Faktor 19759 enthält.
Also folgt aus der Induktionsannahme, dass die Behauptung auch für $n = 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$ gilt. Damit ist die Behauptung für alle ungeraden natürlichen Zahlen n bewiesen.

Aufgabe 9/75
Man ermittle, ohne das Integral zu berechnen, den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x t \sin t dt$$

Ist $F(t) = \int t \cdot \sin t dt$ eine Stammfunktion von $t \cdot \sin t$, so nimmt der Grenzwert die Gestalt

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

an. Man erkennt, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten von $F(x)$ an der Stelle $x = 0$ zu bilden ist; das ist aber der Differentialquotient der Funktion $F(x)$ an der Stelle $x = 0$, also $F'(x)|_{x=0}$. Da $F(x)$ Stammfunktion von $x \sin x$ ist, gilt $F'(x) x \sin x$. Damit ist der gesuchte Grenzwert

$$x \sin x|_{x=0} = 0$$

Anmerkung: Dieses Verfahren kann man für jeden Grenzwert der Gestalt

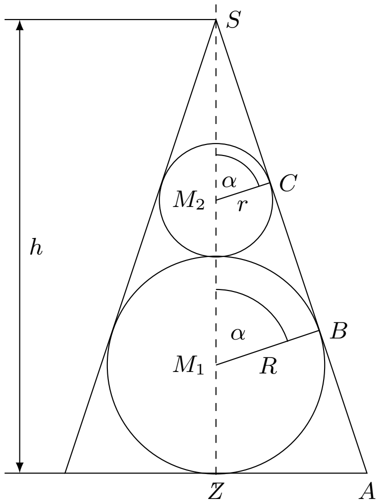
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$

anwenden, auch wenn das Integral nicht elementar auswertbar ist.

Aufgabe 10/75
Gegeben sei eine regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Jede Seitenfläche schließe mit der Grundfläche den Winkel α ein. In diese Pyramide werden zwei Kugeln so einbeschrieben, dass eine Kugel alle fünf Flächen der Pyramide, die andere aber die vier Seitenflächen der Pyramide und die Oberfläche der ersten Kugel berührt.
In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Kugeln zueinander?

Bezeichnet man den Radius der größeren Kugel mit R und den Radius der kleineren Kugel mit r, so gilt für das gesuchte Verhältnis

$$V_2 : V_1 = \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} R^3 \pi = r^3 : R^3$$



In der Abbildung (Schnittzeichnung) erkennt man die Gültigkeit der folgenden Beziehungen:

$$\frac{R}{h-R} = \frac{r}{h-2R-r} = \cos\alpha$$

(es ist $\triangle\ SM_1B\ \sim\triangle\ SM_2C\ \sim\triangle\ SAZ$ nach dem Hauptähnlichkeitssatz; jedes dieser Dreiecke enthält den Winkel ZSA und einen rechten Winkel; daraus folgt auch die Übereinstimmung im dritten Winkel α. Aus diesen Beziehungen erhält man nach kurzer Rechnung

$$R = h\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ; \qquad r = h\frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}$$

Damit ergibt sich das gesuchte Verhältnis zu

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^3 = \tan^6\frac{\alpha}{2}$$

Aufgabe 11/75
Gesucht sind alle positiven dreistelligen Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Multipliziert man die Zahl mit der Zahl, die sich durch Umkehrung der Ziffernfolge ergibt, so erhält man ein sechsstelliges Produkt, das mit zwei Nullen endet.

Die gesuchten Zahlen können nicht mit einer Null enden, da sich sonst keine sechsstellige Zahl als Produkt ergäbe. Das größte Produkt, das nach der gegebenen Vorschrift mit einer auf null endenden Zahl gebildet werden kann, ist nämlich $990 \cdot 099 < 990 \cdot 100 = 99000 < 100000$.
Da das Produkt durch 100 teilbar ist, muss einer der beiden Faktoren durch 25, der andere durch 4 teilbar sein. Einer der beiden Faktoren endet daher mit 25 oder mit 75 (da 50 nicht in Frage kommt), bei dem anderen sind die letzten beiden Stellen durch 4 teilbar. Bezeichnet man mit x die erste Stelle des ersten Faktors, so kann man zunächst folgende Produkte festlegen:

$$(1) \quad x25 \cdot 52x \qquad ; (2) \quad x75 \cdot 75x$$

Man erkennt, dass im Fall (1) $x = 4$ oder $x = 8$ ist, im Fall (2) $x = 2$ oder $x = 6$. Damit erhält man die folgenden Zahlen: (1) $\quad 425, 524, 825, 528$; $\qquad$ (2) $\quad 275, 572, 675, 756$.

Aufgabe 12/75
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{\sum a_i^{\sum a_i + 1}}{(\sum a_i + 1)^{\sum a_i}} > \sqrt[n]{\prod a_i}$$

für n positive reelle Zahlen a_i, wobei $n > 2$ ist.

Der Beweis ist geführt, wenn bewiesen ist, dass

$$\frac{(\sum a_i)^{\sum a_i + 1}}{(\sum a_i + 1)^{\sum a_i}} > \frac{\sum a_i}{3}$$

ist. Es ist nämlich für $n > 2$:

$$\frac{\sum a_i}{3} \geq \frac{\sum a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod a_i}$$

(die letzte Ungleichung nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel). Setzt man in (1) $\sum a_i = x$, so nimmt die zu beweisende Ungleichung die Gestalt

$$\frac{x^{x+1}}{(x+1)^x} \geq \frac{x}{3}$$

an. Wegen $x^{x+1} = x^x \cdot x$ und $x > 0$ reduziert sie sich weiter zu

$$\frac{x^x}{(x+1)^x} \geq \frac{1}{3} \qquad \text{woraus}$$

$$\frac{(x+1)^x}{x^x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$$

folgt. Die letzte Ungleichung ist aber sicher erfüllt, da bekanntlich die Funktion $(1 + \frac{1}{x})^x$ von unten gegen die Basis e der natürlichen Logarithmen konvergiert. Da alle Schritte umkehrbar sind, ist damit der Beweis erbracht.

Aufgabe 13/75
Es seien n und m natürliche Zahlen. In welchem Zahlensystem mit der Basis k gilt, dass m beim Teilen durch n denselben Rest lässt wie die Quersumme $Q(m)$?

In jedem Zahlensystem mit der Basis k gilt

$$m = \sum_{i=0}^{r} 10^i_{(k)} \cdot a_i$$

mit $a_i = 0; 1; 2; ...; k-1$ (wobei $10_{(k)}$ die Darstellung der Zahl k im System mit der Basis k ist) und

$$Q(m) = \sum_{i=0}^{r} a_i$$

Ist nun $k = 10_{(k)} \equiv 1$ (mod n) oder, was dasselbe besagt, $k = 10_{(k)})n \cdot s + 1$ mit $s \in N$, so ist

$$m = \sum_{i=0}^{r} 10^i_{(k)} \cdot a_i \equiv \sum_{i=0}^{r} a_i \text{ (mod n) } \equiv Q(m) \text{ (mod n)}$$

Die "Quersummen-Teilbarkeitsregel" für n gilt also genau dann, wenn die Basis des Zahlensystems um 1 größer ist als ein s-faches von n.
Zusatz: Speziell im dekadischen System gilt die Quersummen-Teilbarkeitsregel für $n = 3$ und für $n = 9$, da $10 = 3 \cdot 3 + 1$ und $10 = 1 \cdot 9 + 1$ ist.

Aufgabe 14/75
Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $a^{2x} + a^x b^x = b^{2x}$, wobei a und b positive reelle Zahlen sind. Welche zusätzliche Bedingung muss für a und b gelten?

Aus $a^{2x} + a^x b^x = b^{2x}$ folgt wegen $a \neq 0$ durch Division mit a^{2x} und nach äquivalenter Umformung

$$\frac{b^{2x}}{a^{2x}} - \frac{b^x}{a^x} - 1 = 0 \qquad ; \qquad \left[\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^x - 1 = 0$$

Setzt man $(\frac{b}{a})^x = z$, so nimmt die Gleichung die Gestalt $z^2 - z - 1 = 0$ mit der Lösung

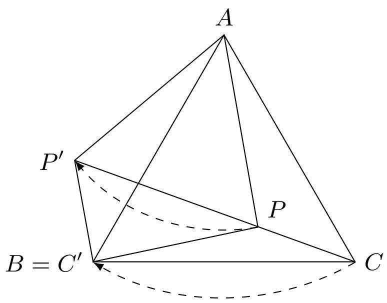
$$z = \left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

an (wegen $z > 0$ entfällt die zweite Lösung). Daraus folgt durch Logarithmieren

$$x \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ; \qquad x = \frac{\ln(1+\sqrt{5}) - \ln 2}{\ln b - \ln a}$$

Es existiert also genau eine Lösung unter der Bedingung, dass $a \neq b$ ist (da sonst der Nenner gleich null wäre).

Aufgabe 15/75
Man zeige für das gleichseitige Dreieck ABC und einen beliebigen Punkt P derselben Ebene die Gültigkeit der Ungleichung $PA \leq PB + PC$.

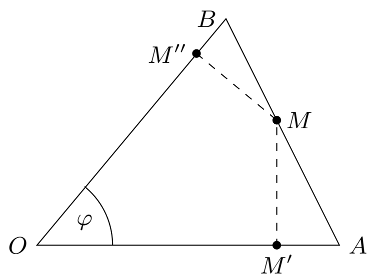


Zum Beweis drehe man die zu untersuchende Figur um den Punkt A um 60° im Uhrzeigersinn. Dabei geht C in B über, P in P' (Abbildung), und es ist $AP = AP'$ und $\measuredangle PAP' = 60°$.
Daraus folgt, dass das Dreieck PAP' gleichseitig ist. Also gilt $AP = PP'$.
Ferner ist $P'B = PC$ (das folgt aus der Drehung). Wegen der Gültigkeit der Dreiecksungleichung gilt nun $PB + P'B \geq PP'$, damit $PB + PC \geq PA$.
Das Gleichheitszeichen gilt nur für bestimmte, entartete Dreiecke $PP'B$, nämlich dann, wenn B auf der Verbindungsstrecke PP' liegt.

Aufgabe 16/75
Gegeben seien ein Winkel $\varphi < 180°$ mit dem Scheitel O und ein fester Punkt M innerhalb des Winkelraums. Eine veränderliche Gerade g durch M schneide die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B. Man beweise, dass dann

$$\frac{1}{F(AMO)} + \frac{1}{F(BMO)} = \text{ konstant}$$

gilt, wobei mit $F(XMO)$ der Flächeninhalt des Dreiecks XMO bezeichnet ist.



Wir beweisen die Behauptung für einen spitzen Winkel φ. Der Beweis für einen rechten oder einen stumpfen Winkel φ verläuft analog. Es ist (Abbildung)

$$F(AMO) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot MM' \qquad ; \qquad F(BMO) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot MM''$$

Damit ist dann

$$\frac{1}{F(AMO)} + \frac{1}{F(BMO)} = \frac{2}{OA \cdot MM'} + \frac{2}{OB \cdot MM''} = \frac{2(OB \cdot MM'' + AO \cdot MM')}{OA \cdot MM' \cdot OB \cdot MM''}$$

Nun ist aber

$$OB \cdot MM'' + OA \cdot MM' = 2F(ABO) = OA \cdot OB \cdot \sin\varphi$$

Setzt man dies oben ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{F(AMO)} + \frac{1}{F(BMO)} = \frac{2 \cdot OA \cdot OB \sin\varphi}{OA \cdot OB \cdot MM' \cdot MM''} = \frac{2\sin\varphi}{MM' \cdot MM''} = \text{ konstant}$$

weil $\sin\varphi$, MM' und MM'' konstant sind.

Aufgabe 17/75
Gegeben ist die Funktion

$$y = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - \sin^2 x + 5$$

Gesucht sind diejenigen Werte von x, für die y einen Extremwert annimmt. Die Aufgabe ist ohne Verwendung der Differentialrechnung zu lösen!

Wegen $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ kann man die gegebene Funktion auch in der Form

$$y = 3\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + 4$$

darstellen. Daraus ergibt sich

$$y = \left(\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = \left(\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

An dieser Form der Darstellung erkennt man sofort:
1. Der Funktionswert y wird minimal, wenn der Klammerausdruck gleich null ist, also für $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, es ist $y_{min} = \frac{7}{4}$.
2. Der Funktionswert y wird maximal, wenn der Betrag des Klammerausdrucks maximal ist, also für $x = \pi(2k+1)$ und es ist

$$y_{max} = \left(-\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 7 + 3\sqrt{3}$$

In beiden Fällen ist k irgendeine ganze Zahl.

Aufgabe 18/75
Man ermittle sämtliche Tripel reeller Lösungen $(x; y; z)$ der Gleichung

$$x^2 + y^4 + z^6 + 14 = 2x + 4y^2 + 6z^3$$

Durch Umformung ergibt sich aus der gegebenen Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 - y^4 - 4y + 4 + z^6 - 6z + 9 = 0 \to (x-1)^2 + (y^2-2)^2 + (z^3-3)^2 = 0$$

Eine Summe von Quadraten reeller Zahlen ist genau dann gleich null, wenn jedes Quadrat gleich null ist. Damit folgt

$$x = 1 \qquad ; \qquad y = \pm\sqrt{2} \qquad ; \qquad z\sqrt[3]{3}$$

Es existieren also die beiden Lösungstripel $(1; \sqrt{2}; \sqrt[3]{3})$ und $(1; -\sqrt{2}; \sqrt[3]{3})$.

Aufgabe 19/75
Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen mit je fünf unterschiedlichen Ziffern haben die Quersumme 18?
(Anmerkung: Vierstellige Zahlen mit einer vorgesetzten Null sollen nicht als fünfstellig gelten.)

Zunächst stellt man lexikographisch (im Sinne der Ordnung den natürlichen Zahlen) alle steigenden Folgen von fünf Ziffern mit der Summe 18 auf:

0	1	2	6	9	0	2	3	5	8
0	1	2	7	8	0	2	3	6	7
0	1	3	5	9	0	2	4	5	7
0	1	3	6	8	0	3	4	5	6
0	1	4	5	8	1	2	3	4	8
0	1	4	6	7	1	2	3	5	7
0	2	3	4	9	1	2	4	5	6

Jede dieser 14 Folgen kann man $5! = 120$ mal permutieren, so dass man $14 \cdot 120 = 1680$ verschiedene Folgen aus fünf verschiedenen Ziffern mit der Summe 18 erhält. Bei der Bildung der fünfstelligen Zahlen sind alle Folgen zu streichen, die mit der Ziffer 0 beginnen. Das sind die ersten elf der obigen Aufstellung, bei denen die jeweils folgenden vier Ziffern $4! = 24$ mal permutierbar sind.
Somit entfallen $11 \cdot 24 = 264$ Folgen bei der Bildung der fünfstelligen Zahlen. Es gibt also 1416 fünfstellige Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern und der Quersumme 18.

Aufgabe 20/75
Die Seiten eines Dreiecks seien mit a, b, c, der Umfang mit u, der Umkreisradius mit R und der Inkreisradius mit r bezeichnet. Man beweise, dass die beiden Ungleichungen äquivalent sind:

$$R^2 \geq \frac{abc}{u} \qquad \text{und} \qquad R^2 \geq 4r^2$$

Es gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks

$$A = \frac{abc}{4R} = \frac{ru}{2}$$

Also ist $\frac{abc}{u} = 2rR$. Gilt nun $R^2 \geq \frac{abc}{u} = 2rR$ so gilt wegen $R > 0$ auch $R \geq 2r$ und $R^2 \geq 4r^2$.
Gilt aber $R^2 \geq 4r^2$, so folgt wegen $R > 0$: $R > 2r$ und

$$R^2 \geq 2rR = \frac{abc}{u}$$

Jede der beiden Ungleichungen folgt also aus der anderen; das heißt aber nichts anderes, als dass sie äquivalent sind.

Aufgabe 21/75
Gegeben ist das Quadrat $M_1M_2M_3M_4$ mit der Seitenlänge $2a$. In der Ebene des Quadrate liege ein beliebiger Punkt P. Mit l_i sei der Abstand PM_i bezeichnet ($i = 1; 2; 3; 4$).

1. Gesucht ist die Menge der Punkte P, für die gilt

$$\sum_{i=1}^{4} l_i^4 = 4na^4$$

wobei n eine nicht negative reelle Zahl ist.

2. Für welches kleinste n ist die gesuchte Menge nicht leer?

3. Die Menge ist für $n = 13$ und für $n = 24$ konkret anzugeben.

Das Quadrat liege o.B.d.A. so in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem, dass der Mittelpunkt im Ursprung und die Eckpunkte auf den Achsen liegen. Die Koordinaten der Eckpunkte sind dann

$$M_1(a\sqrt{2}; 0) \quad ; \quad M_2(0; a\sqrt{2}) \quad ; \quad M_3(-a\sqrt{2}; 0) \quad ; \quad M_4(0; -a\sqrt{2})$$

die Koordinaten des Punktes P seien $P(x; y)$. Dann gilt (wobei zur Abkürzung $a\sqrt{2} = u$ gesetzt ist)

$$\sum_{i=1}^{4} l_i^4 = [(x-u)^2 + y^2]^2 + [x^2 + (y-u)^2]^2 + [(x+u)^2 + y^2]^2 + [x^2 + (y+u)^2]^2 =$$

$$= [x^2 - 2xu + u^2 + y^2]^2 + [x^2 + y^2 - 2yu + u^2]^2 + [x^2 + 2xu + u^2 + y^2]^2 + [x^2 + y^2 + 2yu + u^2]^2$$

Jede der eckigen Klammern enthält den Term $x^2 + y^2 + u^2$. Setzt man dafür w, so folgt

$$\sum_{i=1}^{4} l_i^4 = (w - 2xu)^2 + (w - 2yu)^2 + (w + 2xu)^2 + (w + 2yu)^2$$

woraus sich nach kurzer Rechnung

$$\sum_{i=1}^{4} l_i^4 = 4w^2 + 8u^2(x^2 + y^2) = 4w^2 + 8u^2(w - u^2) = 4w^2 + 8u^2w - 8u^4 = 4na^4$$

ergibt. Die Lösung der sich daraus ergebenden quadratischen Gleichung

$$w^2 + 2u^2w - 2u^4 - na^4 = 0$$

ist (wegen $w \geq 0$)

$$w = \sqrt{3u^4 + na^4} - u^2 = x^2 + y^2 + u^2$$

mit $u = a\sqrt{2}$

$$x + y = \sqrt{12a^4 + na^4} + 4a^2 = a^2(\sqrt{12 + n} - 4)$$

Die gesuchte Punktmenge ist also der Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = a\sqrt{\sqrt{12+n}-4}$.
Damit r reell wird, ist notwendig und hinreichend, dass $n \geq 4$ ist. Das kleinste n ist also $n = 4$; für diesen Wert ergibt sich $r = 0$, also $P(x;y) = P(0;0)$ als einziges Element der Menge.
Für $n = 13$ ergibt sich $r = a$, also der Inkreis, für $n = 24$ ergibt sich $r = a\sqrt{2}$, also der Umkreis des Quadrats.

Aufgabe 22/75
Wie viele verschiedene Dreiecke gibt es, bei denen die Maßzahl des Umfangs 50 ist und die Maßzahlen der Seiten natürliche Zahlen sind?

Es seien $a;b;c$ die Seiten des Dreiecks, wobei (o.B.d.A.) $a \geq b \geq c$ sei. Aus $a+b+c = 50$ und $a < b+c$ folgt dann $3a \geq 50$, also

$$\frac{50}{3} \leq a < 25 \qquad \text{und} \qquad c \geq 50 - 2a$$

Wegen der geforderten Ganzzahligkeit von a; b; c kommen für a nur die 8 Werte $17; 18; 19; ...; 24$ in Frage.
Für c ergeben sich die folgenden Variationsmöglichkeiten (wobei mit $n(a)$ deren Anzahl bezeichnet ist):

a	c	n(a)
17	16	1
18	14...16	3
19	12...15	4
20	10...15	6
21	8...14	7
22	6...14	9
23	4...13	10
24	2...13	12

Bei jeder Variationsmöglichkeit für c ergibt sich b eindeutig aus $b = 50 - a - c$. Es gibt also insgesamt

$$\sum_{a=17}^{24} n(a) = 52$$

verschiedene Dreiecke. Unter ihnen können nämlich nicht zwei gleiche sein, da in jedem Fall a größte und c kleinste Seite ist. Es gilt also stets $a \geq b \geq c$.
Zusatz: Wie man sich leicht überzeugt, ist das Bildungsgesetz für n(a):

$$n(a) = \frac{1}{4}[6a - 97 + (-1)^a]$$

Aufgabe 23/75
Es ist zu beweisen, dass die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{a_i^2} = 1$$

keine Lösung in natürlichen Zahlen a_i hat.

Angenommen, die Gleichung habe Lösungen in natürlichen Zahlen a_i und es sei (o.B.d.A.) $a_1 = \min a_i$.
Dann ist

$$\frac{1}{a_1^2} = \max \frac{1}{a_i^2} \qquad \text{und damit}$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{a_i^2} = 1 < \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{a_1^2} = \frac{5}{a_1^2}$$

also $a_1^2 \leq 5$, $a_1 = 2$. Daraus folgt

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{a_i^2} = \frac{3}{4}$$

Nun sei $a_2 = \min a_i$ für $i \geq 2$ (ebenfalls o.B.d.A.). Dann folgt

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{a_i^2} = \frac{3}{4} \leq \sum_{i=2}^{5} \frac{1}{a_2^2} = \frac{4}{a_2^2}$$

also $a_2^2 \leq \frac{16}{3}$, $a_2 = 2$.
Setzt man diese Schlüsse fort, so ergibt sich $a_3 = 2, a_4 = 2$ und damit $\frac{1}{a_5^2} = 0$, womit die Annahme auf einen Widerspruch führt. Damit ist die Annahme widerlegt.

Aufgabe 24/75
Aus einer Tabelle der Fakultäten will jemand den Wert für 20! entnehmen. Dabei stellt er fest, dass zwei Ziffern unleserlich sind:

20! = 2 • •2902008176640000

Wie kann man die unleserlichen Ziffern ermitteln, ohne das Produkt auszurechnen?

Zur Lösung der Aufgabe kann man die Tatsache verwenden, dass 20! durch 9 und durch 11 ohne Rest teilbar ist. Bezeichnet man mit $Q(n)$ die Quersumme und mit $Q_A(n)$ die alternierende Quersumme einer natürlichen Zahl n, so gilt bekanntlich

$$Q(n) \equiv n \pmod 9 \qquad ; \qquad Q_A(n) \equiv n \pmod{11}$$

Nun ist (wobei mit x und y die fehlenden Ziffern bezeichnet sind)

$$Q(20!) = 47 + x + y \equiv x + y - 7 \pmod 9 \qquad Q_A(20!) = 1 - x + y \equiv 1 - x + y \pmod{11}$$

Wegen $Q(20!) \equiv 0 \pmod 9$ und $Q_A(20!) \equiv 0 \pmod{11}$ folgt $x + y \equiv 7 \pmod 9$, $x - y \equiv 1 \pmod{11}$.
Da x und y einstellige natürliche Zahlen sind (einschließlich 0), folgt aus der ersten dieser beiden Kongruenzen entweder $x + y = 7$ oder $x + y = 16$, aus der zweiten $x = y + 1$. Man erhält also die beiden Gleichungssysteme

$$x + y = 7 \qquad ; \qquad x - y = 1$$
$$x + y = 16 \qquad ; \qquad x - y = 1$$

Nur das erste davon hat natürliche Zahlen $(x; y)$ als Lösung: $(x; y) = (4; 3)$. Damit ergibt sich 20! = 2432902008176640000.

Aufgabe 25/75
Gesucht sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen, deren Quadrat gleich der 3. Potenz aus der Summe ihrer Ziffern ist.

Die zweistellige Zahl sei $10a + b = z'$ mit $a \neq 0; a,b \leq 9$, a, b natürlich. Dann lautet die Bedingung der Aufgabe:

$$z = (10a + b)^2 = (a + b)^3 = z$$

Die Zahl z ist also gleichzeitig Quadratzahl und Kubikzahl einer natürlichen Zahl, die Zahl z' demnach Kubikzahl einer natürlichen Zahl. Die einzigen zweistelligen Kubikzahlen sind $z'_1 = 27$ und $z'_2 = 64$. Beim Überprüfen ergibt sich, dass nur $z'_1 = 27$ die geforderten Bedingungen erfüllt: $27^2 = 729 = (2 + 7)^2$.

Lösung von Dr. Sander:

Die Ziffern seien x und y mit $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$; dann gilt

$$(10 + x + y)^2 = (x + y)^3 \qquad \to \qquad 10x + y = (x + y)\sqrt{x + y}$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, muss der Radikand eine Quadratzahl sein; weiter folgt daraus, dass $4 \leq x + y \leq 18$ ist. Aus $x + y = 4$ folgt $x = 0$, also scheidet diese Möglichkeit aus. Es verbleiben die Möglichkeiten:

$$x + y = 9 \qquad ; \qquad x + y = 16$$

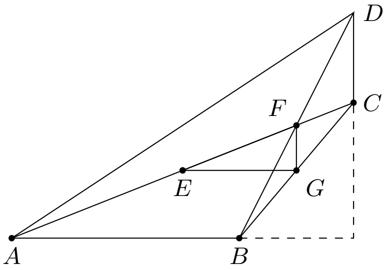
mit

$$(10x+y)^2 = 729, \quad 10x+y=27 \qquad \text{und} \qquad (10x+y)^2 = 4096, \quad 10x+y=64$$

wobei nur die erste die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
Die einzige Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist also die Zahl 27.

Aufgabe 26/75
Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$, bei dem sich die Verlängerungen der Seiten $AB = a$ und $CD = b$ unter einem rechten Winkel schneiden. Die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD seien E bzw. F. Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$EF^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$$



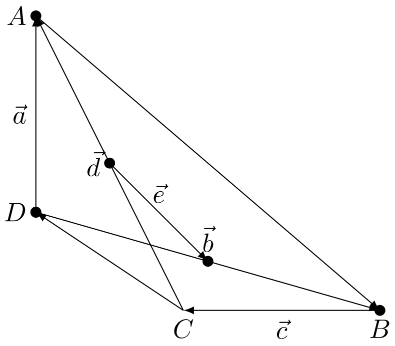
Verbindet man die Punkte E und F mit dem Halbierungspunkt G der Seite BC (Abbildung), so kann man die Strahlensätze anwenden; es ist

$$EG \parallel AB \text{ und } EG = \frac{1}{2}AB \qquad ; \qquad FG \parallel CD \text{ und } FG = \frac{1}{2}CD$$

Damit ist aber $\angle EFG = 90°$, und es gilt

$$EF^2 = EG^2 + FG^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2)$$

Lösung von Barbara Nöller:



Wir betrachten die Seiten und Diagonalen des Vierecks als Vektoren und verwenden die Bezeichnungen nach der Abbildung.
Dann gilt

$$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{d} + \vec{e} - \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{0} \qquad ; \qquad \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} + \vec{e} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{0}$$

Addiert man beide Gleichungen„ so folgt $\vec{a} + \vec{c} = -2\vec{e}$.
Multipliziert man diese Gleichungen mit sich selbst skalar, so ergibt sich

$$a^2 + c^2 + 2ac = 4e^2$$

wegen $\vec{a} \perp \vec{c}$ ist $\vec{a}\vec{c} = 0$. Damit erhält man sofort $\frac{1}{4}(a^2 + c^2) = e^2$.

Aufgabe 27/75
Man beweise, dass die Gleichung $x^2 - 777y^2 = 6$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt!

Da für jede ganze Zahl a entweder $a \equiv 0 \pmod 2$ oder $a \equiv 1 \pmod 2$ gilt, ist entweder $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ oder $a^2 \equiv 1 \pmod 4$. Damit folgt für

$$x^2 - 777y^2 \equiv 0 \pmod 4, \text{ wenn } x \equiv y \pmod 2 \text{ oder}$$

$$x^2 - 777y^2 \equiv 1 \pmod 4, \text{ wenn } x \equiv 1; y \equiv 0 \pmod 2 \text{ oder}$$

$$x^2 - 777y^2 \equiv 3 \pmod 4, \text{ wenn } x \equiv 0; y \equiv 1 \pmod 2$$

ist. Weitere Fälle sind nicht möglich. Da aber $6 \equiv 2 \pmod 4$ gilt, ist die Gleichung nicht in ganzen Zahlen lösbar.

Lösung von Erwin Huth:

Wählt man als Modul die Zahl 7, so gilt

$$x \equiv \pm 1 \quad \text{oder} \quad x \equiv \pm 2 \quad \text{oder} \quad x \equiv \pm 3 \qquad \text{also}$$

$$x^2 \equiv 1 \quad \text{oder} \quad x^2 \equiv 4 \quad \text{oder} \quad x^2 \equiv 9 \equiv 2$$

Wegen $777y^2 \equiv 0$ kann damit die linke Seite der Gleichung auf keinen Fall kongruent 6 sein, was aber erforderlich wäre, wenn die Gleichung ganzzahlige Lösungen hätte.

Lösung von Hans-Jürgen Pohle:

Die Gleichung kann man in der folgenden Weise umformen:

$$x^2 - 777y^2 = x^2 - 729y^2 - 48y^2 = 6$$
$$x^2 - (27y)^2 - 48y^2 = 6$$

Weitere Umformung liefert

$$(x - 27y)(x + 27y) = 6(1 + 8y)^2$$

Die rechte Seite der Gleichung ist durch 2, nicht aber durch eine höhere Potenz von 2 teilbar. Die linke Seite ist genau dann durch 2 teilbar, wenn x und y beide gerade oder beide ungerade sond; dann sind aber beide Faktoren durch 2 und die linke Seite der Gleichung damit durch 4 teilbar.
Folglich hat die gegebene Gleichung keine ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe 28/75
Es ist die Gleichung zu lösen:

$$\sqrt[3]{1 + \lg\tan x} + \sqrt[3]{1 - \lg\tan x} = 2$$

Erhebt man beide Seiten der gegebenen Gleichung in die dritte Potenz, so erhält man nach Vereinfachung und Ausklammern die Gleichung

$$\sqrt[3]{1 - \lg^2\tan x}(\sqrt[3]{1 + \lg\tan x} + \sqrt[3]{1 - \lg\tan x} = 2$$

Der Klammerausdruck ist gleich der linken Seite der gegebenen Gleichung, also folgt

$$\sqrt[3]{1 - \lg^2\tan x} = 1 \to \lg\tan x = 0 \to \tan x = 1 \to x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

(wobei k irgendeine ganze Zahl ist).

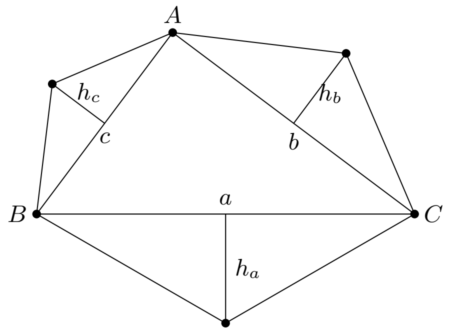
Aufgabe 29/75
Es sei $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$. Man zeige, dass unter dieser Voraussetzung die Zahlen x, y und z eine geometrische Folge bilden!

Multipliziert man die linke Seite der gegebenen Gleichung aus, so erhält man

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2xz = x^2 + y^2 + z^2$$

Daraus folgt $2xz = 2y^2$ und $|y| = \sqrt{xz}$. Die Zahl y ist also das geometrische Mittel der Zahlen x und z. Das aber ist ein Kriterium dafür, dass x, y und z eine geometrische Folge bilden.

Aufgabe 30/75
Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, auf dessen Seiten beliebige, aber einander ähnliche Dreiecke errichtet wurden.
Man zeige, dass die Fläche des Dreiecks über der Hypotenuse gleich der Summe der Dreiecksflächen über den Katheten ist (wobei unter "Fläche" der Flächeninhalt zu verstehen ist).



Der rechte Winkel des Dreiecks möge bei C liegen. Man entnehme die Bezeichnungen der Abbildung. Auf Grund der Ähnlichkeit gilt

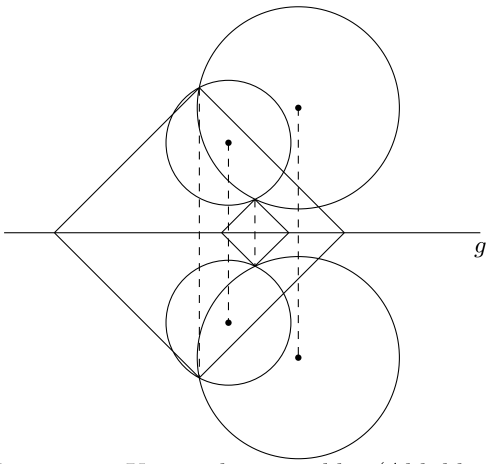
$$\frac{h_c}{c} = \frac{h_b}{b} = \frac{h_a}{a} = \lambda$$

Daraus folgt $h_c = \lambda c$, $h_b = \lambda b$, $h_a = \lambda a$. Für die Summe der Dreiecksflächen über den Katheten gilt

$$S = \frac{1}{2}ah_a + \frac{1}{2}bh - b = \frac{1}{2}(a^2\lambda + b^2\lambda) = \frac{1}{2}\lambda c^2 = \frac{1}{2}ch_c$$

Der letzte Term gibt aber die Fläche des Dreiecks über der Hypotenuse c an.

Aufgabe 31/75
Gegeben seien eine Gerade g und zwei beliebige Kreise, deren Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten von g liegen.
Zu konstruieren ist ein Quadrat so, dass zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf g, die beiden anderen Eckpunkte je auf einem der beiden Kreise liegen.



Da die Diagonalen eines Quadrats aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren, liegen die beiden nicht auf g fallenden Eckpunkte des Quadrates symmetrisch bezüglich g. Daraus folgt:
Der Eckpunkt auf einem Kreis liegt auch auf dem zum zweiten Kreis bezüglich g symmetrisch liegenden Kreis. Damit ergibt sich die Konstruktion:

Man spiegelt einen der beiden Kreise an g. Jeder Schnittpunkt dieses gespiegelten Kreises mit dem zweiten Kreis ist Eckpunkt eines gesuchten Quadrates. Das Lot von ihm auf g wird über g hinaus um sich selbst verlängert, der Endpunkt ist der gegenüberliegende Eckpunkt.

Die weitere Konstruktion ist klar (Abbildung). Die Determination ergibt sich unmittelbar aus der Anzahl der existierenden Schnittpunkte.

Aufgabe 32/75
Gesucht ist die kleinste Primzahl p, für die gilt

$$p+1 \equiv 0 \pmod 2; \qquad p+1 \equiv 0 \pmod 3; \qquad p+1 \equiv 0 \pmod 4;$$
$$p+1 \equiv 0 \pmod 5; \qquad p+1 \equiv 0 \pmod 6;$$

Wegen $p+4 \equiv 0 \pmod 5$ muss die Einerstelle der gesuchten Primzahl p eine 1 sein (wäre sie 6, so wäre p keine Primzahl).
Damit ist aber $p+1 \equiv 0 \pmod 2$ automatisch erfüllt, so dass diese Bedingung nicht mehr berücksichtigt werden muss. Aus der Bedingung $p+5 \equiv 0 \pmod 6$ folgt wegen $p+5 \equiv p-1 \equiv 0 (\text{mod } 6)$, dass in der Menge der höchstens zweistelligen Primzahlen nur die Primzahlen 31 und 61 in Frage kommen. Für beide gilt $p+2 \equiv 0 \pmod 3$, aber nur $p = 61$ erfüllt auch die Bedingung $p+3 \equiv 0 \pmod 4$. Damit ist p = 61 die kleinste Primzahl mit den geforderten Eigenschaften.

Lösung von Wolfgang Moldenhauer:

Infolge der letzten beiden Bedingungen gibt es natürliche Zahlen m und n derart, dass $p+5 = 5n$ und $p+5 = 6m$ gilt. Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung liefert

$$1 = 6m - 5n$$

Also ist $5n \equiv -1 \mod 6 \equiv 5 \mod 6$, $n \equiv 1 \mod 6$. Für $n = 1$ folgt $p = 1$, also keine Primzahl, $n = 7$ liefert $p = 31$, was gegen die dritte Bedingung verstößt.

Dagegen ergibt sich $n = 13$, dass $p = 61$ ist, was, wie die Probe zeigt, Lösung ist.

Lösung von Bruno Hanisch:

Aus den Kongruenzen $p + 4 \equiv 0 \mod 5$ und $p + 5 \equiv 0 \mod 6$ folgen die Kongruenzen

$$6p + 24 \equiv 0 \mod 30 \qquad ; \qquad 5p + 25 \equiv 0 \mod 30$$

Durch Subtraktion erhalten wir $p - 1 \equiv 0 \mod 30$. Also muss die Bedingung $p = 30k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) erfüllen.
Die Zahl $p_1 = 31$ erfüllt nicht die Kongruenz $p_1 + 3 \equiv 0 \mod 4$, dagegen erfüllt $p_2 = 61$ alle geforderten Kongruenzen. Folglich ist $p_2 = 61$ die kleinste Primzahl, die alle geforderten Kongruenzen erfüllt.
Weitere Primzahlen mit diesen Eigenschaften sind 181, 241, 421, 541, 601, 661, ...

Lösung von Karl-Bernd Dinter:

Aus den Kongruenzen folgen

$$\begin{aligned}
p+1 &\equiv 0 \mod 2 &\rightarrow\quad p-1 &= 2a &\rightarrow\quad a &= \frac{1}{2}(p-1)\\
p+2 &\equiv 0 \mod 3 &\rightarrow\quad p-1 &= 3b &\rightarrow\quad b &= \frac{1}{3}(p-1)\\
p+3 &\equiv 0 \mod 4 &\rightarrow\quad p-1 &= 4c &\rightarrow\quad c &= \frac{1}{4}(p-1)\\
p+4 &\equiv 0 \mod 5 &\rightarrow\quad p-1 &= 5d &\rightarrow\quad d &= \frac{1}{5}(p-1)\\
p+5 &\equiv 0 \mod 6 &\rightarrow\quad p-1 &= 6e &\rightarrow\quad e &= \frac{1}{6}(p-1)
\end{aligned}$$

wobei a, b, c, d, e ganze Zahlen sind.
Daraus ergibt sich unmittelbar, dass $p - 1$ gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 4, 5 und 6 sein muss.
Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen ist 60.
Tatsächlich ist $p = 60+1 = 61$ Primzahl und somit die kleinste Primzahl, die die geforderten Eigenschaften besitzt.

Aufgabe 33/75
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{i(i+2)}\right) < 2$$

Es ist

$$\prod_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{i(i+2)}\right] = \prod_{i=1}^{n}\frac{(i+1)^2}{i(i+2)} = \frac{(n+1)!^2 \cdot 2!}{n!(n+2)!} = \frac{2n!(n+1)!(n+1)}{n!(n+1)!(n+2)} = 2\frac{n+1}{n+2} < 2\frac{n+2}{n+2} = 2$$

Lösung von Uwe Quasthoff:

Ich behaupte, dass das gesuchte Produkt der Wert

$$2 - \frac{2}{n+2} = 2\frac{n+1}{n+2}$$

hat. Den Weise für diese Behauptung führe ich mit Hilfe der vollständigen Induktion.
Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig: $1 + \frac{1}{1\cdot 3} = 2 - \frac{2}{3}$.
Angenommen, sie sei für $n = k$ richtig:

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{i(i+2)}\right) = 2\frac{k+1}{k+2}$$

Dann folgt durch Multiplikation mit

$$1 + \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+3)}$$

$$\prod_{i=1}^{k+1}\left(1+\frac{1}{i(i+2)}\right)=2\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+3)}=2\frac{k+2}{k+3}$$

Gilt die Behauptung für $n=k$, so gilt sie also auch für $n=k+1$, und wegen der Richtigkeit für $n=1$ gilt sie für alle natürlichen Zahlen n. Da weiterhin

$$2-\frac{2}{n+2}<2$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt, ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Aufgabe 34/75
Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c und die Höhe auf der Hypotenuse mit h_c bezeichnet, so gilt $a+b<c+h_c$. Man beweise diesen Satz!

Allgemein gilt $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (1). Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gilt der Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$ (2).
Schließlich folgt aus der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks $A=\frac{1}{2}gh$ speziell für das rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b: $ab=ch_c$ (3). Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so folgt

$$(a+b)^2=c^2+2ch_c<c^2+2ch_c+h_c^2=(c+h_c)^2$$

also $a+b<c+h_c$.

Aufgabe 35/75
Gesucht sind alle Dreiecke mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ (übliche Bezeichnungsweise), die folgende Bedingungen erfüllen :
l. Es ist $a=9$ Längeneinheiten, b und c sind ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit.
2. Es ist $\alpha=2\beta$.

Die abgedruckte Aufgabe war durch einen Druckfehler unlösbar. In korrigierter Form wurde die Aufgabe als 10/76 im Aprilheft 1976 erneut gestellt.

Aufgabe 36/75
Man wähle eine beliebige zweistellige Primzahl mit der Quersumme 10 und subtrahiere von ihr so oft die Zahl 18, bis die Differenz zwischen 10 und 20 liegt. Die Differenz vervierfache man! Vor dieses Produkt setze man die Differenz!
Wie viele "Ausgangszahlen"für die Rechnung gibt es, und warum ist das Ergebnis eindeutig?

Zweistellige Zahlen mit der Quersumme 10 sind die Zahlen $19; 28; 37; 46; 55; 64; 73; 82; 91$. Unter diesen sind nur drei Primzahlen: $19; 37; 73$.
Da die Primzahl bereits zwischen 10 und 20 liegt, ist nach den Anweisungen der Aufgabe nullmal die Zahl 18 zu subtrahieren. Bei den beiden anderen Ausgangswerten führt die einmalige bzw. dreimalige Subtraktion der Zahl 18 auf das gleiche Zwischenergebnis 19. Von diesem eindeutig bestimmten Zwischenergebnis ausgehend erhält man als Endergebnis die Zahl 1976.

Beantwortung der Zusatzfrage: Es gibt also drei mögliche Ausgangszahlen für die Rechnung. Das Ergebnis ist trotzdem eindeutig, weil alle drei Zahlen die gleiche Kongruenz mod 19 haben:

$$10\equiv 1\equiv 37\equiv 1\equiv 73\equiv 1 \pmod{18}$$

und weil es zwischen 11 und 20 genau eine Zahl mit dieser Kongruenz mod 18 gibt.

2.16 Aufgaben und Lösungen 1976

Aufgabe 1/76
Es sei P ein konvexes Polyeder mit f Flächen und k Kanten. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung $3f \leq 2k$.
In welchem Fall gilt die Gleichheit?

Wir betrachten zunächst alle konvexen Polyeder, die ausschließlich von Dreiecksflächen begrenzt werden. Es sei f die Anzahl der Begrenzungsflächen. Da jede Fläche von genau drei Kanten begrenzt wird und jede Kante genau zwei Flächen angehört, ist die Anzahl k der Kanten

$$k = \frac{3f}{2} \qquad \text{also} \qquad 3f = 2k$$

Wenn nun ein konvexes Polyeder wenigstens eine Fläche mit mehr als drei Ecken besitzt, so kann man diesen Fall auf den ersten zurückführen. Man kann nämlich auf jeder Fläche, die nicht Dreiecksfläche ist, eine Pyramide so errichten, dass auch das neue Polyeder konvex ist. Dabei nimmt die Zahl der Flächen und die Zahl der Kanten um die gleiche Anzahl a zu. Damit gilt

$$3(f + a) = 2(k + a) \qquad ; \qquad 3f + a = 2k$$

wegen $a > 0$ also $3f < 2k$. Damit ist der Beweis geführt, die Gleichheit gilt für alle die konvexen Polyeder, die nur von Dreiecksflächen begrenzt sind.

Aufgabe 2/76
Man bestimme alle ganzen Zahlen $x; y$, die der Gleichung $3x - 2y = 1$ genügen!

Durch äquivalente Umformung folgt aus der gegebenen Gleichung

$$3x = 2y + 1 \qquad ; \qquad 3^x - 3 = 2^y - 2 \qquad ; \qquad 3(3^{x-1} - 1) = 2(2^{y-1} - 1)$$

Diese Gleichung ist sicher erfüllt, wenn $3^{x-1} - 1 = 0$ und $2^{y-1} - 1 = 0$ ist. Daraus folgt die erste Lösung: $x = 1$, $y = 1$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit. Gilt

$$3^{x-1} - 1 \neq 0 \qquad \text{und} \qquad 2^{y-1} - 1 \neq 0$$

so kann wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nur

$$3^{x-1} - 1 = 2 \qquad \text{und} \qquad 2^{y-1} - 1 = 3$$

sein (die Möglichkeit negativer Faktoren wird durch die Tatsache ausgeschlossen, dass die Exponentialfunktion a^x für $x \geq 0$ stets größer als 1 ist; vorausgesetzt $a > 1$. Dann folgt $3^{x-1} = 3$ und $2^{y-1} = 4$, also $x = 2$ und $y = 3$.
Auch für dieses Paar bestätigt die Probe die Richtigkeit. Weitere Lösungen sind auf Grund des Lösungsganges ausgeschlossen.

Aufgabe 3/76
Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen x_i mit $i = 1; 2; 3; ...; n$ und $0 \leq x_i \leq 1$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n} + \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n)} \geq 2^{n+1}$$

Sicher gilt $(2x_i - 1)^2 \geq 0$ für jedes i. Daraus folgt $1 \geq 4(1 - x_i)x_i$ und wegen $x_i > 0$, $1 - x_i > 0$ auch

$$\frac{1}{x_i(1 - x_i)} \geq 4 = 2^2$$

Damit gilt auch

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i(1 - x_i)} \geq \prod_{i=1}^{n} 2^2 \qquad ; \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \geq 2^{2n}$$

$$\sqrt{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}} \geq 2^n$$

Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \right) \geq \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}} \geq 2^n$$

also

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \geq 2^{n+1}$$

Aufgabe 4/76
Es ist zu beweisen, dass die Gleichung $x^3 + ax - b = 0$ für reelle $a; b$ und $b > 0$ eine und nur eine positive Wurzel hat.

Es seien x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Nach dem Satz des Vieta gilt dann

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \quad (1)$$
$$x_1x_2x_3 = b > 0 \quad (2)$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1. Alle drei Wurzeln sind reell. Dann folgt aus (1), dass sie nicht sämtlich positiv, aber auch nicht sämtlich negativ sein können. Sonst wären nämlich alle drei Summanden positiv, und die Summe könnte nicht gleich null sein. Aus (2) folgt dann sofort, dass genau eine Wurzel positiv und genau zwei Wurzeln negativ sind.

2. Nicht alle drei Wurzeln sind reell. Dann sind zwei Wurzeln konjugiert komplex und eine reell. O.B.d.A. seien $x_1 = \alpha + \beta i$ und $x_2 = \alpha - \beta i$ mit reellen α, β und $\beta \neq 0$ die beiden konjugiert komplexen Wurzeln. Dann nimmt (2) die Gestalt

   $$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)x_3 = (\alpha^2 + \beta^2)x_3 = b > 0$$

   an. Daraus folgt wegen $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ sofort, dass $x_3 > 0$ ist. Also ist auch in diesem Fall genau eine Wurzel positiv.

Lösung von Frank-Reiner Schöps:

Für die Gleichung

$$x^n + ax - b = 0$$

folgt nach der Descartschen Regel für
1. $a > 0$: Die Vorzeichen der Koeffizienten sind +, +, −, d.h., es liegt ein Vorzeichenwechsel vor; also existiert genau eine positive Wurzel.
2. $a < 0$: Die Vorzeichen der Koeffizienten sind +, −, −, d.h., wiederum ein Vorzeichenwechsel und damit ebenfalls eine positive Wurzel.
Der Fall $a = 0$ erledigt sich analog.

Lösung von Jörg Hutschenreiter:

Ich untersuche die Nullstellen der überall stetigen Funktion

$$f(x) = x^n + ax - b \qquad \text{mit } b > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$$

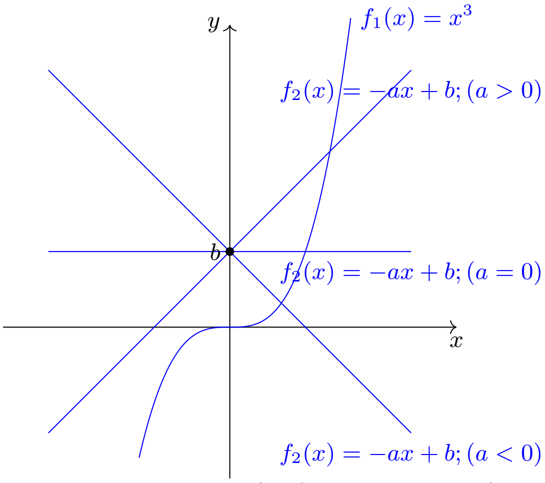
Wegen $f(0) = -b < 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty > 0$ hat die Funktions mindestens eine positive Nullstelle.
Angenommen, sie besäße mehr als eine positive Nullstelle, dann hätte sie wenigstens drei. Nach dem Satz von Rolle liegt zwischen je zwei Nullstellen ein Extremum. (Im Fall einer Doppelnullstelle ist diese selbst das Extremum.)

Damit folgt, dass $f(x)$ im Positiven wenigstens zwei Extrema hat, für die bekanntlich gilt

$$f'(x) = nx^{n-1} + a = 0 \qquad ; \qquad x^{n-1} = -\frac{a}{n}$$

Die letzte Gleichung hat aber in den reellen Zahlen x höchstens eine positive Lösung. Folglich ist die Annahme falsch, d.h., $f(x)$ hat genau eine positive Nullstelle.

Lösung von Günter Herrmann:



Die kubische Gleichung

$$x^3 + ax - b = 0 \tag{1}$$

liegt in der reduzierten Form vor, die sich auch einfache Weise graphisch diskutieren läasst.
Setzt man $x^3 = y$, so zerfällt die Gleichung (1) in die beiden Gleichungen

$$y = x^3 \qquad (2) \quad ; \quad y = -ax + b \qquad (3)$$

Die Gleichung (2) stellt eine rein kubische Parabel dar, die Gleichung (3) eine Gerade. Die Abszissen der Schnittpunkte der Geraden und der Parabel sind die Wurzeln der Gleichung (1) (siehe Abbildung).
Unabhängig von der Größe a gehen alle Geraden (3) durch den Punkt $(0; b > 0)$. Für positive a ergibt sich eine (für zunehmende x) fallende Gerade, für negative a eine steigende, für $a = 0$ eine Parallele zur x-Achse.
Aus der Abbildung ist zu erkennen, dass alle Geraden (3) die Parabel im positiven Bereich einmal, und nur einmal, schneiden.
Damit ist gezeigt, dass für $b > 0$ die kubische Gleichung (1) für alle reellen Werte a genau eine positive Wurzel hat.

Aufgabe 5/76
Man beweise: In jedem konvexen Viereck gilt die Ungleichung $\frac{u}{2} < s < u$, wobei mit u der Umfang und mit s die Summe der Diagonalenlängen bezeichnet ist.

Bezeichnet man die Ecken des Vierecks mit A, B, C und D und den Schnittpunkt der Diagonalen mit S, so folgt aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen

$$AB + BC > AC; \qquad AD + CD > AC; \qquad BC + CD > BD; \qquad AD + AB > BD$$

Durch Addition dieser Ungleichungen folgt sofort

$$2(AB + BC + CD + DA) = 2u > 2(AC + BD) = 2s$$

also $u > s$. Weiter folgt; ebenfalls aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen;

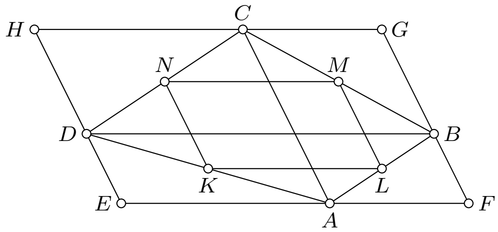
$$AS + BC > AB; \qquad AS + DS > AD; \qquad BS + CS > BC; \qquad CS + DS > CD$$

Ebenfalls durch Addition folgt daraus

$$2(AS + BS + CS + DS) = 2s > AB + BC + CD + DA = u \qquad \text{also} \qquad s > \frac{u}{2}$$

Lösung von Rainer Mück:

Durch die Eckpunkte des konvexen Vierecks $ABCD$ lege man Parallelen zu den nicht in diesen Eckpunkten endenden Diagonalen. Man erhält dadurch ein Parallelogramm $EFGH$, dem das Viereck einbeschrieben ist.



Halbiert man die Seiten des konvexen Vierecks $ABCD$, so erhält man die Eckpunkte $KLMN$ eines dem Viereck einbeschriebenen Parallelogramms. Dass die Seiten des einbeschriebenen Vierecks paarweise den Diagonalen parallel sind, folgt unmittelbar aus den Strahlensätzen.

Aus den Strahlensätzen folgt auch

$$KL = MN = \frac{BC}{2} \qquad ; \qquad LM = MK = \frac{AC}{2}$$

Der Umfang eines einbeschriebenen Gebildes ist stets kleiner als der Umfang eines umbeschriebenen Gebildes. Somit gilt, wobei mit U_{XYZW} der Umfang eines Vierecks $XYZW$ bezeichnet ist:

$$U_{KLMN} < U_{ABCD} < U_{EFGH}$$

Wegen $U_{KLMN} = AC + BD$ und $U_{EFGH} = 2(AC + BD)$ folgt direkt

$$AC + BD < U_{ABCD} < 2(AC + BD) \qquad \rightarrow \qquad \frac{u}{2} < AC + BC < u$$

Aufgabe 6/76
Man finde die Basis x des Zahlensystems, in dem die Gleichung gilt: $(211)_x^2 = (100021)_x$.

Nach Definition gilt

$$(211)_x = 2x^2 + x + 1 \qquad ; \qquad (100021)_x = x^5 + 2x + 1$$

Demnach nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt

$$(2x^2 + x + 1)^2 = x^5 + 2x + 1$$

an. Dieser Gleichung ist die Gleichung

$$x^2(x^3 - 4x^2 - 4x - 5) = 0$$

äquivalent. Da $x = 0$ als Basis eines Zahlensystems nicht in Frage kommt, sind die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$$

zu untersuchen. Da $x \mid x^3$, $x \mid 4x$, $x \mid 4x$, $x \mid 0$ folgt $x \mid$. Die Teiler ± 1 scheiden für eine Basis eines Zahlensystems ebenfalls aus, so dass nur ± 5 verbleiben. Die Probe bestätigt davon nur die Zahl $+5$. Durch Polynomdivision von $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ durch $x - 5$ erhält man das Polynom $x^2 + x + 1$, das keine (reellen) Nullstellen hat. Als einzige Lösung verbleibt damit $x = 5$. Es gilt die Gleichung $(211)_5^2 = (100021)_5$.

Lösung von Rosita Haase:

Das Produkt 211·211 soll 100021 im betrachteten Zahlensystem ergeben. Nach der "herkömmlichen"Methode erhält man

```
211 * 211
---------
      211
     211
    422
---------
    44521
```

Vergleicht man 44521 mit 100021, so stellt man fest, dass $2 + 1 + 2 = 5 = 0+$ Zehnerübertrag ist. Folglich liegt die Basis 5 vor.

Aufgabe 7/76
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass sowohl die Quersumme $Q(n)$ der Zahl n als auch die Quersumme $Q(n+1)$ des Nachfolgers von n durch 5 teilbar ist.

Die Zahl n muss an letzter Stelle die Ziffer 9 haben; denn bei jeder anderen Ziffer wäre $Q(n+l) = Q(n)+1$, und es könnten nicht sowohl $Q(n)$ als auch $Q(n+1)$ durch 5 teilbar sein.
Es sei nun $n = 10a + 9$, wobei a eine natürliche Zahl mit $a > 0$ ist. Man überlegt sich leicht, dass auch die Zahl a an der letzten Stelle die Ziffer 9 haben muss; denn sonst wäre $Q(n+1) = Q(a)+1 = Q(n)-8$ wegen $Q(n) = Q(a) + 9$. Folglich ist $a = 10b + 9$ mit $b \neq 0$, natürlich, also $n = 100b + 99$.
Analog überlegt man sich, dass b an letzter Stelle eine 9 hat, da sich sonst $Q(n+1) = Q(b)+1 = Q(n)-17$ ergibt. Es ist also $b = 10c + 9$ und damit $n = 1000c + 999$.
Die Fortsetzung der Überlegung führt zu $c = 10d + 9$ mit $n = 10000d + 9999$ und $Q(n+1) = Q(d)+1 = Q(n)-35$. Hier bricht die Kette ab. Man erkennt nämlich, dass $Q(n)$ und $Q(n+1)$ stets beide entweder durch 5 teilbar sind oder nicht teilbar sind, wenn genau die letzten vier Ziffern der Zahl n sämtlich 9 sind.
Als kleinste natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft erhält man damit $n = 49999$. Es ist $Q(n) = 40$ und $Q(n+1) = 5$.

Aufgabe 8/76
Es sei $\log_{90} 3 = a$, $\log_{90} 5 = b$. Man berechne daraus $\log_{90} 8 = f(a; b)$.

Es gilt $\log_{90} 8 = 3 \cdot \log_{90} 2$ (1) und

$$\log_{90} 90 = \log_{90}(2 \cdot 3^2 \cdot 5) = \log_{90} 2 + 2 \cdot \log_{90} 3 + \log_{90} 5 = 1 \quad \text{also}$$

$$\log_{90} 2 = 1 - 2 \cdot \log_{90} 3 - \log_{90} 5 = 1 - 2a - b \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt sofort $\log_{90} 8 = 3(1 - 2a - b)$

Aufgabe 9/76
Die Maßzahlen der Winkel eines Dreiecks seien α, β, γ. Man zeige, dass man aus den Strecken der Länge $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ ein Dreieck konstruieren kann!

Offenbar muss man beweisen, dass $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ die Dreiecksungleichungen erfüllen.
Es gilt

$$\sin\gamma = \sin 180^\circ - \alpha - \beta = \sin\alpha + \beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Da $\cos\alpha \leq 1$ und $\cos\beta \leq 1$ und nicht beide gleichzeitig gleich 1 gilt, folgt

$$\sin\gamma < \sin\alpha + \sin\beta$$

Aus Symmetriegründen kann man α, β, γ in dieser Ungleichung zyklisch vertauschen; damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 10/76
Gesucht sind alle Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ (übliche Bezeichnungsweise), die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Es ist $a = 9$ Längeneinheiten, b und c sind ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit.
2. Es ist $\beta = 2\alpha$

Aus $\beta = 2\alpha$ folgt $\gamma = \pi - 3\alpha$, damit $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$. Ferner folgt daraus

$$\sin\beta = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin\gamma = \sin\pi - 3\alpha = \sin 3\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$$

Nach dem Sinussatz ergibt sich

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 9 \cdot 2\cos\alpha \text{ LE}$$

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 9 \cdot (4\cos^2\alpha - 1) \text{ LE} = [(6\cos\alpha)^2 - 9] \text{ LE}$$

Wegen $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ist $\frac{1}{2} < \cos\alpha < 1$. Folglich gilt für jedes α: $4\cos^2\alpha - 1 > 0$, also $c > 0$. Damit nun c ganzzahlig wird, ist notwendig und hinreichend, dass $6\cos\alpha$ ganzzahlig ist, dass also $\cos\alpha = \frac{p}{6}$ mit $3 < p < 6$, p ganzzahlig gilt. Dann ist nämlich $c = (p^2 - 9)$ LE, und auch $b = 3p$ wird ganzzahlig. Es gibt also genau 2 Lösungen:

$$p_1 = 4; \quad \cos\alpha_1 = \frac{4}{6}; \quad b_1 = 12 \text{ LE}\ ; \quad c_1 = 7 \text{ LE}$$
$$p_2 = 5; \quad \cos\alpha_2 = \frac{5}{6}; \quad b_2 = 15 \text{ LE}\ ; \quad c_2 = 16 \text{ LE}$$

Aufgabe 11/76
Man beweise die Richtigkeit der Äquivalenz

$$a = b = c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = bc + ca + ab$$

Die Richtung von links nach rechts bedarf keines Kommentars; sie ist durch Einsetzen unmittelbar verifiziert.
Beweis der Richtung von rechts nach links: Aus

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab \text{ folgt}$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab = 0 \quad ; \quad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

Die Summe von Quadraten reeller Zahlen ist genau dann gleich null, wenn jedes Quadrat gleich null ist. Damit ergibt sich

$$a - b = 0 \to a = b; \qquad b - c = 0 \to b = c; \qquad c - a = 0 \to c = a \qquad \text{also} \qquad a = b = c$$

Aufgabe 12/76
Frau Quidam erzählt: "Mein Mann, ich und unsere vier Kinder haben sämtlich am gleichen Tag Geburtstag. An unserem letzten Geburtstag addierten wir unsere Alterszahlen, und wir erhielten unsere Hausnummer. Als wir sie multiplizierten, ergab sich der Kilometerstand unseres Trabants vor der letzten Generalüberholung: 180 523."
Wie alt sind die sechs Quidams? Welche Hausnummer haben sie?

Um die Alterszahlen zu finden, zerlegt man das Produkt 180523 zunächst in seine Primfaktoren: $180523 = 7 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 41$.
Dabei stellt man fest, dass nur vier Faktoren vorhanden sind. Also müssen noch zwei Faktoren ergänzt werden; diese beiden Faktoren können wegen der Ganzzahligkeit nur 1 sein: $180523 = 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 41$.
Demnach haben Quidams Zwillinge im Alter von 1 Jahr sowie Kinder von 7 und 17 Jahren, die Ehegatten sind 37 und 41 Jahre alt.
Weitere rechnerisch mögliche Lösungen wie $180523 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 119 \cdot 37 \cdot 41$ scheiden aus biologischen Gründen aus. Die Hausnummer ergibt sich damit zu $1 + 1 + 7 + 17 + 37 + 41 = 104$.

Aufgabe 13/76
Man beweise: Für alle positiven reellen Zahlen a_i gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2$$

Bekanntlich ist das geometrische Mittel positiver reeller Zahlen nie größer als ihr arithmetisches Mittel. Es gilt also

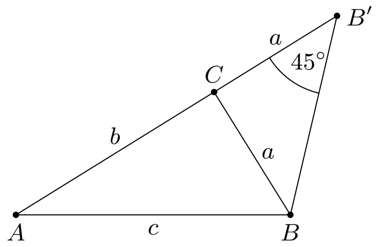
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Multipliziert man die letzten beiden Ungleichungen, so folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 14/76
Gegeben sei die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke ABC über einer (konstanten) Hypotenuse $AB = c$. Es ist zu beweisen:
Verlängert man bei jedem dieser Dreiecke eine Kathete über C hinaus um die andere Kathete, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen sämtlich auf dem gleichen Kreisbogen.



Wir bezeichnen den Endpunkt der Verlängerung von $AC = b$ mit B' (Abbildung). Wegen $CB' = CB$ ist das Dreieck BCB' gleichschenklig; wegen $\angle ACB = \angle B'CB = 90°$ ist es bei C rechtwinklig. Daraus folgt, dass $\angle BB'C = 45°$ unabhängig von der Lage von C ist. Damit ist auch $\angle AB'B = 45°$, und die Behauptung folgt aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes.

Aufgabe 15/76
Welche natürlichen Zahlen n sind als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar, welche nicht?

Es sei n eine natürliche Zahl, die als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar ist. Dann gilt

$$n = \sum_{i=0}^{r}(k+i) = \sum_{i=0}^{r} k + \sum_{i=0}^{r} i = (r+1)k + \frac{1}{2}(r+1)r = (r+1)(k+\frac{r}{2}) = \frac{1}{2}(r+1)(2k+r)$$

mit $k;r \in N$. Ist $r = 2s$ mit $s \in N$, so ist $n = (2s+1)(k+s)$ ist $r = 2s+1$ mit $s \in N$, so ist $n = (s+1)(2k+2s+1)$.
In jedem Fall enthält n einen ungeraden Faktor. Damit ist eine notwendige Bedingung dafür gefunden, dass n als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar ist. Es muss noch geprüft werden, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Angenommen, n enthalte einen ungeraden Faktor $2t+1$ mit $t \in N$: $n = (2t+1)p$. Ist $p \geq 1$, so ist

$$m = (2t+1)p = \sum_{i=-t}^{+t}(p+i)$$

eine Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Es ist nämlich

$$\sum_{i=-t}^{+t}(p+i) = \sum_{i=0}^{2t}(p-t+i) = \sum_{i=0}^{2t}(p-t) + \sum_{i=0}^{2t} i = (2t+1)(p-t) + \frac{1}{2}(2t+1)(2t) = (2t+1)p$$

Ist $t > p$, so ist

$$n = (2t+1)p = \sum_{i=0}^{2p-1}(t-p+1+i)$$

eine Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Es ist nämlich

$$\sum_{i=0}^{2p-1}(t-p+1+i) = \sum_{i=0}^{2p-1}(t-p+1) + \sum_{i=0}^{2p-1} i = 2p(t-p+1) + \frac{1}{2}(2p)(2p-1) = (2t+1)p$$

Damit ist gezeigt, dass genau die natürlichen Zahlen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar sind, die einen ungeraden Faktor enthalten. Daraus folgt, dass alle Potenzen der Basis 2 nicht als eine solche Summe darstellbar sind.

Aufgabe 16/76
Gegeben sei die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 17x + a_0 = 0$, von der bekannt ist, dass die Summe zweier Lösungen gleich 1 ist. Gesucht ist a_0.

Nach dem Satz des Vieta gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, wobei die x_i die Lösungen der Gleichung sind. O.B.d.A. sei $x_1 + x_2 = 1$. Dann folgt $x_3 = 3$. Setzt man diesen Wert in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$27 - 4 \cdot 9 - 17 \cdot 3 + a_0 = 0$$

und damit sofort $a_0 = 60$.

Aufgabe 17/76
Man bestimme alle nichtnegativen ganzen Zahlen i, m und n, für die $2^l + 2^m = n!$ gilt.

Zunächst ist offensichtlich, dass sich für $n = 0$ und für $n = 1$ keine Lösungen ergeben. Für $n_1 = 2$ erhält man $l_1 = 0$, $m_1 = 0$, für $n_2 = 3$ ist $l_{21} = m_{22} = 1$ und $l_{22} = m_{21} = 2$; und schließlich ergibt sich für $n_3 = 4$, dass $l_{31} = m_{32} = 3$, $l_{32} = m_{31} = 4$ ist. Es wird nun behauptet, dass für $n > 4$ keine Lösungen existieren.
Beweis dieser Behauptung:
Für $n > 4$ gilt $15 \mid n!$. Nun sei o.B.d.A. (wegen der Symmetrie in l und m) $l > m$. Wegen

$$2^l + 2^m = 2^m \cdot (2^{l-m} + 1)$$

gilt demnach $15 \mid 2^{l-m} + 1$. Daraus folgt, dass $2^{l-m} \equiv 4 \pmod 5$ ist. Das gilt genau für $l - m = 4k + 2$ mit $k \in N$.
Weiter folgt daraus, dass $2^{l-m} \equiv 2 \pmod 3$ ist. Das wiederum gilt genau für $l - m = 2k + 1$ mit $k \in N$. Dies ist jedoch ein Widerspruch; denn $l - m$ kann nicht gleichzeitig gerade $(4k+2)$ und ungerade $(2k+1)$ sein.

Aufgabe 18/76
Gegeben seien ein Kreisring und in ihm n Kreise derart, dass jeder von ihnen den inneren und den äußeren Begrenzungskreis und zwei weitere Kreise berührt. Wie groß ist n, wenn das Verhältnis aus der Kreisringfläche A_1 und der Summe der n Kreisflächen A_2 gleich $\sqrt{2}$ ist?

Es sei r_1 der Radius des äußeren Begrenzungskreises und r_2 der Radius des inneren. Dann gilt

$$A_1 = (r_1^2 - r_2^2)\pi \qquad ; \qquad A_2 = n\left[\frac{1}{4}(r_1 - r_2)^2\pi\right]$$

Daraus folgt

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}{n(r_1 - r_2)(r_1 - r_2)} = \frac{4(r_1 + r_2)}{n(r_1 - r_2)} = \sqrt{2}$$

Die Mittelpunkte der n Kreise liegen auf den Eckpunkten eines regelmäßigen n-Ecks. Verbindet man dessen Ecken mit dem Mittelpunkt des Kreisringes, so erhält man n kongruente gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ und der Basislänge $(r_1 - r_2)$; der Winkel α zwischen den Schenkeln ist $\frac{360°}{n}$. Damit folgt

$$\frac{\frac{1}{2}(r_1 - r_2)}{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)} = \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{180°}{n} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

Setzt man dies oben ein, so ergibt sich

$$\frac{4}{n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}} = \sqrt{2} \qquad ; \qquad n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} = 2\sqrt{2}$$

Diese Gleichung hat offensichtlich eine Lösung für $n = 4 : 4 \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$. Es ist noch zu zeigen, dass dies die einzige Lösung ist.
Man rechnet leicht nach, dass $n = 1; 2; 3$ keine Lösungen sind. Dass es für $n \geq 5$ keine Lösungen geben kann, beweist man folgendermaßen:
Bekanntlich wächst die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ für $x \to \infty$ streng monoton und es ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Dann wächst auch die Funktion $\frac{\pi \sin x}{x}$ streng monoton und es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi \sin x}{x} = \pi$$

Setzt man $x = \frac{\pi}{n}$, so nimmt die Funktion die Gestalt

$$n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$$

an. Aus der strengen Monotonie folgt nun sofort, dass für $n > 4$ keine weitere Lösung existieren kann.

Aufgabe 19/76
Bei einem Würfelspiel mit 6 Würfeln sollen nur diejenigen Würfe gewertet werden, bei denen mindestens eine 1 oder mindestens eine 5 oder mindestens 3 gleiche (beliebige) Zahlen auftreten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Wertung erfolgt?

Bei jedem Wurf mit 6 Würfeln, von denen jeder die Augenzahlen von 1 bis 6 zeigen kann, sind insgesamt $6^6 = 46656$ Variationen möglich. Die Anzahl der Möglichkeiten für ungünstige Fälle findet man durch die folgende Überlegung:
Ungewertet bleiben die Fälle, in denen höchstens 2mal die Augenzahl 2 oder 3 oder 4 oder 6 eintritt, also (zunächst ohne Berücksichtigung der Reihenfolge):

2 2 3 3 4 4	2 2 3 3 6 6	2 2 4 4 6 6	3 3 4 4 6 6
2 2 3 3 4 6	2 2 3 4 4 6	2 3 3 4 4 6	2 2 3 4 6 6
2 3 4 4 6 6	2 3 3 4 6 6		

Die ersten 4 dieser Kombinationen können wegen der Gleichheit von je zwei Zahlen je auf $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90$ Arten zustande kommen, die restlichen 6 auf $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 180$ Arten. Damit ist die Anzahl der ungünstigen Fälle $4 \cdot 90 + 6 \cdot 180 = 1440$ und die Wahrscheinlichkeit für einen nicht gewerteten Wurf beträgt

$$\frac{1440}{46656} = \frac{5}{162} \approx 0{,}0309 \approx 3{,}1\%$$

Aufgabe 20/76
Man beweise, dass für $n > 2$ die Ungleichung $5^n > 4^n + 3^n$ gilt, ohne dabei das Prinzip der vollständigen Induktion zu verwenden!

Es ist

$$3^2 + 4^4 = 5^2 \qquad ; \qquad 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Wegen $\frac{3}{5} < 1$ und $\frac{4}{5} < 1$ ist dann

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} < 1$$

Durch Multiplikation mit 5^n folgt die Behauptung $3^n + 4^n < 5^n$.

Aufgabe 21/76
Man berechne das Produkt: $\prod\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} j^2$.

Bekanntlich gilt $\sum\limits_{j=1}^{i} j^2 = \frac{1}{6}i(i+1)(2i+1)$. Daher ist

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j^2 = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{6}i(i+1)(2i+1) = \prod_{i=1}^{n}(i+1)\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{12}\cdot\prod_{i=1}^{n}2i(2i+1) =$$

$$= (n+1)!\cdot\frac{1}{12^n}\prod_{i=1}^{2n+1} i = \frac{1}{12^n}(n+1)!(2n+1)!$$

Aufgabe 22/76
Man beweise, dass die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2+c^2-a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen hat, wenn a, b, c die Maßzahlen der Seiten eines Dreiecks sind!

Das Auftreten des Klammerausdrucks $(b^2+c^2-a^2)$ lässt es naheliegend erscheinen, den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie zu verwenden. Aus $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ folgt $b^2+c^2-a^2 = 2bc\cos\alpha$. Damit nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt

$$b^2x^2 + 2bcx\cos\alpha + c^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^2 + 2\frac{c}{b}x\cos\alpha + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 0$$

an. Die Lösungen sind

$$x_{1;2} = -\frac{c}{b}\left(\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}\right)$$

Wegen $0 < \alpha < 180°$ ist $\cos^2\alpha < 1$. Daraus folgt, dass die Lösungen nicht reell sind.

Aufgabe 23/76
Man bestimme alle reellen Zahlentripel $\{a;b;c\}$ für die $a;b;c$ die drei Lösungen der Gleichung $x^3 - abx^2 + bcx - ca = 0$ sind.

Wenn ein Tripel $\{a;b;c\}$ Lösung der gegebenen Gleichung ist, dann gilt nach dem Wurzelsatz des Vieta

$$\begin{aligned} a+b+c &= ab \quad (1)\\ ab+bc+ca &= bc \quad (2)\\ abc &= ac \quad (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt (4) $a=0$ oder (5) $b=1$ oder (6) $c=0$. Wir untersuchen diese drei Fälle getrennt:
1.Fall: $a=0$. Dann folgt aus (1) $b=-c$, beliebig.
2.Fall: $b=1$. Dann folgt aus (1) $c=-1$, aus (2) a beliebig.
3.Fall: $c=0$. Dann folgt aus (1) $a+b=ab$, aus (2) $ab=0$ also insgesamt $a=b=0$.
Damit erfüllen die folgenden Tripel die gegebene Gleichung:

$$\begin{aligned} &1. \quad \{a;b;c\} = \{0;y;-y\}\\ &2. \quad \{a;b;c\} = \{y;1;-1\}\\ &3. \quad \{a;b;c\} = \{0;0;0\} \end{aligned}$$

wobei in jedem Fall y eine reelle Zahl ist.

Aufgabe 24/76
Es ist zu beweisen: Sind im Raum $n = 2k$ Punkte ($k \in N$) derart gegeben, dass keine drei Punkte auf derselben Geraden liegen, so sind zwischen diesen Punkten höchstens k^2 Verbindungsstrecken möglich, ohne dass diese Strecken ein Dreieck mit Eckpunkten aus der gegebenen Punktmenge bilden.

Man denke sich die Punkte von $i = 1$ bis $i = n = 2k$ durchnummeriert und verbinde jeden Punkt P_{2i-1} mit jedem Punkt P_{2i}.
Da die gegebene Punktmenge genau k Punkte P_{2i-1} und genau k Punkte P_{2i} enthält, entstehen auf diese Weise genau k^2 Verbindungsstrecken. Unter ihnen sind keine drei, die ein Dreieck mit Eckpunkten P_i bilden. Wäre das nämlich der Fall, so müssten entweder zwei Punkte mit geradem oder zwei Punkte mit ungeradem Index miteinander verbunden sein, das ist aber auf Grund der Konstruktionsvorschrift ausgeschlossen.

Damit ist bewiesen, dass mindestens k^2 Verbindungsstrecken mit der festgelegten Einschränkung möglich sind. Es ist noch zu beweisen, dass es nicht mehr als k^2 solche Strecken gibt.
Dazu zeigen wir zunächst, dass nur ein solche Konstruktion wie eben beschrieben k^2 Strecken liefert, jede andere Konstruktion dagegen weniger.
Wäre nämlich eine andere Konstruktion mit k^2 den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Strecken möglich, so müssten von wenigstens einem Punkt mehr oder von einem Punkt weniger als k Strecken ausgehen.
Jede Erhöhung der von einem Punkt ausgehenden Streckenzahl um 1 bedingt aber die Verbindung zweier Punkte, deren Indizes entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Damit keine Dreiecke entstehen, müssen sämtliche anderen Strecken entfallen, die von einem dieser beiden Punkte ausgehen. Die Anzahl der Verbindungsstrecken wäre als $k^2 - k + 1 < k^2$ (für $k > 1$).

Damit ist zugleich bewiesen: Sind zwischen $n = 2k$ Punkten k^2 Verbindungsstrecken derart gegeben, dass keine drei ein Dreieck bilden, so ist eine Indizierung möglich, die der oben gegebenen Konstruktionsvorschrift entspricht, und jede weitere eingefügte Strecke würde entweder zwei Punkte mit geradem oder zwei Punkte mit ungeradem Index verbinden, also zu einem Dreieck führen. Daraus folgt, dass k^2 die Höchstzahl der Verbindungsstrecken ist.

Aufgabe 25/76
Man löse die Gleichung $\sin^4 x + \cos^7 x = 1$ für reelle Zahlen x.

Wegen
$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2$$
folgt aus der Gleichung nach kurzer Rechnung
$$\sin^4 x + \cos^7 x = 1 \to \cos^2 x(\cos^5 x + \cos^2 x - 2) = 0$$

1. Diese Gleichung ist erfüllt für $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \sin x = \pm 1$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.
2. Diese Gleichung ist erfüllt für $\cos^5 x + \cos^2 x - 2 = 0$. Wegen $\cos x \leq 1, \cos^5 x \leq 1$ kann diese Gleichung nur für $\cos x = 1, x = 2k\pi, \sin x = 0$ erfüllt sein. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 26/76
Gesucht sind alle Quadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ von Primzahlen, die das Gleichungssystem erfüllen:
$$p_1^2 + p_2^2 = p_3 \quad (1) \qquad ; \qquad p_1^2 - p_2^2 = p_4 \quad (2)$$

Wären beide Primzahlen p_1 und p_2 ungerade, so könnte p_4 als gerade Primzahl nur $p_4 = 2$ sein und es wäre
$$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2)(p_1 - p_2) = 2$$
Daraus würde folgen: $p_1 + p_2 = 2, p_1 - p_2 = 1$; dieses Gleichungssystem ist aber nicht in ganzen Zahlen (erst recht nicht in Primzahlen) lösbar. Folglich ist von den Primzahlen p_1 und p_2 genau eine gerade und

genau eine ungerade.
Wegen $p_4 > 0$ muss $p_2 = 2$ sein. Damit nimmt (2) die Gestalt

$$p_1^2 - 2^2 = (p_1 + 2)(p_1 - 2) = p_4$$

an. Daraus folgt $p_1 + 2 = p_4, p_1 - 2 = 1$. Also ist $p_1 = 3, p_4 = 5$. Aus (1) ergibt sich dann weiter

$$p_1^2 + p_2^2 = 9 + 4 = 13 = p_3$$

Das Quadrupel $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 2, 13, 5)$ ist also das einzige, das das Gleichungssystem erfüllt.

Aufgabe 27/76
Man zeige, dass das Polynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

für gegebenes n keine mehrfachen Nullstellen besitzt!

Angenommen, das gegebene Polynom hätte eine mindestens zweifache Nullstelle x_0. Dann wäre

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = (x - x_0)^{2+m}\varphi(x)$$

wobei $m \geq 0, m \in N$ gilt und $\varphi(x)$ ein Polynom (n-m-2)-ten Grades ist. Differenziert man $f(x)$ nach x, so erhält man

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} = (2 + m)(x - x_0)^{1+m}\varphi(x) + (x - x_0)^{2+m}\varphi'(x)$$

Man erkennt, dass x_0 auch Nullstelle von $f'(x)$ ist. Dann ist aber x_0 auch Nullstelle von

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Einzige Nullstelle von $\frac{x^n}{n!}$ ist $x_0 = 0$. Nun ist aber $x_0 = 0$ offensichtlich nicht Nullstelle von $f(x)$ im Widerspruch zur Annahme. Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 28/76
In einem Dreieck mit den Winkeln α, β, γ und den ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b, c gelte

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3 \qquad ; \qquad \tan\beta \cdot \tan\gamma = 6$$

Man berechne die Winkel α, β, γ sowie die Seitenverhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$.

Es ist

$$\tan\gamma = \tan(180° - \alpha - \beta) = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Damit erhalten die gegebenen Gleichungen die Gestalt

$$\tan\alpha\tan\beta = 3 \quad (1)$$

$$\tan\beta\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -6 \quad (2)$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$\tan\alpha = 1; \qquad \tan\beta = 3; \qquad \tan\gamma = 2$$

(negative tan-Werte entfallen, da $0° < \alpha, \beta, \gamma \leq 90°$ gilt). Damit folgt $\alpha = 45°, \beta = 71{,}56°, \gamma = 63{,}43°$ (bei Verwendung einer fünfstelligen Tafel).
Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad ; \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Aus
$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$
und $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma > 0$ ergibt sich
$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\tan^2\alpha(1+\tan^2\beta)}{\tan^2\beta(1+\tan^2\alpha)}} = \sqrt{\frac{1\cdot(1+9)}{9\cdot(1+1)}} = \sqrt{\frac{10}{18}} \approx 0{,}745$$
$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{\tan^2\alpha(1+\tan^2\gamma)}{\tan^2\gamma(1+\tan^2\alpha)}} = \sqrt{\frac{1\cdot(1+4)}{4\cdot(1+1)}} = \sqrt{\frac{5}{18}} \approx 0{,}791$$

Aufgabe 29/76
Für den Transport von 416 Personen stehen Omnibusse mit 7, 21 und 31 Sitzplätzen zur Verfügung. Der Transport soll mit der geringsten Anzahl von Fahrten durchgeführt werden, wobei jedoch kein Sitzplatz frei bleiben soll. Welche Omnibusse sind mit wieviel Fahrten einzusetzen?

Wir bezeichnen mit x, y bzw. z die Anzahl der Fahrten, die der Bus mit 7, 21 bzw. 31 Plätzen ausführen muss. Dann gelten die folgenden Beziehungen:
$$7x + 21y + 31z = 416 \qquad ; \qquad x+y+z \Rightarrow \text{ min} \qquad ; \qquad x;y;z \in N$$
Dividiert man die Gleichung durch 7, so ergibt sich
$$x + 3y + 4z + \frac{3}{7}z = 59 + \frac{3}{7}$$
Daraus folgt sofort: Soll kein Platz frei bleiben, so muss $z \equiv 1 \pmod 7$ sein, also $z = 7k+1$ mit $k \in N$.
Setzt man dies in die Gleichung ein, so ergibt sich nach äquivalenter Umformung $x + 3y + 31k = 55$.
Offensichtlich würde $k = 0$ nicht zum Minimum für die Summe $x+y+z$ führen. Also ist $k = 1, z = 8$.
Damit erhält man $x + 3y = 24$, woraus man sofort erkennt, dass für $x = 0, y = 8$ sich das Minimum für die Summe ergibt.
Es sind also je 8 Fahrten mit den Omnibussen für 21 und 31 Personen erforderlich, der Omnibus für 7 Personen wird nicht eingesetzt.

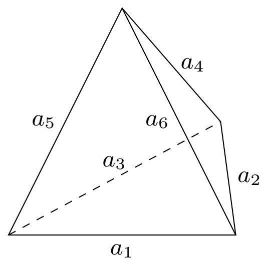
Aufgabe 30/76
Man bestimme alle Paare $(n;m)$ natürlicher Zahlen, die der Gleichung $4^n + 65 = 9^m$ genügen.

Wir formen die Gleichung äquivalent so um, dass sie als Gleichung zwischen Produkten erscheint. Aus $4^n + 65 = 9^m$ folgt
$$9^m - 4^n = 65 = 3^{2m} - 2^{2n} = (3^m - 2^n)(3^m + 2^n) = 5\cdot 13$$
Da $3^m + 2^n > 3^m - 2^n$, folgt $3^m - 2^n = 5; 3^m + 2^n = 13$.
Durch einfache Rechnung ergibt sich daraus $n = m = 2$ als Lösung. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.
Die Möglichkeit, $65 = 1 \cdot 65$ zu wählen, scheidet aus, da sich daraus kein ganzzahliges m ergibt. Damit ist die angegebene Lösung die einzige.

Aufgabe 31/76
Man bestimme alle ganzzahligen Paare $(x;y)$ die der Gleichung $16x^2 + 2xy + y^2 = 85$ genügen.

Es ist
$$85 = 16x^2 + 2xy + y^2 = 15x^2 + (x+y)^2 >= 15x^2 >= 0$$
also ist $x^2 \leq \frac{85}{15} < 6$, $x^2 \in \{0;1;4\}$.
Da sich aus der gegebenen Gleichung für $x^2 = 4$ ganzzahlige Werte für y ergeben, gilt $x_1 = 2, x_2 = -2$.
Für $x^2 = 4$ folgt $(x+y)^2 = 25$, d.h., $x + y = \pm 5$ und damit $y_{11} = 3, y_{12} = -7, y_{21} = 7, y_{22} = -3$.
Die Gleichung hat also die vier Paare $(2;3), (2;-7), (-2;7), (-2;-7)$ als Lösung.

Aufgabe 32/76
Man beweise: Haben die Seitenflächen eines Tetraeders sämtlich den gleichen Umfang, so sind sie kongruent.



Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung. Nach der Voraussetzung gilt dann:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_4 + a_6$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = a_5 + a_6 + a_1$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$a_1 + a_3 = a_4 + a_6 \quad (1)$$
$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 \quad (2)$$
$$a_2 + a_3 = a_5 + a_6 \quad (3)$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt $a_1 + a - 2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$.
Subtrahiert man von dieser Gleichung die Gleichungen (1), (2) und (3), so ergibt sich $a_2 = a_5, a_3 = a_6, a_1 = a_4$. Damit stimmen die vier Dreiecke in den Seiten überein, sie sind also kongruent.

Aufgabe 33/76
Man beweise: Ist $(a; b; c)$ ein (paarweise) teilerfremdes pythagoreisches Zahlentripel und b ungerade, so sind

$$u = \sqrt{\frac{c+b}{2}} \qquad \text{und} \qquad v = \sqrt{\frac{c-b}{2}}$$

natürliche Zahlen.

Es sei $(a; b; c)$ ein (paarweise) teilerfremdes pythagoreisches Zahlentripel mit ungeradem b. Dann ist sicher a gerade. Wäre nämlich a ungerade, so wäre $c^2 \equiv 2 \pmod 4$ wegen $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 4$ im Widerspruch zu der Tatsache, dass für keine natürliche Zahl n gilt $n^2 \equiv 2 \pmod 4$. Damit ist auch c ungerade, die Summe $c + b$ und die Differenz $c - b$ sind gerade. Man setze nun

$$\frac{c+b}{2} = x \qquad ; \qquad \frac{c-b}{2} = y$$

Wegen $c - b > 0, c + b \equiv c - b \equiv 0 \pmod 2$ sind x und y natürliche Zahlen, die wegen der Teilerfremdheit von b und c ebenfalls teilerfremd sind (aus $x = km; y = kn$ mit natürlichen Zahlen $k; m; n$ würde folgen $c = k(m + n), b = k(m - n)$). Es gilt dann $c = x + y \quad ; \quad b = x - y$ und wegen $a^2 + b^2 = c^2$ ist

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(x + y)^2 - (x - y)^2} = 2\sqrt{xy}$$

Daraus folgt, dass xy eine Quadratzahl ist. Aus der Teilerfremdheit von x und y folgt weiter, dass sowohl x als auch y selbst Quadratzahl ist. Würde nämlich wenigstens eine dieser beiden Zahlen einen Primfaktor in ungerader Potenz enthalten, so wäre das Produkt keine Quadratzahl, weil dieser Primfaktor wegen der Teilerfremdheit nicht in der anderen Zahl vorkommen kann. Es sind also

$$u = \sqrt{\frac{c+b}{2}} = \sqrt{x} \qquad ; \qquad v = \sqrt{\frac{c-b}{2}} = \sqrt{y}$$

natürliche Zahlen.

Aufgabe 34/76
In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie der Höhe h_c auf c gelte $2a2 - 3ab + 2b^2 = ch_c$.
Man bestimme die den Seiten a, b und c gegenüberliegenden Winkel α, β, γ.

Es ist

$$ch_c = 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 2a^2 - 4ab + 2b^2 + ab = 2(a^2 - 2ab + b^2) + ab = 2(a-b)^2 + ab$$

Wegen $\sin\gamma \leq 1$ gilt $ab \geq ab\sin\gamma = 2A = ch_c$ (wobei mit A der Flächeninhalt bezeichnet ist). Damit folgt

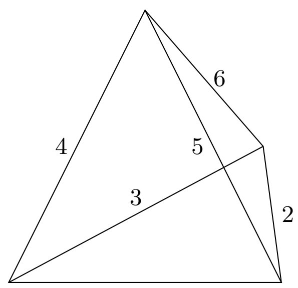
$$ch - c = 2(a-b)^2 + ab \geq 2(a-b)^2 + ch_c \qquad \text{also} \qquad 0 \geq (a-b)^2$$

Da andererseits $(a-b)^2 \geq 0$ gilt, folgt $a = b$ und daraus $\alpha = \beta$. Das Dreieck ist demnach gleichschenklig. Setzt man $a = b$ in die vorausgesetzte Gleichung ein, so folgt

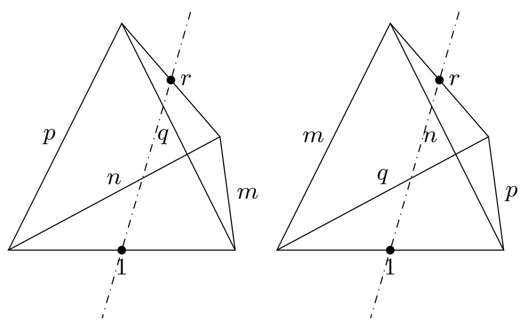
$$ch_c = 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 2a^2 - 3a^2 + 2a^2 = a^2$$

Aus $ch_c = 2A = a^2\sin\gamma$ ergibt sich nunmehr sofort $\sin\gamma = 1$, also $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Damit ist $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, das Dreieck ist rechtwinklig-gleichschenklig.

Aufgabe 35/76
Gegeben seien Kantenmodelle regulärer Tetraeder, bei denen die Kanten mit sechs Farben unterschiedlich gefärbt seien. Zwei derartige Modelle sollen als gleich gelten, wenn man sie so aufstellen kann, dass die Paare paralleler Kanten gleiche Farbe haben. Wie viele verschiedene Modelle sind möglich?



Die sechs Farben seien mit den Zahlen $1; 2; 3; 4; 5; 6$ bezeichnet.
Mit den gleichen Zahlen bezeichne man die entsprechend eingefärbten Kanten. Ferner sei die Reihenfolge der Kanten gemäß der ersten Abbildung festgelegt. Da man den Stahl eines jeden Modells in die Lage des Stabes 1 der Abbildung hängen kann, genügt es, zur Ermittlung der gesuchten Anzahl die Zahlen 2 bis 6 zu permutieren.
Es gibt $5! = 120$ Permutationen. Immer je zwei dieser 120 Modelle kann man in kongruente Parallelstellung (Gleichheit im Sinne dieser Aufgabe) bringen. Man verbinde z.B. im Modell mit der Kantenfolge $(1; m; n; p; q; r)$ die Mittelpunkte der Kanten 1 und r miteinander und drehe das Modell um diese Verbindungsgerade um 180° (Abbildung 2).



Man erhält die neue Kantenfolge $(1; p; q; m; n; r)$. Somit sind die beiden Modelle $(1; m; n; p; q; r)$ und $(1; p; q; m; n; r)$ im Sinne der Aufgabe gleich.
Ergebnis: Es gibt 60 verschiedene Modelle.

Aufgabe 36/76
Man beweise, dass die Zahl

$$z=\sum_{i=1}^{1977} i^{1977}$$

keine Primzahl ist!

Wir betrachten die Zahl z modulo 3. Es ist

$$z=\sum_{i=1}^{1977} i^{1977} = 1^{1977}+2^{1977}+3^{1977}+...+1977^{1977} \equiv$$

$$\equiv 1^{1977}+(-1)^{1977}+0^{1977}+...+1^{1977}+(-1)^{1977}+0^{1977} \equiv 1-1+0+...+1-1+0 \equiv 0 \pmod 3$$

Also ist z durch 3 ohne Rest teilbar und damit keine Primzahl.

2.17 Aufgaben und Lösungen 1977

Aufgabe 1/77
Man beweise: Wenn $\cos(\alpha+\beta)=0$ ist, dann gilt $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

Aus
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0 \quad \text{folgt} \quad \cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta \quad (1)$$
Aus $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta$ folgt mit $\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta$, $\sin 2\beta=2\sin\beta\cos beta$:
$$\sin\alpha+2\beta=\sin\alpha-2\sin\alpha\sin^2\beta+\cos\alpha(2\sin\beta\cos\beta) \quad (2)$$
Setzt man (1) in (2) ein, so folgt unmittelbar die Behauptung $\sin\alpha+2\beta=\sin\alpha$.

Aufgabe 2/77
Man beweise, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Hypotenuse mindestens so groß wie die vierfache Dreiecksfläche ist!

Es seien a und b die Katheten, c die Hypotenuse und A der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks. Sicher gilt
$$(a-b)^2\geq 0 \quad ; \quad a^2+b^2\geq 2ab$$
Wegen $a^2+b^2=c^2$ und $\frac{1}{2}ab=A$ folgt sofort die zu beweisende Ungleichung $c^2\geq 4A$. Gleichheit gilt für $a=b$, also für gleichschenklige Dreiecke.

Aufgabe 3/77
Auf wieviel Nullen endet die Zahl 1000! ?

Die Frage der Aufgabe ist identisch mit der Frage, wie oft in dem Produkt 1000! der Faktor $10=2\cdot 5$ enthalten ist. Es gilt also, die Anzahl der Primfaktorpaare $(2;5)$ zu ermitteln. Dazu ermitteln wir die Anzahlen A_2 und A_5 der Primfaktoren 2 bzw. 5, die kleinere von beiden ist die gesuchte.
Die Anzahl A_p der Primfaktoren p in dem Produkt $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ ist
$$A_p=\sum_{k=1}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$
wobei mit $[x]$ die größte ganze Zahl $a\leq x$ bezeichnet ist.
Jeder einzelne Summand dieser Summe gibt nämlich die Anzahl der Zahlen i_k mit $1\leq i_k\leq n$ an, die den Primfaktor p wenigstens k mal enthalten. (Ist $k>\log_p n=\frac{\lg n}{\lg p}$, so ist $p^k>n$, also $\frac{n}{p^k}<1$ und damit $\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$.)
Aus $p_1>p_2$ folgt nun $\frac{n}{p^{k_1}}=\frac{n}{p^{k-2}}$ für jedes k und damit $A_{p1}<A_{p2}$. Also ist A_5 die gesuchte Zahl:
$$A_5=\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{25}\right]+\left[\frac{1000}{125}\right]+\left[\frac{1000}{625}\right]=200+40+8+1=249$$
Das Produkt 1000! endet demnach auf 249 Nullen.

Aufgabe 4/77
Man beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt gleich dem Produkt aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der beiden Hypotenusenabschnitte, die von der Höhe auf der Hypotenuse erzeugt werden.

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b, der Hypotenuse c und den von der Höhe auf der Hypotenuse erzeugten Abschnitten p und q gilt nach dem Kathetensatz:
$$a^2=pc=p(p+q) \quad ; \quad a=\sqrt{p(p+q)}$$
$$b^2=qc=q(p+q) \quad ; \quad b=\sqrt{q(p+q)}$$

wenn p die Projektion von a und q die Projektion von b und c ist. Der Flächeninhalt A berechnet sich nach der Formel

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{p(p+q)}\sqrt{q(p+q)} = \frac{1}{2}\sqrt{(p+q)^2}\sqrt{pq} = \frac{p+q}{2}\sqrt{pq}$$

Damit ist A das Produkt aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von p und q.

Aufgabe 5/77
Für welche natürlichen Zahlen x gilt: $3^x \equiv 1 \pmod{13}$?

Durch Probieren findet man

$$3^0 \equiv 1 \pmod{13} \qquad ; \qquad 3^1 \not\equiv 1 \pmod{13}$$

$$3^2 \not\equiv 1 \pmod{13} \qquad ; \qquad 3^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

Man kann vermuten, dass die Kongruenz für $x = 3k$ ($k \in N$) gilt.
Behauptung: $3^x \equiv 1 \pmod{13}$ gilt genau für $x = 3k$ mit $k \in N$.
Beweis durch vollständige Induktion:
1. Die Behauptung gilt für $k = 0$ und für $k = 1$, wie man durch Ausrechnen bestätigt.
2. Angenommen, die Behauptung gilt für irgendein $k \in N$: $3^{3k} \equiv 1 \pmod{13}$. Dann gilt

$$3^{3(k+1)} = 3^{3k+3} = 3^3 \cdot 3^{3k} \equiv 27 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{13}$$

wegen $27 \equiv 1$ (mod. 13). Damit ist bewiesen, dass die Behauptung für alle $x = 3k$ mit $k \in N$ gilt.
Es ist noch zu zeigen, dass sie für alle $x = 3k \pm 1$ nicht gilt!
1. Es ist $3^{3\pm 1} \not\equiv 1 \pmod{13}$, wie man durch Ausrechnen bestätigt.
2. Angenommen, es gelte für irgendein $k \in N$: $3^{3k\pm 1} \not\equiv 1 \pmod{13}$. Dann gilt

$$3^{3k+3\pm 1} = 3^3 \cdot 3^{3k\pm 1} = 27 \cdot 3^{3k\pm 1} \equiv 1 \cdot 3^{3k\pm 1} = 3^{3k\pm 1} \not\equiv 1 \pmod{13}$$

Aufgabe 6/77
Man zeige, dass für reelle $a; b$ mit $0 < b \leq a$ die Ungleichungskette gilt:

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$$

Dass die Behauptung für $b = a$ gilt, ist unmittelbar nachprüfbar. Wir nehmen deshalb $b < a$ an.
Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist für $x > 0$ überall stetig und differenzierbar. Man kann also auf jedes Intervall $[b; a]$ mit $b < a$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Nach diesem Satz existiert ein c mit $b < c < a$ derart, dass

$$f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$$

ist. Speziell für $f(x) = \ln x$ folgt damit

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b} = \frac{1}{c} \cdot (a - b)$$

Wegen $c > b$ folgt daraus sofort $\ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ und wegen $c < a$: $\ln\frac{a}{b} > \frac{a-b}{a}$. Da die Gleichheit für $a = b$ eintritt, ist damit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 7/77
Man beweise, dass es kein Zahlensystem mit der Basis x gibt ($x \in N, x > 1$), in dem die Zahl $(10004)_x$ Primzahl ist.

Nach Definition gilt $(10004)_x = x^4 + 4$ mit $x \in N$, $x > 1$. Nun ist

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Angenommen, $(10004)_x = x^4 + 4$ wäre Primzahl; dann müsste der kleinere der beiden Faktoren gleich 1 sein: $x^2 - 2x + 2 = 1$.
Diese Gleichung hat die Doppellösung $x_{1;2} = 1$. Damit ergibt sich ein Widerspruch; denn es ist $x > 1$ vorausgesetzt (es existiert kein Zahlensystem mit der Basis 1). Daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 8/77
Gesucht sind alle echt fünfstelligen natürlichen Zahlen z (also $10000 \leq z < 100000$) mit folgenden Eigenschaften:

1. Jede Ziffer kommt höchstens einmal vor.
2. Die Quersumme ist 10.
3. Addiert man zu der Zahl z die Zahl z', die aus den gleichen Ziffern wie z, jedoch in umgekehrter Reihenfolge besteht, so enthält die Summe nur gleiche Ziffern.

Da jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf und die Quersumme 10 sein soll, können in z nur die Ziffern $0; 1; 2; 3; 4$ vorkommen. Wäre nämlich eine Ziffer größer als 4, so wäre auch die Quersumme größer als 10, oder es müsste wenigstens eine Ziffer doppelt vorkommen. Da bei der Addition von z und z' keine Zehnerübertragung vorkommen kann (im ungünstigen Fall ergibt sich $4 + 3 = 7$), ist $Q(z + z') = Q(z) + Q(z') = 2Q(z) = 20$ (wobei mit $Q(x)$ die Quersumme der Zahl x bezeichnet ist). Da $z + z'$ fünfstellig ist und aus gleichen Ziffern besteht, muss diese Ziffer sich aus der Division $20 : 5$ zu 4 ergeben. Es ist also $z + z' = 44444$.
Es sei nun $\overline{z_n}$ die an n-ter Stelle stehende Ziffer von z. Dann muss wegen der Bedingung 3 gelten

$$\overline{z_n} + \overline{z_{6-n}} = 4$$

insbesondere folgt daraus $\overline{z_3} = 2$. Damit verbleiben für z die folgenden Möglichkeiten

$$\begin{array}{llll} z_1 = 10243 & z_2 = 14203 & z_3 = 30241 & z_4 = 34201 \\ z_5 = 41230 & z_6 = 43210 & & \end{array}$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit (für z' war die "echte" Fünfstelligkeit nicht gefordert).

Aufgabe 9/77
Gegeben sei eine nicht konstante arithmetische Folge 1. Ordnung mit 6 Gliedern, die sämtlich Primzahlen sind.
Man beweise, dass der Absolutbetrag der Differenz aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Folge nicht kleiner als 30 ist!

Wir bezeichnen die Glieder der Folge mit $p; p + d; p + 2d; p + 3d; p + 4d; p + 5d$. Sicher ist p ungerade; denn wäre p gerade, so wäre $p = 2$ (einzige gerade Primzahl) und damit wären $p + 2d = 2(1 + d)$ und $p + 4d = 2(1 + 2d)$ ebenfalls gerade und damit keine Primzahlen.
Zur Beweisführung geben wir einige Eigenschaften von d an:

1. Sicher ist $d \equiv 0 \pmod 2$, denn aus $d \equiv 1 \pmod 2$ würde wegen $p \equiv 1 \pmod 2$ folgen, dass $p + 3d \equiv p + 5d \equiv 0 \pmod 2$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Primzahleigenschaft von $p + 3d$ und $p + 5d$.
2. Sicher ist $d \equiv 0 \pmod 3$; denn wäre $d \equiv 1 \pmod 3$, so wäre $p+3d \equiv 0 \pmod 3$ für $p = 3$, $p+4d \equiv 0 \pmod 3$ für $p \equiv -1 \pmod 3$ und $p + 2d \equiv 0 \pmod 3$ für $p \equiv 1 \pmod 3$, wäre $d \equiv -1 \pmod 3$, so wären entsprechend $p + 3d, p + 2d, p + 4d \equiv 0 \pmod 3$. In jedem Fall entsteht als ein Widerspruch zur Primzahleigenschaft wenigstens eines der Glieder.
3. Sicher ist $d \equiv 0 \pmod 5$. Der Beweis dafür verläuft völlig analog. Damit folgt $d \equiv 0 \pmod{30}$. Wegen $d \neq 0$ ergibt sich daraus $|d| \geq 30$.

Bemerkung: Tatsächlich existiert eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften und $d = 30$: 7; 37; 67; 97; 127; 157.

Aufgabe 10/77
Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i} = 1$$

in natürlichen Zahlen x_i, für die gilt $x_i \geq x_j$, wenn $i > j$ ist.

Wegen $x_3 \geq x_2 \geq x_1$ ist $x_1 > 1$ und

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{3}{x_1}$$

also $x_1 \leq 3$. Demnach sind zwei Fälle möglich:
1. $x_1 = 2$. Dann nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$$

an. Man schließt weiter

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_2}$$

woraus $x_2 \leq 4$ folgt. Das führt zu den beiden Lösungen $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 6$ und $x_1 = 2; x_2 = 4; x_3 = 4$.
2. $x_1 = 3$. Analog erhält man

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$$

Daraus schließt man

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_2}$$

woraus sofort $x_2 = x_3 = 3$ folgt. Damit hat man als dritte Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 3$. Weitere Lösungen kann es auf Grund des Lösungsweges nicht geben.

Aufgabe 11/77
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Würfeln mit einem gewöhnlichen (einwandfreien) Würfel der zweite Wurf eine höhere Augenzahl hat als der erste?

Die Wahrscheinlichkeit für zwei Würfe mit gleicher Augenzahl beträgt $\frac{1}{6}$, die Wahrscheinlichkeit für zwei Würfe mit verschiedenen Augenzahlen ist $\frac{5}{6}$.
Da beide Würfe "gleichberechtigt" sind, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Hälfte von $\frac{5}{6}$, also gleich $\frac{5}{12}$.

Aufgabe 12/77
Gesucht sind (bis auf Ähnlichkeit) alle Dreiecke, bei denen die Tangenswerte der Innenwinkel sämtlich ganzzahlig sind.

Wir beweisen zunächst den Hilfssatz: Ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, so ist

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$$

Beweis: Wegen $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ ist

$$\tan\gamma = \tan[180° - (\alpha + \beta)] = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Damit ist

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta - \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} =$$

$$= \tan\alpha \tan\beta \cdot (-1) \cdot \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$$

Nun setzen wir zur Vereinfachung $\tan\alpha = x$, $\tan\beta = y$, $\tan\gamma = z$ und lösen die diophantische Gleichung

$$x + y + z = xyz$$

in ganzen Zahlen (wobei wegen des Winkelsummensatzes höchstens ein Wert negativ und kein Wert gleich null sein kann). Zuerst zeigen wir, dass kein Wert negativ ist. Angenommen (o.B.d.A.), sei z negativ: $z < 0$. Dann folgt

$$x + y = xyz - z = z(xy - 1) > 0$$

(wegen $x > 0, y > 0$), also $xy - 1 < 0$ wegen $z < 0$. Mithin ist $xy < 1$. Diese Ungleichung ist aber nicht in ganzen Zahlen lösbar.
Es sei nun $z = 1$. Dann folgt

$$x + y + 1 = xy \to y + 1 = xy - x = x(y - 1) \to x = \frac{y + 1}{y - 1} = 1 + \frac{2}{y - 1}$$

(wobei $y \neq 1$ vorausgesetzt ist; man erkennt leicht, dass für $z = 1$, $y = 1$ kein x existiert). Diese Gleichung liefert $x = 3$ für $y = 2$ und $x = 2$ für $y = 3$, weitere ganzzahlige Lösungen hat sie nicht. Eine Lösung ist also das Tripel $(1; 2; 3)$, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt.
Man überlegt sich leicht, dass dies auch die einzige Lösung ist. Wäre nämlich ein Tangenswert größer als 3, so müsste (wegen der Monotonie der Tangensfunktion im betrachteten Bereich und wegen des Winkelsummensatzes) wenigstens einer der beiden anderen Tangenswerte kleiner sein als 1 bzw. 2. Als einziges ganzzahliges Tripel käme dann ein Tripel $(1; 1; 3 + \Delta)$ in Frage (mit $\Delta \in N$).
Die Gleichung $1 + 1 + (3 + \Delta) = 1 \cdot 1 \cdot (3 + \Delta)$ führt jedoch zum Widerspruch $2 = 0$.
Damit ist als einzige Lösung (bis auf die Reihenfolge) das Tripel $(\tan\alpha; \tan\beta; \tan\gamma) = (1; 2; 3)$ mit den Winkeln

$$(\alpha; \beta; \gamma) = (45°; 63{,}43°; 71{,}56°)$$

ermittelt. Es gibt also (bis auf Ähnlichkeit) genau ein Dreieck mit ausschließlich ganzzahligen Tangenswerten der Innenwinkel.

Aufgabe 13/77
Gegeben sei ein Winkel von 17°. Mit Zirkel und Lineal konstruiere man daraus einen Winkel von 11°.

Man konstruiere einen Winkel von 45° als Basiswinkel eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks und subtrahiere von ihm zweimal den gegebenen Winkel von 17°. Der Rest ist der gesuchte Winkel von 11°.

Aufgabe 14/77
Es seien a, b, c von null verschiedene natürliche Zahlen. Man zeige, dass es keine mehrstelligen Primzahlen p, q, r gibt, die der Gleichung genügen:

$$p^{2a} + q^b = r^{2c}$$

Nach Voraussetzung sind p, q und r mehrstellig, also nicht gleich 3 und als Primzahlen demnach nicht durch 3 teilbar. Dann gilt

$$r^{2c} = (r^2)^c \equiv 1 \pmod 3 \quad (1)$$
$$p^{2a} = (p^2)^a \equiv 1 \pmod 3 \quad (2)$$
$$q^b \not\equiv 0 \pmod 3 \quad (3)$$

aus (2) und (3) folgt

$$p^{2a} + q^b \not\equiv 1 \pmod 3$$

womit sich ein Widerspruch zu (1) ergibt. Damit folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 15/77
Auf welche Weise kann man die Zahl 92 in zwei Summanden natürlicher Zahlen zerlegen, von denen der eine durch 5 teilbar ist und der andere bei Division mit 7 den Rest 3 lässt?

Seien x und y die gesuchten Summanden. Dann ist

$$x + y = 92 \quad (1) \qquad ; \qquad x = 5k \qquad ; \qquad y = 7l + 3 \quad (1')$$

mit $k; l \in N$. Aus (1) und (1') folgt $5k + 7l = 89$.
Wir betrachten die Gleichung (2) mod 5 und mod 7 und erhalten

$$2l \equiv 4 \pmod 5; \qquad 5k \equiv 5 \pmod 7; \qquad l \equiv 2 \pmod 5 \qquad k \equiv 1 \pmod 7$$

also $l = 2 + 5t_1$ und $k = 1 + 7t_2$ mit $t_1; t_2 \in N$. Setzen wir dies in (2) ein, so folgt

$$35(t_1 + t_2) = 70 \to t_1 + t_2 = 2$$

Damit ergeben sich die folgenden drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} t_1 = 0; \quad t_2 = 2; \quad k = 2; \quad l = 15; \quad x = 75; \quad y = 17 \\ t_1 = 1; \quad t_2 = 1; \quad k = 7; \quad l = 8; \quad x = 40; \quad y = 52 \\ t_1 = 2; \quad t_2 = 0; \quad k = 12; \quad l = 1; \quad x = 5; \quad y = 87 \end{aligned}$$

Wie die Probe zeigt, sind die Paare $(75; 17), (40; 52), (5; 87)$ Lösung.

Aufgabe 16/77
In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c, den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ und den Höhen h_a, h_b bzw. h_c gelte $h_a \geq a$ und $h_b \geq b$. Wie groß sind die Winkel?

Aus $h_a \geq a, h_b \geq b$ folgt $\frac{h_a}{a} \geq 1$ und $\frac{h_b}{b} \geq 1$. Wegen $0 \leq \sin\gamma = \frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b} \leq 1$ gilt

$$1 \geq \sin^2\gamma = \frac{h_a}{a} \cdot \frac{h_b}{b} \geq 1$$

also $\sin^2\gamma = 1$, $\sin\gamma = 1$, $\gamma = 90°$.
Das Dreieck ist demnach rechtwinklig mit der Hypotenuse c. In jedem rechtwinkligen Dreieck fällt eine Höhe auf einer Kathete mit der anderen Kathete zusammen. Es ist also $h_a = b; h_b = a$. Daraus und aus $h_a \geq a; h_b \geq b$ folgt $b \geq a \geq b$, mithin $a = b$.
Das Dreieck ist demnach nicht nur rechtwinklig, sondern auch gleichschenklig. Folglich ist $\alpha = \beta = 45°$.

Aufgabe 17/77
Es ist zu beweisen: Sind p_1, p_2, p_3 drei Primzahlen mit $p_i > 3$, von denen zwei ein Primzahlzwillingspaar bilden, so ist das Produkt

$$\prod_{i=1}^{3}(p_i - 1) = P$$

durch ein Vielfaches von 48 ohne Rest teilbar.

Bekanntlich lässt sich jede Primzahl $p > 3$ in einer der Formen $p = 6m \pm 1$, $m \in N, m \geq 1$ darstellen. Beweis: Angenommen, der Satz gelte nicht. Dann wäre p in einer der Formen $6m, 6m\pm 2, 6m+3$ darstellbar. In jedem dieser Fälle wäre p aber durch 2 oder durch 3 ohne Rest teilbar und somit nicht Primzahl. Der Satz ist nicht umkehrbar!)
O.B.d.A. seien p_1 und p_2 das Zwillingspaar. Dann gilt

$$p_1 = 6m_1 - 1; \qquad p2 = 6m_1 + 1; \qquad p_3 = 6m_2 \pm 1$$

1.) Es sei $p_3 = 6m_2 + 1$. Dann gilt

$$P = \prod_{i=1}^{3}(p_i - 1) = (6m_1 - 2) \cdot 6m_1 \cdot 6m_2 = 24m_1(3m_1 - 1) \cdot 3m_2$$

2.) Es sei $p_3 = 6m_2 - 1$. Dann gilt

$$P = \prod_{i=1}^{3}(p_i - 1) = (6m_1 - 2) \cdot 6m_1 \cdot (6m_2 - 2) = 24m_1(3m_1 - 1) \cdot (3m_2 - 1)$$

In jedem Fall ist P ohne Rest durch 24 teilbar. Da entweder m_1 oder $3m_1 - 1$ gerade ist, folgt, dass P sogar durch $24 \cdot 2 = 48$ ohne Rest teilbar ist.
Wegen $m_2 \geq 1$ ist sowohl $3m_2$ als auch $3m_2 - 1$ größer als 1: $3m_2 => 1$ bzw. $3m_2 - 1 = k > 1$, also ist $P = 48k$ mit $k > 1$, womit der Beweis geführt ist.

Aufgabe 18/77
Gegeben sei ein zylindrisches Becherglas der Höhe H. Der (homogene) Mantel habe die Masse M, die Masse des Bodens werde vernachlässigt. Das Glas sei mit einer (homogenen) Flüssigkeit der Masse m_H bis zum Rand gefüllt, aus einer Öffnung im Boden tropfe die Flüssigkeit jedoch bis zur völligen Leerung aus.
Gesucht sind eine Funktion, die die Lage des Schwerpunktes in Abhängigkeit von der Füllstandshöhe h angibt, sowie der kleinste Abstand desselben vom Boden.

Wegen der Homogenität und der Symmetrie liegt der Schwerpunkt auf der Achse des Zylinders, so dass seine Lage durch die Angabe der Höhe s über dem Boden vollständig bestimmt ist.
Ebenfalls wegen der Homogenität liegt der Schwerpunkt des Mantels in der Höhe $0{,}5H$, der Schwerpunkt der Flüssigkeit in der Höhe $0{,}5h$ über dem Boden (wobei $0 \leq h \leq H$ gilt).
Die Masse der Flüssigkeit bei der Füllstandshöhe h ist $m = \frac{h}{H}m_H$. Für die beiden Momente M_G und M_F (bezogen auf den Boden) gilt

$$M_G = M \cdot 0{,}5H = 0{,}5HM \qquad ; \qquad M_F = m \cdot 0{,}5h = 0{,}5\frac{h^2}{H} \cdot m_H$$

das Gesamtmoment ergibt sich dann zu

$$M_G + M_F = 0{,}5HM + 0{,}5\frac{h^2}{H}m_H = \frac{1}{2H}(H^2M + h^2m_H)$$

Dividiert man das Gesamtmoment durch die Gesamtmasse, so erhält man den Abstand s des Schwerpunkts vom Boden:

$$s = f(h) = \frac{\frac{1}{2H}(H^2M + h^2m_H)}{M + \frac{h}{H}m_H} = 0{,}5\frac{H^2M + h^2m_H}{HM + hm_H}$$

Für $h = 0$ und für $h = H$ erhält man damit (wie wegen der Symmetrie nicht anderes zu erwarten)

$$s_0 = s_H = f(0) = f(H) = 0{,}5H$$

Mögliche Extremwertstellen der Funktion erhält man durch Nullsetzen der 1. Ableitung, wobei es genügt, den Zähler gleich null zu setzen:

$$s' = f'(h) = \frac{m_H}{2} \cdot \frac{h^2m_H + 2hHM - H^2M}{(HM + hm_H)^2}$$

$$h^2m_H + 2hHM - H^2M = 0 \rightarrow h_E = \frac{H}{m_H}\left(\sqrt{M(M + m_H)} - M\right)$$

(da eine negative Füllstandshöhe sinnlos ist, entfällt der negative Wurzelwert). Daraus folgt

$$s_E = f(h_E) = \frac{HM}{m_H}\left(\sqrt{1 + \frac{m_H}{M}} - 1\right)$$

Dass dieser Wert das Minimum ist, kann man auf verschiedene Weise bestätigen:
1. durch Überprüfen der 2. Ableitung; es ist $f''(h_E) > 0$;
2. durch die Feststellungen, dass a) $s_E = f(h_E) < 0{,}5H = f(0) = f(H)$ und b) $f(h)$ stetig ist.

Aufgabe 19/77
Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, dass Quersumme und Querprodukt übereinstimmen.

Enthält die dezimale Darstellung einer natürlichen Zahl m Zweien und $2^m - 2m$ Einsen und sonst keine Zahlen, so gilt für die Quersumme Q_S und für das Querprodukt Q_P:

$$Q_S = 2m + 2^m - 2m = 2^m \qquad ; \qquad Q_P = 2^m \cdot 1^{2^m - 2m} = 2^m$$

Also gilt für eine solche natürliche Zahl $Q_S = Q_P$. Da m eine beliebige natürliche Zahl ist und es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, ist damit der Beweis bereits erbracht.

Aufgabe 20/77
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung für reelle $a \geq 1$:

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a-1}$$

Aus der gegebenen Ungleichung folgt durch äquivalente Umformungen

$$\sqrt[3]{a+1} + \sqrt[3]{a-1} < 2\sqrt[3]{a} \qquad ; \qquad \sqrt[3]{1+\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{a}} < 2$$

Nun gilt

$$1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{3}{3a} < 1 + \frac{3}{3a} + \frac{3}{9a^2} + \frac{1}{27a^3} = (1 + \frac{1}{3a})^3 \qquad \text{also} \qquad \sqrt[3]{1+\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{3a}$$

und

$$1 - \frac{1}{a} = 1 - \frac{3}{3a} < 1 - \frac{3}{3a} + \frac{3}{9a^2} - \frac{1}{27a^3} = (1 - \frac{1}{3a})^3 \qquad \text{also} \qquad \sqrt[3]{1-\frac{1}{a}} < 1 - \frac{1}{3a}$$

(wegen $\frac{3}{a^2} = \frac{1}{3a^2} > \frac{1}{27a^3}$ für $a \geq 1$). Damit ergibt sich

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{3a} + 1 - \frac{1}{3a} = 2$$

Aufgabe 21/77
Man beweise, dass ein Dreieck genau dann gleichseitig ist, wenn für seine Seiten a, b, c gilt

$$(a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 \quad (1)$$

O.B.d.A. setzen wir $a = b + d, b = c + e$ mit $d, e \in R$. Dann nimmt die Beziehung (1) die Gestalt

$$d^2 = e^2(-d-e)^2 = d^2 + 2de + e^2$$

an. Daraus gewinnt man das (äquivalente) Gleichungssystem

$$2de + e^2 = e(2d+e) = 0 \quad (2) \qquad ; \qquad 2de + d^2 = d(2e+d) = 0 \quad (3)$$

Dieses System ist genau für $d = e = 0$ erfüllt (wovon man sich leicht durch die Probe überzeugt). Die Beziehung (1) gilt also genau dann, wenn $d = e = 0$, also wenn $a = b = c$ ist.

Aufgabe 22/77
Auf welche Weise kann man einen Würfel so in 6 Pyramiden zerlegen, dass sich deren Volumina wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$ verhalten?

Haben die gesuchten Pyramiden sämtlich die gleiche Grundfläche, so ist das Verhältnis der Volumina gleich dem Verhältnis der Höhen.
Es liegt daher nahe, die sechs Seitenflächen des Würfels als die sechs Grundflächen der Pyramiden zu wählen. Es genügt dann, einen geeigneten Punkt S (die gemeinsame Spitze aller Pyramiden) im Inneren des Würfels zu finden; die Verbindungsstrecken von S mit den Würfelecken sind die Seitenkanten der (vierseitigen) Pyramiden.
Bekanntlich ergänzen bei einem Spielwürfel die Augenzahlen gegenüberliegender Würfelseiten einander zu 7. Nummeriert man die Würfelflächen in gleicher Weise und teilt man den Abstand gegenüberliegender Würfelflächen im Verhältnis der anliegenden Seitennummern, so werden durch die Teilpunkte drei parallel zu den Würfelflächen liegende Ebenen festgelegt.
Ihr gemeinsamer Schnittpunkt ist S, und die dazugehörenden Höhen erfüllen (nach Konstruktion) die geforderte Bedingung.

Aufgabe 23/77
Bei einem Fußballturnier, an dem vier Mannschaften A, B, C und D teilnahmen und bei dem jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielte, ergab sich nach Abschluss der folgende Stand:

Platz	Mannschaft	gewonnen	unentschieden	verloren	Tore
1.	A	2	1	0	4:1
2.	B	2	0	1	4:1
3.	C	0	2	1	1:2
4.	D	0	1	2	0:5

Man ermittle die Resultate der sechs Spiele!

Folgende Überlegungen führen zum Ziel:

1. Die Mannschaft B hat ein Spiel verloren. Da C und D kein Spiel gewonnen haben, war der Sieger dieses Spiels die Mannschaft A.
   Da B nur 1 Verlusttreffer hatte, liegt fest, dass das Spiel AB mit 1 : 0 bzw. BA mit 0 : 1 ausging.
2. Die Mannschaft C hat zwei unentschiedene Spiele; die Gegner in diesen Spielen können nur A und D gewesen sein. Da D kein Tor erzielt hat, ist das Spiel CD mit 0 : 0 ausgegangen. Weiter folgt, dass das Ergebnis des Spiels AC 1 : 1 war; wäre es nämlich 0 : 0 gewesen, so hätte C sein "Plustor" im Spiel gegen B erzielen müssen, B hat aber nur einen Gegentreffer "kassiert"; im Spiel gegen A.
3. Das Verlustspiel von C war demnach das Spiel gegen B; wegen der Torbilanz von C war das Resultat 0 : 1.
4. Es bleiben noch die Spiele AD und BD offen, die D verloren hat. Aus den Torbilanzen ergibt sich dafür eindeutig: AD 2 : 0, BD 3 : 0.

Damit erhält man die folgende Ergebnistabelle:

AB 1 : 0	AC 1 : 1	AD 2 : 0
BC 1 : 0	BD 3 : 0	CD 0 : 0

Aufgabe 24/77
Gegeben seien n Brüche $\frac{a_i}{b_i}$ $(i = 1; 2; 3; ...; n)$, die sämtlich in einem beliebigen Intervall $I = [a; b]$ liegen und deren Nenner b_i sämtlich positiv sind. Man zeige, dass dann auch der nachfolgende Bruch in I liegt:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}$$

Nach Voraussetzung gilt für alle i: $a \leq \frac{a_i}{b_i} \leq b$, daraus folgt wegen $b_i > 0$: $a \cdot b_i \leq a_i \leq b \cdot b_i$ und damit

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b \cdot b_i \qquad ; \qquad a \sum_{i=1}^{n} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq b \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$a \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq b$$

da mit $b_i > 0$ erst recht gilt $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$.

Aufgabe 25/77
Es ist zu beweisen: Sind a, b, c die Maßzahlen eines Dreiecks, so gilt $a^2 < 2(b^2 + c^2)$.
Ferner ist zu zeigen, dass der Absolutbetrag der Differenz zwischen den beiden Seiten der Ungleichung beliebig klein werden kann.

Aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung $a < b + c$ folgt sofort

$$a^2 < (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 < 2(b^2 + c^2)$$

Wegen $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$ ist nämlich $2bc \leq b^2 + c^2$.
Es sei nun das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c (übliche Bezeichnungsweise) ein gleichschenkliges Dreieck mit $b = c$. Dann gilt

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + h_a^2 \qquad ; \qquad c^2 = \frac{a^2}{4} + h_a^2$$

und die zu beweisende Ungleichung nimmt die Gestalt $a^2 < a^2 + 4h_a^2$ an; der Absolutbetrag der Differenz aus den beiden Seiten der Ungleichung ist $4h_a^2$. Man erkennt sofort, dass er gegen null geht, wenn h_a gegen null geht (d.h., für ein entartetes gleichschenkliges Dreieck wird die bewiesene Ungleichung zur Gleichung).

Aufgabe 26/77
Man schreibe auf jedes Feld eines Schachbrettes die Anzahl, der verschiedenen Wege, auf denen es von einem auf dem Feld A1 befindlichen Turm erreicht werden kann (wobei sich der Turm nur in der Richtung der Brettseiten und nicht rückwärts bewegen darf).
Wieso ist das auf diese Weise entstehende Zahlenfeld ein Teil des Pascalschen Dreiecks?

1. Die Felder $A1...A8$ und $A1..H1$, sind auf je einem Weg erreichbar (insbesondere $A1$ durch Nichtbewegen).
2. Die Anzahl der möglichen Wege zum Feld $[m; n]$ ist die Summe aus den Anzahlen der Wege zum Feld $[(m-1); n]$ und zum Feld $[m; (n-1)]$ (wobei anstelle der Buchstaben $A...H$ ebenfalls die Zahlen 1...8 gesetzt sind).
Dieselben Bedingungen führen zu den Binominalkoeffizienten und damit zum Aufbau des Pascalschen Dreiecks.

Aufgabe 27/77
Man bestimme die größte natürliche Zahl z, die aus 10 verschiedenen Ziffern besteht (im dekadischen Positionssystem) und durch 11 teilbar ist.

Es sei

$$z = 10^9a + 10^8b + 10^7c + 10^6d + 10^5e + 10^4f + 10^3g + 10^2h + 10i + k$$

mit $a; b; ...; k \in N$, $a; b; ...; k \leq 9$, $a \neq b \neq ... \neq k$ die gesuchte Zahl. Dann gelten auf Grund der gestellten Bedingungen die Gleichungen

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + k = 45$$
$$a - b + c - d + e - f + g - h + i - k = 11n$$

($n \in G$). Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen und anschließende Division mit 2 erhält man daraus

$$a + c + e + g + i = 22 + 5n + \frac{n+1}{2}$$
$$b + d + f + h + k = 22 - 5n - \frac{n-1}{2}$$

Wegen der Ganzzahligkeit der Summen auf den linken Seiten der Gleichungen ist n ungerade: $n = 2m+1$, $m \in G$. Wegen

$$10 \leq a+c+e+g+i \leq 35 \qquad ; \qquad 10 \leq b+d+f+h+k \leq 35$$

ist $m = 0$. Daraus folgt

$$q+c+e+g+i = 28 \qquad ; \qquad b+d+f+h+k = 17$$

Wir wählen nun; um die Maximalitätsbedingung zu erfüllen; die Ziffern mit höherem Stellenwert möglichst groß und erhalten dadurch schrittweise

$a = 9$	$c+e+g+h = 19$	$b = 8$	$d+f+h+k = 9$
$c = 7$	$e+g+i = 12$	$d = 6$	$f+h+k = 3$
$e = 5$	$g+i = 7$	$f = 2$	$h+k = 1$
$g = 4$	$i = 3$	$h = 1$	$k = 0$

Damit ergibt sich $z = 9876524130$. Die Probe bestätigt die Teilbarkeit durch 11.

Aufgabe 28/77
Man gebe für die quadratische Funktion $f(x) = ax^2+bx+c$ mit reellen Koeffizienten $a; b; c$ ($a \neq 0$) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass für genau eine reelle Zahl x_0 gilt $f(x_0) = x_0$.

Die Aufgabenstellung ist gleichbedeutend mit der Frage, unter welcher Bedingung die Gleichung $x_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ genau eine Lösung hat. Äquivalente Umformung liefert

$$x_0^2 + \frac{b-1}{a}x_0 + \frac{c}{a} = 0 \qquad ; \qquad D = \left(\frac{b-1}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = 0$$

also $(b-1)^2 = 4ac$.
Da alle Schlüsse auch in umgekehrter Richtung gültig sind, ist diese Bedingung zugleich notwendig und hinreichend. Man prüft leicht nach, dass sich $x_0 = \frac{1-b}{2a}$ ergibt.

Aufgabe 29/77
Es ist zu beweisen, dass für beliebige positiv-reelle Zählen n und k die Ungleichung

$$\left(\frac{ne}{k}\right)^k \leq e^n$$

gilt (wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist).

Wir untersuchen zum Beweis die für $x \in R^+$ definierte Funktion $f(x) = \ln x + 1 - x$ (wobei R^+ die Menge der positiv-reellen Zahlen bedeutet). Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad ; \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Aus (1) folgt $f'(x) \neq 0$ für $x \neq 1$, $f'(x) = 0$ für $x = 1$, aus (2) folgt $f''(x) < 0$ für jedes x aus dem Definitionsbereich. Also ist $f(1) = 0$ das absolute Maximum der Funktion und somit

$$f(x) = \ln x + 1 - x \leq 0$$

Ist nun $n, k \in R^+$, so ist auch $x = \frac{n}{k} \in R^+$. Folglich gilt

$$\ln\frac{n}{k} + 1 \leq \frac{n}{k} \to k\left(\ln\frac{n}{k} + \ln e\right) \leq n \to \ln\left(\frac{ne}{k}\right)^k \leq n \to \left(\frac{ne}{k}\right)^k \leq e^n$$

(wegen der strengen Monotonie der Logarithmus- bzw. der Exponentialfunktion).
Die Ungleichung gilt auch (wie man durch Einsetzen bestätigt) für $n = 0$, $k \neq 0$. Sie gilt sogar für alle $n \in R$, $k \in R$, sofern nur $\frac{n}{k} \geq 0$ gilt (also wenn $k \neq 0$ und $\operatorname{sgn} n = \operatorname{sgn} k$ ist); dann ist nämlich $\frac{n}{k} = n \geq 0$.

Aufgabe 30/77
Gesucht ist ein geordnetes Quadrupel von vier höchstens zweistelligen Primzahlen p_i mit $i = 1; 2; 3; 4$, das folgende Bedingungen erfüllt:

1. Es ist $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$.
2. p_3 und p_4 bilden ein Primzahl-Zwillingspaar.
3. Die Summe der beiden kleineren Primzahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden größeren und gleich dem doppelten Quadrat einer fünften Primzahl.
4. Das Produkt $p_1 \cdot p2$ ist maximal.

Man bilde die Tripel $(p_1; p_2; 100p_3 + p_4)$ und $(p_1; p_2; 100p_3 + p_1p_2)$!

Aus 2. folgt unter Berücksichtigung von 1.: $p_3 = p_4 + 2$. Aus 3. folgt $\frac{p_3+p_4}{2} > 2p_5^2$ also

$$p_3 + p_4 = 2p_4 + 2 = 2(p_4 + 1) = 4p_5^2 \to p_4 + 1 = 2p_5^2$$

Wegen $p_4 < 100$ ist $p_5 \leq 7$. Es ergeben sich zunächst folgende Möglichkeiten:

p_5	p_4	p_3	
2	7	9	entfällt $(9 = 3^2)$
3	17	19	
5	49		entfällt $(49 = 7^2)$
7	97	99	entfällt $(99 = 3^2 \cdot 11$

Damit liegen $p_4 = 17$, $p_3 = 19$ fest. Für p_1 und p_2 gilt nunmehr nach 3.: $p_1 + p_2 = 18$.
also $p_1 = 5$, $p_2 = 13$ oder $p_1 = 7$, $p_2 = 11$. Wegen $7 \cdot 11 > 5 \cdot 13$ (Bedingung 4.) ist $p_1 = 7$, $p_2 = 11$ (unter Berücksichtigung von 1.). Das Primzahlquadrupel ist also $(7; 11; 19; 17)$, und die gesuchten Tripel sind (7.11.1917) und (7.11.1977).

Aufgabe 31/77
Man zerlege die Zahl 100 auf alle möglichen Weisen so in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:
Wird zum ersten Summanden eine natürliche Zahl addiert, vom zweiten Summanden dieselbe Zahl subtrahiert, der dritte Summand mit dieser Zahl multipliziert und der vierte Summand durch sie dividiert, so sind die Resultate sämtlich einander gleich.

Es seien a, b, c, d vier natürliche Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$a + b + c + d = 100 \qquad ; \qquad a + x = b - x = cx = \frac{d}{x}$$

wobei x ebenfalls eine natürliche Zahl und $x \neq 0$ ist. Aus den zweiten Gleichungen erhält man

$$2cx = a + x + b - x = a + b \qquad ; \qquad d = cx^2$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$2cx + c + cx^2 = c(x^2 + 2x + 1) = c(x + 1)^2 = 100$$

Da $100 = 10^2$ ist, muss auch c eine Quadratzahl sein. Wir zerlegen daher die Zahl 100 auf alle möglichen Weisen in ein Produkt aus zwei Quadratzahlen:

$$100 = 10^2 \cdot 1^2 = 5^2 \cdot 2^2$$

Demnach kommen die Zahlen $c_1 = 1; c_2 = 4; c_3 = 25; c_4 = 100$ mit $x_1 = 9; x_2 = 4; x_3 = 1, x_4 = 0$ in Frage, wobei $x_4 = 0$ und damit $c_4 = 100$ sofort ausscheiden. Für $c_1 = 1, x_1 = 9$ folgt $a_1 = 0, b_1 = 18, d_1 = 81$, die übrigen Werte $c_2 = 4, x_2 = 4$ und $c_3 = 25, x_3 = 1$ liefern $a_2 = 12, b_2 = 20, d_2 = 64$ bzw. $a_3 = 24, b_3 = 26, d_3 = 25$. Damit existieren genau drei derartige Zerlegungen:

$$0 + 18 + 1 + 81 = 100 \qquad ; \qquad 12 + 20 + 4 + 64 = 100 \qquad ; \qquad 24 + 26 + 25 + 25 = 100$$

Aufgabe 32/77
Von einem rechtwinkligen Dreieck seien der Umfang U und der Umkreisradius r bekannt. Man berechne daraus die Fläche A!

Wir bezeichnen die beiden Katheten mit k_1 und k_2 und die Hypotenuse mit h. Nach dem Satz des Thales gilt $h = 2r$, nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$k_1^2 + k_2^2 = h^2 = 4r^2$$

Weiter ist $k_1 + k_2 = u - h = u - 2r$. Durch Quadrieren folgt aus dieser Gleichung

$$k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 = u^2 + 4ur + 4r^2 \to 2k_1k_2 = u^2 - 4ur$$

Wegen $A = \frac{1}{2}k_1k_2$ folgt daraus $A = \frac{1}{4}u^2 - ur = u(\frac{1}{4}u - r)$.

Aufgabe 33/77
Man beweise, dass die Gleichung $a^k + a^l = a^m$ für $a \in N; a \geq 3$ keine Lösung $(k; l; m)$ im Bereich der natürlichen Zahlen hat!

Angenommen, es existiere eine Lösung $(k; l; m)$ mit $k; l; m \in N$. Dann ist sicher $k; l < m$ (wegen $0 < a^k; a^l < a^m$). O.B.d.A. sei $k < l$ also $l = k + x$ mit $x \in N$.
Ferner sei $m = l + y = k + x + y$ mit $y \in N$. Dann nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt $a^k + a^{k+z} = a^{k+x+y}$ an. Wegen $a^k > 0$ ist sie der Gleichung $1 + a^x = a^{x+y}$ äquivalent.
Weitere (äquivalente) Umformungen führen zu

$$a^{x+y} - a^x = 1 \qquad ; \qquad a^x(a^y - 1) = 1$$

Da $a^x; a^y \in N$ nach Voraussetzung gilt, folgt daraus $a^x = 1$ und $a^y = 2$.
Speziell $a^y = 2$ ist aber für $a \geq 3$ und $y \in N$ nicht lösbar. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist und somit keine Lösung im Bereich der natürlichen Zahlen existiert.

Aufgabe 34/77
Gegeben sei ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a und b (wobei $b > a$ sei) und der Hypotenuse c. Auf $AC = b$ sei ein Punkt D so festgelegt, dass $AD = BD$ ist. Man beweise, dass dann gilt

$$\cos\measuredangle ADB = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

Fällt man von D auf c das Lot (der Fußpunkt sei E), so erkennt man, dass $\triangle ADE \sim\triangle ABC$ ist (beide Dreiecke enthalten je einen rechten Winkel und haben den Winkel α bei A gemeinsam). Daraus folgt

$$\measuredangle ADE = \measuredangle ABC = \beta \qquad ; \qquad \measuredangle ADB = 2\beta$$

$$\cos\measuredangle ADB = \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

Aufgabe 35/77
Wie viele nichtnegative reelle Nullstellen hat die Funktion

$$y = f(x) = x - 1978\sin\pi x$$

Zerlegt man die Funktion $y = f(x) = x - 1978\sin\pi x$ in die beiden Teilfunktionen $y_1 = f_1(x) = x$ und $y_2 = f_2(x) = 1978\sin\pi x$, so läuft die Aufgabenstellung auf die Frage hinaus, wie oft $y_1 = y_2$ ist.
Denkt man sich die beiden Funktionen f_1 und f_2 graphisch dargestellt, so liefert f_1 eine unter 45° ansteigende, durch den Nullpunkt verlaufende Gerade, f_2 dagegen eine Sinuskurve mit der Amplitude 1978.

Es ist offensichtlich, dass die Gerade die Sinuskurve in jeder Periode genau zweimal schneidet, sofern $0 \leq x \leq 1978$ gilt.
Für $x > 1978$ existieren keine Schnittpunkte, da $y_1 > 1978$, $y_2 \leq 1978$ gilt.
Zur Lösung genügt es also, die Anzahl n der Perioden von f_2 im Intervall $[0; 1978]$ zu ermitteln und diese zu verdoppeln. Da die Sinusfunktion die Periodenlänge 2π hat, ergibt sich für $f_2(x)$ die Periodenlänge 2.
Die Anzahl $k = 2n$ der nicht negativen Nullstellen von $y = f(x) = x - 1978 \sin \pi x$ ist also

$$k = 2n = \frac{1978 - 0}{2} \cdot 2 = 1978$$

(die erste davon liegt bei $x_0 = 0$).

Aufgabe 36/77
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl $n > 1$, so dass

$$z_n = 1977 + n^{462}$$

durch 1978 teilbar ist.

Wegen $1977 \equiv -1 \pmod{1978}$ muss $n^{462} \equiv 1 \pmod{1978}$ sein. Da $1978 \equiv 0 \pmod 2$ ist, muss $n \equiv 1 \pmod 2$ sein. Also ist (wegen $n > 1$) $n \geq 3$.
Die Primfaktorzerlegung von 1978 liefert $1978 = 2 \cdot 23 \cdot 43$, die Primfaktorzerlegung von 462 ergibt $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.
Daraus kann man folgende Darstellungen ableiten:

$$462 = 1 \cdot 462 = 22 \cdot 21 = 42 \cdot 11 = (2-1) \cdot 462 = (23-1) \cdot 21 = (43-1) \cdot 11$$

Es ist also

$$n^{462} = (n^{2-1})^{462} = (n^{23-1})^{21} = (n^{43-1})^{11}$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat ist aber $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, wenn p eine Primzahl und a nicht durch p teilbar ist. Da 2, 23 und 43 Primzahlen sind und die kleinste in Frage kommende Zahl 3 durch keine dieser drei Primzahlen teilbar ist, gilt

$$3 \equiv 1 \pmod 2 \,; \qquad 3^{22} \equiv 1 \pmod{23} \,; \qquad 3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$$

damit auch

$$3^{462} \equiv 1 \pmod 2 \,; \qquad (3^{22})^{21} \equiv 1 \pmod{23} \,; \qquad (3^{42})^{11} \equiv 1 \pmod{43}$$
$$3^{462} \equiv 1 \pmod 2 \,; \qquad 3^{462} \equiv 1 \pmod{23} \,; \qquad 3^{462} \equiv 1 \pmod{43}$$

Da 2, 23 und 43 als Primzahlen (paarweise) teilerfremd sind, folgt schließlich

$$3^{462} \equiv 1 \pmod{2 \cdot 23 \cdot 43} \equiv 1 \pmod{1978}$$

Damit ist n = 3 die gesuchte Zahl. 3^{462} ist eine 221stellige Zahl, die mit 269 beginnt und mit 9 endet.

2.18 Aufgaben und Lösungen 1978

Aufgabe 1/78
Gesucht sind vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Produkt gleich 110 355 024 ist.

Es sei n die kleinste der gesuchten vier natürlichen Zahlen; dann sind $n+1, n+2$ und $n+3$ die übrigen, und es soll gelten

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = 110355024 \approx 10^8$$

Man erkennt unmittelbar:
1. Es ist $n \approx \sqrt[4]{10^8} = 10^2$.
2. Wegen $110355024 \neq 0 \pmod 5$ gilt $n \neq 0 \pmod 5$, $n+1 \neq 0 \pmod 5$, $n+2 \neq 0 \pmod 5$ und $n+3 \neq 0 \pmod 5$. Also ist $n \equiv 1 \pmod 5$.
Damit liegt es nahe, zu prüfen, ob $n = 101$ die Bedingung erfüllt. Tatsächlich ergibt sich

$$101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 = 110355024$$

womit die Lösung gefunden ist.

Aufgabe 2/78
Man ermittle die Anzahl $A(n)$ der mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen (in dezimaler Schreibweise), die die folgende Eigenschaft haben:
Jede Stelle mit höherem Stellenwert ist kleiner als jede Stelle mit kleinerem Stellenwert.

Die größte Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist offensichtlich die Zahl 123 456 789. Daraus erhält man alle in Frage kommenden Zahlen mit $9-i$ Stellen, indem man in ihr i beliebige Stellen streicht (wobei $i \in N, 0 \leq i \leq 7$ gilt). Das ist auf $\binom{9}{i}$ verschiedene Weisen möglich. Die gesuchte Anzahl $A(n)$ ergibt sich also als Summe der Binomialkoeffizienten $\binom{9}{i}$ mit $0 \leq i \leq 7$:

$$A(n) = \sum_{i=0}^{7} \binom{9}{i} = 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 = 502.$$

Aufgabe 3/78
Es ist die Gleichung $x^{\lg x} = 100x$ für reelle Zahlen x zu lösen!

Aus der gegebenen Gleichung folgt durch beiderseitiges Logarithmieren und Anwenden der Logarithmengesetze

$$\lg x^{\lg x} = \lg 100x \to \lg x \cdot \lg x = \lg 100 + \lg x \to \lg^2 x = \lg x + \lg 2 \to$$
$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$$

Diese in $\lg x$ quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\lg x_1 = 0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + 2} = 2 \qquad ; \qquad x_1 = 100$$

$$\lg x_2 = 0{,}5 - \sqrt{0{,}25 + 2} = -1 \qquad ; \qquad x_2 = 0{,}1$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 4/78
Man beweise: Sind die Größen $a; b; c$ die Seitenlängen eines ebenen Dreiecks, so gilt die Ungleichung

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Aus der Voraussetzung folgt $a > 0; b > 0; c > 0$ und $a + b > c; a + c > b; b + c > a$.

Damit ist auch $a+b+c>0; a+b-c>0; a-b+c>0; -a+b+c>0$.
Multipliziert man die letzten vier Ungleichungen sämtlich miteinander, so folgt die Behauptung:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = -a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) > 0 \qquad \text{also}$$

$$a^4+b^4+c^4 < 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

Aufgabe 5/78
Man beweise, dass es nicht möglich ist, Primzahlen als Summen aus aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen darzustellen!

Zum Beweis zeigen wir, dass jede Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen mindestens einen echten Teiler hat und somit keine Primzahl sein kann.
Es sei $2n+1$ mit $n \in N$ die kleinste ungerade Zahl einer solchen Summe S mit $k>1$ Summanden. Dann ist

$$S = (2n+1)+(2n+3)+...+(2n+2k-1)$$

Nach der Formel für die arithmetische Reihe 1. Ordnung ist $S = (2n+k)\cdot k$. Jede Summe von k aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen hat also mindestens den echten Teiler k (wobei $k>1$ vorausgesetzt wurde) und kann deshalb keine Primzahl sein.

Aufgabe 6/78
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die nachfolgende Zahl eine ganze Zahl ist:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Für natürliche Zahlen n und k gilt bekanntlich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1}$$

$$n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}$$

Bekanntlich sind die Binomialkoeffizienten für natürliche n, k ganze Zahlen, und sicher ist $(n, n+1) = 1$. Folglich ist, n Teiler von $\binom{2n}{n+1}$ und $(n+1)$ Teiler von $\binom{2n}{n}$.

Aufgabe 7/78
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl der Form 2^n-1 (mit $n \in N, n>0$), die ohne Rest durch 1001 teilbar ist.

Wegen $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$ muss 2^n-1 ohne Rest durch 7, durch 11 und durch 13 teilbar sein. Mit anderen Worten: Es muss

$$2^n \equiv 1 \pmod 7\ ; \qquad 2^n \equiv 1 \pmod{11}\ ; \qquad 2^n \equiv 1 \pmod{13}$$

gelten. Nun ist $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$; also ist $n \equiv 0 \pmod 3$. Ferner ist $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$, folglich $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ und demnach $n \equiv 0 \pmod{10}$.
Schließlich gilt $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$, also $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, mithin $n \equiv 0 \pmod{12}$. Aus all dem folgt $n \equiv 0 \pmod{60}$ und wegen der Minimalitätsforderung $n = 60$.
Die Zahl $2^{50}-1 = 1152921504606846975$ ist also die kleinste natürliche Zahl der Form 2^n-1, die restlos durch 1001 teilbar ist.

Aufgabe 8/78
Man beweise: Sind a, b und x positive reelle Zahlen, für die $ab = x^2$ gilt, so gilt $(a+x)(b+x) \geq 4x^2$.

Wegen $ab = x^2$ gilt $b = \frac{1}{a}x^2$. Die zu beweisende Ungleichung nimmt damit die Gestalt

$$(a+x)\left(\frac{1}{a}x^2 + x\right) \geq 4x^2$$

an; aus ihr gewinnt man durch Ausmultiplizieren und schrittweises äquivalentes Umformen

$$x^2 + \frac{1}{a}x^3 + ax + x^2 \geq 4x^2 \to ax + x^2 + a^2 + ax \geq 4ax$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \geq 0$$

Die letzte Ungleichung ist für reelle a, x sicher stets erfüllt. Da unter der Voraussetzung $a,x > 0$ alle Schritte umkehrbar sind, folgt aus ihrer Gültigkeit die Gültigkeit der zu beweisenden Ungleichung.

Aufgabe 9/78
Man beweise, dass kein Paar rationaler Zahlen $(x; y)$ existiert, das die Gleichung erfüllt:

$$\arctan x + \arctan y = \frac{\pi}{3}$$

Angenommen, es existiert ein Paar rationaler Zahlen $(x; y)$, das die gegebene Gleichung erfüllt. Wir setzen $\alpha = \arctan x; \beta = \arctan y$, also $x = \tan\alpha; y = \tan\beta$ und es gilt $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\tan\alpha + \beta = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x+y}{1-xy} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Da x und y (nach Annahme) rationale Zahlen sein sollen, sind auch $x + y$, xy, $1 - xy$ und $\frac{x+y}{1-xy}$ rationale Zahlen. Damit folgt aber aus der Annahme ein Widerspruch; denn $\sqrt{3}$ ist irrational. Folglich ist die Annahme falsch, und damit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen.

Aufgabe 10/78
Gesucht sind alle Tripel natürlicher Zahlen $(a; b; c)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Keine der Zahlen $a; b; c$ ist Primzahl.
2. Die Summe $a + b + c$ liegt zwischen 1900 und 2000: $1900 \leq a + b + c+ \leq 2000$
3. Das Produkt abc liegt zwischen 7600 und 8000: $7600 \leq abc \leq 8000$
4. Die Summe aller in den Zahlen $a; b; c$ auftretenden Ziffern ist 30, wobei in keiner Zahl eine Ziffer mehrfach vorkommt (was nicht bedeutet, dass keine Ziffer in verschiedenen Zahlen mehrfach auftreten könnte).
5. Es ist $a \leq b \leq c$.

Wegen Bedingung 3 ist $a; b; c > 0$. Wäre $a \geq 4$, so wäre wegen 5. auch $b \geq 4$ und damit $abc \geq 16c$, also (wegen 3.) $c \leq 500$; dann wären aber nach 5. auch $a; b \leq 500$ und die Summe $a + b + c \leq 1500$ im Widerspruch zu 2. Also kommt für a nur $a = 1$ in Frage (wegen 1. scheiden $a = 2$ und $a = 3$ als Primzahlen aus). Damit nehmen die Bedingungen 2 und 3 die folgende Gestalt an:

$$1988 \leq b + c \leq 1999 \quad (2') \qquad ; \qquad 7600 \leq bc \leq 8000 \quad (3')$$

Wäre nun $b \geq 9$, so wäre nach 3'. $c \leq 888$ und damit $b + c \leq 2c \leq 1776$ im Widerspruch zu 2'. Also kann b nur die Werte $1; 4; 6; 8$ annehmen (die Werte $2; 3; 5; 7$ scheiden als Primzahlen aus).
Durch Einsetzen von $b = 1; 6; 8$ in 2'. und 3'. erhält man Widersprüche:

$b = 1$: $1898 \leq c \leq 1998$, $7600 \leq c \leq 8000$;
$b = 6$: $1893 \leq c \leq 1993$, $1266 \leq c \leq 1334$;
$b = 8$: $1891 \leq c \leq 1991$, $950 \leq c \leq 1000$;

Also muss $b = 4$ sein, was zu $1895 \leq c \leq 1995$, $1900 \leq c \leq 2000$, also zu $1900 \leq c \leq 1995$ führt.
Für die beiden noch fehlenden Ziffern x und y von c ergibt sich nach Bedingung 4 die Gleichung $1 + 4 + 1 + 9 + x + y = 30$, d.h., $x + y = 15$, wobei $x; y \in N$, $x; y \leq 9$ gilt. Also kommen für c die Zahlen $c = 1969$, $c = 1978$, $c = 1987$ in Betracht. Die Zahl 1969 entfällt jedoch wegen des doppelten Auftretens der Ziffer 9 (Bedingung 4), während 1987 als Primzahl entfällt. Damit gibt es nur ein Tripel $(a.b.c)$, das alle Bedingungen erfüllt: $(a.b.c) = (1.4.1978)$.

Aufgabe 11/78
Ein Mathematiker schreibt einem anderen: "In diesem Jahr werde ich 100 Jahre alt, im nächsten 200."
Offenbar beziehen sich die Altersangaben nicht auf das Dezimalsystem. Wie alt ist der Mathematiker?

Es sei x die Basis des Systems für die erste, y die Basis des Systems für die zweite Altersangabe. Dann ist zur Lösung der Aufgabe die diophantische Gleichung $x^2+1 = 2y^2$ bzw. $x^2 = 2y^2-1$ mit $x; y \in N, x; y > 1$ zu lösen.
Aus biologischen Gründen gilt sicher $y < 9$ (da sonst $2y^2 = 162$ wäre, dieses Alter aber mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden kann). Es genügt also, die Zahlen $y = 2$ bis $y = 8$ daraufhin zu untersuchen, ob $2y^2 - 1$ eine Quadratzahl ist.
Dabei stellt man fest, dass sich nur für $y = 5$ eine natürliche Zahl x als Lösung der Gleichung ergibt: $x = 7$. Der Mathematiker wird also in diesem Jahr $100_{(7)} = 49_{(10)}$ Jahre alt, im nächsten $200_{(5)} = 50_{10}$.

Aufgabe 12/78
Auf die Frage, wie alt er sei, antwortet jemand, dass er im Jahr x^2 genau x Jahre alt war. In welchem Jahr ist er geboren?

Das Geburtsjahr sei a. Dann gilt (wenn man voraussetzt, dass das Alter mindestens 1 Jahr und höchstens 120 Jahre beträgt) sicher

$$1858 < a + x = x^2 < 1978 \qquad \text{also} \qquad 43{,}1... = \sqrt{1858} < x < \sqrt{1978} = 44{,}7...$$

Damit folgt sofort $x = 44$, $x^2 = 1936$, $a = x^2 - x = 1892$.

Aufgabe 13/78
Es ist zu beweisen: Sind p und q die beiden Projektionen zweier Dreieckseiten auf die dritte und α sowie β die beiden der dritten Seite anliegenden Winkel ($\alpha; \beta \neq 90°$), so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2}pq(\tan\alpha + \tan\beta)$.

Es sei h_c die Höhe, deren Fußpunkt auf der Seite c die Projektionen p und q erzeugt. Dann gilt

$$A = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}/p + q)h_c = \frac{1}{2}(ph_c + qh_c)$$

Wegen $\frac{h_c}{p} = \tan\beta$, $\frac{h_c}{q} = \tan\alpha$ folgt $h_c = p\tan\beta = q\tan\alpha$ und damit

$$A = \frac{1}{2}(pq\tan\alpha + pq\tan\beta) = \frac{1}{2}pq(\tan\alpha + \tan\beta)$$

Aufgabe 14/78
Man beweise die Regel für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 7: Eine natürliche Zahl n ist genau dann ohne Rest durch 7 teilbar, wenn der Absolutbetrag der Differenz aus dem Doppelten der Einerstelle und der nach Abtrennen der Einerstelle verbleibenden Zahl durch 7 teilbar ist.

Es sei $n = 10z + e$, wobei e die Ziffer in der Einerstelle und z die nach dem Abtrennen der Einerstelle verbleibende Zahl ist ($e \in N$ mit $0 \leq e \leq 9$, $z \in N$).
Wegen $ggT(2, 7) = 1$ ist n genau dann durch 7 ohne Rest teilbar, wenn $2n = 20z + 2e = 21z + 2e - z$ durch 7 ohne Rest teilbar ist. Wegen $7 \mid 21z$ ist die Teilbarkeit von $|2e - z|$ notwendig und hinreichend dafür, dass $2n$ und damit n restlos durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 15/78
1. Gegeben sei ein Kreisring, in den n Kreise derart einbeschrieben sind, dass jeder Kreis die innere und die äußere Ringbegrenzung sowie zwei benachbarte Kreise berührt. Gesucht ist das Verhältnis aus der Summe der Kreisflächen und der Kreisringfläche.

2. Entsprechend ist die Aufgabe für das Verhältnis a) der Oberflächen, b) der Volumina bei einem Kreistorus zu lösen, in den n Kugeln in der gleichen Weise einbeschrieben sind.

3. Man bilde in jedem Fall den Grenzwert des Verhältnisses für $n \to \infty$.

1) Ist A_k die Summe der Kreisflächen und r der Radius der einbeschriebenen Kreise, so gilt $A_k = nr^2\pi$. Bezeichnet man mit R den mittleren Radius des Kreisrings, so gilt wegen der Berührungsbedingungen für die Fläche A_R des Kreisrings

$$A_R = [(R+r)^2 - (R-r)^2]\pi = 4Rr\pi \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{R} = \sin\frac{2\pi}{2n} = \sin\frac{\pi}{n}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{A_k}{A_R} = \frac{nr^2\pi}{4Rr\pi} = \frac{1}{4}n\sin\frac{\pi}{n}$$

2a) Nun sei A_k die Summe der Kugeloberflächen, A_T die Torusoberfläche. Dann gilt

$$A_k = n \cdot 4r^2\pi \qquad ; \qquad A_T = 2R\pi \cdot 2r\pi = 4Rr\pi^2$$

(nach der 1. Guldinschen Regel). Damit folgt

$$\frac{A_k}{A_T} = \frac{4r^2\pi n}{4Rr\pi^2} = \frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}$$

(da auch hier gilt $\frac{r}{R} = \sin\frac{\pi}{n}$)
2b) Ist V_k die Summe der Kugelvolumina und V_T das Torusvolumen, so gilt

$$V_k = n \cdot \frac{4}{3}r^3\pi \qquad ; \qquad V_T = 2R\pi \cdot r^2\pi = 2Rr^2\pi^2$$

(nach der 2. Guldinschen Regel). Damit ergibt sich

$$\frac{V_k}{V_T} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi n}{2Rr^2\pi^2} = \frac{2n}{3\pi}\sin\frac{\pi}{n}$$

3) Für die drei Grenzwerte ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}n \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to 0} \frac{2}{3}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

wobei $\pi = nx$ gesetzt wurde.
Überraschend ist an diesen Ergebnissen, dass sich im ersten Fall ein transzendenter, im zweiten und dritten Fall dagegen algebraische (sogar rationale) Werte ergeben.

Aufgabe 16/78
Es ist zu beweisen, dass kein konvexes Sechseck mehr als drei spitze Innenwinkel haben kann.

Die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 180°$.
Beweis:
Man kann das n-Eck in n Dreiecke zerlegen, indem man von einem beliebigen Punkt im Inneren des n-Ecks Geraden zu jedem Eckpunkt zieht. Aus dem Winkelsummensatz des Dreiecks folgt dann unmittelbar die Behauptung.
Angenommen, es existiere ein konvexes Sechseck mit wenigstens vier spitzen Innenwinkeln. Dann gilt für die Summe s der vier spitzen Winkel: $s < 360°$.
Für die Summe $\overline{s}$ der restlichen zwei Winkel gilt dann $\overline{s} = 720° - s > 360°$.
Damit folgt, dass wenigstens einer der beiden restlichen Innenwinkel größer als 180° ist. Das widerspricht aber der Forderung, dass das Sechseck konvex sein soll. Also ist die Annahme falsch; es existiert kein konvexes Sechseck mit mehr als drei spitzen Innenwinkeln.

Aufgabe 17/78
Von der Gleichung $x^n + px - q = 0$, $n \geq 2$, sei bekannt, dass sie eine positive rationale Lösung hat und dass p und q Primzahlen sind. Man bestimme die Lösung sowie p und q!

Ist x_0 die positive rationale Lösung der gegebenen Gleichung so kann man x_0 in der Form $x_0 = \frac{r}{s}$ mit $r; s \in N$ und $ggT(r,s) = 1$ darstellen, und es gilt

$$x_0^n + px_0 - y = \frac{r^n}{s^n} + p\frac{r}{s} - q = 0 \qquad \text{oder} \qquad r^n + prs^{n-1} - qs^n = 0$$

Da $ggT(r, s) = 1$ ist, folgt daraus, dass r ein Vielfaches von s ist, und es gilt $s = 1$, also $r = x_0$, und die Gleichung reduziert sich auf

$$x_0^n + px_0 - q = 0 \qquad ; \qquad x_0 = r \in N \qquad ; \qquad x_0(x_0^{n-1} + p) = q$$

Da $x_0^{n-1} + p > 1$ ist, folgt aus der Primzahleigenschaft von q, dass $x_0 = 1$ ist. Somit ergibt sich

$$x_0^{n-1} + p = 1 + p = q$$

Die einzigen aufeinanderfolgenden Primzahlen sind $p = 2$ und $q = 3$. Die Probe mit $x_0 = 1$, $p = 2$, $q = 3$ bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 18/78
Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen z, die sich in der Form $z = n^{4m+1} - n$ mit $m; n \in N$ darstellen lassen!

Für $n = 1$, m beliebig ist $c = 0$; die kleinste nichttriviale Zahl z erhält man für $n = 2$, $m = 1$ als $z = 2^5 - 2 = 30$. Mithin kann der gesuchte größte gemeinsame Teiler höchstens gleich $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ sein. Es ist nun zu untersuchen, welche dieser drei Primfaktoren $2; 3; 5$ für alle n und m Teiler von z sind. Dazu schreiben wir z in der Gestalt

$$z = n(n^{4m} - 1)$$

Offensichtlich ist der Primfaktor 2 in jedem z enthalten; denn entweder ist n gerade, oder es ist $n^{4m} - 1$ gerade. Entweder ist $n \equiv 0 \pmod 3$, oder es gilt $n \equiv \pm 1 \pmod 3$. Im letzten Fall ist $n^2 \equiv 1 \pmod 3$, damit $n^{4m} \equiv 1 \pmod 3$ und damit $n^{4m} - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Das heißt also, in jedem Fall ist der Primfaktor 3 in z enthalten.
Analog schließt man: Entweder ist $n \equiv 0 \pmod 5$, oder es ist $n \equiv \pm 1 \pmod 5$ oder $\equiv \pm 2 \pmod 5$, also $n^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$, $n^{4m} \equiv 1 \pmod 5$ und damit $n^{4m} - 1 \equiv 0 \pmod 5$. Also ist auch der Primfaktor 5 in jedem z enthalten. Damit ergibt sich, dass der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen z, die sich in der Form $z = n^{4m+1} - n$ mit $n; m \in N$ darstellen lassen, die Zahl 30 ist.

Aufgabe 19/78
Man beweise: Das Quadrat über der Raumdiagonale eines Quaders ist mindestens gleich der Hälfte der Quadratoberfläche.

Die Kanten des Quaders seien a, b und c, seine Raumdiagonale sei d. Sicher gilt

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0 \to a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Nun ist $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und $A_O = 2ab + 2ac + 2bc$ (wobei mit A_O die Oberfläche des Quaders bezeichnet ist). Damit folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 20/78
Man bestimme alle Paare natürlicher Zahlen $(m; n)$, die der Gleichung genügen: $\sum\limits_{i=1}^{n} i! = m^2$

Wegen $\sum_{i=1}^{4} i! = 33$ und $i! \equiv 0 \pmod{10}$, wenn $i > 4$, ist für $n > 4$

$$\sum_{i=1}^{n} i! \equiv 3 \pmod{10}$$

Da für m^2 stets gilt $m^2 \equiv 3 \pmod{10}$, kann es für $n > 4$ keine Lösungen geben (Quadratzahlen können nur die Einerstelle 0 oder 1 oder 4 oder 5 oder 6 oder 9 haben). Durch Probieren mit $n = 1; 2; 3; 4$ erhält man die Paare $(n_1; m_1) = (1; 1)$ und $(n_2; m_2) = (3; 3)$. Weitere Lösungen kann es offenbar nicht geben.

Aufgabe 21/78
Man zeige, dass das Produkt P für jede natürliche Zahl n eine ungerade natürliche Zahl ist!

$$P = \frac{(n+1)(n+2)...(2n+1)}{2^n}$$

Es ist

$$P = \frac{(n+1)(n+2)...(2n+1)}{2^n} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} = \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n} = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n+1)$$

P ist also das Produkt aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n+1$ und damit selbst eine ungerade natürliche Zahl.

Aufgabe 22/78
Es sei $ABCD$ ein einem Kreis einbeschriebenes Quadrat, P sei ein beliebiger Punkt auf dem Kreisbogen zwischen A und B. Man beweise, dass PC und PD den Winkel APB dritteln!

Die zu den Sehnen AD, DC und CB gehörenden Zentriwinkel sind sämtlich gleich 90°. Daher hat jeder Peripheriewinkel über diesen Sehnen die Größe von 45°; insbesondere auch die Winkel ADP, DPC und CPB.

Aufgabe 23/78
Für welche Dreiecke mit den Seiten a, b, c gilt: $a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Bekanntlich gilt für $x; y \geq 0$ der Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel. (1) Damit ist

$$\frac{a^4}{2} + \frac{b^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^4} = a^2b^2 \quad ; \quad \frac{a^4}{2} + \frac{c^4}{2} \geq a^2c^2 \quad ; \quad \frac{b^4}{2} + \frac{c^4}{2} \geq b^2c^2$$

Addition ergibt

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$$

Nun steht in (1) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = y$. Damit folgt: In (2) gilt das Gleichheitszeichen genau für $a = b = c$; die gegebene Beziehung gilt also für alle gleichseitigen Dreiecke und nur für diese.

Aufgabe 24/78
Es ist zu beweisen, dass kein Glied der Folge $\{a_k\} = \{11; 111; 1111; 11111; ...\}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl x ist.

Angenommen die Folge $\{a_k\}$ enthielte ein Glied a_n, das Quadrat einer natürlichen Zahl x wäre. Da alle Glieder der Folge ungerade Zahlen sind, ist dann auch x ungerade, d.h., es gilt $x = 2m - 1$ mit $m \in N$, und es ist

$$a_n = \sum_{i=0}^{n+1} 10^i = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 \quad ; \quad a_n - 1 = 10 \sum_{i=0}^{n} 10^i = 4m^2 - 4m = 4m(m-1)$$

Daraus folgt

$$5\sum_{i=0}^{n} 10^i = 2m(m-1)$$

Die linke Seite der Gleichung ist ein Produkt aus zwei ungeraden natürlichen Zahlen; die rechte Seite dagegen enthält den Faktor 2. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist.

Aufgabe 25/78
Man ermittle alle Paare ganzer Zahlen $(m;n)$, die der Gleichung $\sqrt{2^n+1} = m$ genügen.

Wenn es Paare ganzer Zahlen $(m;n)$ gibt, die der gegebenen Gleichung genügen, so gilt offenbar $m;n > 0$ ($m > 0$ folgt aus der Definition der Wurzel, $n > 0$ folgt aus der Ganzzahligkeit von m).
Aus der gegebenen Gleichung folgt durch äquivalentes Umformen

$$2^n = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$$

Da die linke Seite der Gleichung eine Potenz der Basis 2 ist, muss dies auch für die rechte Seite gelten. Folglich sind die Faktoren $(m+1)$ und $(m-1)$ selbst Potenzen der Zahl 2, die sich um 2 voneinander unterscheiden. Die einzigen Potenzen der Zahl 2, die sich um 2 voneinander unterscheiden, sind $2^1 = 2$ und $2^2 = 4$. Gilt nämlich $2^\alpha - 2^\beta = 2$ für $\alpha, \beta > 0$, so folgt

$$2^\beta(2^{\alpha-\beta} - 1) = 2 \to 2^{\beta-1}(2^{\alpha-\beta} - 1)1$$

Diese Gleichung ist aber nur erfüllt für $2^{\beta-1} = 1$, $2^{\alpha-\beta} - 1 = 1$, also für $\beta = 1, \alpha = 2$.
Damit ergibt sich $m = 3, n = 3$, also das Paar $(3;3)$ als einzige Lösung.

Aufgabe 26/78
Sind a, b und c die Seiten eines ebenen Dreiecks mit dem Flächeninhalt A, so gilt die Ungleichung $A < \frac{1}{2}\sqrt[3]{abc}^2$.
Man beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Bezeichnet man (wie üblich) die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, so gelten die Gleichungen

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Daraus folgt

$$A^3 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Wegen $\sin\alpha \leq 1, \sin\beta \leq 1, \sin\gamma \leq 1$ (wobei das Gleichheitszeichen für höchstens eine der drei Ungleichungen gilt), ergibt sich damit die Behauptung

$$A < \frac{1}{2}\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Aufgabe 27/78

Es ist zu zeigen, dass für jede natürliche Zahl n gilt $\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^k$

Es gilt der binomische Satz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Speziell folgt daraus für $a = 1, b = 1$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

und für $a = 1, b = 3$:

$$(1+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k = 4^n$$

Damit folgt sofort

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right]^2 = (2^n)^2 = 2^{2n} = 4^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k$$

Aufgabe 28/78

Man beweise: Jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ ist als harmonisches Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen darstellbar.

Der Beweis ist geliefert, wenn gezeigt ist: Zu jeder ungeraden natürlichen Zahl $n \geq 3$ existieren zwei natürliche Zahlen a und b mit $a \neq b$, die die Gleichung

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

erfüllen. Äquivalente Umformungen dieser Gleichung (Auflösung nach a) liefern $a = \frac{bn}{2b-n}$. Setzt man nun $b = na$ (wegen $n \geq 3$ ist dann sicher $b \neq a$), so folgt

$$a = \frac{n^2 a}{2na - n} = \frac{na}{2a-1} \qquad ; \qquad a = \frac{n+1}{2}$$

Da n nach Voraussetzung ungerade ist, folgt, dass a eine natürliche Zahl ist. Damit ist auch $b = na = n\frac{n+1}{2}$ eine natürliche Zahl. Eine Probe bestätigt, dass die Gleichung

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{n \cdot \frac{n+1}{2}}\right)$$

für alle ungeraden natürlichen Zahlen $n \geq 3$ eine wahre Aussage darstellt.

Aufgabe 29/78

Man zeige (ohne die Potenz auszurechnen), dass die Fermatzahl $F_5 = 2^{2^5} + 1$ ohne Rest durch 641 teilbar ist!

Wegen $641 = 640 + 1 = 2^7 \cdot 5 + 1$ gilt

$$2^7 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{641}$$

$$(2^7 \cdot 5)^4 = 2^{28} \cdot 5^4 = 2^{28} \cdot 625 = 2^{28} \cdot (641 - 16) = 2^{28} \cdot 641 - 2^{28} \cdot 2^4 \equiv -2^{32} \equiv 1 \pmod{641}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung:

$$2^{32} = 2^{2^5} \equiv -1 \pmod{641} \qquad ; \qquad 2^{2^5} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$$

Aufgabe 30/78

Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x > 0$ die Ungleichung $\sqrt[x]{x} < 1{,}45$ gilt!

Es ist $\ln \sqrt[x]{x} = \frac{1}{x} \ln x$. Zum Beweis der Behauptung untersuchen wir die für alle reellen Zahlen $x > 0$ definierte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

auf ihr globales Maximum. Es ist

$$f'(x) = x^{-2}(1 - \ln x)$$

Einzige Nullstelle von $f'(x)$ ist $x_0 = e$. Da

$$f''(x) = -x^{-3}(3 - 2\ln x) \rightarrow f''(e) = -e^{-3} < 0$$

gilt, ist x_0 Stelle eines Maximums von $f(x)$; da keine weitere Extremwertstelle existiert, gilt für alle reellen $x > 0$ die Ungleichung

$$\ln \sqrt[x]{x} = \frac{1}{x} \ln x \leq \frac{1}{e} \ln e = \frac{1}{e}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung

$$\sqrt[x]{x} \leq \sqrt[e]{e} = 1{,}444667861... < 1{,}45$$

Aufgabe 31/78
Man ermittle alle Primzahlen $p_l; p_2; p_3$, die die Gleichung $p_1^{p_2} + p_2^{p_1} = p_3$ erfüllen.

Sicher ist p_3 nicht die kleinste der gesuchten Primzahlen und damit nicht gerade. Daraus folgt, dass entweder p_1 oder p_2 gerade und damit gleich 2 ist. Wegen der Symmetrie in p_1 und p_2 kann man o.B.d.A. $p_1 = 2$ setzen. Die gegebene Gleichung nimmt damit die Gestalt

$$2^{p_2} + p_2^2 = p_3$$

an. Wegen $p^2 \geq 3$ ist $2^{p_2} + p_2^2 \geq 2^3 + 3^2 = 17$. Offensichtlich hat man damit bereits eine Lösung gefunden: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 17$.
Es erhebt sich die Frage, ob es noch weitere Lösungen gibt. Wegen $p_2 > 3$, ungerade, kann man $p_2 = 2d+1$ (mit $d \in N, d > 1$) setzen. Dann ist

$$2^{p_2} = 2^{2d+1} = 2 \cdot 2^{2d} = 2 \cdot 4^d \equiv 2 \cdot 1^d \equiv 2 \pmod 3$$

Ferner ist $p_2 \equiv \pm 1 \pmod 3$, also $p_2^2 \equiv 1 \pmod 3$. Damit folgt

$$p_3 = 2^{p_2} + p_2^2 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

was im Widerspruch zur Primzahleigenschaft von p_3 steht. Demnach ist die gefundene Lösung die einzige.

Aufgabe 32/78
Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung $\quad 2\sin^2(\pi x + y)\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Wegen $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ (die Summe zweier positiver, zueinander reziproker Zahlen ist nie kleiner als 2) und

$$2\sin^2(\pi x + y)\cos(y + \frac{\pi}{2}) \leq 2$$

folgt sofort

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \quad ; \quad x = \pm 1 \quad ; \quad \sin^2(y \pm \pi) = 1 \quad ; \quad \cos(y + \frac{\pi}{2}) = 1$$

Aus der letzten dieser Gleichungen ergibt sich $y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ mit $k = 0; \pm 1; \pm 2; ...$ Tatsächlich ist $\sin^2(\frac{3\pi}{2} \pm \pi \pm 2k\pi) = 1$.

Aufgabe 33/78
Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, wobei a und b beliebige positive reelle Zahlen mit $a \geq b$ sind.

Aus $0 < b \leq a$ folgt $0 < b^n \leq a^n$. Also gilt

$$a^n < a^n + b^n \leq 2a^n \quad ; \quad a < \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a\sqrt[n]{2}$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{2} = a$$

wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Daraus folgt unmittelbar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$$

Aufgabe 34/78
Auf einem gewöhnlichen Schachbrett kann man bekanntlich einen Springer so ziehen, dass er jedes Feld genau einmal betritt und auf das Ausgangsfeld zurückkehrt. Das ist auf verschiedene Weisen möglich.
Auf wie viele verschiedene Weisen ist das auf einem (hypothetischen) Schachbrett mit $9 \cdot 9 = 81$ Feldern möglich?

Soll der Springer alle Felder betreten und zum Ausgangsfeld zurückkehren, so muss er genau 81mal gezogen werden. Bei jedem Zug wechselt er die Farbe des Feldes, so dass er nach einer ungeraden Zahl von Zügen stets auf der Farbe sieht, die nicht gleich der Farbe des Ausgangsfeldes ist.
Damit ist bereits gezeigt, dass er nach 81 Zügen nicht auf dem Ausgangsfeld stehen kann. Die Zahl der möglichen verschiedenen Weisen ist also null!

Aufgabe 35/78
In der UdSSR ist es üblich, in den Stadtverkehrsmitteln nach dem Abreißen des Fahrschein-Kontrollabschnittes zu prüfen, ob man einen "Glücksfahrschein" hat. Dies ist dann der Fall, wenn die Quersumme der ernten drei Stellen gleich der Quersumme der letzten drei Stellen der sechsstelligen Kontrollzahl ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein "Glücksfahrschein" die Quersummen 7 hat?

Die Zahl 7 kann man auf genau acht verschiedene Weisen in drei Summanden zerlegen:

7+0+0 (l)	6+1+0 (2)	5+2+0 (3)	5+1+1 (4)
4+3+0 (5)	6+2+1 (6)	3+3+1 (7)	3+2+2 (8)

Die (ungeordneten) Tripel (l), (4), (7) und (8) enthalten je eine Ziffernwiederholung, für sie ist folglich die Bildung von je drei geordneten Tripeln möglich, während es für die (ungeordneten) Tripel (2), (3), (5) und (6) je sechs sind. Folglich gibt es insgesamt $3 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 36$ geordnete Tripel mit der Quersumme 7.
Da es insgesamt 1000 Varianten für dreistellige Ziffernkombinationen gibt (000...999), ist die Wahrscheinlichkeit für die Quersumme 7 in einer dieser Kombinationen gleich 0,036.
Da das Ereignis eines "Glücksfahrscheins" mit der Quersumme 7 ein zusammengesetztes Ereignis ist, das aus dem logischen Produkt zweier unabhängiger (gleicher) Teilereignisse besteht, ist dessen Wahrscheinlichkeit gleich dem Quadrat der Wahrscheinlichkeit jedes der Teilereignisse, also $0{,}036^2 = 0{,}001296$.

Aufgabe 36/78
Man wähle irgendeine 1979stellige natürliche Zahl a, die durch 9 teilbar ist, und bilde die Quersumme z aus der Quersumme y der Quersumme x von a. Wie groß ist z?

Ist eine Zahl a durch 9 teilbar, so ist auch die Quersumme $Q(a)$ dieser Zahl durch 9 teilbar. Daraus folgt, das x, y und z durch 9 teilbar sind. Weiter gilt:
$x \leq 9 \cdot 1979 = 17811$; das heißt, x ist höchstens fünfstellig.
Damit ergibt sich weiter
$y \leq 9 \cdot 5 = 45$; das heißt, für y kommen nur die Zahlen $9; 18; 27; 36; 45$ in Frage. In jedem Falle ist damit $z = 9$.

2.19 Aufgaben und Lösungen 1979

Aufgabe 1/79
Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit dem Mittelpunkt M. Es sei P ein Punkt auf der Strecke EA, Q sei ein Punkt auf der Strecke AB. Man zeige:
Existiert für das Viereck $MPQA$ ein Umkreis, so ist die Summe der Strecken PA und AQ gleich der Seitenlänge des Fünfecks.

Der Beweis ist geführt, wenn gezeigt ist, dass das Dreieck AQM kongruent dem Dreieck EPM ist. Nun folgt aus der Regelmäßigkeit des Fünfecks

$$MA = ME \quad ; \quad \measuredangle MAQ = \measuredangle MEP$$

Ferner folgt aus der Tatsache, dass das Viereck $MPAQ$ ein Sehnenviereck ist $\measuredangle MPA + \measuredangle MQA = 180°$. Andererseits gilt (da Nebenwinkel) $\measuredangle MPA + \measuredangle EPM = 180°$. Damit ergibt sich, unmittelbar $\measuredangle MQA = \measuredangle EPM$.
Die beiden Dreiecke stimmen also in einer Seite und in den entsprechenden Winkeln überein und sind somit kongruent.

Aufgabe 2/79
Man beweise, dass die Zahl $A = 1 + 2^m + 4^m$ mit $m = 2^n, n \in N$ durch 7 ohne Rest teilbar ist.

Es ist

$$A = 1 + 2^m + 4^m = 1 + 2^m(1 + 2^m) \quad (*)$$

Für $n = 0, m = 2^0 = 1$ gilt $2^m = 2^1 = 2 \equiv 2 \pmod 7$, also

$$A \equiv 1 + 2(1 + 2) \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7 \quad (1)$$

Die Behauptung ist also für $n = 0$ richtig. Für $n = 1, m = 2^1 = 2$ gilt $2^m = 2^2 = 4 \equiv 4 \pmod 7$, also

$$a \equiv 1 + 4(1 + 4) \equiv 21 \equiv 0 \pmod 7 \quad (2)$$

Die Behauptung ist also auch für $n = 1$ richtig. Wegen

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = (2^2)^{2n} = (2 \cdot 2)^{2n} = 2^{2^n} \cdot 2^{2^n}$$

ergibt sich nun für $2^{2^n} \equiv 2 \pmod 7$, dass $2^{2^{n+1}} \equiv 4 \pmod 7$ ist; für $2^{2^n} \equiv 4 \pmod 7$ folgt $2^{2^{n+1}} \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$. Aus (*) ergibt sich demnach stets eine der Kongruenzen (1) oder (2), womit die Behauptung für alle $n \in N$ bewiesen ist.

Aufgabe 3/79
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die Ungleichung $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ gilt?

Die gegebene Ungleichung ist der Ungleichung

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} < \frac{n+1}{2}$$

äquivalent. Nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel ist aber

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} < \frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n}$$

Der Beweis ist erbracht, wenn gezeigt ist, dass die rechten Seiten der beiden Ungleichungen übereinstimmen. Tatsächlich gilt für die Summe einer arithmetischen Folge 1. Ordnung von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + ... + n = (1 + n) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2} \cdot n$$

also

$$\frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Aufgabe 4/79
Ist $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit dem Umfang u und der Summe d der Diagonalenlängen, so gilt $0{,}5d < u < d$. Diese Behauptung ist zu beweisen!

Zunächst beweisen wir die linke Ungleichung $0{,}5d < u$ der Kette. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$AC < AB + BC; \qquad BD < BC + CD; \qquad CE < CD + DE;$$
$$DA < DE + EA; \qquad EB < EA + AB$$

Durch Addition dieser fünf Ungleichungen folgt $d < 2u$, also $0{,}5d < u$.
Zum Beweis der rechten Ungleichung bezeichnen wir die Schnittpunkte der Diagonalen wie folgt: BD mit CE: A'; CE mit AD: B'; DA mit EB: C', EB mit AC: D' und AC mit BD: E'.
Ebenfalls nach der Dreiecksungleichung gilt nun

$$AB < AD' + BD'; \qquad BC < BE' + CE'; \qquad CD < CA' + DA'$$
$$DE < DB' + EB'; \qquad EA < EC' + AC'$$

Durch Addition dieser fünf Ungleichungen folgt

$$u < AD' + BD' + BE' + CE' + CA' + DA' + DB' + EB' + EC' + AC' \leq d$$

Aufgabe 5/79
Man berechne die Summe!
$$s_n = 1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - ... - \frac{n-1}{n!}$$

Berechnet man $S_1, S_2, ..., S_5$ nummerisch, so erhält man

$$S_1 = 1; \qquad S_2 = \frac{1}{2}; \qquad S_3 = \frac{1}{6}; \qquad S_4 = \frac{1}{24}; \qquad S_5 = \frac{1}{120}$$

Daraus ergibt sich die Vermutung, dass $S_n = \frac{1}{n!}$ sein könnte. Wenn dies zutrifft, so ist

$$S_{n+1} = S_n - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Damit ist zugleich die Vermutung auf dem Weg der vollständigen Induktion bewiesen; denn die Behauptung gilt für $n = 1; 2; ...; 5$, und aus der Gültigkeit für irgend ein n folgt die Gültigkeit für $n + 1$.

Aufgabe 6/79
Es ist zu beweisen: Ist $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, so ist die Zahl 111...1555...56 mit n Einsen und $n - 1$ Fünfen das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist

$$11...155...56 = \sum_{i=n}^{2n-1} 10^i + 5\sum_{i=1}^{n-1} 10^i + 6 = \sum_{i=n}^{2n-1} 10^i + 5\sum_{i=0}^{n-1} 10^i + 1 = \sum_{i=0}^{2n-1} 10^i + 4\sum_{i=0}^{n-1} 10^i + 1$$

Die beiden Summen sind endliche geometrische Reihen mit dem Anfangsglied $a_0 = 10^0 = 1$ und dem Quotienten $q = 10$. Ihre Gliederzahl ist $2n$ bzw. n. Damit folgt

$$\sum_{i=0}^{2n-1} 10^i = \frac{10^{2n}-1}{10-1} = \frac{10^{2n}-1}{9} \qquad ; \qquad \sum_{i=0}^{n-1} 10^i = \frac{10^n-1}{10-1} = \frac{10^n-1}{9}$$

Daraus ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$11...155...56 = \frac{10^{2n}-1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n-1}{9} + 1 = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$$

Der Beweis ist geführt, wenn gezeigt ist, dass $10^n + 2$ ohne Rest durch 3 teilbar ist. Dies ist tatsächlich der Fall: denn die Quersumme von 10^n ist 1, von $10^n + 2$ demnach 3.

Aufgabe 7/79
Man beweise (ohne Verwendung der Differentialrechnung) den Satz: Unter allen Sehnenvierecken eines gegebenen Kreises hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Zunächst ist festzustellen, dass es zu jedem überschlagenen Sehnenviereck ein flächengrößeres nicht überschlagenes Sehnenviereck gibt. Der Beweis ist also geführt, wenn die Richtigkeit des Satzes für nicht überschlagene Sehnenvierecke gezeigt ist.
Für ein nicht überschlagenes Sehnenviereck $ABCD$ gilt (wobei mit $F_{ABCD}, F_{ABC}, F_{ABD}$ die Flächeninhalte der entsprechenden Figuren und mit E und F die Fußpunkte der Lote von B bzw. D auf AC bezeichnet sind):

$$F_{ABCD} = F_{ABC} + F_{ABD} = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2}AC \cdot (BE + DF) \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$$

Das Maximum $2r^2$ wird genau dann angenommen, wenn sowohl $AC = 2r$ als auch $BE + DF = 2r$, also A und C sowie B und D Endpunkte von Durchmessern sind. Wegen $BE \perp AC$ und $DF \perp AC$ ist dann auch $AC \perp BD$; d.h., das Sehnenviereck hat gleichgroße, aufeinander senkrecht stehende Diagonalen, die einander halbieren. Es ist also ein Quadrat.

Aufgabe 8/79
Man bestimme alle Primzahlen a, b, c, d, für die die folgenden Gleichungen gelten: $a + b = c$ und $2a + b = d$.

Da $d = 2a + b > 2a > 2$ ist, muss d ungerade sein. Da $2a$ eine gerade Zahl ist, folgt b ungerade. Wegen $c = a + b > b$ ist auch c ungerade und damit $a = c - b$ gerade. Also ist $a = 2$.
Von den Primzahlen b, $b + 2 = c$ und $b + 4 = d$ ist nun genau eine durch 3 teilbar. Dies kann nur die kleinste der drei Primzahlen sein. Also ist $b = 3$.
Damit ergibt sich $c = 5$, $d = 7$. Nach dem Lösungsweg ist daher $(2; 3; 5; 7)$ das einzige Lösungsquadrupel.

Aufgabe 9/79
Es ist die Gültigkeit der Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ zu beweisen:

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) < 2$$

Wegen $i^4 - 1 = (i^2 + 1)(i^2 - 1) < i^4$ ist

$$1 + \frac{1}{i^2} = \frac{i^2 + 1}{i^2} < \frac{i^2}{i^2 - 1} \quad \text{also}$$

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i^2 + 1}{i^2} < \prod_{i=2}^{n} \frac{i^2}{i^2 - 1} = \prod_{i=2}^{n} \frac{i^2}{(i+1)(i-1)} =$$

$$= \frac{(n!)^2}{(n-1)!\frac{(n+1)!}{2}} = \frac{2n!n!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2n}{n+1} < 2$$

für jede natürliche Zahl $n \geq 2$.

Aufgabe 10/79
Man zeige, dass für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 2$ die Ungleichung $\log_n (n + 1) > \log_{n+1} (n + 2)$ gilt.

Aus $1 + \frac{1}{n} > + \frac{1}{n+1}$ folgt wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$\log_{(n+1)} \frac{n+1}{n} > \log_{(n+1)} \frac{n+2}{n+1}$$

Andererseits ist

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{(n+1)} \frac{n+1}{n}$$

Aus diesen beiden Ungleichungen ergibt sich

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{(n+1)} \frac{n+2}{n+1} \qquad ; \qquad \log_n (n+1) - \log_n n > \log_{(n+1)} (n+2) - \log_{(n+1)} (n+1)$$

was wegen $\log_n n = \log_{(n+1)} (n+1) = 1$ unmittelbar die Behauptung ergibt.

Aufgabe 11/79
Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c, so gilt für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Ungleichung $a^n + b^n < c^n$.

Da c Hypotenuse ist, gilt $a < c$ und $b < c$, damit auch $\frac{a}{c} < 1$ und $\frac{b}{c} < 1$ und schließlich auch

$$\frac{a^{n-2}}{c^{n-2}} < 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{b^{n-2}}{c^{n-2}} < 1$$

(mit $n > 2$). Wegen $a^2, b^2 > 0$ folgt daraus

$$\frac{a^{n-2}}{c^{n-2}} \cdot a^2 = \frac{a^n}{c^{n-2}} < a^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{b^{n-2}}{c^{n-2}} \cdot b^2 = \frac{b^n}{c^{n-2}} < b^2$$

Addiert man diese beiden Ungleichungen, so erhält man

$$\frac{a^n}{c^{n-2}} + \frac{b^n}{c^{n-2}} < a^2 + b^2 = c^2$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit $c^{n-2} > 0$ die Behauptung $a^n + b^n < c^{n-2} \cdot c^2 = c^n$.

Aufgabe 12/79 Es sind alle positiven Zahlen x und y zu bestimmen, die den beiden Gleichungen genügen:

$$x^{x+y} = y^6 \qquad ; \qquad y^{x+y} = x^{12} y^6$$

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt sich

$$(xy)^{x+y} = (xy)^{12}$$

Diese Gleichung ist sicher genau dann erfüllt, wenn a) $x + y = 12$ oder b) $xy = 1$ ist. (Für $x + y \neq 12$ und $xy \neq 1$ gibt es offensichtlich keine Lösung.)
a) Setzt man $x + y = 12$ in die erste Gleichung ein, so ergibt sich $y = x^2$. Damit folgt aus $x + y = 12$ die in x quadratische Gleichung $x^2 + x - 12 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Also ergibt sich das Paar $(x; y) = (3; 9)$ als Lösung.
b) Aus $xy = 1$ folgt $y = \frac{1}{x}$ und damit aus der ersten Gleichung

$$x^{x+\frac{1}{x}} = x^{-6}$$

Da $x + \frac{1}{x} > 0$ gilt, bleibt als Lösung nur $(x; y) = (1; 1)$. Die Paare $(3; 9)$ und $(1; 1)$ sind Lösungen des Systems, wie die Probe bestätigt.

Aufgabe 13/79
Es sind alle natürlichen Zahlen x und y zu bestimmen, für die die Gleichung $5^x - 2^y = 3$ gilt.

Ist $y > 1$, so ist $2^y \equiv 0 \pmod 4$. Wegen $5^x \equiv= 1 \pmod 4$ wäre dann $5x - 2^y \equiv 1 - 0 \equiv 1 \neq 3 \pmod 4$.
Daraus folgt, dass es für $y > 1$ keine Lösung gibt. Für $y = 1$ nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt $5x - 2 = 3$ an, aus der sofort $x = 1$ folgt. Also ist $(x; y) = (1; 1)$ das einzige Lösungspaar.

Aufgabe 14/79
Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks, so gilt die Ungleichungskette

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3$$

Die rechte Ungleichung folgt unmittelbar aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen. Wegen $a < b+c, b < a+c, c < a+b$ ist nämlich

$$\frac{a}{b+c} < 1 \qquad ; \qquad \frac{b}{a+c} < 1 \qquad ; \qquad \frac{c}{b+a} < 1$$

und damit

$$\frac{a}{b+c} < + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} < 3$$

Zum Beweis der linken Ungleichung gehen wir von der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel aus, wobei wir über die Summen $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$ mitteln:

$$\frac{3}{\frac{1}{b+c} < + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+a}} \leq \frac{1}{3}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]$$

Äquivalente Umformungen dieser Ungleichung liefern

$$1 \leq \frac{2}{9}\left(1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a}\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{3}{2} \leq \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$$

Aufgabe 15/79
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass sowohl $n+100$ als auch $n-100$ Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Aus der geforderten Eigenschaft folgen die Gleichungen $n+100 = x^2$ und $n-100 = y^2$ mit $x; y; n \in N$. Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung ergibt sich daraus

$$200 = x^2 - y^2 = (x|y)(x+y)$$

Man kann also alle möglichen Zahlen x; y finden, indem man die Zahl 200 auf alle möglichen Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Faktoren f_1 und f_2 zerlegt und das Gleichungssystem

$$x - y = f_1 \qquad ; \qquad x + y = f_2$$

löst. Da seine Lösungen $x = 0{,}5(f_1 + f_2)$, $y = 0{,}5(f_2 - f_1)$ sind, folgt, dass f_1 und f_2 entweder beide geradzahlig oder beide ungeradzahlig sind (da sonst $x; y \notin N$ gälte). Somit kommen nur die Zerlegungen

$$200 = 2 \cdot 100 = 4 \cdot 50 = 10 \cdot 20$$

in Frage. Daraus ergeben sich die folgenden Lösungen:

f_1	f_2	x	y	n
2	100	51	49	250
4	50	27	23	62
10	20	15	5	12

Die Probe bestätigt die Richtigkeit, der Lösungsweg schließt weitere Lösungen aus.

Aufgabe 16/79
Man zeige, dass die Gleichung $x^2 - y^2 p = 1$ für jede natürliche Zahl p rationale Lösungen $x; y$ hat.

Die gegebene Gleichung $x^2 - y^2 p = 1$ ist äquivalent den Gleichungen

$$x^2 - 1 = y^2 p \qquad ; \qquad (x+1)(x-1) = y \cdot y \cdot p$$

Setzt man $x+1=yp$, $x-1=y$, falls $p \neq 1$, so erhält man

$$x = \frac{p+1}{p-1} \qquad ; \qquad y = \frac{2}{p-1}$$

also rationale Lösungen. Ist $p=1$, so nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt $x^2-y^2=1$ an. In diesem Fall ist $x=\frac{c}{a}, y=\frac{b}{a}$ eine Lösung, wenn $(a;b;c)$ ein pythagoreisches Zahlentripel ist. Dann ist nämlich

$$x^2-y^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1$$

wegen $a^2=c^2-b^2$. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Zusatz: Betrachtet man die Zahl Null als natürliche Zahl, so ist sicher $x=1$, $y \in R$ ein rationales Lösungspaar (wobei mit R die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet ist).

Aufgabe 17/79
Man untersuche ohne numerische Rechnung, welche der beiden Zahlen e^π und π^e die größere ist!

Bekanntlich wächst die Funktion $y=f_1(x)=x$ für $x>1$ stärker als die Funktion $y=f_2(x)=\ln x$.
Beweis für diese Behauptung: Es ist $f_2'(x)=x^{-1}<1=f_1'(x)$ für $x>1$.
Daraus folgt, sofort wegen $e<\pi$

$$\frac{e}{\ln e} < \frac{\pi}{\ln \pi} \to e \cdot \ln \pi < \pi \cdot \ln e \to \ln \pi^e < \ln e^\pi$$

und wegen der Monotonie der ln-Funktion $\pi^e < e^\pi$.

Aufgabe 18/79
Die Maßzahlen des Inkreisradius und der Seiten seien bei einem Dreieck ganzzahlige Glieder einer arithmetischen Folge 1. Ordnung. Wie groß sind sie, wenn sie so klein wie möglich sind?

Angenommen, es gibt ein Dreieck, bei dem die Maßzahlen des Inkreisradius r und der Seiten a, b, c aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge 1. Ordnung sind. Dann ist sicher der Inkreisradius das kleinste Glied (der Inkreisradius ist kleiner als jede Seite).
O.B.d.A. sei $a<b<c$. (Hier und im folgenden seien mit r, a, b, c die Maßzahlen der entsprechenden Strecken bezeichnet.)
Dann ist

$$a=r+d \qquad ; \qquad b=r+2d \qquad ; \qquad c=r+3d$$

wobei d die Differenz der arithmetischen Folge ist. Bekanntlich gilt nun für den Inkreisradius

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad \text{mit } s = \frac{a+b+c}{2}$$

also

$$s = \frac{3r+6d}{2} = \frac{3}{2}(r+2d) \qquad ; \qquad s-a = \frac{1}{2}(r+4d)$$

$$s-b = \frac{1}{2}(r+2d) \qquad ; \qquad s-c = \frac{1}{2}r$$

Damit folgt

$$r = \sqrt{\frac{\frac{r+4d}{2} \cdot \frac{r+2d}{2} \cdot \frac{r}{2}}{3\frac{r+2d}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2+4rd}{3}}$$

und $12r^2=r^2+4rd$, $\frac{11}{4}r=d$.
Damit bei ganzzahligem r auch a, b und c ganzzahlig werden, ist notwendig und hinreichend, dass d ganzzahlig ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $r \equiv 0 \pmod 4$ ist. Das kleinstmögliche r ergibt sich dann zu $r=4$, für d folgt dann $d=11$, und für die Seiten folgt $a=15$, $b=26$, $c=37$. Tatsächlich erfüllen diese Werte auch die Dreiecksungleichungen.

Aufgabe 19/79
Es gibt Primzahlen p_{1k} für die gilt, dass $p_{2k} = p_{1k} + 100$ ebenfalls Primzahl ist (Beispiele: $p_{1k} = 3; p_{1k} = 7; p_{1k} = 13$).
Es ist zu beweisen, dass für $p_{1k} > 3$ keine Primzahl p_{2k} größere Zahl eines Primzahl-Zwillingspaares ist.

Primzahl-Zwillingspaare haben bekanntlich die Gestalt $(p = 6m-1; q = 6m+1)$ mit $m \in N$. Die größere Zahl eines Primzahl-Zwillingspaares lässt also beim Teilen durch 3 stets den Rest 1: $q \equiv 1 \pmod 3$.
Nun ist wegen $p_{1k} > 3$ auch $p_{1k} \equiv 1 \pmod 3$, wenn p_{2k} Primzahl ist [wäre nämlich $p_{1k} \equiv -1 \pmod 3$, so wäre $p_{2k} \equiv -1 + 100 = 99 \equiv 0 \pmod 3$ und damit keine Primzahl].
Daraus folgt

$$p_{2k} \equiv 1 + 100 = 101 \equiv 2 \pmod 3$$

Das steht aber im Widerspruch zu $q \equiv 1 \pmod 3$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 20/79
Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, aber in der gleichen Halbebene liegen. Man ermittle alle Punkte C_i auf g, für die g Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC_i ist.

Angenommen, die Aufgabe wäre bereits gelöst. Es sei g_{AB} die durch A und B bestimmte Gerade, P ihr Schnittpunkt mit g. Dann gilt nach dem Sehnen-Tangenten-Satz: $PA \cdot PB = PC_i^2$.
Andererseits gilt nach dem Höhensatz in jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten PA und PB (wobei P der Fußpunkt des Lotes c auf die Hypotenuse ist): $PA \cdot PB = h^2$
Man findet also PC_i als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten PA und PB.
Konstruktion nach dem Satz des Thales: Man verlängere ABP über P hinaus um BP bis B', schlage über AB' den Thaleskreis und errichte in P die Senkrechte auf AB'. Ihr Schnittpunkt mit dem Thaleskreis sei D.
Nun schlage man mit PD als Radius um P einen Kreis. Seine Schnittpunkte mit g sind die gesuchten Punkte C_i.
Offensichtlich gibt es deren im allgemeinen zwei. Die Konstruktion versagt, wenn $g_{AB} \parallel g$ ist, da dann kein Schnittpunkt P existiert. In diesem Fall ist offensichtlich, dass C_i auf der Mittelsenkrechten von AB liegen muss, also ihr Schnittpunkt mit g ist. Im besonderen existiert also nur ein Punkt C_i.

Aufgabe 21/79
Es sind alle Tripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen zu bestimmen, die den beiden Bedingungen genügen:

$$x + y + z = \pi \quad (1) \qquad ; \qquad \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 z \quad (2)$$

Wegen $x; y; z > 0$ und (1) gilt $0 < x; y; z < \pi$. Die Zahlen $x; y; z$ können also (im Bogenmaß gemessene) Winkel ebener Dreiecke sein. Werden die gegenüberliegenden Seiten mit a; b bzw. c bezeichnet, so gilt nach dem Sinussatz

$$\sin x : \sin y = a : c \qquad \text{und} \qquad \sin y : \sin z = b : c$$

woraus sich

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \sin^2 z + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \sin^2 z = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \sin^2 z$$

ergibt. Aus (2) folgt damit

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1 \qquad ; \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

d.h., es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c. Dann ist aber $z = 0{,}5\pi$, $\sin z = 1$ und wegen (1) auch $x + y = 0{,}5\pi$. Offenbar sind für alle Tripel $(x; y; z)$ mit $x + y = z = 0{,}5\pi$ auch die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so dass damit alle Tripel gefunden sind.

Aufgabe 22/79
Es ist zu beweisen: Aus $a + b + c = 0$ folgt $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Wenn $a + b + c = 0$ ist, so ist $a + b = -c$ und damit

$$(a - b)^3 = (-c)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3 = a^3 - 3abc + b^3$$

also $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Aufgabe 23/79
Gegeben sei die Folge

$$\{a_k\} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$$

(k Wurzeln). Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \{a_k\}$.

Zunächst ist zu prüfen, ob die Folge $\{a_k\}$ einen Grenzwert z hat. Offensichtlich ist sie streng monoton wachsend, da sich beim Übergang von a_k zu a_{k+1} der Radikand vergrößert. Es genügt also, zu prüfen, ob sie eine obere Schranke hat.
Behauptung: Die Zahl 2 ist obere Schranke der Folge $\{a_k\}$.
Beweis: 1. Es ist $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
2. Aus $a_k < 2$ folgt $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Also gilt für jedes a_k: $a_k < 2$.
Damit ist die Existenz des Grenzwertes z gesichert. Dann gilt aber

$$\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k = z$$

Daraus folgt

$$z = \sqrt{2 + z} \to z^2 - z - 2 = 0 \to z_{1;2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$$

Wegen $z > 0$ entfällt z_2. Es ist demnach $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 2$

Aufgabe 24/79
Gegeben sei ein Schachbrett mit n^2-Feldern, die in üblicher Weise schwarz und weiß gefärbt seien (falls n ungerade ist, seien die Eckfelder schwarz). $A(n)$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, n gleichfarbige Türme so anzuordnen, dass kein Turm das Feld eines anderen beherrscht; $B(n)$ sei die Anzahl der entsprechenden Möglichkeiten, wenn die Türme nur auf schwarzen Feldern stehen dürfen.
Es ist zu zeigen, dass das Verhältnis $A(n) : B(n)$ für beliebiges natürliches $n > 1$ stets eine natürliche Zahl ist.

Offensichtlich gilt $A(n) = n!$ (Für den ersten Turm hat man in einer Reihe n Anordnungsmöglichkeiten, für den zweiten Turm in einer Reihe nur noch $n - 1$ usf. bis zum n-ten, für den es $n - (n - 1) = 1$ Möglichkeit gibt).
Für $B(n)$ ist eine Fallunterscheidung erforderlich:
1) n sei gerade. Dann gilt, dass $B(n) = \left(\frac{n}{2}!\right)^2$ ist (für den ersten Turm hat man in einer Reihe $\frac{n}{2}$ Anordnungsmöglichkeiten, für den zweiten ebenfalls, für den dritten und vierten $\frac{n-2}{2}$ usf.)
2) n sei ungerade. Wird n um 1 vermindert, so liegt Fall 1 vor:

$$B(n-1) = \left(\frac{n-1}{2}!\right)^2$$

Diese Anzahl ist für $B(n)$ mit $\frac{n+1}{2}$ zu multiplizieren:

$$B(n) = \left(\frac{n-1}{2}!\right)^2 \cdot \frac{n+1}{2}$$

Also gilt für das Verhältnis $A(n) : B(n)$ entweder

$$\frac{A(n)}{B(n)} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2} = \frac{n!}{\frac{n}{2}!(n - \frac{n}{2})!} = \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{A(n)}{B(n)} = \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2 \cdot \frac{n+1}{2}} = \frac{n!}{\frac{n-1}{2}!(n - \frac{n-1}{2})!} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

In jedem Fall gilt, dass das Verhältnis $A(n):B(n)$ ein Binomialkoeffizient natürlicher Zahlen und damit eine natürliche Zahl ist. (Bemerkung: Die Behauptung gilt sogar für den trivialen Fall $n=1$.)

Aufgabe 25/79
Man bestimme alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, bei denen die Differenz der Quadrate gleich 1000 ist.

Nach der Aufgabenstellung sind Paare natürlicher Zahlen a und b gesucht, für die die Gleichung

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1000$$

gilt. Wir zerlegen die Zahl 1000 auf alle möglichen Weisen in ein Produkt mit zwei natürlichen Zahlen als Faktoren:

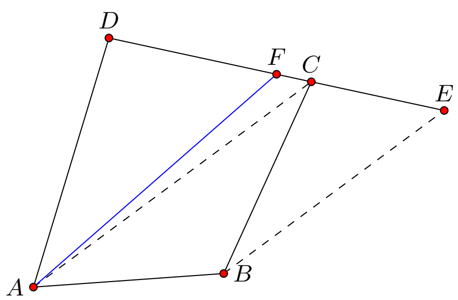
$$1000=1000\cdot 1=500\cdot 2=250\cdot 4=200\cdot 5=125\cdot 8=100\cdot 10=50\cdot 20=40\cdot 25$$

Es müssen also die beiden Gleichungen $a+b=t_1$, $a-b=t_2$ erfüllt sein, wobei die Faktoren mit t_1 (der größere) und mit t_2 (der kleinere) bezeichnet wurden. Ihre Lösungen sind

$$a=\frac{t_1+t_2}{2} \qquad ; \qquad b=\frac{t_1-t_2}{2}$$

Damit a und b natürliche Zahlen sind, müssen t_1 und t_2 beide gerade oder beide ungerade sein. Folglich kommen für die Lösung der Aufgabe nur die Zerlegungen $t_{11}=500, t_{21}=2$, $t_{12}=250, t_{22}=4$, $t_{13}=100, t_{23}=10$, $t_{14}=50, t_{24}=20$ in Frage. Damit erhält man als Lösung die vier Paare $(251;249),(127;123),(55;45),(35;15)$. Durch die Probe bestätigt man die Richtigkeit.

Aufgabe 26/79
Durch den Eckpunkt A eines konvexen Vierecks ist eine Gerade zu legen, die das Viereck in zwei flächengleiche Teile zerlegt.



Angenommen, die Aufgabe wäre bereits gelöst, und o.B.d.A. wäre der Flächeninhalt des Dreiecks ACD größer als der Flächeninhalt des Dreiecks ABC (Abbildung). Dann schneidet die gesuchte Gerade die Viereckseite CD in einem Punkt F. Es sei nun E der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu AC mit der Verlängerung von CD. Dann ist das Dreieck AEC flächengleich dem Dreieck ABC; damit ist das Dreieck AEF flächengleich dem Viereck $ABCF$.

Aus dieser Feststellung ergibt sich die Konstruktion der gesuchten Geraden, die gefunden ist, wenn der Punkt F ermittelt wurde. Da die Dreiecke AEF und AFD nach der Aufgabenstellung flächengleich sein sollen, ist F der Halbierungspunkt der Strecke DE.

Konstruktionsbeschreibung: Die Parallele zu AC durch B wird mit der Verlängerung von CD zum Schnitt gebracht; der Schnittpunkt ist E. Die Strecke ED wird halbiert; der Halbierungspunkt ist F. Die Gerade durch A und F ist die gesuchte.
Falls der Flächeninhalt des Dreiecks ABC größer ist als der des Dreiecks ACD, vertauscht man die Bezeichnungen der Eckpunkte B und D; damit ist die Aufgabe auf den vorherigen Fall zurückgeführt.

Aufgabe 27/79
Man beweise: Ist bei der Zahl $z=111...111$ die Anzahl der Stellen ein Vielfaches von 66, so ist z ein Vielfaches von 363.

Wegen $363=3\cdot 11^2$ kann man die Teilbarkeit von z durch 363 beweisen, indem man die Teilbarkeit von z durch 3 und durch 11^2 nachweist. Die Teilbarkeit durch 3 folgt sofort aus der Teilbarkeit der Quersumme $Q(z)=66k$ mit $k\in N$ (nach Voraussetzung gilt für die Anzahl n der Stellen $n=66k$, jede Stelle ist mit 1 besetzt).

Wir weisen nun zunächst nach, dass z durch 11 teilbar ist. Es ist

$$\frac{z}{11} = \frac{111...111}{11} = 1010...10 = \overline{z}$$

mit $n-1 = 66k-1$ Stellen, wobei $33k$ Stellen mit 1 und $33k-1$ Stellen mit 0 in regelmäßigem Wechsel besetzt sind. Dass die Division aufgeht, folgt aus der Geradzahligkeit von $n = 66k$ (die alternierende Quersumme $Q_a(z)$ wird damit gleich null).
Der Beweis ist vollständig, wenn gezeigt ist, dass $\overline{z}$ restlos durch 11 teilbar ist. Dazu bilden wir die alternierende Quersumme $Q_(\overline{z})$. Da in $\overline{z}$ $33k$ Stellen mit 1 und $33k-1$ Stellen mit 0 in regelmäßigem Wechsel besetzt sind, gilt $Q_(\overline{z}) = 33k$. Aus der Teilbarkeit von $Q_a(\overline{z})$ durch 11 folgt die Teilbarkeit von $\overline{z}$ durch 11. Damit ist unter der getroffenen Voraussetzung z durch $3 \cdot 11 \cdot 11 = 363$ ohne Rest teilbar.

Aufgabe 28/79
Es sind alle Primzahlpaare $(p; P)$ zu ermitteln, die der Gleichung $P = 14p^2 + 1$ genügen.

Für $p = 2$ ist $14p^2 + 1 = 57$, also keine Primzahl.
Für $p = 3$ ist $14p^2 + 1 = 127 = P$. Demnach ist $(p; P) = (3; 127)$ eines der gesuchten Paare.
Ist $p > 3$, so ist $p = 3k \pm 1$ mit $k \in N; k > 1$, also

$$14p^2 + 1 = 14(3k \pm 1)^2 + 1 = 14(9k^2 \pm 6k + 1) + 1 = 126k^2 \pm 84k + 15 = 3(42k^2 \pm 28k + 5)$$

Daraus folgt, dass $14p^2+1$ keine Primzahl ist. Damit ist das gefundene Paar $(p; P) = (3; 127)$ das einzige.

Aufgabe 29/79
Welche Glieder der Folge $\{a_k\} = \{8; 88; 888; 8888; ...\}$ sind Quadratzahlen?

Das allgemeine Bildungsgesetz der Folge ist

$$a_k = 8(10^{k-1} + 10^{k-2} + ... + 10^1 + 10^0) = 8\sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 8 \cdot \frac{10^k - 1}{9}$$

Offensichtlich ist a_1 keine Quadratzahl. Für $k \geq 2$ gilt nun

$$10^k \equiv 0 \pmod{25} \qquad ; \qquad 10^k - 1 \equiv -1 \equiv 99 \pmod{25}$$

$$\frac{10^k - 1}{9} \equiv 11 \pmod{25} \qquad ; \qquad 8 \cdot \frac{10^k - 1}{9} \equiv 88 \equiv 13 \pmod{25}$$

Man prüft aber leicht nach, dass 13 unter den Quadraten der Reste beim Teilen durch 25 nicht vorkommt, d.h., kein Glied der Folge ist Quadratzahl.

Aufgabe 30/79
Man löse das folgende System diophantischer Gleichungen

$$\begin{aligned} 135x_1 + 100x_2 - x_3 &= -4 \quad (1)\\ 97x_1 + 132x_2 - x_4 &= 20 \quad (2)\\ 7x_1 + 193x_2 - x_4 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

mit den Bedingungen $x_1; x_2; x_3; x_4 \in N$, $x_2 \leq 30$ und bilde die Tripel $(x_1; x_2, x_3)$ und $(x_1; x_2, x_4)$.

Es bietet sich zunächst die Subtraktion (2)-(3) zur Elimination von x_4 an. Dadurch ergibt sich $90x_1 - 61x_2 = 20$, woraus sofort $x_2 \equiv 0 \pmod{10}$, also $x_2 = 10k$ mit $k = 0; 1; 2; 3$ folgt ($k > 3$ entfällt wegen $x_2 \leq 30$). Damit erhält man

$$90x_1 - 610k = 20 \rightarrow x_1 = \frac{61k + 2}{9} = 6k + \frac{7k + 2}{9}$$

also (wegen $x_1 \in N$) $k = 1$, $x_2 = 10$, $x_1 = 7$. Mit diesen Werten erhält man aus Gleichung (1)

$$x_3 = 135 \cdot 7 + 100 \cdot 10 + 4 = 1949$$

und aus einer der Gleichungen (2) oder (3): $x_4 = 1979$. Die gesuchten Tripel sind also (7.10.1949) und (7.10.1979).

Aufgabe 31/79
In der Folge der natürlichen Zahlen gibt es Primzahlen, die unmittelbarer Nachfolger des Quadrates einer natürlichen Zahl sind.
Beispiele: $2 = 1^2 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 4^2 + 1$, $37 = 6^2 + 1$.
Man beweise, dass im Gegensatz dazu keine Primzahl (ausgenommen die Primzahl 3) das Quadrat einer natürlichen Zahl als unmittelbaren Nachfolger hat!

Den Beweis der Behauptung führen wir indirekt. Angenommen, es gäbe eine Primzahl $p \neq 3$, deren Nachfolger das Quadrat einer natürlichen Zahl n sei. Dann gilt

$$p + 1 = n^2 \qquad ; \qquad p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$$

Aus der Primzahleigenschaft von p folgt unmittelbar, dass der kleinere der beiden Faktoren $n + 1$ und $n - 1$ gleich 1, der größere aber gleich p sein muss: $n - 1 = 1$, $n + 1 = p$. Daraus folgt sofort $n = 2$ und $p = 3$ als einzige Lösung im Widerspruch zu der Annahme $p \neq 3$.
Die Annahme ist also falsch. Das heißt, keine Primzahl außer 3 hat als unmittelbaren Nachfolger das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 32/79
Es gilt $9 \cdot 45 = 405$. Für welche Produkte aus einer einstelligen und einer zweistelligen Zahl gilt, dass man sie durch Einfügen einer Null zwischen die erste und die zweite Stelle des zweistelligen Faktors erhält?

Es seien a der einstellige Faktor, $10b + c$ der zweistellige, wobei $a; b; c \in N$, $1 \leq b; c \leq 9$, $2 \leq a \leq 9$ gilt. Dann ist (nach den Bedingungen der Aufgabe) die folgende diophantische Gleichung zu lösen:

$$a(10b + c) = 100b + c$$

Stellt man diese Gleichung nach b um, so erhält man

$$b = \frac{c(a-1)}{10(10-a)}$$

Da der Nenner des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung den Faktor 10 enthält, ist entweder (1) c gerade und $a - 1 = 5$, also $a = 6$, oder (2) $c = 5$, $a - 1$ gerade. Aus (1) folgt dann sofort $b = \frac{c}{8}$, also $c = 8$, $b = 1$. Tatsächlich gilt $6 \cdot 18 = 108$.
Aus (2) ergibt sich

$$b = \frac{a-1}{2(10-a)}$$

Setzt man diese Werte für a ein, so erhält man nur für $a = 7$ und für $a = 9$ ganzzahlige Werte für b:

$$a = 7: \quad b = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1 \qquad ; \qquad a = 9: \quad b = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4$$

Auch hier bestätigt die Probe: $7 \cdot 15 = 105$, $9 \cdot 45 = 405$. Es gibt also genau drei Produkte der geforderten Art.

Aufgabe 33/79 Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen $x; y$ mit $x + y = 1$ die Ungleichung gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

Es ist
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{2}{xy} \qquad (*)$$
wegen $x+y=1$. Nach der Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gilt
$$\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\geq\sqrt{xy} \qquad ; \qquad \frac{1}{4}\geq xy\to 4\leq\frac{1}{xy}$$
Daraus folgt mit (*) die Behauptung
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{2}{xy}\geq 1+2\cdot 4=9$$

Aufgabe 34/79

Es sei $x_i\in\{+1;-1\}$ mit $i=1;2;3;...;1980$ und $\prod\limits_{i=1}^{1980} x_i>0$.

Man beweise, dass dann gilt: $\prod\limits_{i=1}^{990} x_{2i-1}x_{2i}\neq 0$

Durch einen Druckfehler (Behauptung ist eine Summe kein Produkt) wurde die Aufgabe unlösbar. Daher wurde sie als Aufgabe 10/80 erneut gestellt.

Aufgabe 35/79

Im vergangenen Jahr ergab sich mein Alter als Quersumme meines Geburtsjahres. Wie alt war ich?

Die größte Quersumme eines Jahres seit der Zeitenwende ist $1+8+9+9=27$. Also bin ich im vergangenen Jahr 1979 höchstens 27 Jahre alt gewesen und damit frühestens 1952 geboren.
Es sei nun $1900+10a+b$ mit $a;b\in N$, $0\leq a,b\leq 9$ mein Geburtsjahr. Dann gilt für mein Alter
$$1979-(1900+10a+b)=1+9+a+b \qquad \text{also} \qquad 11a+2b=69$$
Diese diophantische Gleichung ist leicht lösbar:
$$a=6+\frac{3-2b}{11}$$
woraus sofort $b=7,a=5$ folgt (es ist $3-2b\equiv 0 \mod 11$, also $2b\equiv 3 \mod 11$; wegen $0\leq b\leq 9$ kommt einzig $b=7$ in Frage).
Ich bin also im Jahre 1957 geboren und hatte 1979 ein Alter von $1+9+5+7=22$ Jahren. Wie die Lösung zeigt, ist das Ergebnis eindeutig.

Aufgabe 36/79

Man löse die Gleichung
$$\binom{4k}{k}\cdot k^2=\binom{4k}{k+1}\cdot(k+1)$$
mit $k\in N, k>0$, und berechne für die gefundene(n) Lösung(en) den Wert der beiden Terme.

Es ist
$$\binom{4k}{k}\cdot k^2=\frac{(4k)!k^2}{k!\cdot(3k)!} \qquad ; \qquad \binom{4k}{k+1}\cdot(k+1)=\frac{(4k)!(k+1)}{(k+1)!\cdot(3k-1)!}$$
Daher kann man die gegebene Gleichung in der Form
$$\frac{(4k)!k^2}{k!\cdot(3k)!}=\frac{(4k)!(k+1)}{(k+1)!\cdot(3k-1)!}$$

schreiben. Nun kann man weiter äquivalent umformen:

$$\frac{k^2}{k! \cdot (3k)!} = \frac{(k+1)}{(k+1)! \cdot (3k-1)!} = \frac{1}{k! \cdot (3k-1)!}$$
$$k^2 = \frac{(3k)!}{(3k-1)!} = 3k$$

Daraus folgt wegen $k > 0$ sofort $k = 3$. Setzt man dies in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$\binom{12}{9} \cdot 9 = \binom{12}{4} \cdot 4 \qquad ; \qquad \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 = 1980$$

2.20 Aufgaben und Lösungen 1980

Aufgabe 1/80
Es sei P ein innerer Punkt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a; ferner gelten die folgenden Beziehungen: $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$; A, B, C seien die Eckpunkte des Dreiecks. Man beweise, dass die Ungleichungen gelten: $1{,}5a < x + y + z + < 2a$.

Die linke Ungleichung folgt sofort aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung. Es ist nämlich

$$x + y > AB = a \quad ; \quad y + z > BC = a \quad ; \quad z + x > CA = a$$

Addiert man diese drei Ungleichungen, so ergibt sich

$$2(x + y + z) > 3a \quad ; \quad x + y + z > 1{,}5a$$

Zum Beweis der rechten Ungleichung ziehen wir durch P eine Parallele zu AB, die BC in D und CA in E schneidet. Das Dreieck DCE ist dann ebenfalls gleichseitig und habe die Seitenlänge t, der Punkt P teilt die Seite ED in die beiden Abschnitte $EP = u$ und $PD = v$. Weiter gilt dann $AE = BD = a - t$. Nun folgt aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung

$$x < AE + EP = a - t + u \quad ; \quad y < BD + PD = a - t + v$$

Ferner ist sicher $z < t$ (im Dreieck EPC ist $\measuredangle EPC$ der größte Winkel; entsprechend im Dreieck DPC $\measuredangle DPC$; dem größeren Winkel liegt aber die größere Seite gegenüber). Addiert man diese drei Ungleichungen, so erhält man

$$x + y + z < 2a - t + u + v = 2a$$

wegen $u + v = t$.

Aufgabe 2/80
Es sind alle Primzahlen p zu ermitteln, die der Gleichung $2p + 1 = m^3$ mit $m \in N$ genügen.

Da $2p + 1$ eine ungerade Zahl ist, muss; vorausgesetzt, es existiert ein $m \in N$ mit $2p + 1 = m^3$; auch m ungerade sein: $m = 2k + 1$ mit $k \in N$. Damit ergibt sich

$$2p + 1 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \to p = k(4k^2 + 6k + 3)$$

Nun ist p laut Voraussetzung eine Primzahl; daraus folgt, dass entweder $k = 1$ und $4k^2 + 6k + 3 = p$ oder $k = p$ und $4k^2 + 6k + 3 = 1$ ist. Die letzte (in k quadratische) Gleichung hat aber im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösung. Daher ist $k = 1$, $p = 4k^2 + 6k + 3 = 13$ und somit $m = 3$.
Es gibt also genau eine Primzahl p mit der geforderten Eigenschaft: $p = 13$.

Aufgabe 3/80
Man finde alle nicht konstanten, überall stetigen Funktionen f mit $f(x) = f(2x)$ für alle reellen Zahlen x.

Angenommen, es gibt eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften. Da f eine nicht konstante Funktion sein soll, existiert sicher eine reelle Zahl x_1 für die gilt $f(x_1) \neq f(0)$. Aus $f(x) = f(2x)$ folgt aber auch $f(x) = f(\frac{x}{2})$ und damit

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_1}{2}\right) = f\left(\frac{x_1}{4}\right) = ... = f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)$$

Bildet man nun die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)$ und $\lim_{n\to 0} f(x)$, die wegen der Stetigkeit sicher existieren, so gilt einerseits

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_1) = f(x_1)$$

andererseits

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$$

(mit $z = \frac{x_1}{2^n}$). Daraus folgt $f(x_1) = f(0)$ im Widerspruch zu $f(x_1) \neq f(0)$. Also ist die Annahme falsch, es gibt demnach keine Funktion mit den geforderten Eigenschaften.
Zusatz: Lässt man konstante Funktionen zu, so zeigt sich, dass genau diese die übrigen Forderungen erfüllen. Verzichtet man auf die Forderung nach Stetigkeit, so erfüllt z.B. die Funktion $f(x) = \operatorname{sgn}^2(x)$ die übrigen Forderungen (es ist $\operatorname{sgn} x = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$ für $x = 0$ und $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$).

Aufgabe 4/80
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung für alle reellen Zahlen $x > 0$: $e^x > 1 + \ln(1 + x)$.

Es ist für $x > 0$
$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... > 1 + x$$
d.h. $e^x - 1 > x$. Aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion folgt dann
$$e^{e^{x-1}} > e^x > 1 + x \qquad ; \qquad \ln e^{e^{x-1}} = e^x - 1 > \ln 1 + x$$
und somit $e^x > 1 + \ln(1 + x)$.

Aufgabe 5/80
Wieviele natürliche Zahlen gibt es, deren Darstellung im Dezimalsystem genau aus den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 besteht (wobei jede auch nur ein Mal auftritt) und die restlos durch 11 teilbar sind?

Bekanntlich gilt die Regel: Eine natürliche Zahl n ist genau dann restlos durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme $Q_A(n)$ restlos durch 11 teilbar ist.
Bezeichnet man die Summe der vier in $Q_A(n)$ mit Pluszeichen versehenen Glieder mit s_1 die Summe der übrigen vier Glieder mit s_2, so gelten die beiden Gleichungen
$$s_1 + s_2 = Q(n) = 36 \quad (1) \qquad ; \qquad s_1 - s_2 = Q_A(n) = 11k \quad (2)$$
($k \in G$). Der kleinste Wert, den die Summen s_1 und s_2 annehmen können, ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, der größte ist $5 + 6 + 7 + 8 = 26$. Damit gilt $10 \leq s_1 \leq 26 \quad (3)$.
Addiert bzw. subtrahiert man (1) und (2), so erhält man
$$2s_1 = 36 + 11k \qquad ; \qquad 2s_2 = 36 - 11k \quad (4)$$
woraus sofort folgt, dass k gerade ist. Aus (3) und (4) ergibt sich weiter
$$20 \leq s_1 = 36 + 11k \leq 52 \qquad ; \qquad -16 \leq 11k \leq 16$$
Da k geradzahlig ist, wird diese Ungleichung nur für $k = 0$ erfüllt. Die beiden Gleichungen (4) ergeben dann $s_1 = 18$, $s_2 = 18$. Es gibt nun die folgenden Möglichkeiten, die Summen s_1 und s_2 zu bilden:

s_1	s_2	s_1	s_2
1+2+7+8	3+4+5+6	1+3+6+8	2+4+5+7
1+4+5+8	2+3+6+7	1+4+6+7	2+3+5+8
2+3+6+7	1+4+5+8	2+4+5+7	1+3+6+8
2+3+5+8	1+4+6+7	3+4+5+6	1+2+7+8

Da man in jeder der beiden Summen die Anordnung auf 4! verschiedene Weisen wählen kann, ergeben sich insgesamt $8 \cdot 4! \cdot 4! = 4608$ verschiedene Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 6/80
Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus dessen Hypotenuse AB und dem Punkt D, in dem die Halbierende des rechten Winkels die Hypotenuse schneidet!

Zur Lösung verwenden wir einen Hilfssatz: In jedem Dreieck halbiert jede Winkelhalbierende den Umkreisbogen über der gegenüberliegenden Seite.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Peripheriewinkelsatz. Ist nämlich ABC das Dreieck und B' der Schnittpunkt, den die Halbierende des Winkels ABC auf dem Umkreisbogen über AC erzeugt, so gilt: $\measuredangle ACB' = \measuredangle ABB'$ (gemeinsame Sehne AB'); $\measuredangle ABB' = \measuredangle B'BC$ (BB' ist Halbierende); $\measuredangle B'BC = \measuredangle CAB'$ (gemeinsame Sehne CB'), also $\measuredangle ACB' = \measuredangle CAB'$.
Daraus folgt $AB' = CB'$ und damit Bogen AB' = Bogen CB'. Durch zyklische Vertauschung ergibt sich der Beweis für die übrigen Winkel.
Damit ergibt sich die folgende Konstruktion:
1. Man schlage über AB als Durchmesser einen Kreis. Auf ihm liegt der Punkt C (Satz des Thales).
2. Man errichte auf AB die Mittelsenkrechte. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis seien N und N'.
3. Man ziehe Geraden durch D und N bzw. N'. Ihre Schnittpunkte mit dem Thaleskreis sind C bzw. C'.
Die Aufgabe ist (bis auf Achsensymmetrie bezüglich AB) stets eindeutig lösbar, wenn D im Inneren von AB liegt.

Aufgabe 7/80
Man beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt die Ungleichung $a + b \leq c\sqrt{2}$. In welchem Fall gilt das Gleichheitszeichen?

Sicher gilt die Identität
$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} = a^2 + b^2$$
Wegen $(a-b)^2 \geq 0$ folgt daraus $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Da a und b Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c sind, gilt $a^2 + b^2 = c^2$ und damit
$$(a+b)^2 \leq 2c^2 \qquad ; \qquad a + b \leq c\sqrt{2}$$
Ist $a = b$, so ist $(a - b)^2 = 0$, und es gilt in der zu beweisenden Ungleichung das Gleichheitszeichen. Ist dagegen $a \neq b$, so folgt $a + b < c\sqrt{2}$.

Aufgabe 8/80
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $n = p_1 \cdot p_2$; das Produkt zweier (echt) zweistelligen Primzahlen p_1 und p_2.
2. Für die Quersumme $Q(n)$ gilt $Q(n) = p_1$ mit $p_1 < p_2$.
3. Die Einerstellen von p_1 und p_2 sind einander gleich.
4. Auch $p_1 \pm 6$ ist (echt) zweistellige Primzahl.

Da p_1 und p_2 zweistellige Primzahlen sind, ist n offenbar höchstens vierstellig. Daraus folgt $Q(n) \leq 4 \cdot 9 = 36$. Wegen $Q(n) = p_1$ folgt sogar $Q(n) = p_1 \leq 31$.
Es kommen also für p_1 nur die sieben Primzahlen $11; 13; 17; 19; 23; 29; 31$ in Frage. Wegen Bedingung 4 entfallen davon sogleich die fünf Primzahlen $11; 13; 19; 29$ und 31, so dass nur $p_{11} = 17$ und $p_{12} = 23$ verbleiben.
Wegen der Gleichheit der Einerstellen kommen als p_{21} nur die Primzahlen $37; 47; 67$ und 97, für p_{22} nur $43; 53; 73$ und 83 in Betracht. Von den damit zur Diskussion stehenden Paaren scheidet man mit Hilfe von $Q(n) = Q(p_1 \cdot p_2) = p_1$ durch Probieren rasch sechs Paare aus. Tatsächlich erfüllen die beiden dann noch verbleibenden Paare $p_{11} = 17; p_{21} = 37$ und $p_{12} = 23; p_{22} = 73$ alle Bedingungen der Aufgabe:
$$17 \cdot 37 = 629 = n_1; \quad Q(n_1) = 6+2+9 = 17; \quad 17+6 = 23; \quad 17-6 = 11$$
$$23 \cdot 73 = 1679 = n_2; \quad Q(n_2) = 1+6+7+9 = 23; \quad 23+6 = 29; \quad 23-6 = 17$$
Es gibt also genau zwei natürliche Zahlen $n_1 = 629$ und $n_2 = 1679$ mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 9/80
Für welche reellen Zahlen x bilden die Zahlen $\log_a 2$, $\log_a (2^x - 1)$, $\log_a (2^x + 3)$ eine arithmetische Folge 1. Ordnung?

Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Die Folge sei wachsend. Das heißt, $2^x - 1 > 2; 2^x > 3; x > \log_2 3$. Dann ist

$$\log_a(2^x+3) - \log_a(2^x-1) = \log_a(2^x-1) - \log_a 2$$
$$\log_a \frac{2^x+3}{2^x-1} = \log_a \frac{2^x-1}{2} \to \frac{2^x+3}{2^x-1} = \frac{2^x-1}{2}$$

(wegen der Monotonie der log-Funktion). Setzt man $u = 2^x$, so nimmt die letzte Gleichung die Gestalt

$$\frac{u+3}{u-1} = \frac{u-1}{2}$$

an; ihre Lösungen sind $u_1 = 5, u_2 = -1$. Die Lösung u_2 entfällt wegen $u = 2^x > 0$. Aus $u = 2^x = 5$ folgt nun $x = \log_2 5 > \log_2 3$ als Lösung.
2. Die Folge sei fallend. Das heißt, $2^x - 1 < 2; 2^x < 3; x < \log_2 3$. Dann ist

$$\log_a(2^x+3) - \log_a 2 = \log_a 2 - \log_a(2^x-1)$$

Durch analoge Rechnung folgt daraus

$$\frac{u+3}{2} = \frac{2}{u-1}$$

mit $u = -1 + 2\sqrt{2}$, $x = \log_2(2\sqrt{2}-1)$ als zweiter Lösung. (Der dritte, theoretisch mögliche Fall einer konstanten Folge scheidet offensichtlich wegen $2^x - 1 \neq 2^x + 3$ sofort aus.) Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Ergebnisse.

Aufgabe 10/80

Es sei $x_i \in \{+1; -1\}$ mit $i = 1; 2; 3; ...; 1980$ und $\prod_{i=1}^{1980} x_i > 0$. Man beweise, dass dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{990} x_{2i-1}x_{2i} \neq 0$$

Wegen $\prod_{i=1}^{1980} x_i > 0$ ist die Anzahl der negativen a_i gerade. Weiter ist $x_{2i-1}x_{2i} = \pm 1$. Angenommen es gälte

$$\sum_{i=1}^{990} x_{2i-1}x_{2i} = 0$$

Dann müsste die Summe je zur Hälfte aus positiven und negativen Summanden bestehen, woraus folgt, dass die Anzahl der negativen a_i ungerade ist im Widerspruch zu der oben getroffenen Feststellung (in den 445 negativen Summanden ist je genau ein x_i negativ, in jedem der 445 positiven Summanden entweder kein oder genau zwei x_i). Also ist die Annahme falsch; die Summe ist nicht gleich null.

Aufgabe 11/80 Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n+1)$$

Bekanntlich ist die Folge $\{a_k\} = \left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}$ streng monoton wachsend, und ihr Grenzwert für $k \to \infty$ ist e. Demnach gilt für jedes $k \geq 1$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e$$

Durch Logarithmieren folgt daraus

$$k \ln \frac{k+1}{k} = k[\ln(k+1) - \ln k] < \ln e = 1 \to \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

und durch Summieren

$$\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k] < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Nun ist aber (u.a. wegen $\ln 1 = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k] = \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln k = \sum_{k=2}^{n+1}\ln k - \sum_{k=2}^{n}\ln k = \ln(n+1)$$

womit der Beweis geführt ist.

Aufgabe 12/80
Ein gewisser Herr Quidam macht über sein Alter die folgenden Angaben:
1. Mein Geburtsjahr kann man als doppeltes Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen.
2. Wenn ich 36 Jahre alt sein werde, kann man die Jahreszahl als vierfaches Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen.
3. Die größte Zahl des Tripels unter 2. ist mit der kleinsten Zahl des Tripels unter 1. identisch.
Es ist zu beweisen, dass dies ein Aprilscherz ist!

Bezeichnet man das Geburtsjahr mit x, dann gelten nach den Bedingungen der Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$x = 2a(a+1)(a+2) = 2a^3 + 6a^2 + 4a$$
$$x + 36 = 4(a-2)(a-1)a = 4a^3 - 12a^2 + 8a$$

(wobei mit a die kleinste Zahl des Tripels unter 1. bzw. die größte Zahl des Tripels unter 2. bezeichnet wurde). Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung führt (nach Subtraktion von 36) auf die in a kubische Gleichung

$$a^3 - 9a^2 + 2a - 18 = 0$$

Nach dem Wurzelsatz des Vieta müssen ganzzahlige Lösungen Teiler des absoluten Gliedes sein; von den in Frage kommenden Zahlen ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18 erfüllt nur $a = 9$ die Probe.
Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Gleichung ist die Produktdarstellung

$$a^3 - 9a^2 + 2a - 18 = (a^2 + 2)(a - 9) = 0$$

Damit ergibt sich das Geburtsjahr zu $x = 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 1980$.
Ein Neugeborenes dürfte wohl kaum in der Lage sein, derartige Angaben über sein Alter zu machen! (Es stimmt aber: $2016 = 1980 + 36 = 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

Aufgabe 13/80
Aus einer beliebig gewählten natürlichen Zahl n_1 bilde man eine natürliche Zahl n_2, indem man eine dreistellige natürliche Zahl "anhängt". Für welche Zahlen n ist die Summe $s = n_1 + n_2$ restlos durch 77 teilbar?

Es ist $n_2 = 1000n_1 + n$, also $s = n_1 + n_2 = 1001n_1 + n$. Da $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ restlos durch $77 = 7 \cdot 11$ teilbar ist, ergibt sich die Teilbarkeit von s genau dann, wenn n durch 77 teilbar ist.
Damit erhält man die folgenden 11 dreistelligen Zahlen n:

$$154; 231; 308; 385; 462; 539; 616; 693; 770; 847; 924$$

Lässt man auch "unecht dreistellige" Zahlen gelten, so erfüllt auch 077 die Bedingung; wird darüber hinaus die Zahl Null in die Menge der natürlichen Zahlen einbezogen, so ist auch $n = 000$ zu berücksichtigen, so dass man maximal 13 Zahlen n anführen kann.

Aufgabe 14/80
Es ist zu beweisen, dass die Summe 100101102...199 + 800801802...899 ohne Rest durch 999 teilbar ist!

Wir verwenden die folgende Teilbarkeitsregel für 999, die analog zur Teilbarkeitsregel für 9 gilt:
Der Rest, den eine Zahl heim Teilen durch 999 lässt, ist gleich dem Rest, den die Summe aller dreistelligen Zahlen lässt, in die man die Zahl von der Einerstelle her einteilen kann (wobei Darstellung im Dezimalsystem vorausgesetzt wird und Leerstellen mit gelten).
Wegen

$$\sum_{i=0}^{99}(100+i) = \frac{100+199}{2}\cdot 100 = 14950 \quad \text{und}$$

$$\sum_{i=0}^{99}(800+i) = \frac{800+899}{2}\cdot 100 = 84950$$

ist die Summe der beiden Reste gleich 99900; demnach ist die Summe 100101102...199 + 800801802...899 ohne Rest durch 999 teilbar, wenn die verwendete Teilbarkeitsregel richtig ist. Der geforderte Beweis ist damit auf den Beweis der Teilbarkeitsregel reduziert.
Es seien $a_i; b_i; c_i; i; n$ natürliche Zahlen (wobei die Zahl 0 als natürliche Zahl gelte) und $a_i; b_i; c_i \leq 9$. Sicher gilt $10^3 \equiv 1 \pmod{999}$. Daraus folgt

$$10^{3i} \equiv 1^i \equiv 1 \pmod{999} \qquad ; \qquad (100a_i + 10b_i + c_i)\cdot 10^{3i} \equiv (100a_i + 10b_i + c_i) \pmod{999}$$

Aus der Summierung beider Seiten über alle i folgt sofort die o.a. Teilbarkeitsregel.

Aufgabe 15/80
Gegeben seien $2n$ positive, reelle Zahlen $a_i; b_i$ mit $i = 1; 2; 3; ...; n$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} \geq 1$$

Da Quadrate reeller Zahlen stets nichtnegativ sind, gilt sicher $(a_i - b_i)^2 \geq 0$. Daraus folgt durch äquivalente Umformungen (u.a. wegen $b_i > 0$)

$$a_i^2 \geq 2a_ib_i - b_i^2 = b_i(2a_i - b_i) \to \frac{a_i^2}{b_i} \geq 2a_i - b_i$$

und wegen $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} \geq \sum_{i=1}^{n}(2a_i - b_i) = 2\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = 2 - 1 = 1$$

Aufgabe 16/80
Man beweise die Richtigkeit der folgenden Behauptung: Dividiert man eine Primzahl durch 24, so ist der Rest entweder 1 oder eine Primzahl.

Der Rest r, den eine Primzahl p bei Division durch 24 lässt, ist; offenbar ungerade (außer für $p = 2$; $r = 2$ ist Primzahl) und nicht durch 3 teilbar (außer für $p = 3$; $r = 3$ ist Primzahl), da sonst p durch 2 bzw. 3 teilbar und somit keine Primzahl wäre.
Ferner ist $0 < r < 24$. Folglich kommen bei $p > 3$ für r nur die Zahlen $1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23$ in Frage; dies sind aber (außer 1) sämtlich Primzahlen.

Aufgabe 17/80 Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung für alle reellen Zahlen x:

$$\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) \geq \sin^4 x$$

Angenommen, die zu beweisende Ungleichung wäre falsch. Dann gälte

$$(x+0{,}5\sin(2x))(x-0{,}5\sin(2x)) = x^2 - 0{,}25\sin^2(2x) = x^2 - 0{,}25(2\sin x\cos x)^2 =$$
$$= x^2 - \sin^2 x\cos^2 x = x^2 - \sin^2 x(1-\cos^2 x) = x^2 - \sin^2 x + \sin^4 x < \sin^4 x$$

also $x^2 < \sin^2 x$ und $|x| < |\sin x|$ im Widerspruch zu der Tatsache, dass $|x| \geq |\sin x|$ für jede reelle Zahl x gilt (wobei Gleichheit genau für $x=0$ eintritt). Bei den Umformungen wurde von folgenden Identitäten Gebrauch gemacht:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \qquad ; \qquad \cos^2 x = 1 - sin^2 x$$

Aufgabe 18/80
Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die der Gleichung für beliebige reelle Zahlen a genügen:

$$\log_{a^2+4}\left(2a^4x^2 - 60a^4x + \sqrt{9x^2-27x-7289}\right) = \log_{a^2+16}\left(ax^2+6x-7379\right)$$

Wenn die gesuchten Zahlen x der Gleichung für beliebige reelle Zahlen a genügen sollen, müssen sie sie speziell auch für $a=0$ erfüllen:

$$\log_4\sqrt{9x^2-27x-7289} = \log_{16}(8x^2+6x-7379)$$

Nun folgt aus der bekannten Umrechnungsformel $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ für $b=a^2$:

$$\log_a x = \frac{\log_{a^2} x}{\log_{a^2} a} = \frac{\log_{a^2} x}{\frac{1}{2}} = 2\log_{a^2} x = \log_{a^2} x^2$$

Also ist

$$\log_4\sqrt{9x^2-27x-7289} = \log_{16}(9x^2-27x-7289)$$

Damit ist (1) äquivalent (2):

$$9x^2-27x-7289 = (8x^2+6x-7379) \to x^2-33x+90=0 \to x_1=30; x_2=3$$

Nur x_1 besteht die Probe für alle reellen Zahlen a: $\log_{a^2+4} 1 = \log_{a^2+16} 1 = 0$.

Aufgabe 19/80
Man ermittle alle Lösungen der Gleichung $p^2+576=n^2$, wobei p eine beliebige Primzahl und n eine beliebige natürliche Zahl bedeuten.

Aus $p^2+576=n^2$ folgt

$$p^2 = n^2-576 = n^2-24^2 = (n-24)(n+24)$$

Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt wegen $n-24 \neq n+24$ daraus

$$n-24=1 \to n=25 \qquad ; \qquad p^2=n+24 \to p^2=25+25=49=7^2$$

woraus sich mit $p=7$ tatsächlich eine Primzahl ergibt. Der Lösungsweg schließt weitere Möglichkeiten aus. Daher ist $(p;n)=(7;25)$ das einzige Lösungspaar.

Aufgabe 20/80
Gesucht ist eine Menge von Funktionen f, die der Gleichung $f(x+1)=c\cdot f(x)$ für jede reelle Zahl x genügen (wobei c eine positive reelle Konstante ist).

Wenn $f(x+1)=c\cdot f(x)$ für jede reelle Zahl x gelten soll, so muss die Gleichung speziell auch für $x=0;1;2;3;...$ erfüllt sein. Es ist also

$$\begin{aligned} f(1) &= c\cdot f(0)\\ f(2) &= c\cdot f(1) = c^2\cdot f(0)\\ f(3) &= c\cdot f(2) = c^3\cdot f(0)\\ &...\\ f(n) &= c\cdot f(n-1) = c^n\cdot f(0)\end{aligned}$$

Es wird vermutet, dass $f(x) = c^n \cdot f(0)$ ist. Tatsächlich gilt

$$f(x+1) = c^{x+1} \cdot f(0) = c \cdot c^x \cdot f(0) = c \cdot f(x)$$

Mit $f(0) = a$ ergibt sich die gesuchte Menge M zu

$$M = \{f \mid f(x) = a \cdot c^x \text{ mit } a; c; x \in P \text{ und } c > 0\}$$

(wobei mit P die Menge der reellen Zahlen bezeichnet wurde).
Nachbemerkung: Es wurde nicht gezeigt, dass außer der angegebenen Menge keine weitere existiert; das aber ist in der Aufgabenstellung auch nicht gefordert!

Aufgabe 21/80
Man beweise den Satz: Ein ebenes Dreieck ist genau dann spitzwinklig, wenn die Ungleichung $\tan\alpha \cdot \tan\beta > 1$ für jedes Winkelpaar α, β gilt.

1) Das Dreieck sei spitzwinklig. Dann gelten die Ungleichungen

$$0 < (\alpha; \beta; \gamma = \pi - \alpha - \beta) < \frac{\pi}{2}$$

also $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$ sowie

$$0 < [\tan\alpha; \tan\beta; \tan\gamma = \tan(\pi - \alpha - \beta) = -\tan(\alpha + \beta)]$$

folglich auch

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} < 0$$

Wegen $\tan\alpha; \tan\beta > 0$ ist auch $\tan\alpha + \tan\beta > 0$; damit folgt sofort

$$1 - \tan\alpha\tan\beta < 0 \to \tan\alpha\tan\beta > 1$$

2) Es gelte $\tan\alpha\tan\beta > 1 > 0$. Dann gilt sicher $\tan\alpha; \tan\beta > 0$ (da sonst $\tan\alpha; \tan\beta < 0$, also $\alpha; \beta > \frac{\pi}{2}$ gelten müsste, was aber dem Winkelsummensatz widerspricht). Dann sind aber alle Schlüsse unter 1. umkehrbar, d.h., es folgt $\tan\gamma > 0$, also $0 < \alpha; \beta; \gamma < \frac{\pi}{2}$, das Dreieck ist spitzwinklig.

Aufgabe 22/80
Man verwandle die Fläche eines regulären Pentagramms in ein flächengleiches Quadrat (wobei nur Zirkel und Lineal als Konstruktionshilfsmittel zugelassen sind)!

Verbindet man die konkaven Ecken des Pentagramms mit dem Mittelpunkt (dieser ist mit dem Lineal konstruierbar als Schnittpunkt der Strecken, die eine konkave Ecke mit der gegenüberliegenden konvexen Ecke verbinden), so zerlegt man das Pentagramm in fünf Drachenvierecke. Große Diagonale dieser Drachenvierecke ist der Umkreisradius (Verbindungsstrecke Mittelpunkt - konvexe Ecke); kleine Diagonale ist die Verbindungsstrecke zweier benachbarter konkaver Ecken.
Der Flächeninhalt jedes dieser Drachenvierecke ist gleich dem halben Produkt aus den beiden Diagonalen. Man kann also den Flächeninhalt des Pentagramms als Rechteck darstellen, dessen eine Seite der Umkreisradius des Pentagramms und dessen andere Seite das 2,5fache der Verbindungsstrecke zweier benachbarter konkaver Ecken ist. Dieses Rechteck ist offensichtlich mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
Die Verwandlung des Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat ist mit Hilfe des Höhensatzes (oder des Kathetensatzes) möglich.

Danach ergäbe sich die folgende Konstruktionsbeschreibung:
1. Konstruiere den Mittelpunkt des Pentagramms!
2. Trage auf einer beliebigen Geraden den Umkreisradius des Pentagramms als Strecke AB ab!
3. Trage auf dieser Geraden die 2,5fache Verbindungsstrecke zweier benachbarter konkaver Ecken als Strecke BC so ab, dass B zwischen A und C liegt.
4. Schlage über AC den Thaleskreis!
5. Errichte in B auf AC die Senkrechte! Ihr Schnittpunkt mit dem Thaleskreis sei D.
6. Konstruiere ein Quadrat mit der Seite BD! Dieses Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt wie das Pentagramm.

Aufgabe 23/80
Man beweise, dass die Zahl $11^{10} - 1$ restlos durch 600 teilbar ist; ohne die Potenz auszurechnen.

Für jede reelle Zahl $a > 0$ gilt

$$a^{10} - 1 = (a^2 - 1)(a^8 + a^6 + a^3 + a^2 + 1)$$

Speziell für $a = 11$ folgt daraus sofort $a^2 - 1 = 11^2 - 1 = 120$, also ist $11^{10} - 1$ restlos durch 120 teilbar (1).
Ferner lässt 11^x für jede ganze Zahl $x > 0$ beim Teilen durch 10 stets den Rest 1; also lässt $11^8 + 11^6 + 11^4 + 11^2 + 1$ beim Teilen durch 10 den Rest 5, ist demnach restlos durch 5 teilbar (2). Aus (1) und (2) folgt: $11^{10} - 1$ ist restlos durch $120 \cdot 5 = 600$ teilbar.

Aufgabe 24/80
Es ist eine hinreichende, von n unabhängige Bedingung für die natürliche Zahl a anzugeben, durch die garantiert wird, dass die Zahl $z = n^8 + a$ für keine natürliche Zahl n eine Primzahl ist.

Sicher ist $z = n^8 + a$ genau dann keine Primzahl, wenn z in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen $b; c > 1$ zerlegbar ist:

$$z = n^8 + a = b \cdot c$$

Um zu untersuchen, unter welcher Bedingung dies möglich ist, formen wir z um:

$$z = n^8 + a = n^8 + 2n^4\sqrt{a} + a - 2n^4\sqrt{a} = (n^4 + \sqrt{a})^2 - (n^2\sqrt{2\sqrt{a}})^2 =$$

$$= \left(n^4 + \sqrt{a} + n^2\sqrt{2\sqrt{a}}\right)\left(n^4 + \sqrt{a} - n^2\sqrt{2\sqrt{a}}\right)$$

Beide Faktoren sind sicher dann natürliche Zahlen, wenn sowohl $\sqrt{a}$ als auch $\sqrt{2\sqrt{a}}$ natürliche Zahlen sind und wenn der kleinere der beiden Faktoren mindestens gleich 1 ist. Wir setzen daher

$$\sqrt{2\sqrt{a}} = k \in N \to 2\sqrt{a} = k^2 \to a = 0{,}25k^4$$

Damit a selbst eine natürliche Zahl ist, muss k gerade sein: $k = 2m, m \in N$. Dann ist $a = 4m^4$, $\sqrt{2\sqrt{a}} = 2m$ und folglich

$$z = n^8 + a = n^8 + 4m^4 = (n^4 + 2m^2 + 2n^2m)(n^4 + 2m^2 - 2n^2m) =$$

$$= (n^4 + 2n^2m + m^2 + m^2)(n^4 - 2n^2m + m^2 + m^2) = [(n^2 + m^2)^2 + m^2][(n^2 - m^2)^2 + m^2]$$

Der kleinere der beiden Faktoren ist $[(n^2 - m^2)^2 + m^2]$; er ist sicher dann größer als 1, wenn $m > 1$ ist.
Daraus folgt:
Die Zahl $z = n^8 + a$ ist sicher dann für keine natürliche Zahl n eine Primzahl, wenn $a = 4m^4$ mit $m \in N, m \geq 1$ ist. Da nicht gezeigt wurde, dass keine andere als die verwendete Faktorenzerlegung existiert, kann diese Bedingung nicht als notwendig angesehen werden.

Aufgabe 25/80
Man beweise, dass die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ keine ganzzahligen Lösungen hat, wenn p und q Primzahlen sind und $p \neq 3; q \neq 2$ ist.

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die (im allgemeinen komplexen) Lösungen x_1 und x_2. Für diese gilt der Wurzelsatz des Vieta:

$$x_1 + x_2 = -p \quad (1) \qquad ; \qquad x_1x_2 = q \quad (2)$$

Angenommen, eine Lösung sei ganzzahlig; wegen (1) ist dann auch die zweite Lösung ganzzahlig. Aus (2) folgt o.B.d.A. $|x_1| = 1$, $|x_2| = q$, also $-p = x_1 + x_2 = \pm 1 \pm q$ oder (da p und q als Primzahlen beide positiv sind) $p = q \pm 1$. Daraus erhält man unmittelbar $p = 2, q = 3$ oder $p = 3, q = 2$. Da die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ keine reellen und damit erst recht keine ganzzahligen Nullstellen hat, folgt daraus die zu beweisende Behauptung.

Aufgabe 26/80
Gegeben ist eine Ebene, in der alle Punkte entweder schwarz oder rot gefärbt seien. Man weise die Existenz wenigstens eines gleichseitigen Dreiecks in dieser Ebene nach, dessen Eckpunkte sämtlich die gleiche Farbe haben!

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck in der gegebenen Ebene. Dann sind zwei Fälle möglich: 1. Die Punkte A, B und C haben sämtlich die gleiche Farbe. Dann ist die Existenz bereits nachgewiesen.
2. Die Punkte A, B und C haben nicht sämtlich die gleiche Farbe. O.B.d.A. seien A und B schwarz, C sei rot. Wir halbieren nun die Strecke AB durch D, die Strecke BC durch E und die Strecke CA durch F. Nun sind zwei weitere Fälle möglich:

2.1. D ist schwarz. Haben E und F gleiche Farbe, so hat entweder das Dreieck DEF schwarze oder das Dreieck CEF rote Eckpunkte; haben sie verschiedene Farben, so hat entweder das Dreieck ADF oder das Dreieck DBE schwarze Ecken. Auch für diesen Fall ist die Existenz nachgewiesen, da alle Dreiecke (nach Konstruktion) gleichseitig sind.
2.2. D ist rot. Sind E und F rot, so hat das (gleichseitige) Dreieck DEF gleichfarbige Ecken; ist wenigstens einer der Punkte E und F schwarz, so spiegele man D an der Strecke AC bzw. BC, auf der der schwarze Punkt liegt, nach D'. Dann hat entweder AFD' (falls F schwarz ist) oder BED' (falls E schwarz ist) nur schwarze Ecken oder CDD' nur rote.
Man prüft leicht nach, dass auch diese Dreiecke (nach Konstruktion) gleichseitig sind. Also ist auch in diesem Fall die Existenz erwiesen.
Da die Fallunterscheidung vollständig ist, existiert in jedem Fall wenigstens ein gleichseitiges Dreieck mit gleichgefärbten Ecken.

Aufgabe 27/80
Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Funktion minimal wird

$$f(x) = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$$

Es gilt die Identität

$$x \pm 4\sqrt{x-4} \equiv (2 \pm \sqrt{x-4})^2$$

Damit kann man $f(x)$ in der Form

$$f(x) = |2 + \sqrt{x-4}| + |2 - \sqrt{x-4}|$$

schreiben. Für $4 \leq x \leq 8$ ist $\sqrt{x-4} \leq 2$ (für $x < 4$ ist $\sqrt{x-4}$ nicht reell). Damit ist

$$f(x) = 2 + \sqrt{x-4} + 2 - \sqrt{x-4} = 4$$

Für $x > 8$ ist $\sqrt{x-4} > 2$. Daraus folgt

$$f(x) = 2 + \sqrt{x-4} - (2 - \sqrt{x-4}) = 2\sqrt{x-4} > 4$$

Demnach ist $f_{min}(x) = 4$ für alle x mit $4 \leq x \leq 8$.

Aufgabe 28/80
Man widerlege die Behauptung, dass das Polynom $P(x) = 1 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 1$ fünf reelle Nullstellen habe!

Angenommen, das Polynom $P(x)$ habe fünf reelle Nullstellen x_i $(i = 1; 2; ...; 5)$. Dann gilt sicher $x_i > 0$ für jedes i (die Koeffizienten der Glieder ungeraden Grades sind positiv, die der Glieder geraden Grades sind negativ; für $x_i < 0$ wäre also $P(x_i) < 0$). Damit gilt nach dem Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i \geq \sqrt[5]{\prod_{i=1}^{5} x_i}$$

Ferner gilt nach dem Wurzelsatz des Vieta:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 4 \qquad ; \qquad \prod_{i=1}^{5} = 1$$

Damit folgt der Widerspruch

$$\frac{1}{5} \cdot 4 \geq \sqrt[5]{1} = 1$$

womit die Annahme widerlegt ist.

Aufgabe 29/80
Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel $(a; b; c)$ ist wenigstens eine der drei natürlichen Zahlen a; b; c restlos durch 5 teilbar.

Wir verwenden zum Beweis den Satz: Das Quadrat einer natürlichen Zahl lässt beim Teilen durch 5 einen der Beste 0, 1 oder 4.
Beweis dieses Satzes: Es sei $n = 5s + r$ eine natürliche Zahl, wobei $r = 0; 1; 2; 3; 4$ sei. Dann ist

$$n^2 = (5s + r)^2 = 25s^2 + 10rs + r^2 = 5(4s^2 + 2rs) + r^2$$

mit $r^2 = 0; 1; 4; 9; 16 \equiv 0; 1; 4; 4; 1 \pmod 5$.
Nun nehmen wir an, keine der beiden Zahlen a und b wäre restlos durch 5 teilbar. Nach dem bewiesenen Satz heißt das:

$$a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5 \qquad ; \qquad b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$$

(wegen $4 \equiv -1 \pmod 5$). Hätten nun die beiden Reste gleiche Vorzeichen, so wäre $c^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$ im Widerspruch zum bewiesenen Satz. Also haben sie verschiedene Vorzeichen. Damit folgt aber $c^2 \equiv 0 \pmod 5$; d.h., c ist restlos durch 5 teilbar.

Aufgabe 30/80
Ein Fünfeck setze sich aus einem Rechteck mit den Seiten a und b und einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a zusammen.
Ohne Verwendung der Differentialrechnung ermittle man den maximalen Flächeninhalt A bei gegebenem Umfang U und den minimalen Umfang U bei gegebenem Flächeninhalt A!

Es ist $U = 3a + 3b$ und $A = ab + 0{,}25a^2\sqrt{3}$. Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Seite b, so erhält man (nach äquivalenten Umformungen) die in a quadratische Gleichung

$$a^2 - \frac{2U}{6 - \sqrt{3}}a + \frac{4A}{6 - \sqrt{3}} = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{1}{6 - \sqrt{3}} \left[U \pm \sqrt{U^2 - 4A(6 - \sqrt{3}} \right]$$

Damit a reell wird, muss

$$U^2 - 4A(6 - \sqrt{3}) \geq 0 \to A \leq \frac{U^2}{4(6 - \sqrt{3}} \to U \geq \sqrt{4A(6 - \sqrt{3})}$$

sein. Offensichtlich ist damit

$$A_{max} = \frac{U^2}{4(6 - \sqrt{3})} \approx 0{,}0586U^2 \qquad ; \qquad U_{min} = \sqrt{4A(6 - \sqrt{3})} \approx 4{,}13\sqrt{A}$$

Aufgabe 31/80
Gegeben sei die in x quadratische Gleichung $x^2 + px + 2 = 0$ mit $p \in N$, und es seien x_1 und x_2 die Lösungen dieser Gleichung. Es sind alle p zu ermitteln, für die $x_1^2 + x_2^2$ Primzahl ist.

Nach dem Wurzelsatz des Vieta gilt für die Lösungen $x_1; x_2$ der quadratischen Gleichung $x^2+px+2=0$: $x_1+x_2=-p$ und $x_1x_2=2$. Nun ist

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-p)^2-4=p^2-4=(p-2)(p+2)$$

Dieser Ausdruck kann höchstens dann Primzahl sein, wenn der kleinere der beiden Faktoren gleich 1, also wenn $p=3$ ist. Tatsächlich ist dann

$$x_1^2+x_2^2=(3-2(3+2)=5$$

Primzahl (die Lösungen $x_{1;2}$ sind dann

$$x_{1;2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}\rightarrow x_1=-1; x_2=-2$$

Aufgabe 32/80
Es ist zu beweisen: Aus $\sin(\alpha+\beta)=0$ folgt $\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha$.

Aus $\sin(\alpha+\beta)=0$ folgt $\alpha+\beta=k\pi$ mit $k=\pm 1;\pm 2;\pm 3;...$ also $\beta=k\pi-\alpha$. Dann ist aber

$$\cos(\alpha+2\beta)=\cos(\alpha+2k\pi-2\alpha)=\cos(2k\pi-\alpha)=\cos(2k\pi)\cos\alpha+\sin(2k\pi)\sin\alpha=\cos\alpha$$

wegen $\cos(2k\pi)=1, \sin(2k\pi)=0$.

Aufgabe 33/80
Es sei f eine für alle reellen Zahlen x stetige Funktion, für die gilt $f[f(x)]=x$. Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung mindestens eine reelle Zahl x_0 existiert, für die $f(x_0)=x_0$ gilt.

Angenommen, es gäbe keine Zahl x_0, für die $f(x_0)=x_0$ gilt. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f entweder überall $f(x)<m$ oder überall $f(x)>x$.
Im ersten Fall ist dann $f[f(x)]<f(x)<x$, im zweiten Fall gilt $f[f(x)]>f(x)>x$. Beides widerspricht aber der Voraussetzung $f[f(x)]=x$. Also ist die Annahme falsch, und damit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen.

Aufgabe 34/80
Man ermittle s_{40} einer arithmetischen Reihe 1.Ordnung mit:
1. $a_1=10a+b=x$ mit $a;b\in N; 1\leq a\leq 9; 0\leq b\leq 9$,
2. $a_{40}=10c+d=y$ mit $c;d\in N; 0\leq c;d\leq 9$,
3. $s_{40}=\sum\limits_{i=1}^{40}a_i=1000a+100b+10c+d$

Es ist $s_n=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}$, also

$$s_{41}=(10a+b+10c+d)\cdot 20=1000a+100b+10c+d$$

Daraus folgt die diophantische Gleichung $800a+80b-190c-19d=0$, die man auch in der Form

$$80(10a+b)=19(10c+d) \qquad ; \qquad 80x=19y$$

schreiben kann ($x;y\in N$, $10\leq x;y\leq 100$). Es ergibt sich $y=4x+\frac{4x}{19}$, also $x\equiv 0 \pmod{19}$. Es sei nun $x=19k$ mit $k\in N, k\geq 1$. Dann ist $y=4\cdot 19k+4k=8ok$. Nur $k=1$ liefert ein y aus dem Definitionsbereich. Damit ist

$$x=10a+b=19;\quad y=10c+d=80 \qquad ; \qquad a=1, b=9, c=8, d=0$$

und folglich $s_{40}=1980$ die einzige Lösung.

Aufgabe 35/80
Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften :
1. Das Quadrat der zweiten Ziffer ist gleich der Zahl n_1, die man erhält, wenn man in n die ersten zwei Stellen streicht.
2. Die Quersumme $Q(n)$ ist gleich der Zahl n_2, die man erhält, wenn man in n die letzten zwei Stellen streicht.
3. Die Summe aus den Zahlen n_1 und n_2 ist 100.

Es sei $n = 1000a + 100b + 10c + d$ mit $a; b; c; d \in N$, $0 \leq a,\ b; c; d \leq 9$. Dann ist $n_1 = 10c + d$ und $n_2 = 10a + b$, und es gilt

nach Bedingung 1: $b^2 = 10c + d \quad (1)$
nach Bedingung 2: $a + b + c + d = 10a + b$ also $c + d = 9a \quad (2)$
nach Bedingung 3: $10a + b + 10c + d = 100 \quad (3)$

Wegen $c + d \leq 18$ folgt aus (2) sofort $a = 1$ oder $a = 2$. Die Möglichkeit $a = 2$ scheidet jedoch aus, da sie $c = d = 9$ voraussetzt, was im Widerspruch zu (1) steht ($b^2 = 99$ ist für keine natürliche Zahl b erfüllt). Also ist $a = 1$ und die Beziehungen (2) und (3) nehmen die Gestalt an:

$$c + d = 9 \quad (2') \qquad ; \qquad b + 9c = 81 \quad (3')$$

Damit ist entweder $b = 0, c = 9, d = 0$ oder $b = 9, c = 8, d = 1$. Die erste Möglichkeit steht erneut im Widerspruch zu (1). Damit existiert genau eine Zahl n mit den geforderten Eigenschaften: $n = 1981$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 36/80
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt

$$n \equiv 1 \pmod 2; \quad n \equiv 1 \pmod 3; \quad n \equiv 1 \pmod 5; \quad n \equiv 0 \pmod 7; \quad n \equiv 1 \pmod{11}$$

Wegen $n \equiv 0 \pmod 7$ ist n in der Form $n = 7k$, $k \in N$, darstellbar. Wegen

$$\begin{aligned} n \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } 7 \equiv 1 \pmod 2 \text{ ist } k = 1 \pmod 2 \quad &(1)\\ n \equiv 1 \pmod 3 \text{ und } 7 \equiv 1 \pmod 3 \text{ ist } k = 1 \pmod 3 \quad &(2)\\ n \equiv 1 \pmod 5 \text{ und } 7 \equiv 2 \pmod 5 \text{ ist } k = 3 \pmod 5 \quad &(3)\\ n \equiv 1 \pmod{11} \text{ und } 7 \equiv 7 \pmod{11} \text{ ist } k = 8 \pmod{11} \quad &(4) \end{aligned}$$

Wir nehmen an, die kleinste Zahl k wäre höchstens dreistellig:

$$k = 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

mit $0 \leq a_0; a_1; a_2 \leq 9$, $a_1; a_2; a_3 \in N$. Dann ist wegen (3) $a_0 = 3$ oder $a_0 = 8$, wegen (1) ist $a_1 \neq 8$, also folgt $a_1 = 3$. Nach (4) gilt dann

$$a_2 - a_1 + 3 = 11s + 8 \qquad ; \qquad a_2 - a_1 = 11s + 5 \quad (5)$$

($s \in G$). Aus $0 \leq a_1; a_2 \leq 9$ folgt $-9 \leq a_2 - a_1 = 11s + 5 \leq 9$. Diese Ungleichungen sind nur für $s = 0$ und für $s = -1$ erfüllt. Damit ergibt sich aus (5) $a_2 = a_1 + 5 \geq 5$ oder $a_2 = a_1 - 6 \leq 3$.
Da wir die kleinste Zahl k suchen, probieren wir zunächst die kleineren Werte für a_2, also $a_2 = 0; 1; 2; 3$. Es ergibt sich dann $a_1 = 6; 7; 8; 9$ und $k = 63; 173; 283; 393$. Von diesen k-Werten erfüllt nur $k = 283$ die Bedingung (2). Man erhält daraus $n = 7 \cdot 283 = 1981$.

2.21 Aufgaben und Lösungen 1981

Aufgabe 1/81
Man bestimme alle Paare $(n; m)$ nichtnegativer ganzer Zahlen, für die gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 25^m + 2$$

Für $m = 0$ ergibt sich $n = 2$. Ist $m \geq 1$; so ist $25^m + 2 \equiv 7 \pmod{10}$ und $\sum_{i=1}^{n} i \equiv 1; 3; 5; 6; 8 \pmod{10}$, d. h., es gibt keine weitere Lösung.

Aufgabe 2/81
Es sei $n = \sum_{i=0}^{k} 10^i a_i > 0$ mit $0 \leq a_i \leq 9; a_i \in N$ eine $(k+1)$-stellige natürliche Zahl und $Q(n) = \prod_{i=0}^{k} a_i$ ihr "Querprodukt". Wie groß ist die Anzahl r der höchstens (k+1)-stelligen natürlichen Zahlen n, bei denen $Q(n)$ Primzahl ist?

Wenn $Q(m)$ Primzahl sein soll, muss genau ein a_i eine der vier einstelligen Primzahlen $2; 3; 5$ oder 7 sein, für die restlichen a_i dagegen gilt $a_i = 1$. Mit jeder dieser vier einstelligen Primzahlen können folglich s s-stellige Zahlen m gebildet werden $(1 \leq s \leq k + 1)$, da die einstellige Primzahl an jeder der 3 Stellen stehen kann. Demnach gilt für die gesuchte Zahl r

$$r = 4 \cdot \sum_{s=1}^{k+1} s = 4 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} = 2(k+1)(k+2)$$

Aufgabe 3/81
Es sei $P(x)$ ein reelles Polynom beliebigen Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, und es seien sowohl $P(0)$ als auch $P(1)$ ungerade ganze Zahlen. Man weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen $P(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen hat.

Angenommen, es gäbe eine ganze Zahl g so, dass $P(g) = 0$ ist. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Algebra $P(x) = (x - g)Q(x)$, mit $Q(x)$ als Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Damit folgt

$$P(0) = (-g)Q(0) \qquad ; \qquad P(1) = (1 - g)Q(1)$$

Nach Voraussetzung sind $P(0)$ und $P(1)$ beide ungerade; da ein Produkt genau dann ungerade ist, wenn keiner seiner Faktoren gerade ist, folgt damit, dass sowohl g als auch $1 - g$ ungerade sein müssen. Dies ist aber ein Widerspruch; denn ist
1) $g = 2k - 1$ mit $k \in G$, so folgt $1 - g = 2 - 2k = 2(1 - k)$,
2) $1 - g = 2k - 1$ mit $k \in G$, so folgt $g = 2 - 2k = 2(1 - k)$.
In jedem Fall ist also entweder g oder $1 - g$ gerade. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme falsch ist, d.h., dass $P(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen hat.

Aufgabe 4/81
Es seien 100 natürliche Zahlen a_k mit $1 \leq k \leq 100$ gegeben. Man beweise, dass eine Summe

$$\sum_{i=j}^{n} a_i \text{ mit } 1 \leq j \leq n \leq 100$$

existiert, die ohne Rest durch 100 teilbar ist!

Wir bilden alle Summen $\sum_{i=1}^{n} a_i$, wobei n die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 durchlaufe. Es sind dies genau 100 Summen s_n. Entweder ist unter ihnen eine Summe s_k, die ohne Rest durch 100 teilbar ist,

oder dies ist nicht der Fall.
Dann aber lassen wenigstens zwei Summen s_l und s_m beim Teilen durch 100 den gleichen Rest r, und die Summe $s_{101} = s_l - s_m$ ist ohne Rest durch 100 teilbar (wobei O.B.d.A. $s_l > s_m$ angenommen wurde).
Es ist noch nachzuweisen, dass s_{101} tatsächlich eine Summe der Art

$$\sum_{i=j}^{n} a_i \text{ mit } 1 \leq j \leq 100$$

ist. Aus $s_l = \sum_{i=1}^{l} a_i$, $s_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$ folgt

$$s_l - s_m = \sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=m+1}^{l} a_i$$

Wegen $1 \leq m < l \leq 100$ ist $1 < m + 1 \leq l$ ($m < 1$ folgt aus $s_m < s_l$). Wegen $s_l > s_M$ ist außerdem $s_l - s_m > 0$, womit alles gezeigt ist.

Aufgabe 5/81
Man beweise: Es existieren unendlich viele Primzahlen p, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen.

Als bekannt setzen wir voraus, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Der Beweis ist dann geführt, wenn gezeigt ist, dass sich aus jeder ungeraden Primzahl eine neue Primzahl konstruieren lässt, die größer ist und die bei Division durch 3 den Rest -2 lässt.
Alle Primzahlen (ausgenommen die Primzahl 3) lassen bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2 (da beim Rest 0 die Zahl durch 3 teilbar und somit nicht Primzahl wäre). Es sei nun p_k die k-te Primzahl in der Primzahlfolge ($k \geq 2$). Wir bilden daraus eine neue Zahl P:

$$P = p_1 + \prod_{i=2}^{k} p_i = 2 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot p_k$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:
1. P ist Primzahl. Wegen $P > p_k$ und $P \equiv 2 \pmod 3$ ist dann der Beweis bereits erbracht.
2. P ist keine Primzahl. Dann ist P eindeutig in Primfaktoren zerlegbar:

$$P = \prod_j q_j^{\alpha_j}$$

wobei offensichtlich $q_j \neq p_i$ für alle $i; j$, also speziell $q_j > p_k$ für alle j gilt. Ferner gilt wegen $P \equiv 2$ (mod 3), dass $q_j \equiv 2 \pmod 3$ für mindestens ein j (genauer: für eine ungerade Anzahl von q_j mit ungeradem α_j; aber das ist hier unwesentlich) ist.
Wären nämlich alle $p_j \equiv 1 \pmod 3$, so wäre auch $P \equiv 1 \pmod 3$. Da die Fallunterscheidung vollständig ist, wurde gezeigt, dass aus der Existenz einer Primzahl $p_k \geq 3$ stets die Existenz wenigstens einer weiteren, größeren Primzahl folgt, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt. Damit folgt aber sogar die Existenz unendlich vieler derartiger Primzahlen.

Aufgabe 6/81
Gegeben sei ein beliebiges Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$. Seine vier Seiten werden im mathematisch positiven Drehsinn um ihre Mittelpunkte gedreht, bis sie senkrecht auf den Ausgangslagen stehen. Dabei gehen die Punkte P_i in die Punkte P_i' bzw. P_i'' über. Man beweise: Die Vierecke $P_1'P_2'P_3'P_4'$ und $P_1''P_2''P_3''P_4''$ sind Quadrate.

Es sei M der Mittelpunkt des Parallelogramms $P_1P_2P_3p_4$, M_i seien die Mittelpunkte der Seiten P_iP_{i+1} (wobei hier und im folgenden stets $i + k = i + k - 4$ zu setzen ist, falls $i + k > 4$ sein sollte).
Da die Winkel $MM_iP_i' = \frac{\pi}{2} + \varphi$ sämtlich einander gleich sind (wobei mit φ der kleinere der beiden Winkel zwischen den Parallelogrammseiten bezeichnet ist) und da $M_iP_i' = M_iP_i = MM_{i+1}$ (mithin auch $MM_i = M_{i+1}P_{i+1}$ ist, sind die vier Dreiecke $MP_i'M_i$ sämtlich einander kongruent nach SWS. Daraus

folgt $MP_1' = MP_2' = MP_3' = MP_4'$, d.h., die vier Punkte P_i' liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M; das Viereck $P_1'P_2'P_3'P_4'$ ist also ein Sehnenviereck.
Nun ist weiter

$$\measuredangle M_iMP_i' + \measuredangle M_iP_i'M = \pi - \measuredangle MM_iP_i' = \pi - \left(\frac{\pi}{2}\varphi\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

und entweder

$$\measuredangle P_i'MP_{i+1}' = \measuredangle M_iMM_{i+1} - (\measuredangle M_iMP_i' + \measuredangle M_iP_i'M) = \pi - \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi/2$$

oder

$$\measuredangle P_i'MP_{i+1}' = \measuredangle M_iMM_{i+1} + (\measuredangle M_iMP_i' + \measuredangle M_iP_i'M) = \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi/2$$

in jedem Fall also $\measuredangle P_i'MP_{i+1}' = \frac{\pi}{2}$, d.h., die Bögen $P_i'P_{i+1}'$ und damit die Sehnen $P_i'P_{i+1}'$ sind sämtlich einander gleich, das Sehnenviereck $P_1'P_2'P_3'P_4'$ ist also ein Quadrat.
Analog führt man den Beweis für das Viereck $P_1''P_2''P_3''P_4''$.

Aufgabe 7/81
Man beweise, dass in jedem konvexen Elfeck stets wenigstens zwei Diagonalen einen Richtungsunterschied von weniger als 5° haben!

Als bekannt setzen wir die Formel für die Anzahl k der Diagonalen in einem konvexen n—Eck voraus: $k = 0{,}5n(n-3)$.
Danach existieren im konvexen Elfeck genau $k = 44$ Diagonalen.
Wir wählen nun in der Ebene des Elfecks einen beliebigen Punkt P und verschieben die Diagonalen parallel zu sich selbst so, dass sie sämtlich durch diesen Punkt gehen. Ihre Richtung wird dadurch nicht geändert. Den Vollwinkel um P teilen sie aber in $44 \cdot 2 = 88$ Teile.
Jeder dieser Teile gibt den Richtungsunterschied zweier "benachbarter" Diagonalen an (der gleich null ist, falls zwei Diagonalen parallel sein sollten). Es können nun nicht alle diese Richtungsunterschiede mindestens gleich 5° sein; sonst wäre nämlich ihre Summe mindestens gleich $88 \cdot 5° = 440°$ im Widerspruch zu der Tatsache, dass der Vollwinkel 360° beträgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 8/81
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Wir betrachten die Produkte

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{100}{101}$$

Beide Produkte haben gleich viele Faktoren, und jeder k-te Faktor von y ist größer als der k-te Faktor von x. Folglich gilt $x < y$. Daraus folgt

$$x^2 < xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

Damit ergibt sich unmittelbar $x < \sqrt{\frac{1}{101}} < \frac{1}{10}$.

Aufgabe 9/81
Man ermittle alle (geordneten) Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$1 - xy = \ln(xy) \quad (1) \qquad ; \qquad x + 3y = 4 \quad (2)$$

Wir betrachten zunächst nur die Gleichung (1) und setzen zur Vereinfachung $xy = z$: $1 - z = \ln z$.
Für $0 < z < 1$ ist $1 - z > 0$ und $\ln z < 0$, für $z = 1$ ist $1 - z = 0$ und $\ln z = 0$, für $z > 1$ ist $1 - z < 0$ und $\ln z > 0$, für $z \leq 0$ ist $\ln z$ nicht reell bzw. nicht existent.

Also ist $z = xy = 1$ die einzige Lösung dieser Gleichung. Daraus folgt sofort $y = x^{-1}$; in Gleichung (2) eingesetzt, folgt nach Multiplikation mit $x^{-1} \neq 0$ die in x quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

mit den Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$. Aus ihnen folgen $y_1 = 3^{-1}$ und $y_2 = 1$. Damit erfüllen genau die Paare $(3; \frac{1}{3})$ und $(-1; 1)$ das gegebene Gleichungssystem. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 10/81
Gesucht sind 5 verschiedene dreistellige Zahlen, die (im Dezimalsystem) mit denselben voneinander verschiedenen drei Ziffern darstellbar sind und deren Summe 1209 beträgt.

Aus drei verschiedenen Ziffern kann man $3! = 6$ verschiedene Zahlen darstellen. Bezeichnet man die Stellen einer von ihnen mit $a; b; c$ ($1 \leq a; b; c \leq 9$, $a; b; c \in N$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$), so sind dies

$$\begin{array}{lll} 100a + 10b + c & 100a + 10c + b & 100b + 10a + c \\ 100b + 10c + a & 100c + 10a + b & 100c + 10b + a \end{array}$$

Ihre Summe ist $222(a + b + c)$. Nach der Aufgabenstellung gilt nun die diophantische Gleichung

$$222(a + b + c) - x = 1209$$

wobei x die sechste der sechs dreistelligen Zahlen ist. Aus ihr folgt durch äquivalente Umformung

$$a + b + c = 5 + \frac{99 + x}{222} = 5 + k$$

mit $k = \frac{99+x}{222} \in N$. Da $123 \leq x \leq 987$ gilt (wegen $a \neq b$, $a \neq c$, $c \neq b$), ist $1 \leq k \leq 4$ und $a + b + c = 5 + k \leq 9$.
Für x ergeben sich damit zunächst vier Möglichkeiten: $x_1 = 123; x_2 = 345; x_3 = 567; x_4 = 789$, von denen jedoch nur $x = 123$ die letzte Ungleichung erfüllt: $1 + 2 + 3 = 5 + 1 \leq 9$.
Daraus ergeben sich die fünf gesuchten Zahlen zu 132, 213, 231, 312, 321. Tatsächlich ist $132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 1209$.

Aufgabe 11/81
Gesucht ist die kleinste Potenz 11^n ($n \in N, n > 0$) in dekadischer Schreibweise, die auf die Ziffernfolge 001 endet.

Es ist

$$11^n = (10 + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 10^i = \binom{n}{0} \cdot 10^0 + \binom{n}{1} \cdot 10^1 + ... + \binom{n}{n} \cdot 10^n$$

Man erkennt: Alle Glieder dieser Summe mit Ausnahme der ersten drei enthalten den Faktor $10^3 = 1000$. Da das erste Glied der Summe gleich 1 ist, muss

$$\binom{n}{k} \cdot 10^1 + \binom{n}{2} \cdot 10^2 = 10n + 50n(n - 1) = 1000k$$

mit minimalem n und $k \in N$, $k \geq 1$ eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung dafür sein, dass n die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Aus dieser Gleichung folgt

$$n + 5n(n - 1) = 100k$$

Da entweder n oder $n - 1$ gerade ist, ist $5n(n - 1)$ restlos durch 10 teilbar. Damit muss auch n restlos durch 10 teilbar sein: $n = 10m$, $m \in N$, minimal. Die Gleichung nimmt damit die Gestalt

$$10m + 50m(10m - 1) = 100k \to m + 5m(10m - 1) = 10k$$

an. Die rechte Seite dieser Gleichung ist restlos durch 5 teilbar, also muss auch die linke Seite restlos durch 5 teilbar sein. Daraus folgt, dass m durch 5 teilbar ist: $m = 5s$, $s \in N$, minimal. Die Gleichung lautet dann

$$5s + 25s(50s - 1) = 10k \to s + 5s(50s - 1) = 2k$$

Offensichtlich erfüllt $s = 1$ diese Gleichung: $1 + 5(50 - 1) = 246 = 2 \cdot 123 = 2k$. Aus $s = 1$ folgt $m = 5s = 5$, $n = 10m = 50$. Die Potenz 11^{50} endet also (in dekadischer Schreibweise) auf 001, und es gibt keine kleinere Potenz von 11 mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 12/81
Es seien a_i mit $i = 1; 2; 3; ...; n$ reelle Zahlen ($n \geq 2$) mit $0 < a_i \leq a_{i+1}$. Man zeige, dass dann gilt

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \leq \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}$$

Es ist

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n-1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} a_i =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{n-1} - \frac{n \cdot a_n}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n-1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} a_i =$$

$$= \frac{a_1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} a_i - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{a_1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} a_i - \frac{n \cdot a_1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} a_i$$

Aufgabe 13/81
Auf die Frage nach dem Alter ihrer drei Kinder antwortete eine Mathematikerin: "Die Summe ihrer ganzen Alterszahlen ergibt unsere Hausnummer, das Produkt derselben ist 72, und um das Ergebnis eindeutig zu machen, erwähne ich noch, dass mein jüngstes Kind ein Mädchen ist."
Wie alt sind die Kinder? Dem Fragenden war die Hausnummer bekannt.

Ohne Rücksicht auf biologische Möglichkeiten kann man die Zahl 72 auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus drei Faktoren zerlegen:
$1 \cdot 1 \cdot 72$, $1 \cdot 2 \cdot 36$, $1 \cdot 3 \cdot 24$, $1 \cdot 4 \cdot 18$, $1 \cdot 6 \cdot 12$, $1 \cdot 8 \cdot 9$, $2 \cdot 2 \cdot 18$, $2 \cdot 3 \cdot 12$, $2 \cdot 4 \cdot 9$, $2 \cdot 6 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 8$, $3 \cdot 4 \cdot 6$.
Da der Fragende die Hausnummer kannte, hätte er mit ihrer Hilfe aus diesen 12 Möglichkeiten die richtige herausfinden können, wenn die Hausnummer nicht mehrmals als Summe aufträte. Tatsächlich haben die Faktorenzerlegungen $2 \cdot 6 \cdot 6$ und $3 \cdot 3 \cdot 8$ die gleiche Faktorensumme 14, so dass bei dieser Hausnummer noch keine Eindeutigkeit besteht.
Diese wird durch die Bemerkung über das jüngste Kind herbeigeführt. Die Kinder sind demnach 2 Jahre (ein Mädchen) und 6 Jahre (Zwillinge) alt.

Aufgabe 14/81
In einer Ebene seien gleichseitige Dreiecke D_i mit den Seitenlängen $a_i = 2i-1$, $i = 1; 2; 3; ...$ längs einer Geraden g so angeordnet, dass der "rechte" Eckpunkt des Dreiecks D_k mit dem "linken" Eckpunkt des Dreiecks D_{k+1} zusammenfällt und dass die dritten Eckpunkte sämtlich in der gleichen von g erzeugten Halbebene liegen. Man bestimme die Kurve, auf der die dritten Eckpunkte liegen!

Legt man ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem so in die Ebene, dass die Abszissenachse (x-Achse) mit der Geraden g zusammenfällt und die Ordinatenachse (y-Achse) durch den linken Eckpunkt des Dreiecks $D1$ geht, so haben die dritten Dreieckspunkte P_k die Koordinaten

$$P_k[x_k; y_k] = P_k\left[k(k-1) + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}(2k-1)\right]$$

Offensichtlich besteht zwischen den Abszissen und den Ordinaten ein Zusammenhang der Art $y^2 = f(x)$. Ein entsprechender Ansatz

$$y^2 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{3}(2k-1)\right]^2 = 3\left(k^2 - k + \frac{1}{4}\right) = f\left(k^2 - k + \frac{1}{4}\right)$$

führt zu der Gleichung $y^2 = 3(x - \frac{1}{4})$, also zur Gleichung einer Parabel mit den Brennpunktkoordinaten $(1;0)$, deren Achse mit der Abszissenachse zusammenfällt.

Aufgabe 15/81
Es ist der Satz, zu beweisen: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist

$$k = \left(1 + \frac{2n-3}{1}\right)\left(1 + \frac{2n-5}{3}\right)...\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

eine restlos durch n teilbare natürliche Zahl.

Man kann k in der Form

$$k = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 + \frac{2n-2i-1}{i}\right) = \prod_{i=1}^{n-1}\frac{2n-i-1}{i}$$

schreiben. Durch Erweitern mit $(n-1)!$ erhält man

$$k = \prod_{i=1}^{n-1}\frac{(n-1)!(2n-i-1)}{(n-1)!i} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

damit ist k als Binomialkoeffizient darstellbar und demnach eine natürliche Zahl. Es bleibt noch zu zeigen, dass k restlos durch n teilbar ist. Nun ist

$$\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}\cdot\frac{n}{2n-1} = \binom{2n-1}{n}\cdot\frac{n}{2n-1}$$

Da n und $2n-1$ zueinander teilerfremd sind, muss n als Faktor in $\binom{2n-2}{n-1}$ enthalten sein.

Aufgabe 16/81
Man bestimme alle geordneten Paare natürlicher Zahlen $(n;m)$, die der Gleichung $2^n + 65 = m^2$ genügen!

Für ungerades n gilt $2^n \equiv \pm 2 \pmod{10}$, also ist $2^m + 65 \equiv (5 \pm 2) \pmod{10}$ und damit kein Quadrat einer natürlichen Zahl [für die Quadrate natürlicher Zahlen gilt bekanntlich stets eine der Kongruenzen $m^2 \equiv 0;1;4;5;6;9 \pmod{10}$]. Demnach existiert für ungerades n keine Lösung.
Es sei nun $n = 2k$ mit $k \in N$. Dann gilt

$$2^n < 2^n + 65 = 2^{2^k} + 65 = (2^k)^2 + 2\cdot 2^5 + 1$$

Man erkennt leicht, dass für $k > 5$ folgt

$$(2^k)^2 + 2\cdot 2^5 + 1 < (2^k)^2 + 2\cdot 2^k + 1 = (2^k+1)^2$$

Damit ergibt sich für $k > 5$ die folgende Ungleichungskette:

$$2^n = (2^k)^2 < 2^n + 65 < (2^k+1)^2$$

Damit liegt $m^2 = 2^n + 65$ zwischen den Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, kann also nicht selbst Quadrat einer natürlichen Zahl sein.
Die Untersuchung der Fälle $k = 0;1;2;3;4;5$ liefert die beiden Lösungen $(n_1 = 2k_1; m_1) = (4;9)$, $(n_2 = 2k_2; m_2) = (10;33)$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 17/81
Es sei a die 144-stellige natürliche Zahl, die (in dezimaler Schreibweise) ausschließlich mit der Ziffer 1 dargestellt wird. Man gebe 8 verschiedene Primfaktoren von a an!

Offensichtlich ist die Quersumme von a gleich 144 und die alternierende Quersumme gleich 0. Daraus folgt (nach bekannten Teilbarkeitsregeln), dass a restlos durch 3 und durch 11 teilbar ist. Damit sind zwei Primfaktoren von a gefunden: $p_1 = 3; p_2 = 11$.
Die übrigen 6 Primfaktoren kann man mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat finden. Dieser Satz sagt: Es ist $x^{p-1} \equiv 1$ (mod p), wenn p Primzahl und $ggT(x;p) = 1$ ist. Speziell für $x = 10$ folgt

$$\begin{array}{rr} 10^6 \equiv 1 \pmod 7 & 10^{144} = (10^6)^{24} \equiv 1 \pmod 7 \\ 10^{12} \equiv 1 \pmod{13} & 10^{144} = (10^{12})^{12} \equiv 1 \pmod{13} \\ 10^{16} \equiv 1 \pmod{17} & 10^{144} = (10^{16})^{9} \equiv 1 \pmod{17} \\ 10^{18} \equiv 1 \pmod{19} & 10^{144} = (10^{18})^{8} \equiv 1 \pmod{19} \\ 10^{36} \equiv 1 \pmod{37} & 10^{144} = (10^{36})^{4} \equiv 1 \pmod{37} \\ 10^{72} \equiv 1 \pmod{73} & 10^{144} = (10^{72})^{2} \equiv 1 \pmod{73} \end{array}$$

Nun ist aber $10^{144} - 1 = 9 \sum\limits_{i=0}^{143} 10^i = 9a$ (dies folgt aus der Summenformel für die endliche geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n-1} x \cdot q^i = x \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

mit $x = 1, q = 10, n = 144$). Da 9 einerseits und die Primzahlen $p_3 = 7$, $p_4 = 13$, $p_5 = 17$, $p_6 = 19$, $p_7 = 37$ und $p_8 = 73$ andererseits teilerfremd sind, m.a.W., da $ggT(9,p_i) = 1$ für $i = 3; 4; ...; 8$ gilt, folgt, dass diese Primzahlen Primfaktoren von a sind.

Aufgabe 18/81
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

für jede nichtnegative reelle Zahl x. Für welche x-Werte gilt die Gleichheit?

Setzt, man $\frac{x-1}{x+1} = \sin\alpha$ (was bei $x \geq 0$ wegen $-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1$ möglich ist), so gilt

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = 2\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Damit ist

$$\frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}\sin(2\alpha) < \frac{1}{4}$$

wegen $\sin(2\alpha) \leq 1$. Gleichheit gilt für $\sin 2\alpha = 1$, also für $\sin\alpha = 0{,}5\sqrt{2}$, $\frac{x-1}{x+1} = 0{,}5\sqrt{2}$, $x = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83$.

Aufgabe 19/81
Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} < 2$ für alle reellen Zahlen x mit $0 < x \leq 1$.

Substituiert man

$$1 + x = (1+u)^3 = 1 + 3u + 3u^2 + u^3 \qquad ; \qquad 1 - x = (1+v)^3 = 1 - 3v + 3v^2 - v^3$$

mit $0 < u, v \leq 1$, und addiert man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$2 = 2 + 3(u - v) + 3(u^2 + v^2) + u^3 - v^3$$
$$0 = (u - v)(3 + u^2 + uv + v^2) + 3(u^2 + v^2)$$

Da $3(u^2 + v^2) > 0$, $3 + u^2 + uv + v^2 > 0$ (wegen $u,v > 0$) gilt, ist diese Gleichung nur für $(u - v) < 0$ erfüllt. Damit ist

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 1 + u + 1 - v = 2 + (u - v) < 2$$

Aufgabe 20/81
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die $n^3 + 1 = 4p$ gilt; dabei bedeute p eine Primzahl.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent der Gleichung $p = 0{,}25(n^3 + 1)$. Damit p ganzzahlig wird, muss $n^3 \equiv -1 \pmod 4$, also auch $n \equiv -1 \pmod 4$ sein. Wir setzen daher $n = 4t - 1$ mit $t \in N$. Dann ist

$$p = 0{,}25(n^3 + 1) = 0{,}25[(4t - 1)^3 + 1] = 0{,}25(64t^3 - 48t^2 + 12t - 1 + 1) =$$

$$16t^3 - 12t^2 + 3t = t(16t^2 - 12t + 3)$$

Wenn p Primzahl sein soll, ist notwendig, dass einer der beiden Faktoren gleich 1 ist.
1. Es sei $t = 1$. Dann ist $12 - 12 + 3 = 7$ tatsächlich eine Primzahl p, und es ist $n = 4t - 1 = 3$. Damit ist eine Lösung gefunden.
2. Es sei $16t^2 - 12t + 3 = 1$. Diese (in t quadratische) Gleichung liefert keine ganzzahligen Werte für $t = p$.
Folglich ist das Paar $n = 3$, $p = 7$ die einzige Lösung.

Aufgabe 21/81
Gegeben sei ein ebenes, gleichseitiges Dreieck ABC. Man ermittle die Menge aller der Punkte P in der Ebene des Dreiecks, für die gilt $AP^2 + BP^2 = CP^2$.

Wir wählen ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem so, dass die Punkte A, B und C die folgenden Koordinaten haben: $A(-0{,}5; 0)$; $B(0{,}5; 0)$, $C(0; 0{,}5\sqrt{3})$.
Offensichtlich ist dann $AB = BC = CA = 1$. Der (variable) Punkt P habe die Koordinaten $P(x; y)$. Dann gilt

$$AP^2 = (x + 0{,}5)^2 + y^2 \qquad ; \qquad BP^2 = (x - 0{,}5)^2 + y^2 \qquad ; \qquad CP^2 = x^2 + (y - 0{,}5\sqrt{3})^2$$

und damit

$$AB^2 + BP^2 = 2x^2 + 2y^2 + 0{,}5 = CP^2 = x^2 + y^2 - y\sqrt{3} + 0{,}75$$

Daraus folgt weiter

$$x^2 + y^2 + y\sqrt{3} - 0{,}25 = 0 \to x^2 + (y + 0{,}5\sqrt{3})^2 = 1$$

Die gesuchte Punktmenge ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0; -0{,}5\sqrt{3})$ und dem Radius $r = 1$. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis, der Mittelpunkt M liegt symmetrisch zum Punkt C bezüglich AB.

Aufgabe 22/81
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, die der Gleichung $p_2^3 - 2 = p_1 \cdot n$ genügen; dabei ist $p_1; p_2$ ein Primzahl-Zwillingspaar.

Da $p_1; p_2$ ein Primzahl-Zwillingspaar ist, gilt $p_2 = p_1 + 2$ und damit

$$p_2^3 - 2 = (p_1 + 2)^3 - 2 = p_1^3 + 6p_1^2 + 12p_1 + 8 - 2 = p_1 \left(p_1^2 + 6p_1 + 12 + \frac{6}{p_1} \right) = p_1 \cdot n$$

Da $n \in N$ ist, folgt $\frac{6}{p_1} \in N$, also $p_1 = 2$ oder $p_1 = 3$. Die erste Möglichkeit entfällt; sonst wäre nämlich $p_2 = p_1 + 2 = 4$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft von p_2. Dagegen liefert $p_1 = 3$ den Primzahlzwilling $p_2 = 5$, und es ist

$$n = 3^2 + 6 \cdot 3 + 12 + \frac{6}{3} = 41$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit. Damit existiert genau eine natürliche Zahl n, die der gegebenen Gleichung genügt (sie ist zudem ebenfalls Primzahl).

Aufgabe 23/81
Man bestimme alle reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und die Bedingung

$$f(x - x_0) = f(x) + f(x_0) - 2xx_0 + 1$$

für beliebige reelle Zahlen x und x_0 erfüllen.

Wenn die gestellte Bedingung für beliebige reelle Zahlen x und x_0 gelten soll, muss sie speziell auch für $x_0 = 0$ gelten. Dann nimmt sie die Gestalt

$$f(x) = f(x) + f(0) + 1 \quad (1)$$

an, woraus sofort $f(0) = -1$ folgt. Sie muss weiter für $x_0 = X$ gelten; daraus folgt

$$f(x-x) = f(0) = 2f(x) - 2x^2 + 1 \quad (2)$$

(1) und (2) liefern

$$2f8x) - 2x^2 + 1 = -1 \to f(x) = x^2 - 1$$

Tatsächlich ist dann

$$f(x-x_0) = (x-x_0)^2 - 1 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 - 1 = x^2 - 1 + x_0^2 - 1 - 2xx_+1 = f(x) + f(x_0) - 2xx_0 + 1$$

Aus der Herleitung folgt, dass $f(x) = x^2 - 1$ die einzige Funktion ist, die die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 24/81
Man zeige: Gilt für n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1; 2; ...; n)$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \qquad \text{, so ist} \qquad \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 2^n$$

Wir führen die folgende vereinfachende Schreibweise ein:

$$\prod_{i=1}^{n} = \prod x$$

Unter der Voraussetzung $\prod a = 1$ ist

$$\prod(1+a) = \frac{1}{\prod a} \cdot \prod(1+a) = \prod\left(1+\frac{1}{a}\right) \text{ also}$$

$$\left[\prod(1+a)\right]^2 = \prod(1+a)\prod\left(1+\frac{1}{a}\right) = \prod(1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right) = \prod\left(2+a+\frac{1}{a}\right)$$

Wegen $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für positive reelle Zahlen x gilt

$$\left[\prod(1+a)\right]^2 = \prod\left(2+a+\frac{1}{a}\right) \geq \prod 4 = 4^n$$

und damit

$$\prod(1+a) = \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 2^n$$

Aufgabe 25/81
Man beweise, dass die Gleichung $2x^3 - 7y = 1$ keine ganzzahligen Lösungspaare $(x; y)$ hat!

Angenommen, es gäbe ein ganzzahliges Lösungspaar $(x; y)$ der Gleichung $2x^2 - 7y = 1$.
Dann muss wegen $7y \equiv 0 \pmod 7$ gelten, dass $2x^3 \equiv 1 \pmod 7$, also $x^3 \equiv 4 \pmod 7$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass $x^3 \equiv 0 \pmod 7$ für $x \equiv 0 \pmod 7$ und $x^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$ für $x \neq 0 \pmod 7$, also $x^3 \neq 4 \pmod 7$ für jede ganze Zahl x ist.
Damit ist die Annahme widerlegt.

Aufgabe 26/81
Es seien p und q zwei ungerade Primzahlen. Man beweise: Es gibt kein Tripel $(a; b; c)$ paarweise teilerfremder natürlicher Zahlen $a; b; c$ mit $a + b = q$, für das die Gleichung $a^p + b^p = c^p$ gilt.

Angenommen, es existiere ein Tripel $(a; b; c)$ paarweise teilerfremder natürlicher Zahlen $a; b; c$ mit $a+b = q$, für das die Gleichung $a^p + b^p = c^p$ gilt. Nun ist (bekanntlich)

$$a^p + b^p = (a+b)(a^{p-1} - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 \pm ... + b^{p-1}) = q(a^{p-1} - a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 \pm ... + b^{p-1})$$

Also ist $a^p + b^p = c^p$ restlos durch q teilbar. Da q Primzahl ist, folgt, dass sogar c restlos durch q teilbar, mithin $q \leq c$ ist.
Weiter gilt für $p > 1$, dass $c^p = a^p + b^p < (a+b)^p = q^p$, also $c < q$ ist.
Damit folgt aus der Annahme der Widerspruch $q \leq c < q$. Demnach ist die Annahme falsch und damit die Behauptung in der Aufgabenstellung richtig.

Aufgabe 27/81
Welche Werte nimmt die Funktion $y = \sin(x^8 - x^6 - x^4 + x^2)$ an, wenn x eine ganze Zahl ist?

Wir zeigen, dass das Polynom

$$P(x) = x^8 - x^6 - x^4 + x^2$$

für jede ganze Zahl x restlos durch 180 teilbar ist. Daraus folgt dann sofort, dass

$$y = \sin(x^8 - x^6 - x^4 + x^2) = \sin(k \cdot 180°) = 0$$

für jede ganze Zahl x ist (wobei auch k eine ganze Zahl bedeutet). Es ist

$$P(x) = x^8 - x^6 - x^4 + x^2 = [(x-1)x(x+1)]^2(x^2+1)$$

In der eckigen Klammer steht das Produkt dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen. Unter ihnen ist wenigstens eine durch 2 und genau eine durch 3 ohne Rest teilbar; folglich ist der Term in der eckigen Klammer ohne Rest durch $2 \cdot 3 = 6$ und damit sein Quadrat durch 36 teilbar.
Weiter ist entweder eine der drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen restlos durch 5 teilbar, oder es gilt $x \equiv \pm 2 \pmod 5$ (wie man leicht nachprüft). Im ersten Fall ist das Quadrat des Terms in der eckigen Klammer sogar durch $36 \cdot 25 = 900 = 5 \cdot 180$ teilbar; im zweiten Fall ist $x^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$ und damit $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$. Dann ist aber $P(x)$ restlos durch $36 \cdot 5 = 180$ teilbar (w.z.b.w.).

Aufgabe 28/81
Gegeben sei eine Menge von flächengleichen Dreiecken ABC mit gleicher Seite AB. Man ermittle daraus das Dreieck ABC mit dem kleinsten Umfang U, ohne dazu Hilfsmittel der Differentialrechnung zu verwenden!

Da die Dreiecke ABC sämtlich die gleiche Seite AB und den gleichen Flächeninhalt F haben, sind auch ihre Höhen auf AB gleich. Das heißt, die Punkte C liegen auf einer Parallelen zu AB.
Wir spiegeln B an dieser Parallelen nach B'. Es ist dann

$$BC = B'C \qquad \to \qquad U = AB + BC + CA = AB + B'C + CA$$

Der Umfang wird offenbar genau dann minimal, wenn $B'C + CA$ minimal wird, also wenn C auf der Strecke AB' liegt (dies folgt sofort aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen für das Dreieck $AB'C$).
Dann aber gilt

$$\measuredangle CAB + \measuredangle CB'B = 90° \qquad ; \qquad \measuredangle ABC + \measuredangle CB'B = 90°$$

Subtrahiert man eine dieser beiden Gleichungen von der anderen, so ergibt sich $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC$, d.h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AC = BC$. Da der Gedankengang umkehrbar ist, folgt, dass der Umfang genau dann ein Minimum ist, wenn das Dreieck gleichschenklig mit AB als Basis ist.

Aufgabe 29/81
Gesucht sind alle (echt) dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aus den i-ten Potenzen der i-ten Stelle (von links her gezählt) gleich der ursprünglichen Zahl ist.

Die gesuchten Zahlen haben die Gestalt $n = 100a + 10b + c$ mit $a; b; c \in N$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b; e \leq 9$. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt die Gleichung

$$a + b^2 + c^2 = 100a + 10b + c \quad \text{bzw.} \quad c^3 - c = (c-1)c(c+1) = 99a + b(10-b)$$

Der Term $b(10-b)$ kann nur die Werte $0; 9; 16; 21; 24; 25$ annehmen; da die linke Seite dieser Gleichung als Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellbar ist, ist sie und damit auch die rechte Seite restlos durch 3 teilbar, und die Zahlen 16 und 25 entfallen.
Wegen $a \geq 1$, $b(10-b) \geq 0$ ist $c^3 - c \geq 99$, $c^3 > 99$, also $c > 5$. Man kann nun die fünf Möglichkeiten für c durchprobieren

c	$c^3 - c$	a	$b(10-b)$	b
5	120	1	21	$3; 7$
6	210	2	12	entfällt
7	336	3	39	entfällt
8	504	5	9	$1; 0$
9	720	7	27	entfällt

Es gibt also vier derartige Zahlen: $n_1 = 135$, $n_2 = 175$, $n_3 = 518$, $n_4 = 598$.

Aufgabe 30/81
Man bestimme alle Paare reeller Zahlen $(x; y)$, die den Gleichungen genügen:

$$xe^y + x^2e^{2y} = 6 \quad ; \quad xe^{-y} + x^2e^{-2y} = 20$$

Wir setzen $xe^y = \alpha$ und $xe^{-y} = \beta$. Die gegebenen Gleichungen nehmen dann die Gestalt

$$\alpha + \alpha^2 = 6 \quad ; \quad \beta + \beta^2 = 20$$

an. Ihre Lösungen sind $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 5$. Aus

$$\alpha\beta = xe^y \cdot xe^{-y} = x^2 \quad ; \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{xe^y}{xe^{-y}} = e^{2y}$$

folgt, dass

$$x = \pm\sqrt{\alpha\beta} \quad ; \quad y = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta} = \ln\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (*)$$

genau dann reell sind, wenn $\alpha\beta \geq 0$ und $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ gilt. Damit ergibt sich aus den Gleichungen (*) und aus den ermittelten Werten für α und β

$$x_{11;12} = \pm 2\sqrt{2} \quad ; \quad y_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{4} = -\ln\sqrt{2}$$

$$x_{21;22} = \pm\sqrt{15} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{-3}{-5} = \ln 0{,}6$$

Von den nunmehr möglichen 4 Paaren erfüllen nur die Paare

$$(x_{11}; y_1) = (2\sqrt{2}; -\ln\sqrt{2}) \approx (2{,}828; -0{,}347) \quad \text{und} \quad (x_{22}; y_2) = (-\sqrt{15}; \ln 0{,}6) \approx (-3{,}873; -0{,}255)$$

die Probe.

Aufgabe 31/81
Gesucht sind alle pythagoreischen Zahlentripel $(a; b; c)$, für die auch $(c; ab; 4a - b)$ ein pythagoreisches Zahlentripel ist.

Nach Voraussetzung gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$
$$c^2 + a^2b^2 = 16a^2 - 8ab + b^2 \quad (2)$$

Setzt man (1) in(2) ein, so erhält man

$$a^2 + b^2 + a^2b^2 = 16a^2 - 8ab + b^2 \to 15a^2 - a^2b^2 - 8ab = 0 \to a = \frac{8b}{15 - b^2}$$

Da aus $b > 3$ folgt $a < 0$, kommt nur $b = 3$ in Frage (die Zahlen 1 und 2 können bekanntlich nicht Zahlen eines pythagoreischen Tripels sein). Dann ist aber $a = 4$ und $c = 5$. Tatsächlich ist $(5; 4 \cdot 3 = 12; 4 \cdot 4 - 3 = 13)$ ein pythagoreisches Tripel. Das Tripel $(4; 3; 5)$ ist damit das einzige der geforderten Art.

Aufgabe 32/81
Man gebe eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die natürliche Zahl n an, die garantiert, dass die Gleichung $x + y + xy = n$ genau eine Lösung in natürlichen Zahlen $x; y$ mit $0 \leq x < y$ hat.

Ist $x_1; y_1$ eine Lösung, so gilt mit $x_1 + y_1 + x_1y_1 = n$ auch

$$1 + x_1 + y_1 + x_1y_1 = (1 + x_1)(1 + y_1) = n + 1$$

Jede Zerlegung von $n + 1$ in ein Produkt aus zwei Faktoren liefert eine Lösung. Genau eine Lösung existiert also genau dann, wenn $n + 1$ auf genau eine Weise in ein Produkt aus zwei verschiedenen Faktoren zerlegbar ist. Notwendig und hinreichend ist dafür, dass $n + 1$ Primzahl oder Quadrat einer Primzahl ist: $n + 1 = 1 \cdot (n + 1)$.
Wegen $x < y$ ist dann $(1+x_1) = 1$ und $(1+y_1) = n+1$, also $x = 0$ und $y = n$. Die Zerlegung $(1+x_1) = p$ und $(1 + y_1) = p$ (p Primzahl, $p^2 = n - 1$) kommt nämlich wegen $x < y$ nicht in Frage.

Aufgabe 33/81
Man beweise die Richtigkeit der Behauptung

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{1}{8}$$

ohne einen der Kosinus zahlenmäßig zu ermitteln!

Es ist $\sin 160° = \sin 20°$. Wegen $\sin 160° = \sin 2 \cdot 80° = 2 \sin 80° \cos 80°$ ist also

$$2 \sin 80° \cos 80° = \sin 20°$$

Entsprechend folgt mit $\sin 80° = 2 \sin 40° \cos 40°$

$$4 \sin 40° \cos 40° \cos 80° = \sin 20°$$

und mit $\sin 40° = 2 \sin 20° \cos 20°$

$$8 \sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80° = \sin 20°$$

Nach Division mit $8 \sin 20° \neq 0$ folgt daraus die Behauptung

$$\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$$

Aufgabe 34/81
Man ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b, für die gilt $a^2 - b^2 = 1981$.

Es ist

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1981 = 1 \cdot 7 \cdot 283$$

Wegen $a - b < a + b$ ($b \neq 0$, wie man sich leicht überzeugt) folgt entweder

$$a - b = 1 \quad ; \quad a + b = 1981 \quad ; \quad a = 991 \quad ; \quad b = 990 \quad \text{oder}$$

$$a - b = 7 \quad ; \quad a + b = 283 \quad ; \quad a = 145 \quad ; \quad b = 138$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit. Demnach existieren genau zwei Paare, die die gestellte Bedingung erfüllen: $(a_1; b_1) = (991 : 990)$, $(a_2; b_2) = (145; 138)$.

Aufgabe 35/81
In einer Schauvitrine sind 60 (nicht notwendig reguläre) konvexe Polyeder ausgestellt, die ausschließlich Dreiecke als Begrenzungsflächen haben. Die Summe ihrer Eckenzahlen ist 1111. Man bestimme die Gesamtzahl der Begrenzungsflächen.

Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt $e+f-k=2$ (wobei mit e die Anzahl der Ecken, mit f die Anzahl der Begrenzungsflächen und mit k die Anzahl der Kanten eines Polyeders bezeichnet sind). Sind speziell alle Begrenzungsflächen Dreiecke, so ist (da jede Fläche von 3 Kanten begrenzt wird und jede Kante 2 Flächen angehört): $2k = 3f$.
Setzt man dies in den Polyedersatz ein, so folgt nach kurzer Rechnung: $f = 2e - 4$.
Nach den Bedingungen der Aufgabe ist dann

$$\sum_{i=1}^{60} f_i = \sum_{i=1}^{60}(2e_i - 4) = 2\sum_{i=1}^{60} e_i - 4\sum_{i=1}^{60} i = 2\cdot 1111 - 4\cdot 60 = 1982$$

Aufgabe 36/81
Gegeben ist das Kryptogramm $abcd = bba \cdot d$, wobei $a; b; c; d$ Ziffern im dekadischen Positionssystem bedeuten (gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern).
Man ermittle alle Lösungen des Kryptogramms.

Das Kryptogramm stellt nichts anderes dar als die Gleichung

$$1000a + 100b + 10c + d = (110b + a)d = 110bd + ad$$

mit $a; b; c; d \in N$, $1 \leq a; b; d \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$. Aus ihr folgt sofort

$$d \equiv ad \pmod{10}$$

also

$$d(a-1) \equiv 0 \pmod{10}$$

Die Kongruenz ist erfüllt, wenn
1. $a = 1$, d beliebig,
2. $a = 6$, d gerade,
3. a ungerade, $d = 5$
ist.
Betrachten wir zunächst Fall 3. Mit $d = 5$ nimmt die Gleichung die Gestalt

$$1000a + 100b + 10c + 5 = 550b + 5a \qquad ; \qquad 199a + 2c + 1 = 90b$$

an. Probieren mit $a = 1; 3; 5; 7; 9$ liefert keine Werte für b und c aus dem Definitionsbereich. Damit kommt Fall 3 nicht in Frage.
Gehen wir zum Fall 2 über. Mit $a = 6$ nimmt die Gleichung die Gestalt

$$6000 + 100b + 10c + d = 110bd + 6d \qquad ; \qquad 1200 + 20b + 2c = 22bd + d$$

an. Probieren mit $d = 2; 4; 6; 8$ liefert nur für $d = 2$ Werte aus dem Definitionsbereich für b und c; es ergibt sich jedoch $b = 6 = a$ im Widerspruch zur Voraussetzung, so dass auch Fall 2 nicht in Frage kommt.
Bleibt noch Fall 1 zu untersuchen. Mit $a = 1$ nimmt die Gleichung die Gestalt

$$1000 + 100b + 10c + d = 110bd + d \qquad ; \qquad 100 + 10b + c = 11bd$$

an. Da die rechte Seite der letzten Gleichung restlos durch 11 teilbar ist, gilt dies auch für die linke Seite, und aus der bekannten Teilbarkeitsregel für 11 folgt

$$1 - b + c \equiv 0 \pmod{11}$$

wegen $0 \leq b; c \leq 9$ gilt sogar $1 - b + c = 0$, also $c = b - 1$. Damit folgt

$$100 + 10b + c = 100 + 10b + b - 1 = 99 + 11b = 11bd \to d = 1 + \frac{9}{b}$$

Diese Gleichung liefert für $b_1 = 3$ und für $b_2 = 9$ Werte für d aus dem Definitionsbereich: $d_1 = 4$, $d_2 = 2$. Da sich in beiden Fällen auch für c "brauchbare" Werte ergeben, nämlich $c_1 = 2$ und $c_2 = 8$, gibt es genau zwei Lösungen des Kryptogramms: $1324 = 331 \cdot 4$, $1982 = 991 \cdot 2$.

2.22 Aufgaben und Lösungen 1982

Aufgabe 1/82
Von 100 Papierbögen wurde eine nicht bekannte Anzahl in je 10 Teile zerschnitten. Danach zählte man die Papierblätter; man ermittelte die Anzahl 864. Es ist zu beweisen, dass beim Zählen ein Fehler unterlaufen ist.

Wird ein Papierbogen in 10 Teile zerschnitten, so ändert sich die Anzahl um 9. Die Anzahl der Blätter nach dem Zerschneiden muss also beim Teilen durch 9 denselben Rest lassen wie die Anzahl vor dem Zerschneiden. Da

$$100 \equiv 1 \pmod 9, \text{ aber } \quad 864 \equiv 0 \pmod 9$$

gilt, ist mit Sicherheit ein Fehler unterlaufen. Vermutlich wurde 1 Blatt übersehen, oder es sind 8 Blatt zuviel gezählt werden (die übrigen noch in Frage kommenden Fehler sind nicht sehr wahrscheinlich).

Aufgabe 2/82
Gesucht, sind alle Paare von Primzahlen $(p_1; p_2)$ mit $p_1 \leq p_2$, für die gilt $(4p_1)^2 + (4p_2)^2 = 100000$.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent der Gleichung

$$p_1^2 + p_2^2 = 6250$$

1) $p_1 \neq 2$, da $p_2^2 = 6246$ keine natürliche Zahl p_2, geschweige denn eine Primzahl p_2 liefert.
2) $p1 = 3$ liefert $p_2^2 = 6241, p_2 = 79$. Da 79 tatsächlich Primzahl ist, wurde damit ein erstes Lösungspaar ermittelt: $(p_{11}; p_{21}) = (3; 79)$.
3) Ist $p_1 > 3$, so ist bekanntlich $p_1 \equiv \pm 1 \pmod 6$, also $p_1^2 \equiv 1 \pmod 6$. Wegen $p_2 \geq p_1$ gilt das gleiche auch für p_2. Damit folgt

$$p_1^2 + p_2^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 6$$

Da andererseits $6250 \equiv 4 \pmod 6$ gilt, kann es kein weiteres Lösungspaar geben.

Aufgabe 3/82
Man beweise, dass für jedes ebene Dreieck mit den Seiten a, b und c und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ die Gleichung gilt:

$$\sqrt{a \sin\alpha} + \sqrt{b \sin\beta} + \sqrt{c \sin\gamma} = \sqrt{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(a + b + c)}$$

Nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{g} = k$$

Daraus folgt $\sin\alpha = ak$, $\sin\beta = bk$, $\sin\gamma = ck$ und damit

$$\sqrt{a \sin\alpha} + \sqrt{b \sin\beta} + \sqrt{c \sin\gamma} = a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} = \sqrt{k}(a + b + c) \quad (1)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = ak + bk + ck = k(a + b + c) \qquad ; \qquad k = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{a + b + c} \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so ergibt sich die Behauptung:

$$\sqrt{a \sin\alpha} + \sqrt{b \sin\beta} + \sqrt{c \sin\gamma} = \sqrt{k}(a + b + c) = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{a + b + c}}(a + b + c) =$$

$$= \sqrt{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(a + b + c)}$$

Aufgabe 4/82
Man beweise: Das Produkt aus den drei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen eines jeden pythagoreischen Zahlentripels ist durch die Summe dieser Zahlen ohne Rest teilbar.

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ mit $a; b; c \in N$ folgt

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \qquad ; \qquad (a + b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$(a + b - c)(a + b + c) = 2ab \qquad ; \qquad \frac{(a + b - c)c}{2} = \frac{abc}{a + b + c}$$

(wegen $a + b + c \neq 0$ und $\frac{c}{2} \neq 0$). Der Term $\frac{abc}{a+b+c}$ ist genau dann ganzzahlig, wenn der Term $(a + b - c)c$ eine, gerade Zahl ist. Nun ist stets $a + b - c$ eine gerade Zahl. Ist nämlich c gerade, so ist auch c^2 und folglich $a^2 + b^2$ gerade, also sind a und b entweder beide gerade oder beide ungerade; ist dagegen c ungerade, so auch c^2 und folglich ist genau eine der beiden Zahlen a und b ungerade und damit $a + b$ ungerade. In jedem Fall ist also $(a + b - c)c$ eine gerade Zahl und damit

$$\frac{(a + b - c)c}{2} = \frac{abc}{a + b + c}$$

eine ganze Zahl.

Aufgabe 5/82
Man ermittle alle Trapeze $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:
1. Die Länge c der Seite CD ist eine ganze Anzahl von Längeneinheiten LE.
2. Die Länge der Seite AB ist um 3 LE größer als die Länge c der dazu parallelen Seite CD.
3. Die Länge d der Seite DA ist um 1 LE, die Länge b der Seite BC um 2 LE größer als c.
4. $\measuredangle BAD = 90°$

Es gilt offenbar $c \in N$ (nach Bedingung 1), $a = c + 3$ (nach Bedingung 2), $b = c + 2$ und $d = c + 1$ (nach Bedingung 3); dabei ist LE vernachlässigt.
Es seien nun E und F die Fußpunkte der Lote von C bzw. D auf AB, und es sei $AF = x$, $EB = y$, $CE = DF = h$. Dann ist wegen $FE = CD = c$

$$AB = AF + FE + EB = x + c + y = c + 3$$

also $y = 3 - x$ und

$$DA^2 - x^2 = h^2 = (c + 1)^2 - x^2 \qquad ; \qquad BC^2 - (3 - x)^2 = h^2 = (c + 2)^2 - (3 - x)^2$$

$$(c + 1)^2 - x^2 = (c + 2)^2 - (3 - x)^2$$

Löst man diese Gleichung nach c auf, so erhält man $x = 1 - \frac{c}{3}$.
Die Bedingung 4 impliziert $x \geq 0$. Wegen $c \in N$ ist dann $1 \leq c \leq 3$, und es gibt damit drei Trapeze der geforderten Art:
1) $c = 1$, $a = 4$, $b = 3$, $d = 2$, $x = 0{,}666...$
2) $c = 2$, $a = 5$, $b = 4$, $d = 3$, $x = 0{,}333...$
3) $c = 3$, $a = 6$, $b = 5$, $d = 4$, $x = 0$
Zusatz: Wollte man mit $c = 0$ auch das Dreieck als "entartetes" Trapez zulassen, so wäre $x = 1, a = 3, b = 2, d = 1$. Man erkennt, dass dann sogar das Dreieck (zur Strecke) entartet.

Aufgabe 6/82
Gegeben ist die Ungleichung $|x| + |y| \leq n$ mit $n \in N, x; y \in G$ (wobei mit G die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet ist). Man bestimme die Anzahl der geordneten Lösungspaare $(x; y)$.

Wir ersetzen die Ungleichungen $|x| + |y| \leq n$ mit $n \in N$, $x; y \in G$ durch die Menge aller Gleichungen $|x| + |y| = k$ mit $k \in N$, $0 \leq k \leq n$, $x; y \in G$.
Offensichtlich ist ein Paar $(x; y)$ genau dann Lösung der gegebenen Ungleichung, wenn es Lösung einer dieser Gleichungen ist. Die gestellte Aufgabe ist damit auf die Aufgabe reduziert, die Anzahl der Lösungen zu bestimmen, die jede dieser Gleichungen hat.
Ist $k = 0$, so ist das Paar $(x = 0; y = 0)$ die einzige Lösung. Ist $0 < k \leq n$, so unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Es sei ein Paarelement gleich null. Dann ist das andere Paarelement gleich $\pm k$. Es gibt in diesem Fall also die vier Lösungen $(x = 0; y = \pm k)$, $(x = \pm k; y = 0)$.

2. Es sei kein Paarelement gleich null. Dann kann das eine Paarelement die Werte ± 1; ± 2; ± 3; ...; $\pm(k-1)$, das andere die Werte $\pm(k-1)$; $\pm(k-2)$; ...; ± 1 durchlaufen. Da vorzeichenmäßig jeweils vier Kombinationen möglich sind, ergeben sich damit $4(k-1)$ Lösungen.

Für $0 < k \leq 11$ sind also für jedes k insgesamt $4 + 4(k-1) = 4k$ Lösungen möglich. Durch Summieren ergibt sich die Gesamtzahl aller Lösungen zu

$$1 + \sum_{k=1}^{n} 4k = 1 + 4\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 4\frac{(n+1)n}{2} = n^2 + (n+1)^2$$

Aufgabe 7/82
Es seien a; b; c; d vier von null verschiedene reelle Zahlen, für die die Gleichungen

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a} = d$$

gelten. Man ermittle alle möglichen Werte von d.

Aus

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a} = d$$

folgen die Gleichungen

$$a+b = cd \qquad ; \qquad a+c = bd \qquad ; \qquad b+c = ad$$

Durch seitenweise Addition erhält man daraus $2(a+b+c) = d(a+b+c)$.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
1. $a+b+c = 0$. Es folgt $a+b = -c; a+c = -b; b+c = -a$ und damit

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a+c}{b} = \frac{b+c}{a} = \frac{-c}{c} = \frac{-b}{b}\frac{-a}{a} = 1 = d$$

2. $a+b+c \neq 0$. Dann ergibt sich sofort $d = 2$. Die möglichen Werte für d sind also $d_1 = -1$ und $d_2 = 2$.

Aufgabe 8/82
Man bestimme die kleinste Zahl n, die im Dezimalsystem die Form

$$n = \sum_{i=1}^{k} 10^{2i-1}x + \sum_{i=0}^{k} 10^{2i}y$$

hat ($x; y \in N$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $x \neq y$, $k > 0$) und die restlos durch 264 teilbar ist.

Wegen $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$ muss für n nach den bekannten Teilbarkeitsregeln gelten:

$$\begin{aligned} 3 &\mid k(x+y) \quad (1)\\ 8 &\mid 101y + 10x \quad (2)\\ 11 &\mid k(x-y) \quad (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt sofort wegen $x \leq 9$, $x \neq y$, $y \leq 9$, dass $11 \mid k$. Da die kleinste Zahl n gesucht ist, probieren wir zunächst mit $k = 11$.
Dann gilt nach (1) $3 \mid (x+y)$. Kleinstes x ist $x = 1$; dann wäre $y = 2$ oder $y = 5$ oder $y = 8$, aber keine dieser Kombinationen erfüllt die Bedingung (2). Dagegen ergibt sich mit $x = 2, y = 4$ ($y = 1$ scheidet ebenfalls aus) ein brauchbares Paar: $8 \mid 101 \cdot 4 + 10 \cdot)424$. Damit ist die Lösung gefunden:

$$n = \sum_{i=0}^{k} 10^{2i+1} \cdot 2 + \sum_{i=0}^{k} 10^{2i} \cdot 4 = 24242424...24$$

Aufgabe 9/82
Volumen und Oberfläche einer Kugel seien zahlenmäßig einander gleich. Wie groß ist unter dieser Voraussetzung die Oberfläche eines der Kugel einbeschriebenen Würfels?

Ist r der Radius der Kugel, so gilt nach der Voraussetzung

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \qquad ; \qquad r = 3 \text{ LE}$$

(wobei mit LE die Längeneinheit bezeichnet ist). Für die Seitenlänge a des der Kugel mit dem Radius r einbeschriebenen Würfels gilt

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$$

(dies folgt sofort aus der Tatsache, dass die Raumdiagonale des Würfels gleich dem Durchmesser der Kugel ist: $\sqrt{3}a = d = 2r$).
Damit gilt für die Oberfläche A des Würfels: $A = 6a^2 = 6 \cdot (2\sqrt{3}(^2 = 72 \text{ LE}^2$.

Aufgabe 10/82
Die Kante eines Würfels sei die Raumdiagonale eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c. In welchem Verhältnis stehen die Kantenlängen des Quaders zueinander, wenn das Würfelvolumen das $3\sqrt{3}$-fache des Quadervolumens ist?

Die Kantenlänge des Würfels ist $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ für die Volumina ergibt sich damit

$$(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})^3 = 3\sqrt{3abc} = \sqrt{27abc} \to (a^2 + b^2 + c^2)^3 = 3^3 \cdot a^2b^2c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \to \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Es ist also das arithmetische Mittel der drei nichtnegativen Zahlen a^2, b^2 und c^2 gleich ihrem geometrischen Mittel. Das ist genau dann den Fall, wenn diese Zahlen sämtlich einander gleich sind. Dann und nur dann sind aber auch ihre nichtnegativen Wurzeln einander gleich. Es gilt also $a = b = c$, der Quader ist ebenfalls ein Würfel.

Aufgabe 11/82
Man bestimme alle geordneten Quadrupel $(k; l; m; n)$ positiver ganzer Zahlen k, l, m, n, für die folgende Gleichung gilt: $k^{2l} - 4 = m^n$.

Die Gleichung hat unendlich viele triviale Lösungen. Sie wird nämlich sicher von der zweiparametrischen Lösungsschar

$$(k; l; m = k^{2l} - 4; n = 1)$$

mit $k, l \in N; k > 2$ erfüllt. Die Frage nach der Existenz nichttrivialer Lösungen ist schnell zu entscheiden, wenn m Primzahl ist. Dann gilt nämlich

$$k^{2l} - 4 = (k^l - 2)(k^l + 2) = m^n = m^\alpha m^{n-\alpha}$$

mit $\alpha \in N, m^\alpha \neq m^{n-\alpha}$ wegen $k^l - 2 < k^l + 2$. O.B.d.A. sei $m^\alpha < m^{n-\alpha}$, also $\alpha < n - \alpha$, $2\alpha < n$. Dann ist

$$\frac{k^l + 2}{k^l - 2} = 1 + \frac{4}{k^l - 2} = \frac{m^{n-\alpha}}{m^\alpha} = m^{n-2\alpha} \in N$$

Folglich ist $k^l = 3$ oder $k^l = 4$ oder $k^l = 6$. Davon liefert nur $k^l = 6$ eine nichttriviale Lösung: $(k; l; m; n) = (6; 1; 2; 5)$.
Ist m keine Primzahl, so ist n sicher ungerade; denn aus $k^{2l} - 4 = m^{2r}$ mit $r \in N$ folgt, dass sich zwei Quadratzahlen k^{2l} und m^{2r} um genau 4 unterscheiden, was bekanntlich unmöglich ist. Es sei nun $n = 2r + 1$ mit $r \in N$. Dann müsste

$$k^{2l} = m^{2r+1} + 4 = m^{2r}\left(m + \frac{4}{m^{2r}}\right)$$

eine Quadratzahl sein. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, kann m^{2r} nur die Werte 1, 2 oder 4 annehmen. Es müsste also $m = 1$ und r beliebig oder m beliebig und $r = 0$ oder $m = 2$ und $r = 1$ sein. Für $m = 1$ und $m = 2$ ergeben sich aber keine Quadratzahlen. Für $r = 0$ ist $n = 1$, und damit erhält man die bereits erwähnten trivialen Lösungen. Weitere nichttriviale Lösungen folgen aus trivialen, wenn $k = s^2$ mit $s \in N$ ist.

Aufgabe 12/82
Man beweise die Richtigkeit der folgenden Behauptung: Sind fünf Punkte einer Ebene so gegeben, dass keine drei davon auf einer Geraden liegen; so kann man stets vier von ihnen auswählen, die Eckpunkte eines konvexen Vierecks sind.

Wir bezeichnen die Punkte mit P_i $(i = 1; 2; ...; 5)$ so, dass P_1, P_2, P_3 und P_4 Eckpunkte eines nicht überschlagenen Vierecks sind (das ist, da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, sicher möglich). Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
1) Das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ist konvex. Dann ist der Beweis bereits geführt.
2) Das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ist nicht konvex. Da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, muss dann einer der vier Eckpunkte im Inneren des Dreiecks liegen, das von den übrigen drei Eckpunkten gebildet wird; O.B.d.A. sei dies P_4. Es gibt nun wieder zwei Möglichkeiten:
2.1) P_5 liegt außerhalb des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Dann schneidet die Strecke P_4P_5 eine der Dreieckseiten. O.B.d.A. sei dies P_1P_2.
Dann bilden P_1P_2 und P_4P_5 die Diagonalen eines konvexen Vierecks $P_1P_5P_2P_4$, da zwei Strecken genau dann Diagonalen eines konvexen Vierecks sind, wenn sie einen inneren Schnittpunkt haben.
2.2) P_5 liegt nicht außerhalb des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, folgt, dass P_5 im Inneren dieses Dreiecks liegt. Dann liegt es aber auch im Inneren eines der Teildreiecke $P_1P_2P_4$, $P_1P_3P_4$ oder $P_2P_3P_4$ (weil P_5 auch nicht auf P_1P_4, P_2P_4 und P_3P_4 liegen kann).
O.B.d.A. liege P_5 im Dreieck $P_1P_2P_4$. Dann schneidet P_5P_3 entweder die Strecke P_1P_4 oder die Strecke P_2P_4 innen. In beiden Fällen erhält man; analog zu 2.1; das Diagonalenpaar eines konvexen Vierecks.
Da die Fallunterscheidung vollständig ist, wurde der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 13/82
Durch welche Funktion $y = f(x)$ werden die Glieder der Folge $\{y_k\} = \{3; 8; 13; 18; ...\}$ den Gliedern der Folge $\{x_k\} = \{2; 5; 8; 11; ...\}$ zugeordnet?

Es ist $x_k = 2 + 3(k - 1)$ und $y_k = 3 + 5(k - 1)$. Eliminiert man daraus die Gliednummer k, so erhält man $5(x_k - 2) = 3(y_k - 3)$ also für jedes k

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} = f(x)$$

Aufgabe 14/82
Man bestimmte alle Tripel $(x; y; z)$ ganze Zahlen $x; y; z$, welche die Gleichung erfüllen:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = 3$$

Aus der gegebenen Gleichung folgt durch Multiplikation

$$\frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2}{3} = xyz$$

Da die linke Seite der Gleichung mit Sicherheit positiv ist, folgt $xyz > 0$ und damit (wegen der geforderten Ganzzahligkeit) sogar $xyz \geq 1$. Nach der bekannten Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gilt ferner

$$xyz = \frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2}{3} = \sqrt[3]{(xy)^2 \cdot (yz)^2 \cdot (zx)^2}$$

Wegen $xyz > 0$ folgt daraus $1 \geq \sqrt[3]{xyz}$, also auch $1 \geq xyz$. Damit ist aber $xyz = 1$. Wegen der Ganzzahligkeit ist dann $|x| = |y| = |z| = 1$, und es ergeben sich die folgenden Lösungen:

$$(x_1; y_1; z_1) = (1; 1; 1) \qquad ; \qquad (x_2; y_2; z_2) = (1; -1; -1)$$

$$(x_3; y_3; z_3) = (-1; 1; -1) \qquad ; \qquad (x_4; y_4; z_4) = (-1; -1; 1)$$

(aus $xyz > 0$ folgt nämlich, dass entweder keiner oder genau zwei der drei Werte $x; y; z$ negativ sind).

Aufgabe 15/82
Man beweise: Gilt in einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a und b, der Hypotenuse c und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ, dass $\cos\alpha = \tan\alpha$ ist, so bilden die Maßzahlen der Höhe h_c auf c und der Seiten a, b und c eine geometrische Folge.

Nach Voraussetzung ist $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cos\alpha = \frac{b}{c}$, also $a = b\cos\alpha$, $b = c\cos\alpha$.
Ferner gilt (wegen $\triangle\ ABC \sim\ \triangle\ BCD$), wobei D der Fußpunkt der Höhe h_c auf c ist) $\measuredangle DCB = \measuredangle CAB = \alpha$, also $h_c = a\cos\alpha$. Damit ist $q = \cos\alpha$ der Quotient der Folge

$$\{h_c = aq, a = bq, b = cq, c\}$$

Aufgabe 16/82
In einer Ebene seien zwei (nicht zusammenfallende) Punkte A und B festgelegt. Gegeben sei die Menge aller Dreiecke ABC dieser Ebene (wobei die Eckpunkte im mathematisch positiven Drehsinn bezeichnet seien), für die $\measuredangle BCA = \gamma$ =konstant gilt. Gesucht ist die Menge der Inkreismittelpunkte M.

Ist M der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks, so gilt nach dem Winkelsummensatz

$$\measuredangle BMA + \measuredangle MAB + \measuredangle ABM = 180°$$

Da der Inkreismittelpunkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist, gilt

$$\measuredangle MAB = \frac{1}{2}\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\alpha \qquad ; \qquad \measuredangle ABM = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\beta$$

also

$$\measuredangle BMA + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 180° \qquad \text{oder} \qquad \measuredangle BMA = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Nach dem Winkelsummensatz ist aber $\alpha + \beta = 180° - \gamma$,

$$\measuredangle BMA = 180° - \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{1}{2}\gamma = \text{ konstant}$$

Damit liegt M nach dem Peripheriewinkelsatz auf dem Kreisbogen durch A und B mit dem Peripheriewinkel $\varphi = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, der in derselben (von der Geraden durch A und B erzeugten) Halbebene liegt wie C. Die gesuchte Menge ist also dieser Kreisbogen. Für den Radius r dieses Kreisbogens gilt

$$\frac{AB}{2r} = \frac{c}{2r} = \sin\left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \to r = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\gamma}}$$

Zusatz: Ist Q der Mittelpunkt dieses Kreisbogens, so gilt

$$\measuredangle BQA = 360° - \measuredangle AQB = 360° - 2\measuredangle BMA = 360° - 2(90° + \frac{\gamma}{2}) = 180° - \gamma = \alpha + \beta$$

Das Viereck $AQBC$ ist also ein Sehnenviereck (die Summe gegenüberliegender Winkel beträgt 180°). Daraus folgt, dass Q auf dem gemeinsamen Umkreis der Dreiecke ABC liegt. Aus Symmetriegründen halbiert Q den Kreisbogen BA.

Aufgabe 17/82
Man finde alle zweistelligen natürlichen Zahlen n, die gleich dem Quadrat ihrer Quersumme sind.

Es sei $n = 10a_1 + a_2$ mit $0 \leq a_1; a_2 \leq 9$, $a_1; a_2 \in N$ eine solche Zahl und $q = a_1 + a_2$ ihre Quersumme. Dann ist wegen $a_2 = q - a_1$

$$q^2 = 10a_1 + a_2 = 9a_1 + q \qquad \text{also} \qquad q^2 - q = q(q-1) = 9a_1$$

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist genau dann durch 9 teilbar, wenn einer der beiden Faktoren durch 9 teilbar ist. Da weiter $0 \leq a_1 \leq 9$ gilt, ist

$$q = 9, q - 1 = 8 = a_1, a_2 = q - a_1 = 1 \qquad \text{oder} \qquad q = 1, q - 1 = 0 = a_1, a_2 = q - a_1 = 1$$

$q = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$ scheidet als trivial aus. Die Probe bestätigt, dass $n_1 = 81$ und $n_2 = 01$ tatsächlich Lösungen der Aufgabe sind (wobei man wohl $n_2 = 01$ als nicht "echt" zweistellig ausscheiden wird).

Aufgabe 18/82
Es ist zu beweisen: Gilt für eine natürliche Zahl n die Kongruenz $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, so ist n eine Primzahl.

Widerspruchsbeweis: Die Voraussetzung sagt nichts anderes, als dass n ein Teiler von $(n-1)! + 1$ ist. Angenommen, eine natürliche Zahl n erfülle die Voraussetzung und sei nicht Primzahl.
Dann gibt es sicher eine natürliche Zahl t mit $1 < t < n$, die (echter) Teiler von n und damit auch von $(n-1)! + 1$ ist. Andererseits sind alle natürlichen Zahlen k mit $k < n$, also speziell auch $k = t$, Teiler von $(n-1)!$. Damit kann $k = t$ nicht Teiler von $(n-1)! + 1$ sein.
Die Annahme, n sei keine Primzahl, führt also auf den Widerspruch, dass es eine natürliche Zahl t gibt, die zugleich Teiler und Nichtteiler derselben Zahl $(n-1)! + 1$ ist. Folglich ist die Annahme falsch, n ist also Primzahl.

Aufgabe 19/82
Man löse die Gleichung $25^x - 30^x = 36^{x+0,5}$.

Wegen

$$25^x - 30^x = 36^{x+0,5} = 36^x \sqrt{36} = 6 \cdot 36^x$$

liegt es nahe, zunächst die Gleichung durch $36^x \neq 0$ zu dividieren. Man erhält damit

$$\frac{25^x}{36^x} - \frac{30^x}{36^x} = \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^x - \left(\frac{5}{6}\right)^x = 6$$

und mit der Substitution $\left(\frac{5}{6}\right)^x = t$ ergibt sich die in t quadratische Gleichung $t^2 - t - 6 = 0$ mit den Lösungen $t_{1;2} = 0{,}5 \pm 2{,}5$, von denen wegen $t > 0$ nur $t_1 = 3$ in Frage kommt. Daraus folgt

$$x = \log_z 3 = \frac{\lg 3}{\lg z} = \frac{\lg 3}{\lg 5 - \lg 6} \approx -6{,}03$$

mit $z = \frac{5}{6}$.

Aufgabe 20/82
Es seien x; y; z drei reelle Zahlen, die der Ungleichung $x^2 + xy + xz < 0$ genügen. Man zeige, dass dann die Ungleichung $y^2 > 4xz$ gilt!

Angenommen, es wäre $y^2 \leq 4xz$. Dann gälte $xz \geq 0{,}25y^2$, und es folgt aus der Voraussetzung

$$0 > x^2 + xy + xz \geq x^2 + xy + 0{,}25y^2 = (x + 0{,}5y)^2$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass Quadrate reeller Zahlen stets nichtnegativ sind. Also ist die Annahme falsch; d.h., es gilt $y^2 > 4xz$.

Aufgabe 21/82
Gesucht sind alle (in dekadischer Schreibweise) vierstelligen Zahlen mit der Ziffernfolge $\{a; b; c; d\}$ mit $a; b; c; d \in N$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b; c; d \leq 9$, deren sechsfaches die Ziffernfolge $\{a; a; c; b; d\}$ hat.

Nach der Aufgabenstellung gilt

$$6(1000a + 100b + 10c + d) = 11000a + 100c + 10b + d$$

oder (nach entsprechender Umformung): $5d = 10(500a + 4c - 59b)$.
Daraus folgt sofort, dass d eine gerade Zahl ist: $d = 2e$ mit $e \in N$, $0 \leq e \leq 4$; damit nimmt die Gleichung die Gestalt

$$e = 500a + 4c - 59b \qquad \text{oder} \qquad 59b = 500a + 4c - e$$

an. Wegen $a \geq 1$ muss $59b \geq 496$, also $b > 8$ sein. Mithin ist $b = 9$, $531 = 500a + 4c - e$.
Da $4c - e < 100$ ist, folgt $a = 1$ und daraus

$$31 = 4c - e \qquad ; \qquad c = 7 + \frac{3+e}{4}$$

Damit ergibt sich $e = 1, d = 2, c = 8$. Tatsächlich ist $6 \cdot 1982 = 11892$.

Aufgabe 22/82
Nina und Sascha haben Pilze gesammelt, Nina sagt zu Sascha: "Die eine Hälfte meiner Pilze sind Steinpilze, die andere Rotkappen und Birkenpilze. Mathematisch interessant ist aber, dass das Produkt aus der Anzahl der Steinpilze, der Anzahl der Rotkappen und der Anzahl der Birkenpilze gleich dem Quadrat aus der Summe ist."
Da antwortet Sascha: "Das ist seltsam - dasselbe trifft bei mir zu. Nur ich habe eine Rotkappe mehr als du."
Wie viele Pilze der verschiedenen Sorten hat jedes der beiden Kinder?

Wir bezeichnen mit x; die Anzahl der Steinpilze in Ninas Korb, mit y die der Rotkappen und mit z die der Birkenpilze. Dann gilt nach Ninas Angaben das folgende diophantische Gleichungssystem:

$$x = y + z \qquad ; \qquad xyz = (x + y + z)^2$$

$(x; y; z \in N)$ das durch Einsetzen auf die Gleichung

$$(y + z)yz = [2(y + z)]^2$$

reduziert wird. Wegen $y + z \neq 0$ ist diese der Gleichung $yz = 4y + 4z$ äquivalent. Löst man nach y auf, so ergibt sich wegen $z \neq 4$ (wie man durch Einsetzen nachprüft)

$$y = \frac{4z}{z-4} = 4 + \frac{16}{z-4}$$

Diese Gleichung liefert die folgenden Tripel:

z	y	x	z	y	x
0	0	0 (entfällt)	5	20	25
6	12	18	8	8	16
12	6	18	20	5	25

Da Sascha eine Rotkappe mehr als Nina hat, muss Nina 5 Rotkappen und Sascha 6 haben. Folglich hat Nina 20 Birkenpilze und 25 Steinpilze (insgesamt also 50 Pilze), Sascha hat 12 Birkenpilze und 18 Steinpilze (insgesamt 36).

Aufgabe 23/82
In einer Ebene seien zwei Punkte A und B gegeben. Unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels konstruiere man zwei Punkte C und D derart, dass $ABCD$ ein Quadrat mit der Seite $AB = a$ ist.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelungen ist, die Strecke $AC = a\sqrt{2}$ zu konstruieren. Dann nämlich findet man den Punkt C als Schnittpunkt der Kreise um A mit $a\sqrt{2}$ um B mit $a = AB$ als Radien sowie den Punkt D als den nicht mit B zusammenfallenden Schnittpunkt der Kreise um A und C mit $a = AB$ als Radius. Bis auf den Umlaufsinn ist damit die Lösung eindeutig.
Um $AC = a\sqrt{2}$ zu finden, führen wir eine Hilfskonstruktion durch.

Ausgehend von B konstruieren wir Hilfspunkte B_2, B_3, B_4 und B_5 derart, dass $BB_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = AB = a$ ist und B_2, B_3, B_4, B_5 in dieser Reihenfolge auf der durch A und B verlaufenden Geraden liegen. Dies ist möglich, indem man gleichseitige Dreiecke ABA_1, A_1BA_2, A_2BB_2, $A_2B_2A_3$, $A_3B_2B_3$, $A_3B_3A_4$, $A_4B_3B_4$, $A_4B_4A_5$, $A_4B_4B_5$ konstruiert. Danach schlägt man
1. den Kreis K_1 um A mit $r_1 = AB_5 = 5a$
2. den Kreis K_2 um B_3 mit $r_2 = AB_4 = 4a$
3. den Kreis K_3 um B_4 mit $r_3 = AB_3 = 3a$.
Einer der Schnittpunkte von K_1 und K_2 sei P, der Schnittpunkt von K_1 und K_3, der in derselben Halbebene wie P liegt, sei Q.

Behauptung: $PQ = a\sqrt{2}$
Beweis: Wir denken uns A als Ursprung eines rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystems, dessen Abszissenachse mit der Geraden durch A und B zusammenfällt und das so orientiert ist, dass P und Q positive Koordinaten haben.
Dann hat P die Koordinaten $x_P = 3a$, $y_P = 4a$ (wegen $AP = 5a$ ist $\triangle\ AB_3P$ bei B_3 rechtwinklig), Q hat die Koordinaten $x_Q = 4a$, $y_Q = 3a$ (aus dem gleichen Grund ist $\triangle\ AB_4Q$ bei B_4 rechtwinklig). Nach der Formel für den Abstand zweier Punkte ist dann

$$PQ = \sqrt{(4a-3a)^2 + (3a-4a)^2} = \sqrt{a^2 + (-a)^2} = a\sqrt{2}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 24/82

Es sei $k+1$ eine Primzahl mit $k > 2$. Man beweise, dass dann $S = \sum\limits_{i=0}^{4k-1} 19^i$ ohne Rest durch $8(k+1)$ teilbar ist!

Anmerkung: Die Einschränkung $k+1 \neq 19$ wurde in der ursprünglichen Aufgabenstellung versehentlich weggelassen.

Es ist

$$18S = (19-1)S = 19\sum_{i=0}^{4k-1} 19^i - \sum_{i=0}^{4k-1} 19^i = \sum_{i=0}^{4k-1} 19^{i+1} - \sum_{i=0}^{4k-1} 19^i = \sum_{i=0}^{4k} 19^i - \sum_{i=0}^{4k-1} 19^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{4k} 19^i - \sum_{i=1}^{4k-1} 19^i - 19^0 = 19^{4k} - 1 = (19^{2k}-1)(19^{2k}+1) = (19^k+1)(19^k-1)(19^{2k}+1)$$

also

$$S = \frac{(19^k+1)(19^k-1)(19^{2k}+1)}{2\cdot 3^2}$$

Da 19 ungerade ist, sind auch 19^k und 19^{2k} ungerade, folglich sind 19^k-1, 19^k+1 und $19^{2k}+1$ gerade; da 19^k-1 und 19^k+1 zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind, ist sogar genau eine von beiden durch 4 teilbar.
Daraus folgt, dass der Zähler des Bruches ohne Rest durch 16 und damit S ohne Rest durch 8 teilbar ist. Ferner lässt 19 beim Teilen durch 9 den Rest 1, also auch 19^k, und damit ist 19^k-1 restlos durch $9 = 3\cdot 2$ teilbar. Da $k+1$ Primzahl ist, folgt schließlich aus dem kleinen Satz von Fermat, für $k+1 \neq 19$, dass

$$19^k \equiv 1 \text{ (mod k+1)} \qquad ; \qquad 19^k - 1 \equiv 0 \text{ (mod k+1)}$$

ist. Wegen $k > 2, k+1 > 3$ und $k+1$ Primzahl, ist der größte gemeinsame Teiler von $k+1$ und 9 gleich 1; folglich ist S auch durch $k+1$ ohne Rest teilbar. Da auch 8 und k + 1 den größten gemeinsamen Teiler 1 haben, ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen:

$$S = 8(k+1)\cdot g = \sum_{i=0}^{4k+1} 19^i$$

wobei g eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 25/82
Man löse die Gleichung $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt[2]{12-x}=6$, wobei x eine reelle Zahl sei!

Wir setzen, um die dritte Wurzel zu eliminieren; $\sqrt[3]{24+x}=a$, also $24+x=a^3, x=a^3-24, 12-x=36-a^3$. Dann nimmt die gegebene Gleichung die Gestalt

$$a+\sqrt{36-a^3}=6 \qquad \text{oder } \sqrt{36-a^3}=6-a$$

an. Durch Quadrieren folgt daraus

$$36-a^3=36-12a+a^2 \qquad ; \qquad a(a^2+a-12)=0$$

mit den Lösungen $a_1=0$, $a_{2,3}=-0{,}5\pm 3{,}5$. Daraus ergibt sich $x_1=-24, x_2=3, x_3=-88$. Von diesen Werten erfüllen jedoch nur $x_1=-24$ und $x_2=3$ die Probe. Demnach ist $L=\{x \mid x=-24; x=3\}$.

Aufgabe 26/82
Man bestimme alle Glieder der Folge

$$\{a_k\}=\left\{\sum_{i=0}^{k} 9\cdot 10^i\right\}=\{9;99;999;...\}$$

die man als Summe aus drei Quadraten natürlicher Zahlen x; y; z darstellen kann!

Außer für a_0 und a_1 gilt für alle Glieder der Folge

$$a_k\equiv(1000-1)\equiv -1\equiv 7 \pmod 8$$

Gilt nun für irgend eine natürliche Zahl n

$$n\equiv 0;1;2;3;4;5;6;7 \pmod 8$$

so gilt für n^2

$$n^2\equiv 0;1;4;1;0;1;4;1 \pmod 8$$

Damit gilt für die Stimme aus den Quadraten dreier natürlicher Zahlen sicher eine der folgenden Kongruenzen mod 8:

$$\begin{array}{lllll} 0+0+0\equiv 0 & 0+0+1\equiv 1 & 0+0+4\equiv 4 & 0+1+1\equiv 2 & 0+1+4\equiv 5 \\ 0+4+4\equiv 0 & 1+1+1\equiv 3 & 1+1+4\equiv 6 & 1+4+4\equiv 1 & 4+4+4\equiv 4 \end{array}$$

Keinesfalls tritt einer Summe auf, die kongruent 7 (mod 8) ist. Damit erfüllen höchstens die Glieder $a_0=9$ und $a_1=99$ die Bedingungen der Aufgabe. Tatsächlich ist

$$9=0^2+0^2+3^2=1^2+2^2+2^2 \qquad ; \qquad 99=1^2+7^2+7^2=5^2+5^2+7^2$$

Aufgabe 27/82
Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ (übliche Bezeichnungsweise). Gesucht ist der Punkt P auf der Seite c, für den die Summe der Abstände von den beiden anderen Seiten ein Minimum ist.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $P(x)$ auf c, der von A den Abstand x $(0\leq x\leq c)$ und von B den Abstand $c-x$ hat. Ist d_a der Abstand dieses Punktes von der Seite a, d_b der Abstand von der Seite b, so gilt

$$\sin\alpha=\frac{d_b}{x} \qquad ; \qquad \sin\beta=\frac{d_a}{c-x}$$

also

$$d_a+d_b=(c-x)\sin\beta+x\sin\alpha=c\sin\beta+x(\sin\alpha-\sin\beta)$$

Die Summe d_a+d_b hängt also linear von x ab. Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

1. $\alpha > \beta$: Dann ist auch $\sin\alpha > \sin\beta$ (wegen $0° < \alpha;\beta < 90°$), $\sin\alpha - \sin\beta > 0$, und das Minimum wird für $x = 0$ angenommen.
2. $\alpha = \beta$: Dann ist die Summe konstant wegen $\sin\alpha = \sin\beta$, $\sin\alpha - \sin\beta = 0$ und es gibt kein Minimum.
3. $\alpha < \beta$: Dann ist $\sin\alpha < \sin\beta$, $\sin\alpha - \sin\beta < 0$ und das Minimum wird für maximales x angenommen: $x = c$

Ergebnis: Der Punkt P fällt auf A, wenn $\alpha > \beta$, auf B, wenn $\alpha < \beta$, er existiert nicht, wenn $\alpha = \beta$ (im letzten Fall könnte man auch sagen, jeder Punkt von $AB = c$ erfülle die Bedingung).

Aufgabe 28/82
Man ermittle alle Primzahlpaare $(p;q)$, für die $\binom{p}{q}$ ebenfalls Primzahl ist!

Wegen $\binom{p}{q} = 1$ für $p = q$, $\binom{p}{q} = 0$ für $p < q$ muss $p > q$ sein. Für $p > q$ enthält $\binom{p}{q}$ im Zähler den Primfaktor p, im Nenner dagegen nicht.
Folglich ist $\binom{p}{q}$ restlos durch p teilbar. Die Bedingung der Aufgabe ist also genau dann erfüllt, wenn $\binom{p}{q} = p$ ist. Nun ist

$$\binom{p}{q} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot q} = p$$

genau dann, wenn

$$(p-1)(p-2)...(p-q+1) = q!$$

ist. Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt, dass die von 1 verschiedenen Faktoren auf der rechten und der linken Seite der Gleichung paarweise einander gleich sind:

$$p-q+1 = 2, ..., p-1 = q$$

Also ist $p = q+1$. Diese Gleichung ist (in Primzahlen $p;q$) nur für $q = 2, p = 3$ lösbar. Tatsächlich ist

$$\binom{p}{q} = \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$$

Weitere Lösungen kann es auf Grund des Lösungswegs nicht geben.

Aufgabe 29/82
Man bestimme alle Möglichkeiten, die Zahl 1000 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darzustellen.

Nach der Aufgabenstellung soll gelten

$$\sum_{i=0}^{n}(a+i) = 1000 = \sum_{i=0}^{n} a + \sum_{i=0}^{n} i = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} = 0{,}5(n+1)(2a+n)$$

Sicher ist genau einer der beiden Faktoren gerade; denn ist n gerade, so ist $2a+n$ gerade und $n+1$ ungerade, und ist n ungerade, so ist $2a+n$ ungerade und $n+1$ gerade. Daraus folgt, dass der gerade Faktor sogar durch 16 teilbar ist (da 2000 durch 16 teilbar ist).
Aus $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ ergeben sich damit die Zerlegungen

$$2000 = 16\cdot 125 \quad ; \quad 2000 = 80\cdot 25 \quad ; \quad 2000 = 400\cdot 5$$

Da $a \geq 1$, ist $2a+n > n+1$. Demnach kommen für n die Werte $n_1 = 4$, $n_2 = 15$ und $n_3 = 24$ in Frage. Sie liefern $a_1 = 198$, $a_2 = 55$ und $a_3 = 28$. Tatsächlich ist

$$\sum_{i=198}^{202} i = \sum_{i=55}^{70} i = \sum_{i=28}^{55} i = 1000$$

und auf Grund der obigen Argumentation kann es keine weiteren Möglichkeiten geben.

Aufgabe 30/82
Man berechne das Produkt

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \left(2^{2i} + 1\right)$$

Probeweises Einsetzen von $n = 0; 1; 2; 3$ liefert

$$p_0 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1 = 2^{2^1} - 1$$
$$p_1 = 15 = 16 - 1 = 2^4 - 1 = 2^{2^2} - 1$$
$$p_2 = 255 = 256 - 1 = 2^8 - 1 = 2^{2^3} - 1$$
$$p_3 = 65535 = 65536 - 1 = 2^16 - 1 = 2^{2^4} - 1$$

Dies führt zu der Vermutung, dass

$$p_n = \prod_{i=0}^{n} (2^{2^i} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1$$

sei. Die Vermutung ist bestätigt (als richtig bewiesen), wenn gezeigt ist, dass aus der Richtigkeit für $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt (Prinzip der vollständigen Induktion). Setzt man voraus, dass

$$p_k = \prod_{i=0}^{k} (2^{2^i} + 1) = 2^{2^{k+1}} - 1$$

ist, so folgt tatsächlich

$$p_{k+1} = \prod_{i=0}^{k+1} (2^{2^i} + 1) = \prod_{i=0}^{k} (2^{2^i} + 1)(2^{2^{k+1}} + 1) = (2^{2^{k+1}} - 1)(2^{2^{k+1}} + 1) = (2^{2^{k+2}} - 1)$$

Da sich der Induktionsanfang aus dem probeweisen Einsetzen ergab, ist der Beweis erbracht.

Aufgabe 31/82
In einem spitzwinkligen Dreieck betrage eine Seite 3 LE, eine andere Seite 9 LE (wobei mit LE die Längeneinheit bezeichnet ist). Von der dritten Seite sei bekannt, dass sie eine ungerade ganze Zahl von Längeneinheiten enthält. Man ermittle diese Anzahl.

Es sei x die gesuchte (ungerade) Anzahl der Längeneinheiten. Aus dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie folgt wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks sofort

$$x^2 < 3^2 + 9^2 \to x^2 < 90 \to x \leq 9$$
$$9^2 < 3^2 + x^2 \to 72 < x^2 \to x \geq 9$$

Also ist $x = 9$, das Dreieck ist gleichschenklig.

Aufgabe 32/82
Gesucht sind alle Primzahlen p, für die $z = 2^p + p^2$ ebenfalls Primzahl ist.

Für $p = 2$ ist $z > 2$ offenbar gerade, also keine Primzahl.
Für $p = 3$ gilt $z = 2^3 + 3^2 = 17$. Damit ist eine der gesuchten Zahlen gefunden.
Für $p > 3$ gilt stets $p \equiv \pm 1 \pmod 3$, also $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Weiter gilt für $p > 3$, dass p ungerade, also in der Form $p = 2k + 1$, $k \in N, k > 1$ darstellbar ist. Dann gilt

$$2^p = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \pmod 3$$

wegen $4 \equiv 1 \pmod 3$, $4^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$. Damit ist für $p > 3$

$$z \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

also keine Primzahl. Folglich ist $p = 3$ die einzige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 33/82
Man beweise: Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ gibt es wenigstens eine natürliche Zahl m in der Gestalt $m = 111...111000...000$, die restlos durch n teilbar ist (wobei die Anzahl der mit 1 belegten Stellen nicht gleich der Anzahl der mit 0 belegten Stellen sein muss). Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial.

Wir betrachten die $n + 1$ natürlichen Zahlen $k_1 = 1$; $k_2 = 11$; $k_3 = 111$; ...; $k_{n+1} = 111...111$ (wobei die letzte $n + 1$ Stellen hat). Da beim Teilen durch n genau n voneinander verschiedene Reste möglich sind, folgt, dass unter ihnen mindestens zwei beim Teilen durch n den gleichen Rest lassen. Es seien dies die beiden Zahlen k_i und k_j, wobei (o.B.d.A.) $i > j$, also auch $k_i > k_j$ sei. Dann ist die Differenz

$$k_i - k_j = \underbrace{111...111}_{\text{i Stellen}} - \underbrace{111...111}_{\text{j Stellen}} = \underbrace{111...111000...000}_{\text{i-j Einsen}\quad\text{j Nullen}} = m$$

offensichtlich von der geforderten Gestalt, und sie ist restlos durch n teilbar; denn aus $k_i \equiv k_j \pmod n$ folgt sofort

$$k_i - k_j \equiv k_j - k_j = 0 \text{ (mod n)}$$

Aufgabe 34/82
Herr X teilt über das Alter seiner Verwandten folgendes mit:

1. Meine Mutter ist doppelt so alt wie ich.
2. Mein Vater ist um die Quersumme meines Alters älter als meine Mutter.
3. Das Alter meiner jüngsten Tante erhält man als Summe aus dem Alter meiner Mutter und meinem Einer-Zehner-vertauschten Alter.
4. Meine älteste Tante ist um die Quersumme meines Alters älter als die jüngste Tante.
5. Mein Onkel ist ein Jahr älter als meine älteste Tante und feiert einen "runden" Geburtstag. 6. Alle meine Verwandten sind jünger als 100 Jahre.

Wie alt sind die sechs Personen?

Herr X sei $10a + b$ Jahre alt ($a; b \in N$, $0 \leq a$, $b \leq 9$). Dann ist das Alter
1. seiner Mutter $20a + b$
2. seines Vaters $20a + 2b + a + b = 21a + 3b$
3. seiner jüngsten Tante $20a + 2b + 10b + a = 21a + 12b$
4. seiner ältesten Tante $21a + 12b + a + b = 22a + 13b$
5. seines Onkels $22a + 13 + b + 1 = 10k$ mit $k \in N$, $k \geq 2$ (da sicher a und b nicht beide gleich 0 sind), $k < 10$.
Aus 5. folgt

$$22a + 13b = 10k - 1 = 10(k - 1) + 9$$

Da $22a$ stets eine gerade Zahl ist, muss b eine ungerade Zahl sein. Aus der sechsten Angabe folgt, dass $22a < 100$, also $a \leq 4$ ist.
Aus der letzten Gleichung ergibt sich außerdem, dass $2a + 3b = 9$ oder $2a + 3b = 19$ oder $2a + 3b = 29$ ist. Damit sind zunächst die folgenden Kombinationen möglich: 1. $a = 0, b = 3$: (entfällt aus biologischem Grund),
2. $a = 1, b = 9$: (entfällt wegen $k > 10$)
3. $a = 2, b = 5$: (entfällt wegen $k = 10$)
4. $a = 3, b = 1$: (ist Lösung!)
5. $a = 4, b = 7$; (entfällt wegen $k > 10$).
Herr X ist also 31 Jahre alt, seine Mutter 62, sein Vater 66, seine jüngste Tante 75, die älteste Tante 79, und der Onkel feiert den 80.Geburtstag.

Aufgabe 35/82
In einer Ebene seien ein Einheitskreis und 1983 Punkte A_i ($i = 1; 2; 3; ...; 1983$) beliebig vorgegeben. Es ist zu beweisen, dass es auf der Peripherie dieses Einheitskreises beliebig viele Punkte P_k gibt, für die die Summe der Abstände von den Punkten A_i mindestens gleich 1983 ist.

Es seien P_1 und P_2 zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte auf der Peripherie des gegebenen Einheitskreises. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann für jedes i

$$P_1P_2 = 2 \leq P_1A_i + P_2A_i$$

(wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn A_i auf P_1P_2 liegt; was nach dem Aufgabentext nicht ausgeschlossen ist). Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{1983} P_1P_2 = \sum_{i=1}^{1983} 2 = 2 \cdot 1983 \leq \sum_{i=1}^{1983}(P_1A_i + P_2A_i) = \sum_{i=1}^{1983} P_1A_i + \sum_{i=1}^{1983} P_2A_i$$

Ist der erste Summand des letzten Terms mindestens gleich 1983, so ist P_1 ein Punkt, für den die Behauptung gilt. Ist er dagegen kleiner als 1983, so ist der zweite Summand größer als 1983, und P_2 ist ein solcher Punkt. In jedem Fall erfüllt also einer der beiden Punkte P_1 und P_2 die Behauptung; da das Punktepaar $(P_1; P_2)$ beliebig gewählt werden kann, existieren beliebig viele Punkte P_k deren Abstandssumme von den A_i mindestens gleich 1983 ist.

Aufgabe 36/82
Es ist Silvester, wenige Minuten vor Mitternacht. Auf einer Uhr kann man die folgenden Feststellungen treffen:

1. Der Stundenzeiger und die Verbindungslinie der Zeigerspitzen sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Minutenzeiger ist.
2. Die Seitenlängen dieses Dreiecks (in cm gemessen) sind ganzzahlig und paarweise zueinander teilerfremd.
3. Für den Umfang U und den Flächeninhalt A dieses Dreiecks gilt $A : U = A : U = 1$ cm.
4. Die kleinste Seite des Dreiecks ist die Verbindungslinie der Zeigerspitzen.

Wie lange dauert noch das alte Jahr?

Es sei a die Länge des Stundenzeigers, b der Abstand der Zeigerspitzen und c die Länge des Minutenzeigers in cm. Dann gilt
1. $a^2 + b^2 = c^2$, also $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $0{,}5ab : (a + b + c) = 1$, also $ab = 2(a + b + c)$.
Durch Einsetzen folgt

$$ab = 2(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

Löst man diese Gleichung nach a auf, so erhält man (wegen $b \neq 0$): $a = 4 + \frac{8}{b-4}$.
Wegen $a \in N$ ist $5 \leq b \leq 12$ und es ergeben sich Lösungen nur für

$$\begin{array}{cccc} b_1 = 5 & b_2 = 6 & b_3 = 8 & b_4 = 12 \\ a_1 = 12 & a_2 = 8 & a_3 = 6 & a_4 = 6 \\ c_1 = 13 & c_2 = 10 & c_3 = 10 & c_4 = 10 \end{array}$$

Die Forderung nach (paarweiser) Teilerfremdheit schließt die Lösungen $(a_2; b_2; c_2)$ und $(a_3; b_3; c_3)$ aus. Ferner entfällt $(a_4; b_4; c_4)$ wegen Bedingung 4. Damit bleibt nur die Lösung $a_1 = 12$ cm; $b_2 = 5$ cm; $c_2 = 13$ cm übrig.
Bezeichnet man nun den Winkel, den der Minutenzeiger bis 24.00 Uhr zu überstreichen hat, mit φ_1 und den entsprechenden Winkel des Stundenzeigers mit φ_2, so gilt

$$\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{5}{12}; \varphi_1 = \arctan\frac{5}{12} + \varphi_2 \quad (1) \qquad \varphi_1 = 12\varphi_2; \varphi_2 = \frac{1}{12}\varphi_1 \quad (2)$$

also

$$\varphi_1 = \arctan\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\varphi_1 \qquad \text{wird} \qquad \varphi_1 = \frac{12}{11}\arctan\frac{5}{12}$$

Da für die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Minutenzeigers gilt

$$\omega_1 = 2\pi h^{-1} = \frac{2\pi}{3600}s^{-1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

folgt für die Zeit

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_1} = \frac{\varphi_1}{\omega_1} \approx 246{,}8 \text{ s } = 4 \text{ min } 6{,}8 \text{ s}$$

2.23 Aufgaben und Lösungen 1983

Aufgabe 1/83
Auf einer Würfelecke sitzt eine mathematisch geschulte Raupe. Sie will alle Wege längs der Kanten ausprobieren, die zur diametral gegenüberliegenden Ecke führen, ohne dabei eine Ecke zweimal anzulaufen.
Um eine Kante zu durchkriechen, benötigt sie einen Tag; nachts ruht sie. Am Ziel angekommen, rutscht sie in der folgenden Nacht auf der Würfeldiagonalen, zum Ausgangspunkt zurück, um am folgenden Morgen einen neuen Weg zu beginnen.
Sie startet am Morgen des 1. 1. 1983. Am Morgen welchen Tages ist sie wieder am Ausgangspunkt, nachdem sie alle Wege durchkroch?

Der Würfel habe in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem die Eckpunkte $A(0;0{,}0)$, $B(1;0{,}0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0{,}1)$, $G(1;1;1)$ und $H(0;1;1)$. Aus Symmetriegründen genügt es, zunächst die Anzahl der Wege zu ermitteln, die mit der Kante AB beginnen, da sich für die mit AC oder AE beginnenden Wege die gleiche Anzahl ergibt.
Von B aus ist die Fortsetzung auf zwei "symmetrischen" Wegen möglich: BC oder BF. Wir betrachten BC. Es gibt die folgenden Wege:

$$\begin{aligned} AB - BC - CG &\qquad \text{3 Kanten} \\ AB - BC - CD - DH - HG &\qquad \text{5 Kanten} \\ AB - BC - CD - DH - HE - EF - FG &\qquad \text{7 Kanten} \end{aligned}$$

Es sind also 6 Wege mit je 3 Kanten, 6 Wege mit je 5 Kanten und 6 Wege mit je 7 Kanten möglich, insgesamt müsste die Raupe demnach $6(3+5+7) = 90$ Kanten durchkriechen. Dazu benötigt sie 90 Tage; am Morgen des 91.Tages, also am 1.April 1983, ist sie "nach getaner Arbeit" wieder am Ausgangspunkt angekommen.

Aufgabe 2/83
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, für die 3^n in dezimaler Schreibweise genau $0{,}5n$ Stellen hat?

Nach der Aufgabe soll gelten

$$3^n = m \cdot 10^{0{,}5n-1}$$

wobei m die rationale Zahl mit $0{,}5n - 1$ Stellen nach dem Komma, $1 \leq m < 10$ ist. Daraus folgt durch Logarithmieren

$$\begin{aligned} n \lg 3 &= 0{,}5n - 1 + \lg m \\ 2n \lg 3 &\geq n - 2 \\ 2 \geq n - 2n \lg 3 &= n(1 - 2\lg 3) \end{aligned}$$

Da $1 - 2\lg 3 = 0{,}045... > 0$ ist, ergibt sich daraus

$$n \leq \frac{2}{1 - 2\lg 3} = 43{,}...$$

Da $0{,}5n$ ganzzahlig sein muss, erfüllen alle geraden natürlichen Zahlen $n = 2i$ mit $i \in N, 1 \leq i \leq 21$ die Forderungen der Aufgabe. Eine Überprüfung mit einem Taschenrechner entsprechender Kapazität bestätigt die Richtigkeit:

$$3^{42} = 1{,}... \cdot 10^{20} \qquad ; \qquad 3^{44} = 9{,}... \cdot 10^{20}$$

d.h., bis $i = 21, n = 42$ gilt die Bedingung, ab $i = 22, n = 44$ gilt sie nicht mehr.

Aufgabe 3/83
Für welche natürlichen Zahlen n gilt, dass der Flächeninhalt A_{2n} des regulären $2n$-Ecks gleich dem doppelten Flächeninhalt A_n des regulären n-Ecks mit gleichem Umkreisradius ist?.

Es sei r der Umkreisradius. Dann gilt für den Flächeninhalt A_k des regulären k-Ecks

$$A_k = \frac{k}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{k}$$

und für das Verhältnis $\frac{A_{2n}}{A_n} = 2$

$$\frac{A_{2n}}{A_n} = 2 = \frac{\frac{2n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{2n}}{\frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}} = 2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

also $\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$ gilt $n \in N$. Damit ist $n = 3$ einzige Lösung. Tatsächlich ist

$$A_3 = \frac{3}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{3} \qquad ; \qquad A_6 = \frac{6}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{6} = 2A_3$$

wegen $\sin\frac{2\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$.

Aufgabe 4/83
Man zeige:

1. Es existiert ein ebener Schnitt durch einen Würfel so, dass die Schnittfigur ein Fünfeck ist.
2. Kein als Schnittfigur einer Ebene mit einem Würfel entstandenes Fünfeck ist regulär.

Um 1. zu zeigen, genügt es, ein solches Fünfeck anzugeben. Dazu betrachten wir in einem dreidimensionalen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem den Einheitswürfel mit den Eckpunkten (0; 0,0), (1; 0,0), (1; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 0,1), (1; 1; 1) und (0; 1; 1) sowie die Ebene $2x + 2y - 3z = 0$.
Man prüft (durch Einsetzen) leicht nach, dass diese Ebene den Würfel in den 5 Kanten- bzw. Eckpunkten $(0;0;0)$, $(1;0;\frac{2}{3})$, $(0;1;\frac{2}{3})$, $(1;\frac{1}{2};1)$, $(\frac{1}{2};1;1)$ schneidet. Da diese 5 Punkte in einer Ebene, aber nicht 3 von ihnen auf der gleichen Geraden liegen, bilden sie ein ebenes Fünfeck.
Um 2. zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe ein reguläres Fünfeck als ebene Schnittfigur. Die fünf Seiten dieses Fünfecks müssen dann genau fünf verschiedenen Flächen des Würfels angehören. Unter diesen 5 Flächen sich sicher zwei Paar zueinander paralleler Flächen. Werden zwei zueinander parallele Flächen von einer dritten Fläche geschnitten, so sind die Schnittgeraden ebenfalls zueinander parallel. Daraus folgt, dass das Schnittfünfeck zwei Paare zueinander paralleler Seiten hat und somit nicht reguläre sein kann, im Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 5/83
Es sei $n = \sum_{i=0}^{5} a_i \cdot 10^i$ eine 6stellige natürliche Zahl, wobei $0 \leq a_i \leq 9$, $a_i \in N$ sei, und $Q(n) = \sum_{i=0}^{5} a_i$ ihre Quersumme, und es gelte: 1. $a_i > a_k$ für $i > k$; 2. $10^{98} < n^{Q(n)} < 10^{99}$.
Welche Zahlen n erfüllen diese Bedingungen?

Wegen der strengen Monotonie der Logarithmusfunktion im Intervall $(0; +\infty)$ folgt aus der 2. Bedingung $98 < Q(n) \ln n < 99$ und wegen $Q(n) > 0$

$$\frac{98}{Q(n)} < \lg n < \frac{99}{Q(n)} \quad (1)$$

Wegen der 1. Bedingung gilt für n: $543210 < n < 987644$; $5{,}7 < \ln n < 6{,}0$. Aus (1) und und (2) folgen

$$\frac{98}{Q(n)} < 6{,}0 \qquad \text{und} \qquad 5{,}7 < \frac{99}{Q(n)}$$

also $16{,}3 < Q(n)$ und $Q(n) < 17{,}4$. Wegen $Q(n) \in N$ ist demnach $Q(n) = 17$. Aus (1) folgt dann

$$5{,}75 < \frac{98}{17} < \lg n < \frac{99}{17} < 5{,}83$$

und damit $575439 < n < 676083$. In diesem Intervall gibt es sechs Zahlen, die Bedingung 1 erfüllen: 654321; 654320; 654310; 654210; 653210; 643210.
Von ihnen hat aber nur $n = 653210$ die geforderte Quersumme 17.

Aufgabe 6/83
In jedem Rechteck schneiden die Winkelhalbierenden einander in vier Punkten, die ein Quadrat aufspannen (ist das Rechteck ein Quadrat, so fallen diese vier Punkte zusammen).
Der Flächeninhalt A_Q dieses Quadrates ist als Funktion des Seitenverhältnisses $x = a : b$ darzustellen (wobei $a > b$, b konstant sei). Für welches Seitenverhältnis ist die Quadratfläche A_Q gleich der Rechteckfläche A_R?

Es sei $ABCD$ das Rechteck, und die Seiten seien $AB = CD = a$, $BC = DA = b$. Ferner sei A' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch A und B; entsprechend seien B', C' und D' die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch B und C bzw. C und D bzw. D und A. Dann gilt

$$AA' = BA' = CC' = DC' = \frac{a}{2}\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad AD' = DD' = BB' = CB' = \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

also

$$A'B' = AA' - CB' = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(a-b)$$

Setzt man $a = bx$ mit $x > 1$, so gilt für den Flächeninhalt A_Q des Quadrates

$$A_Q = \frac{1}{2}b^2(x-1)^2 = f(x)$$

Für den Flächeninhalt A_R des Rechtecks gilt $A_R = ab = b^2x$. Durch Gleichsetzen erhält man (u.a. wegen $b \neq 0$)

$$b^2x = \frac{1}{2}b^2(x-1)^2 \to 0 = x^2 - 4x + 1 \to x_{1;2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Wegen $x > 1$ entfällt x_2. Die Gleichheit tritt also nur für $x = a : b = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$ ein.

Aufgabe 7/83
In einem rechtwinkligen Dreieck seien die Seitenlängen ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit. Außerdem gelte, dass der Umfang zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt ist. Man ermittle alle derartigen Dreiecke!

Werden die Katheten der gesuchten Dreiecke mit a und b, die Hypotenuse mit c bezeichnet, so gilt nach der Aufgabenstellung
1. $a; b; c \in N$
2. $a^2 + b^2 = c^2$, also $c = \sqrt{a2 + b2}$
3. $a + b + c = 0{,}5ab$ Eliminiert man aus den Gleichungen die Hypotenuse c und löst man die entstehende diophantische Gleichung nach a auf, so erhält man

$$a = 4 + \frac{8}{b-4}$$

Wegen $a; b \in N$ sind nur die Lösungen $b_1 = 12$, $a_1 = 5$, $b_2 = 8$, $a_2 = 6$, $b_3 = 6$, $a_3 = 8$, $b_4 = 5$, $a_4 = 12$ möglich. Wegen der Symmetrie der Gleichungen in a und b entfallen davon die letzten beiden. Es gibt also genau 2 Dreiecke der gesuchten Art:
1. $a_1 = 5; b_1 = 12, c_1 = 13$ mit $a_1 + b_1 + c_1 = 30 = 0{,}5a_1b_1$
2. $a_2 = 6; b_2 = 8, c_2 = 10$ mit $a_2 + b_2 + c_2 = 24 = 0{,}5a_2b_2$

Aufgabe 8/83
Wie viele restlos durch 4 teilbare natürliche Zahlen kann man aus den 9 Ziffern $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ bilden, wenn in jeder Zahl jede dieser Ziffern genau einmal vorkommen soll (dekadische Schreibweise vorausgesetzt)?

Eine natürliche Zahl n ist (bekanntlich) genau dann restlos durch 4 teilbar, wenn dies für die Zahl gilt, die aus den letzten beiden Stellen besteht. Aus den gegebenen Ziffern kann man 16 zweistellige Zahlen bilden, die durch 4 teilbar sind:

$$12; 16; 24; 28; 32; 36; 48; 52; 56; 64; 68; 72; 76; 84 : 92; 96$$

Vor jede dieser 16 Zahlen kann man die restlichen 7 Ziffern auf 7! verschiedene Weisen anordnen. Folglich gilt für die Anzahl k der möglichen Zahlen $k = 7! \cdot 16 = 8! \cdot 2 = 80640$.

Aufgabe 9/83 Man ermittle Maximum und Minimum der Funktionen

$$y = x_1 x_2 \pm \sqrt{(1-x_1)^2(1-x_2)^2}$$

für $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, ohne Hilfsmittel der Differentialrechnung zu verwenden!

Wegen $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$ sind die Substitutionen $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \sin\beta$ möglich. Es ergibt sich damit

$$y = \sin\alpha \sin\beta \pm \sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)} = \sin\alpha\sin\beta \pm \cos\alpha\cos\beta = \pm\cos\alpha \mp \beta$$

Aus dem Wertevorrat der cos-Funktion folgt $-1 \leq yleq 1$. Bei

$$y = x_1 x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}$$

stellt sich das Maximum für $x_1 = x_2$ ein, das Minimum für $x_1 = -x_2 = \pm 1$. Gilt das Minuszeichen, so ergibt sich das Maximum bei $x_1 = x_2 = -1$, das Minimum bei $x_1 = -x_2$.

Aufgabe 10/83
Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf, dessen Mantellinien um 60° gegen die Grundfläche geneigt seien und für dessen Grund- und Deckfläche die Beziehung $A_G = 4A_D$ gilt. Zwischen einem Randpunkt P der Grundfläche und einem Randpunkt Q der Deckfläche sei ein Gummifaden straff gespannt.
Wie lang kann der Gummifaden höchstens sein, wenn er die Mantelfläche nirgends verlassen soll?

Da der Gummifaden straff gespannt sein soll, wird er auf dem Mantel die kürzeste Verbindung markieren. Da der Kegelstumpfmantel längentreu in die Ebene abwickelbar ist, ist diese kürzeste Verbindung in der Abwicklung die Strecke PO. Die Abwicklung des Kegelstumpfmantels ist ein Kreisringausschnitt. Sind r_G und r_D die Radien von Grund- bzw. Deckfläche, so gilt wegen

$$A_G = r_G^2\pi = 4A_D = 4r_D^2\pi \to r_G = 2r_D$$

Bezeichnet man weiter mit s_G die Mantellinie des Kegelstumpfes und mit s_D die des Ergänzungskegels, so gilt

$$\frac{r_G}{s_G + s_D} = \frac{r_D}{s_D} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

also $s_D = 2r_D = r_G = s_G$. Für den Zentriwinkel α der Abwicklung gilt

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{r_G}{s_G + s_D} = \frac{1}{2}$$

also $\alpha = 180°$. Die Abwicklung des Kegelstumpfmantels besteht demnach aus zwei konzentrischen Halbkreisen mit den Radien $s_G = r_G$ und $2s_G = 2r_G$. Verbindungsstrecke zwischen äußeren und innerem Halbkreis, die ganz im Halbkreisring verläuft, ist die Tangente von einem beliebigen Punkt P des äußeren Halbkreises an den inneren (der Punkt P ist so zu wählen, dass diese Tangente existiert). Sie hat (nach dem Lehrsatz des Pythagoras) die Länge

$$l = \sqrt{(2s_G)^2 - s_G^2} = s_G\sqrt{3} = 2r_G\sqrt{3}$$

Aufgabe 11/83
Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n, bei denen die Summe s aus den echten Teilern gleich 39 ist.

Zunächst grenzen wir die Zahl der verschiedenen Primfaktoren von n nach oben ab. Angenommen, n enthielte drei verschiedene Primfaktoren: $n = p_1^k p_2^l p_3^m$. Bereits die kleinste derartige Zahl ($n = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$)

enthält aber die Teiler $2; 3; 5; 6; 10$ und 15 und hat damit die Teilersumme $s = 41 > 39$.
Folglich kann n höchstens zwei verschiedene Primfaktoren p_1 und p_2 enthalten. Es kommt damit nur $n = p_1^k p_2^l$ mit $k \geq 0$ in Frage.
Grenzen wir weiter k und l ein. Für $k = l = 2$ liefern schon die kleinsten Primzahlen $p_1 = 2; p_2 = 3$ die Teilersumme $s = 51 > 39$; folglich muss wenigstens einer der beiden Exponenten kleiner als 2 sein. Ist $k = l = 1$, so ist $s = p_1 + p2 = 39$ genau dann, wenn einer der Primfaktoren gleich 2 und der andere gleich 37 ist. Damit ist eine Lösung gefunden: $n = 2 \cdot 37 = 74$.
Es sind nun noch die Fälle

$$n = p_1^k p_2 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad n = p_1^k \quad (2)$$

(also $l = 1, k > 1$ und $l = 0, k > 1$) zu untersuchen.
Zu (1): Es ist

$$s = p_1 + p_1^2 + ... + p_1^k + p_2 + p_1 p_2 + p_1^2 p_2 + ... + p_1^{k-1} p_2 = (p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{k-1})(1 + p_2) + p_2 + p_1^k > p_1^k$$

Folglich kommen wegen $p_2 \geq 2$ nur Primzahlpotenzen $p_1^k < 37$ in Frage. Es sind dies 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 3^2, 3^3, 5^2.
Für $p_1 = 2, k = 2$ ergibt sich $p_2 = 11$ und als zweite Lösung $n = 2^2 \cdot 11 = 44$. Die übrigen Potenzen liefern keine Primzahl p_2.
Zu (2): Es ist

$$s = p_1 + p_1^2 + ... + p_1^k = p_1(1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{k-2}) = 39 = 3 \cdot 13$$

Wegen $p_1 < (1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{k-2})$ kommt nur $p_1 = 3$ in Frage. Tatsächlich ist $s = 3 + 9 + 27 = 39$. Damit ist $n = 3^4 = 81$ die dritte Lösung. Es gibt also drei Zahlen, die die geforderte Bedingung erfüllen: $n_1 = 44$, $n_2 = 74$, $n_3 = 81$.

Aufgabe 12/83
Man beweise, dass alle Zahlen der Folge $\{a_k\} = \{49; 4489; 444889; ...\}$ (Bildungsvorschrift: Es wird jedes mal die Zahl 48 "in die Mitte eingefügt") Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Es ist

$$\underbrace{444...444}_{n}\underbrace{888..889}_{n-1} = 4 \cdot \underbrace{111...111}_{n} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111...111}_{n} + 1 = 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + \frac{9}{9} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$$

Da $10 \equiv 1 \pmod 3$, folgt $10^n \equiv 1 \pmod 3$, $2 \cdot 10^n \equiv 2 \pmod 3$ und schließlich $2 \cdot 10^n + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Also ist die Basis der Potenz eine natürliche Zahl.

Aufgabe 13/83
Gesucht sind alle Tripel $(a; b; c)$ positiver ganzer Zahlen mit $c > 1$, die der diophantischen Gleichung $a^{2c} - b^{2c} = 665$ genügen.

Wegen

$$a^{2c} - b^{2c} = (a^c - b^c)(a^c + b^c) = 665 = 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$$

und wegen $a^c - b^c < a^c + b^c$ kommen nur die folgenden Möglichkeiten in Frage:

1. $a^c - b^c = 1 \qquad a^c + b^c = 5 \cdot 7 \cdot 19 = 665$
2. $a^c - b^c = 5 \qquad a^c + b^c = 7 \cdot 19 = 133$
3. $a^c - b^c = 7 \qquad a^c + b^c = 5 \cdot 19 = 95$
4. $a^c - b^c = 19 \qquad a^c + b^c = 5 \cdot 7 = 35$

Die ersten drei Gleichungssysteme liefern keine Lösungen in ganzen Zahlen. Das vierte System ergibt $a^c = 27, b^c = 8$, also $a = 3, b = 2, c = 3$. Tatsächlich ist $3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665$. Das einzige Tripel ist also $(3; 2; 3)$.

Aufgabe 14/83
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB und dem Thaleskreis-Mittelpunkt M schneide die Mittelsenkrechte auf der Hypotenuse die Kathete AC bzw. deren Verlängerung im Punkt K und die Kathete BC bzw. deren Verlängerung im Punkt L. Das Dreieck ist aus den gegebenen Strecken MK und ML zu konstruieren.

Eine Analysisfigur zeigt, dass $\triangle\ AMK \sim \triangle\ LMB$ ist ($MB \perp MK$, $BL \perp AK$, folglich $\measuredangle MBL = \measuredangle MKA$; $\measuredangle BML = \measuredangle AMK = 90°$).
Daraus folgt $KM : AM = MB : ML$. Wegen $AM = MB = r$ (Radius des Thaleskreises) ergibt sich daraus, dass r mittlere Proportionale zu MK und ML ist. Man kann also $r = 0{,}5AB$ konstruieren als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks auf der Hypotenuse mit den Hypotenusenabschnitten MK und ML.

Damit ergibt sich die folgende Konstruktionsbeschreibung:
1. Lege auf einer Geraden drei Punkte K', M' und L' so fest, dass $K'M' = KM$ und $M'L' = ML$ ist und M' zwischen K' und L' liegt!
2. Schlage über $K'L'$ den Thaleskreis!
3. Errichte in M' auf $K'L'$ die Senkrechte! Ihr Schnittpunkt mit dem Thaleskreis sei P. Es ist $M'P = r$.
4. Lege auf einer Geraden die Punkte A, B und M so fest, dass $AM = BM = r$ und $A \neq B$ ist!
5. Errichte in M die Senkrechte auf AB und lege auf ihr die Strecken MK und ML so fest, dass beide in derselben von der Geraden AB erzeugten Halbebene liegen!
6. Lege durch B und L sowie durch A und K je eine Gerade! Sie schneiden einander im Dreieckspunkt C.
Alle Konstruktionsschritte sind stets und eindeutig ausführbar.

Aufgabe 15/83
Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: 133 ist Teiler von $T_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Wir führen den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion.
1. Die Behauptung gilt offenbar für $n = 0$:

$$T_0 = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$$

2. Angenommen, die Behauptung gilt für irgend ein $n = k$:

$$T_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133 \cdot t_k \quad \text{mit } t_k \in N$$

Dann ist

$$T_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+2} + 11 \cdot 12^{2k+1} + 133 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot T_k + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 133t_k + 133 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 133(11t_k + 12^{2k+1}) = 133 \cdot t_{k+1}$$

($t_{k+1} \in N$). Aus der Teilbarkeit für $n = k$ folgt also die Teilbarkeit für $n = k + 1$. Wegen 1. gilt dann die Behauptung für alle natürlichen Zahlen n.

Aufgabe 16/83
Es ist zu beweisen: In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem Umkreisradius R und dem Inkreisradius r gilt: $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

In jedem Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Inkreisradius r gilt (wie man sich an einer Skizze klarmacht)

$$\frac{1}{2}r(a+b+c) = A \qquad \text{also} \qquad r = \frac{2A}{a+b+c}$$

(dabei ist mit A der Flächeninhalt des Dreiecks bezeichnet). Ist das Dreieck rechtwinklig und c die Hypotenuse, so gilt

$$ab = 2A \qquad \text{also} \qquad r = \frac{ab}{a+b+c} \qquad \text{und} \qquad R = \frac{c}{2}$$

(nach dem Satz des Thales). Damit ist

$$\frac{R}{r} = \frac{c(a+b+c)}{2ab} = \frac{1}{2}\left[\frac{c}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{c^2}{ab}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}} + \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{a^2+b^2}{ab}\right]$$

Nun gilt stets $(a-b)^2 \geq 0$, also $a^2+b^2 \geq 2ab$ und für $ab > 0$: $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$, entsprechend auch $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$. Daraus folgt

$$\frac{R}{r} \geq \frac{1}{2}(2\sqrt{2}+2) = \sqrt{2}+1$$

Aufgabe 17/83
Gesucht sind alle Lösungen $(x; y; z)$ in natürlichen Zahlen $x; y; z$ des Gleichungssystems:

$$2x^2 - 2y^2 - 3z + 5949 = 0 \quad (1)$$
$$\lg^2 y^2 + \lg y^{(x-1)(x-y)} + (x-y)^2 = 0 \quad (2)$$
$$\lg y^{(y-x)} + x - y = 0 \quad (3)$$

Aus der Gleichung (3) folgt durch äquivalente Umformung

$$(x-y)\lg y = x - y$$

Diese Gleichung ist sicher genau dann erfüllt, wenn entweder 1. $\lg y = 1$, also $y = 10$, oder 2. $x - y = 0$, also $y = x$ ist.
Wir unterscheiden daher zwei Fälle und setzen diese beiden Werte für y in die Gleichungen (1) und (2) ein.
1. $y = 10$:

$$2x^2 - 200 - 3z - 5949 = 0 \to 2x^2 - 3z + 5749 = 0 \quad (1a)$$
$$\lg^2 100 + \lg 10^{(x-1)(x-10)} + (x-10)^2 = 0 \to 2x^2 - 31x + 114 = 0 \quad (2a)$$

Von den Lösungen der in x quadratischen Gleichung (2a) ist nur $x = 6$ eine natürliche Zahl. Dieser Wert in (1a) eingesetzt, liefert $z = 1892{,}3...$, also keine natürliche Zahl.
2. $y = x$:

$$2x^2 - 2x^2 - 3z - 5949 = 0 \to z = 1983 \quad (1b)$$
$$\lg^2 x^2 + \lg x^{(x-1)(x-x)} + (x-x) = 0 \to \lg^2 x^2 = 0 \to x = 1 \quad (2b)$$

Die einzige Lösung ist $(x; y; z) = (1; 1; 1983)$.

Aufgabe 18/83
Bekanntlich existiert auf der Erdoberfläche wenigstens ein Punkt (nämlich der Südpol) mit der folgenden Eigenschaft:
Geht man von ihm aus eine Strecke a nach Norden, dann dieselbe Strecke a nach Osten (oder Westen) und schließlich die Strecke a nach Süden, so kommt man zum Ausgangspunkt zurück.
Es ist zu untersuchen, welche weiteren Punkte auf der Erdoberfläche dieselbe Eigenschaft haben (dabei soll $a = 0{,}5\pi R$ gelten; R sei der Radius der als Kugel angenommenen Erde).

Es ist unmittelbar einzusehen, dass jene Punkte der Erdoberfläche (außerhalb des Südpols) die geforderte Eigenschaft haben, die um die Strecke a südlich eines Breitenkreises mit dem Umfang a liegen.
Dann fallen nämlich Anfangs- und Endpunkt der Ost-West-Bewegung zusammen und damit auch die in Nord-Süd-Richtung verlaufenden Bewegungen, während in den anderen Fällen kein geschlossener "Streckenzug" entsteht (sonst müssten nämlich durch einen nicht mit einem Pol zusammenfallenden Punkt zwei verschiedene Meridiane verlaufen).
Der Breitenkreis mit dem Umfang $a = 0{,}5R\pi$ hat den Radius $r = \frac{a}{2\pi} = 0{,}25R$ und wird durch

$$|\varphi_r| = \arccos\frac{r}{R} = \arccos 0{,}25 \approx 75{,}5°$$

angegeben. Wegen $\cos\varphi_r = \cos(-\varphi_r)$ gibt es also zunächst zwei derartige Breitenkreise mit $\varphi_{r1} = 75{,}5°$; $\varphi_{r2} = -75{,}5°$ (nördliche und südliche Breite).

Den Breitenkreis, auf dem die fraglichen Punkte liegen, erhält man, wenn man um $\Delta\varphi = \frac{a}{R} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$ nach Süden "geht" $\varphi = \varphi_r - \Delta\varphi$.
Dies ist jedoch nur bei φ_{r1} möglich:

$$\varphi_1 = 75{,}5° - 90° = -14{,}5°$$

(für φ_2 würde sich $\varphi_2 = -75{,}5° - 90° = -165{,}5°$ ergeben; offensichtlich muss aber $-90° < \varphi < 90°$ gelten). Also erfüllen alle Punkte die geforderte Bedingung, die auf dem Kreis 14,5° südlicher Breite liegen.
Lässt man auch mehrmalige "Umrundung" zu, so ergeben sich aus

$$r = \frac{a}{2k\pi} \qquad \text{mit } k \in N, k > 1$$

weitere Werte $\varphi_{rk} = \arccos \frac{1}{4k}$.

Aufgabe 19/83
Man beweise den Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe aus Inkreis- und Umkreisradius gleich dem arithmetischen Mittel der Katheten.

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b, der Hypotenuse c, den Winkeln α, β, γ, dem Umkreisradius r und dem Inkreisradius ρ (übliche Bezeichnungsweise). Ferner seien M der Mittelpunkt des Inkreises. D, E und F die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten c, a bzw. b. Dann gilt

$$\frac{AD}{\rho} + \frac{BD}{\rho} = \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} = \frac{2r}{\rho} \qquad (1)$$

(wegen $2r = c$ nach dem Satz des Thales)

$$\frac{BE}{\rho} + \frac{CE}{\rho} = \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\beta}{2} + 1 = \frac{a}{\rho} \qquad (2)$$

$$\frac{CF}{\rho} + \frac{AF}{\rho} = \cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\alpha}{2} = 1 + \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{\rho} \qquad (3)$$

(wegen $\cot\frac{\gamma}{2} = \cot 45° = 1$). Aus (2) und (3) folgt

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{\rho} - 1 \qquad ; \qquad \cot\frac{\beta}{2} = \frac{a}{\rho} - 1$$

Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich

$$\frac{b}{\rho} - 1 + \frac{a}{\rho} - 1 = \frac{2r}{\rho} \to \frac{a+b}{2} = r + \rho$$

Aufgabe 20/83
Gesucht sind alle Tripel aufeinanderfolgender gerader oder ungerader Zahlen, bei denen die Summe aus den Quadraten eine (in dekadischer Schreibweise echt) vierstellige Zahl mit vier gleichen Ziffern ist.

Wird die mittlere Zahl des Tripels mit a bezeichnet, so ist die kleinere $a-2$ und die größere $a+2$, und es gilt nach der Aufgabenstellung

$$(a-2)^2 + a^2 + (a+2)^2 = 1111x$$

mit $x \in N, 1 \leq x \leq 9$, also

$$3a^2 + 8 = 1111x \qquad ; \qquad a = \sqrt{370x - 2 + \frac{x-2}{3}}$$

Da $a \in N$, muss $x - 2 = 3k$ mit $k \in N$ sein; folglich kommen für x nur die Werte $x_1 = 2, x_2 = 5$ und $x_3 = 8$ in Frage. Von diesen Werten liefert aber nur $x_2 = 5$ eine natürliche Zahl a:

$$a = \sqrt{370 \cdot 5 - 1} = \sqrt{1849} = 43$$

Es gibt also nur ein Tripel, das die Forderung der Aufgabe erfüllt: $(41; 43; 45)$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit.

Aufgabe 21/83
Es ist zu beweisen: Jede natürliche Zahl $n > 27$ ist in der Form $n = 5k + 8m$ darstellbar, wobei k und m natürliche Zahlen sind (mit $0 \in N$).

Offenbar gilt $28 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8$. Für jede natürliche Zahl $n \geq 28$ gibt es sicher eine Darstellung

$$n = 28 + 5p + q$$

mit $p \in N$, $q = 0; 1; 2; 3; 4$. Wegen

$$\begin{array}{ccc} 0 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 8 & 1 = (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 8 & 2 = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 \\ 3 = (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 4 = (-4) \cdot 5 + 3 \cdot 8 & \end{array}$$

kann man q darstellen als $q = 5s + 8t$ mit $s = -4; -3; -1; 0; 2$ und $t = -1; 0; +1; +2; +3$. Damit gilt $4 + s \geq 0$ und $1 + t \geq 0$, also ist $28 + q = (4 + s) \cdot 5 + (1 + t) \cdot 8$ als $28 + q = 5u + 8v$ darstellbar, wobei u und v natürliche Zahlen sind.
Wegen $p \geq 0$ gilt dies dann auch für $n = 28 + 5p + q$:

$$n = 28 + 5p + q = 5u + 5p + 8v = 5(u + p) + 8v = 5k + 8v$$

Aufgabe 22/83
Es sei n eine natürliche Zahl, die (im Dezimalsystem) mit 150 Ziffern 4 und k Ziffern 0 ($k \in N$) dargestellt wird, Man beweise, dass n keine Quadratzahl ist!

Für die Quersumme $Q(n)$ der Zahl n gilt $Q(n) = 150 \cdot 4 + k \cdot 0 = 600$.
Die Quersumme von n ist also durch 3, aber nicht durch $9 = 3^2$ teilbar. Damit enthält n den Primfaktor 3 in ungerader Anzahl; die Zahl n kann folglich nicht Quadratzahl sein.

Aufgabe 23/83
Man löse das Gleichungssystem für beliebige reelle Zahlen $x; y; z$:

$$x + y + \sin^2 z = 12 \quad (1) \qquad ; \qquad xy = 36 \quad (2)$$

Aus (1) folgt wegen $\sin^2 z \geq 0$ die Ungleichung $x + y \leq 12$. (1a) Weiter gilt

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

und mit $xy = 36$

$$x - 2\sqrt{36} + y \geq 0 \to x + y \geq 12 \quad (2a)$$

Aus (1a) und (2a) folgt $x + y = 12, y = 12 - x$. In (2) eingesetzt, ergibt sich die quadratische Gleichung $x^2 - 12x - 36 = 0$ mit der Doppellösung $x = 6$. Es folgt weiter $y = 6$, $\sin^2 z = 0$, $z = k\pi$ mit $k \in G$. Es existiert also genau eine Lösungsschar $x = 6, y = 6, z = p\pi$ mit $k \in G$.

Aufgabe 24/83
Es seien p_1 und p_2 zwei benachbarte Primzahlen mit $p_1 < p_2$ und $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades in x mit ganzzahligen Koeffizienten a_i ($i = 0; 1; 2; ...; n$). Man bestimme p_1 und p_2 aus $f(p_1) = 1234$ und $f(p_2) = 4321$.

Aus $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ folgt

$$f(p_2) - f(p_1) = \sum_{i=0}^{n} a_i p_2^i - \sum_{i=0}^{n} a_i p_1^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (p_2^i - p_1^i) = 4321 - 1234 = 3087$$

Nun ist stets $a^k - b^k$ restlos durch $a - b$ teilbar (der Beweis folgt unmittelbar aus

$$(a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}b^i = a^k - b^k$$

durch Ausmultiplizieren); folglich ist auch $p_2^i - p_1^i$ und damit

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(p_2^i - p_1^i) = 3087$$

durch $p_2 - p_1$ teilbar. Da eine ungerade Zahl niemals durch eine gerade Zahl restlos teilbar ist, folgt, dass $p_2 - p_1$ ungerade ist.
Demnach können p_1 und p_2 nicht beide ungerade sein. Damit verbleibt als einzige Möglichkeit $p_1 = 2$ (wegen $p_1 < p_2$) und $p_2 = 3$ (p_1 und p_2 sind benachbarte Primzahlen).

Aufgabe 25/83
Es ist die Gültigkeit der Ungleichung für beliebige positive ganze Zahlen n zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Für $k \geq 2$ gilt

$$k^{-2} < k^{-1}(k-1)^{-1} = (k-1)^{-1} - k^{-1}$$

Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \left(-1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

für $n \geq 2$. Für $n = 1$ ist die Summe gleich $1 < 2$.

Aufgabe 26/83
Wie viele (echt) vierstellige natürliche Zahlen gibt es, die durch 11 teilbar sind und deren Quersumme ebenfalls durch 11 teilbar ist?

Eine natürliche Zahl ist bekanntlich genau dann restlos durch 11 teilbar, wenn dies für ihre alternierende Quersumme zutrifft. Ist

$$x = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

eine Zahl, die die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllt ($a_i \in N$ für $i = 0;1;2;3$, $0 \leq a_i \leq 9$ für $i = 0;1;2$ und $1 \leq a_3 \leq 9$), so gilt also

$$a_3 - a_2 + a_1 - a_0 = 11r \qquad \text{und} \qquad a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 11m$$

mit $r \in \{-1;0;+1\}$ und $m \in \{+1;+2;+3\}$. Durch Addition und Subtraktion erhält man daraus

$$a_3 + a_1 = 5{,}5(m+r) \qquad ; \qquad a_2 - a_0 = 5{,}5(m-r)$$

Daraus folgt unmittelbar $m \equiv r \pmod 2$ wegen $a_i \in N$. Also sind folgende Paare $(r;m)$ möglich: $(-1;1), (-1;3), (0;2), (1;1), (1{,}3)$. Aus ihnen ergeben sich fünf Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{cc}
a_3 + a_1 = 0 & a_2 + a_0 = 11 \\
a_3 + a_1 = 11 & a_2 + a_0 = 22 \\
a_3 + a_1 = 11 & a_2 + a_0 = 11 \\
a_3 + a_1 = 11 & a_2 + a_0 = 0 \\
a_3 + a_1 = 22 & a_2 + a_0 = 11
\end{array}$$

Nur das dritte und das vierte System haben Lösungen im Definitionsbereich der a_i. Damit $a_3 + a_1 = 11$ gilt, muss $a_3; a_1 > 1$ sein.
Es sind also die Paare $(a_3; a_1) = (2; 9), (3; 8), (4; 7), (5; 6), (6; 5), (7; 4), (8; 3)$ und $(9; 2)$ möglich.
Aus dem dritten System ergeben sich die gleichen Möglichkeiten für $(a_2; a_0)$, aus dem vierten System kann nur $a_2 = a_0 = 0$ folgen, so dass bei 8 Möglichkeiten für $(a_3; a_1)$ neun für $(a_2; a_0)$ existieren. Insgesamt existieren damit $8 \cdot 9 = 72$ Zahlen der geforderten Art.

Aufgabe 27/83
Auf einer Ebene sind 9 Punkte so angeordnet, dass 4 von ihnen die Eckpunkte eines Quadrats bilden, 4 die Quadratseiten halbieren und der neunte den Mittelpunkt dieser Figur markiert.
Gesucht ist der längste geschlossene Streckenzug, der alle Punkte verbindet, ohne dass eine Verbindung doppelt durchlaufen wird. Dabei sind nur Strecken zulässig, die parallel zu Quadratseiten oder -diagonalen verlaufen.

Der vollständige Graph (d h. der Graph, der alle zulässigen "Kanten" enthält) hat 8 Knoten ungerader und einen Knoten gerader Valenz.
Voraussetzung für einen geschlossenen Streckenzug ohne Wiederholung ist, dass kein Knoten ungerader Valenz existiert. Es müssen also mindestens 4 Strecken derart entfernt werden (da jede Streichung einer Strecke 2 Knoten in der Valenz um je 1 mindert), dass 8 Knoten ungerader Valenz ihre Valenz um je 1 ändern; der Knoten gerader Valenz muss dabei gerade Valenz behalten.
Da wir den längsten Streckenzug suchen, streichen wir 1. nicht mehr als 4 Strecken und 2. nur parallel zu Quadratseiten liegende (da diagonal verlaufende stets länger sind).
Die zu streichenden Strecken müssen auch so liegen, dass sie nicht am Knoten gerader Valenz und nicht mehr als eine an einem Knoten ungerader Valenz anliegen. Bezeichnet man die Knoten zeilenweise von links nach rechts mit $1-2-3$, $4-5-6$, $7-8-9$, so entspräche z.B. der folgende Streckenzug den Forderungen der Aufgabe: $1-2-5-4-2-6-5-3-6-8-5-9-8-4-7-5-1$.

Im Jahr 1983 wurden nur neun Hefte "Wissenschaft und Fortschritt" und somit 27 Mathematikaufgaben veröffentlicht.

2.24 Aufgaben und Lösungen 1984

Ab 1984 wurden monatlich zwei Mathematikaufgaben veröffentlicht.

Aufgabe 1/84
Man löse in reellen Zahlen x die Gleichung $1984^{\lg x} = 2 \cdot 1984^2 - x^{\lg 1984}$.

Die gegebene Gleichung ist ein Spezialfall der Gleichung

$$a^{\lg x} = 2a^2 - x^{lga} \quad (1)$$

Es gilt

$$\lg a^{\lg x} = \lg x \cdot \lg a = \lg x^{\lg a}$$

Also ist wegen der Eineindeutigkeit der lg-Funktion

$$a^{\lg x} = x^{\lg a}$$

Damit ist (1) der Gleichung

$$a^{\lg x} = 2a^2 - a^{\lg x}$$

äquivalent. Durch weitere äquivalente Umformung folgt

$$2a^{\lg x} = 2a^2 \qquad ; \qquad \lg x = 2$$

und damit $x = 100$ als eindeutige Lösung unabhängig vom Parameter a.

Aufgabe 2/84
Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser $d = 2r = AB$. Eine zu AB senkrechte Gerade schneidet den Durchmesser in P und den Kreis in C und D. Die Umfänge der Dreiecke APC und BPD verhalten sich zueinander wie $\sqrt{3} : 1$.
Wie groß ist das Verhältnis $AP : PB$?

Wenn sich die Umfänge der zueinander ähnlichen Dreiecke wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten, so verhalten sich die Flächeninhalte wie $3 : 1$. Folglich gilt

$$0{,}5 \cdot AP \cdot PC : 0{,}5 \cdot BP \cdot PD = 3 : 1$$

Wegen PC = PD (aus Symmetriegründen) folgt sofort $AP : PB = 3 : 1$.

Aufgabe 3/84
Es seien a und b ganze Zahlen, und die Summe $c = a^2 + b^2$ sei ohne Rest durch 231 teilbar. Man beweise, dass dann c sogar durch 53361 teilbar ist.

Es ist $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Für das Quadrat x^2 einer ganzen Zahl x gilt, wie man durch Ausrechnen leicht feststellt

$$\begin{array}{llll}
 & x^2 \equiv 0 \pmod 3 & x^2 \equiv 0 \pmod 7 & x^2 \equiv 0 \pmod{11} \\
\text{oder} & x^2 \equiv 1 \pmod 3 & x^2 \equiv 1 \pmod 7 & x^2 \equiv 1 \pmod{11} \\
\text{oder} & & x^2 \equiv 4 \pmod 7 & x^2 \equiv 4 \pmod{11} \\
\text{oder} & & x^2 \equiv 2 \pmod 7 & x^2 \equiv 9 \pmod{11} \\
\text{oder} & & & x^2 \equiv 5 \pmod{11} \\
\text{oder} & & & x^2 \equiv 3 \pmod{11}
\end{array}$$

Daraus folgt, dass eine Summe aus zwei Quadratzahlen genau dann restlos durch $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ teilbar ist, wenn dies für jede der beiden Quadratzahlen gilt. Dann sind sie aber sogar durch

$$3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 231^2 = 53361$$

ohne Rest teilbar, und daraus folgt die Teilbarkeit der Summe.

Aufgabe 4/84 Gesucht sind alle rationalen Lösungen $(x; y)$ der Gleichung

$$4x^2y^2 - 4x^2y - x^2 + 4x = 2$$

Da offensichtlich $x \neq 0$ gilt, ist die Division mit x^2 möglich. Äquivalente Umformungen ergeben dann

$$4y^2 - 4y = 1 - 4x^{-1} + 2x^{-2} \to 4y^2 - 4y + 1 = 2(1 - 2x^{-1} + x^{-2})$$

$$(2y - 1)^2 = 2(1 - x^{-1})^2 \to |2y - 1| = \sqrt{2}|1 - x^{-1}|$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
1. Es ist $1 - x^{-1} = 0$, also $x = 1$. Dann ist auch $2y - 1 = 0$, also $y = 0{,}5$. Damit ist eine Lösung $(x = 1; y = 0{,}5)$ gefunden.
2. Es ist $1 - x^{-1} \neq 0$. Dann ergibt sich durch Division

$$\frac{|2y-1|}{|1-x^{-1}|} = \left|\frac{(2y-1)x}{x-1}\right| = \sqrt{2}$$

Wären nun x und y beide rational, so wären auch der Term auf der linken Seiten der Gleichung und damit auch $\sqrt{2}$ rational. Dies ist aber ein Widerspruch zu der bekannten Tatsache, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Demnach ist das Paar $(1; 0{,}5)$ die einzige rationale Lösung.

Aufgabe 5/84
Man beweise die Richtigkeit der Behauptung: Für jedes beliebige ebene Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem halben Umfang s gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}$$

Für beliebige positive reelle Zahlen $x; y; z$ gilt die Ungleichung zwischen dem harmonischen und dem arithmetischen Mittel:

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^{-1} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

Mit

$$x = \frac{1}{s-a} = \frac{2}{a+b+c-2a} = \frac{2}{b+c-a} > 0$$
$$y = \frac{1}{s-b} = \frac{2}{a+b+c-2b} = \frac{2}{a+c-b} > 0$$
$$z = \frac{1}{s-c} = \frac{2}{a+b+c-2c} = \frac{2}{a+b-c} > 0$$

liefert diese Ungleichung

$$\frac{3}{s-a+s-b+s-c} = \frac{3}{s} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-ac}\right)$$

Multipliziert man mit 3, so folgt die Behauptung

$$\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-ac}\right) \geq \frac{9}{s}$$

Aufgabe 6/84
Gesucht sind alle (evtl. auch nichtreellen) Lösungen des Gleichungssystems

$$16x^2 - 30xy + 9y^2 = 0 \qquad ; \qquad -xy + 3y^2 = 6$$

Da die erste Gleichung des Systems homogen ist und außerdem $x;y <> 0$ gilt (Probe!), kann man die erste Gleichung durch x^2 oder durch y^2 dividieren. Man erhält mit $z = \frac{x}{y}$ bzw. $z = \frac{y}{x}$

$$16z^2 - 30z + 9 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 9z^2 - 30z + 16 = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = \frac{3}{2}; \qquad z_2 = \frac{3}{8} \qquad \text{bzw.} \qquad z_1 = \frac{8}{3}; \qquad z_2 = \frac{2}{3}$$

Daraus folgt $x_1 = 1{,}5y_1$, $x_2 = 0{,}375y_2$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$3y_1^2 - 1{,}5y_1^2 = 6 \qquad ; \qquad 3y_2^2 - 0{,}375y_2^2 = 6 \quad \text{also}$$

$y_1 = \pm 2$, $y_2 = \pm\frac{4}{7}\sqrt{7}$, und damit $x_1 = \pm 3$, $x_2 = \pm\frac{3}{14}\sqrt{7}$. Es existieren also genau vier Lösungen, die sämtlich reell sind.

Aufgabe 7/84
Ein Mann erzählt: "Das Geburtsjahr meines Enkels ist ein Produkt xy zweier natürlicher Zahlen x und y. Im Jahre x^2 wird er x Jahre alt sein."
In welchem Jahr ist der Enkel geboren?

Nach den Angaben des Großvaters gilt $x^2 = xy + x$. Wegen (offensichtlich) $x \neq 0$ folgt daraus $y = x - 1$. Ferner ist $1984 \geq xy = x(x-1) = x^2 - x$,

$$45 > \sqrt{1984} \geq \sqrt{x(x-1)} \approx x$$

Es kommen also für x Werte in der Nähe von 45 in Frage. Werte $x > 45$, $y > 44$ führen auf $xy \geq 2070 > 1984$ und entfallen damit.
Werte $x \leq 44, y \leq 43$ ergeben $xy \leq 1982$ und entfallen aus biologischem Grund (der noch lebende Großvater hätte ein in unserem Land ungewöhnlich hohes Alter). Demnach ist $x = 45, y = 44$ und das Geburtsjahr des Enkels $xy = 1980$. Gesteht man dem Großvater ein Alter von mehr als 120 Jahren zu, so käme auch 1892 in Frage (dies wird aber durch den Aufgabentext "... wird er ... sein" ausgeschlossen).

Aufgabe 8/84
Klaus soll gegen Peter und Rolf abwechselnd Schach spielen und einen Preis gewinnen, wenn er von drei Partien zwei aufeinanderfolgende gewonnen hat. Er schätzt Peter spielstärker ein als Rolf.
Gegen wen wird er zuerst antreten? Die Wahl liegt bei ihm!

Es seine p_P und p_R die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Klaus gegen Peter bzw. Rolf gewinnt, p_i die Wahrscheinlichkeit für Sieg in der i-ten Partie ($i = 1;2;3$). Es gibt nun die folgenden einander ausschließenden Möglichkeiten für den Gewinn de Preises.
1. Gewinn der ersten beiden Partien (die dritte kann entfallen).
2. Verlust der ersten, Gewinn der zweiten und der dritten Partie.
Da man die Spielergebnisse als voneinander unabhängig betrachten kann, gilt für die Wahrscheinlichkeit p eines Preisgewinns

$$p = p_1 \cdot p_2 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_2 + p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

Spielt Klaus in der ersten Partie gegen Peter, so ist

$$p = p_P \cdot p_R + p_R \cdot p_P - p_P \cdot p_R \cdot p_P = p_R \cdot p_P \cdot (2 - p_P)$$

spielt er zuerst gegen Rolf, so ist

$$p = p_R \cdot p_P + p_P \cdot p_R - p_R \cdot p_P \cdot p_R = p_R \cdot p_P \cdot (2 - p_R)$$

Da Klaus die Spielstärke Peters höher einschätzt als die von Rolf, ist $p_P < p_R$ und damit $2 - p_P > 2 - p_R$. Die Gewinnchancen für Klaus werden damit (auf den ersten Blick überraschend!) größer, wenn er zuerst gegen die spielstärkeren Peter antritt.

Aufgabe 9/84
Man bestimme alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die der Gleichung genügen:

$$x^2y + xy^2 = 2xy + x + y + 1$$

Es ist

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = 2xy + x + y + 1$$

Setzt man $xy = a$, $x + y = b$, so nimmt die Gleichung die Gestalt

$$ab = 2a + 2b + 1 \qquad \text{oder} \qquad b = \frac{2a+1}{a-1} = 2 + \frac{3}{a-1}$$

an (da offensichtlich $a = 1$ keine Lösung liefert). Damit b ganzzahlig wird, kommen für a nur die Werte $a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = 2$ und $a_4 = 4$ in Betracht. Für b ergeben sich daraus die Werte $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 5$ und $b_4 = 3$. Es sind nun die vier Gleichungssysteme

$$xy = a_i \qquad ; \qquad x + y = b_i$$

mit $i = 1; 2; 3; 4$ im ganzen Zahlen $x; y$ zu lösen. Von ihnen haben nur die ersten zwei ganzzahlige Lösungen $(x; y)$, und es ist

$$\begin{aligned} &1.) \quad x_{11} = y_{12} = -1 \qquad ; \qquad x_{12} = y_{11} = 2 \\ &2.) \quad x_{21} = y_{22} = 0 \qquad ; \qquad x_{22} = y_{21} = -1 \end{aligned}$$

Damit sind die vier Paare $(-1; 0), (0; -1), (2; -1), (-1; 2)$ Lösung der gegebenen Gleichung. Weitere Lösungen kann es auf Grund des Lösungsverfahrens nicht geben.

Aufgabe 10/84
Man beweise die Richtigkeit des folgenden Satzes: Die Gleichung $2^n + 1 = k^{2m+3}$ hat keine Lösung in natürlichen Zahlen k; m; n.

Angenommen, es gäbe eine Lösung $k; m; n \in N$ der Gleichung

$$2^n + 1 = k^{2m+3}$$

Dann ist k mit Sicherheit ungerade: $k = 2l + 1$, $l \in N$, $l \geq 1$, da 2 gerade und damit $2^n + 1$ ungerade und außerdem $2^n + 1 \geq 3$ ist ($n = 0$ liefert offenbar keine Lösung). Die Gleichung nimmt damit die Gestalt

$$2^n + 1 = (2l + 1)^{2m+3} = (2l)^{2m+3} + (2m + 3)(2l)^{2m+2} + ... + (2m + 3)(2l) + 1$$

an. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 2^n &= 2l[(2l)^{2m+2} + (2m + 3)(2l)^{2m+1} + ... + 2m + 3] \\ 2^{n-1} &= l[(2l)^{2m+2} + (2m + 3)(2l)^{2m+1} + ... + 2m + 3] \end{aligned}$$

Die eckige Klammer auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist ungerade (alle Summanden bis auf den letzten sind gerade, der letzte ist ungerade) und größer als 1. Die linke Seite dagegen enthält ausschließlich Faktoren 2.
Damit führt die Annahme auf einen Widerspruch zum Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung; sie ist also falsch, und damit ist das Gegenteil richtig: Es gibt keine Lösung $k; m; n \in N$ der Gleichung.

Aufgabe 11/84
Einem Dreieck ABC sei ein Quadrat $DEFG$ derart einbeschrieben, dass die Punkte D und E auf der Seite AB, F auf der Seite BC und G auf der Seite AC liegen. Man bestimme das Maximum des Quotienten $Q = \frac{A(ABC)}{A(DEFG)}$, wobei mit $A(X)$ die Fläche der Figur X bezeichnet ist. Für welche Dreiecke wird das Maximum angenommen?

Es sei H der Fußpunkt der Höhe auf AB und x die Quadratseite. Weiter sei $c = AB$ und $h = HC$. Dann gilt

$$A(ABC) = 0{,}5ch \qquad ; \qquad A(DEFG) = x^2$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke FEB und CHB (beide sind rechtwinklig und haben den gleichen Winkel bei B) folgt

$$x : EB = h : HB \qquad \text{also} \qquad EB \cdot h = x \cdot HB \quad (1)$$

Analog folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke GAD und CAH

$$x : AD = h : AH \qquad \text{also} \qquad AD \cdot h = x \cdot AH \quad (2)$$

Addiert man (1) und (2), so ergibt sich

$$h(AD + EB) = h(c - x) = x(AH + HB) = x \cdot c \to x = \frac{ch}{c+h}$$

Damit folgt für Q

$$Q = x^2 : \frac{ch}{2} = \left(\frac{ch}{c+h}\right)^2 : \frac{ch}{2} = 0{,}5\left(\frac{\sqrt{ch}}{0{,}5(c+h)}\right)^2$$

Da das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen nie größer ist als ihr arithmetisches Mittel, ist der Bruch in der letzten Klammer höchstens gleich 1. Es ist also $Q \leq 0{,}5$ und die Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $h = c$ ist.

Aufgabe 12/84
Gesucht ist diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

in natürlichen Zahlen x; y; z, für die das Produkt xyz minimal ist.

Angenommen $x; y; z$ seien Lösung der gegebenen Gleichung. Dann folgt durch Multiplikation mit $x^2y^2 \neq 0$ die Gleichung

$$x^2 + y^2 = x^2y^2z^{-2}$$

Da $x^2; y^2 \in N$, ist auch $x^2y^2z^{-2} = n^2 \in N$ und man kann das Tripel $(x; y; n)$ in der Form $(x_0d; y_0d; n_0d)$ darstellen, wobei $(x_0; y_0; z_0)$ ein pythagoreisches Grundtripel und $d \in N, d \neq 0$ ist. Damit folgt

$$n^2 = n_0^2d^2 = x^2y^2z^{-2} = x_0^2d^2y_0^2d^2z^{-2} \qquad ; \qquad z = x_0y_0n_0^{-1}d$$

Wegen der paarweisen Teilerfremdheit von $x_0; y_0; n_0$ (pythagoreische Grundtripel) muss n_0 Teiler von d sein: $d = n_0d'$ mit $d' \in N, d' \neq 0$.
Demnach ist $xyz = (x_0y_0n_0)^2d'^3$ genau dann minimal, wenn $d' = 1$ gilt und $x_0; y_0; z_0$ die kleinsten Zahlen sind, die in einem pythagoreischen Grundtripel auftreten können: $x_0 = 3, y_0 = 4$ (bzw.umgekehrt), $n_0 = d = 5$ und damit $(x; y; z) = (x_0d; y_0d; z_0d = x_0y_0) = (3 \cdot 5; 4 \cdot 5; 3 \cdot 4) = (15; 20; 12)$ bzw. $(20; 15; 12)$ (wegen der Symmetrie in x und y). Tatsächlich ist

$$15^{-2} + 20^{-2} = 12^{-2}$$

Aufgabe 13/84
Man berechne die Summe aller derjenigen natürlichen Zahlen, die in ihrer dezimalen Darstellung jede der fünf Ziffern $1; 2; 3; 4; 5$ genau einmal enthalten.

Da in der dezimalen Darstellung der zu summierenden Zahlen jede der fünf Zahlen $1; 2; 3; 4; 5$ genau einmal enthalten ist, gibt es $n = 5! = 120$ derartige Zahlen. Denkt man sich diese Zahlen untereinander geschrieben, so kommt jede dieser Ziffern in jeder Spalte $\frac{5!}{5} = 4! = 24$mal vor. Folglich gilt für die Summe S_i der einzelnen Spalten

$$S_i = 24\sum_{k=1}^{5} k = 24 \cdot 15 = 360$$

und für die gesuchte Summe S

$$S = \sum_{i=1}^{5} S_i \cdot 10^{i-1} = 360 \sum_{i=1}^{5} 10^{i-1} = 360 \frac{10^5 - 1}{10 - 1} = 3999960$$

Aufgabe 14/84
Für welche natürlichen Zahlen n existiert kein Polyeder mit genau n Kanten?

1. Feststellung: Für alle geraden Zahlen $n \geq 6$ existiert ein Polyeder mit genau n Kanten.
Beweis: Es sei $n = 2k$, $k \in N$, $k \geq 3$. Jede k-seitige Pyramide hat genau k Kanten der Grundfläche zur Spitze; damit hat jede k-seitige Pyramide mit $k \geq 3$ genau $n = 2k \geq 6$ Kanten.

2. Feststellung: Für alle ungeraden Zahlen $n \geq 9$ existiert ein Polyeder mit genau n Kanten.
Beweis: Es sei $n = 2k + 1$, $k \in N$, $k \geq 4$. Für jede $(k-1)$-seitige Pyramide gilt die Feststellung 1; sie hat also genau $2k - 2$ Kanten. Schneidet man durch einen ebenen Schnitt eine Ecke an der Grundfläche ab, so treten 3 neue Kanten auf. Damit hat die "verstümmelte" Pyramide genau $n = 2k - 2 + 3 = 2k + 1 \geq 9$ Kanten.

3. Feststellung: Für $n < 6$ existiert kein Polyeder mit genau n Kanten.
Beweis: Jede Fläche enthält mindestens 3 Kanten, jedes Polyeder enthält mindestens 4 Flächen, jede Kante gehört genau 2 Flächen an. Die minimale Kantenzahl ist also $n_{min} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

4. Feststellung: Es ist noch die Existenz eines Polyeders mit genau 7 Kanten zu überprüfen. Angenommen, es gäbe ein solches Polyeder. Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt $f + e = k + 2$, für $k = 7$ also $f + e = 9$. Da $f \geq 4$ ist, gilt $e \leq 5$.
Es gibt nur ein Polyeder mit $f = 4$, das Tetraeder, bei ihm ist $e = 4$ und damit $e + f = 8 \neq 9$. Vergrößert man die Flächenzahl um 1, so ergibt sich entweder eine vierseitige Pyramide mit $e = 5, k = 8$, oder ein Pyramidenstumpf (bei dem Grund- und Deckfläche nicht notwendig parallel sind) mit $e = 6, k = 9$. In keinem Fall ist $k = 7$.
Es ist auch unmittelbar einzusehen (Folgerung aus dem Polyedersatz), dass jede weitere Vergrößerung der Flächenzahl zu einer Vergrößerung der Kantenzahl führt.
Ergebnis: Für die natürlichen Zahlen $n < 6$ und $n = 7$ existiert kein Polyeder mit genau n Kanten.

Aufgabe 15/84
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $BC = DA$ seien auf BC und DA zwei Punkte E und F so festgelegt, dass $EC = FA$ ist.
Man beweise: EF ist genau dann minimal, wenn EF Mittelparallele ist.

Es seien M und N die Halbierungspunkte von BC bzw. DA. Wir konstruieren das zu ABCD bezüglich N zentralsymmetrische Trapez $ADB'C'$. Dabei sind M', E' und F' die zu M, E bzw. F bezüglich N zentralsymmetrischen Punkte.
Es sei nun G der Punkt auf $B'C'$ für den gilt $B'G = C'E' = CE = AF = DF'$. Dann ist sicher

$$GF = E'F' = EF \qquad \text{und} \qquad GF + EF = 2EF \geq GF'E = M'NM = 2NM$$

Das Minimum wird offensichtlich genau dann angenommen, wenn der Streckenzug GFE auf einer Geraden liegt, d.h., wenn $F = F' = N$ und $E = M$, $E' = M' = G$ ist. Dann aber ist $EF = NM$, w.z.b.w.

Aufgabe 16/84
Gesucht sind alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die $P = p^2 + q^2 - 167$ und $Q = p^2 - q^2 + 167$ ebenfalls Primzahlen sind.

Ist $p = q = 3$, so ist $P < 0$. Folglich ist mindestens eine der Primzahlen p und q nicht gleich 3. Wir untersuchen daher 3 Fälle:

1. Es sei $p = 3, q \neq 3$. Dann gilt $P = q^2 - 158 > 0$, $Q = 176 - q^2 > 0$ also $158 < q^2 < 176$ und $q = 13$. Damit ist eine Lösung $(p_1; q_1) = (3; 13)$ gefunden (die Probe bestätigt die Richtigkeit).

2. Es sei $p \neq 3$, $q = 3$. Dann gilt $P = p^2 - 158 > 0$ und $Q = p^2 + 158 > 0$. Da $p \neq 3$, ist $p \equiv \pm 1$ (mod 3), $p^2 \equiv 1$ (mod 3). Folglich ist $Q \equiv 1 + 158 \equiv 0$ (mod 3) und damit niemals Primzahl. Dieser Fall ist also nicht möglich.

3. Es sei $p \neq 3$, $q \neq 3$ also $p^2 \equiv q^2 \equiv 1$ (mod 3). Dann ist

$$P \equiv 1 + 1 - 167 \equiv 0 \text{ (mod } 3 \text{ ; also } P = 3 \quad ; \qquad p^2 + q^2 = P + 167 = 170$$

woraus $p; q < 13$ folgt. Von den nunmehr noch in Frage kommenden 16 Wertepaaren $(p; q = 2; 5; 7; 11)$ genügt nur das Paar $(p_2; q_2) = (11; 7)$ beiden Gleichungen. Damit erfüllen genau die beiden Paare $(p_1; q_1) = (3; 13)$ und $(p_2; q_2) = (11; 7)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 17/84
Es sei a eine 1984stellige natürliche Zahl, die durch 3 teilbar ist. Weiter seien b die Quersumme von a, c die Quersumme von b und d die Quersumme von c. Welche Werte kann d annehmen?

Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch ihre Quersumme durch 3 teilbar. Also sind mit a und b, c und d durch 3 teilbar. Offenbar gelten für b, c und d die folgenden Abschätzungen:

$$b \leq 9 \cdot 1984 = 17856; \qquad c < 9 + 9 + 9 + 9 = 36; \qquad d < 2 + 9 = 11$$

Damit kommen für d nur die Werte $d_1 = 3; d_2 = 6; d_3 = 9$ in Frage.

Aufgabe 18/84
Gesucht sind alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, bei denen die Zahlenwerte von Flächeninhalt und Umfang übereinstimmen.

Nach dem Aufgabentext werden alle pythagoreischen Zahlentripel $(a; b; c)$ gesucht, für die gilt

$$\frac{ab}{2} = a + b + c$$

(dabei spielt eine Vertauschung von a und b keine Rolle). Bekanntlich erhält man alle pythagoreischen Tripel $(a; b; c)$ durch den Ansatz

$$a = k(m^2 - n^2) \qquad ; \qquad b = 2kmn \qquad ; \qquad k(m^2 + n^2)$$

mit $k; m \in N, k; m; n <> 0$. Setzt man dies ein, so ergibt sich

$$\frac{k(m^2 - n^2) \cdot 2kmn}{2} = k(m^2 - n^2) + 2kmn + k(m^2 + n^2) \to k^2(m - n)(m + n)mn = 2km(m + n)$$

bzw. wegen $(m + n); k; m; m \neq 0$

$$k(m - n)n = 2 \to m = n + \frac{2}{kn}$$

Damit $m \in N$ gilt, muss $kn = 1$ oder $kn = 2$, also $k_1 = 1, n_1 = 1, k_2 = 1, n_2 = 2$ oder $k_3 = 2, n_3 = 1$ sein. Dann aber ist $m_1 = m_2 = 3, m_3 = 2$ und es folgt

$$\begin{matrix} a_1 = 8 & b_1 = 6 & c_1 = 10 \\ a_2 = 5 & b_2 = 12 & c_2 = 13 \\ a_3 = 6 & b_3 = 8 & c_3 = 10 \end{matrix}$$

Man erkennt, dass die dritte Lösung (bis auf die unwesentliche Vertauschung von a und b) mit der ersten übereinstimmt. Die Aufgabe hat (wie die Probe bestätigt) demnach genau zwei wesentlich voneinander verschiedene Lösungen.

Aufgabe 19/84
Unter welcher Bedingung kann man in zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 ein Dreieck derart einbeschreiben, dass der größere Kreis Umkreis und der kleinere Kreis Inkreis des Dreiecks ist?

Genau dann, wenn der Umkreis und der Inkreis eines Dreiecks konzentrisch sind, fallen ihre Mittelpunkte, also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, zusammen. Daraus folgt, dass das Dreieck gleichseitig ist.
Damit fällt auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden mit dem Mittelpunkt der konzentrischen Kreise zusammen. Da die Seitenhalbierenden einander dritteln, gilt für das Verhältnis der Radien von In- und Umkreis ρ bzw. r: $\rho : r = 0{,}5$ und $r = 2\rho$.
Damit ist die gesuchte Bedingung gefunden: Der Radius der größeren Kreises muss gleich dem doppelten Radius des kleineren Kreises sein. Sie ist sowohl notwendig als auch hinreichend.

Aufgabe 20/84
Es sind alle Quadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ von Primzahlen p_i zu ermitteln, die Lösung der Gleichung $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 999$ sind (Rechengeräte sind zur Lösung nicht zugelassen!).

1. Wegen $999 \equiv 1 \pmod 2$ ist die Anzahl der ungeraden Primzahlen im Quadrupel ungerade. Wäre nun genau ein p_i ungerade (o.B.d.A. sie dies p_4), so wäre $p_1 = p_2 = p_3 = 2$. Die Gleichung

$$2^2 + 2^2 + 2^2 + p_4^2 = 999$$

liefert aber keine Primzahl p_4. Folglich sind genau 3 Primzahlen ungerade und eine (o.B.d.A. p_1) gleich 2. Die gegebene Gleichung ist damit auf die Gleichung reduziert

$$p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 986$$

2. Wegen $995 \equiv 2 \pmod 3$ und $p_i^2 \equiv 1 \pmod 3$ für $p_i \neq 3$ folgt, dass für genau ein p_i (o.B.d.A. p_2) gilt $p_i = 3$. Die gegebene Gleichung ist damit auf die Gleichung reduziert

$$p_3^2 + p_4^2 = 986$$

3. Wegen $986 \equiv 1 \pmod 5$ und $p_i^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$ für $p_i \neq 5$ folgt, dass für genau ein p_i (o.B.d.A. p_3) gilt $p_i = 5$. Die gegebene Gleichung ist damit auf die Gleichung

$$p_4^2 = 961$$

mit der Lösung $p_4 = 31$ reduziert. Tatsächlich ist p_4 Primzahl.
4. Es gibt also ein Grundquadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4) = (2; 3; 5; 31)$. Nimmt man auf die Reihenfolge keine Rücksicht, so gibt es also (wie der Lösungsweg zeigt) keine weiteren Lösungen. Wird dagegen die Reihenfolge als erheblich angesehen, so ergeben sich aus dem Grundquadrupel durch Permutation noch $4! - 1 = 23$ weitere (abgeleitete) Quadrupel.

Aufgabe 21/84
Es seien $q_1 = p_1^2$, $q_2 = p_2^2$ und $q_3 = p_3^2$ die Quadrate beliebiger mehrstelliger Primzahlen p_i und q eine Zahl, die man durch Aneinanderreihen der Ziffern der q_i in beliebiger Reihenfolge unter Berücksichtigung ihrer Mehrfachheit erhält. Man beweise, dass q keine Primzahl ist.

Da für $i = 1; 2; 3$ nach Voraussetzung gilt $p_i > 10$, gilt auch $p_i \neq 0 \pmod 3$ und damit $q_i \equiv 1 \pmod 3$. Damit folgt für die Quersummen $Q(q_i) \equiv 1 \pmod 3$ und

$$Q(q) = Q(q_1) + Q(q_2) + Q(q_3) \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$$

d.h., dass q restlos durch 3 teilbar ist. Da sicher $q > 3$ ist, folgt, dass q keine Primzahl sein kann.

Aufgabe 22/84
Gegeben sei die Menge aller Folgen $\{x_k(n)\}$, die der Rekursionsformel

$$x_{k+1}(n) = 2x_k(n) + 1; \qquad x_0(n) = 2n$$

mit $n \in N$ genügen. Man zeige, dass jede ungerade natürliche Zahl $2i + 1$ $(i = 0; 1; 2; ...)$ in genau einer dieser Folgen enthalten ist.

Es ist $x_k(n) = (2n+1) \cdot 2^k - 1$, wie man durch vollständige Induktion beweist:
1. $x_0(n) = (2n+1) \cdot 2^0 - 1 = 2n$,
2. $x_{k+1}(n) = 2x_k(n) + 1 = 2[(2n+1) \cdot 2^k - 1] + 1 = (2n+1) \cdot 2^{k+1} - 2 + 1 = (2n+1) \cdot 2^{k+1} - 1$.
Es sei nun $x_k(n) = 2i + 1$ $(i = 0; 1; 2; ...)$. Dann folgt

$$x_k(n) + 1 = 2i + 2 = (2n+1) \cdot 2^k \qquad ; \qquad 2(ik+1) = (2n+1) \cdot 2^k$$

Aus dieser Gleichung kann man die Zahlen n und k eindeutig (wegen $n; k \in N$) bestimmen: Man dividiert $2(i+1)$ durch die höchste als Faktor enthaltene Zahl 2^k. Der Quotient ist $2n+1$.
Beispiel: Für $2i + 1 = 71, i = 35$ gilt

$$2(i+1) = 2 \cdot 36 = 2(n+1) \cdot 2^k.$$

Es folgt $k = 3, n = 4$ und $x_0 = 8, x_1 = 2x_0 + 1 = 17, x_2 = 35, x_3 = 71, x_4 = 143, ...$

Aufgabe 23/84
Es ist zu beweisen: Für alle natürlichen Zahlen n ist $z_n = 2^n \cdot 1985$ als Summe aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen darstellbar.

Die Behauptung ist offenbar richtig für $n = 0; z_0 = 2^0 \cdot 1985 = 1985 = 49 \cdot 1936 = 7^2 + 44^2$. Wenn bewiesen werden kann, dass aus der Gültigkeit der Behauptung für irgendein $n = k$ die Gültigkeit für $n = k+1$ folgt, ist der geforderte Beweis erbracht. Angenommen, die Behauptung gelte für irgend ein $n = k$

$$z_k = 2^k \cdot 1985 = x^2 + y^2$$

mit $x; y \in N$. Dann ist

$$z_{k+1} = 2^{k+1} \cdot 1985 = 2 \cdot 2^k \cdot 1985 = 2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 =$$
$$= (x+y)^2 + (x-y)^2 = x'^2 + y'^2$$

ebenfalls als Summe aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen darstellbar, da mit $x; y \in N$ auch $x' = x + y; y' = x - y \in N$ gilt.

Aufgabe 24/84
Man ermittle alle (im dekadischen System) vierstelligen natürlichen Zahlen n, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Quersumme ist 23.
2. Die alternierende Quersumme ist -5.
3. Das Querprodukt ist 360.
4. Die Summe aus den an erster und an dritter Stelle stehenden Ziffern ist gleich der Ziffer an der zweiten Stelle.

Angenommen, es gäbe (wenigstens) eine Zahl

$$n = 10^3 a + 10^2 b + 10c + d$$

welche die gestellten Bedingungen erfüllt $(a; b; c; d \in N, a; b; c; d \leq 9)$. Dann gelten die folgenden Gleichungen

$$a + b + c + d = 23 \quad (1)$$
$$a - b + c - d = -5 \quad (2)$$
$$abcd = 360 \quad (3)$$
$$a - b + c = 0 \quad (4)$$

Durch Addition von (1) und (2) folgt mit (4): $a + c = 9 = b$ (5) und durch Einsetzen aus (1) $d = 5$, aus (3) $ac = 8$ (6).
Wegen $a; c \in N$ ergibt sich aus (5) und (6) sofort $a_1 = 1, c_1 = 8$ und $a_2 = 8, c_2 = 1$. Die Probe bestätigt, dass die beiden Zahlen $n_1 = 1985$ und $n_2 = 8915$ alle gestellten Bedingungen erfüllen. Weitere Zahlen n kann es auf Grund des Lösungsweges nicht geben.

2.25 Aufgaben und Lösungen 1985

Aufgabe 1/85
Man finde alle Lösungen der Gleichung $3^x + 4^x = 5^x$ in reellen Zahlen x.

1. Feststellung: $x_1 = 2$ ist Lösung.
2. Feststellung: Die gegebene Gleichung ist der Gleichung

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0$$

äquivalent.
3. Feststellung: Die Funktion $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ ist streng monoton fallend. Demzufolge ist auch die Funktion

$$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$$

eine streng monoton fallende Funktion.
4. Feststellung: Eine streng monotone Funktion nimmt jeden Wert höchstens einmal an. Sie hat demnach auch höchstens eine Nullstelle. Damit ist $x_1 = 2$ die einzige Lösung.

Aufgabe 2/85
Man konstruiere ein Dreieck ABC aus der Höhe h_c auf der Seite $AB = c$, der Seitenhalbierenden s_c der Seite c und der Winkelhalbierenden w_γ des Winkels $\gamma = \measuredangle ACB$!

Wir bezeichnen mit D den Fußpunkt der Höhe h_c auf c, mit E den Endpunkt der Winkelhalbierenden w_γ auf c, mit F den Halbierungspunkt von c, mit M den Mittelpunkt des Umkreises und mit G den Schnittpunkt der verlängerten Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis. Dann gelten die folgenden Feststellungen:
1. Das Teildreieck CDF ist konstruierbar aus h_c, s_c und $\measuredangle CDF = 90°$ nach ssw, vorausgesetzt $s_c > h_c$ (dem größten Winkel liegt die größte Seite gegenüber).
2. Das Teildreieck CDE ist konstruierbar aus h_c, w_γ und $\measuredangle CDF = 90°$ nach ssw, vorausgesetzt $w_\gamma > h_c$ (dem größten Winkel liegt die größte Seite gegenüber).
3. Es ist $AG = BG$ nach dem Peripheriewinkelsatz ($\measuredangle ACE = \measuredangle ACG = \measuredangle ECB = \measuredangle GCB = 0{,}5\gamma$, demnach auch $\measuredangle GAB = \measuredangle ABG$ nach dem Peripheriewinkelsatz. Damit ist $\triangle\ AFG \cong \triangle\ BFG$ nach sss; also ist $\measuredangle AFG = \measuredangle BFG = 90°$ (Nebenwinkel).
4. Das Hilfsdreieck EFG ist konstruierbar aus $EF = DF - DE$, $\measuredangle EFG = \measuredangle CED$ (Scheitelwinkel) und $\measuredangle AFG = \measuredangle EFG = 90°$ nach wsw.
5. Der Punkt M ist konstruierbar als Schnittpunkt der Senkrechten auf DF in F (Mittelsenkrechte von c) mit der Mittelsenkrechten von CG.
6. Der Umkreis ist konstruierbar als Kreis um M mit dem Radius $r = MC = MG$.
7. Die Dreieckspunkte A und B sind konstruierbar als Schnittpunkte der Geraden durch D, E und F mit dem Umkreis.

Determination: Unter 1. wurde $s_c > h_c$, unter 2. $w_\gamma > h_c$ vorausgesetzt. Da die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, muss die Konstruktion unter 4. so durchgeführt werden, dass E zwischen D und F liegt. Demnach muss sogar $s_c > w_\gamma > h_c$ gelten. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so sind alle Konstruktionen (bis auf den Umlaufsinn) eindeutig ausführbar.
Die Konstruktionsbeschreibung ergibt sich aus den Feststellungen.

Aufgabe 3/85
In einem ebenen Dreieck mit den Seiten a, b und c sollen die Maßzahlen der Seiten eine nichtkonstante arithmetische Folge l. Ordnung bilden (O.B.d.A. sei $a < b < c$). Die Differenz sei d (also $d > 0$). Für welche Verhältnisse $d : a$ ist das Dreieck 1. spitzwinklig, 2. rechtwinklig, 3. stumpfwinklig?

Aus dem Kosinussatz folgt
1) $a^2 + b^2 = a^2 + (a + d)^2 > c^2 = (a + 2d)^2$ für spitzwinklige, (1)

2) $a^2 + b^2 = a^2 + (a + d)^2 = c^2 = (a + 2d)^2$ für rechtwinklige, (2)
3) $a^2 + b^2 = a^2 + (a + d)^2 < c^2 = (a + 2d)^2$ für stumpfwinklige (3)
Dreiecke. Es folgt weiter

$$3d^2 + 2ad - a^2 \lesseqgtr 0; \qquad \left(\frac{d}{a}\right)^2 + \frac{2d}{3a} - \frac{1}{3} \lesseqgtr 0$$

(wobei $<$ für (1), $=$ für (2) und $>$ für (3) gilt). Die Lösung dieser im Verhältnis $d : a$ quadratischen Ungleichungen bzw. Gleichung liefert (negative Werte entfallen!)
1) für spitzwinklige Dreiecke $0 < d : a < 1 : 3$,
2) für rechtwinklige Dreiecke $d : a = 1 : 3$,
3) für stumpfwinklige Dreiecke $1 : 3 < d : a$.
Da in jedem Fall auch die Dreiecksungleichungen erfüllt sein müssen, gilt zudem $a+b = a+a+d = 2a+d > c = a + 2d$, also $a > d$, $d : a < 1$. Dies beschränkt für stumpfwinklige Dreiecke auf $1 : 3 < d : a < 1$.

Aufgabe 4/85
Man ermittle den Wert des Terms

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

ohne Tabellen, Rechengeräte oder ähnliches zu Hilfe zu nehmen!

Es sei

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = x \quad ; \quad \sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80° = y$$

Durch Multiplizieren folgt daraus

$$2 \sin 20° \cos 20° \cdot 2 \sin 40° \cos 20° \cdot 2 \sin 60° \cos 60° \cdot 2 \sin 80° \cos 80° = 16xy$$

und wegen $2 \sin a \cos a = \sin (2a)$, $\sin 180° - a = \sin a$ und $y \neq 0$

$$\sin 40° \cdot \sin 80° \cdot \sin 60° \cdot \sin 20° = 16xy = y \to 16x = 1$$

Also ist

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = 0{,}0625$$

Aufgabe 5/85
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, dem Radius r und einer Sehne $AB = s$. Um wieviel muss man AB über B hinaus verlängern, wenn die vom Endpunkt E der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente die Länge t haben soll?

Es sei $BE = x$. Nach dem Sehnen-Tangentensatz gilt

$$t^2 = (x + s)x \qquad \text{also} \qquad x^3 + xs - t^2 = 0 \to x = 0{,}5(\sqrt{s^2 + 4t^2} - s)$$

(wegen $x > 0$ kommt die zweite Lösung nicht in Frage.

Aufgabe 6/85
Wieviele verschiedene reelle Lösungen hat das Gleichungssystem

$$x^2 + y = a \qquad ; \qquad x + y^2 = a$$

in Abhängigkeit vom Parameter a?

Durch Subtraktion einer Gleichung von der anderen und nachfolgender Umformung erhält man

$$x^2 + y - x - y^2 = 0 \to (x - y)(x + y - 1) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn wenigstens ein Faktor gleich null ist: 1. $x = y$, 2. $x = 1 - y$.

Setzt man dies in eine der gegebenen Gleichungen ein, so ergibt sich $y^2 + y = a$ bzw. $y^2 - y + 1 = 0$. Die Lösungen dieser in y quadratischen Gleichungen sind

$$y = -0{,}5 \pm \sqrt{a + 0{,}25} \qquad \text{bzw.} \qquad y = 0{,}5 \pm \sqrt{a - 0{,}75}$$

Reelle Lösungen ergeben sich nur für $a \geq 0{,}25$ und im 2.Fall für $a \geq 0{,}75$. Das System hat somit keine reellen Lösungen für $a < -0{,}25$, genau eine reelle Lösung für $a = -0{,}25$, genau zwei reelle Lösung für $-0{,}25 < a \leq 0{,}75$ und genau vier reelle Lösungen für $a > 0{,}75$, wobei die Mehrfachheit von Lösungen unberücksichtigt blieb.

Aufgabe 7/85
Der etwas zerstreute Mathematiker A klagt seinem Kollegen B: "Ich habe meine Safenummer vergessen; ich weiß nur noch, dass ihre Ziffernfolge symmetrisch war und dass sie gleich dem Quadrat aus dem Geburtsjahr eines Gelehrten der neueren Zeit war, aber nicht mehr, von wem."
Nach kurzer Überlegung antwortet B: "Das kann nicht sein, du musst dich irren!"
Welche Überlegung hatte er angestellt?

Legt man den Beginn der "neueren Zeit" (großzügig) mit etwa 1450 fest, so gilt für die gesuchte Zahl x die Ungleichungskette

$$2 \cdot 10^6 < 1450^2 < x < 1984^2 < 4 \cdot 10^6$$

Da die Ziffernfolge symmetrisch ist, müsste die letzte Stelle von x eine 2 oder eine 3 sein. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass keine Quadratzahl auf 2 oder 3 endet.
Beweis für diese Behauptung:
Es sei $x = 10a + b$ mit $a; b \in N$, $b \leq 9$. Dann ist $x^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$; die letzte Stelle von x^2 wir also von b^2 eindeutig bestimmt. Nun ist für

$$b = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$
$$b^2 = 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81$$

in keinem Fall also 2 oder 3.

Aufgabe 8/85
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, die sowohl als Summe von 10 als auch als Summe von 794 aufeinanderfolgenden (nicht notwendig natürlichen) ganzen Zahlen darstellbar ist!

Für die Summe $n = s_k$ von k aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gilt bekanntlich $2s_k = k(2a + k - 1)$, wobei a die kleinste der k ganzen Zahlen ist. Demnach ist die doppelte Summe restlos durch k teilbar. In unserem Falle ist sie sowohl durch 10 als auch durch 794 teilbar, also ein gemeinsames Vielfaches von 10 und 794; wegen der Minimalität von $n = s_k$ ist sie sogar das kleinste gemeinsame Vielfache:

$$2n = 2s_k = 2 \cdot 5 \cdot 397 = 3970 \qquad ; \qquad n = s_k = 5 \cdot 397 = 1985$$

Tatsächlich ist

$$1985 = \sum_{i=194}^{203} i = \sum_{i=-394}^{399} i$$

Aufgabe 9/85
Gegeben seien zwei einander ähnliche, rechtwinklige Dreiecke, die dem gleichen Kreis ein- bzw. umbeschrieben sind. Man ermittle das minimale Ähnlichkeitsverhältnis $k > 1$!

1. Wegen $k > 1$ ist k das Verhältnis der Streckenlängen aus dem umbeschriebenen Dreieck zu den entsprechenden Streckenlängen des einbeschriebenen Dreiecks.
2. Geht eine Kathetenlänge des einbeschriebenen Dreiecks gegen null, so geht die entsprechende Kathetenlänge des umbeschriebenen Dreiecks gegen r (wobei r der Radius des Kreises ist). Demnach gilt in diesem Falle $k \to \infty$.
3. Aus Symmetriegründen tritt ein Extremwert von k im Falle des gleichschenkligen Dreiecks auf; wegen

2. ist dies das gesuchte Minimum.
4. Für die Höhe h auf der Hypotenuse gilt im Falle des gleichschenkligen Dreiecks
a) für das einbeschriebene Dreieck $h_e = 4$
b) für das umbeschriebene Dreieck $h_u = r(1+\sqrt{2})$
(wie man an einer Skizze mit Hilfe der Sätze von Thales und Pythagoras leicht erkennt). Damit erhält man

$$k = h_u : h_e = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41...$$

Aufgabe 10/85
Gesucht sind alle Quadrupel $(n_1; n_2; n_3; n_4)$ natürlicher Zahlen n_i $(i = 1; 2; 3; 4)$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ (wobei $0 \in N$ sei), für die

$$z = n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot n_4! - 32$$

eine Quadratzahl ist.

Ist $n_4 \geq 5$, so enthält $n_4!$ die Primfaktoren 2 und 5. Damit ist

$$z = n_1!n_2!n_3!n_4! - 32 \equiv 0 - 32 \equiv 8 \pmod{10}$$

Nun gilt aber $(10a + b)^2 \equiv b^2 \pmod{10}$ für $a; b \in N$. Ist $b = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$, so ist $b^2 \equiv 0; 1; 4; 9; 6; 5; 6; 9; 4; 1 \pmod{10}$.
In keinem Fall gilt also $b^2 \equiv 8 \pmod{10}$. Demnach ist $n_4 \leq 4$. Damit kommen zunächst nur die folgenden fünf Quadrupel in Frage:

$$(0; 1; 2; 3), (0; 1; 2; 4), (0; 1; 3; 4), (0; 2; 3; 4), (1; 2; 3; 4)$$

Die Probe weist aus, dass das erste und das dritte Quadrupel entfallen. Die Lösungsmenge enthält also drei Elemente: $(0; 1 : 2; 4)$, $(0; 2; 3; 4)$ und $(1; 2; 3; 4)$.

Aufgabe 11/85
Es sei $n \in N$, $n \equiv 0 \pmod 9$. Man beweise, dass dann n^2 durch drei verschiedene Summen aus je drei Quadralen natürlicher Zahlen darstellbar ist (wobei die Zahl Null ausgenommen sei).

Aus $n \equiv 0 \pmod 9$ folgt $n = 9k$ mit $k \in N, n^2 = 81k^2$. Wegen

$$91 = 8^2 + 4^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2 + 4^2 = 6^2 + 6^2 + 3^2$$

folgt sofort die Behauptung

$$81k^2 = 64k^2 + 16k^2 + k^2 = (8k)^2 + (4k)^2 + k^2 = 49k^2 + 16k^2 + 16k^2 = (7k)^2 + (4k)^2 + (4k)^2 =$$
$$= 36k^2 + 36k^2 + 9k^2 = (6k)^2 + (6k)^2 + (3k)^2$$

Aufgabe 12/85
Welchen Rest lässt das Polynom $P(x) = x^n - x^{n-1}$ mit $n \in N$, $n \neq 0$ bei der Division durch das Polynom $Q(x) = (x-1)^2$?

Da $Q(x)$ vom zweiten Grade ist, muss der Rest $R(x)$ linear sein: $R(x) = a_1x + a_0$ mit reellen Zahlen a_1, a_0. Es gilt also

$$P(x) = (x-1)^2 P_1(x) + a_1x + a_0$$

wobei $P_1(x)$ ein Polynom $(n-2)$-ten Grades in x ist. Für $x = 1$ folgt

$$P(1) = 0 \cdot P_1(1) + a_1 + a_0 = 0$$

also $a_0 = -a_1$. Durch Differenzieren erhält man außerdem

$$P'(x) = 2(x-1)P_1(x) + (x-1)^2P_1'(x) + a_1 = nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}$$

Setzt man darin $x = 1$, so ergibt sich $P'(1) = a_1 = n - (n-1) = 1$. Damit ist $R(x) = x - 1$.

Aufgabe 13/85
Es seien x_1, x_2, m und n ganze Zahlen und m kein Teiler von n. Ferner seien y_1 und y_2 reelle Zahlen, und es gelte

$$x_2 = x_1 + m \qquad ; \qquad y_2 = y_1 + n$$

Man zeige: Es gibt keine quadratische Funktion $y = f(x) = x^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten b und c derart, dass $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ gilt.

Angenommen, es gäbe eine solche Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten a und b. Dann wäre

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = (ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)[a(x_2 + x_1) + b] = m[a(x_2 + x_1) + b] = n$$

Wegen der Ganzzahligkeit von a, b, x_1, und x_2 wäre also n durch m teilbar im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

Aufgabe 14/85
Man ermittle alle Primzahl-Zwillingspaare $(p_1; p_2)$ der Form $p_1 = 2p-1$, $p_2 = 2p+1$, bei denen auch p eine Primzahl ist!

Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $2p-1$, $2p$ und $2p+1$ ist mit Sicherheit genau eine durch 3 teilbar.
1. Es sei dies $p_1 = 2p - 1$. Wegen der Primzahleigenschaft von p_1 ist dann

$$p_1 = 2p - 1 = 3 \qquad ; \qquad p = 2 \qquad ; \qquad p_2 = 2p + 1 = 5$$

Damit ist das Paar $(p_{11}; p_{21}) = (3; 5)$ als Element der Lösungsmenge gefunden.
2. Es sei dies $2p$. Wegen der Primzahleigenschaft von p ist dann

$$p = 3 \qquad ; \qquad p_1 = 2p - 1 = 5 \qquad ; \qquad p_2 = 2p + 1 = 7$$

und es ist das Paar $(p_{12}; p_{22}) = (5; 7)$ als Element der Lösungsmenge gefunden.
3. Es sei dies $p = 2p + 1$. Wegen der Primzahleigenschaft von p_2 ist dann $p_2 = 2p + 3$ und $p = 1$ im Widerspruch zur geforderten Primzahleigenschaft von p. Diese Möglichkeit scheidet also aus. Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine weiteren Elemente der Lösungsmenge geben.

Aufgabe 15/85
Es seien durch die Zahlen $a; b; c$ die Seitenlängen eines Dreiecks mit dem Umfang U und durch a^2; b^2; c^2 die Seitenlängen eines Dreiecks mit dem Umfang U' gegeben. Man ermittle die untere Grenze des Verhältnisses $U^2 : U'$!

Nach den Dreiecksungleichungen gilt $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, also

$$c(a + b) > c^2 \qquad ; \qquad a(b + c) > a^2 \qquad ; \qquad b(c + a) > b^2$$

$$c(a + b + c) > 2c^2 \qquad ; \qquad a(a + b + c) > 2a^2 \qquad ; \qquad b(c + a + b) > 2b^2$$

Durch Addition der drei Ungleichungen erhält man

$$a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) = (a + b + c)^2 > 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Wegen $a + b + c = U$ und $a^2 + b^2 + c^2 = U'$ folgt sofort $U^2 > 2U'$ und $U^2 : U' > 2$. (wegen $U' \neq 0$). Die untere Grenze von $U^2 : U'$ (die nicht angenommen wird) ist also 2.

Aufgabe 16/85
Man beweise die Gültigkeit der Fermatschen Behauptung
"Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ hat für positive ganze Zahlen $a; b; c; n$ mit $n > 2$ keine Lösung"
für den speziellen Fall, dass $a; b; c; n$ Primzahlen sind!

Angenommen, es gäbe eine Lösung der geforderten Art. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Sind a und b beide gerade, so ist $a = b = 2$ wegen der Primzahleigenschaft von a und b und folglich
$$a^n + b^n = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = c^n$$
also $c = \sqrt[n]{2^{n+1}} = 2 \cdot \sqrt[n]{2} \notin N$.

2. Sind a und b beide ungerade, so sind auch a^n und b^n beide ungerade. Damit ist c^n als Summe zweier ungerader Zahlen gerade. Da außerdem wegen $a; b > 2$ auch $a^n + b^n = c^n > 2$ gilt , ist c sicher keine Primzahl.

3. Ist genau eine der beiden Zahlen $a; b$ gerade (O.B.d.A. sei dies a), so ist diese wegen der Primzahleigenschaft gleich 2: $a = 2$. Die Gleichung $a^n + b1n = 2^n + b^n = c^n$ ist dann äquivalent der Gleichung $c^n - b^n = 2^n$.
Nun ist andererseits
$$c^n - b^n = (c - b)(c^{n-1}b^0 + c^{n-2}b^1 + ... + c^0 b^{n-1})$$
Da $b; c; n$ wegen ihrer Primzahleigenschaft ungerade sind, ($b; c; n > 2$ ist vorausgesetzt), stellt die zweite Klammer eine Summe aus einer ungeraden Anzahl ungerader Summanden dar, ist also ungerade. Damit kann $c^n - b^n$ nicht gleich 2^n sein (Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung).

Jeder der drei Fälle führt also auf einen Widerspruch zur Annahme. Da die Fallunterscheidung vollständig ist, wurde damit die Annahme widerlegt.

Aufgabe 17/85
Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen $x; y; z$ (wobei $0 \in N$ sei), die der Gleichung $5x! = y! + z! + 1$ genügen.

1. Ist $x = 0$ oder $x = 1$, so ist $x! = 1$ und die Gleichung reduziert sich auf die Gleichung $4 = y! + z!$.
Diese Gleichung ist durch Probieren sehr schnell zu lösen: $y = z = 2$. Damit sind zwei Tripel gefunden: $(x_1; y_1; z_1) = (0; 2; 2)$ und $(x_2; y_2; z_2) = (1; 2; 2)$.
2. Ist $x > 1$, so enthält $x!$ den Faktor 2; damit ist $5x! \equiv 0 \pmod{10}$, also $y! + z! \equiv 9 \pmod{10}$.
Sicher ist demnach genau einer der beiden Summanden $y!$ und $z!$ ungerade. Wegen der Symmetrie der Gleichung bzw. der Kongruenz in y und z kann man o.B.d.A. annehmen, es sei dies $y!$. Da $y!$ für $y > 1$ den Faktor 2 enthält, ist dann $y! = 1$ und damit $z! \equiv 8 \pmod{10}$.
Dies ist aber nicht möglich; denn es ist $2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$ und $x! \equiv 0 \pmod{10}$ für $x \geq 5$. Daraus folgt, dass es keine weiteren Tripel der geforderten Art gibt.

Aufgabe 18/85
Einem Kreis sei ein regelmäßiges n-Eck einbeschrieben, dessen Seiten von Halbkreisbögen überspannt sind. Welches n-Eck erfüllt die Bedingung, dass die Summe der von den Halbkreisbögen und den zugehörigen Umkreisbögen begrenzten sichelförmigen Flächen gleich der n-Ecksfläche ist?

Die Summe 5 der sichelförmigen Flächen ergibt sich als Summe aus der n-Ecksfläche A_n und n. Halbkreisflächen mit dem Radius der halben n-Eckseite a, vermindert um die Umkreisfläche $r^2\pi$ des n-Ecks (wobei r der Umkreisradius ist):
$$S = A_n + n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - r^2\pi$$
Da $S = A_n$ sein soll, folgt $\frac{1}{8}na^2\pi = r^2\pi$ und wegen $a = 2r \sin \frac{\pi}{n}$ und $r^2\pi \neq 0$ schließlich $n \sin^2 \frac{\pi}{n} = 2$.
Nun bildet die linke Seite dieser Gleichung für $n \geq 3$ eine streng monoton fallende Folge (wie man z.B. mit der 1.Ableitung der Funktion $y = x \sin^2 \frac{\pi}{x}$ nachweisen kann). Deshalb nimmt sie von $n = 3$ an jeden Wert, speziell auch den Wert 2, höchstens einmal an. Probieren liefert schnell $n = 4$. Das gesuchte n-Eck ist also das Quadrat.

Aufgabe 19/85
Es sei p eine Primzahl; deren k Stellen (in dezimaler Schreibweise) sämtlich gleich 1 sind. Man beweise, dass dann k ebenfalls eine Primzahl ist. (Wie das Beispiel 111 zeigt, ist diese Behauptung nicht umkehrbar.)

Es sei

$$p = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i) \frac{10^k - 1}{9}$$

eine Zahl, die den Voraussetzungen der Behauptung entspricht. Angenommen, k sei keine Primzahl; d.h., es gelte $k = ab$ mit $a; b \in N$, $a; b > 1$. Dann gilt $(10^a - 1) \mid (10^{ab} - 1)$ (wie man z.B. durch Partialdivision leicht nachprüft). Damit gilt auch

$$\frac{10^a - 1}{9} \mid \frac{10^{ab} - 1}{9} = \frac{10^k - 1}{9} = p$$

Da $a > 1$ gilt, ist $(10^a - 1) : 9$ eine natürliche Zahl $n > 1$; da $b \geq 1$ gilt, ist $ab > a$. Demnach hat p einen echten Teiler n: $1 < n < p$; $n \mid p$.
Damit ist p keine Primzahl im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist die Annahme, k sei eine Primzahl, falsch.

Aufgabe 20/85
Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck und F der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man berechne das Verhältnis $DF : BF$.

Wir benutzen den Hilfssatz: "Die von einem Eckpunkt eines regelmäßigen Fünfecks ausgehenden Diagonalen dritteln den Fünfeckswinkel".
Beweis des Hilfssatzes:
Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck. Wegen $BC = CD = DE$ sind die Winkel BAC, CAD, DAE Peripheriewinkel des Fünfeck-Umkreises über gleichen Sehnen. Folglich gilt nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAE$$

Wegen $\measuredangle BAC + \measuredangle CAD + \measuredangle DAE = \measuredangle BAE$ ist

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAE = \frac{1}{3} \measuredangle BAE = 36°$$

Durch zyklische Vertauschung folgt die Behauptung für alle Ecken. Nach dem Hilfssatz ist AF Halbierende des Winkels BAD im Dreieck ABD. Nach einem bekannten Satz teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten. Folglich ist $DF : BF = AD : AB$. Nach dem Sinussatz gilt aber

$$AD : AB = \sin \measuredangle DBA : \sin \measuredangle BDA = \sin 72° : \sin 36° = 2 \cos 36°$$

wegen $\sin 72° = 2 \sin 36° \cos 36°$. Damit ist $DF : BF = 2 \cos 36° \approx 1{,}618$.

Aufgabe 21/85
Zu zwei reellen Zahlen a und b sind alle dritten reellen Zahlen x_i derart zu bestimmen, dass die drei Produkte aus einer der drei Zahlen und der Summe der beiden anderen eine arithmetische Folge 1.Ordnung bilden.

Mit dem Ansatz

$$a(b + x_i) = b(a + x_i) + d = x_i(a + b) + 2d$$

ergibt sich für die Differenz d der arithmetischen Folge und die gesuchten reellen Zahlen x_i

$$d = \frac{a^2 b - ab^2}{2a - b} \qquad ; \qquad x_i = \frac{d}{a - b} = \frac{ab}{2a - b}$$

Aufgabe 22/85
Es ist zu beweisen: Für jede natürliche Zahl n existiert ein Intervall von n natürlichen Zahlen, das keine Primzahl enthält ($n \geq 2$ vorausgesetzt).

Man erhält ein Intervall von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, in dem keine Primzahl vorkommt, wenn man zu allen Zahlen des Intervalls $[2;(n+1)]$ das doppelte Produkt aller ungeraden Zahlen dieses Intervalls addiert.
Dann ist nämlich jede ungerade Zahl des so gebildeten Intervalls offensichtlich durch die entsprechende ungerade Zahl des ursprünglichen Intervalls teilbar, und die geraden Zahlen des neuen Intervalls sind sämtlich größer als 2 und damit ebenfalls keine Primzahlen.
Das neue Intervall enthält also n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist.
Beispiel: Man erhält für $n = 5$ aus dem Intervall $[2;6]$ durch Addition von $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ das Intervall $[32;36]$, das 5 natürliche Zahlen, aber keine Primzahl enthält.
Bemerkung: Die auf diese Weise gebildeten Intervalle enthalten nicht immer die kleinsten Zahlen. So ist für $n = 5$ auch das Intervall $[24;28]$ eine Lösung.

Aufgabe 23/85
Gegeben sei die n-stellige natürliche Zahl $z_n = 1985!$. Man bilde daraus die natürliche Zahl z_{n-1}, indem man die Einerstelle von z_n streicht und von der verbleibenden $(n-1)$-stelligen Zahl subtrahiert.
Das Verfahren setze man solange fort, bis sich eine einstellige Zahl z ergibt. Wie groß ist z?

Wegen $z_n = 1985! > 11!$ ist z_n mit Sicherheit restlos durch 11 teilbar. Es sei nun $z_k = 10a + b$ mit $a; b \in N$, $0 \leq b \leq 9$ eine nach der Aufgabenvorschrift gebildete und restlos durch 11 teilbare Zahl. Dann ist

$$z_{k-1} = a - b = 11a - z_k$$

sicher ebenfalls durch 11 teilbar. Daraus folgt (nach dem Prinzip der vollständigen Induktion - rückläufig angewendet), dass alle z_k speziell auch z, restlos durch 11 teilbar sind. Da z zudem einstellig ist, kann nur $z = 0$ gelten.

Aufgabe 24/85
Es sei ein Rechteck $ABCD$ mit einem inneren Punkt P gegeben. Man ermittle PA in Abhängigkeit von PB, PC und PD.
Welchen Wert erhält man für $PB = 33$ LE, $PC = 28$ LE, $PD = 41$ LE?

Wir bezeichnen die Lote von P auf die Seiten AB, BC, CD und DA mit m bzw. n, o und p. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$AP^2 = m^2 + p^2; \qquad PB^2 = m^2 + n^2; \qquad PC^2 = n^2 + o^2; \qquad PD^2 = o^2 + p^2$$

und demnach

$$AP^2 + PC^2 = (m^2 + p^2) + (n^2 + o^2) = (m^2 + n^2) + (p^2 + o^2) = PB^2 + PD^2$$

also $AP^2 = PB^2 + PD^2 - PC^2$ und

$$AP = \sqrt{PB^2 + PD^2 - PC^2} = \sqrt{33^2 + 41^2 - 28^2} = \sqrt{1996} \text{ LE}$$

2.26 Aufgaben und Lösungen 1986

Aufgabe 1/86
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, die das Produkt von 3 Primfaktoren $p_1; p_2; p_3$ ist und es gilt: $p_3 = 55 \cdot p_1 \cdot p_2 + 1$ und $p_3 > p_2 > p_1$.

Mit Sicherheit gilt $p_3 > 3$. Damit ist p_3 ungerade und es folgt, dass $p_3 - 1 = 55 \cdot p_1 \cdot p_2$ gerade ist. Demnach ist wenigstens eine der beiden Primzahlen p_1 und p_2, gerade; O.B.d.A. (wegen der Symmetrie in p_1 und p_2) sei dies $p_1 = 2$. Damit ergibt sich $p_3 = 110 \cdot p_2 + 1$.
Das Produkt $p_1p_2p_3$ wird genau dann minimal, wenn die einzelnen Faktoren minimal sind. Wir probieren deshalb mit $p_2 = 2$ beginnend die Primzahlen p_2 daraufhin durch, ob $110 \cdot p_2 + 1$ eine Primzahl liefert.
Für $p_2 = 2$ ergibt sich $p_3 = 221 = 13 \cdot 17$, also keine Primzahl. Dagegen liefert bereits $p_2 = 3$ die Primzahl $p_3 = 331$. Das gesuchte Produkt ist also $p - 1p_2p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 331 = 1986$.

Aufgabe 2/86
Eine Zahlenfolge sei durch $a_k = 3a_{k-1} + 2a_{k-2}$ mit $a_i \in N$ für jedes $i \in N$; $k \geq 3; a_1 \geq 1; a_2 \geq a_1$ gegeben. Man zeige, dass dann gilt: $a_k > 2^{k-2}$.

Wir beweisen zunächst, dass $\{a_k\}$ streng monoton wächst. Nach Voraussetzung ist $a_2 > a_1; a_3 = 3a_2 - 2a_1 > 3a_2 = a_2$. Ist nun $a_k > a_{k-1}$ für irgend ein $k \geq 3$, so folgt $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} > 3a_k - 2a_k = a_k$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also für jedes k, dass $a_k > a_{k-1}$ ist.
Daraus folgt, dass $a_k - a_{k-1} > 0$ ist. Aus der Ganzzahligkeit von a_k und a_{k-1} folgt sogar, dass $a_k - a_{k-1} \geq 1$ für jedes k gilt. Aus $a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2}$ folgt nun für $k \geq 3$

$$a_k - a_{k-1} = 2a_{k-1} - 2a_{k-2} \qquad \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} - a_{k-2}} = 2 \qquad \text{und damit}$$

$$\prod_{k=3}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} - a_{k-2}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_2 - a_1} = 2^{n-2}$$

Durch äquivalente Umformung ergibt sich daraus, wegen $a_2 - a_1 \geq 1; a_{n-1} > 0$

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-2}(a_2 - a_1) > 2^{n-2}$$

Aufgabe 3/86
Man beweise: Es gibt keine Menge aus n voneinander verschiedenen Primzahlen p_i $(i = 1; 2; 3; ...; n)$ derart, dass die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = c$$

mit natürlichen Zahlen a_i und c erfüllt wird.

Es ist

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = \frac{1}{p_1^{a_1}} + \frac{1}{p_2^{a_2}} + ... + \frac{1}{p_n^{a_n}} = \frac{p_2^{a_2} p_3^{a_3} ... p_n^{a_n} + p_1^{a_1} p_3^{a_3} ... p_n^{a_n} + ... + p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_{n-1}^{a_{n-1}}}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}}$$

Im letzten Bruch ist der Nenner durch $p_1^{a_1}$ teilbar, der Zähler jedoch nicht (wegen der Verschiedenheit der p_i enthält der erste Summand den Faktor $p_1^{a_1}$ nicht). Folglich ist der Bruch nicht mit $p_1^{a_1}$ kürzbar und damit keine ganze, erst recht keine natürliche Zahl.

Aufgabe 4/86
Man ermittle ein Verfahren, mit dessen Hilfe man jede Kubikzahl als Differenz aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen darstellen kann, und entwickle daraus eine Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen!

Es soll gelten $k^3 = a_k^2 - b_k^2$ mit $k; a_k; b_k \in N$, also $k^2 \cdot k = (a_k + b_k)(a_k - b_k)$. Damit kann man $k^2 = a_k + b_k, k = a_k - b_k$ setzen. Daraus folgt

$$a_k = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \qquad ; \qquad b_k = \frac{k^2 - k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

Da jedes Produkt aus zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, folgt, dass a_k und b_k ganzzahlig sind. Nun gilt für jedes k, dass $b_{k+1} = \frac{(k+1)k}{2} = a_k$ ist. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 - b_k^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = a_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - \sum_{k=2}^{n} b_k^2 - b_1^2 =$$

$$= a_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + 0 = a_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = a_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe 5/86
Gesucht sind alle Paare reeller Zahlen $(x; y)$, die der Gleichung genügen:

$$2 \sin(2\pi x^2 + y) = \sqrt{2(x^2 + x^{-2})}$$

Wegen $\sin \alpha \leq 1$ ist $2 \sin(2\pi x^2 + y) \leq 2$. Wegen $x^2 + x^{-2} \geq 2$ ist $\sqrt{2(x^2 + x^{-2})} \geq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Daraus folgt

$$2 \sin(2\pi x^2 + y) = \sqrt{2(x^2 + x^{-2})} = 2$$

also $\sin(2\pi x^2 + y) = 2$ und $x^2 + x^{-2} = 2$. Aus der letzten Gleichung folgt $x^2 = \pm 1; x = \pm 1$ (nichtreelle Werte entfallen!), und damit ergibt sich aus der vorletzten Gleichung

$$\sin(2\pi x^2 + y) = \sin(y \pm 2\pi) = \sin y = 1; y = (0{,}5 \pm 2k)\pi$$

mit $k \in N$. Es erfüllen also alle Paare $(x; y)$ mit $x = \pm 1; y = (0{,}5 \pm 2k)\pi$ die Gleichung.

Aufgabe 6/86
Es ist die Anzahl 2 der natürlichen Zahlen zu bestimmen, bei denen die Folge der Ziffern (im dekadischen System von links beginnend) streng monoton wächst.

Die größte Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist offensichtlich die Zahl 123456789. Aus ihr gewinnt man alle übrigen durch Streichen von 1 bis 7 Ziffern (nach Definition muss eine streng monotone Folge mindestens zwei Glieder enthalten). Nun ist aber die Anzahl der Zahlen, die man durch Streichen von k Ziffern erhält $(0 \leq k \leq 9)$, gleich $\binom{9}{2}$. Somit gilt für die Zahl z:

$$z = \sum_{k=0}^{7} \binom{9}{k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} - \binom{9}{8} - \binom{9}{9} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} - 10$$

Aus dem binomischen Lehrsatz $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ folgt für $a = b = 1$ und $n = 9$ schließlich $z = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} - 10 = 2^9 - 10 = 502$.

Aufgabe 7/86
In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c gelte für den Flächeninhalt

$$A = 0{,}5(a^2 - ab + b^2)$$

Wie groß sind die Seiten?

Nach der Aufgabenstellung ist

$$2A = (a^2 - ab + b^2) = (a^2 - 2ab + b^2) + ab = (a - b)^2 + ab \geq ab$$

wegen $(a - b)^2 \geq 0$. Andererseits gilt für jedes Dreieck mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ: $2A = ab \sin\gamma \leq ab$ wegen $\sin\gamma \leq 1$. Aus beiden Ungleichungen folgt sofort

$$ab \leq 2A \leq ab \qquad \text{also} \qquad 2A = ab; \sin\gamma = 1; \gamma = 90°; a = b$$

Folglich ist das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig mit $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$ und es gilt $a = b, c = a\sqrt{2}$.

Aufgabe 8/86
Es ist zu beweisen, dass

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}} = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + ...}}}$$

ist (wobei als Wurzeln nur nichtnegative Werte gelten)!

Es sei $x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2...}}}$ und $y = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12....}}}$ Dann folgt

$$\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2...}}}} \to x = 2 + \sqrt{x} \to \sqrt{x} = x - 2$$

$$y^2 = 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12...}}} \to y^2 = 12 + y \to y^2 - y - 12 = 0$$

Diese Gleichungen haben (im nichtnegativen Bereich) die Lösungen $x = y = 4$, w.z.b.w.

Aufgabe 9/86
Gesucht sind alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x; y; z, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Summe der drei Zahlen ist 107.
2. Mindestens zwei der drei Zahlen sind Quadrate natürlicher Zahlen.
3. Mindestens zwei der drei um 13 verminderten Zahlen sind Quadrate natürlicher Zahlen.

Nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip gilt für mindestens eine der drei Zahlen (O.B.d.A. sei dies x): $x = k_1^2$ und $x - 13 = k_2^2$ mit $k_1; k_2 \in N$, daraus folgt $k_1^2 - k_2^2 = 13$, also $k_1^2 = 49 = x; k_2^2 = 36$ als einzige Lösung (man prüft leicht nach, dass für $k_1 < 7$ keine Lösung existiert; für $k_2 > 6$ wird die Differenz benachbarter Quadratzahlen stets größer als 13, erst recht die nicht benachbarter).
Es sei nun y die zweite Zahl, die, um 13 vermindert, ebenfalls Quadratzahl ist. Dann gilt wegen $x+y+z = 107$ und $x = 49$

$$y + z = 58; \qquad y = 58 - z \to y - 13 = k_3^2$$

mit $k_3 \in N$, also $y-13 = k_3^2 = 58-13-z = 45-z$, d.h. $z = 45-k_3^2$. Damit gilt $k_3^2 \leq 36; k_3 \leq 6$ wegen $z \geq 0$. Es wären also die 7 Zahlen $k_3 = 0; 1; 2; ...; 6$ daraufhin zu überprüfen, ob sich y oder z als Quadratzahl ergibt. Offensichtlich ist dies nur für $k_{31} = 3; z_1 = 36; y_1 = 22$ und für $k_{32} = 6; z_2 = 9, y_2 = 49$ der Fall. Es gibt also (bis auf die Reihenfolge) genau zwei derartige Tripel: $(x; y; z) = (49; 22; 36)$, $(x; y; z) = (49; 49; 9)$. Beim zweiten Tripel sind sogar alle drei Zahlen Quadrate.

Aufgabe 10/86
Es seien $a; n \in N$ und $n \geq 2$. Welchen Rest lässt a^n beim Teilen durch $(a + 1)$?

Es ist

$$a^n = [(a + 1) - 1]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a + 1)^{n-k}(-1)^k$$

Alle Glieder der Summe mit Ausnahme des letzten enthalten den Faktor $(a + 1)$. Der Rest R wird also vom letzten Glied $(-1)^n$ bestimmt: Es ist $R = 1$ für gerades n und $R = -1$ für ungerades n.

Aufgabe 11/86
Man zeige, dass jede mehrstellige natürliche Zahl $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$ größer ist als ihr Querprodukt $Q(n) = \prod_{i=0}^{k} a_i$ (mit $a_i \in N; a_i \leq 9; a_k > 0$).

Es ist

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i = a_k \cdot 10^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 10^i > a_k \cdot 10^k > a_k \cdot 9^k = a_k \cdot \prod_{i=1}^{k} 9 \geq a_k \cdot \prod_{i=1}^{k-1} a_i = \prod_{i=0}^{k} a_i = Q(n)$$

Aufgabe 12/86
Für wie viele natürliche Zahlen $n = \sum_{i=0}^{3} 10^i a_i$, mit $a_i \in N; 1 \leq a_3 \leq 9; 0 \leq a_0; a_1; a_2 \leq 9$ gilt $a_i \leq a_j$ für $i < j$?

Wir untersuchen zunächst, wieviele derartige Zahlen für $a_2 = k$ existieren ($k \in N, 0 \leq k \leq 9$). Offensichtlich kann a_1 mit $k+1$ Werten (die Null eingeschlossen) belegt werden; für jede dieser Belegungen gibt es $a_1 + 1$ Belegungen von a_0. Demnach ist die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit $a_2 = k$, die die gestellte Bedingung erfüllen, gleich

$$\sum_{a_1=0}^{k} (a_1 + 1) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2)$$

Da a_3 auf $10-k$ verschiedene Weisen wählbar ist und jede davon mit jeder Wahl von k kombiniert werden kann, ergibt sich die Gesamtzahl zu

$$\sum_{k=0}^{9} (10-k) \cdot \frac{1}{2} \cdot (k^2 + 3k + 2) = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2}(-k^3 + 7k^2 + 28k + 20) = 715$$

In dieser Anzahl ist auch $n = 0000$ enthalten. Schließt man diese Zahl als nicht vierstellig aus, so beträgt die Gesamtzahl der möglichen Zahlen n nur 714.

Aufgabe 13/86
Es ist zu beweisen: Ist eine sechsstellige natürliche Zahl ohne Rest durch die Zahlen 1; 11; 13; 27 oder 37 teilbar, so ist auch jede durch zyklische Vertauschung der Ziffern entstehende natürliche Zahl durch diese Zahlen restlos teilbar (dekadisches System vorausgesetzt).

Es sei $a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f$ mit $a; b; c; d; e; f \in N; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b; c; d; e; f \leq 9$ eine Zahl mit der vorausgesetzten Eigenschaft. Dann hat auch das 10fache dieser Zahl

$$a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 = b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + a + 999999a$$

diese Eigenschaft. Wegen $999999a = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 27 \cdot 37a$ gilt dies dann auch für die natürliche Zahl $b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + a$.

Aufgabe 14/86
Es seien N die Menge der natürlichen Zahlen und P die Menge der Primzahlen. Gesucht sind alle Lösungstripel $(x; y; z)$ mit $x; y \in P; z \in N$ der Gleichung

$$\frac{x+y}{x-y} = z$$

Wegen $z = \frac{x+y}{x-y} = 1 + \frac{2y}{x-y} \in N$ ist auch $\frac{2y}{x-y} \in N$. Folglich ist $x - y$ ein Teiler von $2y$. Wegen der Primzahleigenschaft von y gibt es nur 4 Möglichkeiten:

1) $x - y = 1, x = y + 1$. Das heißt, x und y sind aufeinanderfolgende Zahlen; wegen der Primzahleigenschaft von x und y ist das nur für $y = 2, x = 3$ möglich. Es folgt $z = 5 \in P \subset N$.
2) $x - y = 2, x = y + 2$. Dann ist $z = \frac{x+y}{x-y} = \frac{2y+2}{2} = y + 1$. Lösungstripel ergeben sich für alle Primzahl-Zwillingspaare, wobei y die kleinere der beiden Primzahlen ist und z die dazwischenliegende natürliche Zahl.
3) $x - y = y, x = 2y$. Das heißt, $x \notin P$, dieser Fall ist also unmöglich.
4) $x - y = 2y, x = 3y$. Entspricht Fall 3.
Ergänzung: Setzt man $x \in N$ statt $x \in P$ voraus, so ergeben auch der 3. und 4. Fall Lösungen:
3) $(2y; y; 3)$ mit $y \in P$.
4) $(3y; y; 2)$ mit $y \in P$.
Interessant ist, dass in beiden Fällen z konstant (und eine Primzahl) ist.

Aufgabe 15/86
Man beweise: Sind bei einem Tetraeder die gegenüberliegenden Kanten gleich lang, so stehen die drei Verbindungsstrecken gegenüberliegender Kantenmitten senkrecht auf den zugehörigen Kanten.

Es seien A, B, C, D die Ecken des Tetraeders und $AB = CD, BC = DA, CA = BD$. Ferner seien E und F die Halbierungspunkte der Kanten AB und CD. Dann gilt $\triangle\ ACD \cong \triangle\ BCD$, wegen $CA = BD, DA = BC$ und $CD = CC$. Daraus folgt $AF = BF$, d.h., das Dreieck FAB ist gleichschenklig. Aus Symmetriegründen steht dann die Halbierende EF der Seite AB senkrecht auf dieser Seite. Analog verläuft der Beweis für die übrigen Kanten.

Aufgabe 16/86
Die Winkelhalbierenden eines Parallelogrammes bestimmen ein weiteres Parallelogramm. Man ermittle das Verhältnis aus den Flächeninhalten dieses und des ursprünglichen Parallelogramms.

Es seien a und b zwei aneinanderstoßende Seiten des ursprünglichen Parallelogramms und $2\alpha \leq 90°$ der Winkel zwischen ihnen. Ferner seien x und y zwei aneinanderstoßende Seiten des von den Winkelhalbierenden gebildeten Parallelogramms. Dann gilt, wie man sich an einer Skizze verdeutlicht

$$x = a\sin\alpha - b\sin\alpha = (a-b)\sin\alpha \qquad ; \qquad y = a\cos\alpha - b\cos\alpha = (a-b)\cos\alpha$$

Für den Schnittwinkel φ zweier nichtparalleler Winkelhalbierenden gilt wegen des Winkelsummensatzes für ebene Dreiecke

$$\alpha + 0{,}5(180° - 2\alpha) + \varphi = 180° \to \varphi = 90°$$

d.h., das sich ergebende Parallelogramm ist ein Rechteck. Damit folgt für seinen Flächeninhalt A_2:

$$A_2 = xy = (a-b)^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0{,}5(a-b)^2 \sin(2\alpha)$$

Für den Flächeninhalt A_1 des ursprünglichen Parallelogramms gilt $A_1 = ab\sin(2\alpha)$. Damit folgt

$$A_2 : A_1 = \frac{0{,}5(a-b)^2 \sin(2\alpha)}{ab\sin(2\alpha)} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

Bemerkung: Legt man anstelle der (Innen-)Winkelhalbierenden die Außenwinkelhalbierenden zugrunde, so folgt analog $A_2 : A_1 = (a+b)^2 : (2ab)$.

Aufgabe 17/86
Einem Kreis mit dem Radius r sei ein gleichschenkliges Trapez umbeschrieben, bei dem die Längen der zueinander parallelen Seiten im Verhältnis 1 : 4 stehen. Man gebe den Flächeninhalt des Trapezes in Abhängigkeit von r an!

Bezeichnet man die parallelen Seiten AB und CD des Trapezes mit a bzw. c, die Höhe mit h, so gilt für den Flächeninhalt I

$$I = 0{,}5(a+c)h = 0{,}5(4c+c) - 2r = 5rc$$

Es kommt nun darauf an, c in Abhängigkeit von r anzugeben. Es seien E, F und G die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten AB, BC bzw. CD und H der Fußpunkt des Lotes von C auf AB. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$HC^2 = 4r^2 = BC^2 - HB^2 = (BF+FC)^2 - (EB-EH)^2 = (BE+GC)^2 - (BE-GC)^2$$

(da $BF = BE, FC = GC$ als Tangentenabschnitte vom gleichen Punkt aus und $EH = GC$)

$$= (0{,}5a + 0{,}5c)^2 - (0{,}5a - 0{,}5c)^2 = (2c + 0{,}5c)^2 - (2c - 0{,}5c)^2 = 6{,}25c^2 - 2{,}25c^2 = 4c^2$$

Also ist $r = c$ und damit $I = 5r^2$.

Aufgabe 18/86
Es ist die kleinste Zahl $n \in N$ mit folgenden Eigenschaften zu ermitteln:
Ihre Einerstelle (in dezimaler Schreibweise) ist 7. Streicht man diese und setzt man sie als höchste Stelle voran, so ergibt sich $5n$.

Es sei $n = 10a + 7$mit $a \in N$ und $a \neq 0$. Die Zahl a habe b Stellen mit $b \in N$ und $b \neq 0$. Damit können die Bedingungen der Aufgabe in folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$5n = 5(10a+7) = 7 \cdot 10^b + 8; \qquad 49a + 35 = 7 \cdot 10^b; \qquad 7a = 10^b - 5; \qquad a = \frac{1}{7}(10^b - 5)$$

Daraus folgt $10^b \equiv 5 \pmod 7$. Es ist also (wegen der Minimalität von a) die kleinste Potenz von 10 zu suchen, die beim Teilen durch 7 den Rest 5 lässt. Durch systematisches Probieren findet man schnell $b = 5$, $10^5 - 5 = 99995 = 7 \cdot 14285$, $a = 14285$ und $n = 142857$. Tatsächlich ist $714285 = 5 \cdot 142857$.
Zusatz: Zunächst (auf den ersten Blick) überrascht, dass sich die Perioden der Brüche $\frac{1}{7}$ und $\frac{5}{7}$ ergeben. Bei tieferem Eindringen erklärt sich dies mit den Eigenschaften der Periode dieser Brüche.

Aufgabe 19/86
Man suche, ohne irgendwelche Hilfsmittel zu verwenden, alle (im dekadischen System echt) vierstelligen natürlichen Zahlen, die Quadrat einer natürlichen Zahl sind und bei denen sowohl die ersten beiden Stellen als auch die letzten beiden Stellen einander gleich sind.

Die gesuchten natürlichen Zahlen n sind von der Form

$$n = 1100a + 11b = 11(100a + b) = k^2$$

mit $a; b; k \in N, a; b \leq 9; a; k > 0$.
Offensichtlich ist n durch 11 teilbar. Dann ist auch k durch 11 teilbar, und damit ist $n = k^2$ sogar durch 11^2 teilbar. Daraus folgt weiter die Teilbarkeit von $100a + b$ durch 11. Nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 ist dann auch $a + b$ durch 11 teilbar, und wegen $a; b \leq 9; a > 0$ gilt $a + b = 11, b = 11 - a$. Damit ist

$$n = 11(100a + b) = 11(100a + 11 - a) = 11(99a + 11) = 11^2(9a + 1) = k^2$$

Demnach ist $9a + 1 = m^2$ mit $m \in N, m > 0$. Probiert man die möglichen a-Werte durch $(a = 1; 2; ...; 9)$, so stellt man fest, dass nur $a = 7$ eine Quadratzahl liefert: $m^2 = 9 \cdot 7 + 1 = 64 = 8^2$. Also existiert genau eine Zahl n mit der geforderten Eigenschaft: $n = 7744 = 88^2$.

Aufgabe 20/86
Es sind alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y zu ermitteln, für die die beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$x^4 + y^4 = 12(x^2 + y^2) - 6x^2y^2 + 16 \qquad (1)$$
$$xy = 3 \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $4xy = 4 \cdot 3 = 12$. Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich

$$x^4 + y^4 = 4xy(x^2 + y^2) - 6x^2y^2 + 16$$

und nach äquivalenter Umformung $(x - y)^4 = 16$. Daraus erhält man als reelle Zwischenlösungen

$$x - y = 2 \qquad \text{und} \qquad x - y = -2 \quad (3a; b)$$

Wegen (2) gilt $x; y \neq 0$; damit folgt aus (2) $y = \frac{3}{x}$. Setzt man dies in (3a;b) ein, so ergeben sich die beiden Gleichungen $x - \frac{3}{x} = 2$ und $x - \frac{3}{x} = 2$, d.h.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \to x_{11} = -1; x_{12} = 3; x_{21} = -3; x_{22} = 1$$

Aus (2) folgt dann $y_{11} = -3; y_{12} = 1; y_{21} = -1; y_{22} = 3$.
Die Lösungsmenge ist also $L = \{(-1; -3); (3; 1); (-3; -1); (1; 3)\}$.

Aufgabe 21/86
Gegeben sei die Folge $\{a_k\}$ mit $k \in N; a_0 = 1$ und $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$. Man zeige, dass nur die ersten beiden Glieder natürliche Zahlen sind!

Es ist $a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = \frac{5}{2}; a_3 = \frac{29}{10}, ..., a_k = \frac{p_k}{q_k}$,

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{k} = \frac{p_k}{q_k} + \frac{q_k}{p_k} = \frac{p_k^2 + q_k^2}{p_k q_k}, ...$$

mit $p_k; q_k \in N$, wobei man o.B.d.A. $(p_k, q_k) = 1$ voraussetzen kann.
Angenommen, a_{k+1} wäre eine natürliche Zahl. Dann gilt $p_k q_k \mid p_k^2 + q_k^2$, wegen $p_k \mid p_k^2$ und $q_k \mid q_k^2$ folgt $p_k \mid q_k^2$ und $q_k \mid p_k^2$. Da $(p_k, q_k) = 1$ vorausgesetzt war, ergibt sich daraus $p_k = q_k = 1$ und damit $a_k = a_0 = 1$, $a_{k+1} = a_1 = 2$.

Aufgabe 22/86
Man beweise: Die Gleichung $x^2 + x^2 = 3z^2$ hat außer der trivialen Lösung $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ keine Lösung in natürlichen Zahlen $x; y; z$.

Angenommen, die gegebene Gleichung habe eine nichttriviale Lösung $(x; y; z) \neq (0; 0; 0)$. Da $3z^2 \equiv 0 \pmod 3$, gilt dann auch $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$ und somit $x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$. Ist nämlich $x \neq 0 \pmod 3$ oder $y \neq 0 \pmod 3$, so gilt $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ oder $y^2 \equiv 1 \pmod 3$ und $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 3$ oder $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$, in keinem Fall also $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$.
Es sei also $x = 3^r k; y = 3^s l$ mit $k; l; r; s \in N$, $k; l; r; s > 0$, $k; l \neq 0 \pmod 3$. Dann ist

$$x^2 + y^2 = 3^{2r}k^2 + 3^{2s}l^2 = 3z^2; \qquad 3^{2r-1}k^2 + 3^{2s-1}l^2 = z^2 \equiv 0 \pmod 3$$

also $z \equiv 0 \pmod 3$: $z = 3^t m; z^2 = 3^{2t}m^2$ mit $m; t \in N$, $m; t > 0$, $m \neq 0 \pmod 3$,

$$3^{2r-1}k^2 + 3^{2s-1}l^2 = 3^{2t}m^2$$

Dies ist aber ein Widerspruch zum Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung; denn auf der rechten Seite der letzten Gleichung tritt der Primfaktor 3 mit geradem Exponenten auf, auf der linken dagegen mit ungeradem.
Beweis für die letzte Behauptung:
O.B.d.A. sei $r \leq s$. Dann gilt

$$3^{2r-1}k^3 + 3^{2s-1}l^2 = 3^{2r-1}(k^2 + 3^{2(s-r)}l^2)$$

Nun gilt wegen $k; l \neq 0 \pmod 3$, $k^2 \equiv l^2 \equiv 1 \pmod 3$ mit Sicherheit $(k^2 + 3^{2(s-r)}l^2) \neq 0 \pmod 3$. Da die Annahme auf einen Widerspruch führt, ist sie falsch. Damit ist Ihre Verneinung richtig, q.e.d.

Aufgabe 23/86
Auf einer Silvesterfeier sind insgesamt 23 Personen anwesend. Nach Mitternacht behauptet ein Gast, jeder der Anwesenden habe mit genau elf Personen angestoßen. Man überprüfe diese Behauptung!

Nach jedem Anstoßen erhöht sich für genau zwei der Anwesenden die Anzahl der Personen, mit denen er angestoßen hat, um je genau eins. Im vorliegenden Fall müssten die Gläser also genau $0{,}5 \cdot 23 \cdot 11 = 126{,}5$ mal geklungen haben. Das ist aber offensichtlich nicht möglich.

Aufgabe 24/86
Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler a von $b = 19^{87} + 2$ und $c = 86 \cdot 19^{86} + 9$, ohne den Euklidischen Algorithmus zu verwenden!

Wir verwenden den Hilfssatz: "Ist $a \in N$ gemeinsamer Teiler von $b \in N$ und $c \in N$, so ist a auch ein Teiler der Differenz $d = |xb - yc|$ mit $x; y \in N$.
Beweis des Hilfssatzes:
Es erfülle $a \in N$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes. Dann gilt $b = ma$ und $c = na$ mit $m; n \in N$ und mit $x; y \in N$ auch

$$d = |xb - yc| = |xam - yan| = |(xm - yn) \cdot a| = |xm - yn| \cdot |a| = |xm - yn| \cdot 8$$

(Der Satz ist nicht umkehrbar, wie das Beispiel $b = 19$, $c = 13$, $a = 2$ zeigt).
Wir setzen nun $b = 19^{87} + 2 = 19 \cdot 19^{86} + 2$, $c = 86 \cdot 19^{86} + 9$, $x = 86$, $y = 19$ und erhalten damit

$$d = |86 \cdot (19 \cdot 19^{86} + 2) - 19 \cdot (86 \cdot 19^{86} + 9)| = |172 - 171| = 1$$

Also ist nur $a = 1$ gemeinsamer Teiler von b und c. Damit ist $a = 1$ zugleich auch größter gemeinsamer Teiler von b und c.

2.27 Aufgaben und Lösungen 1987

Aufgabe 1/87 Es seien α, β und γ die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks. Man beweise, dass dann die Ungleichung gilt:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Ist das Dreieck nicht spitzwinklig, so ist die Behauptung trivial (jeder Sinus ist positiv, von den Kosinus ist genau einer negativ oder gleich Null). Es genügt also, den Beweis für spitzwinklige Dreiecke zu führen. In diesem Fall ist die zu beweisende Ungleichung wegen $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 0$ äquivalent der Ungleichung $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma > 1$. Nun gilt

$$\tan\gamma = \tan 180° - \alpha - \beta = -\tan\alpha + \beta = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta - 1} > 0$$

wegen $\gamma < 90°$. Also ist $\tan\alpha\tan\beta > 1$. Analog folgt $\tan\beta\tan\gamma > 1$ und $\tan\alpha\tan\gamma > 1$. Damit ist $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma > 1$, und wegen $\tan\alpha; \tan\beta; \tan\gamma > 0$ folgt daraus die Behauptung.

Aufgabe 2/87
Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems

$$p_1 + p_2 = p_3^m \qquad ; \qquad p_1 - p_2 = p_3^n$$

wobei die p_i $(i = 1; 2; 3)$ Primzahlen und m sowie n natürliche Zahlen sind. Welche Werte können m und n annehmen?

Durch Addition der beiden gegebenen Gleichungen folgt

$$2p_1 = p_3^n(p_3^{m-n} + 1)$$

(wegen $p_1 + p_2 > p_1 - p_2$ ist sicher $m - n > 0$). Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Primzahleigenschaft von p_1 ergeben sich genau drei Möglichkeiten:

1. $p_3^n = p_1$; es folgt $p_2 = 0$ im Widerspruch zu $p_2 > 0$.
2. $p_3^n = 1$. wegen $p_3 \geq 1$ ist $n = 0$ und es folgt $p_1 - p_2 = 1$, damit $p_1 = 3; p_2 = 2$ und aus der ersten Gleichung $p_1 + p_2 = 5 = p_3^m$, also $p_3 = 5, m = 1$.
3. $p_3^n = 2, p_3 = 2, n = 1, p_1 = 2^{m-1} + 1$. Aus der zweiten Gleichung folgt $p_2 = 2^{m-1} - 1$. Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $2^{m-1} - 1, 2^{m-1}$ und $2^{m-1} + 1$ ist genau eine durch 3 teilbar; mit Sicherheit ist dies nicht 2^{m-1}. Wäre nun $p_1 = 3$, so wäre $p_2 = 1$ im Widerspruch zu $p_2 \geq 2$. Demnach gilt $p_2 = 3, p_1 = 5, m = 3$.

Es gibt folglich genau zwei Lösungen: $p_{11} = 3, p_{21} = 2, p_{31} = 5$ mit $m_1 = 1, n_1 = 0$ und $p_{12} = 5, p_{22} = 3, p_{32} = 2$ mit $m = 3, n = 1$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit, der Lösungsweg schließt weitere Lösungen aus.

Aufgabe 3/87
Gesucht ist die kleinste positive reelle Zahl r, für die die Gleichungen

$$r = p + q \qquad ; \qquad (r+1)^2 = (p+1)^2 + (q+1)^2$$

mit positiven reellen Zahlen p und q gelten. Man gebe p und q an!

Durch Einsetzen folgt

$$(p+q+1)^2 = (p+1)^2 + (q+1)^2 \qquad ; \qquad pq = 0{,}5$$

Wegen $p; q > 0$ gilt die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:

$$0{,}5(p+q) = 0{,}5r \geq \sqrt{pq} = 0{,}5\sqrt{2}$$

Also ist die kleinste positive reelle Zahl $r = \sqrt{2}$. Aus der Gleichheit der beiden Mittel folgt $p = q = 0{,}5r = 0{,}5\sqrt{2}$.

Aufgabe 4/87
Gegeben sei eine Menge M aus 9 voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen x_i mit $1 \leq x_i \leq 60$, $i = 1; 2; ...; 9$.
$S(T)$ bezeichne für jede Teilmenge T von M die Summe der in T enthaltenen Zahlen, sofern T nicht leer ist (die Vereinbarung $S(\varnothing) := 0$ wirkt ordnungserhaltend; d.h., für beliebige Teilmengen T_1 und T_2 gilt: $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow S(T_1) \leq S(T_2)$).
Man beweise, dass es wenigstens zwei disjunkte Teilmengen T_1 und T_2 gibt, für die $S(T_1) = S(T_2)$ gilt.

Eine Menge aus k verschiedenen Elementen enthält genau

$$\sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} = 2^k$$

verschiedene Teilmengen. Demnach gibt es für die gegebene Menge M genau $2^9 = 512$ verschiedene Teilmengen. Es gilt $M \subseteq M$ und

$$S(M) = \sum_{i=1}^{9} x_i \leq \sum_{\nu=52}^{60} \nu = 504$$

und damit folgt für alle Teilmengen T die Beschränkung $0 \leq S(T) \leq 504$.
Daraus ergibt sich bereits, dass unter den 512 Teilmengen (wenigstens) zwei (nicht notwendig disjunkte) Teilmengen T_1 und T_2 existieren, für die $S(T_1) = S(T_2)$ gilt. Angenommen T_1 und T_2 seien nicht disjunkt; dann bilden wir die beiden Teilmengen

$$T_1' = T_1 \setminus (T_1 \cap T_2) = T_1 \setminus T_2 \qquad \text{und} \qquad T_2' = T_2 \setminus (T_1 \cap T_2) = T_2 \setminus T_1$$

Sie sind offensichtlich disjunkt, und da aus T_1 und T_2 die gleichen Elemente entfernt wurden, gilt auch für T_1' und T_2': $S(T_1') = S(T_2')$.

Aufgabe 5/87
Man ermittle alle im Dezimalsystem (echt) dreistelligen Zahlen $z \in N$, die im Zahlensystem mit der Basis $n \in N$ durch genau n Ziffern 1 dargestellt werden.

Nach der Aufgabenstellung gilt

$$100 \leq z = \sum_{i=0}^{n} n^i = \frac{n^n - 1}{n - 1} \approx n^n - 1 < 1000$$

und damit $n \approx 5$ (wie man durch Probieren schnell findet). Für $n = 4$ ergibt sich $z = 85 < 100$, für $n = 5$ folgt $z = 781$ und für $n = 6$ schließlich $z = 9331 > 1000$. Wegen der Monotonie der Funktion $f(n) = \frac{n^n-1}{n-1}$ kommt als Lösung daher nur $n = 5, z = 781$ in Frage.

Tatsächlich ist $z = 781 = 625 + 125 + 25 + 5 + 1 = \sum_{i=0}^{5} 5^i$.

Aufgabe 6/87
Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit $AD = BC = a$ und $AB = CD = b = 3a$. Mit E sei der Punkt auf CD bezeichnet, für den $DE = 2a = 2EC$ gilt. Die Winkelhalbierende von $\measuredangle EAC$ schneide CD im Punkt F. Man beweise, dass $\measuredangle FAB = 22{,}5°$ ist!

Spiegelt man das Rechteck an der Seite AB, so gehen die Punkte C, D, E und F in die Punkte C', D', E' bzw. F' über, und es ist

$$AD' = AD = EC = E'C' = BC = BC' = a \qquad \text{und} \qquad D'E' = DE = 2a$$

$$CC' = BC + BC' = 2a \qquad \text{und} \qquad \measuredangle AD'E' = \measuredangle E'C'C = 90°$$

Daraus folgt $\triangle\ AD'E' \cong \triangle\ E'C'C$, also $AE' = E'C$ und

$$\measuredangle AE'C = \measuredangle D'E'C' - (\measuredangle D'E'A + \measuredangle C'E'C) = \measuredangle D'E'C' - (\measuredangle D'E'A + \measuredangle E'AD') = 180° - 90° = 90°$$

Das Dreieck $AE'C$ ist also gleichschenklig-rechtwinklig; damit ist $\measuredangle E'AC = 45°$. Nun ist

$$\measuredangle FAF' = \measuredangle E'AC - \measuredangle E'AF' + \measuredangle FAC = 45° - \measuredangle E'AF' + \measuredangle EAF = 45°$$

(wegen $\measuredangle FAC = \measuredangle EAF$ und $\measuredangle EAF = \measuredangle E'AF'$) und damit $\measuredangle FAB = 0{,}5 \cdot \measuredangle FAGF' = 22{,}5°$.

Aufgabe 7/87
Man untersuche, wieviele Wege der Länge 7 auf den Kanten eines Einheitswürfels von einer vorgegebenen Ecke zur diametral gegenüberliegenden Ecke führen; dabei darf keine Kante mehrmals (auch nicht in umgekehrter Richtung!) durchlaufen werden (für Ecken gilt diese Einschränkung nicht).

Die Ecken des Würfels seien mit $A; B; C; D; E; F; G; H$ derart bezeichnet, dass $ABCD$ eine Würfelfläche ist und dass AG, BH, CE bzw. DF Raumdiagonalen sind.
Ausgangspunkt sei A, Endpunkt sei G. Von A aus gibt es 3 (aus Symmetriegründen) gleichwertige Wege; wir verfolgen den nach B (und multiplizieren das Ergebnis mit 3). Von B aus führen 2 gleichwertige Wege weiter; wir gehen nach C (und multiplizieren das Ergebnis mit 2). Hier können wir wieder 2 Wege einschlagen, die aber nicht gleichwertig sind: CG oder CD.

1. CG führt nach einem Wege der Länge 3 zum Ziel. Für einen Weg der Länge 7 muss man noch eine Seitenfläche umlaufen. Da die Flächen $GFBC$ und $GCDH$ zum doppelten Durchlauf von Kanten führen würden, kann man den Weg nur längs der dritten Seitenfläche fortsetzen. Damit sind 2 zulässige Wege gefunden: $ABCGFEHG$ und $ABCGHEFG$.
2. Wir prüfen CD.
2.1. $ABCDHG$ hat nur die Länge 5; ein "Umweg" über EF führt zum 3. zulässigen Weg: $ABCDHEFG$.
2.2. $ABCDAE$ liefert zwei weitere Möglichkeiten: $ABCDAEFG$ und $ABCDAEHG$.
Damit werden über ABC 5 zulässige Wege ermittelt. Es gibt also über AB $2 \cdot 5 = 10$ zulässige Wege und damit insgesamt $3 \cdot 10 = 30$.

Aufgabe 8/87
Man ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung $5^x - 3^y = 2$.

Wegen $2 = 5 - 3$ und $3; 5 \neq 0$ ist die gegebene Gleichung der Gleichung

$$5(5^{x-1} - 1) = 3(3^{y-1} - 1)$$

äquivalent. Da die rechte Seite dieser Gleichung den Faktor 3 enthält, muss ihn auch die linke Seite enthalten: $5^{x-1} - 1 = 3k_1$ mit k_1 reell. Entsprechend folgt $3^{y-1} - 1 = 5k_2$ mit k_2 reell.
Die Probe liefert $k_1 = k_2 = k$. Damit sind die beiden Gleichungen

$$5^{x-1} - 1 = 3k \qquad ; \qquad 3^{y-1} - 1 = 5k$$

zu lösen. Es ergibt sich

$$x = \frac{\ln 3k + 1}{\ln 5} + 1 \qquad ; \qquad y = \frac{\ln 5k + 1}{\ln 3} + 1$$

wobei $3k + 1 > 0$, also $k > -0{,}333...$ ist.

Aufgabe 9/87
Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die mit voneinander verschiedenen Ziffern $1; 2; 3; ...; 9$ dargestellt werden.

Da die Ziffern voneinander verschieden sein sollen, hat man für die erste Stelle 9, für die zweite 8 und für die dritte 7 Möglichkeiten der Wahl, wenn man eine der fraglichen Zahlenbilden will.
Es gibt also $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ derartige Zahlen (Variation von 9 Elementen zur 3. Klasse ohne Wiederholung).

Da die 9 Ziffern an jeder Stelle gleich häufig auftreten, ist jede Ziffer an jeder Stelle $(9 \cdot 8 \cdot 7) : 9 = 56$ mal zu finden. Demnach gilt für die gesuchte Summe S

$$S = 100 \cdot 56 \cdot \sum_{i_1}^{9} i + 10 \cdot 56 \cdot \sum_{i_1}^{9} i + 1 \cdot 56 \cdot \sum_{i_1}^{9} i = 111 \cdot 56 \cdot \sum_{i_1}^{9} i = 279720$$

Aufgabe 10/87
Man bestimme alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen x, y und z, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \qquad (1)\\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \qquad (2)\\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Offensichtlich sind die Tripel $(1; 0; 0), (0; 1; 0)$ und $(0; 0; 1)$ Lösungen des Gleichungssystems (Probe!).
Wegen (2) gehen für $x; y; z \neq 1$ die Ungleichungen $0 \leq x^2; y^2; z^2 < 1$.
Daraus folgt $0 \leq |x|; |y|; |z| < 1$.
Aus $a \leq |a|$ und aus $0 \leq |a| < 1$ folgt $a^3 \leq |a^3| = a^2|a| < a^2$. Damit gilt für $x; y; z \neq 1$ die Ungleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 < x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Folglich sind in diesem Fall die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

nie gleichzeitig erfüllt. Die unter 1. aufgeführten Tripel sind also die einzigen Lösungen des Gleichungssystems.

Aufgabe 11/87
Wieviele Klebefalze sind (mindestens) erforderlich, wenn ein einfach zusammenhängendes ebenes Netz eines konvexen Polyeders mit f Flächen und 9 Ecken zum Körper "zusammengeklebt" werden soll?

Das Netz besteht aus f konvexen Polygonen, die an $(f - 1)$ Kanten miteinander verbunden sind. (Beweis für diese Behauptung: Die ersten beiden Polygone sind durch genau eine Kante miteinander verbunden; jedes weitere Polygon hat genau eine Kante mit einem der bereits vorhandenen Polygone gemeinsam.)
Nach dem Eulerschem Polyedersatz gilt für die Anzahl k der Kanten $k = e + f - 2$. Für die Anzahl n der notwendigen Falze gilt

$$n = k - (f - 1) = k - f + 1 = e + f - 2 - f + 1 = e - 1$$

Es überrascht, dass n nur von der Eckenzahl e, nicht aber von der Flächenzahl f oder der Kantenzahl k abhängt. Speziell für das Tetraeder gilt $n = 3$, für das Oktaeder $n = 5$ und für das Hexaeder $n = 7$.

Aufgabe 12/87
Aus einem Tripel $(a_0; b_0; c_0)$ positiver reeller Zahlen $a_0; b_0; c_0$ bilden wir eine Folge von Tripeln $(a_k; b_k; c_k)$ nach dem Bildungsgesetz

$$a_k = a_{k-1}b_{k-1}; \qquad b_k = b_{k-1}c_{k-1}; \qquad c_k = c_{k-1}a_{k-1}$$

Man beweise: Ist die Tripelfolge periodisch, so enthält eine Periode höchstens 6 verschiedene Tripel.

Die Produkte aus den Zahlen eines Tripels bilden die Folge

$$\{x_k\} = \{a_k b_k c_k\} = \{(a_0 b_0 c_0)^{2^k}\}$$

wie man durch vollständige Induktion beweist:

1. Es ist $x_0 = a_0b_0c_0 = (a_0b_0c_0))^{2^0}$
2. Aus $x_k = (a_kb_kc_k) = (a_0b_0c_0)^{2^k}$ folgt

$$x_{k+1} = (a_{k+1}b_{k+1}c_{k+1}) = (a_kb_k \cdot b_kc_k \cdot c_ka_k) = (a_kb_kc_k)^2 = \left[(a_0b_0c_0)^{2^k}\right]^2 = (a_0b_0c_0)^{2^k+1}$$

Wenn die Tripelfolge periodisch ist, so gilt dies auch für die Produktfolge $\{x_k\}$.
Es gelte nun für ein $k > 1$, dass $(a_k; b_k; c_k) = (a_0; b_0; c_0)$ ist. Dann gilt also $x_k = a_kb_kc_k = (a_0b_0c_0)^{2^k} = a_0b_0c_0$ und wegen $2^k \neq 1$ folgt daraus $a_0b_0c_0 = 1$, $c_0 = a_0^{-1}b_0^{-1}$. Dann sind die ersten sieben Glieder der Tripelfolge (wobei der Index 0 der Einfachheit halber weggelassen ist)

$$(a; b; a^{-1}b^{-1}); (ab; a^{-1}; b^{-1}); (b; a^{-1}b^{-1}; a); (a^{-1}; b^{-1}; ab); (a^{-1}b^{-1}; a; b); (b^{-1}; ab; a^{-1}); (a; b; a^{-1}b^{-1})$$

Man erkennt, dass das siebente Glied gleich dem ersten ist.

Aufgabe 13/87
Die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + r$ hat für keine reelle Zahl r drei reelle Nullstellen. Man beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Angenommen, die gegebene Funktion hätte drei reelle Nullstellen $x_1; x_2; x_3$. Dann gelten nach dem Satz des Vieta die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad ; \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$$

Daraus folgt

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$$

Nun sind aber nach Voraussetzung $x_1; x_2; x_3$ reelle Zahlen; damit gilt $x_1^2; x_2^2; x_3^2 \geq 0$ und es folgt $-1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$.
Dieser offensichtliche Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist. Damit ist die Behauptung in der Aufgabe richtig.

Aufgabe 14/87
Es gelte die Gleichung

$$2^{n+1} \prod_{i=0}^{n} \cos 2^i \alpha = 1$$

mit $n \in N, \alpha \geq 0$, reell. Man ermittle die kleinste Zahl α, die diese Gleichung erfüllt (abhängig von n).

Aus $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$ folgt für $\sin\varphi \neq 0$ die Beziehung $2\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$. Man prüft leicht nach, dass für $\alpha = k\pi$ mit $k \in N$ die gegebene Gleichung nicht erfüllt ist. Mit $2\alpha = \varphi \neq k\pi$ gilt dann

$$2^{n+1} \prod_{i=0}^{n} \cos 2^i \alpha = \prod_{i=0}^{n} [2\cos(2^i\alpha)] = \prod_{i=0}^{n} \frac{\sin(2^{i+1}\alpha)}{\sin(2^i\alpha)} = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha)}{\sin\alpha}$$

Die gegebene Gleichung ist also für $2^i\alpha \neq k\pi$ der Gleichung $\sin(2^{n+1}\alpha) = \sin\alpha$ äquivalent. Die kleinste Zahl $\alpha > 0$ erhält man offenbar, wenn $0 < \alpha < 0{,}5\pi$ gilt, d.h. für

$$\sin\alpha = \sin(2^{n+1}\alpha) < 0$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:
1. $2^{n+1}\alpha_1 = \pi - \alpha_1 + 2p\pi$ und 2. $2^{n+1}\alpha_2 = \alpha_2 + 2(q+1)\pi$ mit $p; q \in N$. Daraus folgt

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 2p\pi}{2^{n+1} + 1} \to \alpha_{1min} = \frac{\pi}{2^{n+1} + 1}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\pi + 2(q+1)\pi}{2^{n+1} - 1} \to \alpha_{2min} = \frac{2\pi}{2^{n+1} - 1}$$

Wegen $\pi < 2k\pi$ und $2^{n+1} + 1 > 2^{n+1} - 1$ gilt für jedes $n \in N$ sicher $\alpha_{1min} < \alpha_{2min}$. Damit ist α_{1min} die gesuchte Zahl.

Aufgabe 15/87
Man bestimme alle Primzahlen p_1, für die

$$p_2 = p_1 + 2^n; \qquad p_3 = p_1 + 2^{n+1}; \qquad p_4 = np_1 - 3$$

ebenfalls Primzahlen sind. Welche Werte kann n annehmen?

Wäre $p_1 = 2$, so wären p_2 und p_3 gerade Zahlen und wegen $p_3 > p_2 > p_1$ keine Primzahlen. Also ist $p1 \geq 3$.
Wegen $p_2 = p_1+2^n, p_3 = p_1+2^{n+1} = p_1+2\cdot 2^n = p_2+2^n$ bilden die Primzahlen $p_1; p_2; p_3$ eine arithmetische Folge 1. Ordnung mit der Differenz $d = 2^n \neq 3k$ $(k \in N)$. Damit ist genau eine dieser Primzahlen durch 3 teilbar und damit (wegen der Primzahleigenschaft) gleich 3. Wegen $p_3 > p_2 > p_1$, kann dies nur p_1 sein: $p_1 = 3$.
Es folgt $p_4 = np_1 - 3 = n\cdot 3 - 3 = 3(n|1)$. Aus der Primzahleigenschaft von p_4 folgt sofort $p_4 = 3, n-1 = 1$, also $n = 2, p_2 = 7, p_3 = 11$. Damit ist eine Lösung gefunden. Wegen der Zwangsläufigkeit der Herleitung ist dies auch die einzige.

Aufgabe 16/87
Es ist zu zeigen, dass kein Polynom n-ten Grades $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i $(i \in N; 0 \leq i \leq n)$ existiert, für das $P(7) = 5$ und $P(15) = 9$ gilt.

Angenommen, es existiere ein Polynom n-ten Grades $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i $(i \in N, 0 \leq i \leq n)$, für das $P(7) = 5$ und $P(15) = 9$ gilt. Dann folgt

$$P(15) - P(7) = 4 = \sum_{i=0}^{n} 15^i a_i - \sum_{i=0}^{n} 7^i a_i = \sum_{i=0}^{n} (15^i - 7^i) a_i$$

Nun gilt sicher $(a - b) \mid (a^k - b^k)$ mit $a; b; k \in N$, und damit $(15 - 7) \mid (15^i - 7^i)$ für jedes i. Wegen $15 - 7 = 8$ ergibt sich daraus der Widerspruch

$$8 \mid \sum_{i=0}^{n} (15^i - 7^i) a_i = 4$$

Damit ist die Annahme widerlegt.

Aufgabe 17/87
Man ermittle alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen p und q, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Ihre Summe P ist ebenfalls Primzahl.
2. Das Produkt aus den drei Primzahlen $p; q; P$ ist durch 10 teilbar.

Folgende Feststellungen führen zur Lösung:
1. Wegen der Kommutativität von Addition und von Multiplikation ist mit $p_1; q_1)$ auch $(p_2 = q_1; q_2 = p_1)$ Lösung.
2. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung müssen unter den Primzahlen $p; q; P = p + q$ die Primzahlen 2 und 5 vorkommen.
3. Offensichtlich ist $P > 2$. Folglich ist $p = 2$ (bzw. $q = 2$).
4. Es verbleiben die Möglichkeiten $q = 5$ (bzw. $p = 5$), $P = 7$ und $P = 5$, $q = 3$ (bzw. $p = 3$).
Es existieren also die Lösungen $(2; 3), (3; 2), (2; 5), (5; 2)$. Weitere Lösungen sind durch den Lösungsweg ausgeschlossen (Vollständigkeit der Fallunterscheidung).

Aufgabe 18/87
Man beweise: Eine natürliche Zahl $n > 8$ ist genau dann Primzahl, wenn n nicht als Summe aus wenigstens drei Gliedern einer nicht konstanten arithmetischen Folge 1. Ordnung aus natürlichen Zahlen darstellbar Ist (dabei sei die Zahl 0 keine natürliche Zahl).

Es sei $\{a_k\}$ eine nicht konstante arithmetische Folge 1. Ordnung aus natürlichen Zahlen $a_k > 0$. Dann ist $a_k = a_1 + (k-1)d$ mit $a_1; k; d \in N \setminus \{0\}$ ihr Bildungsgesetz, und für die Summe s_r von r Gliedern gilt

$$s_r = ra_1 + 0{,}5r(r-1)d = r[a_1 + 0{,}5(r-1)d]$$

Da alle Glieder natürliche Zahlen sind, ist auch s_r, eine natürliche Zahl. Es sei nun $r \geq 3$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. $r = 2m$ mit $m \in N; m \geq 2$: $s_r = m[2a_1 + (2m-1)d]$
2. $r = 2m+1$ mit $m \in N; m \geq 1$: $s_r = (2m-1)(a_1 + md)$
In jedem Fall ist s_r ein Produkt aus natürlichen Zahlen, und jeder Faktor ist größer als 1. Damit kann $n = s_r$ keine Primzahl sein.
Es sei nun $n = uv$ mit $u; v \in N, 1 < u \leq v$ keine Primzahl. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:
1. $u > 2$. Dann setze man $r = u, d = 2, v = a_1 + u - 1$, also $a_1 = v + 1 - u$. Damit ist n als s_r darstellbar.
2. $u = 2$. Man setze $r = 4; d = 1; v = 2a_1 + 3$, also $a_1 = 0{,}5(v-3)$. Wegen $v = 2a_1 + 3$ ist v ungerade; ferner ist wegen $n = uv = 2v > 8$ sicher $v > 4$. Damit ist $a_1 \in N; a_1 \geq 1$ und n wiederum als s_r darstellbar.

Aufgabe 19/87
Welche natürlichen Zahlen n kann man nicht in der Form $n = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ mit $x; y; z \in N$ darstellen?

Alle natürlichen Zahlen n kann man in der Form $n = 8k \pm r$ mit $k \in N$, $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ darstellen. Damit gilt

$$n^2 = 64k^2 \pm 16kr + r^2 \equiv r^2 \pmod{16}$$

mit $r^2 \equiv 0; 1; 4; 9 \pmod{16}$. Es sei nun

$$x^2 \equiv p \pmod{16}, \qquad 2y^2 \equiv q \pmod{16}, \qquad 3z^2 \equiv s \pmod{16}$$

für beliebige $x; y; z \in N$; dann gilt
$p \equiv 0; 1; 4; 9 \pmod{16}$, $q \equiv 0; 2; 8 \pmod{16}$, $s \equiv 0; 3; 11; 12 \pmod{16}$.
Bildet man die $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ möglichen Summen $p+q+s$, so stellt man fest, dass die Kongruenz $p+q+s \equiv 10 \pmod{16}$ keine Lösung hat. Somit kann man die natürlichen Zahlen $n = 16k + 10, k \in N$ nicht in der angeführten Form darstellen.
Damit sind nicht alle derartigen Zahlen erfasst, aber das war in der Aufgabe auch nicht gefordert.

Aufgabe 20/87
In einem Zahlensystem mit der Basis $n \in N$, $n \geq 10$ sei die Zahl $z = 123546789$ gegeben. Man beweise, dass z keine Primzahl ist!

Der Beweis ist geführt, wenn gezeigt ist, dass z durch eine Zahl $m \in N; 2 \leq m < z$ teilbar ist. Wir untersuchen die Teilbarkeit durch 3 mittels einer vollständigen Fallunterscheidung. Es gilt

$$z = n^8 + 2n^7 + 3n^6 + 5n^5 + 4n^4 + 6n^3 + 7n^2 + 8n + 9$$

1. Ist $n \equiv 0 \pmod 3$, so sind alle Summanden durch 3 teilbar, mithin auch z als deren Summe.
2. Ist $n \equiv 1 \pmod 3$, so gilt $n^k \equiv 1 \pmod 3$ für jedes $k \in N$.
Damit ist für die Teilbarkeit durch 3 die Quersummenregel anwendbar: $Q(z) = 45 \equiv 0 \pmod 3$. Also ist z durch 3 teilbar.
3. Ist $n \equiv -1 \pmod 3$, so ist $n^{2k} \equiv 1 \pmod 3$ und $n^{2k-1} \equiv -1 \pmod 3$ für jedes $k \in N$. Damit ist die Regel über die alternierende Quersumme für die Teilbarkeitsuntersuchung anwendbar:

$$Q_a(z) = 1 - 2 + 3 - 5 + 4 - 6 + 7 - 8 + 9 = 3 \equiv 0 \pmod 3$$

Also ist auch in diesem Fall z durch 3 teilbar. Da z mit Sicherheit größer als 3 ist, folgt, dass z keine Primzahl ist.

Aufgabe 21/87
In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt. Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Vierecksfläche?

Wir betrachten zunächst die drei Teildreiecke, die sich ergeben, wenn der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden mit den drei Ecken verbunden wird. Ihre Fläche beträgt je $\frac{1}{3}$ der Gesamtfläche, da ihre Höhen sich zur Dreieckshöhe (auf der jeweiligen Seite) nach dem Strahlensatz wie die Abschnitte der Seitenhalbierenden verhalten; diese dritteln jedoch bekanntlich einander.
Die Fläche des Vierecks setzt sich nun aus zwei Hälften solcher Teildreiecke zusammen (wie man sich an einer Skizze leicht klar macht) und beträgt damit ebenfalls $\frac{1}{3}$ der Gesamtfläche.

Aufgabe 22/87
Gesucht ist die kleinste Zahl $n \in N$, bei der die Quersumme eine dreistellige Primzahl p_3 ist. Die Quersumme dieser Zahl p_3 sei eine zweistellige Primzahl p_2 und schließlich sei deren Quersumme eine einstellige ungerade Primzahl p_1.

1. Feststellung: Für die Quersumme $Q(n_3)$ einer beliebigen dreistelligen Zahl $n_3 \in N$ gilt $Q(n_3) \leq 3 \cdot 9 = 27$.
2. Feststellung: Für die Quersumme $Q(p_2)$ der zweistelligen Primzahl p_2 gilt $Q(p_2) = 5$ oder $Q(p_2) = 7$, da $Q(p_2) = 3$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft von p_2 steht. Aus $Q(p_2) = 5$ folgt $p_2 = 23$ oder $p_2 = 41$. Aus $Q(p_2) = 7$ folgt $p_2 = 43$ oder $p_2 = 61$. Wegen $p_2 = Q(n_3) \leq 27$ verbleibt nur $p_2 = 23$ mit $p_1 = Q(p_2) = 5$.
3. Feststellung: Die kleinste dreistellige Zahl $n_3 \in N$ mit der Quersumme $Q(n_3) = p_2 = 23$ ist $n_3 = 599$. Tatsächlich ist diese Zahl Primzahl.
4. Feststellung: Wegen $Q(n) = n_3 = p_3 = 599 = 66 \cdot 9 + 5$ hat die Zahl

$$n = 5 \cdot 10^{66} + 9 \cdot \sum_{i=0}^{65} 10^i \in N$$

die Quersumme $Q(n) = p_3 = 599$. Tatsächlich ist n auch die kleinste Zahl mit dieser Quersumme; denn für jede Zahl $m \in N$ mit $m < n$ gilt zwangsläufig $Q(m) < (n) = 599$.

Aufgabe 23/87
Es gibt Primzahlen p_i, die folgende Eigenschaften haben:

1. Sie sind (in dezimaler Schreibweise) echt vierstellig.
2. Ihre Quersumme ist $Q(p_i) = 25$.
3. Addiert man zu ihnen 4, so ergibt sich eine "Spiegelzahl".

Unter einer "Spiegelzahl" sei eine Zahl zu verstehen, deren Ziffernfolge bezüglich einer gedachten Mittellinie symmetrisch ist. Man bestimme alle derartigen Primzahlen p_i!

Für die Primzahlen p_i gilt nach Eigenschaft 1:

$$p_i = 1000a_i + 100b_i + 10c_i + d_i$$

mit $a_i; b_i; c_i; d_i \in N$, $0 < a_i \leq 9$, $0 \leq b_i; c_i; d_i \leq 9$. Als Einerstelle d_i einer Primzahl kommen nur die Zahlen $d_i = 1, d_2 = 3, d_3 = 7$ und $d_4 = 9$ in Frage.
Aus der Eigenschaft 3 folgen $a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 - 10 = 7 + 4 - 10 = 1$ und $a_4 - 10 = 9 + 4 - 10 = 3$ (der Zehnerübertrag kann sich nicht bis a_i fortsetzen, da sonst $a_3 = 0$ im Widerspruch zur 1. oder $a_4 = 2, b_4 = c_4 = 9$ im Widerspruch zur 2. Eigenschaft wäre). Damit haben die in Betracht kommenden Zahlen die Gestalt

$$p_1 = 5000 + 100b_1 + 10c_1 + 1$$
$$p_2 = 7000 + 100b_2 + 10c_2 + 3$$
$$p_3 = 1000 + 100b_3 + 10c_3 + 7$$
$$p_4 = 3000 + 100b_4 + 10c_4 + 9$$

Die Möglichkeit p_1 entfällt, weil aus Eigenschaft 2 folgt, dass $b_1 + c_1 = 19$ wäre im Widerspruch zu $b_1 + c_1 \leq 9 + 9 = 18$. Ferner entfällt auch p_2, weil nach derselben Eigenschaft $b_2 + c_2 = 15$ sein müsste, aus Eigenschaft 3 aber $b_2 = c_2$ folgt.
Aus Eigenschaft 2 folgt nun $b_3+c_3 = 17$, $b_4+c_4 = 13$, und aus Eigenschaft 3 (wegen des Zehnerübertrags) $b_i = c_i + 1$. Damit ist $b_3 = 9, c_3 = 8, p_3 = 1987$; $b_4 = 7, c_4 = 6, p_4 = 3769$.
Tatsächlich sind beide Zahlen Primzahlen.
Zusatz: Streicht man in der Eigenschaft 1 das Wort "echt", so erfüllt auch $p_i = 0997$ die Bedingungen der Aufgabe. Aus der Eigenschaft 2 kann man leicht weitere Lösungen ausschließen.

Aufgabe 24/87
Für welche Primzahlen p besitzt das Gleichungssystem

$$x + \log_2 y = 11p \qquad (1)$$
$$2p - \log_2 p = 11 - z \qquad (2)$$
$$z + \log_2 y = x - 8 \qquad (3)$$

ganzzahlige Lösungstripel $(x; y; z)$ und wie lauten diese?

Wir nehmen an, das Gleichungssystem sei ganzzahlig lösbar und $(x; y; z)$ sei ein derartiges Lösungstripel. Nach Gleichung (2) folgen dann, da $11 - z = g$ eine ganze Zahl ist, die Gleichungen

$$2p - g = \log_2 p \qquad ; \qquad p = 2^{2p-g} = g'$$

wobei auch g' eine ganze Zahl ist. Da p Primzahl ist, muss $p = 2$ und damit $g = 3$ sein. Aus Gleichung (2) folgt nun sofort $z = 8$. Damit nehmen die Gleichungen (1) und (3) die Gestalt

$$x + \log_2 y = 22 \qquad ; \qquad \log_2 y = x - 16$$

an. Substitution der zweiten in der ersten Gleichung liefert $x = 19$. Damit ergibt sich schließlich

$$\log_2 y = 3 \qquad ; \qquad y = 2^3 = 8$$

also das ganzzahlige Lösungstripel $(19; 8; 8)$ des Gleichungssystems.

2.28 Aufgaben und Lösungen 1988

Aufgabe 1/88
Es seien x die Quersumme von 1988^{8891}, y die Quersumme von x und z die Quersumme von y. Man gebe z an!

Zunächst schränken wir die Quersummen nach oben ein. Wegen $1988^{8891} < 10000^{8891}$ ist die Stellenzahl von 1988^{8891} kleiner als $1 + \lg 10000^{8891} = 1 + 8891 \cdot \lg 10000 = 1 + 8891 \cdot 4 = 35565$.
Da für alle Ziffern a_i von 1988^{8891} gilt $a_i \leq 9$, ist $x < 35565 \cdot 9 = 320085$. Die Zahl mit der größten Quersumme im Intervall $[0; 320085]$ ist 299999. Damit folgt $y \leq 47$. Für z ergibt sich daraus $z \leq 12$, da 39 die Zahl mit der größten Quersumme im Intervall $[0; 47]$ ist.
Nun verwenden wir den Satz: Eine Zahl n und ihre Quersumme lassen beim Teilen durch 9 den gleichen Rest.
Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 1$.
2. Angenommen, der Satz gilt für $n = k \geq 1$, dann gilt er auch für $n = k + 1$. Sind nämlich die letzten i Stellen ($i \geq 0$) von k mit 9 besetzt, so werden diese beim Übergang zu $k + 1$ zu 0, und die erste von 9 verschiedene Stelle vergrößert sich um 1.
Die Quersumme von $k + 1$ ist demnach von der von k um $1 - i \cdot 9 \equiv 9 \pmod 9$ verschieden, ihr Rest ist also auch um 1 vergrößert.
Aus diesem Satz folgt wegen $1988^{8891} \equiv (-1)^{8891} \equiv (-1) \equiv 8 \pmod 9$ (es ist $1988 = 221 \cdot 9 - 1$) auch $x \equiv y \equiv z \equiv 8 \pmod 9$. Wegen $z \leq 12$ kommt damit für z nur die Zahl 8 in Frage: $z = 8$.

Aufgabe 2/88
Gesucht sind die kleinsten zwei natürlichen Zahlen n, die Summe sowohl von zwei als auch von drei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen sind.

Nach dem Aufgabentext gilt

$$n = (m - 1)^2 + m^2 + (m + 1)^2 = k^2 + (k + 1)^2$$

mit $n; m; k \in N, n; m; k \geq 1$. Man erkennt rasch, dass sich mit $m = k = 1$ eine (allerdings triviale) Lösung ergibt: $n = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 1^2 + 2^2 = 5$
Offensichtlich ist dies die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft. Um die nächstgrößere zu finden, formen wir um: $2k(k + 1) = 3m^2 + 1$.
Wegen $3m^2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ ist $k \equiv 1 \pmod 3$, also $k = 3s + 1$ mit $s \in N$. Substitution und weitere Umformung liefern

$$6s(s + 1) + 1 = m^2 \qquad ; \qquad m = \sqrt{6s(s + 1) + 1}$$

Wenn n minimal sein soll, müssen auch $m; k; s$ minimal sein. Wir probieren daher, beginnend mit dem kleinsten Wert, die s-Werte daraufhin durch, ob sie natürliche m-Werte liefern.
Für $s = 0$ erhält man die bereits ermittelte (triviale) Lösung; für $s = 1; 2; 3$ ist m nicht natürlich, aber für $s = 4$ ergibt sich $m = 11, k = 13$ und

$$n = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

Zweierlei überrascht an diesem Ergebnis: 1. Man erhält fünf aufeinanderfolgende Quadratzahlen (man kann nachweisen, dass dieser Fall einmalig ist).
2. Es ergibt sich die Anzahl der Tage in einem Normaljahr.
Zusatz: Die nächstgrößeren n sind $n = 108^2 + 109^2 + 110^2 = 133^2 + 134^2 = 35645$ und $n = 1078^2 + 1079^2 + 1080^2 = 1321^2 + 1322^2 = 3492725$.

Aufgabe 3/88
Es ist zu beweisen, dass die Gleichung $a^2 + b^2 = c^k$ für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ ganzzahlige Lösungstripel $(a; b; c)$ hat.

Die Behauptung ist trivial für $k = 1$ (sie folgt aus der unbeschränkten Ausführbarkeit der Addition) und für $k = 2$ (jedes pythagoreische Tripel ist Lösung).

Es sei nun $n \in N, n > 2$, und die Behauptung sei richtig für alle $k < n$. Dann existiert sicher ein Lösungstripel $(a; b; c)$ für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^{n-2}$.
Multipliziert man beide Seiten mit $c^2 > 0$, so folgt

$$a^2c^2 + b^2c^2 = c^n$$

Damit ist das Tripel $(ac; bc; c)$ Lösung der Gleichung (mit $a; b; c \in N$ gilt wegen der unbeschränkten Ausführbarkeit der Multiplikation auch $ac; bc \in N$). Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 4/88
Man bestimmte alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = (x - y)^3$

1. Offensichtlich ist $x = y = 0$ eine Lösung.
2. Es sei nun $x^2 + y^2 \neq 0$. Dann ist $x^2 + y^2 = (x - y)^3 > 0$. Wir setzen $x - y = a > 0$, also $y = x - a$. Durch Einsetzen und Umformen erhält man

$$x^2 + (x - a)^2 = a^3 \to x_{1;2} = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{2a - 1})$$

Wenn x eine ganze Zahl sein soll, muss $2a - 1$ eine ungerade Quadratzahl sein: $2a - 1 = (2m - 1)^2$ mit $m \in N, m \geq 0$, also $a = 2m^2 - 2m + 1$. Man erhält damit für $m \in N$

$$x_1 = 0{,}5(2m^2 - 2m + 1)(1 + 2m - 1) = m(2m^2 - 2m + 1)$$

$$x_2 = 0{,}5(2m^2 - 2m + 1)(1 - 2m + 1) = (1 - m)(2m^2 - 2m + 1)$$

$$y_1 = m(2m^2 - 2m + 1) - (2m^2 - 2m + 1) = (m - 1)(2m^2 - 2m + 1) = -x_2$$

$$y_2 = (2m^2 - 2m + 1)(1 - m) - (2m^2 - 2m + 1) = (-m)(2m^2 - 2m + 1) = -x_1$$

Aufgabe 5/88
Man beweise: Ist n eine (in dekadischer Schreibweise) 30-stellige Zahl, bei der alle Stellen ausschließlich mit 1 oder mit 8 (in beliebiger Anordnung) besetzt sind, so ist n keine Primzahl.

Wir beweisen zunächst, dass die Zahl

$$k = \sum_{i=0}^{29} 10^i = 111...111 \qquad \text{(30 Stellen)}$$

durch 7 teilbar ist: Es ist $1001 = 143 \cdot 7$. Dann ist $r = 1001 \cdot 111 = 111111$ ebenfalls durch 7 teilbar und damit auch

$$k = \sum_{i=0}^{29} 10^i = (10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^6 + 10^0) \cdot r$$

Wird nun in k an s-ter Stelle von hinten die Ziffer 1 durch die Ziffer 8 ersetzt, so ändert sich k um den Summanden $(8 - 1) \cdot 10^{s-1} = 7 \cdot 10^{s-1}$. Demnach bleibt die Zahl $n_s = k + 7 \cdot 10^{s-1}$ durch 7 teilbar; n_s ist also keine Primzahl.
Da diese Überlegung für jede natürliche Zahl s gilt, ist der Beweis für n geführt.

Aufgabe 6/88
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n, deren Querprodukt $Q_p(n) = 120$ ist und deren Quersumme $Q_s(n) = 2^m$ eine Zweierpotenz mit $m \in N$ ist.

Es ist $Q_p(n) = 120$ in drei Faktoren f_1, f_2 und f_3 mit $f_i \in N, 0 < f_i \leq 9$ für $i = 1; 2; 3$ zu zerlegen.
Aus der Primfaktorzerlegung von $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ folgt sofort, dass für ein i (o.B.d.A. sei dies $i = 3$) gilt $f_i = 5$. Dann verbleiben für f_1 und f_2 zwei Möglichkeiten:

$f_{11} = 8, f_{21} = 3$ und $f_{12} = 4, f_{22} = 6$.
Nur für die erste Möglichkeit gilt

$$Q_s(n) = f_{11} + f_{21} + f_3 = 8 + 3 + 5 = 16 = 2^m \text{ mit } m = 4 \in N$$

die zweite Möglichkeit dagegen liefert

$$Q_s(n) = f_{12} + f_{22} + f_3 = 4 + 6 + 5 = 15 \neq 2^m \text{ mit } m = 4 \in N$$

sie scheidet also aus. Damit sind die Ziffern von n mit $3; 5$ und 8 festgelegt. Ihre $3! = 6$ Permutationen ergeben 6 Werte für n: $358; 385; 538; 583; 835; 853$.

Aufgabe 7/88
Man ermittle alle Paare $(m; n)$ mit $m; n \in N$, für die $p = m^3 + n^3$ Primzahl ist!

Es gilt

$$p = m^3 + n^3 = (m + n)^3 - 3mn(m + n) = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

Da p Primzahl ist, muss einer der beiden Faktoren gleich 1 sein; wegen $m + n > 1$ ($m = 0$ oder $n = 0$ liefert keine Primzahl p) ist

$$m^2 - mn + n^2 - 1 = (m - n)^2 + mn \geq mn \geq 1$$

Daraus folgt: Nur $m = n = 1$ liefert eine Primzahl $p = 1^3 + 1^3 = 2$.

Aufgabe 8/88 Gesucht ist die um 8 vergrößerte Anzahl aller geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die Lösung der Ungleichungen

$$8 \cdot \sqrt{8 + 8} + 8 + \frac{8}{8} \leq |x| + |y| \leq 8 \cdot 8 \cdot \sqrt{8 + 8} + \sqrt{8 + 8} + 8 + \frac{8}{8}$$

sind. Man füge hinter die erste und hinter die zweite Stelle je einen Punkt ein!

Vereinfachung der gegebenen Ungleichungen liefert

$$41 \leq |x| + |y| \leq 269$$

Wir untersuchen, wieviele geordnete Paare die Ungleichung $|x| + |y| \leq n$ mit $n \in N$ erfüllen. Für $y = 0$ gibt es $2n + 1$ verschiedene Werte für x (also auch $2n + 1$ verschiedene geordnete Paare).
Wächst bzw. verringert sich y um 1, so verringert sich die Anzahl der möglichen x-Werte jeweils um 2, für $|y| = n$ ist nur $x = 0$ möglich. Folglich gibt es für $y \neq 0$ genau

$$2 \cdot (2n - 1 + 2n - 3 + ... + 3 + 1) = 2n^2$$

x-Werte. Damit hat die betrachtete Ungleichung insgesamt $2n^2 + 2n + 1 = n^2 + (n + 1)^2$ geordnete Paare als Lösung. Daraus folgt:
Die Ungleichung $|x| + |y| \leq 269$ hat $269^2 + 270^2 = 145261$ Lösungspaare, die Ungleichung $|x| + |y| \leq 40$ hat $40^2 + 41^2 = 3281$ Lösungspaare. Die gesuchte Zahl ist dann $145261 - 3281 + 8 = 141988$.
Einfügen der Punkte ergibt 1. 4. 1988.

Aufgabe 9/88
Man beweise, dass die Funktion

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x - 1$$

mit $a_i \in G$ für $i = 1; 2; ...; n1$ keine rationale Nullstelle hat, falls $f(\pm 1) \neq 0$ ist (G sei die Menge der ganzen Zahlen).

Wir nehmen an, die gegebene Funktion $f(x)$ habe unter den getroffenen Voraussetzungen eine rationale Nullstelle $\frac{p}{q}$ mit $p \in G, q \in N, p; q \neq 0$ und $(p,q) = 1$. Dann würde folgen

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ...a_1pq^{n-1} - q^n = 0$$

und damit $p \equiv 0 \pmod q$, wegen $(p,q) = 1$ und $q > 0$ also $q = 1$. Demnach gelte

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ...a_1p - 1 = 0$$

woraus $p = \pm 1$ folgt. Damit wäre $\frac{p}{q} = \pm 1$ und $f(\frac{p}{q}) = f(\pm 1) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $f(\pm 1) \neq 0$. Folglich ist die Annahme falsch, und damit ist die Behauptung in der Aufgabenstellung richtig.

Aufgabe 10/88
Gesucht sind alle Zahlen $n \in N$, die folgende Eigenschaften haben:

1. Die dekadische Darstellung erfordert genau drei paarweise voneinander verschiedene Ziffern a, b und c.
2. Dabei treten a und b genau c-mal auf; c dagegen tritt $(a-b)$-mal auf.
3. Quersumme und Querprodukt von n sind einander gleich.

Aus der 1. Bedingung folgt $a; b; c \in N, a; b; c \leq 9$, aus der 3. $a; b; c > 0$. Die drei Bedingungen kann man in der folgenden Gleichung zusammenfassen:

$$ac + bc + c(a-b) = a^c b^c c^{a-b} \to 2 = a^{c-1} b^c c^{a-b-1}$$

Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt, dass einer der Faktoren auf der rechten Seite der letzten Gleichung gleich 2 und 2 gleich 1 sein müssen.
Fallunterscheidung:
1. $a^{c-1} = 2$ liefert $a = 2, c = 2$ im Widerspruch zur 1. Bedingung.
2. $b^c = 2$ ergibt $b = 2, c = 1$. Dann gilt wegen der 1. Bedingung $a \geq 3$. Daraus folgt $n_1 = 321, n_2 = 4211, n_3 = 52111, n_4 = 621111, n_5 = 7211111, n_6 = 82111111, n_7 = 921111111$.
3. $c^{a-b-1} = 2$ mit $a^{c-1} = 1$ und $b^c = 1$. Wegen $c > 1$ müsste $a = b = 1$ sein im Widerspruch zur 1. Bedingung.
Damit sind die unter 2. gefundenen Zahlen sowie alle Zahlen, die durch Permutation der Ziffern aus ihnen hervorgehen, die einzigen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen (die Fallunterscheidung ist vollständig). Es sind 238 Zahlen.

Aufgabe 11/88
Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die $n^4 + 4$ eine Primzahl ist!

Man erkennt rasch, dass sich für $n = 1$ die Primzahl 5 ergibt: $1^4 + 4 = 5$. Es gilt nun

$$p = n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$$

Wenn p die Primzahl sein soll, muss der kleinere der beiden Faktoren gleich 1 sein: $(n^2 + 2 - 2n) = 1$ und $(n^2 - 2n + 1) = (n-1)^2 = 0$, d.h. $n = 1$. Also ist $n = 1$ die einzige Lösung.

Aufgabe 12/88
Gegeben sei ein Quadrupel $(p_1; p_2; p_3; p_4)$ von Primzahlen p_i, die folgende Bedingungen erfüllen:
1. Die p_i sind (im Dezimalsystem) mindestens dreistellig.
2. Es ist $p_2 = p1 + m; p_3 = p_2 + m, p_4 = p_3 + m$ mit $m \in N, m \geq 1$.
3. Die höchsten Stellen von m sind sämtlich restlos durch m teilbar.
Man beweise, dass dann gilt:

$$m! \mid 2(p_4^2 - p_1^2)$$

Folgende Überlegungen führen zur Lösung:
Da die höchsten Stellen der p_i einstellig und restlos durch m teilbar sind, ist auch m einstellig: $m \leq 9$.
Wegen $m = p_2 - p_1$ ist $m \equiv 0 \pmod 2$ als Differenz zweier ungerader Zahlen. Wegen $p_2 \equiv p_1 + m \pmod 3$, $p_3 = p_1 + 2m \equiv p_1 - m \pmod 3$ und $p_1 \equiv \pm 1 \pmod 3$ ist nur $m \equiv 0 \pmod 3$ möglich. Damit folgt $m = 6$.
Damit ist $p_{i+1} \equiv p_1 + i \pmod 5$ für $i = 1; 2; 3$. Daraus folgt $p_1 \equiv 1 \pmod 5$, $p_4 \equiv 4 \pmod 5$ und $p_4 + p_1 \equiv 0 \pmod 5$. Es ist $(p_4 + p_1) = 2p_1 + 3m = 2p_1 + 18 = 2(p_1 + 9)$ und (da p_1 ungerade ist) $p_4 + p_1 \equiv 0 \pmod 4$.
Damit folgt $p_4 + p_1 \equiv 0 \pmod{20}$ oder $p_4 + p_1 = 4 \cdot 5 \cdot k$ mit $k \in N, k \geq 1$.
Weiter ist $p_4 - p_1 = p_1 + 3mp_1 = 3m = 3 \cdot 6$. Nun folgt

$$2(p_4^2 - p_1^2) = 2(p_4 - p_1)(p_4 + p_1) = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot k = 6!k = k \cdot m!$$

also $m! \mid 2(p_4^2 - p_1^2)$, w.z.b.w.
Zusatz: Aufgabengemäße Quadrupel sind z.B. (601; 607; 613; 619), (641; 647; 653; 659), (6311; 6317; 6323; 6329) und (6361; 6367; 6373; 6379).

Aufgabe 13/88
Man ermittle alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen p und q, für die gilt:

$$3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$$

Von zwei Parabeln mit verschiedenen Koeffizienten der quadratischen Glieder wächst die mit dem größeren stärker. Daraus folgt sofort: Wenn die gegebene Gleichung Lösungen hat, so ist $q > p$. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$3p(p + 2) = q(2q + 7)$$

Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ergeben sich nun drei Fälle:
1. $q = 3$; es folgt $p(p + 2) = 13$. Da 13 nicht in zwei Faktoren p und $p + 2$ zerlegt werden kann, scheidet dieser Fall aus.
2. $q = p$; es folgt $q = p = 0$ oder $q = p = 1$. Da 0 und 1 keine Primzahlen sind, scheidet auch dieser Fall aus.
3. $q = p + 2$ (wegen $q > p$ kann $p + 2$ kein Vielfaches von q sein); es folgt $p = 11, q = 13$ als einziges Lösungspaar.

Aufgabe 14/88
Gesucht ist die kleinste Zahl $n \in N$, bei der sowohl die Quersumme $q(n)$ als auch die Quersumme $q(n + 1)$ des Nachfolgers $n + 1$ durch 11 teilbar ist.

Die gesuchte Zahl n muss auf wenigstens eine Ziffer 9 enden, da sich andernfalls die Quersumme beim Übergang von n auf $n + 1$ um 1 ändern würde und damit nicht beide Quersummen durch 11 teilbar wären. Man kann n also in der Form

$$n = a \cdot 10^i + \sum_{k=0}^{i-1} 9 \cdot 10^k$$

mit $a; i \in N, i > 0$ darstellen. Dann gilt die folgende Gleichung: $q(n + 1) = q(n) - 9i + 1$.
Soll mit $q(n)$ auch $q(n + 1)$ durch 11 teilbar sein, so muss auch $9i - 1$ durch 11 teilbar sein. Die kleinste Zahl i, die dies leistet, ist $i = 5 : 9 \cdot 5 - 1 = 44 = 4 \cdot 11$. Damit ist $q(n) = q(a) + 5 \cdot 9 \geq 55$, d.h. $q(a) \geq 10$.
Die kleinste Zahl a, deren Quersumme nicht kleiner als 10 ist, ist $a = 19$. Dann wäre $n = 1999999, n+1 = 2000000$ und damit $q(n+1) = 2$ nicht durch 11 teilbar. Die nächste in Frage kommende Zahl a ist $a = 28$.
Mit ihr ergibt sich $n = 2899999, q(n) = 55, n + 1 = 2900000, q(n + 1) = 11$.
Der Lösungsweg schließt kleinere Zahlen für n aus.

Aufgabe 15/88
In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c und der Höhe h auf b gelte für den Inkreisradius $\rho = \frac{1}{3}h$.
Man zeige, dass dann die Seitenlängen eine arithmetische Folge 1. Ordnung bilden!

Für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt

$$F = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\rho(a+b+c)$$

Mit $\rho = \frac{1}{3}h$ folgt daraus nach äquivalenter Umformung $3b = a+b+c, b = \frac{a+c}{2}$. Das heißt, die Länge der Seite b ist arithmetisches Mittel der beiden anderen Seitenlängen. Demnach bilden die drei Seitenlängen eine arithmetische Folge 1. Ordnung.
Zusatz: Man überlegt sich leicht, dass $\rho = \frac{1}{3}h$ auch im gleichseitigen Dreieck gilt. In diesem Fall gilt für die konstante Differenz d zwischen benachbarten Gliedern der arithmetischen Folge $d = 0$, d.h., die Folge ist konstant.

Aufgabe 16/88
Es sei $P(x)$ ein Polynom n-ten Grades, das bei Division durch $(x-1)$ den Rest 1, bei Division durch $(x-2)$ den Rest 2 und bei Division durch $(x-3)$ den Rest 3 lässt.
Welchen Rest lässt es bei Division durch $(x-1)(x-2)(x-3)$?

Nach der Aufgabenstellung ist für $i = 1; 2; 3$

$$P(x) = (x-i)Q_i(x) + i$$

wobei die $Q_i(x)$ Polynome vom Grad $n-1$ sind. Für $x = i$ folgt daraus $P(i) = i$. Andererseits ist

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(X) + R(x)$$

wobei $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $n-3$ und $R(x)$ ein Polynom höchstens 2. Grades ist. Setzt man darin $x = i$, so folgt; da für jedes i ein Faktor zu Null wird; $P(i) = R(i)$. Damit ist $R(i) = i$: $R(1) = 1, R(2) = 2, R(3) = 3$.
Da $R(x)$ höchstens 2. Grades ist, führt man den Ansatz $R(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $x = 1; 2; 3$ durch (wenn man nicht erkennt, dass $R(x) = x$ diese Werte liefert):

$$a_2 + a_1 + a_0 = 1; \qquad 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2; \qquad 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 3$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert $a_2 = a_0 = 0, a_1 = 1$.
Es ist also $R(x) = x$ der gesuchte Rest.

Aufgabe 17/88
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n, die gleich dem Fünffachen ihres Querprodukts sind!

Es sei $n = 100a + 10b + c = 5abc$ mit $a; b; c \in N, a; b; c \leq 9$. Da $n \neq 0$, ist $a; b; c \neq 0$. Offensichtlich ist n restlos durch 5 teilbar. Damit folgt sofort wegen $c \neq 0$, dass $c = 5$ ist:

$$n = 100a + 10b + 5 = 25ab$$

Division mit 5 ergibt $20a + 2b + 1 = 5ab$. Folglich ist $2b + 1$ restlos durch 5 teilbar. Damit kommen für b die Werte $b_1 = 2$ und $b_2 = 7$ in Frage. Da mit $b_1 = 2$ das fünffache Querprodukt, also n, durch 10 teilbar wäre im Widerspruch zu $c = 5$, verbleibt nur $b_2 = b = 7$. Somit ist $20a + 15 = 35a$ und $a = 1$.
Es gibt also genau eine Zahl n mit der geforderten Eigenschaft: $n = 175$ (die Probe bestätigt die Richtigkeit).

Aufgabe 18/88
Es sei $f(n) = \frac{(n-1)!}{n}$ mit $n \in N, n > 0$.
Man beweise, dass $f(n)$ mit einer Ausnahme genau dann eine ganze Zahl ist, wenn n keine Primzahl ist! Für welche Zahl n gilt die Ausnahme?

1. Die Zahl $n \in N, n > 0$ sei Primzahl. Dann enthält n keinen Faktor $u \in N, 1 < u \leq n-1$. Daher ist $(n-1)!$ nicht durch n teilbar. $f(n)$ ist in diesem Fall also keine ganze Zahl.
2. Die Zahl $n \in N, n > 0$ sei keine Primzahl.
2.1. Es sei $n = 1$. Dann ist $f(n) = \frac{0!}{1} = 1$ eine ganze Zahl.
2.2. Es sei $n > 1$. Dann ist $n = u \cdot v$ mit $u; v \in N, 1 < u; v < n$ und, vorausgesetzt n ist kein Primzahlquadrat, $u \neq v$.
2.2.1. Es sei n kein Primzahlquadrat. Dann sind u und v beide Faktoren von $(n-1)!$, mithin ist $(n-1)!$ restlos durch u und durch v und damit auch durch n teilbar. Folglich ist $f(n)$ eine ganze Zahl.
2.2.2. Es sei $n = p^2$ ein Primzahlquadrat. Ist $p > 2$, so ist $2p \leq p^2 - 1 = n - 1$ und wegen $p < p^2$ sind p und $2p$ beide, also auch p^2 Faktoren von $(n-1)!$. Demnach ist $(n-1)!$ restlos durch $p^2 = n$ teilbar, und damit ist $f(n)$ eine ganze Zahl.
Ist dagegen $p = 2, n = p^2 = 4$, so versagt dieser Schluss wegen $2p = 4 > p^2 - 1 = 3$. Es ist $f(4) = \frac{3!}{4} = \frac{3}{2}$ keine ganze Zahl.
Es wurde gezeigt:
1. Ist n Primzahl, so ist $f(n)$ keine ganze Zahl.
2. Ist n keine Primzahl und $n \neq 4$, so ist $f(n)$ eine ganze Zahl.
3. Ist $n = 4$, so ist $f(n)$ keine ganze Zahl. Also ist $f(n)$ mit Ausnahme von $n = 4$ genau dann eine ganze Zahl, wenn n keine Primzahl ist.

Aufgabe 19/88
Es sei $P(x; y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten $x; y$.
Man zeige, dass dann der Term $\sqrt{0{,}5 + xy}$ eine irrationale Zahl liefert!

Da P auf dem Einheitskreis liegt, gilt $x^2 + y^2 = 1$. Da x und y rational sind, gilt $x + y \neq 0$ (denn sonst würde folgen, dass $x = -y = \pm 0{,}5\sqrt{2}$ ist). Damit ergibt sich

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2xy \to |x+y| = \sqrt{1+2xy}$$

$$0{,}5\sqrt{2} \cdot |x+y| = 0{,}5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+2xy} = \sqrt{0{,}5+xy}$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist irrational. Folglich gilt dies auch für die rechte Seite.

Aufgabe 20/88
Gegeben sei das Intervall $[1; 10^n] \subset N, n \in N, n \geq 1$. Echte Teilmengen dieses Intervalls sind die Menge M_1 der darin enthaltenen geraden Zahlen sowie die Menge M_2 derjenigen Zahlen in ihm, die (in dezimaler Schreibweise) ohne die Ziffer 1 dargestellt werden.
Welche der Teilmengen M_1 und M_2 enthält mehr Elemente?

Die Anzahl der geraden Zahlen im Intervall $[2; 10^n]$ ist $5 \cdot 10^n$. Die Anzahl der ohne Ziffer 1 dargestellten Zahlen dieses Intervalls erhält man durch die folgende Überlegung:
Offenbar gibt es acht einstellige natürliche Zahlen ohne Ziffer 1. Aus jeder von ihnen kann man durch Anhängen einer der Ziffern $0; 2; 3; ...; 9$ insgesamt $8 \cdot 9$ zweistellige Zahlen der geforderten Art bilden. Setzt man diesen Gedankengang fort, so erhält man die Anzahl der k-stelligen Zahlen ohne Ziffer 1 zu $8 \cdot 9^{k-1}$ und die Anzahl aller Zahlen dieser Art im gegebenen Intervall durch die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} 8 \cdot 9^{k-1} = 9^n - 1$$

Es ist nun zu untersuchen, ob $9^n - 1$ oder $5 \cdot 10^{n-1}$ größer ist. Sicher ist $9^1 - 1 = 8 > 5 \cdot 10^{1-1} = 5$. Da aber von zwei Exponentialfunktionen mit verschiedenen Basen die mit der größeren Basis stärker wächst, gibt es sicher ein $k \in N$ so, dass $9^n - 1 < 5 \cdot 10^{n-1}$, wenn $n \geq k$ ist.
Gilt nun $9^n \leq 5 \cdot 10^{n-1}$, so gilt sicher erst recht $9^n - 1 < 5 \cdot 10^{n-1}$. Wegen der strengen Monotonie der ln-Funktion ist die Ungleichung $9^n \leq 5 \cdot 10^{n-1}$ äquivalent der Ungleichung

$$n \ln 9 \leq n \ln 10 + \ln 5 - \ln 10 = n \ln 10 - \ln 2 \to n \geq \frac{\ln 2}{\ln 10 - \ln 9} > 6{,}5$$

Mindestens für $n \geq 7$ enthält also die Teilmenge M_2 mehr Elemente als die Teilmenge M_1. Eine Überprüfung mit $n = 6$ ergibt, dass für $n = 6$, also auch für $n \leq 6$ die Teilmenge M_1 mehr Elemente enthält.

Aufgabe 21/88
Man zeige, dass das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (außer im trivialen Fall 0; 1; 2) nicht gleich der dritten Potenz einer natürlichen Zahl ist!

Angenommen, es gäbe drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $(n-1), n$ und $(n-1)$ derart, dass $(n-1)n(n+1) = k^3$ mit $k \in N$ ist. Zum Ausschluss des trivialen Falls sei $n \geq 2$. Dann ist $k > 1$, und es folgt

$$(n-1)n(n+1) = n^3 - n = k^3 \to n^3 - k^3 = (n-k)(n^2 + nk + k^2) = n \qquad (*)$$

Wegen $n > 1$ ist $n > k$, also $(n-k) \geq 1$, und wegen $k > 1$ ist $(n^2 + nk + k^2) > n$. Daraus folgt $(n-k)(n^2 + nk + k^2) > 1 \cdot n = n$.
Dies steht im Widerspruch zu (*). Also ist die Annahme falsch und damit folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 22/88
Man ermittle alle Paare $(p; n)$, in denen p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl ist und für die die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 2(p^n + 2)x + p^{2n} = 0$$

ganzzahlig sind!

Wenn die Gleichung ganzzahlige Losungen x_1, x_2 hat, so gilt nach dem Wurzelsatz des Vieta

$$-(x_1 + x_2) = 2p^n + 4; \qquad x_1 x_2 = p^{2n}$$

Aus der 2.Gleichung folgt, dass x_1 und x_2 gleiche Vorzeichen haben, aus der ersten Gleichung, dass $x_1; x_2 < 0$ gilt. Damit folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $x_1 = -p^k; x_2 = -p^l$ mit $k; l \in N, k + l = 2n$.
O.B.d.A. sei $l \leq k$. Dann gilt (wegen $p^l \neq 0$)

$$p^k + p^l = 2p^n + 4 \quad (*); \qquad p^{k-l} + 1 = 2p^{n-l} + \frac{4}{p^l}$$

Aus der Ganzzahligkeit der Potenzen von p folgt $p^l \mid 4$. Damit sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $p^l = 1$, also $l = 0, k = 2n$. Die Gleichung (*) nimmt die Gestalt $p^{2n} + 1 = 2p^n + 4$ an. Als Lösung ergibt sich $p^n = 3$, also $p = 3, n = 1$. Die Probe bestätigt die Richtigkeit dieser Lösung.
2. $p^l = 2$, also $l = 1, p = 2, k = 2n - 1$. Aus der Gleichung (*) folgt $p^{2n-1} + 2 = 2p^n + 4$. Diese Gleichung hat keine ganzzahligen Lösungen p^n.
3. $p^l = 4$, also $p = 2, l = 2, k = 2n - 2$. Es ergibt sich analog $2^{2n-2} + 4 = 2 \cdot 2^n + 4$, also $n = 3$. Auch diese Lösung wird durch die Probe bestätigt.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, gibt es als Lösungen genau die Paare $(3; 1)$ und $(2; 3)$.

Aufgabe 23/88
Man ermittle alle Primzahl-Zwillingspaare $(p_1; p_2)$, für die

$$P = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2$$

entweder Primzahl oder eine Potenz x^y mit $x; y \in N, x; y > 1$ ist!

Rechnet man $(2; 3)$ unter die Primzahl-Zwillingspaare, so ist $P = 2^2 - 2 \cdot 3 + 3^2 = 7$ eine Lösung. Für das Primzahl-Zwillingspaar $(3; 5)$ ergibt sich mit $P = 3^2 - 3 \cdot 5 + 5^2 = 19$ ebenfalls eine Lösung.
Ist $p > 5$, so gilt für jedes Primzahl-Zwillingspaar $(p_1; p_2)$, dass $p_1 = 6n - 1, p_2 = 6n + 1$ mit $n \in N$ ist. Damit folgt

$$P = (6n-1)^2 - (6n-1)(6n+1) + (6n+1)^2 = 3(12n+1)$$

Also ist $P > 3$ durch 3 teilbar und folglich keine Primzahl. Da der zweite Faktor $(12n^2+1)$ mit Sicherheit nicht durch 3 teilbar ist, enthält P den Primfaktor 3 nur in erster Potenz. Demnach kann P auch keine Potenz xy mit $x; y \in N, x; y > 1$ sein; denn jede Potenz x^y mit $x; y \in N$ enthält jeden Primfaktor in y-ter Potenz. Außer den bereits ermittelten Lösungen gibt es also keine weiteren.

Aufgabe 24/88
Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen. Dabei seien n_1 und n_2 natürliche Zahlen, die $p_i (i = 1,2,...,6)$ seien Primzahlen.

$$n_1 = p_1^2 p_2 p_3 \qquad (1)$$
$$n_2 = n_1 + 1 = p_4^2 p_5 p_6 \qquad (2)$$
$$p_2 = p_3 - p_1^6 \qquad (3)$$
$$p_3 = p_1 p_4^3 + p_6 \qquad (4)$$
$$p_5 = p_2 + p_1 p_4 \qquad (5)$$
$$p_6 = p_1^2 + p_2 + p_1 p_4 \qquad (6)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, dass eine der sechs Primzahlen gerade sein muss. Aus (3) folgt, dass dies nur p_1 oder p_2 sein kann, und aus (4) ergibt sich, dass dies p_1 ist: $p_1 = 2$. Setzt man dies in die Gleichungen (3)...(6) ein, so ergibt sich

$$p_2 = p_3 - 64 \quad (3a), \qquad p_3 = 2p_4^3 + p_6 \quad (4a)$$

$$p_5 = p_2 + 2p_4 \quad (5a), \qquad p_6 = 4 + p_2 + 2p_4 \quad (6a)$$

Mit (4a) eliminiert man p_3 aus (3a):

$$p_2 = 2p_4^3 + p_6 - 64 \quad (3b)$$

mit (3 b) scheidet man p_2 und p_6 aus (6a) aus; nach Umformung folgt

$$p_4(p_4^2 + 1) = 30 \quad (6b)$$

Die Primfaktoren von 30 sind 2, 3 und 5; durch Probieren findet man schnell $p_4 = 3$, und das System nimmt die folgende Gestalt an:

$$p_2 = p_3 - 64 \quad (3c), \qquad p_3 = p_6 + 54 \quad (4c)$$

$$p_5 = p_2 + 6 \quad (5c), \qquad p_6 = p_2 + 10 \quad (6c)$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man $n_2 = p_1^2 p_2 p_3 + 1 = p_4^2 p_5 p_6$ (2b) mit den bereits gefundenen Werten für p_1 und p_4, und durch Einsetzen von (3c)...(6c) in (2b) ergibt sich daraus nach Umformen die in p_2 quadratische Gleichung

$$p_2^2 - 22{,}4 p_2 + 107{,}8 = 0$$

mit der einzigen ganzzahligen Lösung $p_2 = 7$. Aus (3c) folgt dann $p_3 = 71$, aus (5c) $p_5 = 13$ und aus (6c) bzw. (4c) $p_6 = 17$. Schließlich erhält man mit den gefundenen 6 Primzahlen aus (1) und (2)

$$n_1 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71 = 1988, \qquad n_2 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 1989 = n_1 + 1$$

2.29 Aufgaben und Lösungen 1989

Aufgabe 1/89
Gesucht sind alle Paare $(p_1; p_2)$ von (im Dezimalsystem) zweistelligen Primzahlen p_1 und p_2 mit $p_1 < p_2$, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Weder die Einer- noch die Zehnerstellen von p_1 und p_2 sind Primzahlen.
2. Die Zehnerstellen von p_1 und p_2 sind nicht durch 3 teilbar.
3. Die Summe $p_1 + p_2$ ist weder durch 10 noch durch 13 teilbar.

Da p_1 und p_2 Primzahlen sind, kommen für ihre Einerstellen nur die Zahlen $1; 3; 7; 9$ in Frage. Nach Bedingung 1 entfallen 3 und 7. Für die Zehnerstellen verbleiben nach den Bedingungen 1 und 2 nur die Zahlen $1; 4; 8$. Damit können p_1 und p_2 die Werte $11; 19; 41; 89$ annehmen (49 und 81 sind keine Primzahlen!).
Wegen $p_1 < p_2$ erfüllen demnach nur die Paare $(11; 19), (11; 41), (11; 89), (41; 89)$ die Bedingungen 1 und 2. Von ihnen erfüllt nur das Paar $(19; 89)$ auch die Bedingung 3, es ist somit die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 2/89
Man suche natürliche Zahlen n, für die näherungsweise gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1989$$

Zunächst versuchen wir, ein Intervall $[n_1; n_2]$ zu finden, in dem mit Sicherheit Näherungslösungen der gegebenen Gleichung liegen. Für jede natürliche Zahl $i \geq 1$, gilt

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{2}{2\sqrt{i}} > \frac{2}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} = 2(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{2}{2\sqrt{i}} < \frac{2}{\sqrt{i-1} + \sqrt{i}} = 2(\sqrt{i} - \sqrt{i-1})$$

Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{n} 2(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = 2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} < \sum_{i=1}^{n} 2(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) = 2\sqrt{n}$$

Setzt man nun $2(\sqrt{n_1+1} - 1) = 1988$ und $2\sqrt{n_2} = 1990$, so erhält man nach Auflösung dieser Gleichungen $n_1 = 990024$ und $n_2 = 990025$.
Da sich beide Werte nur um 1 unterscheiden, sind beide als Näherungswerte anzusehen: Für $n = n_1 = 990024$ ist die Summe etwas zu klein, für $n = n_2 = 990025$ dagegen etwas zu groß.

Aufgabe 3/89
Es seien A der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c. Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$.
Für welche Dreiecke wird es angenommen?

Nach der heronischen Dreiecksformel gilt $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, wobei $s = \frac{u}{2}$, also $u = 2s$ ist. Nach dem Satz über das geometrische und das arithmetische Mittel gilt

$$\sqrt[3]{\frac{A^2}{s}} = \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{s}{3}$$

Daraus folgt

$$\frac{A^2}{s} \leq \frac{s^3}{27}, \qquad A^2 \leq \frac{s^4}{27} = \frac{u^4}{16 \cdot 27}, \qquad \frac{A}{u^2} \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

Da in der Ungleichung die Gleichung genau dann gilt, wenn $a = b = c$ ist, wird das Maximum beim gleichseitigen Dreieck angenommen.

Aufgabe 4/89
Es seien $p; q; p^2 + q^2; 2p + q^2$ sämtlich Primzahlen. Man ermittle p und q sowie das Produkt

$$q^2(p^2 + q^2)(2p^2 + q^2)$$

Wäre $q = 2$, so wäre $2p^2 + q^2 \equiv 0 \pmod 2$ und wegen $2p^2 + q^2 > 2$ keine Primzahl. Also ist $q \geq 3$, und damit ist $q \equiv q^2 \equiv 1 \pmod 2$. Wäre $p \geq 3$, so wären $p \equiv p^2 \equiv 1 \pmod 2$ und $p^2 + q^2 \equiv 0 \pmod 2$, wegen $p^2 + q^2 > 2$ also keine Primzahl. Demnach muss $p = 2$ sein. Für $q = 3$ ergibt sich

$$p^2 + q^2 = 13; \qquad 2p^2 + q^2 = 17; \qquad q^2(p^2 + q^2)(2p^2 + q^2) = 1989$$

Wäre $q > 3$, so wäre $q \equiv \pm 1 \pmod 3$, $q^2 \equiv 1 \pmod 3$ und damit $2p^2 + q^2 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, also wegen $2p^2 + q^2 > 3$ keine Primzahl. Damit ist die gefundene Lösung die einzige.

Aufgabe 5/89
Man bestimme alle Paare $(n; k)$ mit $n; k \in N$, die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

Wegen $56k \equiv 0 \pmod 7$ muss $10^n \equiv -n! \pmod 7$ sein. Da $10^n \neq 0 \pmod 7$ gilt, muss auch $n! \neq 0$ (mod 7), also $n < 7$ sein.
Prüft man die Zahlen $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ bezüglich der Kongruenz $10^n \equiv -n! \pmod 7$, so stellt man fest, dass sie nur von $n_1 = 4$ und $n_2 = 6$ erfüllt wird.
Aus der gegebenen Gleichung erhält man die zugehörigen Werte für k. Es existieren also genau zwei Paare $(n; k)$: $(n_1; k1) = (4; 179), (n_2; k_2) = (6; 17870)$.

Aufgabe 6/89
Man beweise: Im Dualsystem gibt es unter den Zahlen $11; 111; 1111; ...$ keine Potenz a^k mit $a; k \in N, a; k > 1$.

Die im Dualsystem als $11; 111; 1111; ...$ dargestellten Zahlen kann man im Dezimalsystem durch $\sum\limits_{i=0}^{n-1} 2^i$ mit $n > 1$ darstellen. Angenommen, es wäre

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 = a^k$$

mit $a; k \in N, a; k > 1$. Dann wäre a sicher ungerade, und es folgt $a^k - 1 = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$. Die Differenz $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + 1)$ wäre also durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Da wegen a ungerade $a - 1$ gerade ist, folgt, dass der Faktor $(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + 1)$ ungerade ist. Da er aus k ungeraden Summanden besteht, ist k ungerade: $k \geq 3$. Dann ist aber

$$2^n = a^k + 1 = (a+1)\{(a^{k-1} + a^{k-2} + (a^{k-3} - a^{k-4}) + ... + 1\}$$

Die geschweifte Klammer enthält k ungerade Glieder und ist wegen k ungerade selbst ungerade. Als Teiler von 2^n muss sie demnach gleich 1 sein. Also wäre $2^n = a^k + 1 = (a+1) \cdot 1$. Daraus folgt schließlich $k = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $k > 1$. Die Annahme ist also falsch, die Summe $\sum\limits_{i=0}^{n-1} 2^i$ kann für $n > 1$ keine Potenz a^k mit $a; k \in N, a; k > 1$ sein.

Aufgabe 7/89
Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die $f(x) = x^5 - x + 5$ eine Primzahl ist!

Es ist $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) \equiv 0 \pmod 5$. Ist nämlich $x \neq 0 \pmod 5$, so ist sicher entweder $x^2 \equiv 1 \pmod 5$ oder $x^2 \equiv -1 \pmod 5$. Damit ist $f(x) = x^5 - x + 5$ genau dann Primzahl, wenn $x^5 - x = 0$ ist. Die reellen Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = -1, x_2 = 0$ und $x_3 = 1$; für jeden dieser Werte und nur für diese ist $f(x) = 5$. Andere ganzzahlige x-Werte liefern $f(x) = 5g$ mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$.

Aufgabe 8/89
Jede Zahl $n \in N$ mit einer geraden Anzahl echter Dezimalstellen kann man "in der Mitte" trennen, wodurch zwei Zahlen $n_1; n_2 \in N$ entstehen.
Man ermittle alle geraden Zahlen n, die der Bedingung $n = (n_1 + 2)(n_2 + 2)$ genügen!

Wir bezeichnen mit $2m$, $m \in N, m \geq 1$ die Anzahl der Dezimalstellen von n. Dann ist n in der Form $n = 10^m n_1 + n_2$ mit $10^{m-1} \leq n < 10^m$ darstellbar. Wegen $n \equiv 0 \pmod 2$ muss $n_2 \equiv 0 \pmod 2$, also $n_2 = 2k$ mit $k \in N, k \geq 1$ sein. Die Bedingung der Aufgabe führt damit auf die Gleichung

$$n = 10^m n_1 + n_2 = 10^m n_1 + 2k = (n_1 + 2)(n_2 + 2) = (n_1 + 2)(2k + 2)$$

oder, äquivalent umgeformt, $(5 \cot 10^{m-1} - k - 1)n_1 = k + 2$.
Wegen $k; n_1 \in N$ ist $5 \cdot 10^{m-1} - k - 1 = M > 0$, und damit ist die Gleichung nach n_1 auflösbar:

$$n_1 = \frac{k+2}{M} = -1 + \frac{5 \cdot 10^{m-1} + 1}{M}$$

Nun ist $n_1 \geq 10^{m-1}$, also $n_1 + 1 = \frac{5 \cdot 10^{m-1}+1}{M} \geq 10^{m-1} + 1$. Daher ist $M < 5$. Da 4 die Zahl $5 \cdot 10^{m-1} + 1$ nicht teilt, gilt sogar $M \leq 3$. Man braucht also nur die Werte $M = 1, M = 2, M = 3$ auf Lösungen zu überprüfen.

1. $M = 5 \cdot 10^{m-1} - k - 1 = 1$ liefert sofort $k = 5 \cdot 10^{m-1} - 2, n_1 = k + 2$. Für jedes $m \in N, m \geq 1$ existiert eine Lösung:

m	k	n_1	n_2	n	$(n_1 + 2)(n_2 + 2)$
1	3	5	6	56	$= 7 \cdot 8$
2	48	50	96	5096	$= 52 \cdot 98$
3	498	500	996	550996	$= 502 \cdot 998$

2. $M = 5 \cdot 10^{m-1} - k - 1 = 2$ ergibt $k = 5 \cdot 10^{m-1} - 3, n_1 = \frac{k+2}{2}$. Man erkennt, dass $k \equiv 0 \pmod 2$ sein muss, da sonst nicht $n_1 \in N$ wäre. Das ist aber nur für $m = 1$ möglich. Folglich ist $k = 2, n_1 = 2, n_2 = 4, n = 24$.

3. Aus $M = 5 \cdot 10^{m-1} - k - 1 = 3$ folgt $k = 5 \cdot 10^{m-1} - 4, n_1 = \frac{k+2}{3}$. Analog zu 1. erhält man aus diesen Gleichungen für jedes $m \in N, m \geq 1$ eine Lösung:

m	k	n_1	n_2	n	$(n_1 + 2)(n_2 + 2)$
1	1	1	2	12	$= 3 \cdot 4$
2	46	16	92	1692	$= 18 \cdot 94$
3	496	166	992	166992	$= 168 \cdot 994$

Es existieren also zwei abzählbar unendliche Lösungsmengen sowie eine einzelne Lösung.

Aufgabe 9/89
Man ermittle alle nicht negativen reellen Zahlen x, die der Gleichung genügen:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = 6\sqrt[6]{x}$$

Man erkennt schnell, dass $x = 0$ eine Lösung der Gleichung ist. Für das Folgende kann man daher $x \neq 0$ voraussetzen. Division der Gleichung durch $\sqrt[6]{x}$ liefert unter Anwendung der Gesetze über das Rechnen mit Wurzeln

$$\sqrt[12]{x^2} + \sqrt[12]{x} = 6$$

Diese in $\sqrt[12]{x}$ quadratische Gleichung hat die Lösungen $\sqrt[12]{x} = -0{,}5 \pm 2{,}5$. Wegen $\sqrt[12]{x} > 0$ ist $\sqrt[12]{x}2, x = 2^{12} = 4096$. Es gibt also zwei Lösungen: $x_1 = 0, x_2 = 4096$.

Aufgabe 10/89
Es sind wenigstens zwei der vier Primzahlen $p_1; p_2; p_3; p_4$ mit $p_1 < p_2; p_3; p_4$ zu ermitteln, für die $P = p_1^{p_2} + p_3^{2p_4}$ Primzahl sein kann.

Sind p_1 und p_3 beide ungerade, so ist P in jedem Fall gerade and wegen $P > 2$ keine Primzahl. Folglich gilt wegen $p_1 < p_3$, dass $p_1 = 2$ ist. Für p_3 gilt $p_3 \geq 3$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $p_3 > 3$. Dann ist
$$P = 2^{p_2} + p_3^{2p_4} \equiv (-1)^{p_2} + (\pm 1)^{2p_4} \equiv (-1)^{p_2} + (+1)^{p_4} \equiv 0 \pmod 3$$
da $p_2; p_4 \geq 3$, also ungerade sind. Wegen $P > 3$ ist P keine Primzahl.

2. $p_3 = 3$. Dann ist
$$P = 2^{p_2} + 3^{2p_4} = 2^{p_2} + 9^{p_4}$$

Damit folgt: Wenn das Primzahlquadrupel $(p1; p2; p3; p4)$ mit $p_1 < p_2; p_3; p_4$ seine Primzahl $P = p_1^{p_2} + p_3^{2p_4}$ liefern soll, muss $p_1 = 2$ und $p_3 = 3$ sein. Tatsächlich ergibt sich mit $p_2 = 5, p_4 = 3$ die Primzahl $P = 2^5 + 3^{2\cdot 3} = 761$.

Aufgabe 11/89
Gesucht sind alle Paare $(n; k)$ natürlicher Zahlen n und k, für die gilt: Die Summe aus den Quadraten von n und von seinen k unmittelbaren Vorgängern ist gleich der Summe aus den Quadraten der k unmittelbaren Nachfolger von n.

Nach dem Text der Aufgabe soll gelten
$$\sum_{i=0}^{k} (n-i)^2 \sum_{i=1}^{k} (n+i)^2$$
$$\sum_{i=0}^{k} n^2 - 2n \sum_{i=0}^{k} i + \sum_{i=0}^{k} i^2 = \sum_{i=1}^{k} n^2 + 2n \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} i^2$$
wegen $\sum\limits_{i=0}^{k} n^2 = n^2 + \sum\limits_{i=1}^{k} n^2$, $\sum\limits_{i=0}^{k} i = \sum\limits_{i=1}^{k} i$ und $\sum\limits_{i=0}^{k} i^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} i^2$ folgt daraus nach äquivalenter Umformung
$$n^2 = 4n \sum_{i=1}^{k} i = 4n \frac{k(k+1)}{2} = 2nk(k+1)$$

Nun ist sicher $n \neq 0$, da sonst die unmittelbaren Vorgänger keine natürlichen Zahlen wären. Damit ergibt sich $n = 2k(k+1)$. Es existieren also unendlich viele Paare $(n; k)$ mit $(n; k) = [2k(k+1); k]$ mit $k \in N, k \geq 1$.

Aufgabe 12/89
Bei welchen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen a, b, c, bei denen b die Quersumme von a und $c = \sqrt{2a - b}$ (zahlenmäßig) ist, gilt für die größte Höhe $h_{max} > 0{,}5 \cdot (a+1)$?

Es gelten mit $n \in N; n > 0$ die folgenden Abschätzungen:
$$10^{n-1} \leq a \leq 10^n - 1, \qquad 1 \leq b \leq 9n, \qquad \sqrt{2 \cdot 10^{n-1} - 9n} \leq c \leq \sqrt{2 \cdot 10^n - 3}$$

Aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen folgt nun
$$10^{n-1} \leq a < b + c \leq 9n + \sqrt{2 \cdot 10^n - 3}$$

Die Probe weist aus, dass diese Ungleichung sicher für $n = 1$ und $n = 2$ erfüllt ist, nicht aber für $n = 3$. Da mit wachsendem n ihre linke Seite schneller wächst als die rechte, folgt, dass kein weiteres n die

Ungleichung erfüllt. Demnach kommen für a höchstens zweistellige Werte in Frage: $a = 10x + y$ mit $x; y \in N, 0 \leq x; y \leq 9; x + y \neq 0$. Dann ist $b = x + y$ und

$$c = \sqrt{2a - b} = \sqrt{2(10x + y) - (x + y)} = \sqrt{19x + y}$$

Wiederum aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichungen folgt

$$a = 10x + y < b + c = x + y + \sqrt{19x + y}, \qquad 9x < \sqrt{19x + y} \leq \sqrt{19x + 9}, \qquad 81x^2 \leq 19x + 9$$

Offensichtlich ist diese Ungleichung nur für $x = 0$ erfüllt. Das heißt, a ist einstellig, und es gilt $b = a, c = \sqrt{2a - b} = \sqrt{2a - a} = \sqrt{a}$. Damit c ganzzahlig wird, muss a eine Quadratzahl sein: $a \in \{1; 4; 9\}$.

1. Aus $a = 1$ folgt $b = 1, c = 1$. Das Dreieck ist gleichseitig, seine Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} < \frac{1+1}{2}$, es ist nicht Lösung der Aufgabe.
2. Aus $a = 4$ folgt $b = 4, c = \sqrt{4} = 2$. Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis $c = 2$. Wegen $h_a < c$ und $h_b < c$ ist $h_c = h_{max} = \sqrt{4^2 - 1^1} > 3 > \frac{4+1}{2}$. Das Dreieck erfüllt die Bedingung der Aufgabe.
3. Aus $a = 9$ folgt analog zu 2. $b = 9, c = 3, h_c = h_{max} = \sqrt{9^2 - 1{,}5^2} > 8 > \frac{9+1}{2}$. Auch dieses Dreieck erfüllt die Bedingung der Aufgabe.

Aufgabe 13/89
Man beweise die Richtigkeit des Satzes: Für jede Zahl $n \in N, n > 0$ gilt, dass das geometrische Mittel aller ihrer positiven Teiler (einschließlich der trivialen) gleich $\sqrt{n}$ ist.

Die Zahl $n \in N$ habe k Teiler a_i mit $i \in N, 0 < i \leq k$. Zu jedem Teiler a_i existiert eineindeutig ein Komplementärteiler $\frac{n}{a_i}$ (der gleich a_i sein kann). Mit P sei das Produkt aller Teiler bezeichnet. Dann gilt

$$P^2 = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = \prod_{i=1}^{k} a_i \cdot \prod_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{k} a_i \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{n}{a_i} = \prod_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n}{a_i} = \prod_{i=1}^{k} n = n^k$$

Zieht man die $2k$-te Wurzel, so folgt die Behauptung: $\sqrt[k]{P} = \sqrt{n}$.

Aufgabe 14/89
Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ mit E als Halbierungspunkt der Seite CD. In welchem Verhältnis teilt die Verbindungslinie BE die Diagonale AC?

Es sei M der Diagonalschnittpunkt des Parallelogramms. Wir betrachten das Dreieck DBC. In ihm sind CM und BE Seitenhalbierende (CM: Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander; BE: nach Voraussetzung).
Ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt $CS : SM = 2 : 1$ (nach dem Satz "Im Dreieck teilt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden diese im Verhältnis 2 : 1"). Dann gilt aber

$$CS : SA = 2 : (1 + 3) = 2 : 4 = 1 : 2 \qquad \text{oder} \qquad AS : SC = 2 : 1$$

Das heißt, BE drittelt die Diagonale AC.

Aufgabe 15/89
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, die der Gleichung $n! + 1 = (10n + 1)^2$ genügen!

Folgende Überlegungen führen rasch zum Ziel:
1. Für $n = 1$ ist $1! + 1 < (10 \cdot 1 + 1)^2$
2. Da die Fakultätsfunktion stärker wächst als die Quadratfunktion, kann es höchstens eine Lösung geben.
3. Wegen $10 \cdot 9 \cdot 8 > 101$ und $7 \cdot 6 \cdot 5 > 101$ gilt sicher $10! + 1 > (10 \cdot 10 + 1)^2$. Daraus folgt: Wenn die Gleichung eine Lösung $n \in N$ hat, ist $1 < n < 10$.
4. Wir schachteln n ein, indem wir die in Frage kommenden Intervalle jeweils (etwa) halbieren. Für $n = 5$ ist $5! + 1 < (10 \cdot 5 + 1)^2$, also gilt $5 < n < 10$. Für $n = 7$ ist $7! + 1 = 5041 = 71^2 = (10 \cdot 7 + 1)^2$. Demnach ist $n = 7$ die (einzige) Lösung der gegebenen Gleichung.

Aufgabe 16/89
Gesucht sind alle arithmetischen Folgen 1. Ordnung, bei denen alle Glieder ganzzahlig sind und das 1., das 3. und das 4. Glied mit den gleich nummerierten Gliedern einer geometrischen Folge übereinstimmen.

Wenn es eine Folge $\{a_k\}$ gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ist ihr Bildungsgesetz $a_k = a_1 + (k-1)d$, wobei a_1 und d ganze Zahlen sind; weiter existiert dann eine Folge $\{g_k\}$ mit dem Bildungsgesetz $g_k = g_1 \cdot q^{k-1}, g_1 \neq 0$, und es gelten die Gleichungen

$$a_1 = g_1 \neq 0; \qquad a_3 = a_1 + 2d = g_3 = g_1^2 \quad (1); \qquad a_4 = a_1 + 3d = g_4 = g_1 q^3 \quad (2)$$

Aus (1) folgt $d = 0{,}5a_1(q^2 - 1)$ (3). Setzt man dies in (2) ein; so erhält man wegen $a_1 = g_1 \neq 0$ die in q kubische Gleichung $q^3 - 1{,}5q^2 + 0{,}5 = 0$ mit den Lösungen $q_1 = q_2 = 1, q_3 = -0{,}5$.
Aus (3) ergibt sich dann $d_1 = d_2 = 0, d3 = -0{,}375a_1$. Die Doppellösung liefert also den Trivialfall der konstanten Folgen mit ganzzahligem 0. Die Lösung $q = -0{,}5, d = -0{,}375a_1$ erfordert $a_1 \equiv 0 \pmod 8$, also $a_1 = 8a$ mit einer beliebigen ganzen Zahl $a \neq 0$, damit d ganzzahlig wird. Es ist dann $d = -3a$, und die gesuchten (nichttrivialen) Folgen haben das Bildungsgesetz $a_k = 8a - 3(k-1)a = a(11 - 3k)$ mit einer beliebigen ganzen Zahl $a \neq 0$.
Zusatz: Die entsprechende geometrische Folge hat dann das Bildungsgesetz $g_k = 8a(-0{,}5)^{k-1}$ und es ist $a_1 = 8a = g_1, a_3 = 2a = g_3, a_4 = -a = g_4$.

Aufgabe 17/89
Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb von g. Gesucht ist die Menge aller Punkte Q in der von g und P aufgespannten Ebene, für die es einen Punkt R auf der Geraden g derart gibt, dass das Dreieck QPR gleichseitig ist.

Wir drehen die durch g und P bestimmte Ebene mit P als Drehzentrum um 60° im mathematisch positiven und negativen Drehsinn. Dadurch ergeben sich die Bildgeraden g' und g''.
Behauptung: Alle Punkte $Q \in g' \cup g''$ und nur diese bilden die gesuchte Menge.
Beweis: Es sei zunächst $Q \in g'$ (bzw. g''). Man macht die Drehung rückgängig, so geht g' (bzw. g'') in g und Q in einen Punkt $R \in g$ über. Wegen $\angle OPR = 60°$ und $QP = PR$ ist das Dreieck gleichseitig. Ist Q dagegen ein Punkt, für den $Q \notin g'$ und $Q \notin g''$ gilt, so geht bei der Rückdrehung zwar g' bzw. g'' in g über, aber Q in einen Punkt $R \notin g$. Ist also das Dreieck OPR gleichseitig sowie $Q \notin g'$ und $Q \notin g''$, so ist $R \notin g$.

Aufgabe 18/89
Es ist zu beweisen, dass $2^{99} + 1$ ohne Rest durch 683 teilbar ist.

Wir verwenden den Hilfssatz: "Wenn eine Zahl $n \in N$ restlos durch eine Zahl $k \in N$ teilbar ist, so ist sie auch durch jeden Faktor von k restlos teilbar." (Der Beweis ist trivial: Ist $k = a{\cdot}b$ mit $a; b \in N, 1 < a; b < k$, und gilt $k \mid n$, so gilt $n = k \cdot m = a \cdot b \cdot m$ mit $m \in N$, also $a \mid n$.)
Der geforderte Beweis ist demnach geführt, wenn gezeigt ist, dass $n = 2^{99} + 1$ ohne Rest durch ein Vielfaches von 683 teilbar ist. Dabei liegt es nahe, ein Vielfaches zu suchen, das als Summe aus einer Potenz von 2 und 1 darstellbar ist.
Nun ist $3 \cdot 683 = 2049 = 2^{11} + 1$ und $2^{99} + 1 : (2^{11} + 1) = 2^{88} - 2^{77} + 2^{66} - 2^{55} + 2^{44} - 2^{33} + 2^{22} - 2^{11} + 1 \in N$.

Aufgabe 19/89
Man schreibe alle Lösungen der Gleichung

$$x^4 - (2D + R - 4)x^3 + D(d + 2R - 8)x^2 - D^2(R - 4)x = 0$$

mit $D + 4 < R < 4$ in nicht fallender Folge ohne zwischengesetzte Interpunktionszeichen auf!

Offensichtlich ist $x_1 = 0$ eine Wurzel der Gleichung. Für $x \neq 0$ gilt

$$x^3 - (2D + R - 4)x^2 + D(D + 2R - 8)x - D^2(R - 4) = 0$$

Nach dem Wurzelsatz des Vieta kann man $x_2 = x_3 = D, x_4 = R - 4$ vermuten. Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Vermutung. Wegen $D + 4 < R < 4$ folgt weiter $D < R - 4 < 0$, und damit ist $DDR - 40$ die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 20/89
Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x, y, z, für die die Gleichung $x + y + z + 2 = xyz$ gilt.

Da die Gleichung in den Variablen symmetrisch ist, setzen wir zunächst $y = x + a, z = x + b$ mit $a; b \in N$. Die Gleichung nimmt dann die Gestalt an:

$$x + x + a + x + b + 2 = x(x + a)(x + b), \qquad 3x + a + b + 2 = x^3 + (a + b)x^2 + abx$$

1. Sei $x = 1$. Dann folgt nach Vereinfachung $ab = 4$, also $a = 1$ und $b = 4$ oder $a = b = 2$ ($a = 4$ und $b = 1$ stellt nur eine Vertauschung von y und z dar und wird später erfasst), und wir erhalten die ersten Lösungen (die durch die Probe bestätigt werden):
1.1. $x = 1; y = 2; z = 5$ und 1.2. $x = 1; y = 3; z = 3$.
2. Sei $x = 2$. Dann folgt nach Vereinfachung $3(a + b) + 2ab = 0$. Diese Gleichung ist für $a; b \in N$ nur mit $a = b = 0$ erfüllbar, und wir erhalten die (durch die Probe bestätigte) dritte Lösung: $x = 2; y = 2; z = 2$.
3. Sei $x \geq 3$, also $x = 3 + c$ mit $c \in N$. Dann folgt nach Vereinfachung $0 = 16 + f(a; b; c)$, wobei $f(a; b; c) \geq 0$ gilt. Diese Gleichung ist für kein Tripel $(a; b; c)$ mit $a; b; c \in N$ erfüllbar. Damit existiert keine Lösung für $x \geq 3$.
Da $x = 0$ offenbar keine Lösung liefert, sind damit (bis auf die Reihenfolge) alle Tripel gefunden. Durch Vertauschen ergeben sich insgesamt 10 Lösungen:
$(1; 2; 5), (1; 5; 2), (2; 1; 5), (2; 5; 1), (5; 1; 2), (5; 2; 1), (1; 3; 3), (3; 1; 3), (3; 3; 1), (2; 2; 2)$.

Lösung von Katrin Böhme:

Man kann leicht nachprüfen, dass keine der Zahlen x, y, z gleich null sein kann. Weiterhin können auch nicht zwei der Zahlen gleichzeitig gleich 1 sein.
O.B.d.A. nehmen wir $x \leq y \leq z$ an. Dann gilt $x \geq 1$ und $y \geq 2$ sowie

$$x + y + z + 2 = xyz \quad \to \quad y + z + 2 = x(yz - 1) \quad \to \quad \frac{y + z + 2}{yz - 1} = x \geq 1 \tag{1}$$

$$y + z + 2 \geq yz - 1 \quad \to \quad z + 3 \geq y(z - 1) \quad \to \quad \frac{z + 3}{z - 1} \geq y \geq 2 \tag{2}$$

$$z + 3 \geq 2z - 2 \quad \to \quad 5 \geq z$$

Damit ist die Lösungsmenge eingeschränkt:
Die größte der drei Zahlen x, y, z ist nicht größer als 5. Mit Hilfe von (1) und (2) ergeben sich nun die Lösungen

$$(x = 1, y = 3, z = 3), \qquad (x = 1, y = 2, z = 5), \qquad (x = 2, y = 2, z = 2)$$

sowie die daraus folgenden Permutationen.

Lösung von Karsten Wolter:

1. $x = y = z = 0$ ist keine Lösungen.
2. Die Annahme $x > 2$, $y > 2$, $z > 2$ (also $x = 2 + \overline{x}$, $y = 2 + \overline{y}$, $z = 2 + \overline{z}$ mit $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} > 0$) führt auf einen Widerspruch.
3. Aus der Symmetrie der Gleichungen bezüglich x, y und z folgt die Symmetrie der Lösungen.
Damit sind o.B.d.A. nur folgende zwei Fälle zu untersuchen:

1. $z = 1$: Es folgt $y = \frac{x+3}{x-1}$. Ganzzahlige (natürliche!) Lösungen existieren nur für $x = 2, y = 5$; $x = 3, y = 3$; $x = 5, y = 2$.

2. $z = 2$: Es folgt $y = \frac{x+4}{2x-1}$. Ganzzahlige (natürliche!) Lösungen existieren nur für $x = 1, y = 5$; $x = 2, y = 2$; $x = 5, y = 1$.
Aus 3. folgen durch Permutation insgesamt 10 Lösungen.

Lösung von Gerhard Fritzsche:

Zunächst sei $x \leq y \leq z$ angenommen. Sicher ist $x \neq 0$, da die Annahme $x = 0$ auf einen Widerspruch führt. Ebenso führt die Annahme $x = y = 1$ auf einen Widerspruch.
Es sei $(x; y; z)$ eine Lösung der Gleichung. Wird nun eine der Zahlen x, y, z um 1 vergrößert, so wächst die linke Seite um 1, die rechte dagegen um das Produkt der beiden anderen Zahlen, also um mehr als 1. Wenn also, ausgehend von der Lösung $(x; y; z)$, eine weitere Lösung gefunden werden soll, so muss mindestens eine der Zahlen vergrößert und eine andere verkleinert werden.

Zunächst werde $x = y = z$ gesetzt, Dann folgt $3x + 2 = x^3$, und diese Gleichung hat die Lösung $x = 2$ und $x = -1$ (Doppellösung).
Folglich ist $(x; y; z) = (2; 2; 2)$ ein Lösung.
Beim Übergang zu weiteren Lösungen muss mindestens eine der Zahlen kleiner als 2 sein. Angenommen, es sei dies $x = 1$.
Wir setzen $y = z$ und erhalten die Gleichung $2y + 3 = y^2$ mit den Lösungen $y = z = 3$ und $y = z = -1$.
Folglich ist $(x; y; z) = (1; 3; 3)$ eine Lösung.

Falls weitere Lösungen existieren, muss $y < 3$, $z > 3$ gelten. Da $x = y = 1$ ausgeschlossen ist, bleibt nur $y = 2$. Man erhält $z + 5 = 2z$, also $z = 5$. Das ergibt die dritte Lösung $(x; y; z) = (1; 2; 5)$.
Das Verfahren ist damit erschöpft, weitere Lösungen können nicht existieren. Lässt man nunmehr die Annahme $x \leq y \leq z$ fallen, so erhält man durch Permutation insgesamt 10 Lösungstripel.

Aufgabe 21/89
Man beweise: Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so sind in der Dezimalbruchentwicklung von $(\sqrt{26}+5)^n$ die ersten n Stellen nach dem Komma mit Nullen besetzt.

Zur Lösung verwenden wir einen Hilfssatz: "Sind $a; b; n \in N$ und n ungerade, so haben in dem Term $(a + b)^n - (a - b)^n$ die Potenzen von a sämtlich gerade Exponenten." Der Beweis folgt unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz. Aus diesem Hilfssatz folgt, dass

$$(\sqrt{26} + 5)^n - (\sqrt{26} - 5)^n = k \in N$$

Nun gilt

$$k < (\sqrt{26} + 5)^n = k + (\sqrt{26} - 5)^n.$$

Aus $(\sqrt{26} + 5)(\sqrt{26} - 5) = 1$ folgt weiter

$$(\sqrt{26} - 5) = (\sqrt{26} + 5)^{-1} < (\sqrt{25} + 5)^{-1} = 10^{-1}$$

Demnach ist $(\sqrt{26} + 5)^n = k + (\sqrt{26} - 5)^n < k + 10^{-n}$, w.z.b.w.

Aufgabe 22/89
Es ist das Gleichungssystem

$$x + yz = y + xz = z + xy = a$$

für eine fest vorgegebene reelle Zahl a in Tripeln $(x; y; z)$ reeller Zahlen x; y; z zu lösen!

1. Da das System in den Variablen $x; y; z$ symmetrisch ist, sind mit einem Lösungstripel $(x_i; y_i; z_i)$ auch alle seine Permutationen Lösungstripel.

2. Aus der ersten Gleichung folgt durch äquivalente Umformung $x - y = z(x - y)$. Diese Gleichung ist genau für $x = y$ oder für $z = 1$ erfüllt.

2.1. Es sei zunächst $x = y$. Dann nimmt das System die Gestalt $x + zx = z + x^2 = a$ an. Mit der Substitution $z = a - x^2$ folgt $x + (a - x^2)x = a$, also $x^3 - x(a + 1) + a = 0$. Offensichtlich ist $x_1 = 1$ eine Lösung dieser kubischen Gleichung. Damit ergibt sich ein erstes Lösungstripel: $(x_{11}; y_{11}; z_{11}) = (1; 1; a-1)$.
Durch Permutation folgen daraus zwei weitere, wenn $a = 2$ ist: $(x_{12}; y_{12}; z_{12}) = (1; a-1; 1), (x_{13}; y_{13}; z_{13}) = (a - 1; 1; 1)$.
Durch Partialdivision mit $x - 1$ folgt aus der kubischen Gleichung die quadratische $x^2 + x - a = 0$, also $x = a - x^2 = z$.
Die reellen Lösungen dieser Gleichung sind $x_2 = 0{,}5(\sqrt{4a + 1} - 1); x_3 = -0{,}5(\sqrt{4a + 1} + 1)$, wobei $a \geq -0{,}2$ vorauszusetzen ist (andernfalls existieren keine reellen Lösungen; im Falle der Gleichheit ist $x_2 = x_3$). Damit erhält man $x_i = y_i = z_i$ für $i = 2; 3$ und die beiden Lösungstripel $(x_2; y_2; z_2) = (x_2; x_2; x_2), (x_3; y_3; z_3) = (-x_2; -x_2; -x_2)$. Für $a = 2$ ist $x_2 = x_{11}$.

2.2. Es sei nun $z = 1$. Dann nimmt das System die Gestalt $x + y = 1 + xy = a$ an. Mit der Substitution $y = a - x$ folgt $1 + x(a - x) = a$, also $x^2 - ax + a - 1 = 0$.
Die Lösungen dieser Gleichung liefern nochmals Tripel $(x_{1i}; y_{1i}; z_{1i})$, ergeben also nichts Neues.
Damit existieren genau 5 Tripel, wenn $a > -0{,}25; a \neq 2$, genau 4 Tripel, wenn $a = -0{,}25$ und genau 3 Tripel, wenn $a < -0{,}25$ ist. Ist $a = 2$, so existieren genau 2 Tripel.

Aufgabe 23/89
Eine Folge sei durch das Bildungsgesetz

$$a_k = p \cdot k \cdot (k + 1) + 1$$

gegeben, wobei p eine Primzahl und $k > 0$ ist. Das 7. Glied sei das Quadrat einer Primzahl P. Man ermittle alle möglichen Paare $(p; P)$.

Aus $a_7 = p \cdot 7 \cdot 8 + 1 = P^2$ folgt $P^2 - 1 = 56p$. Sicher ist $P > 3$. Dann ist $P \equiv \pm 1 \pmod 3$ und $P^2 \equiv 1 \pmod 3$, also $P^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$.
Wegen $56 \not\equiv 550 \pmod 3$ folgt $p \equiv 0 \pmod 3$ und damit (wegen der Primzahleigenschaft von p) $p = 3, P^2 = 3 \cdot 56 + 1 = 169, P = 13$. Also ist $(p; P) = (3; 13)$ das einzig mögliche Paar.

Aufgabe 24/89
Es sei $n \in N$ eine im Dezimalsystem echt vierstellige Zahl; ihre Darstellung im Positionssystem mit der Basis $b \neq 10 \quad (b \in N, b \geq 2)$ ist 1549.
Diese Darstellung unterscheidet sich von der im Dezimalsystem genau an den beiden mittleren Stellen. Man berechne b und n.

Es seien $a_1; a_2 \in N, 0 \leq a_1; a_2 \leq 9$ die unbekannten Ziffern der beiden mittleren Stellen im Dezimalsystem und $b = 10 + k$ mit einer ganzen Zahl $k \geq 1$ (da in der Darstellung im b-System die Ziffer 9 vorkommt, gilt $b > 9$ und wegen $b \neq 10$ sogar $b \geq 11$). Dann gilt die Gleichung

$$n = 1000 + 100a_2 + 10a_1 + 9 = (10 + k)^3 + 5(10 + k)^2 + 4(10 + k) + 9$$

Vereinfacht und durch 10 dividiert, ergibt sich

$$10a_2 + a_1 = 3k^2 + 40k + 54 + \frac{k^3 + 5k^2 + 4}{10}$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung zweistellig bleibt, muss $k < 2$, also $k = 1$ sein. Damit ist $10a_2 + a_1 = 98; b = 11$ und $n = 1989$.

2.30 Aufgaben und Lösungen 1990

Aufgabe 1/90
Ein Ehepaar gab eine Silvesterparty mit n Gästen ($n \in N, n < 100$). Wenn jeder der Anwesenden mit jedem anderen genau einmal angestoßen hätte, wären die Gläser genau m-mal erklungen. ($m = k^2, k \in N$).
Wieviele Gäste waren anwesend?

Auf der Party waren $n+2$ Personen anwesend. Die Anzahl der "Anstöße" ist damit $m = k^2 = 0{,}5(n+2)(n+1)$. Da $(n+2)$ und $(n+1)$ zueinander teilerfremd sind, folgt, dass entweder $0{,}5(n+2)$ und $(n+1)$ oder $0{,}5(n+1)$ und $(n+2)$ Quadratzahlen sein müssen, wenn m Quadratzahl sein soll. Man muss also prüfen, ob für $1 \leq n < 100$ (es wird wenigstens ein Gast vorausgesetzt)
1. die ungeraden Quadratzahlen $(n+2)$ eine Quadratzahl $0{,}5(n+1)$ oder
2. die ungeraden Quadratzahlen $(n+1)$ eine Quadratzahl $0{,}5(n+2)$ liefern.
Eine Überprüfung mit $n = 7; 8; 23; 24; 47; 48; 79; 80$ ergibt, dass zwei Lösungen existieren:
$n_1 = 7, n_1 + 2 = 9 = 3^2, 0{,}5(n_1+1) = 4 = 2^2$ und $n_2 = 48, n_2 + 1 = 49 = 7^2, 0{,}5(n_2+2) = 25 = 5^2$. Es waren also entweder 7 oder 48 Gäste anwesend.

Aufgabe 2/90
Das Viereck $ABCD$ mit den festliegenden Seiten $AB = a, BC = b, CD = c$ und $DA = d$ sowie den noch nicht bestimmten Winkeln $\angle DAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCD = \gamma$ und $\angle CDA = \delta$ sei ein Tangentenviereck.
Welche Bedingungen müssen die Seiten erfüllen, wenn es zugleich ein Sehnenviereck sein soll?

In einem Tangentenviereck sind bekanntlich die Summen der gegenüberliegenden Seiten einander gleich. Demnach gilt $a+c = b+d$. In einem Sehnenviereck ist bekanntlich die Summe gegenüberliegender Winkel gleich 180°. Es muss also gelten $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.
Nun gilt für die Diagonalen AC und BD nach dem Kosinussatz

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta$$

(wegen $\delta = 180° - \beta$) und

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

(wegen $\gamma = 180° - \alpha$). Daraus folgt

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} \qquad ; \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab+cd)}$$

Reelle Lösungen für α und β und damit für γ und δ existieren genau dann, wenn

$$\left|\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}\right| \leq 1 \qquad ; \qquad \left|\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab+cd)}\right| \leq 1$$

ist. Dass dies tatsächlich realisierbar ist, zeigt das Beispiel des Quadrates, aber auch das Drachenviereck mit $2a = b = c = 2d$ u.a.

Aufgabe 3/90 Es ist zu untersuchen, ob es Polynome m-ten Grades

$$P(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_i gibt, bei denen für jede natürliche Zahl n (0 eingeschlossen) die Kongruenz gilt:

$$|3^n - P(0)| \equiv 0 \pmod 8$$

Es ist $P(0) = a_0$. Da $3^n \equiv (2 \pm 1) \pmod 8$ ist (je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist), kann die Kongruenz

$$|3^n - P(0)| \equiv |(2 \pm 1) - a_0| \equiv 0 \pmod 8$$

für kein $n \in N$ und kein $P(n)$ erfüllt werden. Lautete die linke Seite der Kongruenz jedoch $|3^n - P(n)|$, so wäre

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} 2^{n-k} + 2n^2 + 1$$

und für $n \geq 3$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 8 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} 2^{n-k-3} \equiv 0 \pmod 8$$

Deshalb ist sicher $P^*(n) = 2n^2 + 1$ ein Polynom, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt (dies gilt auch für $n = 0; 1; 2$, wie man durch Ausrechnen leicht nachprüft). Addiert man zu $P^*(n)$ das 8fache eines Polynoms i-ten Grades $P^{**}(n) = \sum_{i=0}^{l} b_i n^i$ mit ganzen Koeffizienten b_i, so wird diese Kongruenz nicht verändert:

$$P(n) = 2n^2 + 1 + 8 \sum_{i=0}^{l} b_i n^i$$

(b_i ganz). Es gilt für jede natürliche Zahl n die Kongruenz

$$|3^n - P(n)| = \left| 8 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} 2^{n-k-3} - 8 \sum_{i=0}^{l} b_i n^i \right| \equiv 0 \pmod 3$$

Aufgabe 4/90
Es sei a eine reelle Zahl. Man löse das folgende Gleichungssystem in reellen Zahlen x, y, z. Welche Werte von a sind ausgeschlossen?

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

Offensichtlich muss $a \neq 1$ sein, dafür $a = 1$ die drei Gleichungen ineinander übergehen und damit das System unbestimmt ist. Addiert man die drei Gleichungen, so erhält man $(a+2)(x+y+z) = 1 + a + a^2$. Offensichtlich muss $a \neq -2$ sein, da $a = -2$ auf den Widerspruch $0 = 3$ führt. Wegen $a + 2 \neq 0$ ist diese Gleichung

$$x + y + z = \frac{1 + a + a^2}{a + 2}$$

äquivalent. Subtrahiert man diese Gleichung von jeder Gleichung des gegebenen Systems, so erhält man (mit a reell, $a \neq 1, a \neq 2$)

$$x = -\frac{a+1}{a+2}; \qquad y = \frac{1}{a+2}; \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

Aufgabe 5/90
Wenn eine Primzahl p in der Form $p = a^n + b^n$ mit $a; b; n \in N, a; b; n > 1$ darstellbar ist, muss $n = 2^k$ mit $k \in N, k > 0$ sein.
Man beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Wir beweisen die Richtigkeit der äquivalenten Aussage: "Wenn eine natürliche Zahl p in der Form $p = a^n + b^n$ mit $a; b; n \in N, a; b; n > 1$ darstellbar und $n \neq 2^k$ mit $k \in N, k > 0$ ist, kann p nicht Primzahl sein".
Genau dann, wenn $n \neq 2^k$ mit $k \in N; k > 0$ ist, enthält die Primfaktorenzerlegung von n wenigstens einen ungeraden Faktor $u = 2m + 1$ mit $m \in N; m \geq 1$: $n = u \cdot v$ mit $v \in N; v > 0$, und es folgt

$$p = a^n + b^n = a^{uv} + b^{uv} = (a^v)^u + (b^v)^v = A^u + B^u$$

Nun ist jedes Polynom $A^u + B^u$ mit ungeradem u sicher restlos durch $A + B$ teilbar:

$$p = A^u + B^u = (A + B)(A^{u-1} - A^{u-2}B + A^{u-3}B^2 + -...B^{u-1})$$

Dabei ist $A + B \neq 1$ (wegen $A = a^v > 1$ und $B = b^v > 1$ bei $a; b; v \in N$; $a; b > 1$, $v > 0$) und $A + B < p = A^u + B^u$ (wegen $A < A^u$ und $B < B^u$ bei $A; B; u \in N$; $A; B > 1$, $u > 1$). Also ist von p ein echter Teiler abspaltbar, p kann damit nicht Primzahl sein.

Aufgabe 6/90
Welche Bedingungen müssen die reellen Konstanten $a; b > 0$ erfüllen, wenn die Funktion

$$f(x) = \frac{a^x - b^x}{a - b}$$

für $x_0 \geq 0$ ein Maximum haben soll?

Wegen der Symmetrie bezüglich a und b genügt es, die Funktion $a > b$ zu untersuchen. Da ein konstanter Faktor $\frac{1}{a-b}$ keinen Einfluss auf Existenz und Lage von Extremwertstellen hat, kann man die Funktion $f(x) = \frac{a^x - b^x}{a-b}$ in unserem Fall durch die Funktion $\varphi(x) = a^x - b^x$ ersetzen. Notwendig für die Existenz von Extremwerten an Stellen x_0 ist

$$\varphi'(x_0) = a^{x_0} \ln a - b^{x_0} \ln b = 0 \qquad \text{also} \qquad x_0 = \frac{\ln \frac{\ln b}{\ln a}}{\ln a - \ln b}$$

Ist nun $a > 1$ und $a > b$, so ist (wegen der strengen Monotonie der ln-Funktion) $\ln a > \ln b$ und damit $\frac{\ln b}{\ln a} < 1$, also $\ln \frac{\ln b}{\ln a} < 0$, $\ln a - \ln b > 0$ und folglich $x_0 < 0$ im Widerspruch zur Forderung der Aufgabe $x_0 \geq 0$. Demnach muss $0 < a; b_1$ gelten.
Für $f(x) = \frac{a^x - b^x}{a-b}$ folgt damit als notwendige Bedingung für die Existenz eines Maximums, dass $0 < a; b < 1$ gilt.

Aufgabe 7/90
Drei Mathematiker sitzen am Abend in fröhlicher Runde beisammen. Einer von ihnen sagt: "Soeben waren es noch h Stunden, m Minuten und s Sekunden bis Mitternacht, wobei h, m und s drei Primzahlen sind, die der Gleichung $3s = h + m$ genügen." Darauf antwortet der zweite: "Auch die Anzahl der Minuten bis Mitternacht war eine Primzahl." Und der dritte sagt nach einem Blick auf den Taschenrechner: "Sogar die Anzahl der Sekunden war Primzahl."
Wie spät war es?

Folgende Überlegungen führen zur Lösung:
1. Sicher ist $h \leq 7$, da man sonst nicht "am Abend" sagen dürfte.
2. Sicher ist eine der drei Primzahlen h, m und s gerade. Wäre dies s, so wäre $3s = 6 = h + m$, also $h = m = 3$, und die Anzahl der Minuten bis Mitternacht wäre $60h + m = 183$, also keine Primzahl. Demnach ist $s \geq 3$ und entweder $h = 2$ oder $m = 2$ (der Fall $s = h = m = 2$ scheidet offensichtlich aus).
3. Wäre $m = 2$, so wäre auf keinen Fall die Anzahl der Minuten bis Mitternacht $60h + 2$ eine Primzahl. Also ist $h = 2$ und $m \geq 3$.
4. Sicher ist $m < 60$. Wegen $h = 2$ und $3s = h + m$ muss $m + 2$ durch 3 teilbar sein. Es kommen also für m nur die Primzahlen $7; 13; 19; 31; 37$ und 43 in Frage. Für $m = 43$ ergibt sich für s keine Primzahl, und für $m = 13$ ist die Anzahl der Minuten bis Mitternacht gleich $133 = 7 \cdot 19$, also keine Primzahl.
5. Es verbleiben nur noch die Möglichkeiten $m_1 = 7, m_2 = 19, m_3 = 31$ und $m_4 = 37$. Für die Anzahlen S_i der Sekunden bis Mitternacht ergeben sich $S_1 = 7623 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$, $S_2 = 8347 = 17 \cdot 491$, $S_3 = 9071 = 47 \cdot 193$ und $S_4 = 9433$. Nur S_4 ist Primzahl.
6. Damit ergibt sich als Zeitpunkt 2 h 37 min 13 s vor Mitternacht. Es war 21 h 22 min 47 s.

Aufgabe 8/90
Es sei n eine im Dezimalsystem echt m-stellige ($m \geq 2$) natürliche Zahl, die restlos durch 11 teilbar ist. Durch Umkehr der Ziffernfolge entsteht aus ihr die (nicht notwendig echt m-stellige) natürliche Zahl n'. Wie viele Summen $n + n'$ sind restlos durch 11 teilbar?

Durch Umkehr der Ziffernfolge ändert sich die alternierende Quersumme höchstens um das Vorzeichen. Daher ist mit n stets auch n' und folglich auch die Summe $n+n'$ restlos durch 11 teilbar. Es gibt demnach ebenso viele restlos durch 11 teilbare Summen $n+n'$, wie es restlos durch 11 teilbare m-stellige natürliche Zahlen n gibt. Für deren Anzahl l gilt

$$l = \left[\frac{10^m}{11}\right] - \left[\frac{10^{m-1}}{11}\right] = 9 \cdot \frac{10^{m-1} + (-1)^m}{11}$$

Dabei bedeutet $\left[\frac{a}{b}\right]$ den ganzen Anteil des Bruches $\frac{a}{b}$.

Aufgabe 9/90
Es seien a, b und c die Seitenlängen eines ebenen Dreiecks. Man beweise:
Gilt $a^4 + b^4 = c^4$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Wenn für die Seitenlängen a, b und c eines ebenen Dreiecks die Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, ist c die größte Seite des Dreiecks und demzufolge der ihr gegenüberliegende Winkel γ der größte Winkel.
Angenommen, das Dreieck wäre nicht spitzwinklig. Dann gälte nach dem Kosinussatz $c^2 \geq c^2 + 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2$ (wegen $\cos\gamma \leq 0$; es gilt $\frac{\pi}{2} \leq \gamma < \pi$). Daraus folgt

$$c^4 \geq (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > a^4 + b^4$$

Wenn also das Dreieck nicht spitzwinklig ist, dann ist $a^4 + b^4 < c^4$ im Widerspruch zur Voraussetzung $a^4 + b^4 = c^4$. Damit ist die Annahme falsch; das Dreieck ist spitzwinklig.
Zusatz: Die Bedingung $a^4 + b^4 = c^4$ ist für die Spitzwinkligkeit hinreichend, aber nicht notwendig. Es gibt spitzwinklige Dreiecke, für die sie nicht gilt, z.B. das gleichseitige Dreieck. Ein Beispiel für ein Dreieck, in dem sie gilt, ist das gleichschenklige mit $a = b = 3, c = \sqrt[4]{162}$.

Aufgabe 10/90
Welche Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen genügen der Gleichung $x^3 - y^3 - z^3 = 6y(y + 2)$?

Da die rechte Seite der Gleichung sicher positiv ist, muss auch die linke Seite positiv sein. Also ist $x > y; z \geq 2$. Da die rechte Seite der Gleichung sicher gerade ist, muss auch die linke Seite gerade sein. Also ist entweder $y = 2, z \geq 3$ oder $y \geq 3, z = 2$. Sei zunächst $y = 2, z \geq 3$. Dann nähme die Gleichung nach Umformung die Gestalt

$$x^3 - z^3 = (x - z)(x^2 + xz + z^2) = 56 = 7\cot 8$$

an. Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt entweder

$$x^2 + xz + z^2 = 7, \qquad x - z = 8 \qquad \text{oder} \qquad x^2 + xy + z^2 = 8, \qquad x - z = 7$$

Diese Gleichungssysteme haben jedoch keine rationalen Zahlen, erst recht keine Primzahlen $x; z$ als Lösung. Folglich gilt $y \geq 3, z = 2$. Damit nimmt das Gleichungssystem die Gestalt

$$x^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 = y^3 + 3y^2 \cdot 2 + 3y^2 \cdot 2^2 + 2^3 = (y + 2)^2$$

an, woraus sofort $x = y + 2$ folgt. Demnach sind alle Tripel $(x; y = x - 2; z = 2)$ Lösung, wenn x und $y = x - 2$ Primzahlzwillinge sind (wobei y die kleinere der beiden Primzahlen ist).

Aufgabe 11/90
Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a LE und b LE $(a \neq b, a; b > 0)$, bei denen die Differenzen der Rauminhalte und der Grundflächeninhalte zahlenmäßig einander gleich sind.
Welche Bedingung müssen a und b erfüllen?

Es soll gelten $a^3 - b^3 = a^2 - b^2$, und wegen $a \neq b$ folgt daraus

$$a^2 + ab + b^2 = a + b, \qquad a = \frac{1}{2}(1 - b \pm \sqrt{1 - 3b^2 + 2b}) = \frac{1}{2}(1 - b \pm \sqrt{(1 - b)(3b + 1)})$$

Die Kante a wird genau dann reell, wenn $1 - b \geq 0$, also $0 \leq b \leq 1$ ist; wegen $a; b > 0$ entfallen jedoch $b = 0$ und $b = 1$. Demnach muss $0 < b < 1$ sein. Da die Ausgangsgleichung in a und b symmetrisch ist, muss für a die gleiche Bedingung gelten: $0 < a; b < 1$.

Aufgabe 12/90
Man bestimme alle Tripel (x, y, z) nichtnegativer ganzer Zahlen x, y und z, die der diophantischen Gleichung $3x + 4y + 5z = 30$ genügen und deren Summe $s = x + y + z$ eine Primzahl ist, durch logisches Schließen (der Lösungsweg über systematisches Probieren ist also ausgeschlossen!).

Ist (x,y,z) mit $x; y; z \geq 0$ und ganzzahlig ein Lösungstripel der gegebenen diophantischen Gleichung, so gilt für die Summe $s = x+y+z$ wegen $3s \leq 3x+4y+5z = 30$ und $5s \geq 3x+4y+5z = 30$ die Ungleichung $6 \leq s \leq 10$.
Wegen der Primzahleigenschaft von s folgt daraus $s = 7 = x + y + z$. Subtrahiert man $3s$ bzw. $4s$ von der gegebenen Gleichung, so erhält man $y = 9 - 2z, x = z - 2$.
Wegen $x, y \geq 0$ folgt nun $2 \leq z \leq 4$. Damit erhält man die drei Lösungstripel $(0; 5; 2), (1; 3; 3)$ und $(2; 1; 4)$. Die Probe bestätigt, dass alle drei Tripel die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 13/90
Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems

$$p_1^2 + p_2^2 = p_3(p_1 + p_2) \quad (1) \qquad ; \qquad p_1p_2p_3 - 8 = p_4 \quad (2)$$

in Primzahlen $p_i (i = 1; 2; 3; 4)$.

Zunächst beschränken wir uns auf die Lösung der Gleichung (1). Es ist

$$p_1^2 + p_2^2 = (p_1 + p_2)^2 - 2p_1p_2 = p_3(p_1 + p_2)$$

wegen der Ganzzahligkeit der p_i und wegen $p_1 + p_2 > 0$ gilt $p_1 + p_2) \mid 2p_1p_2$. Von den 7 möglichen Fällen kann man 4 schnell ausscheiden:
1. $p_1 + p_2 \neq 2$, da $p_1; p_2 \geq 2$.
2. $p_1 + p_2 \neq p_1$, da $p_2 > 0$.
3. $p_1 + p_2 \neq p_2$, da $p_1 > 0$.
4. $p_1 + p_2 \neq 2p_1p_2$, da aus $p_1 + p_2 = 2p_1p_2$ folgt $p_2 = p_1(2p_2 - 1)$ und sich damit wegen $p_1 > 1, 2p_2 - 1 > 1$ keine Primzahl p_2 ergäbe.
Es verbleiben demnach die Möglichkeiten
5. $p_1 + p_2 = 2p_1$; es folgt $p_1 = p_2$ und aus (1) $p_1 = p_2 = p_3$;
6. $p_1 + p_2 = 2p_2$ (Folgerung wie unter 5.);
7. $p_1 + p_2 = p_1p_2$, $p_2 = p_1(p_2 - 1)$ mit $p_2 = p_1 = p_3 = 2$ (Spezialfall von 5. und 6.),
Also ist in jedem möglichen Fall $p_1 = p_2 = p_3 = p$. Damit nimmt die Gleichung (2) die Gestalt $p^3 - 8 = p^4$ an. Nun ist

$$p^3 - 8 = (p - 2)(p^2 + 2p + 4)$$

höchstens dann eine Primzahl, wenn ein Faktor gleich 1 ist. Wegen $(p^2 + 2p + 4) > 1$ kann dies nur $(p - 2)$ sein: $p - 2 = 1, p = 3$.
Damit folgt aber $p^3 - 8 = 3^3 - 8 = 19 = p_4$. Es existiert also genau eine Lösung des Systems: $p_1 = p_2 = p_3 = 3, p_4 = 19$.

Aufgabe 14/90
Gegeben sei ein gleichseitiges Bogendreieck, dessen Bogen einander in den Ecken tangieren. Wie groß ist sein Flächeninhalt A, wenn der Bogenradius $r = 1$ LE beträgt?

Zieht man durch jede Ecke des Bogendreiecks eine Senkrechte auf der Bogentangente, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 2r = 2$ LE. Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich dann als Differenz aus dem Flächeninhalt $A_D = r^2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ LE^2 des Dreiecks und der Summe der Flächeninhalte $A_S = \frac{1}{6}r^2\pi = \frac{\pi}{6}$ LE^2 von drei Kreissektoren mit dem Radius $r = 1$ LE und dem Zentriwinkel $\alpha = 60°$:

$$A = A_D - 3A_S = \left(\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{FE} \approx 0{,}161 \quad \text{FE}$$

Aufgabe 15/90
Es ist zu untersuchen, ob die Gleichung $3^n = 10^4 m + 1$ mit $m; n \in N, m; n > 0$ Lösungen hat!

Im dekadischen System existieren 10^4 verschiedene Möglichkeiten für die letzten vier Stellen einer Zahl. Also gibt es unter $10^4 + 1$ Potenzen der Zahl 3 wenigstens zwei verschiedene, die mit den gleichen vier Ziffern enden. Es seien dies 3^k und 3^l mit $k; l \in N$, wobei O.B.d.A. $0 < k < l$ sei. Dann gilt

$$3^l - 3^k = 3^k(3^{l-k} - 1) = 10^4 r$$

mit $r \in N, r > 0$. Da 3^k und 10^4 (außer 1) keinen gemeinsamen Teiler haben, ist 3^k Teiler von r: $r = 3^k m$ mit $m \in N, m > 0$. Damit folgt

$$3k(3^{k-l} - 1 = 10^4 r = 10^4 3^k \cdot m$$

und wegen $3^k \neq 0$ mit $l - k = n > 0$: $3^n - 1 = 10^4 m$ mit $m; n \in N, m; n > 0$.

Aufgabe 16/90
Gesucht sind alle Primzahlen $p_i = 1000 + i$ mit der Quersumme $Q(p_i) = 4$ (dabei sei i die Nummer der Primzahl in der nach der Größe geordneten Primzahlfolge).

Die i-te Primzahl kann nicht kleiner sein als die i-te ungerade Zahl, da 1 keine und 2 die einzige gerade Primzahl ist:

$$p_i = 1000 + i \geq 2i - 1 \qquad \text{also} \qquad i \leq 1001$$

Demnach ist $p_i \leq 2001$; wegen $3 \mid 2001$ und $2 \mid 2000$ gilt sogar $p_i \leq 1999$. Damit ist $i \leq 999$; sind a_0, a_1 und a_2 die Dezimalziffern von i, so gilt

$$i = 100a_2 + 10a_1 + a0; \qquad a_2 + a_1 + a_0 = 3$$

Die Möglichkeiten $a_0 = 0$ und $a_0 = 2$ entfallen, da sonst p_i durch 2 teilbar und somit keine Primzahl wäre; auch $a_0 = 3$ entfällt, da daraus $a_2 = a_1 = 0, p_i = 1003 = 17 \cdot 59$ folgt. Also ist $a_0 = 1, a_2 +_a 1 = 2$.
Damit verbleiben 3 Möglichkeiten: 1) $a_2 = 0; a_1 = 2; p_i = 1021 = p_{21}$ (entfällt, da $p_{21} = 73$),
2) $a_2 = 1; a_1 = 1; p_i = 1111 = 11 \cdot 101$ (entfällt),
3) $a_2 = 2; a_1 = 0; p_i = 1201 = p_{201}$ (entfällt, da $p_{197} = 1201$).
Da weitere Möglichkeiten durch den Lösungsweg ausgeschlossen sind, existiert keine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 17/90
Es ist zu beweisen, dass die reellen Zahlen x; y; z genau dann positiv sind, wenn für sie die Ungleichungen gelten:

$$x + y + z > 0 \qquad (1)$$
$$xy + yz + xz > 0 \qquad (2)$$
$$xyz > 0 \qquad (3)$$

Wenn die Zahlen $x; y; z$ sämtlich positiv sind, gelten die Ungleichungen trivialerweise. Es ist also nur zu zeigen, dass wenigstens eine Ungleichung nicht gilt, wenn nicht alle dieser Zahlen positiv sind.
1. ist eine dieser Zahlen gleich null, so gilt (3) nicht.
2. Ist eine ungerade Anzahl dieser Zahlen negativ, so gilt (3) nicht.
3. Sind genau 2 dieser Zahlen negativ (O.B.d.A. seien dies y und z), so folgt aus der Gültigkeit von (1) die Ungleichung $x > -(y + z)$ (1a), aus der Gültigkeit von (2) die Ungleichung $yz > -x(y + z)$ (2a). Durch Einsetzen von (1a) in (2a) ergibt sich

$$yz > x(-(y + z)) > (-y(y + z))(-(y + z)) = (y + z)^2 = y^2 + 2yz + z^2 \to 0 > y^2 + yz + z^2 > 0$$

(die Zahlen $y^2; yz; z^2$ sind mit Sicherheit positiv). Also führt die Annahme, (1) und (2) würden gelten, auf einen Widerspruch; mindestens eine dieser beiden Ungleichungen gilt also nicht.

Aufgabe 18/90
Man ermittle alle (im Dezimalsystem) vierstelligen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Multipliziert man sie mit der Zahl, die genau dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so ergibt sich eine durch 1000 teilbare achtstellige Zahl.

Folgende Überlegungen führen zum Ziel:
1. Da das Produkt achtstellig sein soll, können die gesuchten Zahlen nicht auf null enden.
2. Da das Produkt durch 1000 teilbar sein soll, muss ein Faktor durch 125, nicht aber durch 250 (wegen 1.), der andere durch 8 teilbar sein.
3. Demnach hat die Hälfte der gesuchten Zahlen die Gestalt

$$1000a + 125 \quad \text{oder} \quad 1000a + 375 \quad \text{oder} \quad 1000a + 625 \quad \text{oder} \quad 1000a + 875$$

mit $a \in N, 0 < a \leq 9$. 4. Für den zweiten Faktor ergibt sich dann

$$5210 + a \quad \text{oder} \quad 5730 + a \quad \text{oder} \quad 5260 + a \quad \text{oder} \quad 5780 + a.$$

5. Damit für die zweiten Faktoren die Teilbarkeit durch 8 erzielt wird, muss in den ersten beiden Fällen $a = 6$, in den letzten beiden Fällen $a = 4$ sein.
6. Damit erfüllen die folgenden 8 Zahlen die gestellte Bedingung:
$6125; 6375; 4625; 4875; 5216; 5736; 5264; 5784$. Durch den Lösungsweg sind weitere Zahlen ausgeschlossen.

Aufgabe 19/90
Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ habe drei reelle Nullstellen. Man zeige, dass es kein Intervall der Länge 6 gibt, in dem alle drei Nullstellen liegen.

Die vorausgesetzten drei Nullstellen seien x_1, x_2 und x_3 mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Dann ist

$$(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3 - x_2^2 \geq 0$$

durch äquivalente Umformung folgt daraus

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_2x_3-x_3x_1 \leq x_3^2+x_1^2-2x_3x_1 \to (-x_1-x_2-x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \leq (x_3-x_1)^2$$

Nach dem Wurzelsatz des Vieta ist $-x_1 - x_2 - x_3 = 7$ und $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 4$. Damit nimmt die letzte Ungleichung die Gestalt

$$7^2 - 3 \cdot 4 = 37 \leq (x_3 - x_1)^2$$

an. Durch Radizieren folgt die Behauptung: $6 < \sqrt{37} \leq x_3 - x_1$.

Aufgabe 20/90
Man zeige, dass die Ungleichung

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n(n+3)$$

für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt!

Die gegebene Ungleichung kann man in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i \cdot 1} < \frac{1}{4}n(n+3)$$

schreiben. Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel gilt $\sqrt{i \cdot 1} \leq \frac{i+1}{2}$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $i = 1$ gilt. Demnach ist

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i \cdot 1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}n + n\right) = \frac{1}{4}n(n+3)$$

Ende 1990 wurden die Mathematikaufgaben der Zeitschrift "Wissenschaft und Fortschritt" eingestellt. Daher gibt es keine offiziellen Lösungsvorschläge für die Aufgaben 21/90 bis 24/90.

Aufgabe 21/90
Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das an 5 voneinander verschiedenen ganzzahligen Stellen x_i $(i = 1; ...; 5)$ den Wert $f(x_i) = p$ annimmt (wobei p eine Primzahl ist). Man beweise, dass $f(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen hat!

Lösung von StrgAltEntf:

Besäße $f(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle, ließe sich von $f(x)$ ein linearer Faktor abspalten:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \qquad \text{wobei} \quad g(x) = x - b$$

Die fünf Werte $g(x_i)$ sind alle verschieden. Da $f(x_i) = g(x_i) \cdot h(x_i) = p$, kommen für $g(x_i)$ aber nur die vier Zahlen 1, -1, p und $-p$ infrage. Dies ist ein Widerspruch.
Damit kann $f(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen besitzen.

Aufgabe 22/90
Man ermittle alle im Dezimalsystem vierstelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:
1. Alle Ziffern a_i und die Quersumme Q von n sind Primzahlen.
2. Es gilt $n = Q \cdot P + 2$, wobei P das Querprodukt von n ist.

Lösung von Kitaktus:

Wären alle vier Ziffern von n ungerade oder wären zwei Ziffern gleich 2 und die anderen ungerade, dann wäre Q gerade und mindestens 4 und daher keine Primzahl.
Da alle Ziffern von n Primzahlen sind, sind also nur zwei Fälle möglich
a) Genau eine Ziffer ist 2, die anderen sind ungerade Primzahlen, also 3, 5 oder 7.
b) Genau drei Ziffern sind 2, die andere ist eine ungerade Primzahlen, also 3, 5 oder 7.

Im Fall b) ist Q höchstens $2 + 2 + 2 + 7 = 13$ und P ist höchstens $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$. $QP + 2$ ist daher höchstens $13 \cdot 56 + 2 = 730$ und daher nicht vierstellig.
Es bleibt also Fall a)

Da eine der vier Ziffer gerade ist, ist auch P und damit auch $QP + 2$ gerade. Die letzte Ziffer von n ist also 2.
Die ersten drei Ziffern sind also mindestens 3. Es gilt daher $3332 \leq n = QP + 2$, also $3330 \leq QP$. Wegen $Q \leq 7+7+7+2 = 23$ folgt daraus $P \geq 145$. Das Produkt der drei ungeraden Ziffern muss also mindestens 73 sein. Ordnet man diese drei Ziffern der Größe nach, so entfallen die Fälle 333, 335, 337. Es bleiben 355, 357, 377, 555, 557, 577 und 777.
Wir berechnen nun für alle diese Fälle Q, P und $QP + 2$

Ziffern	Q	P	$QP + 2$
355	15	150	2252
357	17	210	3572
377	19	294	5588
555	17	250	4252
557	19	350	6652
577	21	490	10292
777	23	686	15778

Nur für die Ziffern 3, 5, 7 besteht $QP + 2 = 3572$ aus lauter Primzahlen. Offensichtlich erfüllt 3572 alle Bedingungen der Aufgabe und ist daher die einzige Lösung.

Aufgabe 23/90
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl $n > 1000$ mit folgenden Eigenschaften:
1. Die Ziffernfolge von n ist symmetrisch.
2. Die Primfaktorzerlegung von n enthält genau zwei Primfaktoren p_1 und p_2 in 1. Potenz.
3. Bei Division durch p_1 lässt p_2 den Rest 5.

Lösung von Kitaktus:

Die Zahl $1991 = 11 \cdot 181$ mit $p_1 = 181$ und $p_2 = 11$ erfüllt wegen $181 = 16 \cdot 11 + 5$ alle Bedingungen der Aufgabe. Wir zeigen nun, dass dies die kleinste Lösung ist.
Angenommen, es gäbe eine kleinere solche Zahl $n > 1000$. Dann ist n vierstellig und hat die Dezimaldarstellung $1yy1$ mit $y \in \{0,1,...,8\}$. Es gilt:

- $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Entfällt, da drei Primfaktoren mit Vielfachheit 1.
- $1111 = 11 \cdot 101$. Entfällt, da $11 \not\equiv 5 \pmod{101}$ und $101 \equiv 2 \not\equiv 5 \pmod{11}$.
- $1221 = 3 \cdot 11 \cdot 37$. Entfällt, da drei Primfaktoren mit Vielfachheit 1.
- $1331 = 11 \cdot 11 \cdot 11$. Entfällt, da kein Primfaktoren mit Vielfachheit 1.
- $1441 = 11 \cdot 131$. Entfällt, da $11 \not\equiv 5 \pmod{131}$ und $131 \equiv 10 \not\equiv 5 \pmod{11}$.
- $1551 = 3 \cdot 11 \cdot 47$. Entfällt, da drei Primfaktoren mit Vielfachheit 1.
- $1661 = 11 \cdot 151$. Entfällt, da $11 \not\equiv 5 \pmod{151}$ und $151 \equiv 8 \not\equiv 5 \pmod{11}$.
- $1771 = 7 \cdot 11 \cdot 23$. Entfällt, da drei Primfaktoren mit Vielfachheit 1.
- $1881 = 3^2 \cdot 11 \cdot 19$. Entfällt, da $11 \not\equiv 5 \pmod{19}$ und $19 \equiv 8 \not\equiv 5 \pmod{11}$.

Es gibt also keine Zahl < 1991, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. 1991 ist demnach die kleinste solche Zahl.

Anmerkung:
Die Bedingung 2. ist mehrdeutig formuliert. Ist gemeint, dass n genau zwei Primteiler hat und diese in Vielfachheit 1 auftreten, oder, dass n genau zwei Primteiler mit Vielfachheit 1 hat, eventuell aber weitere Primteiler mit höherer Vielfachheit?
Im ersten Fall ist $1881 = 32 \cdot 11 \cdot 19$ ausgeschlossen, im zweiten Fall nicht.
Bei der ersten Interpretation kann man auch ohne Fallunterscheidung zeigen, dass für y nur der Wert 9 in Frage kommt.

Aufgabe 24/90

$$\begin{array}{cccccc} & P & R & O & S & T \\ - & & & N & E & U \\ \hline & & J & A & H & R \end{array}$$

Es sind alle Belegungen der 11 Variablen mit allen 10 Ziffern $0, ..., 9$ zu finden, die eine richtige Rechnung ergeben. Zur Beschränkung der Lösungsmenge wird festgelegt: Die Ziffern für E und H werden bei der Angabe des Silvesterdatums benötigt.

Lösung von Kitaktus:

Führende Nullen sind unzulässig. Wegen $PROST = JAHR + NEU \leq 9999 + 999 = 10998$ kann P nur 1 und R nur 0 sein. Außerdem muss dann $J = 9$ sein.
Wegen $R = 0$ folgt auch $T = U$ (Einerziffer).

Die Ziffern E und H werden zur Angabe des Silvesterdatums benötigt. Das ist der 31.12. E und H müssen daher 1, 2 oder 3 sein. S ist dann $E + H$ (ein Zehnerübertrag ist weder auf der Einer- noch auf der Zehnerstelle möglich). Für E, H und S ergeben sich die Möglichkeiten

E	H	S	E	H	SE	H	S	
1	1	2	1	2	3	1	3	4
2	1	3	2	2	4	2	3	5
3	1	4	3	2	5	3	3	6

Zum Schluss muss noch $A + N = 10 + O$ gelten (Hunderterziffer mit notwendigem Übertrag für die Tausenderziffer). Damit sind für ANO folgende Fälle möglich:

A	N	O	A	N	O	A	N	O	A	N	O	A	N	O
1	9	0	2	8	0	2	9	1	3	7	0	3	8	1
3	9	2	4	6	0	4	7	1	4	8	2	4	9	3
5	5	0	5	6	1	5	7	2	5	8	3	5	9	4
6	4	0	6	5	1	6	6	2	6	7	3	6	8	4
6	9	5	7	3	0	7	4	1	7	5	2	7	6	3
7	7	4	7	8	5	7	9	6	8	2	0	8	3	1
8	4	2	8	5	3	8	6	4	8	7	5	8	8	6
8	9	7	9	1	0	9	2	1	9	3	2	9	4	3
9	5	4	9	6	5	9	7	6	9	8	7	9	9	8

Die neun Lösungen für EHS lassen sich beliebig mit den 45 Lösungen für ANO kombinieren. $T = U$ kann einen beliebigen Wert annehmen.

Möglicherweise ist die Aufgabe so gemeint, dass auch alle Ziffern 0,...,9 mindestens einmal vorkommen müssen.
Da es 11 Buchstaben sind und $T = U$ ist, müssen alle Ziffern ansonsten paarweise verschieden sein. Für E und H kommen dann nur noch 2 und 3 bzw. 3 und 2 in Frage und S ist somit 5.
Belegt sind damit $R = 0$, $P = 1$, E,$H = 2$ und 3, $S = 5$, $J = 9$. Für A, N, O und $T = U$ bleiben noch die Ziffern 4, 6, 7 und 8.

Wegen $A + N = 10 + O$ ist $10 + O$ höchstens 8+7=15 und O damit gleich 4. A und N sind dann 6 und 8. Für $T = U$ bleibt noch die 7 übrig.
Es gibt also genau vier Lösungen:

$$R = 0, P = 1, E = 2, H = 3, O = 4, S = 5, A = 6, T = U = 7, N = 8, J = 9$$
$$R = 0, P = 1, E = 2, H = 3, O = 4, S = 5, N = 6, T = U = 7, A = 8, J = 9$$
$$R = 0, P = 1, H = 2, E = 3, O = 4, S = 5, A = 6, T = U = 7, N = 8, J = 9$$
$$R = 0, P = 1, H = 2, E = 3, O = 4, S = 5, N = 6, T = U = 7, A = 8, J = 9$$