

## Wolfgang Schöbel

### Der "Turm von Hanoi" - ein weites Feld

aus "Potsdamer Forschungen", Reihe C, Heft 87, S. 97-108, 1990, ISBN 3-86013-011-0

In der mathematischen außerunterrichtlichen Tätigkeit besteht die Möglichkeit, "echte" mathematische Theorie, Elemente der Informatik und Logikspiele miteinander zu verknüpfen. Beispiele dafür sind hinlänglich bekannt (z. B. Nimm-Spiele). Dadurch kann der interessierte (aber auch der noch nicht interessierte) Schüler angeregt werden, sich weiter mit den behandelten und ähnlichen Sachverhalten zu beschäftigen.

Besonders wichtig erscheint mir dabei, nicht in gewohnten Denkschemata zu verharren. Im folgenden möchte ich ein Beispiel dafür angeben. Bekannt ist der "Turm von Hanoi" in seiner ursprünglichen Variante, also, paarweise verschieden große Scheiben, die einen geordneten Stapel bilden, sind unter Zuhilfenahme eines Hilfsplatzes so auf einen Zielplatz zu bringen, dass nie eine größere Scheibe über einer kleineren liegt.

Je nach Altersstufe bieten sich hier u. a. folgende Aufgabenstellungen an:

- Ermittlung der minimalen Zahl von Scheibenbewegungen in rekursiver und expliziter Form;
- induktiver Beweis der expliziten Form;
- Erstellen eines Programmes zur Simulation des Spieles auf einem Computer;
- Programmierung mit einer rekursiven Prozedur;
- Vergleich der Programmiermöglichkeiten in verschiedenen Programmiersprachen (z. B. BASIC, PASCAL und LOGO).

Nun ist eine Modifikation dieses Spieles dahingehend möglich, dass nicht ein, sondern zwei Hilfsplätze zur Verfügung stehen (auf der Hand liegt eine Verallgemeinerung durch Verwendung von  $m$  Hilfsplätzen). Es lassen sich wieder die Aufgabenstellungen a) bis e) formulieren.<sup>1</sup>

Eine weitere unkonventionelle Möglichkeit bei Verwendung eines Hilfsplatzes könnte darin bestehen, dass simultan höchstens einer der auf den 3 Plätzen im Prozess des Umstapelns entstehenden Zwischenstapel eine "Fehlstellung" enthält (wobei darunter verstanden werden soll, dass genau einmal die monotone Ordnung der Scheiben gestört ist).

Es sei dem Leser als Übung überlassen, diesen Fall auf den Ansatz mit 2 Hilfsplätzen zurückzuführen.

In diesem Beitrag möchte ich einige Anregungen geben, diesen Problembereich mit begabten Schülern zu behandeln.

Üblicherweise wird bei der Behandlung des Turmes von Hanoi (mit einem Hilfsplatz) Abb. 1 zur Veranschaulichung erarbeitet.

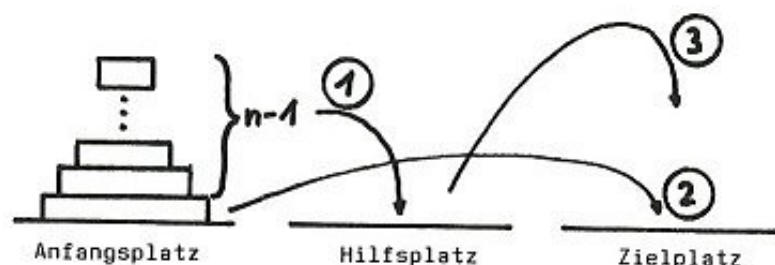


Abb. 1

- $n - 1$  Scheiben müssen auf den Hilfsplatz gebracht werden  $\Rightarrow T(n - 1)$  Bewegungen
- die unterste Scheibe kann auf den Zielplatz gebracht werden  $\Rightarrow 1$  Bewegung
- $n - 1$  Scheiben auf den Zielplatz  $\Rightarrow T(n - 1)$  Bewegungen

<sup>1</sup>Hier geht es speziell um die Aufgabenstellung a) und b). In dem nächsten Beitrag dieses Heftes steht d) im Mittelpunkt.

Daraus wird die rekursive Beziehung

$$T(n) = 2T(n - 1) + 1 \quad (1)$$

abgelesen, wobei  $T(n)$  die minimale Zahl von Scheibenbewegungen bezeichnet, wenn  $n$  Scheiben im Spiel sind. Die explizite Darstellung

$$T(n) = 2^n - 1 \quad (2)$$

kann empirisch aus Betrachtung der ersten Werte gewonnen und wie üblich durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Betrachten wir nun die Verwendung von zwei Hilfsplätzen. Bezeichnet  $V(n)$  die minimale Zahl von Scheibenbewegungen, so gilt trivialerweise

$$V(1) = 1, \quad V(2) = 3, \quad V(3) = 5 \quad (3)$$

In Analogie zur Abbildung 1 kann man nun zur Abbildung 2 gelangen.

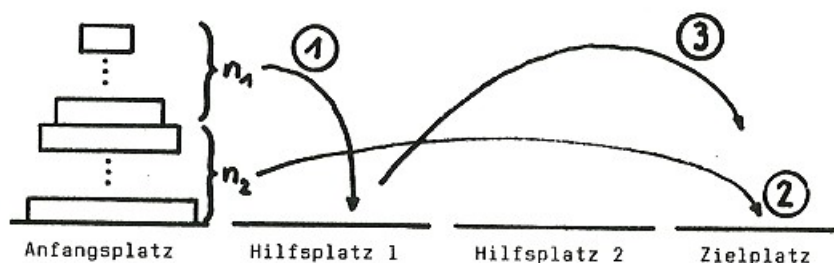


Abb. 2

- 1  $V(n_1)$  Bewegungen, denn zwei Ausweichplätze stehen zur Verfügung
  - 2  $T(n_2)$  Bewegungen, denn es steht nur noch ein Ausweichplatz zur Verfügung
  - 3  $V(n_1)$  Bewegungen, denn zwei Ausweichplätze stehen wieder zur Verfügung
- $n_1 + n_2 = n$

Der Stapel von  $n$  Scheiben wird in 2 Teilstapel zu  $n_1$  Scheiben und  $n_2 = n - n_1$  Scheiben zerlegt. Die oberen  $n_1$  Scheiben werden auf den Hilfsplatz 1 gebracht. Dafür stehen 2 Ausweichplätze (nämlich der Hilfsplatz 2 und der Zielplatz) zur Verfügung. Für den Transport der  $n_2$  Scheiben vom Anfangsplatz zum Zielplatz steht nun noch Hilfsplatz 2 zur Verfügung, denn auf dem Hilfsplatz 1 befinden sich Scheiben, die allesamt kleiner sind als die  $n_2$  zu bewegenden Scheiben.

Dafür sind also  $T(n_2)$  Scheibenbewegungen nötig. Danach sind die  $n_1$  Scheiben von Hilfsplatz 1 ebenfalls noch auf den Zielplatz zu bringen. Dafür stehen der Anfangsplatz und Hilfsplatz 2 als Ausweichplätze zur Verfügung.

Da es insgesamt  $n - 1$  Zerlegungen in 2 Teilstapel gibt (nämlich  $n_2 = 1, 2, \dots, n - 1$ ), erkennt man, dass

$$V(n) := \min \{M_i | M_i : 2V(i) + T(n - i) \wedge i = 1(1)n - 1\} \quad (4)$$

gilt. (4) ist damit das Analogon zu (1). In Tabelle 1a sind einige Werte zusammengestellt.

$n$	$V(n)$	
3	5	= 5 + 0
4	9	= 7 + 2
5	13	= 9 + 4
6	17	= 11 + 6 + 0
7	25	= 13 + 8 + 4
8	33	= 15 + 10 + 8
9	41	= 17 + 12 + 12
10	49	= 19 + 14 + 16 + 0
11	65	= 21 + 16 + 20 + 8
⋮	⋮	⋮
64	18433	= 127 + 122 + 232 + 432 + 784 + 1376 + 2304 + 3584 + 4864 + 4608
Tab. 1a		Tab 1b

Bemerkenswert ist, dass durch Verwendung eines zweiten Hilfsplatzes das Umstapeln von 64 Scheiben, dass nach der Legende die Existenz der Welt limitiert und mit einem einzigen Hilfsplatz bei 1 Bewegung pro Sekunde länger als  $5 \cdot 10^{11}$  Jahre dauert, durchaus an einen Vormittag zu schaffen ist.

Eine explizite Darstellungsform in Analogie zu (2) kann durch Analyse einer geeigneten Summandenzerlegung von  $V(n)$  gefunden werden (Tab. 1b).

Hilfreich beim Auffinden einer solchen ist die Betrachtung der Differenzen  $V(n+1) - V(n)$ , es lässt sich so schnell eine Gesetzmäßigkeit finden: Als einer der Summanden ist  $2n - 1$  zu verwenden, die restlichen Summanden sind wohlbestimmte Vielfache von Potenzen von 2, wobei deren Anzahl bei gewissen  $n$  jeweils um 1 größer wird. Diese Summanden lassen sich durch

$$\left(n - \frac{1}{2}(j+1)(j+2)\right) \cdot 2^j \quad (5)$$

darstellen, wenn  $j = 1, 2, \dots, p_n$  durchläuft. Als  $p_n$  ist dabei die größte natürliche Zahl zu verwenden, für die  $n - \frac{1}{2}(p_n+1)(p_n+2)$  nicht negativ ist. Das heißt, dass für  $p_n$  die Ungleichung

$$(p_n + 1)(p_n + 2) \leq 2n \quad (6a)$$

also

$$p_n^2 + 3p_n + 2 - 2n \leq 0 \quad (6b)$$

gilt. Da  $p_n$  positiv ist und in (6b) der lineare Term  $+3p_n$  auftritt, folgt

$$p_n \leq -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + 2n} = \frac{1}{2}(\sqrt{8n+1} - 3) \quad (6c)$$

Die größte natürliche Zahl, die (6c) erfüllt, ist damit

$$p_n = \left\lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{8n+1} - 3) \right\rfloor \quad (7)$$

Bei  $n = 3, 6, 10, \dots$  ist in (6a, b, c) das Gleichheitszeichen gültig, da der Summand 0 auftritt (Tab. 1b). Für die entsprechenden  $p_n$  gilt also

$$(p_n + 1)(p_n + 2) = 2n \quad (8a)$$

$$p_{n-1} + 1 = p_n, \quad n = 3, 6, 10, \dots \quad (8b)$$

Zusammengefasst ergibt sich aus diesen Überlegungen:

Satz: Die minimale Zahl von Scheibenbewegungen bei Verwendung von zwei Hilfsplätzen lässt sich durch

$$V(n) = 2n - 1 + \sum_{j=1}^{p_n} \left( n - \frac{(j+1)(j+2)}{2} \right) \cdot 2^j \quad (9a)$$

$$= 2^{p_n} \left( 2 \cdot (n-1) - p_n^2 - p_n \right) + 1 \quad (9b)$$

darstellen, wobei

$$p_n = \left\lfloor \frac{1}{2} \left( \sqrt{8n+1} - 3 \right) \right\rfloor$$

ist ( $\lfloor x \rfloor$  ist die größte ganze Zahl, die kleiner als oder höchstens gleich  $x$  ist).

Beweis: Die Identität von (9a) und (9b) zeigt man zunächst durch Anwendung der entsprechenden Summenformeln. Bekanntlich gelten die Beziehungen

$$\sum_{j=1}^k j 2^j = 2 \cdot (2^k(k-1) + 1) \quad \text{sowie}$$

$$\sum_{j=1}^k j^2 2^j = 2 \cdot (2^k \cdot (k^2 - 2k + 3) - 3)$$

die sich leicht durch vollständige Induktion beweisen lassen.

Der Beweis der Behauptung (9) erfolgt nun durch vollständige Induktion über  $n$ . Den Induktionsanfang zeigt man leicht durch Berechnen einiger Werte. Wegen  $p_1 = p_2 = 0$  ist dabei in (9a) zu beachten, dass die obere Summationsgrenze kleiner ist als die untere und dass damit die Summe verschwindet.

Für den Induktionsschritt setzen wir die Gültigkeit von (9) für  $n = 1, 2, 3, \dots, n_0$  voraus. Dann ist zu zeigen, dass sich  $V(n_0 + 1)$  aus (4) auch in der Form (9) darstellen lässt, dass also die Zahlen aus (4) und (9) identisch sind.

Dazu wird zunächst die Monotonie der  $M_i$  aus (4) untersucht, wir betrachten für  $i = 1(1)n_0 - 1$ .

$$\Delta M_i = M_i - M_{i+1} = (2V(i) + T(n_0 + 1 - i)) - (2V(i+1) + T(n_0 - i))$$

Wegen  $i < i+1 \leq n_0$  kann die Induktionsvoraussetzung auf  $V(i)$  und  $V(i+1)$  angewendet werden. Mit (2) folgt dann

$$\begin{aligned} \Delta M_i &= \left( 2 \left( 2^{p_i} (2(i-1) - p_i^2 - p_i) + 1 \right) + 2^{n_0+1-i} - 1 \right) \\ &\quad - \left( 2 \left( 2^{p_{i+1}} (2i - p_{i+1}^2 - p_{i+1}) + 1 \right) + 2^{n_0-i} - 1 \right) \end{aligned}$$

und nach entsprechender Umordnung und Zusammenfassung

$$\Delta M_i = 2^{p_0+2}(i-1) - 2^{p_i+1}(p_i^2 + p_i) + 2^{n_0-i} - 2^{p_{i+1}+2}i + 2^{p_{i+1}+1}(p_{i+1}^2 + p_{i+1}) \quad (11)$$

Hinsichtlich  $p_i$  und  $p_{i+1}$  ist nun eine Fallunterscheidung vorzunehmen. Wegen (6) kann  $p_i = p_{i+1}$ , aber auch  $p_i + 1 = p_{i+1}$  sein.

Fall a)  $p_i = p_{i+1}$ :

Man findet aus (11) und

$$\Delta M_i = 2^{n_0-1} - 2^{P-i+2}$$

Fall b)  $p_i + 1 = p_{i+1}$ :

Aus (11) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta M_i &= 2^{n_0-i} + 2^{p_i+1}(2(i-1) - p_i^2 - p_i - 4i + 2(p_i+1)^2 + 2(p_i+1)) \\ &= 2^{n_0-i} + (2^{p_i+1}(-2i + p_i^2 + 5p_i + 2))\end{aligned}$$

$i+1$  ist nach Voraussetzung des Falles b) wegen (8b) ein Wert, für den (8a) gültig ist. Man findet daraus

$$(p_{i+1} + 1)(p_{i+1} + 2) = 2(i + 1)$$

und mit  $p_{i+1} = p_i + 1$  weiter  $p_1^2 + 5p_i = 2i - 4$ ; mit diesem Resultat folgt für  $\Delta M_i$

$$\Delta M_i = 2^{n_0-i} - 2^{p_i+2} \quad (12)$$

also die gleiche Darstellung wie im Fall 8).

Für  $\Delta M_i$  gilt damit generell:

$$\Delta M_i = \begin{cases} > 0 & \text{für } n_0 - i > p_i + 2 \\ = 0 & \text{für } n_0 - i = p_i + 2 \\ < 0 & \text{für } n_0 - i < p_i + 2 \end{cases} \quad (13)$$

Für  $i$  stehen die Werte  $1, 2, 3, \dots, n_0 - 1$  zur Verfügung. Durchläuft  $i$  streng monoton wachsend diesen Bereich, so ist  $n_0 - i$  streng monoton fallend.  $p_1 + 2$  ist monoton wachsend (aber nicht streng monoton).

Das Minimum der Folge der  $M_i$  wird demnach an der Stelle bzw. den Stellen angenommen, für die entweder

$$n_0 - i = p_i + 2 \quad (14)$$

gilt (d. h. an 2 benachbarten Stellen, also für  $i$  und  $i+1$ ) oder für die die Ungleichungen

$$n_0 - i > p_i + 2 \quad \text{und} \quad n_0 - (i+1) < p_{i+1} + 2 \quad (15)$$

gültig sind (d. h. an genau einer Stelle und zwar  $i+1$ ).

Betrachten wir zunächst den zuletzt genannten Fall. Die Gültigkeit beider Ungleichungen ist nur dann möglich, wenn  $p_{i+1} = p_i + 1$  gilt, da sich die linken Seiten nur um 1 unterscheiden. Das bedeutet aber, dass für  $i+1$  (8) gültig ist, zwischen  $i$ ,  $p_i$  und  $n_0$  also die Beziehungen

- a)  $(p_i + 2)(p_i + 3) = 2(i + 1)$ ,
- b)  $n_0 - i = p_i + 3$

bestehen. Eliminiert man  $i$  aus (a) mit Hilfe von (b), so findet man

$$p_i^2 - 7p_i + 10 - 2n_0 = 0$$

und daraus

$$p_i = \frac{1}{2}(\sqrt{8(n_0 + 1) + 1} - 3) - 2$$

Da  $p_i \in \mathbb{N}$  gilt, ist auch  $\frac{1}{2}(\sqrt{8(n_0 + 1) + 1} - 3) \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt wegen (6c), dass

$$p_{n_0+1} = p_i + 2 = p_{i+1} + 1 \quad (16)$$

gilt.

Nun bleibt zu zeigen, dass  $V(n_0 + 1)$  nach (4) sich in der Form (9) anders darstellen lässt. Nach (4), (15) und (16) gilt

$$\begin{aligned} V(n_0 + 1) &= 2V(i + 1) + T(n_0 + 1 - (i + 1)) \\ &= 2 \left( 2^{p_{i+1}}(2i - p_{i+1}^2 - p_{i+1}) + 1 \right) + 2^{n_0 - i} - 1 \\ &= 2^{p_{n_0+1}}(2(n_0 - p_{n_0+1} - 1) - (p_{n_0+1} - 1)^2 - (p_{n_0+1} - 1)) + 2^{p_{n_0+1}+1} + 1 \\ &= 2^{p_{n_0+1}}(2n_0 - p_{n_0+1}^2 - p_{n_0+1}) + 1 \end{aligned}$$

womit die Darstellungsform (9) hergestellt ist.

Kommen wir zu dem zuerst genannten, durch (14) charakterisierten Fall. Es gilt nach (4)

$$V(n_0 + 1) = 2V(i) + T(n_0 + 1 - i) = 2V(i + 1) + T(n_0 - i) \quad (17)$$

Um hier zum Ziel zu kommen, ist eine weitere Fallunterscheidung hinsichtlich  $p_i$  und  $p_{i+1}$  notwendig.

Fall a)  $p_i + 1 = p_{i+1}$ .

Wie bereits mehrfach angewendet, findet man aus (8)  $(p_i + 2)(p_i + 3) = 2(i + 1)$ , unter Berücksichtigung von (14) erhält man

$$p_i^2 + 7p_i + 8 - 2n_0 = 0$$

und daraus

$$p_i = \frac{1}{2}(\sqrt{8(n_0 + 1) + 9} - 3) - 2 \quad (18)$$

Der Summand  $\frac{1}{2}(\sqrt{8(n_0 + 1) + 9} - 3)$  ist unter den getroffenen Voraussetzungen eine natürliche Zahl und damit wegen (7) größer als  $p_{n_0+1}$ . Damit folgt

$$p_i > p_{n_0+1} - 2$$

andererseits gilt

$$p_i < p_{i+1} \leq p_{n_0+1} \quad \text{mithin resultiert} \quad p_i = p_{n_0+1} - 1 \quad (19)$$

Indem man (19) und die Induktionsvoraussetzung für die erste der Gleichungen (17) anwendet, erhält man auf analogem Wege wie bei der Voraussetzung (15) die Induktionsbehauptung.

Fall b)  $p_i = p_{i+1}$

Dann gibt es o. B. d. A.  $n_a, n_b \in \mathbb{N}$  mit  $n_a \leq i < n_b$  und

$$p_{n_a-1} < p_{n_a} = \dots = p_i = p_{i+1} = \dots = p_{n_b} < p_{n_b+1} \quad (20)$$

d. h., es gilt

$$(p_{n_a} + 1)(p_{n_a} + 2) = 2n_a \quad , \quad (p_{n_b} + 2)(p_{n_b} + 3) = 2(n_b + 1) \quad (21)$$

Aus (17) folgt damit und mit (14)

$$V(n_0 + 1) = 2^{p_{n_b}+1}(2n_0 - (p_{n_b} + 1)^2 - (p_{n_b} + 1)) + 1 \quad (22)$$

Zu zeigen bleibt also  $p_{n_0+1} = p_{n_b} + 1$ .

Aus (21) folgt unter Beachtung von (20) und (14)

$$n_b - n_a = p_i + 1 = n_0 + (i + 1)$$

Wegen  $i + 1 > n_a$  findet man daraus  $n_b > n_0$ , sowie mit Beachtung von (7)

$$p_{n_b+1} \leq p_{n_0+1} \quad (23)$$

Angenommen es gilt hier das Kleiner-Zeichen, d. h.  $p_{n_b+1} < p_{n_0+1}$ . Daraus erhält man unter Zuhilfenahme von (20) die Ungleichung

$$n_b + p_{n_b} + 2 < n_0$$

Mit (14) resultiert nun

$$n_b + n_0 - i < n_0 \quad , \quad n_b - i < 0$$

Das ist jedoch ein Widerspruch zu (20). Damit kann in (23) nur das Gleichheitszeichen gültig sein und (22) entspricht der Darstellungsform (9).

Mit diesem abschließenden Teil des Induktionsbeweises ist somit der Beweis des Satzes vollzogen.

Es liegt nun die Frage nahe, wie sich die Betrachtungen bei Verwendung von  $m$  Hilfsplätzen ( $m \geq 1$ ) gestalten. Dabei ergeben sich in völliger Analogie entsprechende Resultate.

Aus umfangreichen numerischen Experimenten folgt die Vermutung, dass sich die minimale Zahl von Scheibenbewegungen beim Umstapeln von  $n$  Scheiben unter Verwendung von  $m$  Hilfsplätzen durch

$$F(n, m) = 2n - 1 + \sum_{j=1}^{p_n^m} \left( n - \binom{j+m}{m} \right) 2^j \quad (24)$$

( $p_n^m$  ist größte ganze Zahl, für die  $\binom{p_n^m + m}{m}$  nicht negativ ist), angeben lässt.

Bemerkenswert ist, dass für  $m = 1$  die Funktionen (2) und (24) identisch sind. Man erhält also über die allgemeinere Betrachtung des Problems eine völlig andere Darstellungsform von (2). Der allgemeingültige Beweis von (24) für  $m \geq 3$  steht jedoch noch aus.

Es ist ersichtlich, wie numerische Experimente (mittels Computer) Anregungen für mathematische Fragestellungen (hier explizite Formel) sehr anspruchsvoller Art geben können.