Lehrplan Mathematik

Abiturstufe

Ministerrat
der Deutschen
Demokratischen
Republik
Ministerium
für Volksbildung

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

MINISTERRAT DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

MINISTERIUM FÜR VOLKSBILDUNG

Lehrplan

Mathematik

Abiturstufe

VOLK UND WISSEN

Volkseigener Verlag Berlin 1989

Lehrplan Mathematik Abiturstufe / Ministerrat
der DDR, Ministerium für Volksbildung. - 5.
Aufl. - Berlin : Volk u. Wissen, 1989. - 56 S.
NE: DDR / Ministerium für Volksbildung

ISBN 3-06-003019-7

5. Auflage

Lizenz-Nr. 203/1000/89 (DN 00 30 19-5)

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: (52) Nationales Druckhaus, VOB National

LSV 0670

Bestell-Nr. 707 395 2

00055

Der Lehrplan tritt in Kraft

für Klasse 11 am 1. 9. 1980,
für Klasse 12 am 1. 9. 1981.

Der Minister für Volksbildung
M. Honecker

Inhalt

ZIELE UND AUFGABEN

Der Mathematikunterricht hat die Aufgabe, die Schüler mit einem soliden, anwendungsbereiten und erweiterungsfähigen mathematischen Wissen und Können auszurüsten, ihre Fähigkeiten im Anwenden fachtypischer und allgemeiner wissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen weiterzuentwickeln und bei den Schülern zur tieferen Ausprägung der Weltanschauung und Moral der Arbeiterklasse beizutragen. Das erfordert, den Mathematikunterricht - unter Wahrung der Systematik des Wissenserwerbs und der Könnensentwicklung - eng mit dem Leben zu verbinden, der Anwendung von mathematischen Begriffen, Sätzen, Methoden und Verfahren auf Beispiele aus der sozialistischen Produktion und aus weiteren Bereichen der gesellschaftlichen Praxis sowie aus anderen Wissenschaften ständige Aufmerksamkeit zu schenken und durch all dies die polytechnische Bildung und Erziehung der Schüler zu unterstützen.

Im Bereich des mathematischen Wissens und Könnens sind vor allem folgende Ziele zu erreichen:

Das bis zur Klasse 10 zu erwerbende grundlegende mathematische Wissen und Können insbesondere hinsichtlich

- des Rechnens in verschiedenen Zahlenbereichen und des Arbeitens mit Größen,
- der Taschenrechnernutzung als Rechenhilfsmittel und Wertespeicher,
- Mengen, Abbildungen und Funktionen,
- Gleichungen und Ungleichungen,
- geometrischer Begriffe, Sätze, Darstellungs- und Konstruktionsverfahren,
- des Berechnens von Flächeninhalten und Volumina

ist so gefestigt und vertieft, daß es von den Schülern dauerhaft beherrscht wird und sicher angewendet werden kann.

Die Schüler sind mit den Begriffen "Zahlenfolge" und "n-te Partialsumme einer Zahlenfolge" und weiteren damit im Zusammenhang stehenden Begriffen sowie mit der dazugehörigen Symbolik vertraut und können Aufgaben mit Zahlenfolgen und deren

Partialsummen selbständig lösen. Sie kennen Begriffe, Definitionen, Sätze und Verfahren, die es ihnen ermöglichen, die Untersuchung von Zahlenfolgen und deren Partialsummen auf Eigenschaften wie Monotonie, Beschränktheit, Existenz von Grenzen, Konvergenz und Divergenz inhaltlich zu verstehen und in einfachen Fällen selbständig durchzuführen.

Die Schüler verstehen das Beweisverfahren der vollständigen Induktion sowie dessen Verwendung beim Beweisen arithmetischer, geometrischer, kombinatorischer und analytischer Aussagen und können es zum Nachweis der Allgemeingültigkeit von Formeln für n-te Partialsummen sowie bei einfachen Beweisen aus der Analysis selbständig anwenden.

Sie kennen die grundlegenden Begriffe "Permutation", "Variation" und "Kombination" und können sie und die behandelten Formeln für die Anzahl der Permutationen, Variationen und Kombinationen auf entsprechende Sachverhalte und beim Lösen von Aufgaben sicher anwenden.

Die Schüler kennen die behandelten Arten von Funktionen und können für deren Vertreter Wertetabellen aufstellen. Sie kennen wichtige Eigenschaften von Funktionen wie Monotonie, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, sind mit Begriffen und deren Definitionen, mit Sätzen und Kriterien vertraut und beherrschen Regeln und Verfahren, die es ihnen ermöglichen, Vertreter der behandelten Funktionsarten auf Nullstellen, Pole, lokale Extrema und auf ihr Verhalten im Unendlichen selbständig zu untersuchen. Unter Nutzung dieser Untersuchungsergebnisse können sie die Graphen der untersuchten Funktionen auf rationelle Weise skizzieren bzw. zeichnen. Die Schüler sind ferner in der Lage, dieses Wissen und Können aus der Differentialrechnung auf Sachverhalte aus Naturwissenschaften und Technik sowie auf das Lösen von Anwendungsaufgaben aus diesen Bereichen (vor allem Extremwertaufgaben) und von solchen Aufgaben wie Berechnen von Tangentengleichungen für Kurvenpunkte und einfache Beweisaufgaben selbständig anzuwenden.

Sie sind mit grundlegenden Begriffen, deren Definitionen sowie mit Sätzen, Regeln und Verfahren aus der Differential- und Integralrechnung so weit vertraut, daß sie Stammfunktionen gegebener Funktionen ermitteln, bestimmte Integrale berechnen und dieses Wissen und Können zur Inhaltsberechnung nicht allseitig geradlinig begrenzter Flächen und zum Lösen einfacher Anwendungsaufgaben vor allem aus der Technik und der Physik selbständig anwenden können.

Die Schüler sind mit den behandelten Rechenoperationen für Vektoren und den dafür gültigen Rechengesetzen vertraut und können mit Vektoren in den behandelten Darstellungsarten schnell und sicher rechnen. Sie kennen Parametergleichungen und parameterfreie Gleichungen für Geraden sowie Gleichungen des Kreises und können - unter Verwendung dieses Wissens und Könnens aus der Vektorrechnung und aus der analytischen Geometrie - Aufgaben zu linearen, ebenen und räumlichen Objekten einschließlich einfacher geometrischer Beweisaufgaben und von Anwendungsaufgaben aus Naturwissenschaft und Technik lösen.

Mit ihrem Taschenrechner können die Schüler selbständig, rationell und effektiv umgehen.

Ferner sind die Schüler - nach entsprechender Vorbereitung - auch in der Lage, im Mathematikunterricht der Abiturstufe behandelte
- Themenkomplexe,
- grundlegende Problemstellungen und deren Lösung,
- Beweise wichtiger Sätze und Regeln

zusammenhängend darzustellen.

Mit der Aneignung dieses mathematischen Wissens und Könnens ist zugleich die Entwicklung geistiger Fähigkeiten der Schüler nachhaltig zu fördern. Das erfordert vor allem, daß das Verstehen und selbständige Anwenden mathematischer und allgemeiner wissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen planmäßig und systematisch ausgebildet wird. Dabei besteht eine wichtige Aufgabe für den Lehrer darin, die Leitlinien des Mathematikunterrichtes bis Klasse 10 zu beachten und in dem Sinne weiter zu verfolgen, wie das nachstehend charakterisiert ist.

Die mengentheoretische Durchdringung des gesamten Stoffes ist dadurch zu sichern, daß das erworbene Wissen und Können bezüglich Mengen und Mengenbeziehungen dem Lehrgang in der Abiturstufe insgesamt zugrunde gelegt wird. Insbesondere die Theorieteile des Stoffes sind von diesem einheitlichen Standpunkt aus zu betrachten, und die damit gegebenen rationellen Beschreibungs- und Darstellungsweisen sind bei allen sich bietenden Gelegenheiten zu nutzen.

Bei der Weiterführung der Leitlinie Zahlenbereiche steht die Weiterentwicklung des Rechnenkönnens, insbesondere die weitere Festigung der Rechenfertigkeiten ohne und mit Verwendung des Taschenrechners, im Mittelpunkt. An dafür geeigneten Stellen ist aber auch weiter an der Vertiefung der Kenntnisse über Eigenschaften der Zahlen der einzelnen Zahlenbereiche zu arbeiten.

Hinsichtlich Abbildungen und Funktionen sind die in allen Stoffgebieten vorkommenden Möglichkeiten zu nutzen, um das bis Klasse 10 erworbene diesbezügliche Wissen und Können zu festigen, zu vertiefen und zu systematisieren sowie durch Verwendung der behandelten Theorie und Methoden der Infinitesimal- und der Vektorrechnung grundsätzlich zu erweitern. Dabei ist das Bewußtmachen der damit verbundenen erweiterten Möglichkeiten zur Erfassung und Beschreibung von Sachverhalten aus anderen Wissenschaftsdisziplinen und aus der gesellschaftlichen Praxis sowie zum Lösen entsprechender Problemstellungen aus diesen Bereichen ein wichtiger Schwerpunkt im Unterricht.

Bezüglich Gleichungen und Ungleichungen ist es notwendig, konsequent auf den bis Klasse 10 erworbenen Kenntnissen und Fertigkeiten aufzubauen. Dazu sind neu auftretende Typen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen bewußt durch Zurückführen auf bereits bekannte Typen zu lösen, und beim Lösen von Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen ist an früher vermittelte grundsätzliche Einsichten anzuknüpfen.
Auf die Entwicklung der Befähigung der Schüler sowohl zur Darstellung von Sachverhalten, Beziehungen und Aussagen aus den behandelten mathematischen Teildisziplinen und ihren

Anwendungen mittels Gleichungen oder Ungleichungen als auch zur inhaltlich-mathematischen Interpretation vorkommender Gleichungen oder Ungleichungen ist besonderer Wert zu legen.

Der sprachlich-logischen Schulung ist große Aufmerksamkeit zu widmen.

Die Schüler sind zu einem tieferen Verständnis der mathematischen Terminologie und Symbolik zu befähigen, wozu bereits Bekanntes und auch die Einführung und Verwendung zahlreicher neuer Begriffe, Redeweisen und Symbole zu nutzen sind. Ihnen ist bewußt zu machen, daß exakte Begriffsbildung und normgerechter Umgang mit der Symbolik unabdingbare Voraussetzungen für Eindeutigkeit und Präzision bei der Formulierung mathematischer Aussagen sowie bei der Fixierung mathematischer Beziehungen sind und überhaupt erst das für die Mathematik typische rationelle Arbeiten ermöglichen. Sie sollen verstehen, daß deshalb hohe Anforderungen bezüglich der Beherrschung der Fachsprache und Symbolik an sie gestellt werden müssen.
Die stärkere Betonung der Fachsprache muß mit der Pflege und Weiterentwicklung des muttersprachlichen Ausdrucksvermögens verbunden werden. Deshalb ist die mögliche Vielfalt in der Formulierung für mathematische Sachverhalte bewußt zu fördern, und den Schülern ist im Unterricht hinreichend Gelegenheit zu zusammenhängenden sprachlichen Äußerungen zu geben.

Im Hinblick auf das Definieren geht es vor allem darum, daß die Schüler zumindest jene Definitionen des Lehrgangs mit eigenen Worten wiedergeben können, mit denen im Unterricht wiederholt zu arbeiten ist. Dies ist insbesondere dadurch zu erreichen, daß Definitionen im Unterricht nicht einfach mitgeteilt, sondern - ausgehend von geeigneten Problemstellungen bzw. Beispielen - erarbeitet und von da ab bewußt genutzt werden. Zugleich ist dabei ein tieferes Verständnis als bis Klasse 10 für die Notwendigkeit des Definierens und für das grundsätzliche Vorgehen beim Definieren zu erreichen.

Bezüglich des Beweisens geht es um die Weiterentwicklung des Beweisbedürfnisses, des Beweisverständnisses und der Fähigkei-

ten im selbständigen Führen von Beweisen. Den Schülern ist an geeigneten Stellen bewußt zu machen, daß weder Plausibilitätsbetrachtungen noch das Berufen auf Anschauung noch Beweisführungen für Spezialfälle der zu beweisenden Aussage den Erfordernissen mathematischer Erkenntnissicherung genügen.
Zur Entwicklung der Fähigkeiten im selbständigen Führen von Beweisen ist es erforderlich, die Schüler zum selbständigen Nachvollziehen vorgeführter oder im Unterrichtsgespräch erarbeiteter Beweise sowie zum selbständigen Aneignen von im Lehrbuch dargestellten Beweisen zu befähigen. Es ist aber auch an der Ausbildung der Fähigkeit im selbständigen Finden und Durchführen von Beweisen zu arbeiten, indem geeignete Beweisaufgaben im Unterricht und als Hausaufgaben gestellt werden.
Bei Beweisübungen ist darauf zu achten, daß die verschiedenen Beweisverfahren insgesamt in einem den jeweiligen Zielsetzungen angemessenen Verhältnis Berücksichtigung finden.

Auch die Anwendung von Verfahren des rationellen Arbeitens findet unter verschiedenen Aspekten ihre konsequente Fortsetzung.
Hinsichtlich der kalkülmäßig-algorithmischen Verfahren, die die Schüler kennen und anwenden lernen, sind - ebenso wie bei den bereits vertrauten, die weiterhin anzuwenden sind - vor allem Sicherheit, Selbständigkeit und ein zügiges Arbeitstempo bei ihrer Durchführung zu erreichen.
In der Nutzung heuristischer Verfahren ist insbesondere dadurch eine neue Qualität zu erreichen, daß für wichtige Klassen von Aufgaben das grundsätzliche Vorgehen bei der Suche nach einem Lösungsweg zum Gegenstand des Unterrichts gemacht wird. Auf den Ergebnissen solcher Überlegungen aufbauend, sind Lösungsstrategien herauszuarbeiten und als heuristische Regeln zu formulieren. Ferner sind beschrittene Lösungswege vor allem für jene Aufgabenklassen bewußt zu machen, für die Fertigkeiten im selbständigen Lösen zu erreichen sind.

Höhere Anforderungen als in Klasse 10 sind an die Schüler auch bei der Kontrolle der Ergebnisse ihrer eigenen Arbeit zu stellen. Das betrifft sowohl die Entwicklung des Kontrollbedürfnisses als auch die Befähigung zur Durchführung solcher Kontrollen. Dabei sind nicht nur die Fähigkeiten und Fertigkeiten im Anwenden allgemeiner mathematischer Kontrollmethoden (Überschlagsrechnung, Proben usw.) zu entwickeln. Es ist auch das angeeignete theoretische mathematische Wissen und Können zu nutzen, z. B. durch inhaltliche Überlegungen unter Verwendung des ermittelten Ergebnisses, insbesondere auch durch Überprüfen der Widerspruchsfreiheit zwischen ermitteltem Ergebnis und bekannten mathematischen Sätzen. Ebenso sind Kenntnisse aus anderen Unterrichtsfächern, aus der wissenschaftlich-praktischen Arbeit und aus gesellschaftlichen Tätigkeiten sowie die allgemeine Lebenserfahrung der Schüler - vor allem bei der Ergebniskontrolle für Anwendungsaufgaben - zu nutzen.

Unter dem Aspekt der allgemeinen Hochschulvorbereitung ist bei der selbständigen Arbeit mit der mathematischen Literatur (Lehrbücher, Nachschlagewerke, Tabellen, Formelsammlungen) ein wesentlicher Fortschritt gegenüber dem am Ende der Klasse 10 erreichten Niveau zu erzielen. Der selbständige Erwerb mathematischen Wissens und Könnens aus den Lehrbüchern ist ebenso zu üben wie der rationelle Umgang mit Wissensspeichern. Schließlich ist es unerläßlich, daß die bis Klasse 10 erworbenen Fertigkeiten im Umgang mit Rechen- und Zeichenhilfsmitteln weiter gefestigt bzw. partiell weiterentwickelt werden.

Durch die Vermittlung des vorstehend gekennzeichneten mathematischen Wissens und Könnens und die Entwicklung der genannten Denk- und Arbeitsweisen hat der Mathematikunterricht in der Abiturstufe zugleich die Ausbildung des Denkvermögens, der Phantasie und des Schöpfertums und damit die geistige Disponibilität der Schüler zu fördern.

In Einheit mit der Ausbildung der vorstehend genannten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten und auf deren Grundlage hat der Mathematikunterricht die weitere Aneignung der Weltanschauung und Moral der Arbeiterklasse durch die Schüler zu unterstützen. Insbesondere hat er zur weiteren Ausbildung folgender weltanschaulicher, politisch-ideologischer und moralischer Einsichten, Überzeugungen und Haltungen beizutragen:

Es ist die Einsicht zu vertiefen, daß die Mathematik ein wichtiges Instrument zum Erkennen und Beschreiben bestimmter Seiten der objektiven Realität sowie bei der Planung und Leitung gesellschaftlicher Entwicklungsprozesse ist. Dies ist im Zusammenhang mit Bemerkungen zur Geschichte der Mathematik, vor allem aber bei der Behandlung von ausgewählten und erforderlichenfalls vereinfachten Sachverhalten, Problemen und Aufgaben aus der gesellschaftlichen Praxis und aus anderen Wissenschaftsdisziplinen den Schülern bewußt zu machen. Ausgehend von den Zielen und Inhalten des Mathematikunterrichts in der Abiturstufe ist zu sichern, daß solche Anwendungen sinnvoll in allen Unterrichtssituationen berücksichtigt werden. Dabei ist den Schülern an Beispielen zu verdeutlichen, daß im real existierenden Sozialismus mathematische Erkenntnisse und Methoden ausschließlich für den gesellschaftlichen Fortschritt eingesetzt werden.
Es ist die Überzeugung zu vertiefen, daß für jeden Abiturienten eine hohe mathematische Bildung erforderlich ist, die er durch stetiges und angestrengtes Lernen erwerben muß.
Auf dieser Basis sind die Schüler zu befähigen, sowohl rationell, intensiv und diszipliniert nach vermittelten mathematischen Methoden und Verfahren zu arbeiten als auch selbständig, umsichtig und unter Einsatz ihres Wissens und Könnens das Lösen für sie neuer Probleme in Angriff zu nehmen. Das soll dazu beitragen, daß Persönlichkeitseigenschaften wie Sachlichkeit, Exaktheit und Sorgfalt ebenso eine Weiterentwicklung erfahren wie Beharrlichkeit, Ausdauer, Urteilsfähigkeit und das Bedürfnis nach Bessermachen und Weiterlernen. Dabei sind solche positiven Lern- und Arbeitsgewohnheiten wie Ordnung, Sauberkeit, ständige Verfügbarkeit und Funktionstüchtigkeit aller Arbeitsmaterialien, Zuverlässigkeit bei der Ausführung erhaltener Aufträge und freiwillig übernommener Aufgaben, kameradschaftliche Hilfe und Ehrlichkeit gegenüber Fachlehrer und Klassenkollektiv weiter auszubilden.

HINWEISE ZUR METHODISCHEN UND ORGANISATORISCHEN GESTALTUNG DES UNTERRICHTS

Der Mathematikunterricht in der Abiturstufe erfordert eine Unterrichtsgestaltung, die den Prinzipien der Einheit von Wissenschaftlichkeit, Parteilichkeit und Lebensverbundenheit sowie der Einheit von Bildung und Erziehung gerecht wird und die gewachsene Reife und den erreichten Entwicklungsstand der Schüler richtig beachtet. Der Unterrichtsprozeß ist vom Lehrer so zu planen und zu führen, daß die Schüler anspruchsvolle mathematische Tätigkeiten auf einem möglichst hohen Niveau der Selbständigkeit auszuführen haben, Freude über das Erreichte empfinden und den Unterricht durch aktive Mitarbeit bereichern. Das verlangt eine von dem vorhandenen Wissen und Können sowie den praktischen Erfahrungen der Schüler ausgehende Unterrichtsgestaltung, durch die die Mitarbeit der Schüler inhaltlich motiviert und stimuliert wird.

Für eine derartige Unterrichtsgestaltung ist das vielfältige <u>Arbeiten mit Aufgaben</u> von außerordentlicher Bedeutung. Es erfordert das Reaktivieren des benötigten Wissens und Könnens, das Bewußtmachen von allgemeinen Lösungsverfahren für wichtige Aufgabenklassen sowie von heuristischen Regeln und Prinzipien für die Suche nach einem Lösungsweg. Auch an die Selbstkontrolle gefundener Lösungswege und Lösungen sind die Schüler systematisch zu gewöhnen, und sie sind durch geeignete Unterrichtsgestaltung zu befähigen, eine solche Kontrolle selbständig und möglichst rationell vorzunehmen.
Das Arbeiten mit Aufgaben ist untrennbar mit solchen Aufträgen an die Schüler verbunden wie
- die gefundenen Lösungswege für Aufgaben vorzutragen, zu erläutern und zu begründen,
- sich den Inhalt von ausgewählten Lehrbuchabschnitten selbständig anzueignen und zusammenhängend wiederzugeben,
- sich zu geeigneten mathematischen Themen, wie systematisierenden Zusammenfassungen, zentralen Problemstellungen des Fachlehrgangs und deren Lösung und zu längeren Beweisführun-

gen, nach spezieller Vorbereitung zusammenhängend und in guter sprachlicher Form zu äußern,
- einem solchen Vortrag inhaltlich zu folgen, dazu Fragen zu stellen, Ergänzungen und Wertungen vorzunehmen,
- auch bei längeren zusammenhängenden Darlegungen des Lehrers oder eines Mitschülers das Wesentliche in knapper Form schriftlich festzuhalten.

Unter dem Aspekt ihrer Vorbereitung auf die Hochschule ist es notwendig, die Schüler durch eine dafür geeignete Unterrichtsgestaltung schrittweise zu einer besseren Bewältigung dieser Anforderungen zu befähigen.

Bei der unterrichtlichen Erstbehandlung von Stoffen ist nicht nur auf eine möglichst lebensverbundene, praxisbezogene oder innermathematische Motivation zu achten, sondern auch auf ein Vorgehen, bei dem alle Schüler aktiv mitarbeiten. Um dies zu erreichen, ist auf eine sinnvolle Verbindung des Neuen mit bereits Bekanntem und dessen Reaktivierung besonderer Wert zu legen.

An vielen Stellen des Unterrichts sind frontale und auch differenzierte Wiederholungen erforderlich, die sorgfältig zu planen und teils als gesonderte Unterrichtsgegenstände, teils immanent durchzuführen sind. Im Abschnitt "Inhalt des Unterrichts" werden die Gegenstände der wichtigsten Wiederholungen angegeben, weitere Wiederholungen sind in Abhängigkeit von der speziellen Klassensituation durchzuführen.
Einen breiten Raum müssen die Übungen einnehmen, die ebenfalls im Abschnitt "Inhalt des Unterrichts" ausgewiesen sind. Soweit sie unmittelbar nach der Erstbehandlung eines Stoffes durchgeführt werden, sind sie hauptsächlich auf dessen Festigung zu konzentrieren, zugleich ist aber auch früher behandelter Stoff in geeigneter Weise mit zu festigen.
Von besonderer Bedeutung für die Entwicklung und die dauerhafte Sicherung desjenigen Wissens und Könnens, das ständig verfügbar sein muß, sind die Übungen und Anwendungen am Ende der Behandlung der einzelnen Stoffgebiete (siehe "Inhalt des Unterrichts"). Mit diesen Übungen und Anwendungen wird in erster Linie das Ziel verfolgt, die Schüler zum selbständigen Lösen komplexer Aufgaben

zu befähigen, was ein besonders hohes Maß an selbständiger Schülerarbeit von Anfang an erforderlich macht. Hauptsächlicher Gegenstand dieser Übungen und Anwendungen sind Aufgaben, die das Lösen von mehreren Teilaufgaben erfordern, so daß die Schüler einen Lösungsweg bewußt zu planen und dann zügig abzuarbeiten haben. Es kommt darauf an, die Aufgaben insgesamt so auszuwählen, daß alle Schwerpunkte aus dem betreffenden Stoffgebiet, aber auch solche aus vorhergehenden Stoffgebieten berücksichtigt sind. Dabei sind die gründliche Analyse umfangreicher Aufgabentexte, die übersichtliche und exakte Niederschrift des verwendeten Lösungsweges sowie das rationelle Arbeiten mit zugelassenen Hilfsmitteln intensiv zu üben. Hierdurch ist eine sinnvolle Vorbereitung auf die Anforderungen der Klassenarbeiten und - langfristig - der schriftlichen Reifeprüfung zu erreichen, wobei der letztgenannte Aspekt in Klasse 12 stärker in den Vordergrund tritt. Um alle Schüler in Abhängigkeit vom erreichten Leistungsstand maximal zu fordern und zu fördern, ist bei den "Übungen und Anwendungen" - wie auch an anderen Stellen des Unterrichts - auch mit differenzierten Aufgabenstellungen zu arbeiten.
Auf weitere - stoffgebietstypische - Funktionen dieser "Übungen und Anwendungen" wird im Abschnitt "Inhalt des Unterrichts" hingewiesen.

Bei der Erarbeitung und Festigung des Stoffes sowie bei der Überprüfung des Wissens und Könnens ist zu beachten, daß nicht alle Stoffe auf dem gleichen Niveau und mit gleicher Zielstellung zu behandeln sind. Welche Zielstellung jeweils verfolgt wird, ist aus den Teilzielangaben in den Vorworten zu den einzelnen Stoffgebieten (vgl. "Inhalt des Unterrichts") ersichtlich. Dabei ist jedoch zu beachten, daß es auch Teilziele gibt, die nur kurzfristige Bedeutung haben. Insbesondere ist die ständige Beherrschung gewisser inhaltlicher Überlegungen und bestimmter Methoden, die bei der unterrichtlichen Erstbehandlung eines Problems eine Rolle spielen, nicht gefordert, wenn im nachfolgenden Unterricht allgemeine Verfahren algorithmischen Charakters anzueignen sind, die eine rationellere Lösung des betreffenden Problems ermöglichen. Für die Behandlung von Begriffen wird nachfolgend (vgl. "Inhalt des Unterrichts") wie in den Lehrplänen für die Klassen 6 bis 8 sowie 9 und 10[1] zwischen "Einführen" und "Definieren" unterschieden, und für zu behandelnde Sätze wird jeweils angegeben, ob sie im Unterricht zu beweisen sind oder nicht.

In Klasse 11 liegen der Planung 30 Unterrichtswochen, in Klasse 12 (bis zur schriftlichen Reifeprüfung) 26 Unterrichtswochen zu je 5 Wochenstunden zugrunde. Dabei wird davon ausgegangen, daß durch die "Übungen und Anwendungen" am Ende eines jeden Stoffgebietes eine langfristige und gründliche Vorbereitung der schriftlichen Reifeprüfung erfolgt.
Zwischen der schriftlichen und der mündlichen Reifeprüfung ist - bis auf die in Fußnote 2 auf Seite 18 genannte Ausnahme - kein neuer Stoff zu behandeln. Vielmehr hat eine systematisierende Wiederholung zu erfolgen, wobei der Schwerpunkt auf den mathematisch-theoretischen Elementen des Lehrgangs (Begriffe, deren Definitionen, Sätze und deren Beweise, grundlegende allgemeine Problemstellungen und deren Lösung) liegen soll. Zu diesen Themen sollen die Schüler auch selbständig vorbereitete Vorträge halten.

Die Stoffgebiete in Klasse 11 sind in der angegebenen Reihenfolge zu behandeln. Lediglich für den Stoffabschnitt "3.4. Stammfunktionen" ist freigestellt, ob er an der angegebenen Stelle oder als "Unbestimmtes Integral" nach dem Stoffabschnitt "4.1. Bestimmtes Integral" behandelt wird.
Die beiden Stoffgebiete der Klasse 12 können auch parallel zueinander behandelt werden.

Die nachfolgend in der "Stoffübersicht" und im "Inhalt des Unterrichts" angegebenen Stundenzahlen für die (einstellig numerierten) Stoffgebiete sind verbindlich, die für die (zweistellig numerierten) Stoffabschnitte stellen Empfehlungen dar. Leistungskontrollen sind in mündlicher Form, als Kurzarbeiten und als ein- oder mehrstündige Klassenarbeiten (mit etwa je 8 Stunden Umfang in den Klassen 11 und 12) durchzuführen.

---

1) Lehrplan Mathematik, Klassen 6 bis 8. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1987, S. 16 f.
Lehrplan Mathematik, Klassen 9 und 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1987, S. 14.

STOFFÜBERSICHT

KLASSE 11

1.	Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik	35 Stunden
1.1.	Zahlenfolgen und deren Partialsummen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion	(19 Stunden)
1.2.	Kombinatorik	(8 Stunden)
1.3.	Übungen und Anwendungen	(8 Stunden)
2.	Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen	25 Stunden
2.1.	Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Zahlenfolgen	(12 Stunden)
2.2.	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	(8 Stunden)
2.3.	Übungen und Anwendungen	(5 Stunden)
3.	Differentialrechnung	66 Stunden
3.1.	Ableitung einer Funktion	(8 Stunden)
3.2.	Differentiationsregeln; die Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen	(15 Stunden)
3.3.	Kurvenuntersuchungen, Extremwertaufgaben	(25 Stunden)
3.4.	Stammfunktionen	(5 Stunden)
3.5.	Übungen und Anwendungen	(13 Stunden)
4.	Integralrechnung	24 Stunden
4.1.	Bestimmtes Integral	(6 Stunden)
4.2.	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	(6 Stunden)
4.3.	Flächeninhaltsberechnungen	(6 Stunden)
4.4.	Übungen und Anwendungen	(6 Stunden)
	insgesamt	150 Stunden

KLASSE 12

1.	**Vektorrechnung und analytische Geometrie**	**72 Stunden**
1.1.	Verschiebungen und Vektoren	(12 Stunden)
1.2.	Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren	(12 Stunden)
1.3.	Analytische Geometrie der Geraden	(13 Stunden)
1.4.	Skalarprodukt und Anwendungen	(13 Stunden)
1.5.	Analytische Geometrie des Kreises[3]	(7 Stunden)
1.6.	Übungen und Anwendungen	(15 Stunden)
2.	**Weitere Klassen nichtrationaler Funktionen; ihre Differentiation und Integration**	**58 Stunden**
2.1.	Wiederholungen	(5 Stunden)
2.2.	Logarithmus- und Exponentialfunktionen; ihre Differentiation; Integration der Exponentialfunktionen	(15 Stunden)
2.3.	Winkelfunktionen; ihre Differentiation und Integration	(20 Stunden)
2.4.	Übungen und Anwendungen; Wiederholungen	(18 Stunden)
	insgesamt	130 Stunden

---

2) (Fußnote zur Seite 16)
Anweisung Nr. 18/84 in "Verfügungen und Mitteilungen, Nr. 7/84", S. 114 ff. Danach ist der Stoffabschnitt 1.5. der Klasse 12 in Erweiterten Oberschulen und Volkshochschulen erst nach der schriftlichen Reifeprüfung zu behandeln.

3) Siehe Fußnote 2 auf dieser Seite!

I N H A L T   D E S   U N T E R R I C H T S

KLASSE 11

1. Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik — 35 Stunden

Mit der Behandlung dieses Stoffgebietes werden hauptsächlich drei miteinander verbundene Ziele verfolgt. Erstens sollen die Schüler mit Zahlenfolgen einschließlich Partialsummen von Zahlenfolgen vertraut gemacht werden und vielfältige elementare Aufgaben zu dieser Thematik lösen lernen. In diesem Zusammenhang sollen sie zweitens das Beweisverfahren der vollständigen Induktion kennen, seine Verwendung beim Beweisen von Aussagen aus verschiedenen mathematischen Teildisziplinen verstehen und es vor allem auf den Beweis der Allgemeingültigkeit induktiv ermittelter oder mitgeteilter Formeln für die n-te Partialsumme von Zahlenfolgen anwenden lernen. Drittens sollen sie mit grundlegenden kombinatorischen Problemstellungen, Begriffen, Sätzen und Berechnungsverfahren vertraut gemacht und befähigt werden, einfache kombinatorische Aufgaben, einschließlich einfacher Anwendungsaufgaben, selbständig zu lösen.

Dabei sind das Rechnen mit rationalen Zahlen mit und ohne Taschenrechner, das Umformen von Termen, das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen und der Begriff des Logarithmus zu reaktivieren sowie die Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen zu behandeln. Auf den Begriff der Funktion und auf grundlegende Begriffe und Beziehungen der Mengenlehre ist wiederholend einzugehen. Definieren und Beweisen, das Arbeiten mit neu eingeführten Symbolen und die sprachlich-logische Schulung bilden weitere Schwerpunkte in diesem Stoffgebiet.

Im erst<u>en Stoffabschnitt</u> kommt es nach den angegebenen Wiederholungen zunächst darauf an, daß die Schüler den Begriff "Zahlenfolge" unter Verwendung des Funktionsbegriffs erfassen und solche

Begriffe wie "Glied einer Zahlenfolge", "n-tes Glied einer Zahlenfolge" und "explizite (bzw. rekursive) Zuordnungsvorschrift" selbständig anwenden lernen.
Es sind sichere Fertigkeiten im Berechnen beliebiger Glieder einer Zahlenfolge aus der gegebenen Zuordnungsvorschrift zu erreichen, auch das Ermitteln möglicher Zuordnungsvorschriften aus gegebenen Gliedern ist zu üben. Dabei ist vorrangig mit expliziten und nur gelegentlich mit rekursiven Zuordnungsvorschriften für Zahlenfolgen zu arbeiten.
Bei den anschließenden Übungen ist besonders darauf zu achten, daß die Schüler lernen, mit der hier eingeführten Symbolik richtig umzugehen. Ferner sollen sie sich dort relativ selbständig den Begriff der arithmetischen und den der geometrischen Zahlenfolge aneignen und auch für diese speziellen Zahlenfolgen die genannten Fertigkeiten erwerben.
Ausgehend von dem zu wiederholenden Begriff der Monotonie einer Funktion, ist der Begriff der Monotonie von Zahlenfolgen zu definieren. Die Schüler sollen - gestützt auf diese Definition - lernen, gegebene Zahlenfolgen selbständig auf Monotonie zu untersuchen.
Nach Einführung von "n-te Partialsumme einer Zahlenfolge (a_n)" sind für ausgewählte Zahlenfolgen Formeln für deren n-te Partialsumme induktiv zu gewinnen. Sodann ist herauszuarbeiten, daß die allgemeine Gültigkeit dieser Formeln noch zu beweisen ist, was zur Motivierung der anschließenden Behandlung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion zu nutzen ist.
In den Übungen im Beweisen mit Hilfe der vollständigen Induktion, die in das Arbeiten mit Zahlenfolgen und deren Partialsummen einzubetten sind, ist vor allem die Allgemeingültigkeit von Formeln für solche Partialsummen zu beweisen, die im nachfolgenden Unterricht benötigt werden (z. B. Summe der ersten n Quadratzahlen). Dabei ist auch das äquivalente Umformen von Termen zielstrebig weiter zu festigen. Ferner ist beim Führen dieser Beweise an der sprachlich-logischen Bildung der Schüler zu arbeiten. Deshalb sollten sie eine normierte Kurzform der Beweisdarstellung nur bei der schriftlichen Fixierung des Beweisens anwenden, während beim Vortragen dieser Beweise eine ausführliche Darstellung in grammatisch vollständigen Sätzen zu fordern ist. Um ein besseres in-

haltliches Verständnis für das Beweisverfahren zu erreichen, ist in den Beispielen und Übungen nicht nur von k auf k + 1, sondern auch von k - 1 auf k zu schließen. Es sind auch einige einfache Anwendungen dieses Beweisverfahrens in Arithmetik und Geometrie zu behandeln, um auf diese Weise seine vielseitige Anwendbarkeit zu demonstrieren. Den Schülern ist auch der für alle Anwendungen einheitliche Grundgedanke dieses Beweisverfahrens (Prinzip der vollständigen Induktion) bewußt zu machen.
Damit die Schüler erkennen, daß Zahlenfolgen nicht nur innerhalb der Mathematik Bedeutung haben, sind abschließend einige geeignete Aufgaben aus den Naturwissenschaften, der Technik und der Ökonomie zu lösen. Dabei bilden geometrische Zahlenfolgen und das Lösen von dabei auftretenden Exponentialgleichungen einen Schwerpunkt. Im Zusammenhang mit dem Lösen von Anwendungsaufgaben aus der Ökonomie sind den Schülern auch die darin behandelten Leistungen bewußt zu machen, die von den Werktätigen der Deutschen Demokratischen Republik unter Führung der Partei der Arbeiterklasse vollbracht werden.

Im zweiten Stoffabschnitt wird zunächst mit geordneten endlichen Mengen gearbeitet, und es werden alle möglichen Anordnungen der Elemente solcher Mengen ermittelt. Daraus wird der Begriff der Permutation gewonnen und die Anzahl P_n der Permutationen von n verschiedenen Elementen untersucht, wobei die Fakultätsschreibweise einzuführen ist. Die Formel $P_n = n!$ ist mittels vollständiger Induktion zu beweisen. Neben den erforderlichen Übungen im Berechnen und Umformen von Termen, die Fakultäten enthalten, sind auch einige Aufgaben zu lösen, bei denen hauptsächlich die Anzahl von Permutationen (ohne Wiederholung) zu berechnen sind.
Die Formel für die Anzahl V_n^k der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung ist anschließend induktiv zu gewinnen und mittels vollständiger Induktion (für festes n) zu beweisen. Daraus ist dann - unter Nutzung der Kenntnisse über Permutationen - die Formel für die Anzahl C_n^k der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung herzuleiten und nach Einführung des Binomialkoeffizienten in der Form $C_n^k = \binom{n}{k}$ zu schreiben. Abschließend sind Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten zu beweisen und einige Aufgaben - einschließlich einfacher Anwendungsaufgaben - zu Variationen und Kombinationen zu lösen.

In den Übungen und Anwendungen geht es erstens darum, Fertigkeiten im Lösen von Aufgaben mit Zahlenfolgen und deren Partialsummen zu entwickeln und dabei sowohl das selbständige Anwenden des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion als auch das Lösen von Anwendungsaufgaben zu Zahlenfolgen und deren Partialsummen zu üben. Dabei ist dem möglichst selbständigen Finden einer Lösungsidee bzw. eines Ansatzes für die Lösung durch die Schüler besondere Aufmerksamkeit zu widmen.
Dies gilt auch für die hier zu lösenden Anwendungsaufgaben zur Kombinatorik, bei denen zunächst der gegebene Sachverhalt daraufhin zu untersuchen ist, ob eine Permutation, eine Variation oder eine Kombination (ohne Wiederholungen) vorliegt. Gelegentlich ist dabei wieder mit Mengen zu arbeiten. Bei den erforderlichen Berechnungen ist auch auf die Befähigung der Schüler zu rationellem Arbeiten (wie Nutzen behandelter Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten für Rechenvorteile, Wahrnehmen von Möglichkeiten des Kürzens) zu achten.

1.1. Zahlenfolgen und deren Partialsummen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion — 19 Stunden

Wiederholen von "Menge", der Element-Mengen- und der Teilmengen-Mengen-Beziehung sowie der entsprechenden Symbole; dazu Übungen; Wiederholen von "Funktion", "Definitions- und Wertebereich", "Argument", "Funktionswert", von "Gleichung" und "Graph" (einer Funktion); Übungen;
Definieren von "Zahlenfolge" (als spezielle Funktion), Einführen von "Glied einer Zahlenfolge", "n-tes Glied einer Zahlenfolge" und von "explizite (rekursive) Zuordnungsvorschrift" sowie der entsprechenden Symbole, Einführen von "endlicher (unendlicher) Zahlenfolge";
Übungen im Arbeiten mit Zahlenfolgen unter Verwendung von expliziten und rekursiven Zuordnungsvorschriften sowie von Graphen für endliche Zahlenfolgen, dabei Definieren von "arithmetische Zahlenfolge" und von "geometrische Zahlenfolge"; Wiederholen des Monotoniebegriffs für Funktionen und des Lösens einfacher Ungleichungen, Definieren von "monoton wachsende (fallende) Zahlenfolge", Einführen von "konstante Zahlenfolge"; Untersuchen von Zahlenfolgen auf Monotonie; dazu Übungen.

Einführen von "n-te Partialsumme einer Zahlenfolge (a_n)", des Summenzeichens und der Summenschreibweise; Übungen im Berechnen von Partialsummen; induktives Gewinnen von Formeln für Partialsummen; Erläuterungen zur Notwendigkeit eines Beweises für die Allgemeingültigkeit solcher Formeln; der Grundgedanke des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion; das Prinzip der vollständigen Induktion; Übungen im Beweisen der Allgemeingültigkeit induktiv gewonnener oder mitgeteilter Formeln für n-te Partialsummen von Zahlenfolgen; weitere Anwendungen des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion auf einfache arithmetische und geometrische Probleme.
Beispiele für Anwendungen von (vor allem geometrischen) Zahlenfolgen in anderen Wissenschaften und in der gesellschaftlichen Praxis; die Logarithmengesetze

$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$,

$\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$,

$\log_a u^r = r \cdot \log_a u \left(r \in R\right)$

und ihre Anwendung beim Lösen auftretender Exponentialgleichungen (Taschenrechnerverwendung); Übungen.

1.2. Kombinatorik 8 Stunden

Einführen von "geordnete Menge", "lexikographische Anordnung" und von "Permutation"; Untersuchungen zur Anzahl P_n der Permutationen von n Elementen (ohne Wiederholung); Einführen der Fakultätsschreibweise; Definition für 1! und 0!; Beziehungen zwischen Fakultäten; Übungen im Umformen von Termen, die Fakultäten enthalten; Beweis der Beziehung $P_n = n!$ mittels vollständiger Induktion; Beispiele und Übungen im Lösen einfacher Anwendungsaufgaben zu Permutationen.

Untersuchungen zu geordneten Teilmengen mit k Elementen aus einer geordneten Menge mit n (verschiedenen) Elementen $(1 \leq k \leq n)$; Einführen von "Variation von n Elementen zur k-ten Klasse"; Untersuchungen zur Anzahl V_n^k der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse (ohne Wiederholung) und Beweis der Allgemeingültigkeit der

Formel $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ mittels vollständiger Induktion; Beispiele und Übungen.
Untersuchungen zu Teilmengen mit k Elementen aus einer Menge mit n (verschiedenen) Elementen ($1 \leqq k \leqq n$); Einführen von "Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse" (ohne Wiederholung); Herleiten der Formel $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$ für die Anzahl C_n^k der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse; Einführen von "Binomialkoeffizient" und des Symbols $\binom{n}{k}$. Beweise für die Beziehungen

$C_n^k = C_n^{n-k}$ und $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Beispiele für die Verwendung von Binomialkoeffizienten; Übungen im Lösen einfacher Anwendungsaufgaben zu Kombinationen und Variationen.

1.3. Übungen und Anwendungen — 8 Stunden

- Lösen von Aufgaben zu Zahlenfolgen und deren Partialsummen, wobei insbesondere
  . Untersuchungen auf Monotonie durchzuführen,
  . Glieder und Partialsummen von Zahlenfolgen zu berechnen,
  . die Allgemeingültigkeit ermittelter bzw. mitgeteilter Formeln für n-te Partialsummen mittels vollständiger Induktion zu beweisen

  sind;
- Lösen von Anwendungsaufgaben (vor allem zu geometrischen Folgen) aus Mathematik, Physik, Technik und Ökonomie;
- Lösen einfacher Anwendungsaufgaben zu Permutationen, Variationen und Kombinationen (ohne Wiederholung).

2. Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen — 25 Stunden

Das Ziel der Behandlung dieses Stoffgebietes besteht in erster Linie darin, daß die Schüler das Konvergenzverhalten von Zahlenfolgen und Funktionen inhaltlich verstehen und mit den damit im Zusammenhang stehenden Begriffen und deren Definitionen, Sätzen und Verfahren richtig umgehen lernen. Besonderer Wert ist dabei auf die Ausbildung des inhaltlichen Verständnisses für den Begriff

des Grenzwertes von Zahlenfolgen und der zu diesem zentralen Begriff hinführenden Begriffe zu legen. Das gilt auch für die Entwicklung des Verständnisses für Konvergenzuntersuchungen bei Zahlenfolgen und von Fertigkeiten im Bestimmen des jeweiligen Grenzwertes konvergenter Zahlenfolgen für jene Fälle, wo dies mit Hilfe der behandelten Grenzwertsätze ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist. Auf der Grundlage dieses Wissens und Könnens sind die Schüler abschließend mit dem Begriff des Grenzwertes einer Funktion an der Stelle x_0 und dem der Stetigkeit so weit vertraut zu machen, daß sie diese Begriffe und deren Anwendung im nachfolgenden Unterricht verstehen. Gewisse Fertigkeiten im selbständigen Durchführen entsprechender Untersuchungen werden nur für einfache Fälle der Grenzwertbestimmung einer Funktion an der Stelle x_0 angestrebt.
Die Behandlung dieses Stoffgebietes ist zur Festigung der Fertigkeiten im Umformen von Termen, im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen sowie zur Weiterentwicklung des Verständnisses für das Definieren und Beweisen zu nutzen. Die Auswahl aller Aufgaben und die Durchführung der Übungen im Stoffgebiet haben so zu erfolgen, daß den Schülern hinreichend Gelegenheit zur selbständigen Anwendung und zur Festigung des genannten Wissens und Könnens gegeben wird.

Im ersten Stoffabschnitt wird die Behandlung der Eigenschaften von Zahlenfolgen mit Untersuchungen zu Schranken und Grenzen fortgesetzt. Die Schüler sind durch entsprechende Übungen zu befähigen, diese Begriffe auf betrachtete Zahlenfolgen selbständig richtig anzuwenden. Es werden jedoch keine Fertigkeiten im selbständigen Führen von Nachweisen für Beschränktheit und für die Existenz von Grenzen bei Zahlenfolgen angestrebt.
Besondere Sorgfalt erfordert die anschließende Behandlung des Grenzwertbegriffs für Zahlenfolgen, bei der von einfachen, instruktiven Beispielen auszugehen und dann der Begriff der ε-Umgebung einer Zahl a einzuführen ist. Unter Verwendung dieses Begriffs sind die betrachteten Zahlenfolgen näher zu untersuchen, und es ist der Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen zu definieren. Um die eingeführten Begriffe und die Definition des Grenzwertes zu festigen, sollen die Schüler durch entsprechende Übungen befähigt werden, selbständig zu untersuchen, ob eine gegebene Zahl

Grenzwert einer gegebenen Zahlenfolge ist oder nicht. Den Schülern ist bewußt zu machen, daß mit diesen Untersuchungen der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge nicht berechnet werden kann. Diese Einsicht dient zur Motivation der nachfolgenden Behandlung der Sätze über das Konvergenzverhalten monotoner Zahlenfolgen und der Grenzwertsätze für die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten von konvergenten Zahlenfolgen.
Bei den anschließenden Untersuchungen gegebener Zahlenfolgen auf Konvergenz und beim Bestimmen des jeweiligen Grenzwertes gegebener konvergenter Zahlenfolgen kommt es in erster Linie darauf an, daß die Schüler lernen, die gestellten Aufgaben durch bewußte Anwendung der behandelten Sätze über Grenzwerte von Zahlenfolgen zu lösen.

Im zweiten Stoffabschnitt ist zunächst der Grenzwertbegriff für Funktionen anhand von Beispielen herauszuarbeiten und durch entsprechende Übungen zu festigen.
Mit Hilfe von Analogiebetrachtungen zu den Grenzwertsätzen für konvergente Zahlenfolgen sind die Schüler sodann mit den entsprechenden Sätzen über den Grenzwert für die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Funktionen an der Stelle x_0 bekannt zu machen. Diese Sätze sind nicht zu beweisen, jedoch in Übungen zur Berechnung des jeweiligen Grenzwertes von Funktionen an der Stelle x_0 anzuwenden, und zwar mit dem Ziel, daß die Schüler in einfachen Fällen diese Grenzwertbestimmung selbständig durchführen können.
Auf der Grundlage dieses Wissens und Könnens sollen die Schüler mit dem Problem der Stetigkeit bekannt gemacht werden, das ihnen anhand von Beispielen und Gegenbeispielen zu erläutern ist. Der Zwischenwertsatz und der Satz über die Existenz des Maximums (Minimums) einer stetigen Funktion in einem abgeschlossenen Intervall werden nur an Beispielen erläutert; sie dienen vor allem der Vorbereitung von Kurvenuntersuchungen im Stoffgebiet "Differentialrechnung".

In den Übungen und Anwendungen kommt es darauf an, den Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen und Funktionen weiter zu festigen und die Ausbildung der oben geforderten Fertigkeiten zu sichern. Ein Teil der Übungen ist mit differenzierter Aufgabenstellung durchzuführen, wobei für Schüler mit geringerem Übungsbedarf vor allem Beweisaufgaben (z. B. zu im Unterricht nicht bewiesenen Sätzen) zu stellen sind. Gleichzeitig soll durch die Übungen eine gezielte Vorbereitung auf die nachfolgende Einführung in die Differentialrechnung erfolgen.

2.1. Schranken, Grenzen und Grenzwerte von Zahlenfolgen — 12 Stunden

Definieren von "obere (untere) Schranke" sowie von "obere (untere) Grenze" von Zahlenfolgen.
Einführen von "für fast alle natürlichen Zahlen gilt ..." und von "beschränkt (unbeschränkt) wachsen (fallen)".
Untersuchen von Zahlenfolgen (einschließlich geometrischer) auf Beschränktheit; Ermitteln der oberen (unteren) Grenze von Zahlenfolgen; Satz von der oberen (unteren) Grenze (ohne Beweis).

Erarbeitung des Grenzwertproblems für Zahlenfolgen anhand einfacher, instruktiver Beispiele; Einführen von "ε-Umgebung einer Zahl a"; Definieren von "Grenzwert einer Zahlenfolge", Einführen von $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ und von "konvergente (divergente) Zahlenfolge"; Übungen zur Festigung des Grenzwertbegriffs, insbesondere durch Untersuchung, ob eine gegebene Zahl Grenzwert einer gegebenen Zahlenfolge ist oder nicht (auch für Partialsummenfolgen); dabei Einführen von "Nullfolge".
Untersuchungen zum Konvergenzverhalten monotoner Zahlenfolgen; Satz über die Konvergenz beschränkter und monoton wachsender (fallender) Zahlenfolgen (mit Beweis).
Einführen von "Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Zahlenfolgen";
Satz über den Grenzwert der Summe zweier konvergenter Zahlenfolgen (mit Beweis); Satz über den Grenzwert der Differenz (des Produkts, des Quotienten) zweier konvergenter Zahlenfolgen (ohne Beweis); Anwenden der genannten Sätze in Übungen zum Nachweis der Konvergenz bzw. zum Bestimmen des jeweiligen Grenzwertes gegebener konvergenter Zahlenfolgen.

2.2. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen — 8 Stunden

Einführende Problemstellungen zum Grenzwertbegriff für Funktionen und zur Stetigkeit; dabei Untersuchen des Verhaltens bestimmter Funktionen in einer Umgebung der Stelle x_0;
Definieren von "Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0" unter Verwendung des Konvergenzbegriffs für Zahlenfolgen;
Anwenden der Definition auf einfache Beispiele.
Einführen von "Summe (Differenz, Produkt, Quotient) zweier Funktionen"; Satz über den Grenzwert der Summe, der Differenz, des Produkts, des Quotienten zweier Funktionen (ohne Beweis); dazu Übungen und Anwendungen.
Definieren von "Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0".
Einfache Beispiele für Funktionen, die an der Stelle x_0 stetig (unstetig) sind.
Einführen von "Stetigkeit einer Funktion f in einem Intervall I" und "Stetigkeit einer Funktion f im gesamten Definitionsbereich"; Bemerkungen zur Stetigkeit in den Pandpunkten eines abgeschlossenen Intervalls.
Zwischenwertsatz (ohne Beweis); Einführen von "Maximum" ("Minimum") und Satz über die Existenz des Maximums (Minimums) einer stetigen Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall I (ohne Beweis);
Beispiele und Gegenbeispiele zu den genannten Sätzen, dabei auch näherungsweises Bestimmen von Nullstellen unter Verwendung des Zwischenwertsatzes.

2.3. Übungen und Anwendungen — 5 Stunden

- Lösen von Aufgaben, in denen Zahlenfolgen (einschließlich Partialsummenfolgen) auf Monotonie und Konvergenz bzw. Divergenz untersucht werden;
- Lösen einfacher Aufgaben zu Grenzwerten von Funktionen.

3. Differentialrechnung 66 Stunden

Mit der Behandlung dieses Stoffgebietes ist zu erreichen, daß die Schüler fundamentale Begriffe, Sätze, Regeln und Verfahren der Differentialrechnung kennen, verstehen und auf rationale Funktionen und Wurzelfunktionen anwenden lernen. Zugleich sollen sie Fertigkeiten im Lösen von typischen inner- und außermathematischen Anwendungsaufgaben zur Differentialrechnung erwerben. Deshalb ist nicht nur die Beherrschung der einzelnen stofflichen Elemente in dem nachstehend angegebenen Umfang und auf dem dort gekennzeichneten Niveau erforderlich, sondern auch die Entwicklung der Fähigkeit zu ihrer rationellen und kombinierten Anwendung.
Besonders wichtig sind in diesem Stoffgebiet ferner das Reaktivieren und das produktive Anwenden früher erworbenen Wissens und Könnens vor allem bezüglich der Grenzwerte von Funktionen und des Lösens von Gleichungen sowie weiterer Stoffe, die nachfolgend im einzelnen angegeben werden.
Auch zur Ausbildung wissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen (wie Definieren, Beweisen) und von Methoden des rationellen Arbeitens ist bei der Behandlung dieses Stoffgebietes ein wesentlicher Beitrag zu leisten. Ferner ist den Schülern bewußt zu machen, daß sie hier Begriffe und Verfahren kennenlernen, die eine präzisere Erfassung wichtiger Sachverhalte bzw. ein rationelles Lösen bedeutsamer Probleme aus der Praxis oder aus anderen Wissenschaften mit mathematischen Mitteln ermöglichen. Dabei ist besonderer Wert auf die Herausarbeitung von Zusammenhängen mit Stoffen des Physikunterrichts zu legen und auf die Leistungen von LEIBNIZ und NEWTON kurz einzugehen.

Im ersten Stoffabschnitt kommt es nach Durchführung der nachfolgend gekennzeichneten Wiederholungen zunächst darauf an, daß die Schüler die hinführenden Probleme und die für das Lösen dieser Probleme erforderlichen Begriffe (Differenzenquotient, Differenzierbarkeit, 1. Ableitung) und Verfahren (Bilden von Differenzenquotienten, Bestimmen ihres Grenzwertes) inhaltlich verstehen. Es wird empfohlen, vom Tangentenproblem auszugehen und dabei die

Möglichkeiten graphischer Veranschaulichung umfassend zu nutzen. Aber auch auf das Problem Durchschnittsgeschwindigkeit/Augenblicksgeschwindigkeit ist einzugehen.
Schon in dieser Phase ist den Schülern genügend Gelegenheit zur selbständigen Tätigkeit zu geben, indem sie beispielsweise für einen einfachen Fall den Wert der 1. Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 bzw. die 1. Ableitung einer Funktion f in einem Intervall I durch Grenzwertbestimmung ermitteln.

Für die im <u>zweiten Stoffabschnitt</u> angegebenen Sätze und Differentiationsregeln sind deren inhaltliches Verständnis und erste Fertigkeiten im selbständigen Anwenden dieser Regeln anzustreben. Dabei ist den Schülern bewußt zu machen, daß diese Sätze und Regeln nicht etwa nur für die Arten von Funktionen gelten, auf die sie in diesem Abschnitt Anwendung finden, sondern für alle differenzierbaren Funktionen. Bezüglich der hier einbezogenen Arten von Funktionen ist zu berücksichtigen, daß sie in Klasse 9 bis zu einem gewissen Grade bereits behandelt wurden. Diese Kenntnisse sind hier zu reaktivieren, zu vertiefen und zu systematisieren. Die einbezogenen Arten von Funktionen ermöglichen nicht nur erste Übungen im kombinierten Anwenden der behandelten Differentiationsregeln, sondern dienen zum Teil auch der Motivation der Behandlung einzelner Sätze und Differentiationsregeln, wie etwa im Fall der gebrochenen rationalen Funktionen und des Satzes über die Differenzierbarkeit und die Differentiation des Quotienten zweier in x_0 bzw. in einem Intervall differenzierbarer Funktionen und der "Quotientenregel". Besonderer Sorgfalt bedarf auch die Erarbeitung des Begriffs der Umkehrfunktion, weil er nicht nur in diesem Abschnitt, sondern auch im Stoffgebiet 2 der Klasse 12 bei inhaltlichen Überlegungen anzuwenden ist. Dagegen ist es kein Ziel der Behandlung dieses Abschnittes, bei den Schülern schon voll entwickelte Fertigkeiten im Differenzieren von Vertretern der hier behandelten Funktionen zu erreichen. Vielmehr ist dies während der Behandlung des dritten Stoffabschnittes sowie der Übungen und Anwendungen zu diesem Stoffgebiet zu erreichen.

Im <u>dritten Stoffabschnitt</u> steht zunächst die Aneignung der theoretischen Grundlagen für Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben im Vordergrund. Dabei ist auf die aktive Verwendung der neuen Elemente des Fachwortschatzes und der Symbolik durch die Schüler besonderer Wert zu legen. Zu beachten ist, daß der Satz von ROLLE und seine Verallgemeinerung (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) vor allem dem Verständnis der folgenden Stoffe dienen. Die daraus abgeleiteten Folgerungen (wie der Satz über die hinreichende Bedingung für lokale Extrema) sind dagegen von grundsätzlicher Bedeutung für den Fachlehrgang.
Wenn auch sichere Fertigkeiten bei Kurvenuntersuchungen und im Lösen von Extremwertaufgaben wesentliche Ziele dieses Stoffgebietes sind, so darf deren Behandlung nicht von vornherein auf das rein kalkülmäßig-algorithmische Vorgehen orientiert sein. Vielmehr sind zunächst die hier vermittelten Begriffe, Sätze und Kriterien bewußt anzuwenden, und es ist unter Einbeziehung der Graphen der Funktionen auch anschaulich zu arbeiten. Erst dann sind Algorithmen bzw. heuristische Regeln für Kurvenuntersuchungen und das Lösen von Extremwertaufgaben zu erarbeiten und bei den nachfolgenden Übungen von den Schülern selbständig zu nutzen. Die Übungen sind so anzulegen, daß die Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen (insbesondere solcher, die auf quadratische bzw. lineare Gleichungen führen) und die im Differenzieren von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen weiter ausgebildet bzw. intensiv gefestigt werden. Besonderer Wert ist ferner auf das Reaktivieren der Kenntnisse über Flächeninhalts- und Volumenberechnung und andere stoffliche Elemente aus der Arithmetik und vor allem aus der Geometrie (Strahlensätze, Satzgruppe des Pythagoras) zu legen, die für die Ansätze (einschließlich der Nebenbedingungen) bei Extremwertaufgaben benötigt werden. Das zunehmend selbständige Finden von Lösungsansätzen für Extremwertaufgaben und weitere typische Aufgaben, die mittels der behandelten Begriffe, Sätze und Verfahren gelöst werden können, bilden weitere Schwerpunkte der Schülerarbeit in diesem Stoffabschnitt. Im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Extremwertaufgaben ist den Schülern auch zu erläutern, daß die Mathematik heute in vielfältiger Weise zur optimalen Lösung ökonomischer und technischer Probleme eingesetzt wird und welche Bedeutung dies für die Intensivierung der Volkswirtschaft hat.

Im vierten Stoffabschnitt ist vom Problem der Umkehrung der Differentiation auszugehen. Auf diesem Wege sind durch inhaltliche Überlegungen Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen (insbesondere zu Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten einschließlich Wurzelfunktionen und zu ganzen rationalen Funktionen) zu bestimmen. Zur Probe sind die erhaltenen Stammfunktionen anschließend zu differenzieren. Nach Reaktivierung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung sind die beiden unter 3.4. angegebenen Sätze zu beweisen, um so und durch die nachfolgenden Übungen zu tieferen Einsichten über Stammfunktionen zu gelangen.
Es wird dem Lehrer freigestellt, diesen Stoffabschnitt als "Unbestimmtes Integral" erst im Stoffgebiet "4. Integralrechnung" zu behandeln, und zwar innerhalb des Stoffabschnittes "Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung", für den dann 5 Stunden zusätzlich vorzusehen sind.

In den Übungen und Anwendungen geht es in erster Linie um die volle Entwicklung der Fertigkeiten im selbständigen Lösen der für dieses Stoffgebiet typischen Aufgabenklassen und um die Sicherung des dabei benötigten grundlegenden Wissens und Könnens, vor allem im Differenzieren und im Lösen von Gleichungen, sowie um das Bewußtmachen typischer Lösungswege für solche Aufgabenklassen. Aber auch die rationelle Arbeit mit der Formelsammlung und das Darstellen der Lösungswege in einer guten mathematischen und äußeren Form sind Schwerpunkte der Bildungs- und Erziehungsarbeit. Dabei ist eine gelegentliche Differenzierung in der Aufgabenstellung angezeigt, die dem unterschiedlichen Festigungsbedarf der Schüler Rechnung trägt und allen Schülern ein selbständiges Arbeiten entsprechend ihrem tatsächlichen Leistungsstand ermöglicht.

3.1. Ableitung einer Funktion — 8 Stunden

Wiederholung: "Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0" und "Anstieg einer Geraden"; trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.
Der Anstieg einer Geraden als Tangens des Winkels, den diese Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet;
Einführende Problemstellung: Anstieg einer Kurve im Punkt P_0;

Einführen von "Tangente an eine Kurve in einem Punkt"; Definieren von "Differenzenquotient", Einführen von "Grenzwert des Differenzenquotienten"; Definieren von "Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0" und von "1. Ableitung ("Differentialquotient") einer Funktion f an der Stelle x_0".

Übungen: Ermitteln des Wertes der 1. Ableitung einer gegebenen Funktion an der Stelle x_0 durch Grenzwertbestimmung; Aufstellen der Gleichung der Tangente in dem betreffenden Kurvenpunkt.

Durchschnitts- und Augenblicksgeschwindigkeit; Bemerkungen zu den Leistungen von LEIBNIZ und NEWTON.
Einführen von "Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Intervall I" und von "1. Ableitung von f in I"; Beispiele und Übungen im Bestimmen der 1. Ableitung einiger ganzer rationaler Funktionen und einer gebrochenen rationalen Funktion sowie der konstanten Funktion $g(x) = c$ $(c \in R)$.
Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, dabei Einführen von "notwendige (hinreichende) Bedingung".

3.2. Differentiationsregeln; die Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen 15 Stunden

Wiederholen von "Summe (Produkt, Quotient) zweier Funktionen"; Sätze über die Differenzierbarkeit und die Differentiation der Summe und des Produktes zweier in x_0 bzw. in einem Intervall differenzierbarer Funktionen (mit Beweisen).
Beispiele für Anwendungen der "Summenregel" (auch für mehr als zwei Funktionen) und der "Produktregel" (auch für drei Funktionen), dabei auch Differentiation von $f(x) = c \cdot g(x)$ $(c \in R)$.

Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation von Potenzfunktionen mit (von 0 verschiedenem) natürlichem Exponenten (mit Beweis); Beispiele für die Anwendung der enteprechenden Regel;
Satz über die Differenzierbarkeit und die Differentiation des Quotienten zweier in x_0 bzw. in einem Intervall differenzierbarer Funktionen (ohne Beweis); Beispiele für die Anwendung der "Quotientenregel".

Einführen von "ganze (gebrochene) rationale Funktion"; Übungen im Differenzieren rationaler Funktionen unter Anwendung der behandelten Differentiationsregeln; dabei auch Nachweis, daß die Regel für das Differenzieren einer Potenzfunktion auch für solche mit (negativem) ganzzahligem Exponenten gilt;
Wiederholen der Potenzfunktionen mit (nichtganzzahligem) rationalem Exponenten und von "nichtrationale Funktionen"; Einführen von "Wurzelfunktion" und von "eineindeutige Funktion"; Definieren von "Umkehrfunktion" und Einführen von "zueinander inverse Funktionen"; Monotonie und Stetigkeit bei zueinander inversen Funktionen; die Differentiation von $g(x) = \sqrt{x}$; Ermitteln der zu einer gegebenen Potenzfunktion inversen Funktion(en); Beziehung zwischen der 1. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ $(x \geqq 0)$ an der Stelle x_0 und der 1. Ableitung der zu ihr inversen Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $f(x_0)$; Satz über die Beziehung zwischen den 1. Ableitungen zueinander inverser Funktionen (ohne Beweis); Nachweis, daß die Regel für die Differentiation von Potenzfunktionen auch für solche mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$ $(n \in N,\ n \neq 0)$ gilt; Übungen im Anwenden dieser Regel auf die Differentiation von Wurzelfunktionen.

Einführen von "verkettete Funktionen" und der "Kettenregel"; Übungen im Anwenden der Kettenregel vor allem auf Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten.

Einführen von "2.(n-te) Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 (in einem Intervall I)"; Übungen im Ermitteln von höheren Ableitungen von rationalen Funktionen, von Wurzelfunktionen und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten.

3.3. Kurvenuntersuchungen, Extremwertaufgaben 25 Stunden

Wiederholen von "Nullstelle" und der Nullstellenberechnung für lineare und quadratische Funktionen; Berechnen der Nullstellen ausgewählter ganzer rationaler Funktionen, dabei Übungen im Lösen von Gleichungen, die sich auf quadratische oder lineare reduzieren lassen (Sonderfälle von Gleichungen dritten und vierten Grades);
Definieren von "Nullstelle einer gebrochenen rationalen Funktion"; Übungen im Berechnen der Nullstellen gebrochener rationaler Funktionen;

Untersuchungen zu Definitionsbereich und Wertebereich von Wurzelfunktionen; Bestimmen der Nullstellen von Wurzelfunktionen, dabei Übungen im Lösen von Wurzelgleichungen (die mit einmaligem Quadrieren zu lösen sind);
Untersuchen des Verhaltens rationaler Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$;
Einführen von "Asymptote"; Übungen;
Einführen von "Polstelle einer gebrochenen rationalen Funktion";
Übungen im Berechnen der Polstellen gebrochener rationaler Funktionen und im Untersuchen des Verhaltens einer Funktion in einer Umgebung der Pole.
Definieren von "lokales Maximum (Minimum) einer Funktion f an einer Stelle x_0; Einführen von "globales Maximum (Minimum) einer Funktion f in einem Intervall I".
Satz über die notwendige Bedingung $f'(x_0) = 0$ für lokale Extrema (mit Beweis); Nachweis, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt; Übungen im Berechnen möglicher lokaler Extrema. Folgern des Satzes von ROLLE aus der notwendigen Bedingung für lokale Extrema; Mittelwertsatz der Differentialrechnung (als Verallgemeinerung des Satzes von ROLLE, ohne Beweis).

Zusammenhang von Monotonie und 1. Ableitung einer in einem Intervall I differenzierbaren Funktion (mit Beweis) und Satz über die (notwendige und) hinreichende Bedingung

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$

für die Existenz eines lokalen Maximus (Minimums) (mit Beweis) als Folgerungen aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Beispiele für Kurvendiskussionen von rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten; Beispiele für das Lösen entsprechender Extremwertaufgaben, dabei Wiederholen vor allem geometrischer Sätze, die für die Ansatzfindung und für Nebenbedingungen benötigt werden; Erarbeitung von Algorithmen bzw. heuristischen Regeln für Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben;
Übungen im Durchführen von Kurvendiskussionen und im Lösen von Extremwertaufgaben.

3.4. Stammfunktionen — 5 Stunden

Ermitteln von Funktionen aus ihren gegebenen 1. Ableitungen (Umkehrung der Differentiation) als einführende Problemstellung, Definieren von "Stammfunktion"; Übungen im Ermitteln von Stammfunktionen zu gegebenen einfachen rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten.
Wiederholen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; die sich daraus ergebenden Folgerungen:

- Eine Funktion ist genau dann konstant, wenn für jedes x aus dem Definitionsbereich der Funktion die 1. Ableitung Null ist (mit Beweis);
- Funktionen, deren 1. Ableitungen in einem abgeschlossenen Intervall übereinstimmen, unterscheiden sich nur um einen konstanten Summanden c (mit Beweis);
- Ist F eine Stammfunktion von f, so ist durch $F + c$ ($c \in R$) die Menge aller Stammfunktionen von f gegeben.

Geometrische Bedeutung der Konstanten c;
Übungen: Ermitteln von Stammfunktionen ganzer rationaler sowie ausgewählter gebrochener rationaler Funktionen und Wurzelfunktionen; dabei auch Ermitteln der Stammfunktionen $F(x) \pm G(x)$ zu gegebenen Funktionen $f(x) \pm g(x)$ und Bestimmen der Stammfunktion F(x) der Funktion
$f(x) = k \cdot x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -1$, $k \in R$, $k \neq 0$).

3.5. Übungen und Anwendungen — 13 Stunden

Schwerpunkte:
- Durchführen von Kurvendiskussionen für rationale Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten;
- Lösen von Extremwertaufgaben (aus Bereichen der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik, Ökonomie und Landesverteidigung);
- Lösen von weiteren einfachen Aufgaben, bei denen die vermittelten Begriffe, Sätze und Verfahren der Differentialrechnung anzuwenden sind.

4. Integralrechnung 24 Stunden

Das Hauptziel dieses Stoffgebietes besteht darin, den Schülern feste Kenntnisse über den grundlegenden Begriff "Bestimmtes Integral" sowie über Zusammenhänge zwischen der Integral- und der Differentialrechnung zu vermitteln und sie zu befähigen, bestimmte Integrale ausgewählter rationaler Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie Flächeninhalte von nicht allseitig geradlinig begrenzten Figuren zu berechnen.

Im Zusammenhang mit der Behandlung dieses Stoffes ist verstärkt an der Ausbildung von Fähigkeiten zur Begriffsbildung und zum Definieren zu arbeiten. Besonders wichtig ist auch das Wiederholen und Wiederverwenden des Wissens und Könnens hinsichtlich Grenzwerte von Zahlenfolgen, aus der Differentialrechnung und des Rechnens mit reellen Zahlen.

Im ersten Stoffabschnitt wird zur Vorbereitung des Begriffs des bestimmten Integrals zunächst das Berechnen des Flächeninhalts von Vielecken wiederholt und dann zum Problem der Berechnung des Flächeninhalts von nicht allseitig geradlinig begrenzten Figuren übergegangen, was seinerseits zur Motivation für die Behandlung des Begriffs des bestimmten Integrals dient. Dabei sollen die Schüler zunächst die Ermittlung des Flächeninhalts eines Flächenstücks unter einer Parabel mittels Folgen von Ober- und Untersummen untersuchen. Erst danach ist das bestimmte Integral einer Funktion f in einem Intervall $\langle a, b\rangle$ zu definieren, und es ist die Existenz des bestimmten Integrals für monotone Funktionen zu beweisen und die für beliebige stetige Funktionen mitzuteilen.
Entsprechend diesem Vorgehen ist dann die vorgesehene Erweiterung bzw. Verallgemeinerung des Begriffs des bestimmten Integrals und seiner Anwendungsmöglichkeiten zu behandeln.

Im zweiten Stoffabschnitt ist, ausgehend von inhaltlichen Überlegungen zum bestimmten Integral als Funktion der oberen Grenze, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu gewinnen und zu beweisen, und es ist der damit gegebene Zusammenhang zwischen der Integral- und Differentialrechnung herauszuarbeiten. Insbesondere sind die Schüler zu der Einsicht zu führen, daß sie unter Anwendung ihrer Kenntnisse über Stammfunktionen ein bestimmtes Integral einer stetigen Funktion ohne Grenzwertermittlung berechnen können. Sie sollen erste Fertigkeiten im Berechnen bestimmter Integrale unter Anwendung des Hauptsatzes und der behandelten Integrationsregeln erwerben.

Im dritten Stoffabschnitt wird hauptsächlich das Ziel verfolgt, die Fertigkeiten im Ermitteln von Stammfunktionen sowie im Berechnen von bestimmten Integralen und vor allem von Flächeninhalten weiter auszubilden. Dabei ist intensiv mit den vermittelten Regeln zu arbeiten und auf die Unterscheidung "bestimmtes Integral" und "Flächeninhalt" zu achten. Das Integrationsverfahren mittels linearer Substitution ist anzuwenden. Ferner kommt es darauf an, den Schülern anhand ausgewählter Beispiele zu zeigen, wie diese für sie neuen Begriffe und Methoden in der Physik angewendet werden.

Die abschließenden Übungen und Anwendungen sind auf das Festigen des Wissens und Könnens hinsichtlich Stammfunktionen und deren Ermittlung, der behandelten Regeln aus der Integralrechnung sowie der Berechnung von Flächeninhalten zu konzentrieren. Dabei sind die Schüler daran zu gewöhnen, daß sie selbständig auf das Erfülltsein notwendiger Bedingungen wie Stetigkeit des Integranden oder Nullstellenfreiheit im Integrationsintervall bei Flächenberechnungen achten.

4.1. Bestimmtes Integral — 6 Stunden

Berechnen des Inhalts von n-Ecksflächen; das Problem des Flächeninhalts von nicht allseitig geradlinig begrenzten Figuren und seiner Berechnung; Ermitteln der ersten Glieder von Folgen von Ober- und Untersummen bei einer speziellen Zerlegung (fortgesetzte Halbierung eines Ausgangsintervalls);
Definieren von "bestimmtes Integral einer Funktion f in einem Intervall $\langle a, b \rangle$" mit Hilfe des gemeinsamen Grenzwertes von Ober-

und Untersummen bei der benutzten speziellen Zerlegung; Einführen von " $\int$ " und Definieren des Flächeninhalts mit Hilfe des bestimmten Integrals; Beweisen der Existenz des bestimmten Integrals für monotone Funktionen, Mitteilen des Satzes über die Existenz des bestimmten Integrals für beliebige stetige Funktionen; einfache Beispiele zur Berechnung des bestimmten Integrals; Erläutern eines Beispiels für eine nichtintegrierbare Funktion.
Erweitern des Integralbegriffs $\int_a^b f(x)\,dx$ für $a = b$ und für $a > b$; der Satz
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $(c \in \langle a, b\rangle)$ (ohne Beweis);
dazu Beispiele und Übungen.

4.2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — 6 Stunden

Bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze; der damit gegebene Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (mit Beweis); Einführen von "unbestimmtes Integral"; die Regeln

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$

- $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ $(k \in R,\ k \neq 0)$ (ohne Beweis).

Ermitteln einer Stammfunktion zu einer Potenzfunktion, die mit der linearen Funktion $z(x) = ax + b$ verkettet ist (Verfahren der Integration durch lineare Substitution).
Übungen: Anwenden des Hauptsatzes zur Berechnung bestimmter Integrale.

4.3. Flächeninhaltsberechnungen — 6 Stunden

Anwenden des bestimmten Integrals bei Flächeninhaltsberechnungen; dabei auch Anwenden des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution. Inhaltsberechnungen für Flächen, die

. oberhalb der x-Achse liegen,
. unterhalb der x-Achse liegen,
. teilweise oberhalb, teilweise unterhalb der x-Achse liegen,
. von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen sind,
. von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen sind, wobei die Graphen innerhalb des Integrationsintervalls noch einen weiteren Schnittpunkt haben;

weitere Anwendungsbeispiele (z. B. Berechnen der physikalischen Arbeit bei veränderlicher Kraft).

4.4. Übungen und Anwendungen 6 Stunden

Schwerpunkte:
- Ermitteln von Stammfunktionen von ganzen rationalen, von ausgewählten gebrochenen rationalen Funktionen, von Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten;
- Berechnen bestimmter Integrale und von Flächeninhalten.

KLASSE 12

1. Vektorrechnung und analytische Geometrie — 72 Stunden

In diesem Stoffgebiet werden hauptsächlich zwei miteinander verbundene Zielsetzungen verfolgt. Erstens geht es darum, daß die Schüler den Begriff des Vektors, die zu behandelnden Darstellungsformen für Vektoren und Rechenoperationen mit Vektoren sowie die für diese Rechenoperationen gültigen Gesetze und Regeln inhaltlich verstehen und das Rechnen mit Vektoren auf dieser Grundlage sicher ausführen lernen. Zweitens sollen die Schüler befähigt werden, Begriffe, Sätze und Verfahren aus der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie der Geraden und des Kreises auf geometrische Objekte sicher und rationell anzuwenden. Dabei sind die Anwendungen der Vektorrechnung auf geometrische sowie auf naturwissenschaftliche und technische Aufgabenstellungen und die der analytischen Geometrie auf geometrische Aufgabenstellungen in einem solchen Umfang zu behandeln, daß die Schüler einfache Aufgaben dieser Art selbständig lösen können.
Zugleich ist dieses Stoffgebiet aber auch für die Festigung des geometrischen Wissens und Könnens insgesamt sowie für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens, der Fertigkeiten im Rechnen mit reellen Zahlen, im Arbeiten mit Winkelfunktionen, im Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, im Verwenden von Tafeln und Formelsammlungen, für die Weiterentwicklung des Definitions- und Beweisverständnisses und der Fähigkeiten im selbständigen Führen von Beweisen zu nutzen.

Im ersten Stoffabschnitt ist zunächst die Verschiebung als umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich zu wiederholen und mittels gerichteter, paarweise paralleler Strecken gleicher Länge und gleichen Richtungssinns bzw. durch Verschiebungspfeile zu beschreiben. Die Menge dieser gerichteten Strecken bzw. Verschiebungspfeile wird als Vektor bezeichnet. Sodann werden die entsprechenden Betrachtungen für Verschiebungen im dreidimensionalen Raum durchgeführt.

Auch bei der anschließenden Einführung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion von Vektoren sowie der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl und der dafür gültigen Rechengesetze und -regeln ist von dem anschaulichen Beispiel der Verschiebung Gebrauch zu machen, um den Schülern das inhaltliche Verständnis dieser für sie neuen Operationen und ihrer Eigenschaften zu erleichtern. Welche der Rechenregeln bewiesen werden, ist je nach Klassensituation zu entscheiden. Bei den Übungen ist vorwiegend geometrisch-konstruktiv aber auch rechnerisch zu arbeiten, indem die Koordinatenmethode zu verwenden ist. Dabei ist zu beachten, daß diese Übungen der Vertiefung des inhaltlichen Verständnisses der genannten Operationen mit Vektoren dienen, ohne daß Fertigkeiten im selbständigen Lösen solcher Aufgaben angestrebt werden, da im folgenden Stoffabschnitt rationellere Verfahren behandelt werden. Bei jeder sich bietenden Gelegenheit ist das Wissen und Können der Schüler aus der Geometrie einzubeziehen, um es auf diese Weise zu reaktivieren und zu festigen. Dem gleichen Zweck dienen auch die abschließenden Anwendungen des Rechnens mit Vektoren beim Beweisen bekannter planimetrischer Sätze, wenn auch bei deren Durchführung sowie bei den einfachen physikalischen Anwendungen die Entwicklung von Fertigkeiten im rechnerischen und zeichnerischen Operieren mit Vektoren im Vordergrund steht.

Im zweiten Stoffabschnitt ist zunächst der Satz über die eindeutige Darstellbarkeit eines Vektors als Linearkombination zweier nichtparalleler, vom Nullvektor verschiedener Vektoren zu behandeln. Nach einigen geometrisch-konstruktiv durchgeführten Zerlegungen von Vektoren in Komponenten sind die entsprechenden Untersuchungen für den Raum vorzunehmen, wobei auf geeignete Veranschaulichung besonderer Wert zu legen ist. Alle nachfolgenden Betrachtungen zur Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren sind für jede Untersuchung zunächst für eine Ebene und dann sofort für den dreidimensionalen Raum durchzuführen. Dabei ist überall an entsprechende Vorkenntnisse der Schüler anzuknüpfen und ihnen in Übungen ausreichend Gelegenheit zu geben, auch die Aufgaben aus der räumlichen Geometrie mit zunehmender Selbständigkeit zu lösen.

Abschließend sind noch einmal jene für die Menge der Verschiebungen und für die Menge der an einem Punkt angreifenden Kräfte gültigen Gesetze zusammenzustellen, die für die dann vorzunehmende Definition des Vektorraumes und des allgemeinen Vektorbegriffs benutzt werden. Um diese Verallgemeinerung zu motivieren und um das Verständnis dieser Begriffe zu vertiefen, ist auch ein Beispiel für eine Menge von Vektoren zu betrachten, die sich nicht durch Pfeile darstellen lassen.

Mit der Behandlung des dritten Stoffabschnittes soll vor allem ein wesentlicher Beitrag zur Verwirklichung der oben angeführten zweiten Zielstellung geleistet werden, indem die bisher erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie der Geraden Anwendung finden. Hier sind fast alle Überlegungen zunächst für den dreidimensionalen Raum durchzuführen. Die entsprechenden Betrachtungen für eine Ebene sollen die Schüler dann selbständig vornehmen. Lediglich die Behandlung parameterfreier Gleichungen der Geraden erfolgt ausschließlich in der Ebene. In diesem Stoffabschnitt sind intensive und umfangreiche Übungen erforderlich, um bei den Schülern volles Verständnis für das Vorgehen beim Lösen solcher Probleme wie Ermittlung von Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden im Raum und in einer Ebene sowie zwischen Geraden und Koordinatenebenen und Fertigkeiten in deren selbständigem Lösen zu erreichen. Dabei ist dem möglichst selbständigen Bearbeiten spezieller Aufgaben mehr Aufmerksamkeit zu schenken als allgemeinen Untersuchungen. Zugleich sind diese Übungen zu nutzen, um Fertigkeiten im Aufstellen von Parametergleichungen für Geraden, im Berechnen von Schnittpunkten und Spurpunkten, im Lösen dabei vorkommender Gleichungssysteme sowie im Aufstellen und Umformen der behandelten parameterfreien Gleichungen von Geraden in einer Ebene zu erreichen. Besondere Aufmerksamkeit ist auch der weiteren Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten im zeichnerischen Darstellen geometrischer Objekte im dreidimensionalen Raum zu widmen.

Im vierten Stoffabschnitt ist vor allem an der Verwirklichung des ersten der eingangs genannten Hauptziele zu arbeiten, indem die Schüler mit dem Begriff des Skalarprodukts sowie seinen wichtigsten Eigenschaften vertraut gemacht werden und sich Fertigkeiten im Berechnen von Skalarprodukten gegebener Vektoren aneignen. Dem dient auch noch die Anwendung des Skalarproduktes beim Beweisen planimetrischer Sätze, die mit zunehmender Selbständigkeit der Schüler beim Finden eines Beweisansatzes und im Durchführen des gesamten Beweises erfolgen soll. Nach der Herleitung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes bildet dessen Anwenden auf das Lösen der nachfolgend unter 1.4. angegebenen Aufgabenklassen einen weiteren Schwerpunkt. Dabei kommt es weniger darauf an, deren allgemeine Lösungen zu behandeln, als den Schülern Gelegenheit zu geben, spezielle Aufgaben in größerer Anzahl und mit zunehmender Selbständigkeit zu lösen, um auf diese Weise eine weitere Festigung des erworbenen Wissens und Könnens aus der Vektorrechnung insgesamt zu erreichen. Die dann noch zu behandelnden weiteren Anwendungen des Skalarproduktes sollen dazu dienen, seine große Anwendungsbreite zu demonstrieren und im folgenden Stoffgebiet benötigte Kenntnisse (Additionstheoreme für Winkelfunktionen) bereitzustellen. Fertigkeiten im selbständigen Lösen damit zusammenhängender Aufgaben werden hier nicht angestrebt.

Bei der Behandlung des <u>fünften Stoffabschnittes</u> geht es darum, sowohl das inzwischen erworbene Wissen und Können aus der Vektorrechnung als auch das aus der analytischen Geometrie der Geraden auf den Kreis und auf Untersuchungen zu Kreis und Gerade anzuwenden. Begriffe, Sätze und Verfahren der Vektorrechnung sollen vor allem beim Herleiten allgemeiner Gleichungen für den Kreis und für die Tangente in einem Punkt des Kreises genutzt werden, während bei der Behandlung der anderen Stoffe vorrangig die Koordinatenmethode Anwendung finden soll. Auf diese Weise ist zu sichern, daß vielfältig mit parameterfreien Geradengleichungen sowie mit den Kreisgleichungen in Koordinatendarstellung gearbeitet und das Lösen von Gleichungssystemen, die aus quadratischen oder linearen Gleichungen bestehen, intensiv geübt wird. Auch auf das Wiederholen von elementaren geometrischen Kenntnissen über den Kreis sowie über Kreis und Gerade ist besonderer Wert zu legen. Dazu sind auch die abschließenden Übungen im Lösen komplexer Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Kreises und der Geraden zu nutzen.

Den Schülern ist bei deren Lösung jedoch grundsätzlich freizustellen, ob sie mit Verfahren der Vektorrechnung oder der Koordinatengeometrie arbeiten.

Die abschließenden Übungen und Anwendungen sind vor allem auf das selbständige Lösen komplexer Aufgaben aus der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie der Geraden und des Kreises einschließlich ihrer Anwendungsgebiete zu konzentrieren. Dabei bilden selbständige Ansatzfindung, rationelles Arbeiten mit der Formelsammlung, Übungen in der mathematisch richtigen, übersichtlichen, sauberen und exakten Niederschrift der Lösungswege sowie die Nutzung vorhandener Kontrollmöglichkeiten des gefundenen Ergebnisses auf seine Richtigkeit wichtige Schwerpunkte. Im Zusammenhang mit den Anwendungen aus der Landesverteidigung ist herauszuarbeiten, daß die Mathematik für die Stärkung der Verteidigungsbereitschaft des gesamten sozialistischen Lagers von erheblicher Bedeutung ist und daß auf diese Weise wesentliche Voraussetzungen für die Erhaltung und Festigung des Friedens geschaffen werden.

1.1. Verschiebungen und Vektoren — 12 Stunden

Wiederholen von "Verschiebung" als Abbildung der Ebene auf sich und deren Beschreibung durch
- die Menge der geordneten Punktepaare (Originalpunkt; Bildpunkt),
- die Menge der gerichteten Strecken zwischen Original- und zugeordneten Bildpunkten,
- die Menge der Verschiebungspfeile;

dabei Wiederholen von "Verschiebungsweite" und "Richtungssinn" sowie der gemeinsamen Eigenschaften der gerichteten Strecken bzw. Verschiebungspfeile, die eine Verschiebung beschreiben; Einführen von "Vektor" und von "Betrag eines Vektors" sowie der entsprechenden Symbole.
Verschiebung als Abbildung des dreidimensionalen Raumes auf sich und deren Beschreibung mittels geordneter Punktepaare, gerichteter Strecken, Verschiebungspfeilen bzw. eines Vektors; Übungen zum Festigen der wiederholten und eingeführten Begriffe.

Wiederholen der Nacheinanderausführung von Verschiebungen in einer Ebene und des Satzes, daß die Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen wieder eine Verschiebung ist; Nacheinanderausführung von Verschiebungen im Raum; Existenz und Eindeutigkeit der resultierenden Verschiebung; Interpretation der Nacheinanderausführung von Verschiebungen als Addition von Vektoren; Einführen von "Summe von Vektoren"; Kommutativität und Assoziativität der Addition von Vektoren (mit Beweis), weitere Regeln für das Addieren von Vektoren, dabei Einführen von "Nullvektor" und der entsprechenden Symbole; Übungen im geometrisch-konstruktiven und rechnerischen Addieren von Vektoren, dabei auch Wiederholen und Anwenden von Sätzen der ebenen Trigonometrie.

Überlegungen zur Existenz und Eindeutigkeit eines Vektors $\vec{x}$ zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so daß $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$; Definieren von "Differenz zweier Vektoren"; Einführen der dazugehörigen Symbole sowie von Regeln für die Subtraktion von Vektoren (zum Teil mit Beweis); Übungen im geometrisch-konstruktiven Addieren und Subtrahieren von Vektoren; Anwendungen auf einfache physikalische und technische Sachverhalte (Kräfte, die in einem Punkt angreifen; Geschwindigkeiten).
Multiplizieren eines Vektors mit einer reellen Zahl; Definieren von "Produkt eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r". Einführen von "zueinander parallele Vektoren" (mit gleichem bzw. entgegengesetztem Richtungssinn); Rechenregeln sowie die beiden Distributivgesetze und das Assoziativgesetz (zum Teil mit Beweis); Übungen zur Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen unter Einbeziehung der Addition und Subtraktion von Vektoren; Gleichungen zwischen Vektoren (bzw. zwischen deren Beträgen) und deren äquivalente Umformung durch Anwendung der behandelten Gesetze und Regeln für das Rechnen mit Vektoren; Anwenden des Rechnens mit Vektoren und ihren Beträgen beim Lösen einfacher planimetrischer Beweisaufgaben.

1.2. Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren — 12 Stunden

Einführende Problemstellung: Beziehung zwischen drei nicht paarweise parallelen Vektoren in einer Ebene, Einführen von "Linearkombination zweier nichtparalleler Vektoren"; Satz über die eindeutige Darstellbarkeit eines Vektors als Linearkombination zweier nichtparalleler Vektoren (mit Beweis); Interpretation dieses Satzes als Zerlegung eines gegebenen Vektors nach zwei gegebenen nichtparallelen Vektoren; Einführen von "Basis der Menge der Vektoren einer Ebene", von "Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis" sowie von "Winkel zwischen zwei Vektoren"; Übungen: Zerlegen (geometrisch-konstruktiv und rechnerisch) eines gegebenen Vektors in zwei Komponenten bei gegebener Basis; Zerlegen einer Kraft in zwei Komponenten, die mit der Kraft in derselben Ebene liegen; dabei auch Wiederholen und Anwenden von Sätzen der ebenen Trigonometrie.

Satz über die eindeutige Darstellbarkeit eines Vektors im Raum als Linearkombination dreier nicht komplanarer Vektoren (ohne Beweis); Zerlegen eines Vektors nach diesen Vektoren.

Definieren von "Einheitsvektor", Einführen von "orthonormierte Basis $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$" und von "Kartesisches Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$"; Einführen von "Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$" und von "Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP}$ bezüglich der orthonormierten Basis $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$".

Zusammenhang zwischen dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ und den Koordinaten des Punktes P im Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ und im Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; Beziehung zwischen den Koordinaten eines Punktes P und dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ in einer Ebene und im Raum (mit Beweis); Wiederholen trigonometrischer Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck und Herleiten der Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes P, dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ und dem Winkel zwischen dem Basisvektor $\vec{i}$ und dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$; Herleiten der Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes P, dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ und den Winkeln $\sphericalangle(\vec{k}; \overrightarrow{OP})$ und $\sphericalangle(\vec{i}, x\vec{i} + y\vec{j})$; dazu entsprechende Übungen und einfache Anwendungen wie Berechnen

- des Betrages eines in Koordinatendarstellung gegebenen Vektors,
- des Abstandes zweier Punkte, die durch ihre Koordinaten gegeben sind.

Wiederholen von Eigenschaften der Menge der Verschiebungen in einer Ebene und im Raum sowie der Menge der in einem Punkt angreifenden Kräfte; Definieren von "Vektorraum" und "Vektoren"; Beispiel für eine Menge von Vektoren, die nicht durch Pfeile darstellbar sind.

Anwendungsgebieten Naturwissenschaften, Technik und Landesverteidigung, bei denen Gleichungen für geometrische Objekte aufzustellen und

- Berechnungen von Koordinaten von Punkten, von Winkeln zwischen Vektoren bzw. Geraden, von Streckenlängen und Flächeninhalten u.ä.,
- Untersuchungen von Lagebeziehungen (insbesondere auf Orthogonalität und Parallelität) für Geraden bzw. Vektoren,
- einfache Beweise (vor allem geometrischer Aussagen)

durchzuführen sind.

2. Weitere Klassen nichtrationaler Funktionen; ihre Differentiation und Integration — 58 Stunden

Mit der Behandlung dieses Stoffgebietes wird der Analysislehrgang abgeschlossen. Es sind zwei eng miteinander verflochtene Hauptzielsetzungen zu realisieren: Einmal geht es um die Wiederholung, Anwendung und Systematisierung des in Klasse 11 und früher erworbenen Wissens und Könnens, insbesondere aus der Analysis. Zum anderen ist ein sicheres Wissen und Können hinsichtlich der hier zu behandelnden Klassen von Funktionen sowie ihrer Differentiation und Integration zu erreichen.
Der erstgenannten Zielsetzung trägt der gewählte Aufbau vor allem dadurch Rechnung, daß im ersten Stoffabschnitt die Reaktivierung von früher erworbenem Wissen und Können vor allem durch seine bewußte Anwendung beim Lösen von Aufgaben erfolgt und an vielen weiteren Stellen explizite und immanente Wiederholungen - insbesondere der grundlegenden Begriffe, Verfahren und Regeln aus der Differential- und Integralrechnung - vorzunehmen sind.
Sowohl bei den Wiederholungen als auch bei der Behandlung vieler neuer Stoffe sind hohe Anforderungen an die Selbständigkeit der Schüler zu stellen, um auf diese Weise sowohl die erforderliche Solidität und Dauerhaftigkeit ihres mathematischen Wissens und Könnens zu erreichen als auch zur Weiterentwicklung ihrer Fähigkeiten zur Anwendung fachtypischer wissenschaftlicher Denk- und Arbeitsweisen beizutragen. Dabei sind bei der Behandlung der ein-

zelnen Stoffabschnitte spezifische Schwerpunktbildungen erforderlich, auf die nachstehend hingewiesen wird.

Im <u>ersten Stoffabschnitt</u> sollen im Analysislehrgang der Klasse 11 erworbene Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten vor allem dadurch reaktiviert und gefestigt werden, daß die Schüler möglichst selbständig solche Aufgaben lösen, bei denen sie nicht nur von vermittelten Verfahren Gebrauch machen müssen, sondern auch grundlegende Begriffe und deren Definition sowie wichtige Sätze anzuwenden haben. Die Auswahl der Aufgaben ist so zu treffen, daß bei ihrer Lösung vorrangig jene Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten reaktiviert werden, die bei der Behandlung der beiden folgenden Stoffabschnitte unmittelbar benötigt werden.

Im <u>zweiten Stoffabschnitt</u> ist vom Problem der Bestimmung einer Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ auszugehen und zunächst zu zeigen, daß und wie etwa $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ näherungsweise bestimmt werden kann. Es ist zu begründen, daß eine solche Stammfunktion existiert. Sodann sind weitere Eigenschaften dieser Stammfunktion $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ von $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ herzuleiten und mit denen der bekannten Logarithmusfunktionen mit den Basen 10 bzw. 2 zu vergleichen. Aus dem Ergebnis des Vergleiches ist die Berechtigung abzuleiten, die gesuchte Stammfunktion als Logarithmusfunktion (mit zunächst noch unbekannter Basis) zu bezeichnen. Mittels der hergeleiteten Beziehung

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

ist die gesuchte Basis e unter Verwendung des Taschenrechners näherungsweise zu bestimmen. Die damit erhaltene Beziehung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

ist sodann für die Differentiation von Funktionen der Form

$$y = a \cdot \ln (bx + c) + d \quad (x > 0;\ a, b, c, d \in R;\ b > 0;\ bx + c > 0)$$

zu nutzen.

Nach Wiederholung des Begriffs der zueinander inversen Funktionen ist die Exponentialfunktion $g(x) = e^x$ einzuführen. Auch hier sind die bestehenden Gemeinsamkeiten mit den Exponentialfunktionen $y = 2^x$ und $y = 10^x$ durch Vergleichen ihrer Eigenschaften herauszuarbeiten, und es sind unter weitgehender Nutzung bereits vorhandener Kenntnisse die 1. Ableitungen und Stammfunktionen von

$g(x) = e^x + b$ bzw. $h(x) = a \cdot e^{kx} + b$ $(a, b, k \in R)$

zu ermitteln. Mittels der Beziehung $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ ist es dann möglich, die 1. Ableitung und eine Stammfunktion von $y = a^x$ in relativ selbständiger Schülerarbeit zu gewinnen. Im Zusammenhang mit dem Durchführen von Kurvendiskussionen, dem Lösen von Extremwertaufgaben und dem Berechnen von Flächeninhalten ist der Entwicklung von Fertigkeiten im Lösen einfacher Exponentialgleichungen und logarithmischer Gleichungen besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Bei den Anwendungen dieser Funktionen ist auch Wert auf die Erfassung und Beschreibung von Prozessen in der Natur und Ökonomie zu legen.

Im dritten Stoffabschnitt ist bei der erforderlichen gründlichen Wiederholung der Winkelfunktionen und ihrer wesentlichen Eigenschaften sowie ihrer Graphen und vor allem der Beziehungen zwischen Winkelfunktionen besonders auf die weitere Befähigung der Schüler zur Arbeit mit der Zahlentafel und mit der Formelsammlung zu achten. Vor dem Mitteilen des Grenzwertes $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ sind einige Werte dieses Quotienten für einzelne der eine Nullfolge bildenden x zu ermitteln. Schon bei der Ermittlung der 1. Ableitung von Winkelfunktionen sowie bei der Bestimmung von Stammfunktionen zu Winkelfunktionen und erst recht bei den Übungen zur Differentiation und Integration von Winkelfunktionen ist ein möglichst selbständiges Arbeiten der Schüler anzustreben. Dies gilt auch für die Durchführung von Kurvendiskussionen und Flächeninhaltsberechnungen sowie für das Lösen von Extremwertaufgaben, die systematisch dazu genutzt werden müssen, das Lösen goniometrischer Gleichungen zu üben.

In den Übungen und Anwendungen sind die behandelten nichtrationalen Funktionen sowie ihre Differentiation und Integration zwar besonders, jedoch keineswegs ausschließlich zu berücksichtigen.

Vielmehr sind Inhalt und Aufbau dieser Übungen und Anwendungen so zu wählen, daß eine Gesamtwiederholung zur Analysis und auch eine knappe Wiederholung des Lösens von Anwendungsaufgaben aus der Kombinatorik und von Anwendungen des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion erfolgt.

2.1. Wiederholungen — 5 Stunden

Lösen von Aufgaben zum Stoff der Klasse 11, in denen die dort behandelten

- zentralen Begriffe und Sätze aus der Differential- und Integralrechnung,
- Differentiations- und Integrationsregeln,
- Kriterien und Verfahren für Nullstellen-, Extremstellen- und Polstellenbestimmung sowie Untersuchungen zu möglichen Definitions- und Wertebereichen,
- Verfahren für Flächeninhaltsberechnungen und für das Aufstellen von Tangentengleichungen

auf rationale Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten anzuwenden sind.

2.2. Logarithmus- und Exponentialfunktionen; ihre Differentiation; Integration der Exponentialfunktionen — 15 Stunden

Wiederholung: Stammfunktion, bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze.
Das Problem der Ermittlung einer Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x>0)$; näherungsweise Bestimmung des Inhalts eines Flächenabschnittes unter der Kurve $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$; Nachweis der Existenz der Stammfunktion $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$; Begründen, daß $F(x)$ monoton steigend ist; Untersuchungen zum Wertebereich und zur Stetigkeit von $F(x)$ sowie Nachweis, daß für $F(x)$ die Beziehungen $F(1) = 0$, $F(u \cdot v) = F(u) + F(v)$, $F(u^r) = r \cdot F(u)$ $(r \in N)$ gelten; Vergleich mit den Eigenschaften der bekannten Logarithmusfunktionen $y = \lg x$ und $y = \log_2 x$; Kennzeichnung der gesuchten Stammfunktion als log-

arithmetische Funktion und Ermitteln von Näherungswerten für ihre Basis e aus der für e gültigen Beziehung

$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ unter Verwendung des Taschenrechners.

Einführen von $F(x) = \ln x$ $(x > 0)$, der Taste $\boxed{\ln}$ des Taschenrechners sowie der Tastenfolge 1 $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ zur Bestimmung eines rationalen Näherungswertes für e. Verwenden von

$F'(x) = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

zum Differenzieren von Funktionen der Form

$y = a \cdot \ln (bx + c) + d$ $(x > 0;\ a, b, c, d \in R;\ b > 0;\ bx + c > 0)$.

Die Exponentialfunktion $g(x) = e^x$ als Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion $F(x) = \ln x$ $(x > 0)$; Ermitteln von Eigenschaften von $g(x) = e^x$; dabei auch Vergleichen mit Eigenschaften der Funktionen der Form

$y = a^x$ $(a = 2,\ a = 10)$.

Differentiation von $g(x) = e^x$ und von Funktionen der Form

$y = ae^{kx}$ $(a, k \in R)$;

dazu Übungen (vor allem Anwenden der Kettenregel).

Ermitteln von Stammfunktionen zu $g(x) = e^x$ und zu Funktionen der Form

$y = ae^{kx}$ $(a, k \in R)$;

dazu Übungen (vor allem Anwenden der Integration durch lineare Substitution).

Einführung beliebiger Exponentialfunktionen nach Herleitung von

$a^x = e^{x \cdot \ln a}$ $(a > 0;\ a \neq 1)$;

dazu Beispiele; 1. Ableitung und Stammfunktion von $y = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$; 1. Ableitung von $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$.

Anwenden der Logarithmus- und Exponentialfunktionen bei der Beschreibung von Vorgängen und Zusammenhängen in der Natur und der Ökonomie.

Übungen: Kurvendiskussionen für Logarithmus- und Exponentialfunktionen; Extremwertaufgaben; Flächeninhaltsberechnungen; Lösen von Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen.

2.3. Winkelfunktionen; ihre Differentiation und Integration — 20 Stunden

Wiederholen der Winkelfunktionen
($y = \sin x$, $y = a \cdot \sin bx$, $y = \cos x$, $y = \tan x$)
und ihrer Eigenschaften wie Definitions- und Wertebereiche, Nullstellen, Periodizität sowie wichtiger Beziehungen zwischen ihnen
(z. B. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, Additionstheoreme).
Die Funktionen
$y = a \sin (bx + c)$ $(a, b, c \in R)$
und
$y = a \cdot \cos (bx + c)$ $(a, b, c \in R)$;
Lösen einfachster goniometrischer Gleichungen.
Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ (ohne Beweis); die 1. Ableitung von $y = \sin x$; die Differentiation der Funktionen $y = \cos x$, $y = \tan x$ und weiterer Winkelfunktionen sowie von zusammengesetzten und verketteten Funktionen, die Winkelfunktionen enthalten; dazu Übungen.
Ermitteln von Stammfunktionen zu Sinus- und Kosinusfunktionen; dazu Übungen einschließlich des Anwendens der Integration durch lineare Substitution.

Übungen: Kurvendiskussionen für Winkelfunktionen; einfache goniometrische Gleichungen (mit nur einer Winkelfunktion, mit zwei Winkelfunktionen des gleichen Arguments und Spezialfälle von solchen, die zwei trigonometrische Funktionen mit zwei verschiedenen Argumenten enthalten und mittels Additionstheoremen umgeformt werden können); Extremwertaufgaben, Flächeninhaltsberechnungen.

2.4. Übungen und Anwendungen; Wiederholungen — 18 Stunden

Schwerpunkte:
- Untersuchen von Zahlenfolgen auf Monotonie und Konvergenz,
- Berechnung von Partialsummen von Zahlenfolgen,
- Lösen von Gleichungen (auch Wurzelgleichungen, einfache Exponential- und goniometrische Gleichungen),

- Durchführen von Kurvendiskussionen,
- Lösen von Extremwertaufgaben,
- Ermitteln von Stammfunktionen,
- Berechnen von Flächeninhalten (mit Hilfe der Integralrechnung),
- Lösen von weiteren Aufgaben wie Ermitteln von Tangentengleichungen, einfachen Beweis- und Anwendungsaufgaben unter Verwendung der behandelten Differentiations- und Integrationsregeln, Kriterien, Lösungs- und Beweisverfahren;
- Wiederholen des Lösens von Anwendungsaufgaben aus der Kombinatorik.

Kurzwort: 00 30 19 Lehrpl. Mathe. Abi.
ISBN 3-06-003019-7