

Aufgaben: Differentialrechnung Klasse 11

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$; $x \in \mathbb{R}$
 - a) An welchen Stellen hat $f(x)$ die Steigung 2?
 - b) Die Steigung von $f(x)$ an der Stelle $x = 1,5$ ist $-0,25$. Geben Sie ohne Rechnung eine weitere Stelle mit der gleichen Steigung an. Begründen Sie Ihre Vermutung.
 - c) In welchen Punkten hat $f(x)$ eine waagerechte Tangente? Geben Sie die Gleichung an.
 - d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an $f(x)$ im Ursprung.
 - e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(u | f(u))$.
 - f) Welche Gerade schneidet $f(x)$ in $N(3 | 0)$ senkrecht?
2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x - 1$; $x \in \mathbb{R}$
 - a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Punkte mit waagerechter Tangente und geben Sie die zugehörigen Steigungen an.
 - b) Die Tangenten an $f(x)$ in $x = 1$ und $x = -1$ schneiden sich auf der y-Achse. Begründen Sie diese Behauptung.
3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 2x^3$; $x \in \mathbb{R}$
 - a) Untersuchen Sie $f(x)$ auf Schnittpunkte mit der x-Achse und Punkte mit waagerechter Tangente.
 - b) $t(x)$ ist die Tangente an $f(x)$ in $P(1 | f(1))$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente. Ermitteln Sie die Schnittpunkte von $t(x)$ mit $f(x)$.
 - c) In welchem Punkt hat $f(x)$ eine Normale mit der Steigung $1/8$? Geben Sie die Gleichung der Normalen an.
4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $x \in \mathbb{R}$
 - a) Zerlegen Sie $f(x)$ in Linearfaktoren und zeichnen Sie den Graphen.
 - b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an $f(x)$ in $x = 2$ und zeichnen Sie diese Tangente in das Koordinatensystem von a).
 - c) Bestimmen Sie den Punkt $P(u | f(u))$ so, dass die Tangente an $f(x)$ in P parallel zur Tangente an $f(x)$ im Ursprung ist.
 - d) An welcher Stelle hat $f(x)$ die kleinste Steigung?
5. Ein Stein wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7 \text{ m/s}$ senkrecht nach oben geworfen. Das Weg- Zeit- Gesetz lautet:
 $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ mit $g = 10 \text{ m/s}^2$
 - a) Nach welcher Zeit t ist die Geschwindigkeit des Steins Null?
 - b) Berechnen Sie die maximale Steighöhe.

Lösungen

Aufgabe 1

- a) $f(x) = 1/9 x^3 - x$; $f'(x) = 1/3 x^2 - 1$
 Steigung bei x_0 hat den Wert 2 , $f'(x_0) = 2 \dots x_{1,2} = \pm 3$
- b) $f'(x) = 1/3 x^2 - 1$ ist eine Parabel und damit achsensymmetrisch
 aus $f'(1,5) = -0,25$ folgt $f'(-1,5) = -0,25$
- c) Eine waagerechte Tangenten an $f(x)$ liegt in den Punkten vor, wo die Steigung 0 ist
 $f'(x) = 0 = 1/3 x^2 - 1 \dots x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$
 $f(\sqrt{3}) = -2/3 \sqrt{3}$; $f(-\sqrt{3}) = 2/3 \sqrt{3} \dots P(\sqrt{3} \mid -2/3 \sqrt{3})$; $Q(-\sqrt{3} \mid 2/3 \sqrt{3})$
 Die Tangenten sind Geraden, die parallel zur x-Achse verlaufen
 $t_1(x) = -2/3 \sqrt{3}$; $t_2(x) = 2/3 \sqrt{3}$
- d) $f'(x) = x^2/3 - 1 \dots t(x) = -x$
- e) Tangente in $P(u \mid f(u)) \dots f'(u) = 1/9 u^3 - u \dots t(x) = (u^2/3 - 1) x - 2/9 u^3$
- f) Gerade ist Normale in $N(3 \mid 0) \dots n(x) = -1/2 x + 3/2$

Aufgabe 2

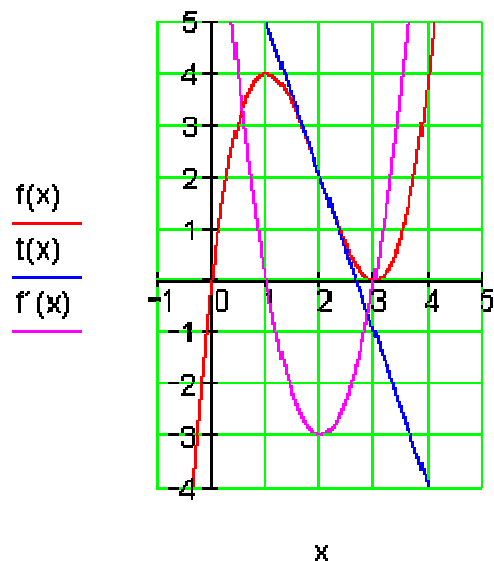
- a) $f'(x) = x^3 - 3/2 x$ Nullstellen 2 und -2
 Punkte mit waagerechter Tangente $P_1(0 \mid -1)$; $P_{2,3}(\pm \sqrt{3/2} \mid -25/16)$
- b) Tangente bei $x = 1$ und $x = -1$
 $t_1(x) = -1/2 x - 1$ $t_2(x) = 1/2 x - 1$ t_1, t_2 schneiden sich in $P(0 \mid -1)$

Aufgabe 3

- a) $f(x) = -x^4 + 2x^3$; $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
 Nullstellen: 0 (dreifach) und 2
 waagerechte Tangente: Berührungspunkte $P(0 \mid 0)$; $Q(3/2 \mid 27/16)$
- b) Tangente bei $x = 1$: $t(x) = 2x - 1$
 Schnittpunkte von $t(x)$ mit $f(x)$: $-x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$
 $P(1 \mid 1)$ ist doppelte Nullstelle, d.h. Polynomdivision
 $(-x^4 + 2x^3 - 2x + 1) : (x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 1$
 mit Punkt $Q(-1 \mid -3)$ als zweiter Schnittpunkt von $f(x)$ und $t(x)$
- c) Steigung der Normalen ist $1/8$
 $x = 2$ ist eine Lösung von $-4x + 6x^2 + 8 = 0$ (Probieren!), keine weiteren Lösungen
 $n(x) = 1/8 x - 1/4$

Aufgabe 4

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$
 $P(0 \mid 0)$, $Q(3 \mid 0)$ Berührungspunkt
- b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $x_0 = 2$
 Tangente $t(x) = -3x + 8$



c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Die Tangente im Ursprung hat die Steigung

$$f'(0) = 9$$

Die gleiche Steigung hat jede dazu parallele Tangente,

also auch die durch $P(u | f(u))$

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0; u_2 = 4$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0 | 0)}}$$

$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4 | 4)}}$$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x)$ ist die Steigungsfunktion von $f(x)$.

das ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Deren Minimum ist ihr Scheitelpunkt,

dort hat $f'(x)$ eine waagerechte Tangente.

Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

An der Stelle $x = 2$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.

$f(2) = 2 \Rightarrow$ In $P(2 | 2)$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.

Sie hat dort den Wert $f(2) = -3$

Aufgabe 5

a) $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$ mit $g = 10 \frac{m}{s^2}$ $v_0 = 7 \frac{m}{s}$

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7 \text{ s}$$

Nach 0,7 s hat der Stein eine Geschwindigkeit von $v(t) = 0 \text{ m/s}$

b) Die maximale Steighöhe:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt + v_0$$
 ist eine nach unten geöffnete Parabel,

deren Scheitel beschreibt die maximale Wurfhöhe.

Bedingung für Scheitel:

$$s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,7 \text{ s siehe Teil a)}$$

Maximale Höhe: $s(0,7) = 2,45 \text{ m}$. Die maximale Steighöhe beträgt 2.45 m.