Aufgaben: Differentialrechnung Klasse 11

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1/9\, x^3 - x$; $x \in R$
   a) An welchen Stellen hat f(x) die Steigung 2?
   b) Die Steigung von f(x) an der Stelle x = 1,5 ist -0,25. Geben Sie ohne Rechnung eine weitere Stelle mit der gleichen Steigung an. Begründen Sie Ihre Vermutung.
   c) In welchen Punkten hat f(x) eine waagerechte Tangente? Geben Sie die Gleichung an.
   d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im Ursprung.
   e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im Punkt P (u | f(u)).
   f) Welche Gerade schneidet f(x) in N (3 | 0) senkrecht?

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4/4 - 3/4\, x - 1$; $x \in R$
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Punkte mit waagerechter Tangente und geben Sie die zugehörigen Steigungen an.
   b) Die Tangenten an f(x) in x = 1 und x = - 1 schneiden sich auf der y-Achse. Begründen Sie diese Behauptung.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 2\, x^3$; $x \in R$
   a) Untersuchen Sie f(x) auf Schnittpunkte mit der x - Achse und Punkte mit waagerechter Tangente.
   b) t(x) ist die Tangente an f(x) in P (1 | f(1)). Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente. Ermitteln Sie die Schnittpunkte von t(x) mit f(x).
   c) In welchem Punkt hat f(x) eine Normale mit der Steigung 1/8? Geben Sie die Gleichung der Normalen an.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6\, x^2 + 9\, x$; $x \in R$
   a) Zerlegen Sie f(x) in Linearfaktoren und zeichnen Sie den Graphen.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) in x = 2 und zeichnen Sie diese Tangente in das Koordinatensystem von a).
   c) Bestimmen Sie den Punkt P (u | f(u)) so, dass die Tangente an f(x) in P parallel zur Tangente an f(x) im Ursprung ist.
   d) An welcher Stelle hat f(x) die kleinste Steigung?

5. Ein Stein wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v0 = 7 m/s senkrecht nach oben geworfen. Das Weg- Zeit- Gesetz lautet:
$s(t) = v_0\, t - 1/2\, g\, t^2$ mit $g = 10\, m/s^2$
   a) Nach welcher Zeit t ist die Geschwindigkeit des Steins Null?
   b) Berechnen Sie die maximale Steighöhe.

Lösungen

Aufgabe 1

a) f(x) = 1/9 x³ - x ; f'(x) = 1/3 x² - 1
   Steigung bei x0 hat den Wert 2 , f'(x0) = 2 ... $x_{1,2}$ = ± 3

b) f'(x) = 1/3 x² - 1 ist eine Parabel und damit achsensymmetrisch
   aus f'(1,5) = -0,25 folgt f'(-1,5) = -0,25

c) Eine waagerechte Tangenten an f(x) liegt in den Punkten vor, wo die Steigung 0 ist
   f'(x) = 0 = 1/3 x² - 1 ... x1,2 = ±√3
   f(√3) = -2/3 √3 ; f(-√3) = 2/3 √3 ... P(√3 | -2/3 √3) ; Q(-√3 | 2/3 √3)
   Die Tangenten sind Geraden, die parallel zur x-Achse verlaufen
   t1(x) = -2/3 √3 ; t2(x) = 2/3 √3

d) f'(x) = x²/3 - 1 ... t(x) = -x

e) Tangente in P (u|f(u)) ... f'(u) = 1/9 u³-u ... t(x) = (u²/3-1) x - 2/9 u³

f) Gerade ist Normale in N(3 | 0) ... n(x) = -1/2 x + 3/2

Aufgabe 2

a) f'(x) = x³ - 3/2 x   Nullstellen 2 und -2
Punkte mit waagerechter Tangente   P1(0 | -1) ; P2,3 (± √(3/2) | -25/16)
b) Tangente bei x = 1 und x = -1
t1(x) = -1/2 x - 1   t2(x) = 1/2 x - 1   t1,t2 schneiden sich in P(0 | -1)

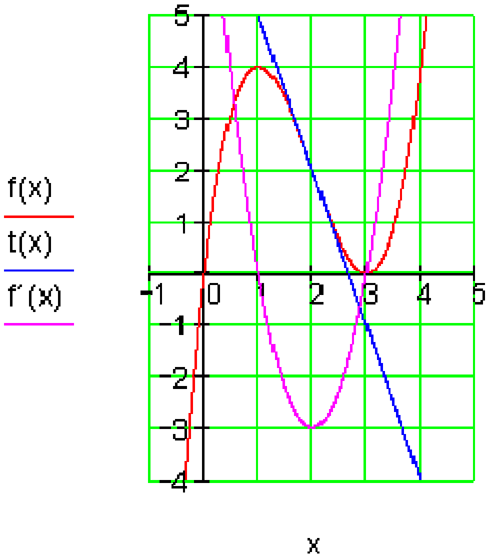
Aufgabe 3

a) f(x) = $-x^4$ + 2x³ ; f'(x) = -4x³ + 6x²
Nullstellen: 0 (dreifach) und 2
waagerechte Tangente: Berührpunkte P(0 | 0) ; Q(3/2 | 27/16)
b) Tangente bei x = 1: t(x) = 2x-1
Schnittpunkte von t(x) mit f(x) : $-x^4$ + 2x³ - 2x + 1 = 0
P(1 | 1) ist doppelte Nullstelle, d.h. Polynomdivision
        (-x4 + 2x³ - 2x + 1) : (x² - 2x + 1) = -x² + 1
mit Punkt Q(-1 | -3) als zweiter Schnittpunkt von f(x) und t(x)
c) Steigung der Normalen ist 1/8
x = 2 ist eine Lösung von -4x + 6x² + 8 = 0 (Probieren!), keine weiteren Lösungen
n(x) = 1/8 x - 1/4

Aufgabe 4

a) f(x) = x³ - 6x² + 9x = x (x-3)²
P(0 | 0) , Q(3 | 0) Berührungspunkt

b) f'(x) = 3 x² - 12x + 9 ; x_0 = 2
Tangente t(x) = -3x + 8



c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Die Tangente im Ursprung hat die Steigung

$f'(0) = 9$

Die gleiche Steigung hat jede dazu parallele Tangente,

also auch die durch $P(u \mid f(u))$

$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0;\ u_2 = 4$

$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0 \mid 0)}}$

$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4 \mid 4)}}$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x)$ ist die Steigungsfunktion von $f(x)$,

das ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Deren Minimum ist ihr Scheitelpunkt,

dort hat $f'(x)$ eine waagerechte Tangente.

Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

An der Stelle $x = 2$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.

$f(2) = 2 \Rightarrow$ In $\underline{\underline{P(2 \mid 2)}}$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.

Sie hat dort den Wert $f'(2) = -3$

Aufgabe 5

a) $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ $\quad v_0 = 7\,\frac{m}{s}$

$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$

$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0{,}7\ s$

Nach 0,7 s hat der Stein eine Geschwindigkeit von v(t) = 0 m/s

b) Die maximale Steighöhe:

$s(t) = -\frac{1}{2} gt + v_0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel,

deren Scheitel beschreibt die maximale Wurfhöhe.

Bedingung für Scheitel:

$s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}7\ s$ siehe Teil a)

Maximale Höhe: s(0,7) = 2,45 m. Die maximale Steighöhe beträgt 2.45 m.