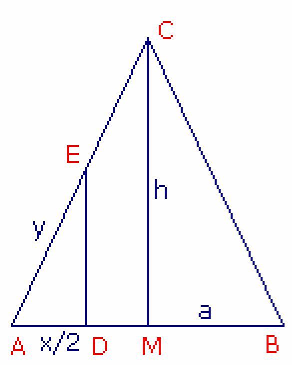


Extremwertaufgabe-Beispiel 1

Aufgabe: Einem gleichschenkligen Dreieck soll jenes Rechteck eingeschrieben werden, dass den größten Flächeninhalt besitzt

Hauptbedingung: $A = x \cdot y$ … Maximum

$\Delta AMC \approx \Delta ADE$ … nach Strahlensatz

$a/2 : h = AD : DE$

$a/2 : h = (a/2 - x/2) : y$

$a/2 \cdot y = h\,(a/2 - x/2)$

$y = (2h\,(a/2 - x/2))\,/a$

Nebenbedingung: $y = (h\,(a - x))\,/a$

$A = x \cdot (h\,(a - x))\,/a$

$f(x) = x \cdot (h\,(a - x))\,/a = h/a \cdot x(a-x)$

$f(x) = h/a\,(ax - x^2)$

$f'(x) = h/a\,(a - 2x)$

$h/a\,(a - 2x) = 0$

$a - 2x = 0$

$x = a/2$

Nebenbedingung: $y = (h\,(a - a/2))\,/a = (a\,h/2)\,/a = a\,h\,/(2a) = h/2$

$y = h/2$

Definitionsbereich $Db = [0;a]$

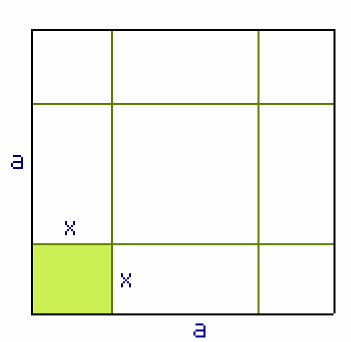
Wertebereich $Wb = [0;h]$

Hauptbedingung: $A = x \cdot y = a/2 \cdot h/2 = a\,h/4$

$f''(x) = h/a\,(-2)$

$f''(a/2) = -2h\,/a < 0 \Rightarrow$ Maximum

Antwort: Das Rechteck mit den Seiten a/2 ; h/2 hat den maximalen Flächeninhalt a h/4 .



Extremwertaufgabe-Beispiel 2

Aufgabe: Von einem quadratischen Blech (Seitenlänge = a) werden an den Ecken Quadrate ausgeschnitten, aus dem Rest wird eine Schachtel gebildet. Wie groß muss die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate sein, dass das Volumen der Schachtel maximal wird?

Hauptbedingung: $V = G \cdot h = (a - 2x)^2 \cdot x = f(x)$

Definitionsbereich $Db = [0;a/2]$

$f'(x) = 2(a - 2x)\,(-2)x + (a - 2x)^2 = -4x\,(a - 2x) + (a - 2x)^2$

$0 = -4x\,(a - 2x) + (a - 2x)^2$

$4x\,(a - 2x) = (a - 2x)^2 \quad | :(a - 2x)$

$a - 2x = 0$

$4x = a - 2x$

$a = 2x$

$6x = a$ … $x = a/2 \rightarrow$ Randextremum

$x = a/6$

$V = (a - a/3)^2 \cdot a/6 = (2a/3)^2 \cdot a/6 = (4a^2)/9 \cdot a/6$

$= 4a^3\,/54 = 2a^3\,/27$

$f''(x) = -4(a - 2x) + (-4x)\,(-2) + 2(a - 2x)\,(-2) = -8a + 24x$

$f''(a/6) = -8a + 24a/6 = -8a + 4a = -4a < 0 \Rightarrow$ Max.

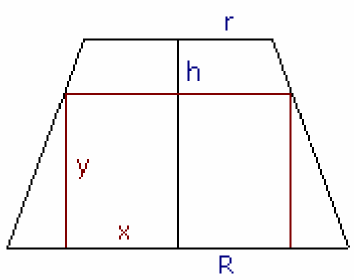
$f''(a/2) = -8a + 24a/2 = -8a + 12a = 4a > 0 \Rightarrow$ Min.

Antwort:

Die Quadrate müssen die Seitenlänge a/6 haben, damit das Volumen maximal

$V = 2a^3\,/27$

wird.



Extremwertaufgabe-Beispiel 3

Aufgabe: Einem Drehkegelstumpf (R, r, h) werden Drehzylinder eingeschrieben, deren Grundflächen konzentrisch in der Grundfläche des Drehzylinders liegen. Wie sind die Maße des Zylinders mit maximalem Volumen?

Hauptbedingung: $V = x^2 py$ … Maximum

$f(x) = x^2\pi\ (h(R-x))\ /(R-r) = \pi\ h\ /(R-r)\ x^2(R-x)$

Nebenbedingung: $(R-x) : y = (R-r) : h$

$y = (h(R-x))\ /(R-r)$

$g(x) = x^2\ (R-x) = Rx^2 - x^3$

$g'(x) = 2Rx - 3x^2$

Definitionsbereich Db = [0;R]

Wertebereich Wb = [0;h]

$Rx - 3x^2 = 0$

$x\ (2R - 3x) = 0$

$x_1 = 0,\ 2R = 3x,\ x_2 = 2/3\ R$

$g''(x) = 2R - 6x$

$g''(2/3\ R) = 2R - 4R = -2R < 0$ Þ Maximum

$\Rightarrow r \leq 2/3\ R \rightarrow x = 2/3\ R$

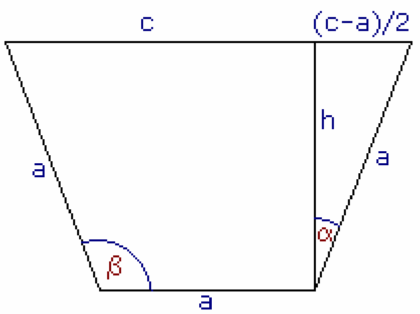
$r > 2/3\ R \rightarrow x = r,\ y = h$

$y = (h\ (R - 2/3\ R))\ /(R-r) = (h\ R/3)\ /(R-r) = R\ h\ /(3\ (R-r))$

$V = x^2\pi y = 4/9\ R^2\ \pi\ R\ h\ /(3(R-r)) = 4\ R^3\ h\ \pi\ /(27\ (R-r))$

Antwort: Der Zylinder mit $x = 2/3\ R$, $y = R\ h\ /(3\ (R-r))$ hat maximales Volumen $4\ R^3\ h\ \pi\ /(27\ (R-r))$.

Sonderfall: $r > 2/3\ R \Rightarrow x = r\ ;\ y = h$



Extremwertaufgabe-Beispiel 4

Aufgabe: Aus drei gleich breiten Brettern (Breite = a) soll eine Rinne von möglichst großem trapezförmigem Querschnitt gebildet werden. In welchem Neigungswinkel müssen die Seitenwände zur Horizontalen geneigt sein?

Hauptbedingung: $A = ((a+c)\cdot h)/2$

1.Nebenbedingung: $\cos\alpha = h/a$ … $h = a \cos a$

2.Nebenbedingung: $\sin\alpha = ((c-a)/2)/a$ … $(c-a)/2 = a \sin\alpha$

$c-a = 2a \sin\alpha$ … $c = a + 2a \sin\alpha$

$a= ((a+a+2a \sin\alpha)\cdot a \cos\alpha)/2 =$

$= ((2a + 2a \sin\alpha)\ a \cos\alpha)/2 =$

$= (2a\ (1 + \sin\alpha)\ a \cos\alpha)/2 = a^2 \cos\alpha\ (1 + \sin\alpha)$

Definitionsbereich Da = [0°;90°]

$f(\alpha) = (1 + \sin\alpha) \cos\alpha$

$f'(\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + (1 + \sin\alpha)\ (-\sin\alpha) =$

$= \cos^2\alpha - \sin\alpha\ (1 + \sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$1 - \sin^2\alpha - \sin\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$\sin^2\alpha + ½ \sin\alpha - ½ = 0$

$(\sin\alpha)_{1,2} = -1/4 \pm \sqrt{}(1/16 + 1/2) = -1/4 \pm ¾$

$(\sin\alpha)_1 = ½ \Rightarrow \alpha_1 = 30°$

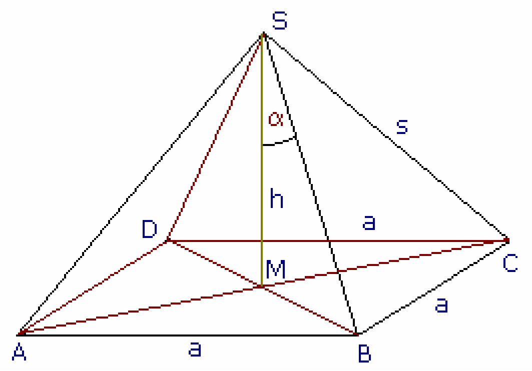
$(\sin\alpha)_2 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = 270° \notin D$

$f''(\alpha) = 2 \cos\alpha\ (-\sin\alpha) - \cos\alpha - 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$= -4 \sin\alpha \cos\alpha - \cos\alpha$

$f''(30°) = -4 \sin 30° \cos 30° - \cos 30° = -2{,}60 < 0 \Rightarrow$ Max.

$\beta = 90° + \alpha = 120°$
$h = a \cos \alpha = a/2 \sqrt{3}$
$c = a + 2a \sin \alpha = a + 2a/2 = 2a$
$A = ((a+c) \cdot h)/2 = ((a + 2a)(a\sqrt{3})/2)/2 = (3a^2 \sqrt{3})/4$
Antwort: Die Wände müssen mit 120° geneigt sein, dass die Querschnittsfläche maximal $(3a^2 \sqrt{3})/4$ ist.



Extremwertaufgabe-Beispiel 5

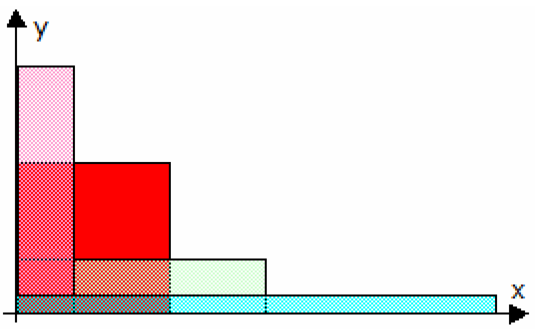
Aufgabe: Unter welchem Winkel muss die Seitenkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide erscheinen, damit das Volumen maximal wird?

Definitionsbereich $\alpha = [0; 90°]$
1.Nebenbedingung $\sin \alpha = a/2 \sqrt{2} /s$
$a = (2s \sin \alpha) /\sqrt{2} = s \sqrt{2} \sin \alpha$
2.Nebenbedingung $\cos \alpha = h/s$
Hauptbedingung $V = G\, h/3 = a^2\, h/3$ ...

Maximum
$V = (2s^2 \sin^2 \alpha\; s \cos \alpha) /3 =$
$= (2s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha) /3$
$f(\alpha) = \sin^2 \alpha \cos \alpha$
$f'(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha (- \sin \alpha)$
$= h = s \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$
$0 = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$
$0 = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha$
$0 = \sin \alpha (2 - 3 \sin^2 \alpha)$
$\sin \alpha = 0$ ... $\sin^2 \alpha = 2/3$
$\alpha_1 = 0°$; $\sin \alpha = \pm \sqrt{(2/3)}$
$\alpha_2 = 180° \notin D$; $\alpha_3 = 54{,}74°$
$\alpha_4 = 125{,}26° \notin D$; $\alpha_5 = 305{,}26° \notin D$
$\alpha_6 = 234{,}74° \notin D$

$V = 2/3\, s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 2/3\, s^3 \sin^2 54{,}74° \cos 54{,}74° = 0{,}26\, s^3$
$f''(\alpha) = 2 (\cos \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha\, 2 \cos \alpha (- \sin \alpha)) - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$
$= 2 \cos^3 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$
$= 2 \cos^3 \alpha - 7 \sin^2 \alpha \cos \alpha$
$f''(54{,}74°) = - 2{,}31 < 0 \Rightarrow$ Maximum

Antwort: Die Seitenkante muss unter 54,74° zur Höhe geneigt sein, damit das Volumen maximal $0{,}26\, s^3$ beträgt.



Extremwertaufgabe-Beispiel 6

Aufgabe: Mit einer vorhandenen Rolle Zaun (darauf sind 50 m) soll ein möglichst großes Stück Land rechteckig eingezäunt werden.

Zielgröße ist die eingezäunte Fläche. Die Fläche eines Rechtecks ist $F=x \cdot y$, dabei stehen x und y für die Seitenlängen des Rechtecks. Die Nebenbedingung ist, dass nur 50m Zaun vorhanden sind. Um ein Rechteck mit Seitenlängen x und y einzuzäunen braucht man
$2x+2y = 50$ Meter Zaun (den Umfang des Rechtecks).
Mit $x = 5$ und $y = 20$ benötigt man genau $2 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 50$m Zaun und die Fläche beträgt dann $5 \cdot 20 = 100$ m².
Stelle die Funktion der Fläche in Abhängigkeit von x auf:

$F(x) = x \cdot y = x \cdot (50 - 2x) /2$

Über die Ableitung F'(x) findet man mögliche lokale Maxima der Funktion F(x).

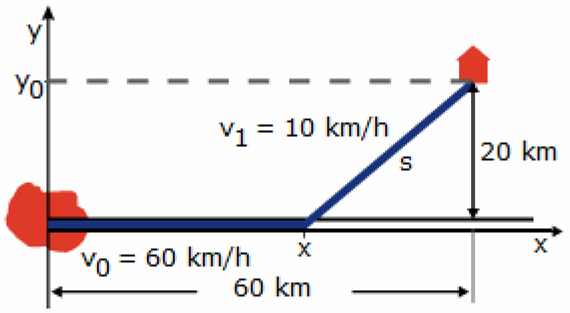
$F'(x) = 25 - 2x = 0 \rightarrow x = 12{,}5$

Wenn x = 12,5 ist, dann ist y = 12,5. Das folgt aus der Nebenbedingung.
Die Fläche des Rechtecks ist $F = 12{,}5 \cdot 12{,}5 = 156{,}25\ m^2$

Das kann nun (im allgemeinen) ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum sein. Durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle des lokalen Extremums erfährt man, ob es ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. Da

$F''(x) = -2$

für alle x negativ ist, liegt an der Nullstelle der ersten Ableitung ein lokales Maximum vor.
Im Beispiel ist der Definitionsbereich [0,25]. Denn negative x oder negative y sind nicht sinnvoll, weil x und y für Längen stehen.
Sowohl für x = 0, als auch für x = 25 ist der Wert von F(x) gleich 0, d.h. x = 12,5 ist ein absolutes Maximum im Definitionsbereich.
Bei Verwendung von 50 m Zaun, ist die maximale einzäunbare Fläche gleich 156,25 m2



Extremwertaufgabe-Beispiel 7

Kürzeste Fahrzeit: Der kürzeste Abstand eines Gebäudes von einer schnurgeraden Straße, die von der nächsten Stadt an dem Gebäude vorbeiführt, beträgt 20 km. Die Entfernung des Schnittpunktes der Senkrechten von dem Gebäude zur Straße von der Stadt beträgt 60 km.
Ein Fahrzeug der schnellen Hilfe soll in möglichst kurzer Zeit von der Stadt zu dem Haus gelangen. An welcher Stelle der Straße muss es abbiegen? Die Geschwindigkeit auf der Straße ist v_0 = 60 km/h und im Gelände v_1 = 10 km/h.

Lösung:
Skizze: Man legt die x-Achse entlang der Straße. Die Zeit, die das Fahrzeug bis um Punkt x zurücklegt, ist $t_0 = x/v_0$. Für die restliche Strecke benötigt es die Zeit $t - t_0 = s/v_1$.
Die Strecke s kann mittels des Satzes von Pythagoras errechnet werden $s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_0^2}$
Setzt man t_0 ein und stellt nach t um, so ergibt sich

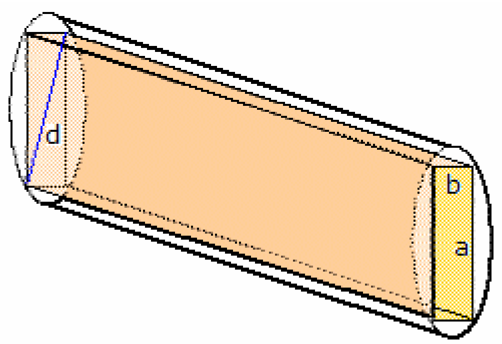
$t(x) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_0^2}/v_1 + x/v_0$

Die Variable ist x. Gesucht ist das Minimum der Funktion t(x). Diese Funktion ist im Bereich R definiert und stetig. Sie besitzt keine Nullstellen. Das Minimum erhält man durch Nullsetzen der ersten Ableitung

$dt/dx = -1/2\ \sqrt{((x_1 - x)^2 + y_0^2)}^{-1/2} /v_1 \cdot 2 \cdot (x_1 - x) + 1/v_0 = 0$

Durch Umformung folgt $x = x_1 - y_0\ v_1 / \sqrt{v_0^2 - v_1^2}$ und mit den Zahlenwerten

$x = 56{,}65$ km



Extremwertaufgabe-Beispiel 8

Balken mit maximaler Tragfähigkeit: Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkendicke. In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?

Gegeben ist Baumstamm in Form eines Zylinders mit Durchmesser d. Der rechteckigen Balken hat die Dicke a und die Breite b, mit $a^2 + b^2 = d^2$

Zielfunktion: $a^2 \cdot b$ = maximal.

Funktion t der Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Breite b:

$$t(b) = (d^2 - b^2) \cdot b$$

Die Ableitungen von t(b) lauten:

$$t'(b) = -3b^2 + d^2 \;;\; t''(b) = -6b$$

Man setzt die Ableitung gleich 0:

$$t'(b) = -3b^2 + d^2 = 0 \leftrightarrow b^2 = d^2 / 3$$

Die zweite Ableitung ist für alle in Frage kommenden positiven Breiten negativ. Das zeigt, dass an der Nullstelle der ersten Ableitung tatsächlich ein lokales Maximum vorliegt. Aus der Nebenbedingung errechnen man den dazu gehörenden Wert für a:
$a^2 = d^2 - d^2 / 3 = 2/3\, d^2$. In der Aufgabe ist für d kein konkreter Wert gegeben. Es wird nach dem Verhältnis von a und b gefragt, also nach a/b. Aus $a^2/b^2 = (2/3\, d^2) / (1/3\, d^2) = 2$ folgt, dass $a/b = \sqrt{2}$.

Ergebnis: Das optimale Verhältnis ist unabhängig vom Durchmesser. 2. Die Formel $a/b = \sqrt{2}$ sagt, dass der Balken 1,41 mal so dick wie breit sein soll. Die Dicke ist damit größer als die Breite. Man muss sich den Balken mit der
schmalen Seite als Breite vorstellen.

Extremwertaufgabe-Beispiel 9

Ein Körper mit nicht spiegelnder Oberfläche (schwarzer Körper) sendet bei der absoluten Temperatur T Strahlen aus. Für die spektrale Strahlungsdichte $E(\lambda)$ gilt nach dem Planckschen Strahlungsgesetz im Raumwinkel $1/\Omega_0$

$$E(\lambda) = c_1 / (\lambda^5 (e^{c}2^{/(T\lambda)} - 1)) \quad 1/\Omega_0$$

mit $c_1 = 2hc^2 = 1{,}191 \cdot 10^{-16}$ Wm, $c_2 = h\, c/k = 1{,}439 \cdot 10^{-2}$ mK (c ist die Lichtgeschwindigkeit, k die Boltzmann-Konstante, h das Plancksche Wirkungsquantum).

Für das Maximum bestimmt man, bei welcher die Strahlungsdichte $E(\lambda)$ bei festem T ein Maximum besitzt. Durch logarithmische Differenziation des Strahlungsgesetzes folgt

$$\ln E(\lambda) = \ln c_1 - 5 \ln \lambda - \ln (e^{c}2^{/(T\lambda)} - 1) - \ln \Omega_0$$

$$E'(\lambda)/E(\lambda) = -5/\lambda - e^{c}2^{/(T\lambda)}/(e^{c}2^{/(T\lambda)} - 1))\, (-c_2 / (T\lambda^2))$$

Setzt man $z = c^2/(T\lambda)$ gilt für das Extremum von $E(\lambda)$

$$E'(\lambda) = 0$$

$$z\, e^z / (e^z - 1) = 5$$

Dami gilt für z die nichtlineare Gleichung

$$1 - z/5 = e^{-z}$$

Durch numerisches Lösen dieser Gleichung erhält man

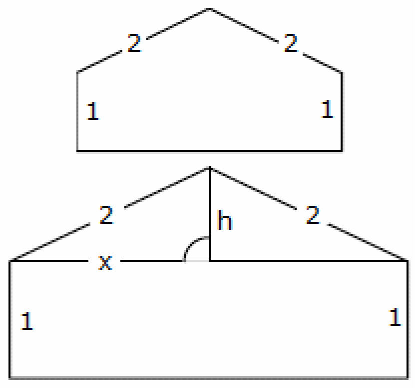
$$z \approx 4{,}965$$

also ist $\lambda_{max}\, T = c_2 / 4{,}965 = 2898$ µmK

Das Ergebnis ist das Wiensche Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const}$$

Für steigende Temperaturen verschiebt sich das Maximum der Strahlung zu kleineren Wellenlängen hin. Die Strahlung eines Körpers wird sichtbar, wenn die Temperatur etwa 600°C erreicht (Rotglut). Mit steigender Temperatur verschiebt sich die Glühfarbe von 850°C hellrot, 1000°C gelb, hin zu weiß bei 1300°C.



Extremwertaufgabe-Beispiel 10

Aufgabe:
Einem Rechteck wird ein gleichschenkliges Dreieck aufgesetzt. Wie breit muss das Rechteck sein, damit der

Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird?

Lösung:
Zur Vermeidung von Brüchen bezeichnen wir die halbe Grundlinie mit x. Dann ist

$h = \sqrt{(4 - x^2)}$

Die Fläche berechnet sich aus Rechteck und Dreieck

$A = 2x \cdot 1 + 1/2 \cdot 2x \cdot h = 2x + x \cdot \sqrt{(4 - x^2)}$

Die Ableitung; unter Verwendung von Produkt und Kettenregel; wird Null gesetzt

$A' = 2 + 1 \cdot \sqrt{(4 - x^2)} + x \cdot 1/(2\sqrt{(4 - x^2)}) \cdot (-2x) =$

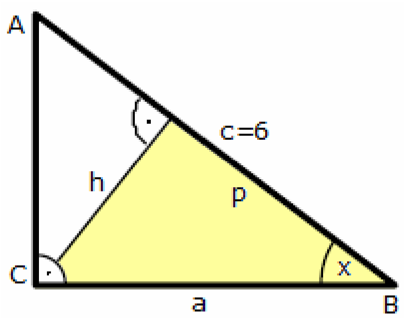
$= 2 + \sqrt{(4 - x^2)} - x^2/\sqrt{(4 - x^2)} = 0$

Diese Gleichung wird mit dem Nenner $\sqrt{(4 - x^2)}$ multipliziert

$2\sqrt{(4 - x^2)} + (4 - x^2) - x^2 = 0$

$0 = x^4 - 3x^2 = x^2 (x^2 - 3)$

Die einzige brauchbare Lösung dieser Gleichung ist $x = \sqrt{3}$. Die Breite des Rechtecks ist $2\sqrt{3}$.



Extremwertaufgabe-Beispiel 11

Aufgabe:
Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei die Hypotenuse c = 6 cm.
a) Zeigen Sie, dass der Inhalt der gelben Dreiecksfläche $A = 18 \sin x \cos^3 x$ ist!
b) Für welchen Wert von x ist der Inhalt von A maximal?
(Gymnasium Rämibühl, 1988)

Lösung:
Im Dreieck ABC lässt sich aus x und c die Kathete a = BC berechnen:

$\cos x = a/6 \Rightarrow a = 6 \cos x$

Für das gelben Dreieck wird

$\sin x = h/a \Rightarrow h = 6 \cos x \sin x$

$\cos x = p/a \Rightarrow p = 6 \cos^2 x$

Damit gilt für die Fläche des gelben Dreiecks

$A = 1/2\, p\, h = 18 \cos^3 x \sin x$

Die Fläche wird maximal, wenn die Ableitung von A Null wird

$(A/18)' = 0 = -3 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x$

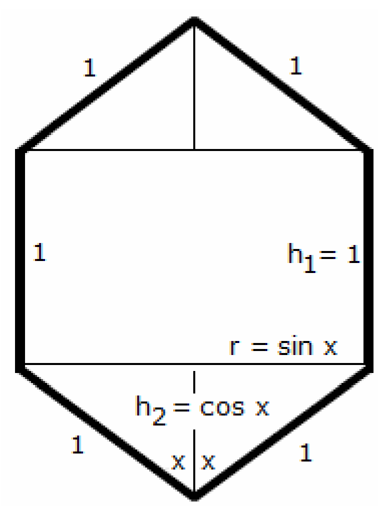
$= \cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$

da $\cos x \neq 0$ wird

$\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$ mit

$\tan x = 1/\sqrt{3} \Rightarrow x = 30°$

Alle anderen Lösungen sind hier nicht brauchbar.



Extremwertaufgabe-Beispiel 12

Aufgabe:
Einem Kreiszylinder werden auf beiden Seiten gleiche Kreiskegel mit gleichem Grundkreis angesetzt. Der Achsenschnitt des ganzen Körpers ist ein gleichseitiges Sechseck mit der Seitenlänge 1. Der halbe Öffnungswinkel der Kegel sei x.
Berechnen Sie das Volumen des Körpers in Abhängigkeit von x. Für welchen Winkel x wird dieses Volumen maximal?

Lösung:

$V = \pi r^2 h_1 + 2/3\, \pi r^2 h_2 = \pi/3 \sin^2 x (3 + 2 \cos x)$

Der Winkel x liegt zwischen 0° und 90°. Für den Extremalwert muss die Funktion abgeleitet und gleich 0 gesetzt werden:

$$V' = \pi/3\ (2 \sin x \cos x\ (3 + 2 \cos x) + \sin^2 x\ (-2 \sin x))$$
$$= \pi/3 \sin x\ (6 \cos x + 4 \cos^2 x - 2 \sin^2 x) = 0$$

Da sin x sicher nicht 0 ist, kann die Gleichung vereinfacht werden

$$0 = 3 \cos x + 2 \cos^2 x - \sin^2 x = 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1$$

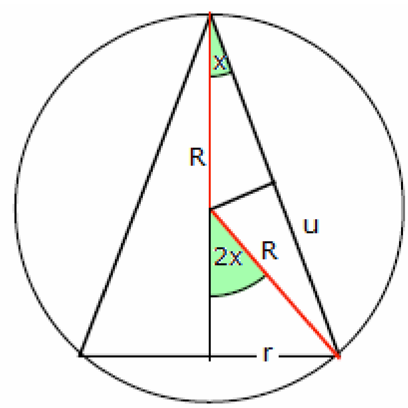
Diese quadratische Gleichung hat eine brauchbare Lösung

$$\cos x \approx 0{,}263 \Rightarrow x = 74{,}7°$$

Für diesen Winkel wird

$$r = 0{,}96,\ h_2 = 0{,}26,\ V_{max} = 1{,}09\ \pi$$

Der Randwert mit $x = 90°$ und Kegeln der Höhe 0 ist etwas kleiner: $V = \pi$



Extremwertaufgabe-Beispiel 13

Aufgabe:
Einer Kugel mit dem Radius R wird ein Kegel einbeschrieben. Für welchen Öffnungswinkel ist seine Oberfläche maximal?

Lösung:
Für die Lösung der Aufgabe ist es einfacher, den halben Winkel mit x zu bezeichnen. Damit lassen sich die halbe Seitenlinie u und der Radius r berechnen.

$$\cos x = u/R \quad \text{und} \quad \sin 2x = r/R$$

Für die Kegeloberfläche gilt: $A = 2\pi r(r + s)$

$$A = \pi r(r + s) = \pi\ R \sin 2x\ (R \sin 2x + 2R \cos 2x) = \pi\ R^2 \sin 2x \cdot(\sin 2x + 2 \cos x)$$
$$A' = \pi\ R^2\ (2 \cos 2x\cdot(\sin 2x + 2 \cos x) + (2 \cos 2x - 2 \sin x)\cdot\sin 2x) = 0$$

Nach Division durch $\pi\ R^2$ wird ausmultipliziert und vereinfacht

$$2 \sin 2x \cos 2x + 4 \cos 2x \cos x + 2 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin x = 0$$
$$4 \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin x + 4 \cos 2x \cos x = 0$$

Anwendung der Doppelwinkelformeln ergibt

$$8 \sin x \cos x - 16 \sin^3 x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x + 4 \cos x - 8 \sin^2 x \cos x = 0$$

$\cos x = 0$ gibt keine brauchbare Lösung ist

$$2 \sin x - 4 \sin^3 x - \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x = 0$$

Es wird eine kubische Gleichung für sin x und mit $u = \sin x$

$$4 u^3 + 3 u^2 - 2u - 1 = 0$$

Man sieht, dass $u = -1$ eine Lösung ist und erhält mit Polynomdivision

$$4 u^3 + 3 u^2 - 2u - 1 = (u + 1)\ (4 u^2 - u + 1) = 0$$

Die zwei weiteren Lösungen sind

$$u_{1,2} = (1 \pm \sqrt{17}) / 8$$

von denen nur $u = (1 + \sqrt{17})/8$ als Lösung brauchbar ist.
Damit wird $x \approx 39{,}8°$

Extremwertaufgabe-Beispiel 14

Aufgabe:
Gegeben ist $f(x) = -x^2 + 4$. Der Funktionsgraph schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Beschreibe dieser Fläche ein rechtwinkliges Dreieck so ein, dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt und die andere Ecke auf dem oberen Parabelbogen liegt. Bei Drehung um die x-Achse soll ein Kegel von möglichst großem Volumen entstehen.

Lösung:
Extremalbedingung $V(r,h) = \pi/3\ r^2\ h$; Volumen eines Kegels
Nebenbedingung: $h = -x^2 + 4$, $r = x$
Durch das Einsetzen der Nebenbedingung in die Ausgangsgleichung ergibt sich die Zielfunktion $V(x) = \pi/3\ (x^2\ (-x^2 + 4))$

Die Zielfunktion wird auf Extremstellen untersucht.

$$V'(x) = \pi/3\ (-4x^3 + 8x) = 0$$

$x = \pm\sqrt{2}$

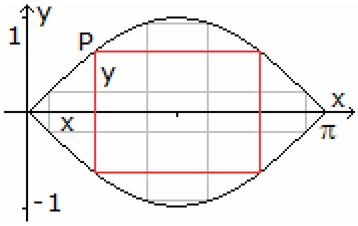
Setzt man in die zweite Ableitung

$V''(x) = \pi/3\ (-12x^2 + 8)$

ein, so wird

$V''(\pm\sqrt{2}) = -16/3\ \pi < 0$

Beide Werte liefen ein Maximum. Damit nimmt der gesuchte Kegel für $r = \sqrt{2}$ und $h = 2$ maximales Volumen an. Es beträgt: V = 4,18.



Extremwertaufgabe-Beispiel 15, Rechteck unter Sinusfunktion

Aufgabe:
Die Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\sin(x)$ bilden im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ eine linsenförmige Fläche.
In diese Linse soll ein Rechteck eingefügt werden, so dass die Eckpunkte auf den Sinuskurven liegen und der Flächeninhalt maximal wird.

Lösung:
Ansatz $A = (\pi - 2x)\ 2y$
Mit $y = \sin(x)$ wird $A(x) = 2\pi \sin x - 4x \sin x$.
Die erste Ableitung wird

$A'(x) = 2\pi \cos x - 4 \sin x - 4x \cos x$

Setzt man $A'(x) = 0$ ergibt sich die Gleichung

$\pi \cos x - 2 \sin x - 2x \cos x = 0.$

Diese Gleichung ist transzendent, d.h. eine Lösung ist nur näherungsweise möglich. U.a. können dazu benutzt werden die Teilprogramme

»Iterative Lösung einer Gleichung

Zum Beispiel ermittelt man numerisch als Nullstelle der entsprechenden Funktion die Lösungen

$x_1 = 0{,}710463\ldots$

$x_2 = 2{,}431131\ldots$

Die Differenz beider Nullstellen ergibt eine Seitenlänge des Rechtecks mit

a = 1,72 und b = 1,30

Der Flächeninhalt beträgt näherungsweise A = 2,24438.

Extremwertaufgabe-Beispiel 16

Aufgabe (Schweizer Vorprüfung 1999):
Gegeben ist die Funktion

$f(x) = e^{-x^2}$.

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Extremal- und Wendepunkte mit Steigung - überall exakte Werte).
b) Ein Rechteck hat seine Ecken auf der x-Achse und auf dem Graphen von f(x). Zeigen Sie, dass zwei dieser Ecken in den Wendepunkten des Graphen von f(x) liegen, wenn das Rechteck maximale Fläche hat.

Lösung:
a) $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2}\ (1-2x^2)$

Nullstelle keine
Verhalten im Unendlichen … die x-Achse ist Asymptote
Maximum (0 ; 1)
Wendepunkte $W_{1,2}\ (\pm 1/\sqrt{2}\ ;\ 1/\sqrt{e})$ mit Anstieg $-(\pm\sqrt{(2/e)})$

b) Zielfunktion $A = 2x\ e^{-x^2}$

$A' = 2e^{-x^2}\ (1-2x^2) = 0$

mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$, d.h. gerade die ermittelten Wendepunkte.

Extremwertaufgabe-Beispiel 17

Aufgabe:
Aus einem 36 cm langen Draht soll das Kantenmodell einer quadratischen Säule hergestellt werden. Wie lang sind die Kanten zu wählen, damit die Säule maximales Volumen hat?

Lösung:
Extremalbedingung $V_{max} = a^2 b$
Mit einer Nebenbedingung lässt sich die Funktion so umstellen, dass sie nur noch von einer Variablen abhängt.
Nebenbedingung $8a + 4b = 36 \ldots b = 9 - 2a$
Zielfunktion $V(a) = a^2 (9-2a) = - 2a^3 + 9a^2; a \in [0; 4,5]$

Suche nach Extremstellen

$V'(a) = -6a^2 + 18a$

$V'(a) = 0 = 6a(-a + 3)$

Es existieren zwei potentielle Lösungen. Der gesuchte Extremwert könnte bei $a = 3$ bzw. $a = 0$ sein. Mittels zweiter Ableitung wird auf Extremeigenschaft getestet.

$V''(a) = -12a + 18$

$V''(3) = -18 < 0$, d.h Maximum liegt vor.

Untersuchung auf Randstellen
Die Zielfunktion ist im Intervall (0; 4,5) überall differenzierbar.
Für $x = 0$ wird $V(0) = 0$, d.h. es liegt kein Randextremum vor, analog für $x = 4,5 \ldots$ $V(4,5) < 0$.

Wird $a = 3$ in die Nebenbedingung eingesetzt, ergibt sich $b = 3$, d.h. der gesuchte Körper ist der Würfel.

Extremwertaufgabe-Beispiel 18

Aufgabe:
Eine 400m lange Laufbahn besteht aus zwei parallelen Strecken l und zwei angesetzten Halbkreisbögen r. Wie groß müssen l und r gewählt werden, damit die Rechtecksfläche (ohne die beiden Halbkreisbögen) möglichst groß wird?

Lösung:
Extremalbedingung $F_{max} = 2\, r\, l$
Mit einer Nebenbedingung lässt sich die Funktion so umstellen, dass sie nur noch von einer Variablen abhängt.
Nebenbedingung $2l + 2\pi r = 400 \ldots l = 200 - \pi r$
Zielfunktion $F(r) = 400\, r - 2r^2 \pi$; $r \in [0; 400/(2\pi)]$

Suche nach Extremstellen

$F'(r) = 400 - 4\pi r$

$F'(r) = 0 = 400 - 4\pi r$

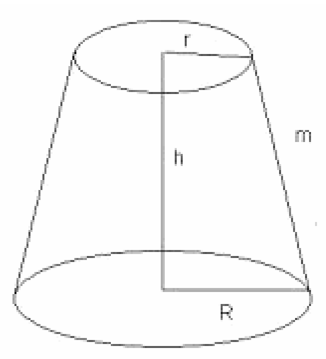
Es existiert eine Lösung. Der gesuchte Extremwert könnte bei $r = 31,85$ m liegen. Mittels zweiter Ableitung wird auf Extremeigenschaft getestet.

$V''(a) = -4\pi$

$V''(31,85) = -4\pi < 0$, d.h Maximum liegt vor.

Die Untersuchung der Randstellen ergibt jeweils ein Rechteck der Fläche 0.

Wird $r = 31,85$ m in die Nebenbedingung eingesetzt, ergibt sich $l = 100$ m. Die gesuchte Rechteckfläche ist 6370 m².

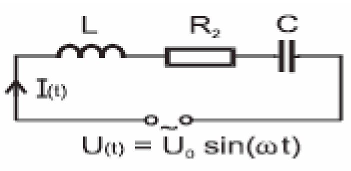


Extremwertaufgabe-Beispiel 19

Aufgabe:
Aus einem Kegelstumpf soll eine Verpackung konstruiert werden, die bei einem Volumen von 1 Liter möglichst wenig Verpackungsmaterial benötigt. Außerdem sei der Grundradius R gleich 2r, wobei r der Deckradius ist.

Lösung:
Volumen $1 = 7/3\ \pi\ h\ r^2$
Höhe h $h = 3/(7\ \pi\ r^2)$
Für die Oberfläche O wird dann
$O = \pi r^2 + 4\pi\ r^2 + 3\pi\ r\ \sqrt{(r^2 + 9/(49\pi^2\ r^4))}$
1.Ableitung $O' = 10\pi\ r + 3/2\ \pi\ (4r^3 - 18/(49\pi^2\ r^3))\ /\ \sqrt{(r^4 + 9/(49\pi^2\ r^2))}$
Die Nullstellen dieser Funktion sind nicht analytisch bestimmbar. Es muss aber eine Nullstelle größer 0 geben, da für 0 und Unendlich die Funktion O gegen unendlich strebt. Für die Anwendung des Newton-Verfahrens wird zusätzlich die zweite, noch komplexere, Ableitung benötigt.

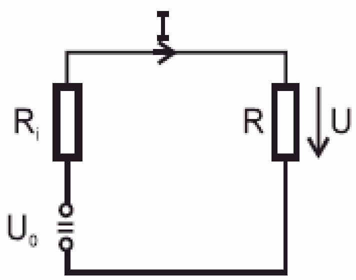
Das Näherungsverfahren ergibt als Lösung
$r = 0{,}3258$



Extremwertaufgabe-Beispiel 20

In einem RCL-Wechselstromkreis fließt beim Anlegen einer Wechselspannung
$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$
ein Wechselstrom
$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$
mit frequenzabhängiger Amplitude
$I_0(\omega) = U_0\ /\ \sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/(\omega C)^2)}$
Bei welcher Frequenz ω besitzt I_0 seinen größten Wert?

$I_0(\omega)$ ist maximal, wenn $\sqrt{(R^2 + (\omega L - 1/(\omega C)^2)}$ minimal, bzw. wenn die Funktion f minimal wird:
$f(\omega) = R^2 + (\omega L - 1/(\omega C)^2$
$f'(\omega) = 2(\omega L - 1/(\omega C)(L + 1/(\omega^2 C)) = 0$
$\omega_0 = 1\ /\ \sqrt{(LC)}$
$f''(\omega) = 2(L + 1/(\omega^2 C)^2 - 4/(\omega^3 C)(\omega L + 1/(\omega C))$
$f''(1\ /\ \sqrt{(LC)}) = 8L^2 > 0$
f nimmt in $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$ sein Minimum an, und $I_0(\omega)$ hat den Maximalwert $I_0(\omega_0) = U_0/R$.
Das relative Maximum ist auch absolutes Maximum.
I_0 hat sein Maximum bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$.
Der Scheinwiderstand ist dann gleich dem Ohmschen Widerstand R.



Extremwertaufgabe-Beispiel 21

An einer Gleichstromquelle U_0 mit dem Innenwiderstand R_i ist ein Außenwiderstand R (Lastwiderstand) angeschlossen. Wie groß muss der äußere Widerstand sein, damit die Nutzleistung maximal wird?
Lösung:
Leistung am Widerstand R: $P = U \cdot I = R \cdot I^2$
Maschensatz (Nebenbedingung): $U_0 = U_i + U = R_i I + RI = (R_i + R) I$
$I = U_0\ /\ (R_i + R)$
Damit wird für die Nutzleistung als Funktion von R:
$P(R) = R\ (U_0\ /\ (R_i + R)^2 = U_0^2\ R\ /\ (R_i + R)^2$ ... Nutzleistung am Widerstand

Für das Extremum gilt

$$P'(R) = U_0^2 (R_i - R)/(R_i + R)^3 = 0$$

und damit $R = R_i$

Für die zweite Ableitung von P(R) wird

$$P''(R) = U_0^2 (-(R_i+R)^3 -3(R_i-R)) / (R_i+R)^4$$

$$P''(R_i) = -1/8\ U_0^2/R_i^3 < 0$$

Für $R = R_i$ liegt ein relatives Extremum vor, das auch absolutes Maximum ist.
Die Nutzleistung wird maximal, wenn der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand gewählt wird. Die maximale Nutzleistung bei diesem äußeren Widerstand beträgt

$$P_{max} = 1/4\ U_0^2/R_i$$

Die Rechnung bestätig die Spannungsteilerregel: Wenn der Innenwiderstand R_i gleich dem äußeren Widerstand R_a (=Lastwiderstand) gewählt wird, dann ist der Spannungsabfall bei R_i gleich dem Spannungsabfall bei R_a, nämlich $U_0/2$.

Wie hoch dürfen Stöckelschuhe (High-Heels) sein?

Wie hoch dürfen Stöckelschuhe höchstens sein, ohne dass die Stöckelschuhträgerin ins Straucheln gerät? Der britische Physiker Paul Stevenson von der University Of Surrey in Guildford (Südostengland) glaubt, die Antwort darauf gefunden zu haben:

$$h \le (v \cdot (j+9) \cdot p \cdot (12+3/8\ s)) / ((m+1) \cdot (A+1) \cdot (j+10) \cdot (20+p))$$

Einheiten werden in dieser Formel nicht berücksichtigt.
Dabei steht v für den Sex-Appeal-Wert des Schuhwerks auf einer Skala von 0 bis 1, j gibt die Anzahl der Jahre mit Stöckelschuh-Erfahrung an, p den Kaufpreis in britischen Pfund (ab 80 £ aufwärts), m die Anzahl der Monate, seit denen das Schuhmodell in Mode ist und s die Schuhgröße, gemessen in britischer Damengröße; üblicherweise zwischen 4 und 8. Besonders wichtig ist der Parameter A, der angibt, wie viele alkoholische Drinks die Dame am Abend wohl zu sich nehmen wird. Schließlich ist h ist die maximale Absatzhöhe in Zentimetern, die die hochhackige Lady gerade noch beherrschen kann.

a) Untersuchen Sie, in welchem Bereich sich die zulässige Absatzhöhe für eine junge Frau von 25 Jahren mit 8 Jahren Stöckelschuh-Erfahrung und Schuhgröße 7 (Schuhgröße 41) in nüchternem Zustand bewegt, wenn die Schuhe 200 britische Pfund gekostet haben!
Lösung: $0\text{ cm} \le h \le 12{,}6\text{ cm}$

b) Eine Filmschauspielerin (34 Jahre; Schuhgröße 6½; 17 Jahre Stöckelschuh-Erfahrung) erscheint nüchtern auf einer Party mit 13 cm hohen todschicken Stöckelschuhen im neuesten Trend.
Wie viel Pfund hat sie mindestens für diese Schuhe ausgegeben? Welche Absatzhöhe dürften diese Schuhe höchstens haben, wenn die Schauspielerin am späten Abend nach fünf Drinks die Party noch auf sicheren Beinen verlassen möchte?
Lösung: Preis ≥ 288 £ ; Da die Schauspielerin mindestens 288 £ ausgegeben hat, könnte sie auf jeden Fall 2,17 cm hohe Absätze tragen, maximal 2,32 cm hohe Absätze.

c) Welche maximale Absatzhöhe ist nach dieser Formel möglich?
Lösung: bei Größe 8 (D: 42) 15,0 cm bzw. bei Größe 9 (D: 43) 15,375 cm oder gar Größe 10 (D: 44) 15,75 cm.